



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

João Artur Cordeiro Duarte

**Da Teoria de Gauge Métrica-Afim da Gravitação
ao Teleparalelismo Generalizado: equações de
campo e a energia gravitacional**

João Pessoa - PB

2026



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

João Artur Cordeiro Duarte

**Da Teoria de Gauge Métrica-Afim da Gravitação ao
Teleparalelismo Generalizado: equações de campo e a
energia gravitacional**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física na área de concentração de Gravitação e Cosmologia

Orientador: Jansen Brasileiro Formiga

João Pessoa - PB

2026

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

D812d Duarte, João Artur Cordeiro.

Da teoria de gauge métrica-afim da gravitação ao teleparalelismo generalizado : equações de campo e a energia gravitacional / João Artur Cordeiro Duarte. - João Pessoa, 2026.
140 f. : il.

Orientação: Jansen Brasileiro Formiga.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Gravitação. 2. Teleparalelismo generalizado. 3. Energia gravitacional. 4. Referencial teleparalelo. 5. Ondas gravitacionais. I. Formiga, Jansen Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC

CDU 531.5(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **João Artur Cordeiro Duarte**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e três dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e seis, às 16h00, na sala 201 do Departamento de Física, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **João Artur Cordeiro Duarte**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Jansen Brasileiro Formiga (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Augusto Romero Filho (PPGF/UFPB) e Allan George de Carvalho Freitas (PPGMat/UFPB). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jansen Brasileiro Formiga comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada "*Da Teoria de Gauge Métrica-Afim da Gravitação ao Teleparalelismo Generalizado: equações de campo e a energia gravitacional*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **23 de fevereiro de 2026**.


Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
Orientador - PPGF/UFPB


Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB


Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas
PPGMat/UFPB

À memória de minha mãe e minha avó

Delly Santos (1982-2012) e Maria das Montanhas (Leca) (1959-2025),

e à minha avó

Solange,

que foram e continuarão a ser os grandes pilares da minha vida, como pessoa e físico, e a quinta força fundamental da minha natureza, que impulsiona minha mania de sempre persistir.

Aos meus irmãos

Andrey e Ana Letícia,

que são a chama primordial dos meus sonhos.

Agradecimentos

Ao longo da vida, muitas pessoas cruzam nosso caminho. Algumas permanecem, outras se vão. Tive a sorte de que muitas delas deixaram marcas profundas e positivas em minha vida. A todas, meu muito obrigado por, direta ou indiretamente, terem contribuído para a minha formação como físico.

Em particular, quero deixar aqui registrada minha eterna gratidão à Vó Leca. Quando se trata dela, tenho gratidão por absolutamente tudo. Agradeço também aos meus irmãos, meus grandes companheiros de vida.

À minha companheira Anna Luíza, por todo carinho e cumplicidade.

Ao meu amigo Luan, meu muito obrigado. Desde a graduação, seguimos tentando sobreviver aos sistemas caóticos que a vida e a física impõem ao longo da jornada. Agradeço também aos amigos do PPGF: Felipe, Gislaine, Lameque e Ranielison.

Aos professores Carlos Romero, Fábio Dahia e Jorge Gabriel, deixo aqui minha gratidão por toda a contribuição que deram à minha formação como físico.

Em especial, agradeço ao Professor Jansen, um grande exemplo de pessoa e profissional, por todo o conhecimento compartilhado e pelas orientações ao longo desses anos. Não há dúvidas de sua importância fundamental na minha carreira como físico.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

*“Já passei por tantas prova
‘Inda’ tem prova a enfrentar
Vou cantando minhas trova
Que ajuntei no caminhar
Lá no céu vejo a lua nova
Compania do estradar”*

Cantiga do Estradar, Elomar.

Resumo

Nesta dissertação, propõe-se uma generalização do teleparalelismo equivalente à relatividade geral a partir da teoria de gauge métrica-afim da gravitação (MAG). Além disso, realiza-se uma análise sobre a relação do referencial teleparalelo com as propriedades da conexão afim, e um estudo sobre o problema da energia gravitacional. Por meio da aplicação do formalismo variacional da MAG, constrói-se um modelo geométrico que possui os graus de liberdade associados à torção e à não metricidade, e verifica-se que ele reproduz as equações de Einstein. A análise sobre o referencial teleparalelo mostra que teorias teleparalelas sem não metricidade têm como referencial teleparalelo bases com produto escalar constante, enquanto as teorias sem torção usam bases coordenadas. No que se refere ao problema da energia gravitacional, desenvolvem-se as definições do 4-momento e dos tensores de energia e momento do campo gravitacional e do espaço-tempo. A aplicação do formalismo ao caso de ondas gravitacionais de frente plana (pp-waves) fornece resultados consistentes com aqueles encontrados na literatura. Esses resultados indicam que o teleparalelismo generalizado é adequado para a análise da energia do campo gravitacional, além de possibilitar uma maior flexibilidade na escolha do referencial teleparalelo.

Palavras-chave: teleparalelismo generalizado; energia gravitacional; referencial teleparalelo; ondas gravitacionais.

Abstract

This dissertation proposes a generalization of the teleparallel equivalent of general relativity based on the metric-affine gauge theory of gravitation (MAG). Furthermore, the relation between the teleparallel frame and the affine connection is analyzed, and a study of the gravitational energy problem is carried out. By applying the variational formalism of MAG, a geometric model is constructed that has degrees of freedom associated with torsion and nonmetricity, and it is shown that it reproduces Einstein's equations. The analysis of the teleparallel frame shows that teleparallel theories without nonmetricity have bases with a constant scalar product as their teleparallel frame, while theories without torsion use coordinate bases. With regard to the gravitational energy problem, definitions of the 4-momentum and of the energy-momentum tensors of the gravitational field and spacetime are developed. The application of the formalism to the case of plane-fronted gravitational waves (pp-waves) provides results consistent with those found in the literature. These results indicate that generalized teleparallelism is suitable for the analysis of gravitational field energy and allows greater flexibility in choosing the teleparallel frame.

Keywords: generalized teleparallelism; gravitational energy; teleparallel frame; gravitational waves.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação esquemática de dois domínios de coordenadas U_i, U_j sobre uma variedade $\mathcal{M}$ e a aplicação de transição ψ_{ij} . Fonte: gerado pelo Autor.	19
Figura 2 – Uma função sobre a variedade e sua representação coordenada. Fonte: gerado pelo Autor.	20
Figura 3 – Uma curva sobre a variedade e sua representação coordenada. Fonte: gerado pelo Autor.	21
Figura 4 – Representação do transporte paralelo de um dado vetor. Fonte: gerado pelo Autor.	46
Figura 5 – Representação do efeito da curvatura na geometria. Adaptado de (BAMBI, 2018).	52
Figura 6 – Efeito da torção na geometria implica o não fechamento do paralelogramo. Fonte: gerado pelo Autor.	54
Figura 7 – Efeito da não metricidade na geometria. Fonte: gerado pelo Autor.	55
Figura 8 – Diagrama das geometrias associadas ao formalismo métrico-afim, mostrando os casos particulares obtidos pela anulação dos tensores de curvatura R^a_{bcd} , torção T^a_{bc} e não metricidade Q_{abc} . Fonte: gerado pelo Autor.	57

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA GEOMETRIA MÉTRICA-AFIM	16
2.1	Preliminares Matemáticas	17
2.1.1	Variedades	17
2.1.2	Vetores e espaços vetoriais	20
2.1.3	1-formas e espaço dual	25
2.1.4	Tensores	27
2.1.5	Formas diferenciais	32
2.2	O Tensor Métrico e as Tétradas	36
2.2.1	A métrica	36
2.2.2	Tétradas	40
2.2.3	Elemento de volume invariante e operação dual de Hodge	42
2.3	Conexão Afim	45
2.3.1	Conexão afim e derivada covariante	45
2.3.2	Derivada covariante sobre vetores, 1-formas e tensores e transporte paralelo	48
2.4	Decomposição Geral da Conexão Afim	50
2.4.1	Curvatura e torção	50
2.4.2	Não metricidade	54
2.4.3	Decomposição da conexão afim	55
2.4.4	Decomposição do tensor de curvatura	58
2.4.5	Curvas autoparalelas e geodésicas	59
2.4.6	Objetos geométricos na linguagem de formas diferenciais	60
3	TEORIA DE GAUGE MÉTRICA-AFIM DA GRAVITAÇÃO	62
3.1	Introdução à MAG	63
3.2	Uma revisão sobre o princípio variacional	65
3.2.1	Princípio variacional para partículas	65
3.2.2	Princípio variacional para campos	67
3.2.3	Princípio variacional no formalismo de formas diferenciais	68
3.3	Equações de campo da MAG e a imposição de teleparalelismo	69
4	RELATIVIDADE GERAL E OS PROBLEMAS DA ENERGIA GRAVITACIONAL	72
4.1	Princípios da relatividade geral	72

4.1.1	Princípio da covariância geral	73
4.1.2	Princípio da equivalência	74
4.2	Equações de campo da relatividade geral	74
4.3	O problema da energia gravitacional e da lei de conservação	80
5	GRAVITAÇÃO TELEPARALELA	84
5.1	Teleparallelismo equivalente à relatividade geral	85
5.1.1	Características da geometria do TERG	85
5.1.2	Equações de campo do TERG	87
5.1.3	Equação de conservação e o 4-momento	88
5.2	Teleparallelismo Simétrico Equivalente à Relatividade Geral	89
5.2.1	Características da geometria do TSERG	89
5.2.2	Equações de campo do TSERG	90
6	TELEPARALELISMO GENERALIZADO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL E A ENERGIA DO CAMPO GRAVITACIONAL	92
6.1	Motivações	92
6.2	Equações de campo do TGERG	93
6.2.1	Momentos conjugados, hipermomento e correntes gravitacionais	95
6.2.2	Equação do coframe	97
6.2.3	Equação da métrica	98
6.2.4	Equação da conexão	99
6.3	Referencial teleparalelo	100
6.3.1	Referencial Teleparalelo	100
6.3.2	Teleparallelismo com torção	101
6.3.3	Teleparallelismo com não metricidade	101
6.3.4	4-momento do campo gravitacional	102
6.4	A energia de espaços-tempos de ondas de frente plana (pp-waves) .	103
6.4.1	Espaços-tempos de ondas de frente plana (pp-waves)	103
6.4.1.1	Preliminares para os cálculos	104
6.4.2	4-momento do espaço-tempo de ondas de frente plana	106
6.4.2.1	Não metricidade	106
6.4.2.2	Momento gravitacional conjugado	107
6.4.2.3	4-momento	107
6.4.3	Tensor de energia e momento do campo gravitacional	108
6.4.4	Tensor de energia e momento do espaço-tempo	109
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	110

	REFERÊNCIAS	112
	APÊNDICES	118
	APÊNDICE A – MOMENTOS CONJUGADOS GRAVITACIONAIS	119
A.1	Momento conjugado à torção	119
A.2	Momento conjugado à não metricidade	120
	APÊNDICE B – CÁLCULO DA 3-FORMA DE ENERGIA E MO- MENTO CANÔNICA E DA 4-FORMA DE ENER- GIA E MOMENTO MÉTRICA	123
B.1	3-forma de energia e momento canônica	123
B.2	4-forma de energia e momento métrico	123
	APÊNDICE C – EQUAÇÕES DE CAMPO DO COFRAME E DA MÉTRICA	125
C.1	Equação do coframe	125
C.2	Equivalência da equação do coframe com a RG	125
C.3	Equação da Métrica	128
	APÊNDICE D – EQUAÇÃO DA CONEXÃO	129
D.1	Momento conjugado à curvatura	129
D.2	Hipermomento gravitacional	129
D.3	Equação da Conexão	129
	APÊNDICE E – CÁLCULO DA ENERGIA GRAVITACIONAL . . .	133
E.1	4-momento do campo gravitacional	133
E.1.1	Não metricidade	133
E.1.2	Cálculo de $S^{\lambda\mu\nu}$	134
E.1.3	Cálculo do quadrimomento	135
E.2	Cálculo do tensor de energia e momento gravitacional	137
E.3	Cálculo do tensor de energia e momento do espaço-tempo	139

1 Introdução

Como é sabido, o desenvolvimento da física possibilitou descrever a natureza por meio de quatro interações, as chamadas forças fundamentais: a nuclear forte, a eletromagnética, a nuclear fraca e a gravitacional. No que diz respeito à descrição de cada uma delas, atualmente, a física moderna consegue caracterizá-las de forma consideravelmente satisfatória e com elevado grau de precisão. No entanto, quando se trata da descrição de conceitos como energia e momento, a interação gravitacional ainda apresenta um problema em aberto, ao contrário das demais interações.

Até os dias atuais, a teoria física que melhor descreve a interação gravitacional é a Relatividade Geral (RG), formulada por Albert Einstein em 1915 (EINSTEIN, 1915). Com o advento da RG, problemas como o avanço do periélio de Mercúrio foram solucionados, além da previsão da existência de ondas gravitacionais e buracos negros, bem como de sua vasta aplicação em cosmologia e astrofísica, o que a torna uma das teorias mais bem-sucedidas da física moderna. Entretanto, a RG ainda enfrenta uma questão que permanece em aberto desde a sua origem: a localização e até mesmo a definição da energia associada a essa interação da natureza, isto é, da energia do campo gravitacional. Essa problemática está diretamente ligada ao princípio da equivalência (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), que impossibilita a definição do objeto que, segundo a teoria de campos, quantifica os conceitos de energia e momento: o chamado tensor de energia e momento do campo gravitacional. Somado a isso, a RG também não fornece uma equação que descreva de forma satisfatória uma lei de conservação e, portanto, a conservação da energia do campo gravitacional (CARMELI; LEIBOWITZ; NISSANI, 1990).

Como é bem estabelecido na literatura, os conceitos de energia e momento estão entre os mais importantes da física e estão presentes em muitas, senão em todas as áreas da física. A noção de energia está intimamente ligada à evolução de sistemas físicos, como ocorre na mecânica quântica, na qual a hamiltoniana é fundamental para a equação que descreve essa teoria, a chamada equação de Schrödinger. Uma energia bem definida também é necessária para a aplicação do procedimento padrão da termodinâmica estatística de equilíbrio (ROVELLI, 1993). Embora existam outros cenários que evidenciem a importância desses conceitos, esses exemplos são suficientes para constatar sua relevância. Nesse sentido, dado que a RG não fornece uma descrição da energia e do momento do campo gravitacional, torna-se importante o desenvolvimento de teorias alternativas que ataquem esse problema diretamente, como é o caso das teorias teleparalelas desenvolvidas por Maluf e outros (MALUF, 2013).

As teorias teleparalelas surgiram a partir dos trabalhos de Einstein, em 1928, e

consistem em um cenário geométrico no qual a curvatura é nula, conforme estabelecido por (EISENHART, 1927), sendo essa uma condição necessária e suficiente para se ter a noção de teleparalelismo, também chamado de paralelismo distante ou absoluto. As teorias teleparalelas podem ser divididas em duas subclasses: o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG) (MALUF, 2013) e o Teleparalelismo Simétrico Equivalente à Relatividade Geral (TSERG) (NESTER; YO, 1998). O TERG corresponde ao cenário em que o campo gravitacional é completamente descrito pela torção, enquanto o TSERG é descrito pela não metricidade. Nos dias atuais, as teorias teleparalelas têm despertado bastante interesse, em especial na análise do problema da energia do campo gravitacional, como se pode ver, por exemplo, nos trabalhos de (MALUF, 2013; FORMIGA; DUARTE, 2023; COSTA; FORMIGA, 2025), uma vez que, nesse tipo de teoria, o tensor de energia e momento do campo gravitacional e o 4-momento possuem propriedades interessantes que os de outras teorias não têm (FORMIGA; GONÇALVES, 2022).

Um dos grandes problemas do teleparalelismo, no que diz respeito ao cálculo da energia do campo gravitacional, é a fixação do que pode ser chamado de referencial teleparalelo (FORMIGA, 2022). Esse referencial nada mais é do que um conjunto de quatro campos vetoriais paralelos que são o análogo do referencial inercial global do espaço-tempo de Minkowski. A escolha de um referencial teleparalelo fixa a geometria e diferentes escolhas podem levar a diferentes previsões para a energia do campo gravitacional, com a possibilidade de se ter dois casos distintos: diferenças relacionadas à dependência que a energia tem do referencial, que em geral apresentam consistência nos resultados, e diferenças causadas por escolhas fisicamente inapropriadas do referencial teleparalelo, como a presença de certos tipos de rotações que levam a resultados inconsistentes (FORMIGA, 2022). Portanto, a determinação desse referencial é fundamental para a descrição da energia gravitacional em teorias teleparalelas.

Historicamente, o referencial teleparalelo era tomado como sendo uma tétrada ortonormal e só mais recentemente se tem utilizado bases coordenadas. Essa limitação deve-se à escolha da geometria, como será discutido nesta dissertação, e representa uma limitação para o estudo do problema da energia gravitacional por excluir bases que não são nem ortonormais e nem coordenadas. Embora alguns autores tenham trabalhado com versões generalizadas do teleparalelismo que permitem o uso de bases gerais (ADAK et al., 2023; GOMES; JIMÉNEZ; KOIVISTO, 2023), muito pouco tem sido feito no estudo sobre o impacto do referencial teleparalelo no cálculo da energia. Em especial, não foi possível encontrar autores que tenham generalizado a energia do TERG.

Admite-se neste trabalho que, caso haja solução para o problema da energia gravitacional no teleparalelismo, ela se dá por meio da escolha adequada do referencial teleparalelo, e que tal escolha pode ser incompatível com tétradas ortonormais ou bases coordenadas, a depender do espaço-tempo. Por essa razão, propõe-se a construção de

um teleparallelismo generalizado que é equivalente à relatividade geral, estudam-se as propriedades gerais do referencial teleparalelo, e faz-se uma aplicação ao espaço-tempo de ondas gravitacionais de frente plana (pp-waves). Para alcançar esses objetivos, foram utilizados a teoria de gauge métrica-afim da gravitação (MAG, do inglês *metric-affine gravity*) (HEHL et al., 1995) e os resultados obtidos em (COSTA; FORMIGA, 2025).

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. No Capítulo 2, são apresentados os principais conceitos matemáticos que caracterizam a geometria da MAG; além disso, todo o ferramental necessário para os cálculos da presente pesquisa é exposto. O Capítulo 3 dedica-se à MAG, no qual os diferentes tipos de princípios variacionais em contextos da gravitação são abordados, o princípio da mínima ação é analisado e a condição de teleparallelismo é alcançada. Os Capítulos 4 e 5 fornecem uma revisão sobre a Relatividade Geral e a Gravitação Teleparalela, respectivamente. No Capítulo 6, o teleparallelismo é generalizado e a natureza do referencial teleparalelo é analisada. Por fim, ainda nesse capítulo, considera-se o caso de espaços-tempos de ondas de frente plana para a análise da energia do campo gravitacional, e os resultados obtidos têm sua consistência verificada e comparada com os resultados presentes nas referências (FORMIGA; DUARTE, 2023; COSTA; FORMIGA, 2025).

2 Fundamentos Matemáticos da Geometria Métrica-Afim

No tratamento de problemas físicos por meio da mecânica newtoniana, pode ser necessário o uso da linguagem dos vetores, geralmente entendidos como objetos que possuem magnitude, direção e sentido, cuja representação geométrica é atribuída a uma seta (ou “flecha”) a partir de uma origem. Nessa abordagem clássica, os fenômenos físicos são analisados em uma estrutura espacial tridimensional que se estende no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, enquanto o tempo t é tratado apenas como um parâmetro externo e absoluto.

Com o surgimento da Teoria da Relatividade Especial (RE), proposta por Albert Einstein em 1905 (EINSTEIN, 1905), tornou-se necessário abandonar a concepção de espaço e tempo como entidades independentes. Hermann Minkowski, em 1908 (MINKOWSKI, 1909), formalizou essa mudança ao propor o conceito de espaço-tempo quadridimensional, conhecido como espaço-tempo de Minkowski, M_4 , no qual o tempo passa a ser uma dimensão adicional e não mais absoluto, bem como as dimensões espaciais também deixam de ser absolutas. Nesse sentido, os trabalhos de Einstein e Minkowski forneceram à física um novo cenário e introduziram a necessidade de descrevê-la em termos de objetos geométricos mais gerais do que os vetores no $\mathbb{R}^3$.

Posteriormente, em 1915, Einstein apresentou a versão final da RG, cuja base conceitual se fundamenta nos princípios da equivalência e da covariância geral (a versão geral do Princípio da Relatividade Especial). De acordo com o princípio da equivalência, o campo gravitacional pode ser anulado em uma região suficientemente pequena¹ de modo que o espaço-tempo da RG (um espaço-tempo pseudo-riemanniano, frequentemente denotado por V_4) se reduz localmente ao espaço de Minkowski, enquanto segundo o princípio da covariância geral as leis da física devem manter sua forma em qualquer sistema de coordenadas. Nessa teoria, a gravitação deixa de ser interpretada como uma força e passa a ser entendida como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, determinada pela distribuição de energia e momento da matéria, de acordo com as equações de campo da RG.

Essa nova estrutura teórica exigiu uma reformulação significativa da linguagem matemática utilizada na física, pois foi necessário integrar os princípios anteriormente citados de forma matematicamente rigorosa. Essa linguagem é a das variedades diferenciáveis, que generalizam as noções de curvas e superfícies para dimensões mais altas e permitem descrever localmente o espaço-tempo, sobre o qual é possível definir campos e operadores diferenciais. Para garantir a covariância das leis físicas em tais espaços, torna-se

¹ Mais adiante ficará claro formalmente o que essa “região suficientemente pequena” significa.

indispensável o uso do formalismo tensorial, que fornece uma descrição independente de sistemas de coordenadas.

Além disso, seja na RG ou em outras teorias da gravitação, a compreensão e a descrição completa da geometria do espaço-tempo exigem a introdução de outros objetos fundamentais: as tétradas; a métrica, o objeto geométrico que permite definir distâncias e ângulos; e a conexão, responsável por estabelecer de forma consistente a comparação entre vetores em pontos distintos de uma variedade, o que leva à definição dos tensores de curvatura, torção e não metricidade. Enquanto na geometria pseudo-riemanniana (base da RG), a conexão é única e determinada pela métrica (conexão de Levi-Civita), o tratamento via geometria métrica-afim surge como uma estrutura mais geral. Nela, a métrica e a conexão são tratadas como estruturas geométricas a priori independentes (o que define o espaço-tempo métrico-afim, (L_4, g)). Isso permite que a conexão tenha torção e não metricidade, além de gerar um tensor de curvatura que, em geral, difere do tensor de Riemann da conexão de Levi-Civita (HEHL et al., 1995; BLAGOJEVIC, 2002; PONOMAREV; BARVINSKI; OBUKHOV, 2017).

Dessa forma, a incorporação desses conceitos da geometria diferencial não é apenas conveniente, mas estritamente necessária para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Preliminares Matemáticas

Nesta seção, serão apresentados os conceitos básicos para a construção das teorias da gravitação, que são as variedades, os vetores, as 1-formas e os tensores, conforme as referências (NAKAHARA, 2003; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982; LEE, 2013; KOBAYASHI; NOMIZU, 1963; SCHUTZ, 1980). Ao leitor, recomenda-se o clássico livro da gravitação, o *Gravitation* (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), que também aborda esses conceitos em uma linguagem intrínseca, porém de forma consideravelmente mais ilustrativa.

2.1.1 Variedades

Em síntese, o conceito de variedade permite generalizar a noção de curvas e superfícies para estruturas de dimensões arbitrárias. Tal construção é fundamental para a extensão das aplicações do cálculo diferencial, usualmente restritas a espaços euclidianos como $\mathbb{R}^3$, a contextos mais gerais.

De modo intuitivo, uma variedade de dimensão m pode ser compreendida como uma estrutura que, localmente, se assemelha a um “pedaço” de $\mathbb{R}^m$. Como exemplo, pode-se considerar a superfície esférica S^2 . Embora S^2 e o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ apresentem diferenças globais, a análise local de pequenas regiões da esfera revela que esta se comporta, localmente, como o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Nesse caso, afirma-se que S^2 é localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^2$.

Outro exemplo relevante é o espaço-tempo V_4 , que localmente é homeomorfo ao espaço-tempo M_4 , embora existam condições adicionais para que isso ocorra, como será visto no capítulo 4. De forma mais geral, define-se uma variedade como um espaço topológico que, em vizinhanças suficientemente pequenas, é homeomorfo a $\mathbb{R}^m$.

A título de rigor, a seguir é dada a definição precisa de uma variedade (LEE, 2013).

Definição 2.1. (Variedade Topológica) *Um espaço topológico² $\mathcal{M}$ é uma variedade topológica de dimensão m se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathcal{M}$ é um espaço de Hausdorff: para quaisquer pontos distintos $p, q \in \mathcal{M}$, existem abertos disjuntos $U, V \subset \mathcal{M}$ tais que $p \in U$ e $q \in V$;
- (ii) $\mathcal{M}$ é segundo-contável: existe uma base contável para a topologia de $\mathcal{M}$;
- (iii) $\mathcal{M}$ é localmente euclidiana de dimensão m : cada ponto $p \in \mathcal{M}$ possui uma vizinhança aberta $U \subset \mathcal{M}$ homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

Mais precisamente, $\mathcal{M}$ é dotada de uma família de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$, denominada atlas, onde $\{U_i\}$ é uma família de abertos que cobre $\mathcal{M}$, ou seja, $\bigcup_i U_i = \mathcal{M}$, e para cada índice i , a aplicação $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$ é um homeomorfismo entre U_i e um aberto $U'_i \subset \mathbb{R}^m$. O par (U_i, φ_i) é denominado carta coordenada ou sistema de coordenadas³. O subconjunto U_i é a vizinhança coordenada e a aplicação φ_i é a função coordenada. O homeomorfismo φ_i é representado por m funções $\{x_{(i)}^1(p), \dots, x_{(i)}^m(p)\}$, chamadas de coordenadas, que atribuem a cada ponto $p \in U_i$ suas coordenadas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ (NAKAHARA, 2003).

Para dotar $\mathcal{M}$ de uma estrutura diferenciável, impõe-se uma condição de compatibilidade suave entre as cartas que se sobrepõem. Sejam (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) duas cartas com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Define-se a aplicação de transição (ou mudança de coordenadas):

$$\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j). \quad (2.1)$$

Assim, dado que $\{x^\mu\}$ e $\{y^\mu\}$ sejam respectivamente as coordenadas de p nas cartas (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) . A aplicação ψ_{ij} é dada em $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ por m funções reais de classe C^∞ ⁴ em m variáveis, tais que $x^\mu = x^\mu(y^1, \dots, y^m)$. Na Figura 1 a seguir apresenta-se uma representação ilustrativa do que foi discutido até aqui.

² Recomenda-se a seção C do capítulo I de (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) para uma discussão detalhada sobre Topologia.

³ No contexto da física, é mais comum o uso do termo “sistema de coordenadas”. Nesse sentido, o leitor deve estar atento quando termos como “cartas”, “cartas coordenadas” e “sistemas de coordenadas” forem usados e ter em mente que eles se referem ao mesmo conceito.

⁴ Classe de funções que são infinitamente diferenciáveis, ou seja, que possuem derivadas contínuas de todas as ordens. Também são ditas funções suaves.

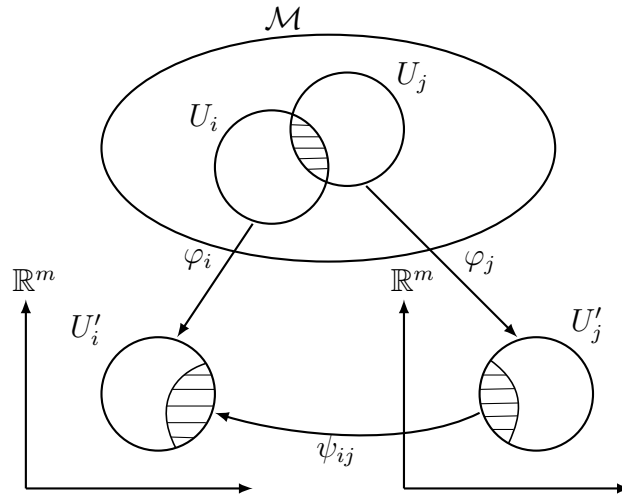


Figura 1 – Representação esquemática de dois domínios de coordenadas U_i, U_j sobre uma variedade $\mathcal{M}$ e a aplicação de transição ψ_{ij} . Fonte: gerado pelo Autor.

A aplicação ψ_{ij} é um difeomorfismo⁵ entre abertos de $\mathbb{R}^m$ se for uma bijeção de classe C^∞ cuja inversa também é de classe C^∞ . Por ser uma composição de homeomorfismos, a propriedade de bijeção é inerente. A condição de que o atlas seja diferenciável requer que a aplicação de transição seja de fato um difeomorfismo. Além disso, a condição de suavidade nas funções de transição garante que a estrutura diferenciável é consistente, permitindo definir a noção de aplicação suave em $\mathcal{M}$ independentemente da carta escolhida, além de possibilitar a definição intrínseca de certos objetos geométricos. Diz-se, portanto, que o atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ é diferenciável (ou suave) se todas as aplicações de transição ψ_{ij} são difeomorfismos de classe C^∞ .

Dois atlas diferenciáveis são compatíveis se a sua união também constitui um atlas diferenciável. A relação de compatibilidade é uma relação de equivalência, e uma estrutura diferenciável em $\mathcal{M}$ é definida como uma classe de equivalência de atlas diferenciáveis. Dessa forma, segue:

Definição 2.2. (Variedade Diferenciável) *Uma variedade diferenciável (ou suave) de dimensão m é uma variedade topológica $\mathcal{M}$ de dimensão m dotada de uma estrutura diferenciável de classe C^∞ .*

Por fim, destaca-se ao leitor a seguinte observação: a partir de agora, faz sentido falar no cálculo diferencial e, portanto, realizá-lo. No entanto, perceba que este é realizado no $\mathbb{R}^m$ e não na própria variedade $\mathcal{M}$. Assim, com essas definições, torna-se possível introduzir aplicações e objetos geométricos definidos sobre a variedade, tais como vetores, 1-formas e tensores.

⁵ Para mais detalhes sobre difeomorfismos, veja as páginas 74 e 115 de (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) ou a Definição 5.2 de (NAKAHARA, 2003).

2.1.2 Vetores e espaços vetoriais

Em espaços mais gerais, como o caso das variedades⁶, a ideia de vetor como sendo uma flecha, traçada da origem até um ponto p , não é válida⁷. Por essa razão, torna-se necessária a noção de vetor tangente, que, como se revelará mais adiante, deve ser compreendido como um operador diferencial. Nesse sentido, sobre uma variedade, os vetores são definidos como sendo vetores tangentes a uma curva de $\mathcal{M}$. Para essa definição, é necessário considerar duas aplicações diferenciáveis especiais: as funções e as curvas (NAKAHARA, 2003).

Definição 2.3. (Função diferenciável sobre uma variedade $\mathcal{M}$) *Seja $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função sobre a variedade $\mathcal{M}$. Sobre uma carta (U, φ) de $\mathcal{M}$, a representação coordenada de f é dada por $\tilde{f} \equiv f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, uma função a valores reais de m variáveis. Se a representação coordenada da função f for diferenciável em $\varphi(p)$, então f é dita diferenciável em p .*

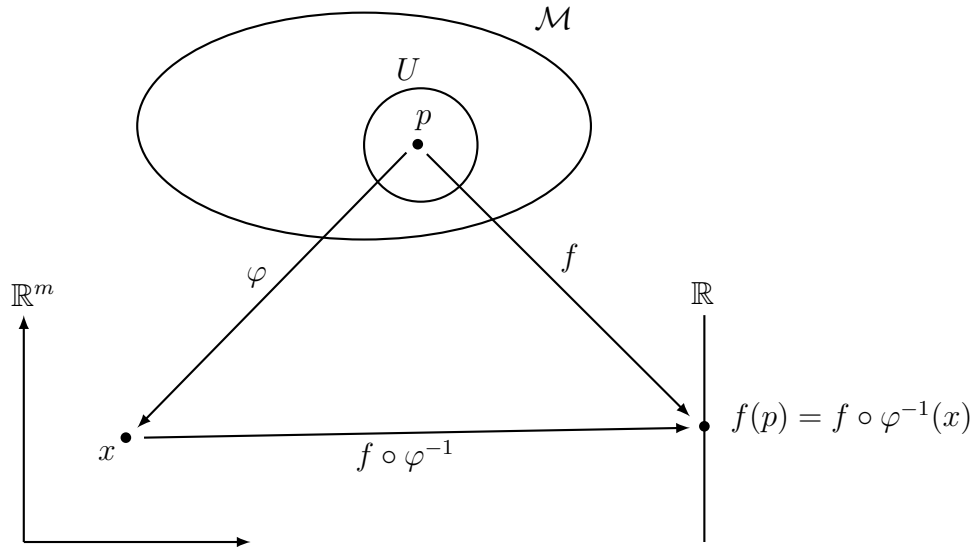


Figura 2 – Uma função sobre a variedade e sua representação coordenada. Fonte: gerado pelo Autor.

É válido destacar, conforme (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), que a definição precedente não depende da carta e que a estrutura diferenciável sobre a variedade determina a ordem máxima de diferenciabilidade das funções nela definidas. Por fim, denota-se o conjunto das funções suaves (ou diferenciáveis) sobre $\mathcal{M}$ por $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

⁶ A rigor, o correto seria o termo “variedades diferenciáveis”. Todavia, por conveniência, será utilizado apenas o termo “variedades”.

⁷ É recomendada a leitura das seções 2.2 e 2.3 do capítulo 2 de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973)

Definição 2.4. (Curva sobre uma variedade $\mathcal{M}$) Uma curva sobre uma variedade $\mathcal{M}$ é uma aplicação diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ por meio de $t \in I \mapsto c(t) \in \mathcal{M}$, onde t é um parâmetro, tal que $c(0) = p$.

Tal como uma função f , a curva $c(t)$ tem sua representação coordenada. Para obter tal representação, considera-se uma carta (U, φ) . Assim, supõe-se agora que a curva $c(t)$ esteja contida na vizinhança coordenada U e que esta seja mapeada em $\mathbb{R}^m$ por meio de φ . A partir disso, é possível obter a representação coordenada da curva através da composição seguinte: $\varphi \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, conforme ilustra a Figura 3. Esta composição fornece as coordenadas da curva no espaço euclidiano: $x^\mu(t) = (\varphi \circ c)^\mu(t)$.

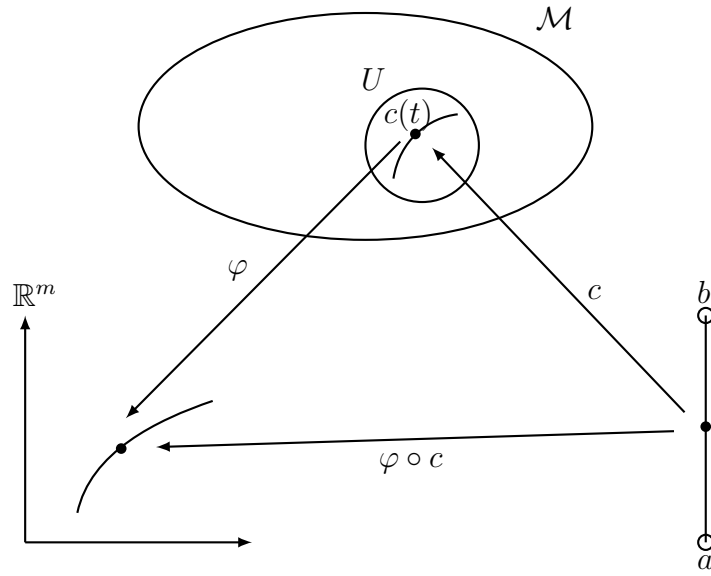


Figura 3 – Uma curva sobre a variedade e sua representação coordenada. Fonte: gerado pelo Autor.

Com as definições de funções e curvas estabelecidas, é possível definir o conceito vetor tangente. Para isso, considera-se que se deseja calcular o quanto a função varia ao longo da curva. Desse modo, restringe-se a função f a $c(t)$, ou seja, $f \circ c$, e calcula-se a derivada direcional.

Assim, segue a definição.

Definição 2.5. (Vetor Tangente) O vetor tangente à curva $c(t)$ no ponto $p = c(0)$ é o operador que associa a cada função $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ a sua derivada direcional ao longo de $c(t)$ em p , ou seja:

$$\left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Como foi destacado anteriormente, o cálculo diferencial não é realizado sobre $\mathcal{M}$. Uma vez que tanto f como $c(t)$ estão definidas sobre a variedade, é necessário considerar

suas respectivas representações coordenadas no espaço euclidiano, $\tilde{f} \equiv f \circ \varphi^{-1}$ e $x^\mu(t) \equiv \varphi \circ c$. Desse modo, a equação (2.2) torna-se

$$\left. \frac{d[(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c)]}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\tilde{f}(x^\mu(t)))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.3)$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\left. \frac{d(\tilde{f}(x^\mu(t)))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.4)$$

A partir da equação anterior, é possível perceber que ela pode ser obtida por meio da aplicação de v à f , ou seja,

$$\left. \frac{d(\tilde{f}(x^\mu(t)))}{dt} \right|_{t=0} = v^\mu \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} \right) \equiv v[f], \quad (2.5)$$

de modo que se pode fazer as seguintes definições

$$v \equiv v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad v^\mu \equiv \left. \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.6)$$

em que v^μ são as componentes do vetor e $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ é a base de $T_p\mathcal{M}$ (que será definido mais adiante).

Do resultado anterior, v é o que se define agora como vetor tangente a $\mathcal{M}$ em $p = c(0)$ ao longo da direção dada pela curva, conforme a Definição 2.5. Além disso, a equação (2.6) evidencia duas características relevantes em relação ao vetor: nota-se que o membro esquerdo revela seu caráter intrínseco, isto é, independente do sistema de coordenadas (U, φ) adotado, enquanto que o membro direito depende diretamente dele.

Agora, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, um vetor tangente v satisfaz as seguintes propriedades (KOBAYASHI; NOMIZU, 1963; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982):

- (1) *Linearidade*: $v[af + bg] = av[f] + bv[g]$;
- (2) *Regra de Leibniz*: $v[fg] = gv[f] + fv[g]$;
- (3) $(av_1 + bv_2)[f] = av_1[f] + bv_2[f]$.

As duas primeiras propriedades implicam $v(a) = 0$, ao tomar $f = g = 1$. Além disso, revelam que v é uma aplicação linear $v : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a regra de Leibniz, o que permite chamá-lo de derivação (logo, v é um operador diferencial) (LEE, 2013). Nesse sentido, v é de fato a derivada direcional de f ao longo da curva c no ponto p . Quanto à terceira, sua relevância ficará clara a seguir.

Por um dado ponto $p \in \mathcal{M}$ podem passar diferentes curvas. Nesse sentido, considera-se uma classe de equivalência de curvas $\mathcal{M}$. Se dadas duas curvas $c_1(t)$ e $c_2(t)$ forem tais que $c_1(0) = c_2(0) = p$ e

$$\left. \frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.7)$$

então elas fornecem o mesmo operador diferencial v no ponto p . Assim, identifica-se o vetor tangente com a classe de equivalência de curvas. Logo, todas as classes de equivalência de curvas em $p \in \mathcal{M}$ formam um espaço vetorial chamado de espaço tangente de $\mathcal{M}$ no ponto p , denotado por $T_p\mathcal{M}$, e que é dotado da propriedade (3) (adição e multiplicação por escalar). Desse modo, vale a definição seguinte.

Definição 2.6. (Espaço Tangente) *O conjunto de todos os vetores definidos em $p \in \mathcal{M}$, dotado da adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial chamado espaço tangente de $\mathcal{M}$ em p , denotado por $T_p\mathcal{M}$. A dimensão deste espaço é a dimensão da variedade $\mathcal{M}$.*

Em relação ao espaço tangente, vale a discussão adiante. Segue a primeira delas. Dado um sistema de coordenadas x^μ no qual $\{\partial_\mu\}$ é a base coordenada associada. Evidentemente, qualquer vetor em $T_p\mathcal{M}$ pode ser escrito como combinação linear de $\{\partial_\mu\}$. Em razão disso, a base coordenada é também chamada de base natural de $T_p\mathcal{M}$ (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982). No entanto, tal base se trata de uma escolha em meio a uma abundância de bases que existe e pode ser atribuída como base em um dado ponto p da variedade $\mathcal{M}$. Existem bases mais gerais, que não podem ser escritas apenas em termos de derivadas parciais. Tais bases $\{e_a\}$ são chamadas de base não coordenadas e podem ser pensadas como a seguinte combinação linear

$$e_a \equiv e_a^\mu \partial_\mu \quad (2.8)$$

onde os elementos e_a^μ pertencem ao grupo linear geral, isto é, $e_a^\mu \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$ ⁸.

Uma variedade não está limitada a um único ponto. Dessa forma, os vetores também não estão. Por isso, é importante trabalhar com a noção de campo vetorial.

Definição 2.7. (Campo Vetorial) *Se um dado vetor está definido suavemente em cada ponto p de $\mathcal{M}$, então é dito ser um campo vetorial, denotado por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.*

Agora, dados dois campos vetoriais $v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e uma função $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

Definição 2.8. (Colchete de Lie) *O colchete de Lie, definido como o comutador $[v, w]$ entre v e w , é um campo vetorial que atua como uma derivada de primeira ordem. Sua ação sobre uma função f é dada por:*

$$[v, w]f = v[w[f]] - w[v[f]]. \quad (2.9)$$

⁸ Em relação ao grupo linear geral, recomenda-se ao leitor a seção 5.6 de (NAKAHARA, 2003)

Em relação à definição acima, é válido destacar que o colchete de Lie é bilinear, anticomutativo (isto é, antissimétrico) e satisfaz a identidade de Jacobi

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0. \quad (2.10)$$

Ao omitir a função f da equação (2.9) e assumir que $v = \partial_\mu$ e $w = \partial_\nu$, pode-se verificar que as bases coordenadas comutam, isto é, $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, de modo que a base coordenada é denominada holonômica. Como já foi mencionado, bases desse tipo podem ser obtidas diretamente a partir de um sistema de coordenadas x^μ local sobre a variedade. Bases desse tipo são ditas integráveis.

Por outro lado, ao denotar $v = e_a$ e $w = e_b$, é possível chegar ao seguinte resultado

$$[e_a, e_b] = (e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu) \partial_\nu, \quad (2.11)$$

que não necessariamente se anula. Quando (2.11) não é nula, a base $\{e_a\}$ é denominada não holonômica. O resultado no membro direito de (2.11) evidencia que os campos vetoriais considerados não correspondem a derivadas com respeito a coordenadas locais; portanto, não existe, em geral, um sistema de coordenadas para o qual tais campos se identifiquem com derivadas parciais. São, por isso, bases ditas não integráveis⁹.

Para encerrar essa subseção, o interesse agora é saber como vetores, em suas representações coordenadas, se transformam sob mudanças de coordenadas, algo que é de fundamental interesse no contexto da física. Dado, então, o seguinte questionamento: como se transformam as componentes de um dado vetor v ? Por construção, como já foi mencionado anteriormente, o $v \in T_p\mathcal{M}$ independe do sistema de coordenadas (U, φ) especificado, como se pode observar na equação (2.5), de modo que em sistemas de coordenadas distintos, o vetor v permanece inalterado. Tal independência é o que possibilita construir o que se chama por regra de transformação das componentes de um vetor. Assim, considera-se que o ponto p é coberto por duas cartas (U, φ) e $(\bar{U}, \bar{\varphi})$, isto é, $p \in U \cap \bar{U}$ e $x = \varphi(p)$ e $\bar{x} = \bar{\varphi}(p)$. Em uma linguagem mais voltada para o contexto da física, o que se pretende fazer é considerar dois sistemas de coordenadas x^μ e $\bar{x}^\mu$. Assim, sejam suas bases coordenadas denotadas por $\{\partial_\mu\}$ e $\{\bar{\partial}_\mu\}$. Nesse caso, existem duas expressões para $v \in T_p\mathcal{M}$,

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \bar{v}^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}. \quad (2.12)$$

Ao utilizar a regra da cadeia, mostra-se que v^μ e $\bar{v}^\mu$ estão relacionados por meio de

$$\bar{v}^\mu = v^\nu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.13)$$

o que demonstra que as componentes do vetor transformam-se de tal forma que o próprio vetor permanece inalterado (NAKAHARA, 2003).

⁹ Para mais detalhes, ver, por exemplo, as seções 2.14, 2.15 e 3.7 de (SCHUTZ, 1980).

É possível mostrar também como as bases se relacionam quando submetidas a transformações de coordenadas. Também por meio da regra da cadeia, mostra-se que as bases se relacionam através da regra de transformação seguinte

$$\bar{\partial}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \partial_\nu. \quad (2.14)$$

Ao observar as duas últimas equações, pode-se ver que as componentes do vetor se transformam de forma contrária à transformação da base. Assim, diante disso, explica-se por que v^μ é comumente chamado de vetor contravariante. Mais precisamente, diz-se que as componentes v^μ se transformam de forma contravariante; o objeto v em si é um vetor (um elemento de $T_p\mathcal{M}$).

2.1.3 1-formas e espaço dual

Para iniciar esta subseção, introduz-se o conceito de função linear.

Definição 2.9. (Função linear) *Sejam v e w vetores de um espaço vetorial V e $a, b \in K$, onde K é um corpo que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma função $f : V \rightarrow K$ é dita linear se*

$$f(av + bw) = af(v) + bf(w). \quad (2.15)$$

Então, seja $\{\mathbf{b}_\mu\}^{10}$ uma base do espaço vetorial V e $K = \mathbb{R}$, de tal forma que se tem $v = v^\mu \mathbf{b}_\mu$, com $v^\mu \in \mathbb{R}$. Devido à linearidade da função f , tem-se que $f(v) = v^\mu f(\mathbf{b}_\mu)$. Assim, conhecer $f(\mathbf{b}_\mu)$ permite determinar o valor de f para qualquer vetor. Para duas funções lineares f e g , verifica-se que

$$(af + bg)(v) = af(v) + bg(v), \quad (2.16)$$

o que mostra que o conjunto dessas funções lineares forma um espaço vetorial. A esse espaço se dá o nome de espaço vetorial dual, denotado por V^* . Por se tratar de um espaço vetorial, é natural que qualquer elemento desse espaço dual possa, em termos da base $\{\mathbf{b}^{*\mu}\}^{11}$ (chamada de base dual), ser escrito como uma combinação linear da seguinte forma

$$f = f_\mu \mathbf{b}^{*\mu}, \quad (2.17)$$

na qual a base dual é definida pela condição seguinte

$$\mathbf{b}^{*\mu}(\mathbf{b}_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad (2.18)$$

chamada de condição de dualidade, onde δ_ν^μ é a delta de Kronecker.

¹⁰ Esta é uma base qualquer, não necessariamente coordenada ou não coordenada.

¹¹ Esta notação é somente para fins introdutórios, de forma que não será adotada ao longo desse trabalho.

Conforme visto na subseção anterior, foram introduzidos os conceitos de vetores e espaços tangentes. Sendo um vetor um elemento de um certo espaço vetorial, o espaço vetorial dual também tem seus elementos, que são as funções lineares, também chamadas na literatura por covetores, vetores duais ou 1-formas. Nesse trabalho, será adotada a última denominação: 1-formas. Tal como um espaço vetorial V tem seu espaço dual V^* , o $T_p\mathcal{M}$ também o tem, o qual é chamado de espaço cotangente e denotado por $T_p^*\mathcal{M}$. Em outras palavras, o que se quer dizer é: no ponto p da variedade $\mathcal{M}$, existe um espaço vetorial $T_p^*\mathcal{M}$ que é dual ao espaço vetorial $T_p\mathcal{M}$. Portanto, segue a definição.

Definição 2.10. (1-formas) *Seja ω um elemento de $T_p^*\mathcal{M}$. Define-se uma 1-forma como uma função linear $\omega : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Em palavras, o que uma 1-forma faz é atribuir valores reais a vetores por meio de sua ação sobre esses, que agora será denotada por $\langle \omega, v \rangle$ e não mais por $\omega(v)$. Além disso, em relação a esses objetos, vale a seguinte definição.

Definição 2.11. (Campo de 1-formas) *Se uma dada 1-forma está definida suavemente em cada ponto p de $\mathcal{M}$, então é dito ser um campo de 1-formas, denotado por $\Omega^1(\mathcal{M})$.*

Relativo a um certo sistema de coordenadas x^μ , foi visto que a base $\{\partial_\mu\}$ é a base natural de $T_p\mathcal{M}$. Analogamente, $T_p^*\mathcal{M}$ também tem a sua base dual, que se denota por $\{dx^\mu\}$. Nesse sentido, sejam $v \in T_p\mathcal{M}$ e $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$. Em seus respectivos espaços, tais elementos podem ser escritos como combinação linear nas formas seguintes

$$v = v^\mu \partial_\mu \quad \text{e} \quad \omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (2.19)$$

onde vale também a condição de dualidade

$$\langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu. \quad (2.20)$$

Dessa forma, a partir da equação anterior, segue

$$\begin{aligned} \langle \omega, v \rangle &= \langle \omega_\mu dx^\mu, v^\nu \partial_\nu \rangle \quad (\text{usa-se a linearidade}) \\ &= \omega_\mu v^\nu \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle \quad (\text{usa-se a condição de dualidade}) \\ &= \omega_\mu v^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= \omega_\mu v^\mu, \end{aligned} \quad (2.21)$$

cujo resultado evidencia que a ação de uma 1-forma sobre um vetor, isto é, $\langle, \rangle : T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, consiste em uma contração de tais objetos.

O exemplo mais simples de uma 1-forma é a derivada total df de uma função $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. De acordo com (NAKAHARA, 2003), a ação de $df \in T_p^*\mathcal{M}$ sobre $v \in T_p\mathcal{M}$ é definida por

$$\langle df, v \rangle \equiv v[f] = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

A demonstração é feita a seguir. A partir do fato de que, em termos das coordenadas $x = \varphi(p)$, df é expressa como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (2.23)$$

Então, segue que

$$\begin{aligned} \langle df, v \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu, v^\nu \partial_\nu \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} v^\nu \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} v^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \\ &= v[f], \end{aligned} \quad (2.24)$$

como desejado.

Por fim, analisa-se como as 1-formas se transformam sob mudanças de coordenadas, de modo análogo ao caso dos vetores. Sejam x^μ e $\bar{x}^\mu$, então

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \bar{\omega}_\nu d\bar{x}^\nu. \quad (2.25)$$

Uma vez que, tal como v , ω também é um elemento intrínseco e, portanto, independe do sistema de coordenadas. Por meio do fato de que $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x)$, obtém-se

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (2.26)$$

que se trata da regra de transformação das bases de $T_p^* \mathcal{M}$, o que possibilita obter também

$$\bar{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \omega_\mu. \quad (2.27)$$

Diferentemente das componentes dos vetores, este resultado mostra que as componentes de uma 1-forma se transformam de forma covariante em relação à base do vetor (como em (2.14)). Por isso, é usada a expressão vetor covariante para designar tais componentes, já que elas se transformam de maneira covariante à base do espaço tangente.

2.1.4 Tensores

Na introdução deste capítulo, mencionou-se que a base conceitual da RG se apoia em dois princípios. Um deles, o princípio da covariância geral, motiva a necessidade de se ter uma teoria construída em termos do objeto geométrico a ser definido nesta subseção: os tensores. Nas subseções anteriores, foram introduzidos dois objetos geométricos que, conforme visto, são intrínsecos e independem do sistema de coordenadas. Os tensores, em linguagem simples, nada mais são do que generalizações de vetores e 1-formas.

Uma 1-forma consiste em uma aplicação linear que associa um vetor a valores reais. Isso pode ser generalizado através de uma aplicação multilinear, os tensores, que mapeiam vários vetores e 1-formas a valores reais. É possível classificar tensores em três tipos: os mistos, os covariantes e os contravariantes. Além disso, há certas características dos tensores que estão discutidas mais adiante.

Assim como os vetores e as 1-formas são definidos nos espaços tangente e cotangente, um tensor é construído como uma aplicação multilinear envolvendo esses espaços. Nesse sentido, os tensores levam r elementos do espaço cotangente e s elementos do espaço tangente a valores reais. Logo, segue a definição (LEE, 2013; THORNE; MISNER; WHEELER, 1973; FRANKEL, 2012; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

Definição 2.12. (Tensor Misto) *Dado um ponto p da variedade $\mathcal{M}$. Um tensor $\mathbf{T}$ do tipo (r, s) é definido como uma aplicação multilinear que tem como argumentos r 1-formas e s vetores e toma valores reais, tal que*

$$\mathbf{T} : \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \times T_p^* \mathcal{M} \times \cdots \times T_p^* \mathcal{M} \times T_p^* \mathcal{M}}_{r \text{ 1-formas}} \times \underbrace{T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \times \cdots \times T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M}}_{s \text{ vetores}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{T}(\underbrace{\omega, \theta, \dots, \alpha, \beta}_{r \text{ 1-formas}}, \underbrace{u, v, \dots, w, z}_{s \text{ vetores}}) \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

De maneira análoga, é possível definir os tensores covariantes e contravariantes, no que se segue.

Definição 2.13. (Tensor Covariante) *Um tensor $\mathbf{T}$ do tipo $(0, s)$ é definido como uma aplicação multilinear que tem como argumentos s vetores e toma valores reais, tal que*

$$\mathbf{T} : \underbrace{T_p \mathcal{M} \times \cdots \times T_p \mathcal{M}}_{s \text{ vetores}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{T}(\underbrace{u, \dots, v}_{s \text{ vetores}}) \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

Definição 2.14. (Tensor Contravariante) *Um tensor $\mathbf{T}$ do tipo $(r, 0)$ é definido como uma aplicação multilinear que tem como argumentos r 1-formas e toma valores reais, tal que*

$$\mathbf{T} : \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \times \cdots \times T_p^* \mathcal{M}}_{r \text{ 1-formas}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.32)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{T}(\underbrace{\alpha, \dots, \beta}_{r \text{ 1-formas}}) \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Na literatura, é comum se referir ao tensor em termos de sua ordem. A ordem do tensor é o número total de entradas: a soma do número de argumentos do tipo 1-forma (r) com o número de argumentos do tipo vetor (s). Assim, um tensor de tipo (r, s) tem ordem $k = r + s$. Dessa forma, das definições acima, em particular as duas últimas, é evidenciado o fato de que tensores são generalizações de vetores e 1-formas, dado que tensores do tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são vetores e 1-formas, respectivamente. Além disso, assim como foram definidos os campos de vetores e de 1-formas, também é possível definir campos de tensores. Desse modo, define-se um campo tensorial na forma seguinte (NAKAHARA, 2003).

Definição 2.15. (Campo Tensorial) *Um campo tensorial do tipo (r, s) é definido por uma atribuição suave de um elemento de $\mathfrak{T}_s^r|_p(\mathcal{M})$ em cada ponto $p \in \mathcal{M}$. O conjunto dos campos tensoriais de tipo (r, s) em $\mathcal{M}$ é denotado por $\mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$.*

Evidentemente, um tensor pode ser expresso em termos de sistemas de coordenadas, o que possibilita fornecer suas componentes, por exemplo. Porém, antes de prosseguir para esse caminho, é útil introduzir o produto tensorial, que fornece uma construção algébrica natural para tensores.

Definição 2.16. (Produto Tensorial) *Sejam α e β 1-formas de $T_p^*\mathcal{M}$. O produto tensorial de α e β é definido como a aplicação bilinear $\alpha \otimes \beta$, tal que*

$$(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v) \in \mathbb{R}, \quad (2.34)$$

para todos $u, v \in T_p\mathcal{M}$.

O leitor deve notar que $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$. Além disso, a construção da Definição 2.16 não é única, de forma que se pode construir também os seguintes produtos tensoriais: $u \otimes v$, $u \otimes \alpha$.

Agora, seja $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_s^r|_p$. Para um sistema de coordenadas x^μ , tem-se como base coordenada $\{\partial_\mu\}$ e a base dual $\{dx^\mu\}$, o que possibilita escrever $\mathbf{T}$ da seguinte forma¹²

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}. \quad (2.35)$$

Desse modo, a ação de $\mathbf{T}$ sobre r 1-formas e s vetores, que consiste em escrevê-lo na forma da Equação (2.29), isto é,

$$\mathbf{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s), \quad (2.36)$$

fornece

$$\mathbf{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \alpha_{\mu_1} \dots \alpha_{\mu_r} v^{\nu_1} \dots v^{\nu_s}, \quad (2.37)$$

¹² Embora se esteja usando a base coordenada, o formalismo independe da base adotada. Nesse caso, poderia se usar a base não coordenada.

onde se utilizou a multilinearidade, além das expressões $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$ e $v = v^\nu \partial_\nu$ e o fato de que a ação do tensor sobre as bases fornecem suas componentes, isto é, $\mathbf{T}(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}, \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_s}) = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$.

A Equação (2.35) se trata de um caso geral. Como casos particulares, a aplicação bilinear da forma

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu, \quad (2.38)$$

consiste em um tensor contravariante de ordem 2, enquanto a aplicação da forma

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}_{\lambda} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes dx^\lambda \quad (2.39)$$

é um tensor de ordem 3 do tipo $(2, 1)$.

Nas subseções anteriores, foi visto como as componentes de vetores e 1-formas se transformam sob mudanças de coordenadas. Analogamente, o mesmo acontece para as componentes dos tensores. Nesse sentido, sejam x^μ e $\bar{x}^\mu$ dois sistemas de coordenadas, é possível mostrar que a regra de transformação para as componentes dos tensores é dada por

$$\bar{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial \bar{x}^{\nu_s}} T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}. \quad (2.40)$$

Quando se trata de transformações de coordenadas, surge um outro tipo de tensor no qual está envolvido o determinante da matriz jacobiana J^{13} . Tal objeto se trata de uma densidade tensorial do tipo (r, s) de peso W^{14} , cuja regra de transformação para suas componentes tem a seguinte forma (D'INVERNO, 1992; SYNGE; SCHILD, 1949; SOKOLNIKOFF, 1964)

$$\bar{\mathfrak{T}}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = J^W \frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial \bar{x}^{\nu_s}} \mathfrak{T}^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}, \quad (2.41)$$

onde

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \right). \quad (2.42)$$

Ainda quanto ao determinante da matriz jacobiana, pode-se também introduzir os pseudo-tensores do tipo (r, s) , que se transformam segundo a seguinte regra de transformação de coordenadas¹⁵

$$\bar{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \text{sgn}(J) J^W \frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial \bar{x}^{\nu_s}} T^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}, \quad (2.43)$$

onde

$$\text{sgn}(J) = \begin{cases} +1 & \text{se } J > 0 \text{ (preservação da orientação),} \\ -1 & \text{se } J < 0 \text{ (inversão da orientação).} \end{cases} \quad (2.44)$$

¹³ Presume-se que J é não singular, isto é, $J \neq 0$.

¹⁴ O peso W se refere à potência com que o determinante da matriz jacobiana da transformação aparece na regra de transformação.

¹⁵ Ao leitor recomenda-se o capítulo VII de (SYNGE; SCHILD, 1949), para mais detalhes.

Em relação aos tensores, seguem algumas considerações sobre as propriedades que esses objetos possuem. Conforme a abordagem de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), a primeira delas diz respeito à contração de tensores, que consiste em produzir um novo tensor. Nesse caso, a contração consiste em transformar um dado tensor do tipo (r, s) para um novo tensor do tipo $(r - 1, s - 1)$, uma operação fundamental na construção de tensores tais como o de Ricci, a partir do tensor de curvatura, e seu respectivo escalar de curvatura, bem como na construção dos traços dos tensores de torção e não metricidade. Assim, por exemplo, seja $\mathbf{R}$ um tensor de ordem 4, um tensor de ordem 2 $\mathbf{S}$ é obtido pela contração de duas entradas de $\mathbf{R}$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{R}(\partial_\mu, u, dx^\mu, v) \\ &= \mathbf{R}(\partial_\mu, u^\alpha \partial_\alpha, dx^\mu, v^\beta \partial_\beta) \\ &= u^\alpha v^\beta \mathbf{R}(\partial_\mu, \partial_\alpha, dx^\mu, \partial_\beta) \\ &= u^\alpha v^\beta R_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\beta = u^\alpha v^\beta S_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $R_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\beta = S_{\alpha\beta}$. Em outras palavras, dado um tensor $\mathbf{R}$ do tipo $(1, 3)$ com componentes $R_{\mu\alpha}{}^\nu{}_\beta$, é possível obter um tensor $\mathbf{S}$ do tipo $(0, 2)$ com componentes $S_{\mu\nu}$ ao contrair o primeiro índice covariante com o índice terceiro contravariante.

A segunda é em relação à simetria: um tensor é simétrico se seu resultado não for afetado pela troca de dois vetores de entrada ou 1-formas de entrada, ou seja,

$$\mathbf{T}(u, v, w) = \mathbf{T}(v, u, w), \quad (2.46)$$

simétrico nas duas primeiras entradas, que em componentes significa: $T_{\mu\nu\lambda} = T_{\nu\mu\lambda}$. Como exemplos de tensores simétricos, têm-se os casos do tensor métrico e do tensor de não metricidade.

A última é quanto a sua antissimetria. Um tensor é antissimétrico, por exemplo, quando, ao se trocar os dois primeiros argumentos, o sinal do tensor é trocado, como segue

$$\mathbf{T}(u, v, w) = -\mathbf{T}(v, u, w), \quad (2.47)$$

o que significa dizer, em termos das componentes, que: $T_{\mu\nu\lambda} = -T_{\nu\mu\lambda}$. Um exemplo de tensor antissimétrico é o tensor de torção $T^\lambda{}_{\mu\nu}$, que é antissimétrico nos seus dois índices covariantes μ e ν , isto é, nos dois últimos índices.

No que diz respeito às duas últimas propriedades, vale destacar que há tensores que podem ser simétricos ou antissimétricos em relação à troca de qualquer uma de suas entradas (ou índices). Tais tensores são ditos completamente simétricos ou completamente antissimétricos. Nesse sentido, dados quaisquer tensores, pode-se simetrizar ou antissimetrizar estes. Por exemplo, dadas as componentes de um dado tensor $T^{\mu\nu}$, é possível mostrar que este pode ser reconstruído em termos de suas partes simétrica e antissimétrica, tal que

$$T^{\mu\nu} = T^{(\mu\nu)} + T^{[\mu\nu]}, \quad (2.48)$$

onde os parênteses $(\dots)$ indicam a simetrização dos índices e os colchetes $[\dots]$ indicam a antissimetrização dos índices.

Como mencionado, é possível simetrizar ou antissimetrizar um tensor. Para simetrizar um tensor, calcula-se a média das permutações correspondentes aos índices considerados. As componentes do novo tensor simetrizado são identificados, nesse caso, por

$$T_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad (2.49)$$

$$T_{(\mu\nu\lambda)} \equiv \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\mu\lambda} + T_{\lambda\nu\mu}). \quad (2.50)$$

De modo análogo, para antissimetrizar, realiza-se a média das permutações do tensor, onde o sinal de cada termo é determinado pela paridade da permutação, como segue

$$T_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}), \quad (2.51)$$

$$T_{[\mu\nu\lambda]} \equiv \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\lambda\mu\nu} - T_{\mu\lambda\nu} - T_{\nu\mu\lambda} - T_{\lambda\nu\mu}). \quad (2.52)$$

Por fim, encerra-se essa subseção indicando ao leitor o capítulo 3 de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), bem como as referências (SYNGE; SCHILD, 1949; SOKOLNIKOFF, 1964), para mais detalhes que não foram discutidos aqui a fim de evitar delongas no texto.

2.1.5 Formas diferenciais

Nas duas últimas subseções foram introduzidos os conceitos de 1-formas e tensores. Em particular, foi visto que uma 1-forma consiste em um tensor covariante do tipo $(0, 1)$. Nesta subseção, o objetivo é introduzir o que consiste em uma generalização das 1-formas: as formas diferenciais, também chamadas de p -formas. Tal objeto é definido adiante (NAKAHARA, 2003).

Definição 2.17. (Formas Diferenciais) *Uma forma diferencial de ordem p ou uma p -forma é um tensor totalmente antissimétrico do tipo $(0, p)$. O conjunto das p -formas em um ponto p da variedade $\mathcal{M}$ é denotado por $\Omega^p(\mathcal{M})|_p$.*

Antes de ser apresentada a forma explícita desse objeto, é válido definir o chamado produto exterior. Seja a 1-forma dx^μ , o produto exterior é definido por

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \sum_{P \in S_p} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(p)}}, \quad (2.53)$$

onde $\text{sgn}(P) = +1$ para permutações pares e $\text{sgn}(P) = -1$ para permutações ímpares, P é um elemento de S_p , o grupo simétrico de ordem p . O que a equação acima quer dizer é: primeiro se considera $dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(p)}}$ e então, a partir disso, fazem-se todas as

somas das permutações possíveis; quando a troca for par, coloca-se (+), e se coloca (-) quando a troca for ímpar. Por exemplo, o caso $p = 3$ implica

$$\begin{aligned} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda \\ &- dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Da definição (2.53), é facilmente verificado que o produto exterior satisfaz o seguinte:

- (1) $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} = 0$ em caso de índices repetidos;
- (2) $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} = \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{P(p)}}$;
- (3) $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ é linear em cada dx^μ .

Dado que as p -formas (2.53) formam uma base de $\Omega^p(\mathcal{M})|_p$, um elemento $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})|_p$ pode ser expandido como

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.55)$$

que se trata da forma explícita de uma forma diferencial de ordem p , cujas componentes $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ são antissimétricas, isto é, $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} = \omega_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$, de acordo com a definição, e $p!$ é um fator de normalização.

Assim como é possível realizar o produto exterior entre 1-formas, é possível fazer o mesmo entre p -formas e q -formas. Assim, da equação (2.55), segue a definição.

Definição 2.18. (Produto Exterior) *Sejam $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})|_p$ e $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})|_p$. Define-se o produto exterior entre α e β por $\wedge : \Omega^p(\mathcal{M})|_p \times \Omega^q(\mathcal{M})|_p \rightarrow \Omega^{p+q}(\mathcal{M})|_p$, tal que*

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\nu_1 \dots \nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}. \quad (2.56)$$

Em relação ao produto exterior $\wedge$, é válido destacar as seguintes propriedades. Sejam $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})|_p$, $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})|_p$ e $\omega \in \Omega^s(\mathcal{M})|_p$, segue que

- (1) *Bilinearidade:*

$$\begin{aligned} (a\alpha + b\beta) \wedge \omega &= a(\alpha \wedge \omega) + b(\beta \wedge \omega), \\ \alpha \wedge (a\beta + b\omega) &= a(\alpha \wedge \beta) + b(\alpha \wedge \omega), \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$;

- (2) *Comutatividade:* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$;

- (3) *Associatividade:* $(\alpha \wedge \beta) \wedge \omega = \alpha \wedge (\beta \wedge \omega)$;

(4) $\alpha \wedge \alpha = 0$ se p for ímpar.

Em relação à segunda propriedade, nota-se que o produto exterior entre duas formas diferenciais de ordem p e q pode comutar ou não.

Com as discussões acima feitas, pode-se dar o próximo passo, que é introduzir um operador diferencial que generaliza os clássicos operadores gradiente, rotacional e divergente: a derivada exterior.

Definição 2.19. (Derivada Exterior) *Seja ω uma p -forma, como a dada em (2.55). A derivada exterior é uma aplicação $d : \Omega^p(\mathcal{M})|_p \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M})|_p$ cuja ação sobre ω é definida por*

$$d\omega = \frac{1}{p!} \partial_\nu (\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.57)$$

Conforme dito, a derivada exterior é uma generalização dos operadores diferenciais citados anteriormente. Nesse sentido, é válido evidenciar esse fato. Sejam $\omega_0 \in \Omega^0(\mathcal{M})|_p$, $\omega_1 \in \Omega^1(\mathcal{M})|_p$, $\omega_2 \in \Omega^2(\mathcal{M})|_p$ e $\omega_3 \in \Omega^3(\mathcal{M})|_p$ uma 0-forma, uma 1-forma, uma 2-forma e 3-forma, respectivamente. Nesse caso, está sendo considerada uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão 3. A partir disso, segue:

- (i) $\omega_0 = f(x, y, z)$;
- (ii) $\omega_1 = \omega_x(x, y, z) dx + \omega_y(x, y, z) dy + \omega_z(x, y, z) dz$;
- (iii) $\omega_2 = \omega_{xy}(x, y, z) dx \wedge dy + \omega_{yz}(x, y, z) dy \wedge dz + \omega_{zx}(x, y, z) dz \wedge dx$;
- (iv) $\omega_3 = \omega_{xyz}(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$.

Dessa forma, a ação de d sobre cada um dos casos fornece:

(i) *O Gradiente:*

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

que é uma 1-forma;

(ii) *O Rotacional:*

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

que é uma 2-forma;

(iii) *O Divergente:*

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

que é uma 3-forma;

(iv) $d\omega_3 = 0$.

Portanto, é possível notar que os exemplos acima, além de independermos das coordenadas e das bases, evidenciam o fato de que d é uma generalização de tais operadores diferenciais. Além do mais, percebe-se que a ordem da forma diferencial em questão foi aumentada em uma ordem a cada operação, conforme a definição.

Por fim, em relação a essa aplicação, é válido destacar que se trata de uma aplicação linear. Além disso, seja a ação de d^2 sobre ω . É possível demonstrar que a derivada exterior é nilpotente, isto é, a derivada exterior aplicada duas vezes sobre uma forma diferencial é nula: $d(d\omega) = 0$. Por fim, é possível mostrar também que a derivada exterior do produto exterior entre duas formas diferenciais é dada por

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge d\alpha, \quad (2.58)$$

$$\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})|_p, \alpha \in \Omega^q(\mathcal{M})|_p^{16}.$$

Nessa etapa, introduz-se outra importante aplicação: o produto interior. A definição é dada a seguir¹⁷.

Definição 2.20. (Produto Interior) *Seja v um campo vetorial de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$. Define-se o produto interior como uma aplicação $\rfloor : \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$, dada por $\omega \mapsto v \rfloor \omega$, tal que*

$$v \rfloor \omega(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{p-1}). \quad (2.59)$$

Da definição, é possível observar que o produto interior resulta em uma $(p-1)$ -forma que atua nos campos vetoriais $v_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Em componentes, a definição implica

$$v \rfloor \omega = \frac{1}{(p-1)!} v^\nu \omega_{\nu\mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.60)$$

onde foi usado $v = v^\nu \partial_\nu$ e a Equação (2.55). Em particular, tem-se

$$\partial_\mu \rfloor dx^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad (2.61)$$

o que é equivalente a $\langle dx^\nu, \partial_\mu \rangle = \delta_\mu^\nu$. Além disso, é válido destacar que o produto interior é antissimétrico, isto é, $u \rfloor (v \rfloor \omega) = -v \rfloor (u \rfloor \omega)$, nilpotente $v \rfloor (v \rfloor \omega) = 0$ e satisfaz a seguinte propriedade:

$$v \rfloor (\omega \wedge \alpha) = (v \rfloor \omega) \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge (v \rfloor \alpha). \quad (2.62)$$

Para encerrar essa subseção, é válido considerar a integração das formas diferenciais em uma variedade $\mathcal{M}$. A noção de orientação desempenha um papel fundamental na

¹⁶ A demonstração pode ser encontrada em (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

¹⁷ Para mais detalhes, ver a página 207 de (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

formulação da integração em variedades, o que torna necessária a definição de orientação de uma variedade (NAKAHARA, 2003; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

Para isso, considera-se uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão m conexa. Em um ponto $p \in \mathcal{M}$, o espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ associado à carta (U, φ) é gerado pela base coordenada $\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\partial_\mu\}$, onde $\{x^\nu\}$ são as coordenadas locais e U é vizinhança coordenada da carta ao qual o ponto p pertence. Seja outra carta $(\bar{U}, \bar{\varphi})$, tal que $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, com coordenadas locais $\{\bar{x}^\mu\}$. Dessa forma, a base se transforma por meio da relação seguinte:

$$\bar{\mathbf{e}}_\mu = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \mathbf{e}_\nu. \quad (2.63)$$

Uma vez já definida na Equação (2.42), se $J > 0$ em $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, as bases $\{\mathbf{e}_\nu\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_\mu\}$ definem a mesma orientação em $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$. Caso contrário, se $J < 0$, definem uma orientação oposta. Assim, segue a definição.

Definição 2.21. (Variedade Orientável) Define-se uma variedade $\mathcal{M}$ como orientável se, dadas duas cartas (U, φ) e $(\bar{U}, \bar{\varphi})$, com $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, existem coordenadas $\{x^\nu\}$ e $\{\bar{x}^\mu\}$ para cada carta, respectivamente, tais que $J > 0$.

Dessa forma, com a definição acima, se a variedade é orientável, existe uma m -forma ω , que se denomina elemento de volume, que não se anula em nenhuma região. Tal objeto desempenha o papel de uma medida ao integrar uma dada função $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ sobre $\mathcal{M}$. Munidos disso, é possível definir a integração das formas diferenciais.

Definição 2.22. (Integração de Formas Diferenciais) Seja $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função sobre uma variedade orientável $\mathcal{M}$. Seja o elemento de volume ω dado por

$$\omega = h(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m. \quad (2.64)$$

Em uma vizinhança coordenada U com coordenadas x , define-se a integração de uma m -forma $f\omega$ por

$$\int_U f\omega \equiv \int_{\varphi(U)} f(\varphi^{-1}(x)) h(\varphi^{-1}(x)) dx^1 \cdots dx^m. \quad (2.65)$$

2.2 O Tensor Métrico e as Tétradas

Nesta seção, serão apresentados dois dos objetos fundamentais da geometria métrica-afim e, consequentemente, para a construção da teoria que este trabalho pretende desenvolver: o tensor métrico e as tétradas.

2.2.1 A métrica

Ao se pensar em geometria, é natural surgir o questionamento de como medir distâncias e ângulos. Junto com essa pergunta, vem à mente a ideia de usar instrumentos

como réguas e transferidores, algo plenamente realizável na geometria euclidiana. No entanto, quando se trata de geometrias mais gerais, é necessário recorrer ao objeto geométrico denominado tensor métrico (ou simplesmente métrica, no caso mais frequente), que possibilita realizar medidas de distâncias e ângulos. Além disso, no contexto da física, uma vez que o objetivo é construir uma teoria macroscópica, uma estrutura geométrica que permita realizar tais medidas é de extrema necessidade.

Quando se pensa em distâncias e ângulos, outro conceito fundamental da geometria analítica surge: o produto interno. Em nível elementar, o produto interno entre dois vetores é dado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i$, onde u_i e v_i são as componentes dos vetores em $\mathbb{R}^n$. Como já ficou evidente a partir das discussões anteriores, em uma variedade todos os objetos geométricos construídos até aqui são definidos em cada espaço tangente $T_p\mathcal{M}$. Isso conduz à necessidade de definir um produto interno em cada um desses espaços (NAKAHARA, 2003).

Definição 2.23. (Tensor Métrico) *Sejam dois vetores $u, v \in T_p\mathcal{M}$. Uma métrica riemanniana é um campo tensorial covariante de ordem 2, isto é, uma aplicação $\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear que satisfaz, em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad \mathbf{g}_p(u, v) = \mathbf{g}_p(v, u);$$

$$(ii) \quad \mathbf{g}_p(u, u) \geq 0, \text{ onde a igualdade só é válida quando } u = 0^{18}.$$

Na subseção 2.1.3 foi definida a ação de uma 1-forma $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ sobre um vetor $v \in T_p\mathcal{M}$ como a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. A respeito dessa definição, é comum que alguns autores se refiram a ela como um produto interno entre tais objetos, já que se trata de algo equivalente ao produto interno (SCHUTZ, 1980); no entanto, a noção de produto interno só faz sentido quando a variedade passa a ser dotada de uma métrica.

A partir da definição da métrica, $\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, torna-se possível definir uma aplicação $\mathbf{g}(u, \cdot) : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, com u fixado. Como é possível notar, esta última consiste em uma aplicação que atribui valores reais a um vetor, que, conforme foi visto na Definição 2.10, trata-se de uma 1-forma. Nesse sentido, pode-se fazer a seguinte denotação: $\mathbf{g}(u, \cdot) = u^*$, com $u^* \in T_p^*\mathcal{M}$. Então, em um dado sistema de coordenadas x^μ (isto é, uma carta (U, φ) com a base coordenada $\{\partial_\mu\}$), a ação de u^* sobre essa base fornece

$$\langle u^*, \partial_\mu \rangle = u_\mu. \quad (2.66)$$

¹⁸ A notação $\mathbf{g}_p$ indica simplesmente $\mathbf{g}|_p$. Daqui em diante, a métrica será referida somente por $\mathbf{g}$, a fim de evitar uma notação densa.

Contudo, $u^*(\partial_\mu) = \mathbf{g}(u, \partial_\mu)$, de modo que é equivalente a fazer

$$\begin{aligned} u_\mu &= \mathbf{g}(u, \partial_\mu) \\ &= \mathbf{g}(u^\lambda \partial_\lambda, \partial_\mu) \\ &= u^\lambda \mathbf{g}(\partial_\lambda, \partial_\mu) = g_{\lambda\mu} u^\lambda \\ u_\mu &= g_{\lambda\mu} u^\lambda. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Nesse ponto, a partir da Definição 2.23, é válido analisar a condição (i) e a condição (ii) de não degenerescência da métrica. No sistema de coordenadas anteriormente citado, sua base dual é $\{dx^\mu\}$, de modo que é possível expandir a métrica da seguinte forma:

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.68)$$

Desse modo, verifica-se que as componentes da métrica são simétricas, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_{\nu\mu}. \quad (2.69)$$

Em relação à condição de não degenerescência, cujo significado é a condição $g \equiv \det\|g_{\mu\nu}\| \neq 0$, a métrica (2.68) determina uma inversa, que é um campo tensorial contravariante de ordem 2, dado por

$$\mathbf{g}^{-1} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu, \quad (2.70)$$

tal que

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.71)$$

Em face do último resultado (2.71), pode-se multiplicar a Equação (2.67) por $g^{\mu\nu}$, de tal forma que é possível obter

$$u^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu. \quad (2.72)$$

Desse modo, a partir dos resultados (2.72) e (2.67), estabelece-se o isomorfismo entre $T_p\mathcal{M}$ e $T_p^*\mathcal{M}$. Nesse caso, percebe-se que se trata das conhecidas operações de levantamento e abaixamento de índices, o que é válido para tensores de qualquer ordem k . Como exemplo, tem-se os casos a seguir:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}, \quad T^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (2.73)$$

no qual o último caso consiste em uma contração de índices. Além disso, embora tenha sido enfatizado, é válido demonstrar como a métrica possibilita a noção de produto interno. Logo, sejam $u, v \in T_p\mathcal{M}$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(u, v) &= \mathbf{g}(u^\mu \partial_\mu, v^\nu \partial_\nu) \\ &= u^\mu v^\nu \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= u^\mu v^\nu g_{\mu\nu} \\ &= u^\mu v_\mu. \end{aligned} \quad (2.74)$$

O caso abordado até aqui se trata de uma métrica riemanniana. Todavia, o caso de interesse nesta dissertação é o de uma métrica pseudo-riemanniana. Uma métrica é pseudo-riemanniana se ela satisfaz a condição (i) da Definição 2.23 e, em vez de (ii), satisfaz a condição de que se $\mathbf{g}(u, v) = 0$ para todo $u \in T_p\mathcal{M}$, então $v = 0$. Nesse caso, ela não é necessariamente positiva definida.

Dado que a matriz $\|g_{\mu\nu}\|$ associada a $\mathbf{g}$ é simétrica, seus autovalores são reais¹⁹. Em geral, existem i autovalores positivos e j negativos. No caso particular em que $j = 1$, a métrica é denominada lorentziana, sendo usualmente representada pela métrica de Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, que corresponde à métrica do espaço-tempo da RE. Nesse contexto, surgem classificações específicas para vetores na geometria do espaço-tempo. Para um espaço-tempo lorentziano $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e $u \in T_p\mathcal{M}$, tem-se:

- (1) $\mathbf{g}(u, u) > 0$ (vetor tipo espaço),
- (2) $\mathbf{g}(u, u) = 0$ (vetor tipo luz),
- (3) $\mathbf{g}(u, u) < 0$ (vetor tipo tempo).

Dessa forma, o quadrado da norma de um vetor é expresso por $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, podendo assumir valores positivos, negativos ou nulos.

A relação entre a interpretação de $\mathbf{g}$ como aplicação bilinear e sua interpretação como o quadrado de uma distância infinitesimal, denotado por ds^2 , é estabelecida ao se aplicar a métrica ao vetor de deslocamento infinitesimal (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973). Seja o vetor de deslocamento infinitesimal

$$\xi \equiv \Delta x^\mu \partial_\mu. \quad (2.75)$$

Segue então que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{g}(\xi, \xi) \\ &= \Delta x^\mu \Delta x^\nu \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu, \end{aligned} \quad (2.76)$$

ou, de forma equivalente,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.77)$$

em que ds^2 é o elemento de linha, usualmente também referido como “métrica”. No contexto da física relativística, tal elemento se refere ao intervalo entre dois eventos no espaço-tempo, como por exemplo a emissão e a recepção de um raio luminoso. Nesse caso, para $ds^2 > 0$, tem-se um intervalo tipo espaço, enquanto $ds^2 = 0$ e $ds^2 < 0$ correspondem aos casos de intervalos tipo luz e tipo tempo, respectivamente.

¹⁹ Para mais detalhes, ver Seção 2.29 de (SCHUTZ, 1980).

2.2.2 Tétradas

Na subseção 2.1.2 foi comentado sobre o fato de a base coordenada $\{\partial_\mu\}$ ser a base natural de $T_p\mathcal{M}$, cuja base dual é $\{dx^\mu\}$. Além disso, foram introduzidas as bases $\{e_a\}$ não coordenadas (2.8), que são o foco desta seção.

Conforme discutido anteriormente, foi visto que vetores e 1-formas e tensores são objetos que podem ser expandidos em termos da base coordenada ou de sua correspondente dual. De forma similar, tais objetos podem ser também expandidos em termos das bases não coordenadas $\{e_a\}$. Nesse sentido, assim como um vetor $v \in T_p\mathcal{M}$ pode ser escrito como uma combinação linear da base coordenada, isto é,

$$v = v^\mu \partial_\mu, \quad (2.78)$$

ele também pode ser escrito em termos das bases não coordenadas, como segue

$$v = v^a e_a, \quad (2.79)$$

onde e_a , de acordo com a equação (2.8), é dada por

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu. \quad (2.80)$$

Para que e_a sirva como uma base, nesse caso não holonômica, é necessário que sua componente e_a^μ seja não degenerada, isto é, $\det\|e_a^\mu\| \neq 0$. Além disso, tal como a base correspondente dual, a base não coordenada também tem a sua base dual, denotada por $\{\vartheta^a\}$ e dada por

$$\vartheta^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad (2.81)$$

onde e^a_μ é também não degenerada. Na literatura é comum se referir a $\{e_a\}$ e $\{\vartheta^a\}$ como frame e coframe, respectivamente. Como caso particular, seja $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 4, que é o caso de interesse físico. Diante disso, segue a definição.

Definição 2.24. (Tétradas) *Para uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão 4, uma tétrada (frame ou coframe) é um conjunto de quatro vetores linearmente independentes $\{e_a\}$ que formam uma base para o espaço tangente $T_p\mathcal{M}$.*

Pela condição de dualidade, já referida em trecho anterior, a dualidade do frame e do coframe requer que

$$e_a \rfloor \vartheta^b = \delta_a^b, \quad (2.82)$$

que implica

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b. \quad (2.83)$$

Similarmente, em face à não degenerescência das componentes do frame e coframe, de forma que se tem como consequência as seguintes inversões (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012)

$$\partial_\mu = e^a_\mu e_a, \quad dx^\mu = e_a^\mu \vartheta^a. \quad (2.84)$$

Assim, da condição de dualidade entre a base coordenada e sua base dual, é possível obter

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu. \quad (2.85)$$

Em relação ao que já foi abordado até aqui, é válido destacar que a base $\{e_a\}$ é completamente arbitrária. Em cada ponto da variedade $\mathcal{M}$, qualquer conjunto de quatro vetores linearmente independentes pode ser escolhido como frame. Não há um frame “privilegiado”; diferentes escolhas são apenas diferentes representações do mesmo conteúdo geométrico. De fato, se e_a é um frame, outro pode ser definido por meio de uma transformação linear local, isto é,

$$e_a \rightarrow \bar{e}_b = \Lambda_b^a(x) e_a, \quad (2.86)$$

Assim, todas as escolhas possíveis de frames estão relacionadas por transformações do grupo geral linear $GL(4, \mathbb{R})$. O coframe se transforma de maneira compatível:

$$\vartheta^a \rightarrow \bar{\vartheta}^b = \Lambda_a^b(x) \vartheta^a \quad (2.87)$$

de modo a preservar a condição de dualidade.

Além disso, das equações (2.80) e (2.81), é possível observar que as tétradas, na realidade, suas componentes, desempenham o papel de uma matriz de transformação entre as bases coordenadas $\{\partial_\mu\}$ e os frames $\{e_a\}$. Nesse sentido, ao considerar as equações (2.78) e (2.79), tem-se que as componentes se relacionam da forma seguinte

$$v^a = e_a^\mu v^\mu, \quad v^\mu = e_a^\mu v^a, \quad (2.88)$$

o que é válido também para as 1-formas e tensores em geral.

Como já foi abordado, o frame tem a característica de ser não holonômico, isto é,

$$[e_a, e_b] = (e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu) \partial_\nu, \quad (2.89)$$

como visto na equação (2.11). Dessa forma, é possível fazer a seguinte definição:

$$\Omega_{bc}^a \equiv -\langle \vartheta^a, [e_b, e_c] \rangle, \quad (2.90)$$

objeto este chamado de não holonomicidade. É possível também obter a relação de comutação acima por meio da aplicação da derivada exterior no coframe, o que permite definir a não holonomicidade 2-forma (HEHL et al., 1995)

$$\Omega^a \equiv d\vartheta^a = \frac{1}{2} \Omega_{bc}^a \vartheta^b \wedge \vartheta^c. \quad (2.91)$$

Em relação à métrica, suas componentes também podem ser expressas em termos das tétradas, evidentemente, da forma seguinte

$$\begin{aligned} g(e_a, e_b) &= g(e_a^\mu \partial_\mu, e_b^\nu \partial_\nu) \\ &= e_a^\mu e_b^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ g_{ab} &= e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

ou, equivalentemente,

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu g_{ab}. \quad (2.93)$$

A métrica, dada na equação (2.68), pode ser expandida em termos do coframe da seguinte forma

$$\mathbf{g} = g_{ab} \boldsymbol{\vartheta}^a \otimes \boldsymbol{\vartheta}^b, \quad (2.94)$$

em que é válido destacar que as tétradas, nesse caso, não são necessariamente ortonormais. Todavia, conforme argumenta (HEHL et al., 1995) na página 33, considera-se inicialmente um frame geral $\mathbf{e}_\alpha$, no qual os componentes da métrica são dados por (2.92). Por meio de uma transformação local adequada, implementada por uma matriz $\Lambda_b^a(x)$, pode-se construir um novo frame

$$\bar{\mathbf{e}}_b = \Lambda_b^a(x) \mathbf{e}_a$$

de tal forma que as componentes transformadas da métrica assumam a forma

$$\bar{g}_{ab} = \Lambda_a^\mu(x) \Lambda_b^\nu(x) g_{\mu\nu} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}).$$

isto é, uma forma diagonal. A partir desse novo conjunto, $\bar{\mathbf{e}}_a$, uma normalização e uma reorganização dos vetores de base permite fazer

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_{\hat{a}}, \mathbf{e}_{\hat{b}}) \equiv \eta_{\hat{a}\hat{b}}, \quad (2.95)$$

em que $\eta_{\hat{a}\hat{b}}$ é a métrica de Minkowski:

$$\|\eta_{\hat{a}\hat{b}}\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\|. \quad (2.96)$$

Nesse caso, o frame $\mathbf{e}_{\hat{a}}$ em questão passa a ser uma base ortonormal, onde o símbolo sobre o índice foi usado para denotar essa respectiva base. A presente discussão tem apenas o objetivo de enfatizar a liberdade na escolha do frame; ao longo deste trabalho, frames gerais (não necessariamente ortonormais) serão adotados.

Por fim, vale destacar que as tétradas são de profundo interesse na física, dado que elas podem ser definidas como referenciais (MALUF et al., 2023) e permitem o acoplamento com férmions (ROVELLI; VIDOTTO, 2015).

2.2.3 Elemento de volume invariante e operação dual de Hodge

O conceito de elemento de volume invariante desempenha um papel fundamental quando se trata de integração em variedades. No contexto da física, no que diz respeito ao formalismo do princípio variacional, existe um funcional, chamado de ação, que é dado em

termos de uma função, geralmente escalar, chamada de lagrangiana, e do que se chama de elemento de volume invariante, como será visto posteriormente²⁰.

Dada a equação (2.53), nota-se que esta se trata de um elemento de volume, isto é,

$$d^m x \equiv dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_m} = \sum_{P \in S_m} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_{P(m)}}. \quad (2.97)$$

Caso seja feita uma transformação de coordenadas, é possível mostrar que (2.97) se transforma como segue:

$$d\bar{x}^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^{\mu_m} = \left| \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right| dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_m} \quad (2.98)$$

onde o termo entre “ $|\cdot|$ ” é a inversa da matriz jacobiana (2.42), o que indica que esse elemento de volume se trata de uma densidade escalar de peso -1 . Ou seja, esse elemento de volume não é invariante sob transformações de coordenadas, o que torna necessária a introdução de um outro objeto para tornar a construção de um elemento de volume invariante. Esse objeto é a métrica.

Sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$, é possível verificar que as componentes da métrica se transformam da seguinte maneira:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (2.99)$$

Ao tomar o determinante, obtém-se que

$$\bar{g} = J^2 g, \quad (2.100)$$

que evidencia o fato de que o determinante da métrica tem peso $+2$. Dado que no contexto da física se lida com métricas com determinante negativo, g será negativo. Desse modo, é necessário reescrever a equação anterior para

$$(-\bar{g}) = J^2(-g). \quad (2.101)$$

Uma vez que ambos os termos são agora positivos, torna-se possível aplicar a raiz quadrada de ambos os lados para obter

$$\sqrt{-\bar{g}} = J\sqrt{-g}, \quad (2.102)$$

em que se nota que $\sqrt{-g}$ é uma densidade escalar de peso $+1$.

Portanto, munidos de tais fatos, é possível construir o elemento de volume invariante. Ele é dado por

$$\eta \equiv \sqrt{-g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m. \quad (2.103)$$

²⁰ Isso depende da construção. Pode acontecer que a lagrangiana seja uma densidade escalar de peso $+1$. Neste caso, a ação é dada em termos dessa densidade e do elemento de volume d^4x que será construído a seguir.

No caso da variedade de dimensão 4, tendo em mente que os índices, sejam eles coordenados ou de tétradas, vão de 0 a 3, tem-se o elemento de volume invariante, uma 4-forma,

$$\boldsymbol{\eta} = \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (2.104)$$

De modo semelhante, pode-se defini-lo em termos do coframe, como segue

$$\boldsymbol{\eta} = \sqrt{|\mathcal{G}|} \boldsymbol{\vartheta}^{(0)} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{(1)} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{(2)} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{(3)}, \quad (2.105)$$

onde $\mathcal{G} \equiv \det \|g_{ab}\|$. Além disso, no caso ortonormal, tem-se

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\vartheta}^{\hat{0}} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{\hat{1}} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{\hat{2}} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{\hat{3}}. \quad (2.106)$$

Para encerrar essa subseção, agora munidos de uma variedade dotada de uma métrica, pode-se introduzir a operação dual de Hodge. Antes, porém, é válida a introdução do símbolo de Levi-Civita alternado, que é dado por

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m) \text{ é uma permutação par de } (12 \dots m) \\ -1 & \text{se } (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m) \text{ é uma permutação ímpar de } (12 \dots m) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.107)$$

A partir desse símbolo, é possível construir as componentes do pseudotensor de Levi-Civita como segue

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m}. \quad (2.108)$$

Posto isso, pode-se definir, portanto, o dual de Hodge (NAKAHARA, 2003).

Definição 2.25. (Dual de Hodge) *O dual de Hodge $\star$ é uma aplicação $\star : \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{m-p}(\mathcal{M})$ cuja ação sobre uma base de $\Omega^p(\mathcal{M})$ é definida por*

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{\sqrt{-g}}{(m-p)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (2.109)$$

A partir dessa aplicação, é possível notar que $\star 1$ é o elemento de volume invariante (2.103), ou seja,

$$\star 1 = \frac{\sqrt{-g}}{m!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \quad (2.110)$$

Pode-se notar também que, para uma dada p -forma $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^p(\mathcal{M})$, a Definição 2.25 implica

$$\star \boldsymbol{\omega} = \frac{\sqrt{-g}}{(m-p)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}, \quad (2.111)$$

que, de fato, implica uma $(m-p)$ -forma.

Por fim, caso seja considerado o coframe $\{\boldsymbol{\vartheta}^a\}$, a operação $\star$ sobre a base do coframe fornece

$$\star(\boldsymbol{\vartheta}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{a_p}) = \frac{1}{(m-p)!} \varepsilon^{a_1 \dots a_p}_{b_{p+1} \dots b_m} \boldsymbol{\vartheta}^{b_{p+1}} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{b_m}, \quad (2.112)$$

onde, nesse caso

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_m} = e_{a_1}^{\mu_1} \dots e_{a_m}^{\mu_m} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_m}. \quad (2.113)$$

2.3 Conexão Afim

Nesta seção, é dado o último passo a caminho da geometria métrica-afim, com a introdução do último objeto que, junto à métrica (ou às tétradas), caracteriza essa geometria: a conexão afim. Em outras palavras, a geometria métrica-afim é uma geometria tal que, para dada uma variedade $\mathcal{M}$, ela é dotada de uma métrica e de uma conexão afim.

2.3.1 Conexão afim e derivada covariante

Como é sabido, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ dois vetores de origem diferente são comparados através do transporte paralelo de um ou ambos os vetores para mesma origem. Nesse sentido, é útil analisar como se comporta a derivada de um campo vetorial em $\mathbb{R}^m$. Então, dado um campo vetorial $v = v^\mu e_\mu$, a derivada com respeito a x^ν tem a μ -ésima componente dada por (NAKAHARA, 2003)

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{v^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - v^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}. \quad (2.114)$$

Em relação à equação anterior, nota-se que o primeiro termo do numerador está definido no ponto $x + \Delta x = (x^1, \dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots, x^m)$. Por outro lado, o segundo termo está definido em $x = (x^\nu)$. Dessa forma, para que a subtração entre $v^\mu(x + \Delta x)$ e $v^\mu(x)$ se torne possível, é preciso transportar $v^\mu(x)$ para o ponto $x + \Delta x$ sem modificações e calcular a diferença. Isso é o que define o que foi mencionado antes como transporte paralelo. Logo, para que seja possível comparar vetores em pontos diferentes no espaço euclidiano, é necessário que o vetor $v^\mu(x)$, quando transportado paralelamente até o ponto $x + \Delta x$, mantenha suas componentes inalteradas.

No entanto, quando se trata de espaços mais gerais, como no caso das variedades, não existe uma maneira canônica de comparar vetores em pontos distintos. Em outras palavras, não há como fazer o transporte paralelo de um vetor em uma variedade sem que haja uma especificação de como ele é transportado paralelamente de um ponto $p \in \mathcal{M}$ para outro ponto $q \in \mathcal{M}$. Somado a isso, existe um outro problema. Em relação à equação (2.114), quando se trata de transformações de coordenadas, isto é, $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$, é possível verificar que surge um termo não linear na transformação, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \rightarrow \frac{\partial \bar{v}^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} v^\beta \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} v^\beta. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Com isso, nota-se o termo aditivo no segundo termo (envolvendo a segunda derivada da transformação de coordenadas). Logo, percebe-se que $\partial_\nu v^\mu$ não se transforma como um vetor, pois a regra de transformação não é homogênea (tensorial). O mesmo valeria se este operador fosse aplicado sobre uma 1-forma ou um tensor. Diante disso, surge a necessidade introduzir a chamada conexão afim.

Antes de uma definição formal, é válida uma apresentação intuitiva da conexão. Para isso, considera-se um campo vetorial $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Mais especificamente, suas componentes $v^\mu(x)$. Logo, de acordo com (D'INVERNO, 1992), o que se faz é avaliar $v^\mu(x)$ em um ponto q , de coordenadas $x^\mu + \Delta x^\mu$, próximo a um ponto p , com coordenadas x^μ . Pelo teorema de Taylor, até primeira ordem de $v^\mu(x + \Delta x)$ se obtém

$$v^\mu(x + \Delta x) = v^\mu(x) + \partial_\rho v^\mu(x) \Delta x^\rho. \quad (2.116)$$

Agora, denota-se o segundo termo por $\Delta v^\mu(x)$, tal que

$$\Delta v^\mu(x) = \partial_\rho v^\mu \Delta x^\rho = v^\mu(x + \Delta x) - v^\mu(x), \quad (2.117)$$

revela-se como não tensorial, pois envolve a subtração de dois vetores avaliados em pontos distintos. Para solucionar esse problema e definir uma derivada tensorial, o que se faz é introduzir um vetor no ponto q que, de modo geral, é “paralelo” a v^μ em p . Assim, uma vez que $x^\mu + \Delta x^\mu$ está próximo de x^μ , pode-se assumir que o vetor paralelo difere de v^μ apenas por $\Delta \bar{v}^\mu$ (Figura 4).

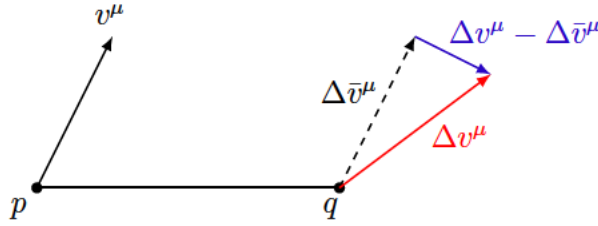


Figura 4 – Representação do transporte paralelo de um dado vetor. Fonte: gerado pelo Autor.

Como enfatizado em (2.115), $\Delta \bar{v}^\mu$ não é tensorial, mas é possível fazer uma construção que seja tensorial, como segue

$$[v^\mu(x) + \Delta v^\mu(x)] - [v^\mu(x) + \Delta \bar{v}^\mu] = \Delta v^\mu(x) - \Delta \bar{v}^\mu(x). \quad (2.118)$$

Com isso, é natural exigir que $\Delta \bar{v}^\mu$ seja zero sempre que $v^\mu(x)$ ou Δx^ρ o seja. Logo, assume-se que $\Delta \bar{v}^\mu$ é linear tanto em $v^\mu(x)$ como em Δx^ρ , o que implica a proporcionalidade ao coeficiente a seguir

$$\Delta \bar{v}^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma} v^\sigma(x) \Delta x^\rho. \quad (2.119)$$

O sinal é uma convenção adotada por consistência com a definição padrão da derivada covariante. Logo, pode-se definir a derivada covariante de v^μ com respeito a x^ρ da seguinte forma

$$\lim_{\Delta x^\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{v^\mu(x + \Delta x) - [v^\mu(x) + \Delta \bar{v}^\mu(x)]}{\Delta x^\rho} \right\} = \nabla_\rho v^\mu. \quad (2.120)$$

Em palavras, a equação anterior diz que a derivada covariante é o limite entre o vetor $v^\mu(q)$ e o vetor em q obtido pelo transporte paralelo de $v^\mu(p)$, dividida pelo deslocamento Δx^ρ , quando esse deslocamento tende a zero. Portanto, a partir de (2.116) e (2.119), chega-se a

$$\nabla_\rho v^\mu = \partial_\rho v^\mu + v^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\mu, \quad (2.121)$$

que são as componentes da derivada covariante e o Γ é chamado de coeficientes da conexão afim (ou simplesmente conexão, como em muitos casos). Nesse ponto, é válido destacar que existem variadas regras de transporte paralelo possíveis, que consiste em uma para cada escolha Γ . Além disso, nota-se que os coeficientes da conexão funcionam como uma correção na derivação (ou transporte paralelo) do vetor.

Com essa noção intuitiva aqui apresentada, segue, então, a definição formal da conexão afim.

Definição 2.26. (Conexão Afim) *Sejam $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ e $u, v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Define-se a conexão afim como uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, ou $(u, v) \mapsto \nabla_u v$, que satisfaz as seguintes condições:*

$$(1) \quad \nabla_v(u + w) = \nabla_v u + \nabla_v w;$$

$$(2) \quad \nabla_{(v+w)}(u) = \nabla_v u + \nabla_w u;$$

$$(3) \quad \nabla_{(fv)}u = f \nabla_v u;$$

$$(4) \quad \nabla_v(fu) = v[f]u + f \nabla_v u.$$

Para um dado sistema de coordenadas x^μ , sejam $u = \mathbf{e}_\mu$ e $v = \mathbf{e}_\nu$. Nesse caso, a operação $\nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\nu$ fornecerá

$$\nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\nu \equiv \nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mathbf{e}_\lambda. \quad (2.122)$$

Em relação à equação anterior, é válido destacar que isso é definido localmente na variedade, o que significa dizer que os coeficientes da conexão especificam como a base muda de ponto a ponto. Nesse sentido, em cada ponto da variedade, os coeficientes da conexão descrevem o quanto o vetor $\mathbf{e}_\nu$ varia com respeito a x^μ na direção de $\mathbf{e}_\lambda$.

A equação anterior fornece o comportamento da conexão sobre o vetor $\mathbf{e}_\nu$. No entanto, é válido também a análise dessa aplicação sobre dx^ν . Para essa análise, considera-se a condição de dualidade (2.20). Dessa forma

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\langle dx^\lambda, \mathbf{e}_\nu \rangle) &= \nabla_\mu \delta_\nu^\lambda = 0 \\ \langle (\nabla_\mu dx^\lambda), \mathbf{e}_\nu \rangle + \langle (\nabla_\mu \mathbf{e}_\nu), dx^\mu \rangle &= 0 \\ \langle (\nabla_\mu dx^\lambda), \mathbf{e}_\nu \rangle + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \langle dx^\lambda, \mathbf{e}_\rho \rangle &= 0 \\ \langle (\nabla_\mu dx^\lambda), \mathbf{e}_\nu \rangle &= -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Ao supor que $\nabla_\mu dx^\lambda = W^\lambda_{\mu\rho} dx^\rho$, obtém-se

$$\begin{aligned} W^\lambda_{\mu\rho} \langle dx^\rho, e_\mu \rangle &= -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \\ W^\lambda_{\mu\nu} &= -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

o que permite concluir que

$$\nabla_\mu dx^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu. \quad (2.125)$$

Até o momento, a abordagem tem sido com respeito às bases coordenadas e suas bases duais. No entanto, é possível também estender essa discussão para o frame e coframe. Portanto, de maneira análoga, tem-se

$$\nabla_b e_c = \omega^a_{bc} e_a \quad (2.126)$$

e

$$\nabla_b \vartheta^a = -\omega^a_{bc} \vartheta^c. \quad (2.127)$$

A partir da equação (2.126), percebe-se que é possível obter de forma explícita os coeficientes ω^a_{bc} por meio da ação do coframe sobre a equação referida. Isto é,

$$\omega^a_{bc} = \langle \vartheta^a, \nabla_b e_c \rangle. \quad (2.128)$$

Além disso, ao multiplicar a equação anterior por e^b_μ , obtém-se

$$\omega^a_{\mu c} = e^b_\mu \omega^a_{bc}. \quad (2.129)$$

2.3.2 Derivada covariante sobre vetores, 1-formas e tensores e transporte paralelo

Uma vez que já se tem a ação de ∇ sobre as bases coordenadas/duais e sobre o frame/coframe, pode-se agora calcular a ação da conexão sobre qualquer objeto geométrico. Sejam $u = u^\mu e_\mu$ e $v = v^\nu e_\nu$ dois campos vetoriais. Desse modo,

$$\begin{aligned} \nabla_u v &= u^\mu \nabla_\mu (v^\nu e_\nu) \quad (\text{onde foi usada a linearidade da conexão}) \\ &= u^\mu \left[e_\mu(v^\nu) e_\nu + v^\nu (\nabla_\mu e_\nu) \right] \quad (\text{regra de Leibniz}) \\ &= u^\mu \left(\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\mu} + v^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} \right) e_\rho. \end{aligned} \quad (2.130)$$

onde o termo em parênteses é a representação das componentes. Nota-se que o resultado acima está de acordo com a equação (2.121). Além disso, de acordo com a definição, a conexão aplica dois vetores para um novo vetor, conforme evidencia (2.130). Dessa última, nota-se que o termo em parênteses consiste na ρ -ésima componente da derivada covariante do vetor, isto é

$$\nabla_\mu v^\rho \equiv \left(\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\mu} + v^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} \right). \quad (2.131)$$

De forma análoga, pode-se atuar ∇ sobre 1-formas. Dado $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$, tal que $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, a ação de ∇ sobre ω é dada da forma seguinte:

$$\begin{aligned}\nabla_v \omega &= v^\mu \nabla_\mu (\omega_\nu dx^\nu) \\ &= v^\mu [e_\mu(\omega) dx^\nu + \omega_\nu (\nabla_\mu dx^\nu)] \\ &= v^\mu \left(\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} - \omega_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) dx^\nu\end{aligned}\quad (2.132)$$

onde foi usada a equação (2.125), de modo que o termo em parênteses são as componentes.

Para se estender a aplicação de ∇ sobre tensores em geral, é válido considerar a condição (4) (regra de Leibniz) da Definição 2.26. Dado que

$$\nabla_v(fu) = v[f]u + f\nabla_v u. \quad (2.133)$$

É possível exigir que isso seja válido para qualquer produto entre tensores, tal que

$$\nabla_v(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_v T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_v T_2). \quad (2.134)$$

Com isso, torna-se possível fazer a seguinte generalização

$$\begin{aligned}\nabla_u \mathbf{T} &= u \left(T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \right) \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \\ &+ T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \nabla_u (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s})\end{aligned}\quad (2.135)$$

onde, vale lembrar que $\mathbf{T}$ é um tensor do tipo (r, s) e, além disso, foi usado o fato de que $\nabla_u[f] = u[f]$. Em componentes, isso corresponde a

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \frac{\partial (T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s})}{\partial x^\mu} \\ &+ \Gamma_{\mu\nu}^{\mu_1} T^{\nu \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} + \dots + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu_r} T^{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \nu}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &- \Gamma_{\mu\nu_1}^\nu T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu \nu_1 \dots \nu_s} - \dots - \Gamma_{\mu\nu_s}^\nu T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \nu}.\end{aligned}\quad (2.136)$$

Analogamente, pode-se fazer o mesmo que a equação anterior para densidades tensoriais da forma seguinte:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \mathfrak{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \frac{\partial \mathfrak{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}}{\partial x^\mu} \\ &+ \Gamma_{\mu\nu}^{\mu_1} \mathfrak{T}^{\nu \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} + \dots + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu_r} \mathfrak{T}^{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \nu}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &- \Gamma_{\mu\nu_1}^\nu \mathfrak{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu \nu_1 \dots \nu_s} - \dots - \Gamma_{\mu\nu_s}^\nu \mathfrak{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \nu} \\ &- W \Gamma_{\nu\mu}^\nu \mathfrak{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s},\end{aligned}\quad (2.137)$$

onde se deve ter em mente que W é o peso da densidade tensorial. Para mais detalhes, recomenda-se (D'INVERNO, 1992).

Com isso, encerra-se essa subseção mencionando o fato de que a derivada covariante se trata de uma derivada direcional, porém mais geral do que a derivada direcional que um vetor define (ver seção 2.1.2). Nesse sentido, segue as definições de derivada absoluta e de transporte paralelo.

Definição 2.27. (Derivada Absoluta e Transporte Paralelo) *Seja uma curva $c \in \mathcal{M}$, representada por $x^\mu(t)$. Define-se a derivada absoluta de um vetor v ao longo curva c como*

$$\frac{Dv}{dt} \equiv \nabla_{\frac{d}{dt}} v, \quad (2.138)$$

onde $d/dt = u$ é o vetor tangente à curva. É dito que o vetor v é transportado paralelamente ao longo da curva c na direção de u se

$$\frac{Dv}{dt} = \nabla_u v = 0. \quad (2.139)$$

2.4 Decomposição Geral da Conexão Afim

Nesta seção serão apresentados os tensores de curvatura, torção e não metricidade. Em seguida, a decomposição geral da conexão afim é desenvolvida, o que permitirá observar que no caso mais geral, há contribuições da torção e da não metricidade.

Nesta etapa, a variedade $\mathcal{M}$ já está dotada de uma métrica e de uma conexão. Embora já se tenha referido ao caso da variedade $\mathcal{M}$ ter 4 dimensões, é válido destacar que esse será o caso a ser considerado de agora em diante. Nesse sentido, conforme a notação das obras (HEHL et al., 1995; BLAGOJEVIC, 2002), será referido à variedade dotada de uma conexão afim por (L_4) , e, quando for dotada tanto da conexão afim quanto da métrica, essa será referida por (L_4, g) . Nesta subseção, a abordagem de apresentar cada tensor será de acordo com (HEHL et al., 1995), isto é, primeiro serão dadas as definições dos tensores de curvatura e torção e posteriormente a definição do tensor de não metricidade. Com esses objetos sendo definidos, é possível, finalmente, caracterizar o espaço-tempo em sua forma mais geral. A principais referencias desta parte são (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982; CARMO, 2015; HEHL et al., 1995; NAKAHARA, 2003).

2.4.1 Curvatura e torção

Definição 2.28. (Tensor de Curvatura) *Dada uma variedade (L_4) dotada de uma conexão ∇ , define-se o tensor de curvatura $R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ por*

$$R(u, v)w \equiv \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w, \quad (2.140)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(1) \quad R(u, v)w = -R(v, u)w;$$

(2) *Multilinearidade:*

$$R(fu + gv, w) = fR(u, w) + gR(v, w), \quad (2.141)$$

$$R(u, fv + gw) = fR(u, v) + gR(u, w) \quad (2.142)$$

$$\mathbf{R}(u, v)(w + x) = \mathbf{R}(u, v)w + \mathbf{R}(u, v)x, \quad (2.143)$$

$$\mathbf{R}(u, v)fw = f\mathbf{R}(u, v)w; \quad (2.144)$$

onde $u, v, w, x \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

A partir da definição, é possível obter as componentes do tensor de curvatura tanto em termos de índices holonômicos quanto de índices não holonômicos. Para o primeiro caso, considera-se a base coordenada $\{\partial_\mu\}$ e a sua dual $\{dx^\mu\}$. A partir disso, segue que

$$\begin{aligned} R^\rho_{\mu\sigma\nu} &= \langle dx^\rho, \mathbf{R}(\partial_\sigma, \partial_\nu)\partial_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\rho, \nabla_\sigma \nabla_\nu \partial_\mu - \nabla_\nu \nabla_\sigma \partial_\mu \rangle \\ &= \left\langle dx^\rho, \nabla_\sigma (\Gamma^\alpha_{\nu\mu} \partial_\alpha) - \nabla_\nu (\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \partial_\alpha) \right\rangle \quad (\text{regra de Leibniz}) \\ &= \left\langle dx^\rho, (\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\nu\mu}) \partial_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} \partial_\beta - (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}) \partial_\alpha + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \partial_\beta \right\rangle \\ R^\rho_{\mu\sigma\nu} &= \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}, \end{aligned} \quad (2.145)$$

onde foi usado o fato de $[\partial_\rho, \partial_\nu] = 0$, bem como $\langle dx^\rho, \partial_\alpha \rangle = \delta^\rho_\alpha$.

Agora, para caso do frame $\{\mathbf{e}_a\}$ e do coframe $\{\boldsymbol{\vartheta}^a\}$, segue que

$$\begin{aligned} R^a_{bcd} &= \langle \boldsymbol{\vartheta}^a, \mathbf{R}(\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_d)\mathbf{e}_b \rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{\vartheta}^a, \nabla_c \nabla_d \mathbf{e}_b - \nabla_d \nabla_c \mathbf{e}_b - \nabla_{[\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_d]} \mathbf{e}_b \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{\vartheta}^a, \nabla_c (\omega^e_{db} \mathbf{e}_e) - \nabla_d (\omega^e_{cb} \mathbf{e}_e) + \Omega^e_{cd} \nabla_e \mathbf{e}_b \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{\vartheta}^a, \mathbf{e}_c (\omega^e_{db}) \mathbf{e}_e + \omega^e_{db} \omega^f_{ce} \mathbf{e}_f - \mathbf{e}_d (\omega^e_{cb}) \mathbf{e}_e - \omega^e_{cb} \omega^f_{de} \mathbf{e}_f + \Omega^e_{ad} \omega^f_{eb} \mathbf{e}_f \right\rangle \\ R^a_{bcd} &= \mathbf{e}_c (\omega^a_{db}) - \mathbf{e}_d (\omega^a_{cb}) + \omega^e_{db} \omega^a_{ce} - \omega^e_{cb} \omega^a_{de} + \Omega^e_{cd} \omega^a_{eb}, \end{aligned} \quad (2.146)$$

onde foi usado o resultado $[\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_d] = -\Omega^e_{cd} \mathbf{e}_e$.

Em relação ao tensor de curvatura, é possível construir dois objetos a partir dele: o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. O tensor de Ricci é obtido a partir da contração do primeiro e terceiro índices da equação (2.145) ou da equação (2.146). Para o caso da curvatura com índices holonômicos, segue que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\rho_{\mu\rho\nu} \\ R_{\mu\nu} &= \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\rho_{\rho\alpha} - \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Embora a definição do tensor de curvatura tenha se referido apenas a uma variedade dotada de uma conexão, a construção da geometria feita até aqui permite considerar que, além da conexão, a variedade também seja dotada de uma métrica. Com isso, torna-se possível construir o escalar de curvatura, que é dado por

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.148)$$

Nesse ponto, é válido analisar o efeito da curvatura na geometria. Para demonstrar isso, considera-se o transporte paralelo de um dado vetor v^μ partindo do ponto p ao ponto s , por dois caminhos diferentes. A ideia é que esses dois caminhos diferentes formem, juntos, um caminho fechado. Primeiro, considera-se o caminho A : transporta-se o vetor paralelamente do ponto $p = x^\mu$ ao ponto $q = x^\mu + q^\mu$ e posteriormente se faz o mesmo procedimento do ponto q ao ponto $s = x^\mu + q^\mu + r^\mu$. Segundo, faz-se o mesmo procedimento anterior, porém pelo caminho B : transporta-se paralelamente o vetor do ponto p ao ponto $r = x^\mu + r^\mu$ e em seguida do ponto r ao ponto s . Em ambos os caminhos A e B , o vetor foi transportado por um deslocamento infinitesimal, denotados por q^μ e r^μ .

Desse modo, calcula-se a diferença entre os vetores finais, isto é, a diferença entre o vetor transportado paralelamente pelo caminho A , denotado por $v_{p \rightarrow q \rightarrow s}^\mu$, e o vetor transportado paralelamente pelo caminho B , denotado por $v_{p \rightarrow r \rightarrow s}^\mu$. Desse modo, é possível mostrar que (BAMBI, 2018)

$$v_{p \rightarrow q \rightarrow s}^\mu - v_{p \rightarrow r \rightarrow s}^\mu = R^\mu_{\sigma\rho\nu} v^\sigma r^\rho q^\nu. \quad (2.149)$$

Com isso, percebe-se que a curvatura mede exatamente o quanto o transporte paralelo depende do caminho, de modo que o vetor sofre uma mudança em sua orientação, conforme ilustra Figura 5. Para mais detalhes, recomenda-se ao leitor (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973; D'INVERNO, 1992).

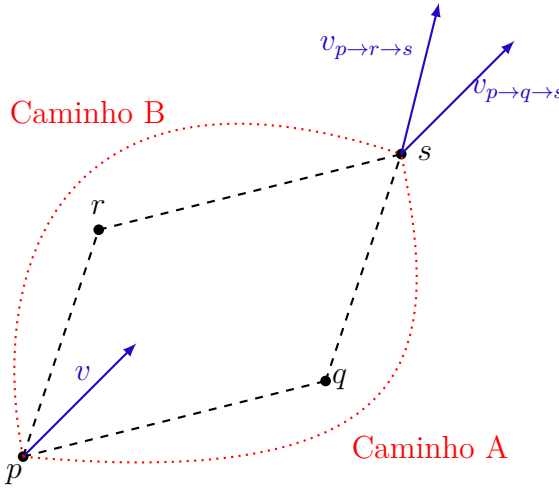


Figura 5 – Representação do efeito da curvatura na geometria. Adaptado de (BAMBI, 2018).

Com a definição da curvatura dada, o próximo passo é em direção à definição da torção.

Definição 2.29. (Torção) Dada uma variedade (L_4) dotada de uma conexão ∇ , define-se o tensor de torção $\mathbf{T} : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ por

$$\mathbf{T}(u, v) \equiv \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] \quad (2.150)$$

e tem $\mathbf{T}(u, v) = -\mathbf{T}(v, u)$ como propriedade, em que $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

De maneira similar ao caso da curvatura, é possível também obter as componentes da torção, seja com índices holonômicos ou não holonômicos. Para o primeiro caso, sejam as bases $\{\partial_\mu\}$ e $\{dx^\mu\}$ coordenada e dual, respectivamente. Da definição (2.150), segue que

$$\begin{aligned} T^\lambda_{\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, \mathbf{T}(\partial_\mu, \partial_\nu) \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \nabla_\mu \partial_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \partial_\rho \rangle \\ T^\lambda_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Analogamente, para se obter a torção com índices não holonômicos, considera-se o frame e coframe. Portanto,

$$\begin{aligned} T^a_{bc} &= \langle \vartheta^a, \mathbf{T}(\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c) \rangle \\ &= \langle \vartheta^a, \nabla_b \mathbf{e}_c - \nabla_c \mathbf{e}_b - [\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c] \rangle \\ &= \langle \vartheta^a, \omega^e_{bc} \mathbf{e}_e - \omega^e_{cb} \mathbf{e}_e + \Omega^e_{bc} \mathbf{e}_e \rangle \\ T^a_{bc} &= \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} + \Omega^a_{bc}, \end{aligned} \quad (2.152)$$

conforme se queria. Em relação à torção, é possível se construir o seguinte traço

$$T_\mu = T^\lambda_{\lambda\mu} = -T^\lambda_{\mu\lambda}. \quad (2.153)$$

Para se entender o efeito da torção na geometria, é válido o seguinte raciocínio. Sejam dois vetores u^μ e v^μ definidos em um mesmo ponto $p = x^\mu$. Agora, transporta-se paralelamente cada um deles ao longo um do outro. Primeiro, parte-se do ponto p e transporta-se v^μ_p ao longo de u^μ até o ponto $r = x^\mu + r^\mu$, de modo que se obtém o vetor $v^\mu_{p \rightarrow r}$. De maneira análoga, faz-se o transporte paralelo do vetor u^μ a partir p ao longo v^μ , também em p , até o ponto $q = x^\mu + q^\mu$, onde nesse caso se obtém o vetor $u^\mu_{p \rightarrow q}$. É possível perceber que esse procedimento, em princípio, lembra a ideia de se construir um paralelogramo. No entanto, na presença de torção, esse paralelogramo não é fechado, de modo que a diferença entre os vetores é proporcional a torção, isto é,

$$v^\mu_{p \rightarrow r} - u^\mu_{p \rightarrow q} = T^\mu_{\rho\sigma} q^\rho r^\sigma, \quad (2.154)$$

onde q^ρ e r^σ são deslocamentos infinitesimais. Com isso, percebe-se que a torção se relaciona com não o fechamento do paralelogramo, conforme ilustra a figura a seguir.

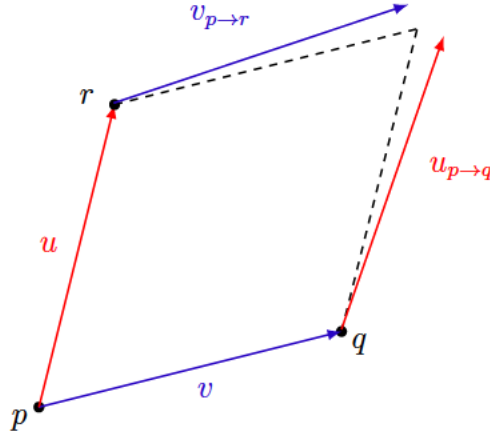


Figura 6 – Efeito da torção na geometria implica o não fechamento do paralelogramo.
Fonte: gerado pelo Autor.

Agora que se tem uma geometria com curvatura e torção presentes, é válido destacar que o tensor de curvatura satisfaz as seguintes identidades (ORTÍN, 2004; BAHAMONDE et al., 2023):

$$R^\mu_{[\sigma\rho\nu]} + \nabla_{[\sigma} T^\mu_{\rho\nu]} + T^\mu_{\lambda[\sigma} T^\lambda_{\rho\nu]} = 0, \quad (2.155)$$

$$\nabla_{[\lambda} R^\mu_{|\sigma|\rho\nu]} + R^\mu_{\nu\beta[\lambda} T^\beta_{\rho\nu]} = 0. \quad (2.156)$$

que são as identidades de Bianchi, válidas na presença da curvatura e da torção na geometria.

2.4.2 Não metricidade

Uma vez que a variedade é dotada de uma métrica e uma conexão, pode-se definir a não metricidade.

Definição 2.30. *Dada uma variedade (L_4, g) dotada de uma métrica e de uma conexão, define-se o tensor de não metricidade como*

$$Q(u, v, w) \equiv (\nabla_u g)(v, w), \quad (2.157)$$

onde $u, v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Com a definição da não metricidade dada, o passo seguinte é determinar suas componentes, tal como foi feito nos casos anteriores. Dado que $g = g_{ab} \vartheta^a \otimes \vartheta^b$, segue

$$\begin{aligned} Q_{acb} &= Q(e_a, e_b, e_c) = [\nabla_a (g_{de} \vartheta^d \otimes \vartheta^e)](e_b, e_c) \\ &= e_a[g_{de}] \vartheta^d(e_b) \vartheta^e(e_c) + [g_{de} (\nabla_a \vartheta^d) \otimes \vartheta^e + g_{de} \vartheta^d \otimes (\nabla_a \vartheta^e)](e_b, e_c) \\ &= e_a[g_{de}] \delta_b^d \delta_c^e + g_{de} (-\omega_{af}^d) \vartheta^f \otimes \vartheta^e(e_b, e_c) + g_{de} (-\omega_{af}^e) \vartheta^d \otimes e_f(e_b, e_c) \\ &= e_a[g_{bc}] - g_{de} \omega_{af}^d \vartheta^f(e_b) \vartheta^e(e_c) - g_{de} \omega_{af}^e \vartheta^d(e_b) \vartheta^f(e_c) \\ Q_{acb} &= e_a[g_{bc}] - \omega_{cab} - \omega_{bac}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

A partir da não metricidade, pode-se construir os seguintes traços:

$$Q_a = g^{bc} Q_{abc} = Q_{ab}{}^b \quad \text{e} \quad \tilde{Q}_c = g^{ba} \tilde{Q}_{abc} = Q^b{}_{bc}. \quad (2.159)$$

Como é sabido, a métrica é responsável por fornecer a noção de comprimentos e ângulos. Sejam dois vetores u^μ e v^μ . Supõe-se agora que ambos são transportados paralelamente ao longo da curva c , representada por $x^\lambda(t)$. Da definição de derivada absoluta, em princípio, é natural supor que o produto interno entre u^μ e v^μ seja preservado. No entanto,

$$\nabla_\lambda(g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})u^\mu v^\nu + (\nabla_\lambda u^\mu)g_{\mu\nu}v^\nu + (\nabla_\lambda v^\nu)g_{\mu\nu}u^\mu. \quad (2.160)$$

Dado que ambos os vetores são transportados paralelamente ao longo da curva, os dois últimos termos são nulos, de modo que

$$\nabla_\lambda(g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})u^\mu v^\nu = Q_{\lambda\mu\nu}u^\mu v^\nu, \quad (2.161)$$

o que permite observar que a não metricidade não preserva o ângulo entre vetores transportados paralelamente. Além disso, caso seja considerado apenas um vetor u^μ ao longo da curva c , tal que $u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, de acordo com o raciocínio anterior, nota-se que

$$\nabla_\lambda(u^\mu u_\mu) = Q_{\lambda\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad (2.162)$$

de modo que, além da não preservação dos ângulos, os vetores têm seus comprimentos alterados ao longo do transporte paralelo. A Figura a seguir ilustra bem esse efeito geométrico.

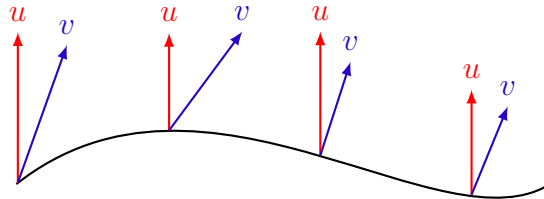


Figura 7 – Efeito da não metricidade na geometria. Fonte: gerado pelo Autor.

2.4.3 Decomposição da conexão afim

Agora, será dado um passo em busca do caso de conexão mais geral que, conforme será visto, tem contribuições da não metricidade e da torção. Para isso, é necessário uma definição formal do que se trata a geometria métrica-afim.

Definição 2.31. (Geometria Métrica-Afim) Dados $u, v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Uma geometria é dita métrica-afim se satisfizer as seguintes propriedades:

(1)

$$T(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v], \quad (2.163)$$

(2)

$$v[\mathbf{g}(u, w)] = \mathbf{g}(\nabla_v u, w) + \mathbf{g}(u, \nabla_v w) + \mathbf{Q}(v, u, w) \quad (2.164)$$

Da primeira condição, nota-se o caráter não simétrico da conexão, conforme visto na definição da torção (2.151). Já a segunda, diz respeito à não compatibilidade da conexão. A partir das propriedades dadas acima, segue a seguinte proposição.

Proposição 2.32. (*Decomposição da Conexão Afim*) *Dada uma geometria métrica-afim, a decomposição da conexão afim é dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(u, \nabla_w v) &= \frac{1}{2} \left\{ v[\mathbf{g}(u, w)] + w[\mathbf{g}(v, u)] - u[\mathbf{g}(w, v)] \right. \\ &\quad - \mathbf{g}(w, [v, u]) - \mathbf{g}(u, [v, w]) - \mathbf{g}(v, [w, u]) \\ &\quad - \mathbf{g}(w, \mathbf{T}(v, u)) - \mathbf{g}(u, \mathbf{T}(v, w)) - \mathbf{g}(v, \mathbf{T}(w, u)) \\ &\quad \left. - \mathbf{Q}(v, u, w) - \mathbf{Q}(w, v, u) + \mathbf{Q}(u, w, v) \right\}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

A demonstração da equação anterior pode ser realizada via permutações cíclicas entre v, u, w na equação (2.164) e pelo uso da equação (2.163) para isolar os termos das derivadas.

A partir da equação (2.165), ao tomar $u = \mathbf{e}_d$, e $v = \mathbf{e}_c$ e $w = \mathbf{e}_b$ e, após algumas manipulações, fazer uma contração com g^{ad} , obtém-se a conexão para o caso geral

$$\begin{aligned} \omega_{bc}^a &= \frac{1}{2} g^{ad} \{ \mathbf{e}_c[g_{db}] + \mathbf{e}_b[g_{cd}] - \mathbf{e}_d[g_{bc}] \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ \Omega_{bc}^a + \Omega_{cb}^a - \Omega_{bc}^a \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ T_{bc}^a + T_{cb}^a - T_{bc}^a \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ Q_{bc}^a + Q_{cb}^a - Q_{bc}^a \}. \end{aligned} \quad (2.166)$$

A partir da equação anterior, é possível fazer as definições seguintes:

$$\omega_{bc}^a = \dot{\omega}_{bc}^a + N_{bc}^a, \quad (2.167)$$

$$\dot{\omega}_{bc}^a = \bar{\Gamma}_{bc}^a + \bar{\Omega}_{bc}^a, \quad (2.168)$$

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a \equiv \frac{1}{2} g^{ad} (e_b[g_{cd}] + e_c[g_{bd}] - e_d[g_{bc}]), \quad (2.169)$$

$$\bar{\Omega}_{bc}^a \equiv \frac{1}{2} (\Omega_{bc}^a + \Omega_{cb}^a - \Omega_{bc}^a), \quad (2.170)$$

$$N_{bc}^a \equiv K_{bc}^a + L_{bc}^a, \quad (2.171)$$

$$K_{bc}^a = -\frac{1}{2} (T_{bc}^a + T_{cb}^a - T_{bc}^a), \quad (2.172)$$

$$L_{bc}^a = -\frac{1}{2} (Q_{bc}^a + Q_{cb}^a - Q_{bc}^a), \quad (2.173)$$

onde N^a_{bc} , K^a_{bc} , e L^a_{bc} são os tensores de distorção, contorção e deformação, respectivamente, e $\hat{\omega}^a_{bc}$ são os coeficientes da conexão de Levi-Civita²¹. (O símbolo “o” denota a conexão de Levi-Civita, sendo utilizado para distingui-la dos demais casos de conexão.) É importante destacar que tais objetos também podem ser expressos em termos de índices holonômicos, tal que

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + N^\lambda_{\mu\nu} \quad (2.174)$$

onde $\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel. Nota-se que (2.169) se reduz aos símbolos de Christoffel quando a base $\{e_a\}$ é holonômica e, além disso, nesse caso, a equação (2.170) é identicamente nula, uma vez que o objeto de não holonomicidade se anula.

Com as definições acima dadas, nota-se que houve a construção de uma geometria mais geral, da qual surgem casos particulares a depender de qual tensor é considerado nulo (JIMENEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019). Neste trabalho, os casos de interesse são aqueles que caracterizam o teleparalelismo. A Figura 8 ilustra os casos particulares da métrica-afim.

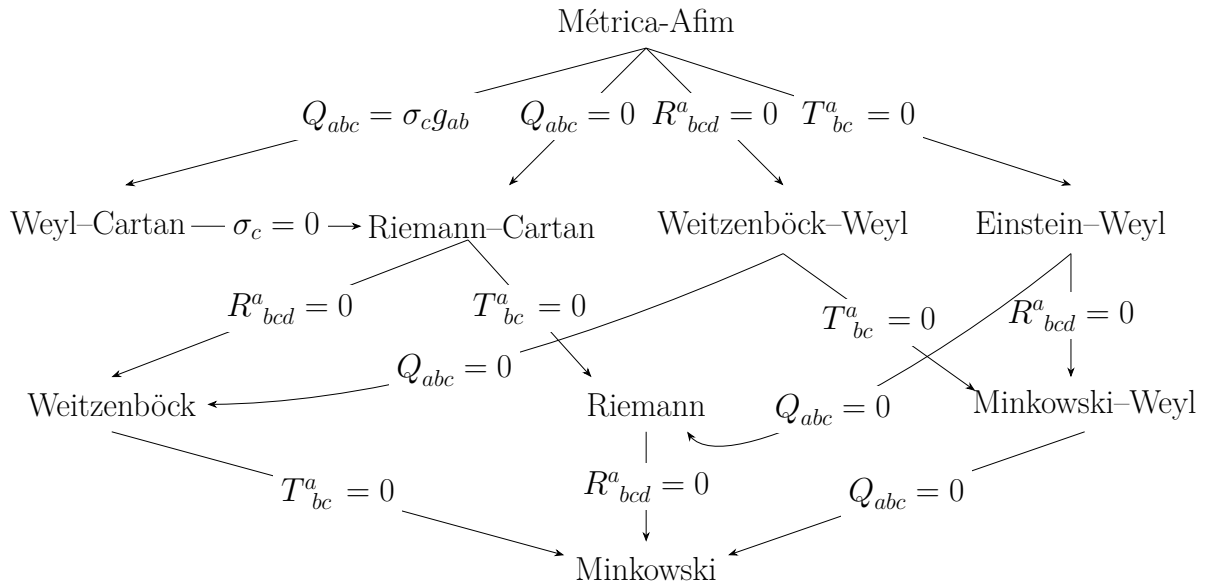


Figura 8 – Diagrama das geometrias associadas ao formalismo métrico-afim, mostrando os casos particulares obtidos pela anulação dos tensores de curvatura R^a_{bcd} , torção T^a_{bc} e não metricidade Q_{abc} . Fonte: gerado pelo Autor.

Com respeito aos casos particulares, é válido destacar o riemanniano (pseudo-riemanniano) e por qual conexão este é caracterizado.

Definição 2.33. (Conexão Riemanniana) *Sejam $u, v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Uma variedade V_4 é dita riemanniana se a conexão for simétrica e compatível com a métrica, isto é*

²¹ É muito comum na literatura se referir a esses coeficientes como “conexão espinorial”, embora não sejam os coeficientes da conexão afim expandidos em termos de espinores.

- (1) *Simétrica*: $\mathring{\nabla}_u v - \mathring{\nabla}_v u + [u, v] = 0$;
- (2) *Métrica-compatível*: $v[\mathbf{g}(u, w)] = \mathbf{g}(\mathring{\nabla}_v u, w) + \mathbf{g}(u, \mathring{\nabla}_v w)$.

Neste caso, $\mathring{\nabla}$ é chamada de conexão de Levi-Civita.

A conexão desse espaço é caracterizada pela chamada conexão de Levi-Civita, cujos coeficientes na base coordenada são dados por

$$\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.175)$$

que são os símbolos de Christoffel, um caso particular de (2.169). Nesse caso, o tensor de curvatura, chamado por tensor de Riemann, é dado por

$$\mathring{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^\rho_{\sigma\mu} + \mathring{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} \mathring{\Gamma}^\rho_{\sigma\alpha} - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\sigma\mu} \mathring{\Gamma}^\rho_{\nu\alpha}, \quad (2.176)$$

e satisfaz as seguintes propriedades

$$\mathring{R}_{\mu\sigma\rho\nu} = -\mathring{R}_{\sigma\mu\rho\nu}, \quad \mathring{R}_{\mu\sigma\rho\nu} = -\mathring{R}_{\mu\sigma\nu\rho}, \quad \mathring{R}_{\mu\sigma\rho\nu} = \mathring{R}_{\rho\nu\mu\sigma}. \quad (2.177)$$

Além disso, as identidades de Bianchi (2.155) e (2.156) anteriormente mencionadas se reduzem a

$$\mathring{R}^\mu_{[\sigma\rho\nu]} = 0 \quad (2.178)$$

$$\mathring{\nabla}_{[\lambda} \mathring{R}^\mu_{|\sigma|\rho\nu]} = 0. \quad (2.179)$$

Das propriedades (2.177) é possível observar que a contração dos dois primeiros índices ou dos últimos implicam a nulidade do tensor de Riemann, enquanto a última identidade (2.179) desempenha um papel fundamental na RG, conforme será visto no capítulo 4.

2.4.4 Decomposição do tensor de curvatura

A decomposição do caso mais geral de conexão afim possibilitou a construção de uma conexão que depende também da contribuição da não holonomicidade, da torção e da não metricidade, conforme fornecida anteriormente na equação (2.166). Essa decomposição permitirá escrever o tensor de curvatura da conexão afim em termos do tensor de curvatura riemanniano. Para desenvolver essa derivação, será utilizado o caso de índices holonômicos, ou seja, a conexão dada na equação (2.174):

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + N^\lambda_{\mu\nu}. \quad (2.180)$$

A decomposição do tensor de curvatura consiste em, a partir da equação (2.145), isto é,

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}, \quad (2.181)$$

substituir $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + N^\lambda_{\mu\nu}$ em cada termo da equação anterior que contenha $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Após algumas manipulações, o cálculo leva diretamente à equação seguinte:

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \mathring{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} + \mathring{\nabla}_\sigma N^\rho_{\nu\mu} - \mathring{\nabla}_\nu N^\rho_{\sigma\mu} + N^\rho_{\sigma\alpha} N^\alpha_{\nu\mu} - N^\alpha_{\sigma\mu} N^\rho_{\nu\alpha}, \quad (2.182)$$

onde $\mathring{R}^\rho_{\mu\sigma\nu}$ é o tensor de Riemann (2.176). No que diz respeito à equação anterior, é possível notar que esta consiste em um caso de tensor de curvatura mais geral, que tem consigo contribuições do tensor de Riemann, bem como dos tensores de torção e de não metricidade devido à presença do tensor de distorção $N^\rho_{\mu\nu}$.

A equação anterior proporciona a obtenção do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, fornecidos respectivamente nas equações (2.147) e (2.148). Desse modo, a contração do primeiro e terceiro índices fornecerá

$$R_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\rho N^\rho_{\nu\mu} - \mathring{\nabla}_\nu N^\rho_{\rho\mu} + N^\rho_{\rho\alpha} N^\alpha_{\nu\mu} - N^\alpha_{\rho\mu} N^\rho_{\nu\alpha}. \quad (2.183)$$

Para a obtenção do escalar de curvatura, o procedimento é contrair a equação anterior com $g^{\mu\nu}$. Dessa forma, o escalar de curvatura é dado por

$$R = \mathring{R} + \mathring{\nabla}_\rho N^{\rho\mu}_{\mu} - \mathring{\nabla}_\nu N^{\rho\nu}_{\rho} + N, \quad (2.184)$$

onde

$$N = N^\rho_{\rho\alpha} N^{\alpha\mu}_{\mu} - N^\alpha_{\rho\mu} N^{\rho\mu}_{\alpha} \quad (2.185)$$

e $\mathring{R}$ é o escalar de curvatura da conexão de Levi-Civita. É válido destacar que na obtenção da equação (2.184) foi usado o fato de que $g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_\rho N^\rho_{\nu\mu} = \mathring{\nabla}_\rho (g^{\mu\nu} N^\rho_{\nu\mu})$, pois, como já estabelecido anteriormente, a conexão de Levi-Civita é compatível com a métrica: $\mathring{\nabla}_\rho g_{\mu\nu} = 0$.

2.4.5 Curvas autoparalelas e geodésicas

Na Definição 2.27 foi definida a noção de derivada absoluta de v ao longo de uma curva e a noção de um vetor transportado paralelamente ao longo dessa curva, mas nada foi mencionado ou especificado sobre a característica da curva. Existem dois tipos de curvas de grande interesse para a física, apresentadas a seguir: as autoparalelas e as geodésicas.

De acordo com a definição anteriormente citada, é dito que um vetor é transportado paralelamente ao longo de uma curva se $\nabla_u v = 0$. No entanto, há o caso particular em que o vetor tangente à curva pode ser transportado paralelamente ao longo de si mesmo, tal que $\nabla_u u = 0$. Nesse sentido, segue a definição.

Definição 2.34. (Autoparalela) *Uma curva c é dita autoparalela se o vetor tangente à curva é transportado paralelamente ao longo da curva, tal que*

$$\nabla_u u = 0. \quad (2.186)$$

A equação anterior tem sua representação em componentes da seguinte forma:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad (2.187)$$

onde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é a conexão afim geral (2.174). Uma curva autoparalela representa a curva mais reta possível.

A próxima curva a ser caracterizada é a curva geodésica. Na geometria plana é sabido que a menor distância entre dois pontos é a reta que liga esses pontos. Nesse sentido, o questionamento agora, diante de uma geometria mais geral (não euclidiana), é saber qual curva é vista como a menor distância entre dados dois pontos. Essa curva é chamada curva geodésica e é definida por

Definição 2.35. (Geodésica métrica) *Uma curva geodésica é uma curva tal que dada uma curva c , o seu comprimento, definido por*

$$s = \int_{p_1}^{p_2} ds, \quad (2.188)$$

é extremizado (ou estacionário).

Uma vez que $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$, a equação anterior é reescrita da seguinte forma

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (2.189)$$

Para exigir que s seja extremizado, considera-se pequenas variações $x^\mu(t) \rightarrow x^\mu(t) + \delta x^\mu$ tais que se $\delta x^\mu(t_1) = \delta x^\mu(t_2) = 0$. Desse modo, pelo princípio da mínima ação, que será discutido no próximo capítulo, é possível obter (D'INVERNO, 1992)

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (2.190)$$

As equações (2.187) e (2.190) evidenciam que as autoparalelas e as geodésicas coincidem no caso de uma geometria riemanniana. Todavia, a partir da equação (2.174), é possível perceber que no caso de uma geometria mais geral, a curva autoparalela é

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = -N^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}, \quad (2.191)$$

e nesse caso ambas as curvas não coincidem, isto é, a curva mais reta não corresponde à menor distância entre dois pontos.

2.4.6 Objetos geométricos na linguagem de formas diferenciais

O formalismo na linguagem das formas diferenciais será imprescindível no desenvolvimento deste trabalho. Até o momento, foram definidas na variedade: a métrica,

as tétradas e a conexão e, conforme visto, foram fornecidas para cada um dos casos, a depender da natureza dos índices (holonômicos ou não holonômicos), nas suas formas componentes.

Nesse sentido, com a presença da métrica g_{ab} e do coframe ϑ^a , pode-se definir a conexão 1-forma, que é dada por

$$\Gamma_a^b = \omega_{ca}^b \vartheta^c. \quad (2.192)$$

Como discutido anteriormente, a introdução de uma conexão na geometria fornece um operador diferencial covariante, a qual é chamada de derivada covariante. Com esse raciocínio, uma vez que a descrição da geometria passa a ser na linguagem de formas diferenciais, a conexão 1-forma fornece o que se conhece por derivada exterior covariante, denotada por $\mathbf{D}$, cuja ação sobre uma dada p -forma é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\omega^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_p} &= d\omega^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_p} \\ &+ \Gamma_c^{a_1} \wedge \omega^{ca_2 \dots a_p}_{b_1 \dots b_p} + \dots + \Gamma_c^{a_p} \omega^{a_1 \dots a_{p-1}c}_{b_1 \dots b_p} \\ &- \Gamma_{b_1}^c \omega^{a_1 \dots a_p}_{cb_2 \dots b_p} - \dots - \Gamma_{b_p}^c \omega^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_{p-1}c}. \end{aligned} \quad (2.193)$$

$\mathbf{D}$ satisfaz as mesmas propriedades da derivada exterior d , exceto a condição de ser nilpotente²². Uma vez definida a derivada covariante exterior, tornam-se possíveis as seguintes definições:

$$\mathbf{R}_a^b = d\Gamma_a^b - \Gamma_a^c \wedge \Gamma_c^b = \frac{1}{2} R_{acd}^b \vartheta^c \wedge \vartheta^d, \quad (2.194)$$

$$\mathbf{T}^a = \mathbf{D}\vartheta^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a \vartheta^b \wedge \vartheta^c, \quad (2.195)$$

$$\mathbf{Q}_{ab} = -\mathbf{D}g_{ab} = -Q_{\lambda ab} dx^\lambda, \quad (2.196)$$

que são a curvatura 2-forma, a torção 2-forma e a não metricidade 1-forma, respectivamente.

Além disso, nesse formalismo, é válido considerar as identidades de Bianchi, que são dadas por (HEHL et al., 1995)

$$\mathbf{D}\mathbf{R}_a^b = 0 \quad (2.197)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{T}^a = \mathbf{R}_b^a \vartheta^b \quad (2.198)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{Q}_{ab} = 2\mathbf{R}_{(ab)}. \quad (2.199)$$

Em relação às convenções adotadas aqui para as p -formas acima, é importante destacar que são as mesmas de (HEHL et al., 1995). Porém, as componentes são diferentes.

²² Para mais detalhes, veja a página 372 de (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e a equação(3.5.5) de (HEHL et al., 1995). Em relação às propriedades da derivada covariante exterior, recomenda-se o apêndice A de (GASPERINI, 2017).

3 Teoria de Gauge Métrica-Afim da Gravitação

O capítulo 2 permitiu a construção do caso mais geral de geometria: a geometria métrica-afim. Com essa estrutura geométrica já estabelecida, torna-se possível falar sobre a Teoria de Gauge Métrica-Afim da Gravitação (MAG), uma vez que ela é formulada nesse cenário geométrico. Dada a generalidade dessa estrutura na qual essa teoria se sustenta, é natural considerar a MAG como uma formulação mais abrangente para a descrição clássica da gravitação. Nessa formulação, a téttrade, a métrica e a conexão afim são tratadas como variáveis independentes e, além disso, a presença de curvatura, torção e não metricidade funcionam como meios de descrever a gravidade. Essa generalidade expressa a interpretação da gravitação como uma teoria de gauge associada a simetrias afins gerais.

Embora seja necessária uma formulação que explore de modo aprofundado a estrutura de uma teoria de gauge, este capítulo será abordado de forma mais direta¹. O foco deste capítulo será voltado para a construção lagrangiana da MAG, com a identificação das variáveis fundamentais e a derivação das equações de campo a partir da ação. Essa perspectiva oferece uma apresentação suficiente para os objetivos deste trabalho, sem necessariamente recorrer ao mecanismo de gauge mais amplo presente nas literaturas citadas na primeira nota de rodapé.

A organização do capítulo segue a estrutura seguinte. A seção inicial apresenta uma visão geral da MAG e introduz suas grandezas geométricas básicas. Em seguida, é feita uma revisão dos conceitos essenciais do formalismo lagrangiano, necessária para a formulação variacional da teoria. A terceira seção expõe o maquinário lagrangiano da MAG e suas respectivas equações de campo. Por fim, a atenção é voltada ao caso teleparalelo, que é o cenário em que a curvatura se anula e a dinâmica gravitacional passa a depender exclusivamente da torção e da não metricidade, que é o foco deste trabalho e, diante disso, a condição de teleparalelismo é imposta.

¹ Para mais detalhes, recomenda-se as seções 3.1 a 3.3 de (HEHL et al., 1995) e o capítulo 2 de (GRONWALD, 1997). No que diz respeito a teorias de gauge, recomenda-se (TRAUTMAN, 1970; TRAUTMAN, 1981) e o capítulo 3 de (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012).

3.1 Introdução à MAG

A MAG consiste em uma teoria de gauge da gravitação cuja estrutura geométrica é o caso mais geral de geometria²: uma geometria na qual a conexão afim não é sujeita a restrições, conforme visto na seção 2.4.3. Assim como o eletromagnetismo é uma teoria de gauge baseada no grupo de simetria $U(1)$, a MAG é baseada no grupo afim rígido $A(4, \mathbb{R}) := \mathbb{R}^4 \rtimes GL(4, \mathbb{R})$, isto é, o produto semidireto entre o grupo das translações e o grupo das transformações lineares gerais.

Tal como na eletrodinâmica, na qual o potencial é a 1-forma $\mathbf{A}$ (o quadripotencial A_μ) e seu respectivo campo de força é a 2-forma $\mathbf{F}$ (o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$)³, a MAG também possui os seus respectivos “potenciais” e “campos de força”. Como mencionado anteriormente, essa teoria trata a métrica g_{ab} , o coframe ϑ^a e a conexão Γ_a^b como variáveis independentes. Nesse caso, esses são os potenciais da MAG, enquanto seus respectivos campos de força são a não metricidade 1-forma $\mathbf{Q}_{ab}$, a torção 2-forma $\mathbf{T}^a$ e a curvatura 2-forma $\mathbf{R}_a^b$, definidos nas equações (2.194)-(2.195).

Como motivação para a próxima seção, é fundamental a discussão a seguir. Como em toda teoria física, um de seus objetivos é a obtenção das equações que as regem, as chamadas equações de campo. São essas equações, por meio de suas soluções, que possibilitam o entendimento de diversos sistemas físicos e de fenômenos da natureza. Conforme se pode constatar ao longo da história, essas equações podem ser obtidas tanto por argumentos físicos quanto pelo chamado princípio variacional. A MAG é um caso de teoria que se enquadra no segundo caso: trata-se de uma teoria que é formulada a partir do princípio variacional. Uma vez que a MAG é uma teoria da gravitação, é válido considerar o princípio variacional no contexto da gravitação. Conforme discute (FERRARIS; FRANCAVIGLIA; REINA, 1982), existem três tipos de princípios variacionais: o métrico, o de Palatini (ou métrico-afim) e o puramente afim. A seguir, são discutidos os dois primeiros e, em seguida, o formalismo da MAG será introduzido.

No princípio variacional métrico, desenvolvido por Hilbert, Einstein e Lorentz, o único potencial considerado é a métrica. Isso define uma geometria riemanniana/pseudo-riemanniana, de modo que a geometria é descrita completamente pela métrica. Nesse sentido, a conexão (2.174) se reduz à conexão de Levi-Civita (2.175) e por sua vez o tensor de curvatura é construído a partir de (2.176). Somado a isso, é válido destacar, há condição de compatibilidade com a métrica. Nesse caso, na presença de matéria Ψ , a ação é dada por

$$S[g_{ab}, \Psi] = S_g[g_{ab}] + S_m[g_{ab}, \Psi], \quad (3.1)$$

² A palavra “geral” deve ser entendida no contexto que este trabalho aborda, pois é possível ter geometrias ainda mais gerais: geometrias em variedades complexas, com métricas assimétricas e outras.

³ Para uma discussão consideravelmente detalhada sobre o eletromagnetismo no formalismo de formas diferenciais, recomenda-se ao leitor o capítulo 4 de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973).

onde S_g e S_m são as ações gravitacional e da matéria, respectivamente. As equações de campo são obtidas por meio de variações da ação (3.1) com respeito à métrica.

No princípio variacional de Palatini⁴, é assumido que tanto a métrica quanto a conexão são variáveis independentes. Nesse caso, não são necessariamente assumidas as condições de compatibilidade nem que conexão é a de Levi-Civita. Todavia, há uma consideração a ser feita: a matéria não se acopla à conexão, de modo que a ação da matéria só depende da métrica e de seu respectivo campo de matéria. Portanto, para esse caso, a ação é dada por

$$S[g_{ab}, \Gamma_a^b, \Psi] = S_g[g_{ab}, \Gamma_a^b] + S_m[g_{ab}, \Psi], \quad (3.2)$$

de modo que as equações de campo são obtidas, agora, através de variações com respeito à métrica e à conexão.

À primeira vista, o leitor pode se questionar no que diz respeito ao princípio de Palatini ser chamado de métrico-afim, de acordo com (FERRARIS; FRANCAVIGLIA; REINA, 1982), e pensar que esse princípio e a MAG se tratam da mesma coisa. No entanto, isso não é correto. Embora a MAG trate a métrica, a tetrada e a conexão como variáveis independentes, há cenários em que o formalismo das tétradas pode não ser abordado e a geometria ser caracterizada somente pela métrica e pela conexão. Ainda assim, há uma diferença essencial: na MAG, considera-se a possibilidade de que a matéria se acople à conexão (HEHL; KERLICK; Von der Heyde, 1976). Assim, a ação da matéria passa a depender da conexão também. Dessa forma, na MAG, a ação é dada por (sem tétradas)

$$S[g_{ab}, \Gamma_a^b, \Psi] = S_g[g_{ab}, \Gamma_a^b] + S_m[g_{ab}, \Gamma_a^b, \Psi]. \quad (3.3)$$

Para concluir a discussão dessa seção, retorna-se ao caso geral, no qual métrica, coframe e a conexão estão presentes. Nesse caso, ação (3.3) é reescrita como

$$S[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b, \Psi] = S_g[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b] + S_m[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b, \Psi]. \quad (3.4)$$

Variações da ação da matéria com respeito à métrica, ao coframe e à conexão permitem definir o que se conhece por correntes de matéria, que são definidas por

$$\sigma^{ab} \equiv 2 \frac{\delta L_m}{\delta g_{ab}}, \quad \Sigma_a \equiv \frac{\delta L_m}{\delta \vartheta^a}, \quad \Delta^a_b \equiv \frac{\delta L_m}{\delta \Gamma_a^b}, \quad (3.5)$$

e conhecidas, respectivamente, por corrente de energia e momento métrica (4-forma), corrente de energia e momento canônica (3-forma) e corrente de hipermomento (3-forma) (HEHL; KERLICK; HEYDE, 1976a; HEHL; KERLICK; HEYDE, 1976b; HEHL; KERLICK; HEYDE, 1976c). Na seção 3.3, a derivação de tais objetos será abordada com mais detalhes. A Tabela a seguir fornece o panorama da MAG.

⁴ Na realidade, o que Palatini propôs foi tomar como variáveis independentes a métrica e sua derivada primeira (PALATINI, 1919). A noção de abordar o princípio variacional com a métrica e a conexão como variáveis independentes foi proposto somente em 1925 por Einstein. Para mais detalhes, veja (FERRARIS; FRANCAVIGLIA; REINA, 1982).

<i>Correntes</i>	<i>Potenciais</i>	<i>Campos de força</i>	<i>Identidades de Bianchi</i>
σ^{ab}	g_{ab}	$Q_{ab} = -Dg_{ab}$	$DQ_{ab} = 2R_{(ab)}$
Σ_a	ϑ^a	$T^a = D\vartheta^a$	$DT^a = R_b^a \wedge \vartheta^b$
Δ_a^b	Γ_a^b	$R_a^b = d\Gamma_a^b - \Gamma_a^c \wedge \Gamma_c^b$	$DR_a^b = 0$

Tabela 1 – Correntes, potenciais, campos de força e identidades de Bianchi no formalismo métrico-afim. Adaptado de (HEHL et al., 1995).

3.2 Uma revisão sobre o princípio variacional

Antes de avançar para a formulação variacional da MAG, é conveniente revisar o princípio variacional que fundamenta a dedução das equações de campo. Na seção anterior, foram apresentados os diferentes tipos de princípios variacionais no contexto das teorias da gravitação. Apesar dessas diferenças, todos os métodos se baseiam na ideia de que a dinâmica de um sistema físico pode ser obtida pela extremização de um funcional denominado ação.

Uma das propostas do presente trabalho é obter as equações de campo para um teleparalelismo generalizado, objetivo que, em princípio, só pode ser alcançado por meio do princípio variacional. Portanto, o objetivo desta seção é apresentar uma breve revisão desse princípio. Primeiramente, apresenta-se o caso para partículas e, em seguida, o princípio é estendido para o caso de campos e para a linguagem de formas diferenciais (Por simplicidade, não será abordado o caso com curvatura nesta seção).

3.2.1 Princípio variacional para partículas

A rigor, seria necessária a introdução do método a partir da definição de um funcional, mas essa parte será omitida⁵. Assim, o problema será tratado de maneira mais direta.

Como ponto de partida, considera-se um sistema físico. Nesse caso, a ação S , um funcional, entre dois instantes de tempo t_1 e t_2 , é dada por

$$S[q_m] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_m(t), \dot{q}_m(t), t) dt, \quad (3.6)$$

onde L é a lagrangiana, $q_m(t)$ são as coordenadas generalizadas que definem a configuração do sistema e $\dot{q}_m$ é a derivada temporal dessas coordenadas.

Conforme mencionado anteriormente, as equações de campo de uma teoria podem ser obtidas ao se tomar variações da ação com respeito às variáveis dinâmicas apropriadas. Introduce-se, assim, o princípio da mínima ação (também chamado de princípio de Hamilton). Esse princípio afirma que para um sistema físico descrito por uma lagrangiana, a trajetória

⁵ Para mais detalhes, consultar o capítulo 2 de (LEMONS, 2013) ou a seção 1.4.1 de (DERIGLAZOV, 2017).

entre t_1 e t_2 é tal que a ação (3.6) é estacionária, mantidos fixos seus pontos inicial e final da trajetória do espaço das configurações.

É por meio desse princípio que se obtêm as equações de campo⁶. Inicialmente, consideram-se pequenas variações na configuração do sistema, a nível infinitesimal, tais que

$$q_m(t) \rightarrow \bar{q}_m(t) = q_m(t) + \delta q_m(t), \quad (3.7)$$

com condições de contorno $\delta q_m(t_1) = 0$ e $\delta q_m(t_2) = 0$. Tal variação induz uma variação da ação:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m \right) dt. \quad (3.8)$$

Dado que a derivada d/dt comuta com δ , o segundo termo entre parênteses pode ser reescrito como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m, \quad (3.9)$$

o que consiste em fazer uma integração por partes em (3.8). Logo, de (3.9) em (3.8), chega-se a

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dadas as condições de contorno $\delta q_m(t_1) = 0$ e $\delta q_m(t_2) = 0$, nota-se que o último termo da equação anterior irá se anular. Portanto, diante desse fato, obtém-se

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m dt. \quad (3.11)$$

Conforme o princípio da mínima ação requer que S seja estacionária para pequenas variações das coordenadas generalizadas do sistema, ou seja, $\delta S = 0$ para qualquer δq_m , segue que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m dt = 0 \iff \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Com isso, chega-se às chamadas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = 0, \quad (3.13)$$

equações essas que fornecerão as equações movimento do sistema. O lado esquerdo é chamado de derivada funcional (ou derivada variacional) de S , que é definida por

$$\frac{\delta S}{\delta q_m} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}. \quad (3.14)$$

⁶ Também chamadas de equações de movimento.

Para obter as equações de movimento, constrói-se a lagrangiana apropriada e resolvem-se as equações de Euler–Lagrange. Entretanto, não há um método fundamental para determinar a lagrangiana de um sistema; diferentes lagrangianas podem ser propostas como modelos, e a escolha adequada é feita pela comparação com observações experimentais. Para uma discussão sobre como lagrangianas podem ser construídas, recomenda-se a seção 6.2 de (NĂSTASE, 2019).

3.2.2 Princípio variacional para campos

Até o momento, a abordagem discutida referiu-se, por exemplo, ao movimento de uma partícula. No entanto, o formalismo pode ser estendido para campos, como campos escalares, o campo eletromagnético e o campo gravitacional. Nesse caso, as “coordenadas” que descrevem a configuração do sistema são os campos (escalares, vetoriais ou tensoriais), que são quantidades definidas em cada ponto do espaço-tempo. A seguir, considera-se o caso de campos relativísticos.

Assim, em lugar de (3.7), tem-se agora

$$\phi_\lambda(x) \rightarrow \tilde{\phi}_\lambda(x) = \phi_\lambda(x) + \delta\phi_\lambda(x), \quad (3.15)$$

onde $\phi_\lambda(x)$ representa, no caso mais simples, um campo escalar. A expressão (3.6) generaliza-se para

$$S[\phi_\lambda] = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (3.16)$$

onde a integral é avaliada sobre todo o volume quadrimensional. É válido observar que⁷ $d^4x = c dt d^3x$, onde d^3x é o volume tridimensional. Conforme visto na seção 2.2.3, sob transformações de coordenadas gerais d^4x se transforma da forma seguinte: $d^4\bar{x} = J^{-1}d^4x$, sendo J o determinante da matriz jacobiana. Como o integrando em (3.16) deve ser invariante, $\mathcal{L}$ deve se transformar como uma densidade escalar de peso +1, sendo chamada de densidade lagrangiana. Portanto, a ação pode ser reescrita como

$$S[\phi_\lambda] = \int L dx^0, \quad L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (3.17)$$

Ao aplicar o princípio da mínima ação, obtêm-se (LEMOS, 2013; LOW, 2008)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\lambda)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\lambda} = 0, \quad (3.18)$$

as equações de Euler–Lagrange para campos. Define-se, também, a derivada funcional:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_\lambda} \equiv \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\lambda)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\lambda}. \quad (3.19)$$

⁷ Note que $dx^4 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt d^3x$, onde $x^0 = ct$.

3.2.3 Princípio variacional no formalismo de formas diferenciais

Primeiro, considera-se um campo Ψ^A , que consiste de uma p -forma (subseção 2.1.5). O campo em questão não é necessariamente especificado e, nesse sentido, pode se tratar de qualquer tipo de campo. Dessa forma, define-se a ação da seguinte forma

$$S[\Psi^A] = \int \mathbf{L}(\Psi^A, d\Psi^A), \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{L}$ é definida por

$$\mathbf{L} \equiv \mathcal{L} d^4x \equiv L\eta, \quad (3.21)$$

onde $\mathcal{L}$ é uma densidade escalar de peso +1 e η é o elemento de volume invariante.

Analogamente ao caso anterior, impõe-se ao campo Ψ^A pequenas variações tal que

$$\Psi^A \rightarrow \Psi^A + \delta\Psi^A \quad (3.22)$$

com $\delta\Psi^A$ restrito às mesmas condições de contorno anteriores abordadas. Dessa forma,

$$\delta S = \int \delta\mathbf{L} = \int \left[\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\Psi^A} + \delta(d\Psi^A) \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right]. \quad (3.23)$$

Como δ comuta com d , o segundo termo pode ser reescrito, para realizar uma integração por partes, da seguinte forma⁸

$$d(\delta\Psi^A) \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} = d \left(\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) - (-1)^p \delta\Psi^A \wedge d \left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right). \quad (3.24)$$

Com o resultado anterior, é possível introduzi-lo no segundo termo da integral, tal que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\Psi^A} + d \left(\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) - (-1)^p \delta\Psi^A \wedge d \left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) \right] \\ &= \int \left[\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\Psi^A} - (-1)^p \delta\Psi^A \wedge d \left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) \right] + \int d \left(\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Conforme as condições de contorno, o último termo se anula. Desse modo,

$$\delta S = \int \left[\delta\Psi^A \wedge \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\Psi^A} - (-1)^p \delta\Psi^A \wedge d \left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) \right]. \quad (3.26)$$

A partir disso, pode-se definir

$$\delta S = \int \delta\Psi^A \wedge \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\Psi^A}, \quad \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\Psi^A} = \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\Psi^A} - (-1)^p d \left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right), \quad (3.27)$$

onde o termo à esquerda é derivada funcional.

Conforme o princípio da mínima ação, segue que

$$\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta\Psi^A} = 0 \implies \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\Psi^A} - (-1)^p d \left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial(d\Psi^A)} \right) = 0, \quad (3.28)$$

que correspondem às equações de Euler-Lagrange no formalismo de formas diferenciais.

⁸ Veja a equação (2.58).

3.3 Equações de campo da MAG e a imposição de teleparallelismo

Na seção 3.1 foi discutido que a MAG constitui o caso mais geral no que diz respeito à geometria e ao princípio variacional, o que faz dela o ponto de partida fundamental para se construir uma teoria teleparalela mais geral, como almeja este trabalho. Nesta seção, serão obtidas as equações de campo para o caso geral e, após atingida essa etapa, a condição de teleparallelismo será imposta. Esta seção é baseada nas referências (HEHL et al., 1995; JIMÉNEZ-CANO, 2022; GRONWALD, 1997).

De acordo com (GRONWALD, 1997), a construção de uma teoria de gravidade métrico-afim segue um procedimento sistemático. Primeiramente, especifica-se o grupo de gauge externo a ser adotado, que pode se tratar do grupo afim completo ou de algum de seus subgrupos, de modo a permitir a recuperação de teorias particulares, como a teoria de gauge de Poincaré ou a RG. Em seguida, os potenciais de gauge correspondentes são obtidos a partir do princípio de invariância de gauge. Com esses potenciais e suas derivadas, constrói-se uma lagrangiana invariante $\mathbf{L}_g$, o que geralmente requer a introdução de uma derivada covariante exterior $\mathbf{D}$ e não mais uma derivada exterior d como no caso de (3.20). Quando campos de matéria Ψ estão presentes, é necessária a especificação de uma representação apropriada desses campos em relação ao grupo de gauge. Posteriormente, formula-se a lagrangiana de matéria $\mathbf{L}_m$, também invariante, o que, novamente, demanda o uso de uma derivada covariante exterior que acopla os potenciais aos campos de matéria. Finalmente, define-se a lagrangiana total $\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_g + \mathbf{L}_m$ e derivam-se as equações de Euler-Lagrange, das quais resultam as equações de campo da teoria.

Para que o último passo do procedimento acima seja dado, retorna-se ao caso da ação anteriormente citada, $S[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b]$ (3.4),

$$S[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b, \Psi] = S_g[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b] + S_m[g_{ab}, \vartheta^a, \Psi] \quad (3.29)$$

onde

$$S_g[g_{ab}, \vartheta^a, \Gamma_a^b] = \int \mathbf{L}_g(g_{ab}, \vartheta^a, \mathbf{R}_a^b, \mathbf{T}^a, \mathbf{Q}_{ab}), \quad (3.30)$$

$$S_m[g_{ab}, \vartheta^a, \Psi] = \int \mathbf{L}_m(g_{ab}, \vartheta^a, \mathbf{R}_a^b, \mathbf{T}^a, \mathbf{Q}_{ab}, \Psi, \mathbf{D}\Psi). \quad (3.31)$$

Nesse caso, a partir das equações anteriores, decorre do princípio da mínima ação que as equações de campos serão dadas por

$$\frac{\delta \mathbf{L}_m}{\delta \Psi} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta g_{ab}} = 0 \implies \mathbf{D}\mathbf{M}^{ab} - \mathbf{m}^{ab} = \boldsymbol{\sigma}^{ab}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta \vartheta^a} = 0 \implies \mathbf{D}\mathbf{H}_a - \mathbf{E}_a = \boldsymbol{\Sigma}_a, \quad (3.34)$$

$$\frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta \Gamma_a^b} = 0 \implies \mathbf{D}\mathbf{H}_b^a - \mathbf{E}_b^a = \boldsymbol{\Delta}_b^a. \quad (3.35)$$

onde

$$\mathbf{M}^{ab} = -2 \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{Q}_{ab}}, \quad \mathbf{H}_a = - \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{T}^a}, \quad \mathbf{H}^a{}_b = - \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{R}_a{}^b} \quad (3.36)$$

são os momentos gravitacionais conjugados à não metricidade, à torção e à curvatura, respectivamente.

A 4-forma de energia e momento métrica $\mathbf{m}^{ab}$, a 3-forma de energia e momento canônica $\mathbf{E}_a$, e a 3-forma de hipermomento $\mathbf{E}^a{}_b$ são definidas, respectivamente, por

$$\mathbf{m}^{ab} \equiv 2 \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial g_{ab}}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{E}_a \equiv \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \vartheta^a} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{E}^a{}_b \equiv \frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta \Gamma_a{}^b} = \vartheta^a \wedge \mathbf{H}_b - g_{bc} \mathbf{M}^{ac}. \quad (3.39)$$

Em relação às duas primeiras, há uma maneira de expressá-las em termos dos momentos gravitacionais. Por meio da primeira identidade de Noether (Equação 5.2.10 de (HEHL et al., 1995)), a 4-forma $\mathbf{m}^{ab}$ é dada por

$$\mathbf{m}^a{}_b = \vartheta^a \wedge \mathbf{E}_b + \mathbf{Q}_{bc} \wedge \mathbf{M}^{ac} - \mathbf{T}^a \wedge \mathbf{H}_b - \mathbf{R}_c{}^a \wedge \mathbf{H}^c{}_b + \mathbf{R}_b{}^c \wedge \mathbf{H}^a{}_c. \quad (3.40)$$

Já a segunda identidade de Noether (Equação 5.2.16 de (HEHL et al., 1995)), permite que a 3-forma $\mathbf{E}_a$ seja dada por

$$\mathbf{E}_a = e_a \rfloor \mathbf{L}_g + (e_a \rfloor \mathbf{T}^b) \wedge \mathbf{H}_b + (e_a \rfloor \mathbf{R}_b{}^c) \wedge \mathbf{H}^b{}_c + \frac{1}{2} (e_a \rfloor \mathbf{Q}_{bc}) \mathbf{M}^{bc}. \quad (3.41)$$

Para mais detalhes, recomenda-se as seções 5.2 e 5.4 de (HEHL et al., 1995).

Por fim, as correntes de matéria, já apresentadas anteriormente (3.5), são dadas por

$$\sigma^{ab} \equiv 2 \frac{\delta \mathbf{L}_m}{\delta g_{ab}} = 2 \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial g_{ab}} + 2 \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \mathbf{Q}_{ab}}, \quad (3.42)$$

$$\Sigma_a \equiv \frac{\delta \mathbf{L}_m}{\delta \vartheta^a} = \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \vartheta^a} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \mathbf{T}^a}, \quad (3.43)$$

$$\Delta^a{}_b = (L^a{}_b \Psi) \wedge \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \mathbf{D} \Psi} + 2 g_{bc} \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \mathbf{Q}_{ac}} + \vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \mathbf{T}^b} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial \mathbf{R}_a{}^b}, \quad (3.44)$$

em que $L^a{}_b$ é o gerador que abrange a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$.

Com essas discussões, é possível agora abordar a condição de teleparalelismo. Conforme já discutido, a MAG tem consigo todos os graus de liberdade geométricos possíveis. Desse modo, para que se estabeleça a correspondência entre a teoria métrico-afim e teorias gravitacionais de gauge formuladas em espaços-tempos com graus de liberdade geométricos reduzidos, impõem-se vínculos que eliminam dinamicamente certos componentes da geometria.

Tal procedimento é realizado por meio do método dos multiplicadores de Lagrange⁹, o qual permite impor, de maneira consistente, condições como a anulação da não metricidade, da torção ou mesmo da curvatura, conforme o tipo de geometria que se deseja recuperar como caso particular. Em particular, o caso de teeparalelismo é alcançado quando se impõe a anulação da curvatura. Para que esse objetivo seja alcançado, a lagrangiana L_{tot} é dada por

$$L_{tot} = L_g + L_m + R_a^b \wedge \lambda^a_b \quad (3.45)$$

onde λ^a_b é o multiplicador de Lagrange que garante a anulação da curvatura e se trata de uma 2-forma com valores em $GL(4, \mathbb{R})$. Dessa forma, as equações de campo passam a ser dadas por

$$DM^{ab} - m^{ab} = \sigma^{ab}, \quad (3.46)$$

$$DH_a - E_a = \Sigma_a, \quad (3.47)$$

$$DH^a_b - E^a_b - D\lambda^a_b = \Delta^a_b, \quad (3.48)$$

$$R_a^b = 0. \quad (3.49)$$

Conforme (HEHL et al., 1995) destacam, nesse caso, a determinação do multiplicador de Lagrange não é única devido à presença da derivada covariante exterior diante aplicada ao multiplicador. Além disso, embora não tenha sido destacado anteriormente, as duas primeiras equações são equivalentes¹⁰.

⁹ Para uma excelente discussão do método, recomenda-se (LANCZOS, 2012).

¹⁰ Para mais detalhes, recomenda-se a página 80 de (HEHL et al., 1995) e a página 53 de (JIMÉNEZ-CANO, 2022).

4 Relatividade Geral e os Problemas da Energia Gravitacional

Neste capítulo, será apresentada uma breve revisão sobre os principais conceitos que envolvem a Relatividade Geral e a dificuldade que a teoria enfrenta para lidar com a energia gravitacional, como forma de elucidar o cenário que permeia este trabalho. Na primeira seção, serão apresentados os princípios da RG. Em seguida, as equações de campo são obtidas e, por fim, na terceira seção, os problemas relacionados com a energia do campo gravitacional serão discutidos.

Após o desenvolvimento da RE (EINSTEIN, 1905), que descreve de forma consistente a dinâmica de objetos em movimento próximo à velocidade da luz, porém limitada a referenciais inerciais¹, Albert Einstein buscou uma generalização que incluísse também fenômenos gravitacionais. Guiado por princípios como o princípio da equivalência, a exigência de que as leis da física tenham a mesma forma para todos os referenciais (o que matematicamente se relaciona com a ideia de covariância geral), Einstein desenvolveu gradualmente uma nova estrutura teórica, que o permitiu chegar às equações de campo da RG (EINSTEIN, 1915).

A RG se manifesta como uma teoria geométrica da gravitação, na qual a geometria do espaço-tempo é afetada na presença de matéria. Com essa teoria, que se trata de uma das mais bem sucedidas da física, foi possível explicar fenômenos antes problemáticos, como o avanço do periélio de Mercúrio, além de prever a existência de buracos negros e de ondas gravitacionais, estas últimas detectadas cem anos após sua previsão.

4.1 Princípios da relatividade geral

Segundo (D'INVERNO, 1992), de forma explícita ou implícita, Einstein foi guiado pelos seguintes princípios:

- (1) Princípio de Mach;
- (2) Princípio da Equivalência;
- (3) Princípio da Covariância Geral;
- (4) Princípio do Acoplamento Mínimo Gravitacional;

¹ Por definição, um referencial é inercial se a lei da inércia é válida nele. Isto é, um corpo livre permanecerá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

(5) Princípio da Correspondência.

No entanto, apenas dois deles serão aqui abordados: os princípios da covariância geral e o da equivalência.

4.1.1 Princípio da covariância geral

A discussão aqui será iniciada pelo princípio da covariância geral. Há duas formulações alternativas em relação a ele. A primeira é uma afirmação física, segundo a qual as leis da natureza devem ser válidas para todos os observadores, independentemente do estado de movimento de seus referenciais. Em contraste com a RE, onde apenas observadores inerciais são considerados equivalentes (BAMBI, 2018), a RG estende essa equivalência a qualquer observador, seja ele inercial, acelerado, em rotação ou em queda livre dentro de um campo gravitacional. Isso implica, em certo sentido, uma democracia, pois não existe referencial privilegiado: todos os referenciais são igualmente adequados para as leis da física (CAPOZZIELLO; FALCO; FERRARA, 2022). Em resumo, as leis da física são as mesmas para todos os referenciais. Esse é o chamado princípio da relatividade geral.

A segunda formulação é de natureza mais matemática. Segundo essa formulação, a estrutura das equações das leis da física deve ter uma forma tensorial (D'INVERNO, 1992), de modo que tenham sua estrutura preservada sob transformações de coordenadas. De fato, dado que tensores se transformam de uma forma bem definida mediante a mudanças de sistemas de coordenadas, conforme foi visto na subseção 2.1.4, escrever as leis da física no formalismo tensorial garante que essas leis mantenham sua forma. Esse é o princípio da covariância geral.

Nesse sentido, enquanto o princípio da relatividade geral afirma a independência das leis da física em relação ao referencial, o princípio da covariância garante essa independência matematicamente, mas no que diz respeito a mudanças de coordenadas, pois uma mudança no sistema de coordenadas não significa uma mudança de referencial. Nesse ponto, é válido um exemplo, muito comum no contexto da física. O primeiro estabelece que a física é a mesma para dados dois referenciais S e $\bar{S}$. Já o segundo estabelece que as equações da física são independentes do sistema de coordenadas, isto é, se está escrita em termos do sistema de coordenadas x^μ ou $\bar{x}^\mu$.

É muito comum confundir referenciais com sistemas de coordenadas. Embora sejam conceitos intimamente interligados, eles não se tratam da mesma coisa. Nesse sentido, vale a seguinte elucidação. De acordo com (NORTON, 1993), a noção de sistemas de coordenadas é entendida como sendo uma atribuição suave e invertível de quatro números a eventos nas vizinhanças do espaço-tempo, enquanto um referencial se trata de um sistema físico idealizado para atribuir esses quatro números.

4.1.2 Princípio da equivalência

Apesar de ser o grande pilar da RG, o princípio da equivalência é, por vezes, abordado de diferentes maneiras e com significados diversos, o que leva a interpretações conflitantes. Aparentemente, só existe um acordo na literatura: no limite newtoniano, as massas inercial e gravitacional são iguais. Ao leitor, recomenda-se (CASOLA; LIBERATI; SONEGO, 2015; OHANIAN, 1977; NORTON, 1985) para mais detalhes.

Conforme, (CASOLA; LIBERATI; SONEGO, 2015) os autores organizam uma espécie de hierarquia, que não será abordada aqui, que parte do princípio da equivalência de Newton (massas inercial e gravitacional iguais) ao princípio da equivalência forte. Os autores fazem menção ao princípio da equivalência de Einstein, o qual afirma que a física não gravitacional (isto é, mecânica, termodinâmica, etc.) é localmente indistinguível daquela em ausência de campos gravitacionais. Por fim, referem-se ao princípio da equivalência forte, que estende o princípio de Einstein a fenômenos gravitacionais.

Para fins de objetividade, o ponto chave é que o princípio da equivalência permite recuperar localmente a física da RE, pois em cada ponto existe um referencial inercial local (ou um sistema de coordenadas geodésico) (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973). A gravidade é a única interação que não pode ser desligada globalmente (CAPOZZIELLO; FALCO; FERRARA, 2022); no entanto, em um referencial inercial local (ou em um sistema de coordenadas geodésico) seus efeitos podem ser anulados somente localmente. Assim, dentro de uma região suficientemente pequena do espaço e em um tempo suficientemente pequeno, as variações gravitacionais tornam-se desprezíveis, tornando os efeitos inerciais localmente indistinguíveis dos efeitos gravitacionais. Em termos geométricos, isso significa que

$$g_{\mu\nu} \Big|_p = \eta_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \Big|_p = 0. \quad (4.2)$$

Nesse sentido, as leis da física nesses referenciais em questão recuperam o caso da RE. Em outras palavras, a primeira equação diz que a geometria do espaço-tempo nessas circunstâncias se reduz à métrica de Minkowski enquanto que a segunda demonstra que o campo gravitacional é estacionário e independente das coordenadas espaciais, o que está totalmente de acordo com RE.

4.2 Equações de campo da relatividade geral

Para se falar em equações de campo da relatividade geral, dada que a teoria da RG é manifestadamente uma teoria geométrica da gravitação, torna-se imprescindível a caracterização da geometria para esse caso. Dado que sua construção é baseada na

geometria pseudo-riemanniana, nesse caso a conexão é simétrica e compatível com a métrica, pois $T^\lambda_{\mu\nu} = 0$ e $\mathring{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. Logo, a geometria é completamente descrita pela conexão de Levi-Civita e pelo tensor de curvatura riemanniano². Nesse ponto, é útil recordar de sua forma:

$$\mathring{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \mathring{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^\rho_{\sigma\mu} + \mathring{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} \mathring{\Gamma}^\rho_{\sigma\alpha} - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\sigma\mu} \mathring{\Gamma}^\rho_{\nu\alpha}, \quad (4.3)$$

onde, conforme foi visto, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (4.4)$$

Por sua vez, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura são dados por

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (4.5)$$

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

respectivamente.

No que diz respeito ao comportamento das curvas na geometria que descreve a RG, uma vez que o tensor de distorção $N^\lambda_{\mu\nu}$ é nulo, curvas autoparalelas e as geodésicas métricas coincidem neste cenário. Desse modo, com a geometria da RG caracterizada, pode-se agora introduzir as equações de campo, também chamadas de Equações de Einstein.

Pode acontecer de se pensar que essas equações foram deduzidas a partir de um princípio variacional, no entanto, Einstein seguiu um determinado procedimento para se alcançar este objetivo³. Todavia, o caminho aqui a ser seguido será por meio do princípio variacional desenvolvido por Hilbert, Einstein e Lorentz, o princípio variacional métrico (ver seção 3.1). Como se sabe, poucos dias antes de Einstein chegar à versão final da RG, Hilbert propôs a seguinte lagrangiana⁴:

$$\mathcal{L}_{EH} = k\sqrt{-g}\mathring{R} \quad (4.7)$$

também chamada de Einstein-Hilbert, onde $k = c^4/16\pi G$ e $\mathring{R}$ é o escalar de curvatura (4.6).

Conforme visto anteriormente, a ação é dada por

$$S = \int_V \mathcal{L} d^4x. \quad (4.8)$$

² O destaque “tensor de curvatura riemanniano” é devido ao fato de que o tensor de curvatura pode ser decomposto em termos de uma parte riemanniana e de outra devida à distorção, como foi visto no Capítulo 2

³ Recomenda-se o capítulo 10 de (D’INVERNO, 1992), para mais detalhes.

⁴ Recomenda-se ao leitor a seção 21.2 de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973). O leitor deve estar atento à modificação feita. Lá, é definida a lagrangiana, aqui será definida a densidade lagrangiana a fim de manter a consistência do que foi adotado neste trabalho.

Desse modo, ao inserir (4.7) na equação anterior, obtém-se a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = k \int_V \sqrt{-g} \mathring{R} d^4x, \quad (4.9)$$

que se trata da ação da geometria, ou melhor, do campo gravitacional, onde integração é realizada sobre o volume quadrimensional. Já a ação correspondente à matéria é dada por

$$S_m = \int_V \sqrt{-g} L_m d^4x \quad (4.10)$$

Com isso, define-se a ação total, dada em termos da geometria e do conteúdo de matéria, por

$$S_{tot} = S_{EH} + S_m, \quad (4.11)$$

ou, equivalentemente,

$$S = k \int_V \sqrt{-g} \mathring{R} d^4x + \int_V \sqrt{-g} L_m d^4x. \quad (4.12)$$

De maneira análoga ao que foi discutido na seção 3.2, aqui, as equações de campo serão obtidas ao tomar pequenas variações na métrica, tal que

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.13)$$

onde $\delta g_{\mu\nu} = 0$ na fronteira.

Antes de atacar o problema diretamente, é válido se fazer o seguinte procedimento. Primeiro, usa-se o fato de que $g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$. Assim, ao se tomar variações, segue que

$$\delta(g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu}) = \delta(\delta_\nu^\mu) = 0, \quad (4.14)$$

de modo que isso implica

$$g_{\mu\lambda} (\delta g^{\lambda\nu}) = -g^{\lambda\nu} (\delta g_{\mu\lambda}). \quad (4.15)$$

Desse modo,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (\delta g^{\rho\sigma}), \quad (4.16)$$

ou ainda,

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (\delta g_{\rho\sigma}). \quad (4.17)$$

Além disso, é válido introduzir o seguinte resultado:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

Munidos dessa preparação prévia, o próximo passo é o de calcular o efeito das variações da métrica sobre o tensor de Ricci (4.5). De acordo com a identidade de Palatini, obtém-se

$$\delta \mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{\nabla}_\lambda (\delta \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}) - \mathring{\nabla}_\nu (\delta \mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\lambda}). \quad (4.19)$$

Desse modo, a partir dos resultados acima, o integrando da ação de Einstein-Hilbert, ao ser variado, será

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\dot{R}_{\mu\nu}) &= (\delta g^{\mu\nu})\dot{R}_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}\dot{R}_{\mu\nu}\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \\
 &= (\delta g^{\mu\nu})\dot{R}_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta\dot{R}_{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}\dot{R}_{\mu\nu}\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \\
 &= \left(\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta\dot{R}_{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Em relação ao segundo termo, convém fazer o uso da identidade de Palatini. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta\dot{R}_{\mu\nu}) &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\dot{\nabla}_\lambda(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}) - \dot{\nabla}_\nu(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\lambda})] \\
 &= \sqrt{-g}\{\dot{\nabla}_\lambda[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})] - \dot{\nabla}_\nu[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\lambda})]\} \\
 &= \sqrt{-g}\dot{\nabla}_\lambda\{[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})] - [g^{\mu\lambda}(\delta\dot{\Gamma}^\nu_{\mu\nu})]\}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Desse modo, segue que

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\dot{R}_{\mu\nu}) = \left(\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\dot{\nabla}_\lambda\{[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})] - [g^{\mu\lambda}(\delta\dot{\Gamma}^\nu_{\mu\nu})]\}. \tag{4.22}$$

Portanto, a variação da ação de Einstein-Hilbert toma a forma

$$\begin{aligned}
 \delta S_{EH} &= k \int_V \left(\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R}\right)\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})d^4x \\
 &\quad + k \int_V \sqrt{-g}\dot{\nabla}_\lambda\{[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})] - [g^{\mu\lambda}(\delta\dot{\Gamma}^\nu_{\mu\nu})]\}d^4x.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Em relação à equação anterior, nota-se que o integrando do segundo termo do lado direito é uma divergência:

$$\sqrt{-g}\dot{\nabla}_\lambda\{[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})] - [g^{\mu\lambda}(\delta\dot{\Gamma}^\nu_{\mu\nu})]\} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}(\delta\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu})] - [g^{\mu\lambda}(\delta\dot{\Gamma}^\nu_{\mu\nu})]\}. \tag{4.24}$$

Diante desse resultado, é possível aplicar o teorema de Gauss. Assim, a integral se reduz a uma integral de superfície. Uma vez que, como requer o princípio da mínima ação, as variações são nulas nas fronteiras da região de integração, essa integral de superfície é nula. Em razão disso, obtém-se

$$\delta S_{EH} = k \int_V \left(\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R}\right)\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})d^4x. \tag{4.25}$$

Por fim, consideram-se variações sobre a ação da matéria. Assim,

$$\begin{aligned}
 \delta S_m &= \int_V d^4x \delta[\sqrt{-g}L_m] \\
 &= \int_V d^4x \left[\frac{\delta L_m}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + L_m\delta\sqrt{-g}\right] \\
 &= \int_V d^4x \left[\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}L_m g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Conforme a equação (21.33a) de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), o tensor de energia e momento da matéria é dado por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} + L_m g_{\mu\nu}. \quad (4.27)$$

Logo,

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_V \mathcal{T}_{\mu\nu} \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x \quad (4.28)$$

Dessa forma, ao se combinarem as variações da ação de Einstein-Hilbert com a variação da matéria, obtém-se

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_m = \int_V \left[k \left(\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} \right) - \frac{1}{2} \mathcal{T}_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x. \quad (4.29)$$

Ao impor $\delta S = 0$, resultam as equações de Einstein:

$$\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

ou ainda

$$\dot{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (4.31)$$

onde $\dot{G}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Assim, chegou-se às chamadas Equações de Einstein. Dessa equação, nota-se a relação entre a geometria e conteúdo de matéria. O lado esquerdo descreve a curvatura do espaço-tempo e como ele é deformado devido ao lado direito, que tem o conteúdo de matéria.

Na RE, o tensor de energia e momento satisfaz a seguinte equação de conservação

$$\partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.32)$$

Pelo princípio do acoplamento mínimo⁵ isso sugere que

$$\dot{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.33)$$

Diante disso, surge o questionamento se o tensor de Einstein satisfaz, também, essa equação. E a resposta a esse questionamento é que sim. Isso pode ser obtido por meio das identidades contraídas de Bianchi (2.178) e (2.179), que fornecem

$$\dot{\nabla}_\mu \left(\dot{R}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu \dot{R} \right) = 0 \implies \dot{\nabla}_\mu \dot{G}^\mu{}_\nu = 0. \quad (4.34)$$

Nesse sentido, o lado esquerdo das equações de Einstein tem as características necessárias para ser acoplado ao lado direito.

Como foi mencionado acima, o formalismo aqui adotado foi o princípio variacional métrico, discutido no Capítulo 3, o que possibilitou chegar às Equações de Einstein. Outro

⁵ De acordo com esse princípio, a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é trocada pela métrica $g_{\mu\nu}$. Além disso, as derivadas parciais ∂_μ é trocada pela derivada covariante $\dot{\nabla}_\mu$.

formalismo a ser considerado é o devido a Palatini, o princípio variacional de Palatini. Esse princípio consiste em considerar uma ação do tipo $S[g_{\mu\nu}, \Gamma^\rho_{\mu\nu}]$, cuja densidade lagrangiana, por sua vez, é da forma $\mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \Gamma^\rho_{\mu\nu}, \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\nu})$. Desse modo, a partir da ação da densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert (4.7), tem-se

$$\mathcal{L}_{EH} = k\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left(\partial_\rho \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} + \dot{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\alpha} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\rho\mu} \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\alpha} \right). \quad (4.35)$$

Assim, a ação de Einstein-Hilbert toma a forma

$$S_{EH} = k \int_V d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\partial_\rho \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} + \dot{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\alpha} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\rho\mu} \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\alpha} \right). \quad (4.36)$$

Contrariamente à situação anterior, em que as equações de campo foram obtidas devido a variações da ação com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, agora, serão tomadas variações da ação com respeito à conexão $\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. Nesse sentido, ao analisar a equação acima, essas variações significam variações no escalar de curvatura $\dot{R}$ devidas à conexão. Para se realizar esse cálculo, é possível se obter uma grande simplificação ao adotar um sistema de coordenadas geodésico. Logo, uma vez que nesse sistema $\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}|_p = 0$, a equação acima se reduz à equação seguinte:

$$S_{EH} = k \int_V d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\partial_\rho \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} \right). \quad (4.37)$$

Dado que δ comuta com ∂ , ao tomar variações da ação anterior com respeito à conexão, tem-se

$$\delta S_{EH} = k \int_V d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\partial_\rho \left(\delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} \right) - \partial_\nu \left(\delta \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} \right) \right]. \quad (4.38)$$

Ao realizar uma integração por partes na equação anterior, é possível obter

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= k \int_V d^4x \left[\partial_\rho \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} \right) - \partial_\rho \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} \right) + \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nota-se que as integrais do primeiro e terceiro termos se reduzirão a integrais de superfície, ao ser aplicado o teorema de Gauss. Desse modo, dado que $\delta \dot{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = 0$ na superfície de integração, essas integrais anular-se-ão. Portanto, ao desprezar esses termos, segue que

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= k \int_V d^4x \left[\partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\mu} - \partial_\rho \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} \right] \\ &= k \int_V d^4x \left[\partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\rho \right) - \partial_\rho \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \right] \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

em que na passagem para a segunda igualdade foi realizada a troca do índice ν por λ no primeiro termo. Devido à simetria de $\delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu}$ nos dois últimos índices, na equação anterior deve ser realizada uma simetrização nos índices ν e μ , de modo que se obtém

$$\delta S_{EH} = k \int_V d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\rho \right) + \frac{1}{2} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\nu\lambda} \delta^\mu_\rho \right) - \partial_\rho \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \right] \delta \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\mu}. \quad (4.41)$$

A imposição do princípio da mínima ação, isto é, $\delta S_{EH} = 0$, fornece

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\delta_\rho^\nu) + \frac{1}{2}\partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\nu\lambda}\delta_\rho^\mu) - \partial_\rho (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.42)$$

O próximo passo é manipular a equação anterior. Primeiramente, faz-se a contração dos índices μ e ρ , o que fornecerá $\partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\lambda\nu}) = 0$ como resultado. Diante disso, ao substituí-lo na equação acima, é possível obter que

$$\partial_\rho (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.43)$$

O desenvolvimento da equação acima e o fato de que $\partial_\rho \sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\lambda\sigma}\partial_\rho g^{\lambda\sigma}$, permite reescrevê-la da forma seguinte

$$\sqrt{-g}\partial_\rho g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\sqrt{-g}g_{\lambda\sigma}\partial_\rho g^{\lambda\sigma})g^{\mu\nu} = 0, \quad (4.44)$$

isto é,

$$\sqrt{-g}\left(\partial_\rho g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}\partial_\rho g^{\lambda\sigma}\right) = 0. \quad (4.45)$$

Ao considerar o termo em parênteses no membro esquerdo e realizar a contração com $g_{\mu\nu}$, é possível constatar que $g_{\lambda\sigma}\partial_\rho g^{\lambda\sigma} = 0$. Esse resultado ao ser substituído em (4.45) permite chegar ao fato de que $\partial_\rho g^{\mu\nu} = 0$. Uma vez que o cálculo foi realizado no sistema de coordenadas geodésico, por consequência, em um sistema de coordenadas qualquer, $\partial_\rho g^{\mu\nu}$ é o equivalente a $\mathring{\nabla}_\rho g^{\mu\nu} = 0$, que se trata da condição de compatibilidade métrica, como foi visto na Definição 2.33.

4.3 O problema da energia gravitacional e da lei de conservação

A formulação de leis de conservação possui uma posição central em todas as teorias da física. No entanto, no contexto da RG, a noção de energia gravitacional e a própria conservação da energia apresentam dificuldades conceituais e matemáticas. Tais dificuldades resultam diretamente dos princípios que estruturam a teoria, que são a covariância geral e o princípio da equivalência. Com o objetivo de entender essas dificuldades, nesta seção, analisam-se, em primeiro lugar, os obstáculos à definição de uma energia gravitacional local e, em seguida, discute-se como esses mesmos princípios afetam a formulação de leis de conservação, de acordo com as referências (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973; CARMELI; LEIBOWITZ; NISSANI, 1990).

Para que o problema da energia gravitacional seja discutido, o leitor deve ter em mente as ideias anteriormente fornecidas em relação aos princípios da covariância geral e da equivalência. Com o objetivo de introduzir o problema de forma elucidativa, é útil imaginar um observador sujeito à presença de um campo gravitacional. Evidentemente, por se tratar de um campo, os efeitos gravitacionais estão distribuídos globalmente por todo o espaço-tempo que circunda o observador. A grande questão é: e localmente? Quando se

pensa no princípio da equivalência, a resposta é que não há campo gravitacional, uma vez que, segundo esse princípio, é sempre possível anular os efeitos do campo gravitacional, localmente, em um referencial inercial local. Portanto, se não há campo gravitacional em uma região local, não há energia gravitacional.

Em teorias de campos, quando se quer quantificar a energia e o momento de um determinado campo, isso é feito por meio do tensor de energia e momento. Conforme argumenta (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), a energia do campo gravitacional, no contexto da RG, não admite uma definição local e tensorial. Diferentemente do eletromagnetismo, que possui um tensor de energia e momento único e bem definido, qualquer formulação de uma densidade de energia gravitacional conduz a pseudotensores dependentes da escolha de coordenadas, algo que viola profundamente o princípio da covariância geral. A ausência de unicidade confirma a falta de significado físico intrínseco para tais expressões. Somado a isso, ao observar as equações de Einstein, nota-se que o tensor de energia e momento presente no lado direito das equações tem “peso”, como argumentam os autores. Esse tensor produz uma deflexão geodésica de duas linhas de universo próximas que passam pela região do espaço do observador anteriormente citado. Trata-se de um efeito observável, algo que não pertence ao que eles se referem como “momento-energia gravitacional local”.

Essa impossibilidade decorre do princípio da equivalência. Em qualquer vizinhança suficientemente pequena, é possível selecionar um sistema de coordenadas no qual todos os símbolos de Christoffel desaparecem. Nesse sistema de coordenadas, não há “campo gravitacional” no sentido clássico, o que elimina qualquer tentativa de atribuição de energia ao campo em escala pontual, sendo, portanto, impossível localizar a energia do campo gravitacional.

Nesse sentido, porém, é válido destacar que os autores não alegam a inexistência de tal grandeza, pois a energia gravitacional se manifesta em efeitos globais, como no caso da energia de ligação em sistemas como o sistema Terra-Lua ou na energia transportada por ondas gravitacionais. O que os autores alegam é algo tão somente relacionado à localização do campo gravitacional⁶.

O outro problema, conforme referido acima, diz respeito ao problema da conservação de energia. Como é sabido, na relatividade especial, a conservação de energia e momento é expressa pela nulidade da divergência ordinária do tensor de energia e momento,

$$\partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.46)$$

o que possui a forma de uma equação de continuidade.

⁶ É interessante notar que há autores que questionam até mesmo a existência de qualquer forma de energia gravitacional. Recomenda-se, por exemplo, a discussão em (ALEMAÑ-BERENGUER, 2025).

Na passagem para o espaço-tempo curvo da RG, em que se considera o princípio do acoplamento mínimo e a exigência de covariância, conduz à condição de divergência covariante nula do tensor de energia e momento,

$$\mathring{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.47)$$

Ao usar as propriedades da ação da derivada covariante sobre tensores, vistas na subseção 2.3.2, essa condição assume a forma

$$\mathring{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = \partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} + \mathring{\Gamma}^\nu_{\nu\rho} \mathcal{T}^{\mu\rho} + \mathring{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} \mathcal{T}^{\rho\nu} = 0. \quad (4.48)$$

Diante da equação anterior, nota-se a presença dos símbolos de Christoffel $\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, que dependem da métrica e de suas derivadas, e indicam uma modificação na estrutura do que seria uma equação de conservação.

Com o uso da identidade

$$\mathring{\Gamma}^\nu_{\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g}), \quad (4.49)$$

a equação (4.48) pode ser reescrita como

$$\mathring{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} \mathcal{T}^{\mu\nu}) + \mathring{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} \mathcal{T}^{\rho\nu} = 0. \quad (4.50)$$

Ao multiplicar por $\sqrt{-g}$, obtém-se

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} \mathcal{T}^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g} \mathring{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} \mathcal{T}^{\rho\nu}. \quad (4.51)$$

A equação (4.51) mostra de forma explícita que a condição $\mathring{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ não constitui, em geral, uma equação de continuidade. Em uma equação de continuidade propriamente dita, o lado direito deve ser nulo, de modo que a divergência de uma corrente represente apenas um termo de fluxo. Entretanto, em (4.51) surge um termo adicional,

$$-\sqrt{-g} \mathring{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} \mathcal{T}^{\rho\nu}, \quad (4.52)$$

o qual não admite, em geral, a forma de divergência de uma corrente física. Esse termo depende explicitamente da conexão e, portanto, da escolha de coordenadas, o que impede a interpretação direta de (4.51) como uma corrente conservada no sentido clássico.

Somente em sistemas de coordenadas geodésicos, isto é, em referenciais inerciais locais, nos quais os símbolos de Christoffel se anulam, que a equação (4.51) se reduz localmente a

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} \mathcal{T}^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.53)$$

o que recupera formalmente a estrutura de uma equação de continuidade. Essa equivalência, contudo, possui caráter estritamente local e depende da escolha de coordenadas, não se

estendendo a regiões finitas do espaço-tempo, fato este que está em completo desacordo com a covariância geral.

Essa limitação também se manifesta na própria estrutura das equações de Einstein,

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2k} \mathcal{T}^{\mu\nu}, \quad (4.54)$$

em conjunto com a identidade de Bianchi contraída,

$$\mathring{\nabla}_\nu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.55)$$

em que decorre necessariamente

$$\mathring{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.56)$$

Essa relação assegura a consistência geométrica da teoria, mas, conforme demonstrado pelas equações (4.50) e (4.51), não implica uma conservação local no sentido de uma equação de continuidade.

Em face dessa discussão, pode-se concluir que as dificuldades associadas à energia gravitacional e à conservação da energia na RG decorrem diretamente da estrutura geométrica da teoria e de seus princípios fundamentais. Em primeiro lugar, o princípio da equivalência impede a definição de uma densidade local de energia gravitacional com caráter tensorial e covariante, uma vez que os efeitos gravitacionais podem ser anulados em referenciais localmente inerciais. Em segundo lugar, a condição $\mathring{\nabla}_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$, embora assegure a consistência das equações de campo, não possui, em geral, a forma de uma equação de continuidade, pois envolve termos dependentes da métrica e da conexão que não admitem interpretação como fluxos. A dificuldade em definir uma energia gravitacional local e uma lei de conservação no sentido clássico, portanto, expressa as dificuldades que a RG, apesar de todo o seu sucesso, ainda enfrenta, o que reflete a necessidade de se buscar teorias alternativas que solucionem esses problemas. Além dos problemas citados, a RG também apresenta dificuldade para descrever a energia global. Em geral, é necessário restringir a definição de energia a espaços-tempos assintoticamente planos (PENROSE, 1982; FORMIGA; GONÇALVES, 2022).

5 Gravitação Teleparalela

Uma vez que a proposta deste trabalho consiste na generalização do teleparalelismo, faz-se necessária a apresentação prévia dos fundamentos conceituais e históricos dessa estrutura geométrica. Neste capítulo, serão introduzidas as duas subclasses da teoria, conhecidas como Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral e Teleparalelismo Simétrico Equivalente à Relatividade Geral. O objetivo dessa parte consiste em expor suas principais características, os tensores que as definem, suas respectivas lagrangianas e as equações de campo associadas. Para esse propósito, as referências adotadas incluem (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012; MALUF, 2013; NESTER; YO, 1998; JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018; JIMENEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019).

Na Seção 2.4.1 foi discutido o conceito de curvatura e sua influência sobre a geometria. Conforme exposto, o transporte paralelo de vetores depende, em geral, do caminho ao longo do qual o vetor é transportado. Se um vetor v é transportado de um ponto p a um ponto s , primeiro ao longo de um caminho A , e, em seguida, ao longo de um caminho B , o vetor resultante em s difere em cada caso, refletindo a dependência do transporte paralelo em relação aos diferentes caminhos. Essa propriedade caracteriza a presença de curvatura.

Entretanto, existe a possibilidade de um cenário no qual o transporte paralelo não depende do caminho. Tal possibilidade define o conceito de teleparalelismo, também denominado paralelismo distante ou absoluto. Do ponto de vista matemático, essa estrutura caracteriza-se pela ausência de curvatura, condição necessária e suficiente para a existência de campos vetoriais paralelos, conforme demonstrado por (EISENHART, 1927).

Historicamente, as tentativas iniciais de unificação das interações fundamentais surgiram no período posterior ao estabelecimento da RG por Einstein. Em 1918, Weyl (WEYL, 1918) apresentou uma proposta de unificação da gravitação com o eletromagnetismo que, apesar de não ter alcançado sucesso físico, introduziu conceitos fundamentais como invariância de gauge e transformações de gauge, que mais tarde se tornaram centrais nas teorias modernas de campos. Posteriormente, cerca de dez anos depois, Einstein propôs uma abordagem alternativa baseada no teleparalelismo, na qual o campo de tétradas substitui a métrica como variável fundamental da descrição gravitacional (UNZICKER; CASE, 2005; SAUER, 2006).

Essa formulação explorava o fato de as tétradas possuírem mais graus de liberdade do que a métrica, o que levou à hipótese de uma possível identificação desses graus adicionais com o campo eletromagnético. Tal interpretação, contudo, mostrou-se inconsistente, uma vez que a invariância local de Lorentz elimina esses graus excedentes. Além disso, o escalar

construído a partir da torção revelou-se equivalente ao escalar de curvatura da RG, a menos de um termo de divergência, o que resulta em equações de campo indistinguíveis das equações de Einstein e inviabiliza a unificação que se buscava.

Diante dessas limitações, Einstein abandonou o teleparalelismo em 1931. Apesar disso, a formulação teleparalela voltou a atrair interesse a partir da década de 1960, quando Møller (MØLLER, 1961) a retomou com o objetivo de tratar o problema da energia gravitacional. Em seguida, na década de 1970, a teoria passou a ser reinterpretada no contexto das teorias de gauge, em que o teleparalelismo foi associado ao grupo das translações e identificado com a geometria de Weitzenböck (CHO, 1976; HAYASHI, 1977).

Esses desenvolvimentos levaram à formulação moderna do TERG, bem como à sua formulação hamiltoniana. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de Nester e Maluf (NESTER, 1989; MALUF, 1994), sendo que a abordagem deste último se mostrou particularmente adequada para a definição do 4-momento gravitacional e para a recuperação, e generalização, dos resultados obtidos no formalismo ADM (MALUF et al., 2002; FORMIGA; GONÇALVES, 2022). Posteriormente à formulação hamiltoniana do TERG, em 1999 Nester e Yo chegaram ao advento do TSERG (NESTER; YO, 1998), trabalho este que levou ao desenvolvimento e aplicações do TSERG por autores como Adak, Koivisto, Jiménez e outros (ADAK; KALAY; SERT, 2006; JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018).

Atualmente, pode-se considerar que o teleparalelismo constitui uma estrutura geométrica capaz de permitir a investigação de problemas fundamentais da gravitação, estendendo-se a diversas generalizações, como as teorias do tipo $f(T)$ e formulações baseadas na não metricidade $f(Q)$. Essas teorias têm encontrado aplicações relevantes no estudo da energia gravitacional (MALUF, 2013; FORMIGA, 2020; FORMIGA; DUARTE, 2023; COSTA; FORMIGA, 2025) e outros, o que consolida o teleparalelismo como uma alternativa matematicamente rica e fisicamente promissora.

5.1 Teleparalelismo equivalente à relatividade geral

A seguir, serão apresentadas as características da geometria do TERG, bem como as equações de campo e as quantidades físicas que a teoria possibilita construir: o tensor de energia e momento e o 4-momento gravitacionais.

5.1.1 Características da geometria do TERG

Na seção referente à RG, primeiramente foi especificada a geometria característica da teoria, que consistia na geometria riemanniana e a conexão, por sua vez, descrita pela conexão de Levi-Civita. De maneira análoga, assim como a RG, o TERG tem sua geometria e sua conexão características, que serão descritas a seguir.

O TERG é uma teoria alternativa à RG cuja geometria é caracterizada por um caso particular da geometria de Riemann-Cartan (Figura 8), no qual a noção de paralelismo distante é estabelecida. Antes de prosseguir para particularização da geometria de Riemann-Cartan, é válido realizar a decomposição da conexão afim e do tensor de curvatura nessa geometria mencionada. Com o auxílio das equações (2.174) e (2.182) e tendo em mente que, nesse caso, a não metricidade é nula, a conexão afim e o tensor de curvatura são dados, respectivamente, por

$$\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

$$\hat{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} = \overset{\circ}{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} + \overset{\circ}{\nabla}_\sigma K^\rho_{\nu\mu} - \overset{\circ}{\nabla}_\nu K^\rho_{\sigma\mu} + K^\rho_{\sigma\alpha} K^\alpha_{\nu\mu} - K^\alpha_{\sigma\mu} K^\rho_{\nu\alpha}, \quad (5.2)$$

Para prosseguir com a particularização da geometria de Riemann-Cartan, considera-se que a noção de paralelismo distante está presente. Como é sabido, essa noção é caracterizada pelo anulamento do tensor de curvatura. Além disso, como não há presença de não metricidade, essa geometria é caracterizada, também, pela compatibilidade métrica, o que faz dela ser descrita completamente pela torção. Logo, no TERG, o campo gravitacional é descrito pela torção e possui uma conexão plana.

Fundamentalmente, o TERG é descrito pelo formalismo de tétradas (seção 2.2.2), especificamente, o caso de tétradas ortonormais $e_{\hat{a}}$. O papel das tétradas ortonormais no TEGR está relacionado a uma escolha. No teleparalelismo, sempre existe uma base na qual os coeficientes da conexão são nulos. A escolha que o TEGR faz é admitir que essa base seja ortonormal. (Como será visto mais adiante, é exatamente essa escolha que força a não metricidade ser nula.) Dessa forma, existe uma base ortonormal $\{e_{\hat{a}}\} = \{e_{\hat{0}}, e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}, e_{\hat{3}}\}$, em que $e_{\hat{0}}$ é um campo vetorial do tipo tempo e os outros do tipo espaço, tal que

$$\hat{\nabla}_\mu e_{\hat{a}} = 0 \iff \hat{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = 0, \quad (5.3)$$

onde $\hat{\nabla}_\mu$ é a chamada conexão de Weitzenböck e $\hat{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}}$ seus respectivos coeficientes em uma base ortonormal. O referencial no qual a equação (5.3) é satisfeita será chamado de *referencial teleparalelo*.

A geometria de Weitzenböck pode ser caracterizada por:

$$\hat{R}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0, \quad Q_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = 0, \quad T^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} \neq 0. \quad (5.4)$$

A partir da equação (2.165), é possível ver que

$$\hat{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = \dot{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} + K^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}}, \quad (5.5)$$

mas, uma vez que $\hat{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = 0$, tem-se

$$\dot{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = -K^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}}. \quad (5.6)$$

Por outro lado, se for considerada uma base holonômica, a equação (5.3) possibilita escrever tais coeficientes como $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = e_{\hat{a}}^\lambda \partial_\mu e_{\hat{a}}^\nu$.

No referencial teleparalelo, a equação (2.152) pode ser reescrita como segue

$$T^{\hat{a}}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^{\hat{a}}_\nu - \partial_\nu e^{\hat{a}}_\mu, \quad (5.7)$$

em que foi feita a contração com $e^{\hat{b}}_\mu$ e $e^{\hat{c}}_\nu$ e a torção, nesse caso, é conhecida como torção de Weitzenböck.

5.1.2 Equações de campo do TERG

O procedimento para a obtenção das equações de campo do TERG é análogo àquele adotado para se obter as Equações de Einstein no capítulo anterior. Para que se possa construir a densidade lagrangiana da teoria, introduz-se o superpotencial de torção¹. Esse tensor é definido por (MALUF, 2013)

$$\Sigma^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \frac{1}{4} (T^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} + T^{\hat{b}\hat{a}\hat{c}} - T^{\hat{c}\hat{a}\hat{b}}) + \frac{1}{2} (\eta^{\hat{a}\hat{c}} T^{\hat{b}}_{\hat{b}} - \eta^{\hat{a}\hat{b}} T^{\hat{c}}_{\hat{c}}), \quad (5.8)$$

de onde se nota que ele é antissimétrico nos dois últimos índices, isto é, $\Sigma^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = -\Sigma^{\hat{a}\hat{c}\hat{b}}$. A partir desse tensor e do tensor de torção, pode-se construir o seguinte escalar:

$$T \equiv \Sigma^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} T_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \frac{1}{4} T^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} T_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} + \frac{1}{2} T^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} T_{\hat{b}\hat{a}\hat{c}} - T^{\hat{a}}_{\hat{a}} T_{\hat{b}}^{\hat{b}}. \quad (5.9)$$

Como é sabido do formalismo lagrangiano, a lagrangiana é construída a partir dos escalares da teoria, também chamados de invariantes. Na RG, para a construção da densidade lagrangiana da gravitação, o invariante considerado foi o escalar de curvatura $\hat{R}$. Por outro lado, na TERG, o escalar que permite construir a densidade lagrangiana é o escalar de torção, definido na equação (5.9). Dessa forma, a densidade lagrangiana total, dada em termos da densidade lagrangiana da geometria e da densidade lagrangiana da matéria, é definida por

$$\mathcal{L}_{tot} = -keT - \mathcal{L}_m, \quad (5.10)$$

onde e é o determinante da tétrada, dado por $e = \det\|e^{\hat{a}}_\mu\| = \pm\sqrt{-g}$.

Ao tomar variações da lagrangiana (5.10) com respeito à tétrada $e_{\hat{a}\mu}$ e aplicar o princípio da mínima ação², é possível chegar às equações de campo do TERG, que são dadas por ((MALUF, 2013), equação (30))

$$\partial_\lambda (e \Sigma^{\hat{a}\mu\lambda}) = \frac{e}{4k} (t^{\mu\hat{a}} + \mathcal{T}^{\mu\hat{a}}). \quad (5.11)$$

Na equação anterior, as quantidades $t^{\mu\hat{a}}$ e $\mathcal{T}^{\mu\hat{a}}$ são interpretadas como os tensores de energia e momento do campo gravitacional e da matéria, respectivamente, em que esse primeiro é definido por

$$t^{\mu\hat{a}} = k (4\Sigma^{\hat{b}\hat{c}\mu} T_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} - e^{\mu\hat{a}} T). \quad (5.12)$$

¹ Na literatura, em trabalhos que envolvem o TERG, esse tensor é chamado apenas de superpotencial. Todavia, como neste trabalho serão abordados diferentes casos de teleparalelismo, bem como sua generalização, essa diferenciação será conveniente.

² Essa abordagem que sempre assume que as quantidades geométricas já estão escritas no referencial teleparalelo é conhecida na literatura como formulação de tétrada pura.

Em relação às equações de campo do TERG, a partir das equações de Einstein

$$\overset{\circ}{G}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2k} \mathcal{T}^{\mu\nu}, \quad (5.13)$$

é possível mostrar que (5.11) são equivalentes à RG³. Na realidade, esse resultado é algo esperado, pois a densidade lagrangiana do TERG é equivalente à da RG. De fato, para mostrar isso, constrói-se o escalar de curvatura da conexão de Weitzenböck, que é dado por

$$\hat{R} = \overset{\circ}{R} + T - 2\overset{\circ}{\nabla}_\mu T^\mu. \quad (5.14)$$

Como a geometria de Weitzenböck é caracterizada pelo anulamento da curvatura, tem-se que $\hat{R} = 0$. Desse modo,

$$\overset{\circ}{R} = -T + 2\overset{\circ}{\nabla}_\mu T^\mu. \quad (5.15)$$

Diante desse fato e da definição da densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert (4.7), em que deve ser levada em conta a troca de $\sqrt{-g}$ por e , nota-se que elas diferem apenas por um termo de contorno. Portanto, são densidades lagrangianas equivalentes, o que implica equações de campo equivalentes.

5.1.3 Equação de conservação e o 4-momento

Da equação (5.11), uma vez que o superpotencial de torção é antissimétrico nos dois últimos índices, como evidencia a equação (5.8), se for aplicada uma derivada ∂_μ em (5.11), verifica-se que

$$\partial_\mu \partial_\lambda (e \Sigma^{\hat{\alpha}\mu\lambda}) = 0. \quad (5.16)$$

Devido a esse resultado, o membro direito da equação (5.11) fornece a seguinte equação de conservação de energia e momento

$$\partial_\mu \left[e \left(t^{\mu\hat{a}} + \mathcal{T}^{\mu\hat{a}} \right) \right] = 0, \quad (5.17)$$

que, conforme visto no capítulo 4, não há uma equação equivalente na RG. Se a equação acima for integrada em uma região espacial tridimensional de volume V e livre de singularidades, a partir do teorema de Stokes generalizado, chega-se à seguinte equação de continuidade:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x e \left(t^{0\hat{a}} + \mathcal{T}^{0\hat{a}} \right) = - \oint_S dS_i e \left(t^{i\hat{a}} + \mathcal{T}^{i\hat{a}} \right), \quad (5.18)$$

em que S é a superfície de contorno da região V . No que diz respeito ao membro esquerdo da equação anterior, este é interpretado como o 4-momento que, nesse caso, é definido por ((MALUF, 2013), equação (34))

$$P^{\hat{a}} = \int_V d^3x e \left(t^{0\hat{a}} + \mathcal{T}^{0\hat{a}} \right). \quad (5.19)$$

³ Para uma demonstração deste resultado, recomenda-se a referência (FORMIGA, 2024)

Desse resultado, os 4-momentos do campo gravitacional e da matéria podem ser extraídos e, portanto, definidos. Eles são dados, respectivamente, por

$$P_g^{\hat{a}} = \int_V d^3x e t^{0\hat{a}}, \quad P_m^{\hat{a}} = \int_V d^3x e \mathcal{T}^{0\hat{a}}. \quad (5.20)$$

A equação (5.19) pode ser reobtida em outra forma com auxílio da equação (5.11). Ao integrá-la sob a mesma região V , é possível obter o 4-momento em termos do superpotencial de torção, como segue:

$$P^{\hat{a}} = 4k \oint_S dS_i e \Sigma^{\hat{a}0i}. \quad (5.21)$$

Para chegar à equação acima, tomou-se $\mu = 0$ em (5.11) e se utilizou o fato de que $\Sigma^{\hat{a}00} = 0$.

5.2 Teleparalelismo Simétrico Equivalente à Relatividade Geral

A abordagem desta seção será análoga à adotada na seção anterior.

5.2.1 Características da geometria do TSERG

Como o TERG, o TSERG consiste em uma teoria alternativa à RG padrão. Nele, a geometria é caracterizada pelo anulamento dos tensores de curvatura e torção, de modo que a gravitação é completamente descrita pela não metricidade. Nessa teoria, a estrutura geométrica é caracterizada por um caso particular da geometria de Einstein-Weyl. Na geometria de Einstein-Weyl, ao realizar as decomposições da conexão afim e do tensor de curvatura e, além disso, considerar que a torção é nula, obtém-se

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\mu}^{\lambda} = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + L^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad (5.22)$$

$$\tilde{R}^{\rho}_{\mu\sigma\nu} = \mathring{R}^{\rho}_{\mu\sigma\nu} + \mathring{\nabla}_{\sigma} L^{\rho}_{\nu\mu} - \mathring{\nabla}_{\nu} L^{\rho}_{\sigma\mu} + L^{\rho}_{\sigma\alpha} L^{\alpha}_{\nu\mu} - L^{\alpha}_{\sigma\mu} L^{\rho}_{\nu\alpha}. \quad (5.23)$$

Por se tratar de uma teoria teleparalela, a noção de paralelismo distante está presente no TSERG. Para o anulamento da curvatura e, portanto, a noção de teleparalelismo ser alcançada junto com a condição de uma conexão simétrica, a conexão afim para esse caso particular da geometria de Einstein-Weyl é dada por

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}}, \quad (5.24)$$

em que ξ^{ρ} são funções arbitrárias. Conforme argumentado em (JIMENEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019), o gauge no qual a conexão se anula consiste na escolha de coordenadas tais que $\xi^{\rho} = x^{\rho}$. Esse gauge em questão é interpretado como o gauge no qual a origem do espaço tangente coincide com a origem do espaço-tempo, o que justifica seu nome: o gauge coincidente. Desse modo,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \iff \xi^{\rho} = x^{\rho}, \quad (5.25)$$

o que implica, matematicamente, a seguinte configuração geométrica do TSERG

$$\tilde{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} = 0, \quad T^\rho_{\mu\nu} = 0, \quad Q^\rho_{\mu\nu} \neq 0. \quad (5.26)$$

Nesse gauge, o anulamento da conexão permite escrever não metricidade como

$$Q_{\rho\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu}. \quad (5.27)$$

Além disso, faz com que a deformação seja completamente determinada pela conexão de Levi-Civita, isto é,

$$\mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = -L^\rho_{\mu\nu}, \quad (5.28)$$

bem como a derivada covariante seja trocada pela derivada parcial, ou seja, $\tilde{\nabla}_\mu \rightarrow \partial_\mu$.

5.2.2 Equações de campo do TSERG

Analogamente à seção anterior, o primeiro passo é introduzir o que aqui será chamado por superpotencial de não metricidade⁴. Por definição, este tensor é dado por ((JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018), equação (18))

$$P^\lambda_{\mu\nu} \equiv c_1 Q^\lambda_{\mu\nu} + c_2 Q_{(\mu}{}^\lambda{}_{\nu)} + Q^\lambda g_{\mu\nu} + c_4 \delta^\lambda_{(\mu} \tilde{Q}_{\nu)} + \frac{c_5}{2} (\tilde{Q}^\lambda g_{\mu\nu} + \delta^\lambda_{(\mu} Q_{\nu)}), \quad (5.29)$$

onde $c_1, \dots, c_5$ são constantes. A partir desse tensor e da não metricidade, é possível construir o seguinte escalar $\mathbb{Q} = P^\lambda_{\mu\nu} Q^\mu{}_\lambda{}^\nu$. Ao tomar as seguintes escolhas na equação (5.29): $c_4 = 0$ e $c_1 = -(1/2)c_2 = -c_3 = (1/2)c_5 = -(1/4)$, obtém-se

$$Q = \frac{1}{4} Q^{\lambda\mu\nu} Q_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} Q^{\lambda\mu\nu} Q_{\mu\lambda\nu} + \frac{1}{4} Q^\lambda Q_\lambda - \frac{1}{2} \tilde{Q}^\lambda Q_\lambda. \quad (5.30)$$

O escalar acima garante a equivalência entre o TSERG e a RG. No entanto, por questões de generalidade, o escalar a ser adotado será $\mathbb{Q}$. A partir desse último, é possível construir a seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -k\sqrt{-g}\mathbb{Q} + \mathcal{L}_m, \quad (5.31)$$

em que o primeiro termo do membro corresponde à densidade lagrangiana gravitacional (da geometria) e $\mathcal{L}_m$ é a densidade lagrangiana da matéria. Variações com respeito à métrica fornecem as seguintes equações de campo ((JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018), equação (20))

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} P^\lambda_{\mu\nu}) - q_{\mu\nu} - \mathbb{Q} g_{\mu\nu} = \frac{1}{2k} \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (5.32)$$

onde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é o tensor de energia e momento da matéria e

$$q_{\mu\nu} = c_1 (2Q_{\rho\sigma\mu} Q^{\rho\sigma}{}_\nu - Q_{\mu\rho\sigma} Q_\nu{}^{\rho\sigma}) + c_2 Q_{\rho\sigma\mu} Q^{\sigma\rho}{}_\nu + c_3 (2Q_\rho Q^\rho{}_\mu - Q_\mu Q_\nu) + c_4 \tilde{Q}_\mu \tilde{Q}_\nu + c_5 \tilde{Q}_\rho Q^\rho{}_{\mu\nu}. \quad (5.33)$$

A equivalência da equação (5.32) com a RG é recuperada ao impor, vale lembrar, $c_4 = 0$ e $c_1 = -(1/2)c_2 = -c_3 = (1/2)c_5 = -(1/4)$, o que implica $\mathbb{Q} = Q^5$. Essa equivalência é

⁴ Na referência (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018), este tensor é chamado de conjugado à não metricidade.

⁵ Para mais detalhes, recomenda-se as referências (CAPOZZIELLO; FALCO; FERRARA, 2022; JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018).

devido ao fato de que a densidade lagrangiana do STERG difere da densidade lagrangiana da RG apenas por um termo de contorno. Para a geometria que caracteriza o STERG, o escalar de curvatura é dado por

$$\tilde{R} = \mathring{R} + Q + \mathring{\nabla}_\mu (Q^\mu - \tilde{Q}^\mu). \quad (5.34)$$

Como $\tilde{R} = 0$, então se obtém

$$\mathring{R} = -Q - \mathring{\nabla}_\mu (Q^\mu - \tilde{Q}^\mu). \quad (5.35)$$

Em face desse resultado, pode-se notar que as densidades lagrangiana de Einstein-Hilbert e do TSTERG diferem apenas por um termo de contorno, como no caso do TERG. Logo, são densidades lagrangianas equivalentes, o que possibilita terem equações de campo equivalentes.

6 Teleparallelismo Generalizado Equivalente à Relatividade Geral e a Energia do Campo Gravitacional

Neste capítulo, serão apresentados todos os resultados que o desenvolvimento deste trabalho possibilitou. Na primeira seção, são apresentadas as motivações para uma generalização do teleparallelismo. Em seguida, mostra-se a construção da lagrangiana e a obtenção das equações de campo. Na terceira seção, a condição de referencial teleparalelo é imposta e a natureza de cada referencial é identificada, a depender do caso. Por fim, encerra-se o capítulo com uma aplicação que permitirá obter a energia do campo gravitacional. Ao leitor que esteja interessado, todos os cálculos intermediários que levaram aos resultados estão disponíveis para consulta nos apêndices, dado que, por conveniência, nesse capítulo só estarão expostos os resultados.

6.1 Motivações

Como já foi abordado anteriormente, existe uma infinidade de bases que podem ser associadas como base para o espaço tangente $T_p\mathcal{M}$. Ao longo deste trabalho, foram vistas as bases holonômicas $\{\partial_\mu\}$ e as bases não holonômicas, que se dividem em dois casos: as bases ortonormais, ditas de norma constante, $\{e_{\hat{a}}\}$, e as bases não ortonormais $\{e_a\}$.

Nas teorias teleparalelas estudadas no capítulo anterior, o único que usa o formalismo das tétradas é o TERG, ou seja, apenas nele que as tétradas são tidas como objeto fundamental na geometria. No TSERG, por outro lado, o objeto fundamental é a métrica. Nesse sentido, pode-se dizer que o TERG tem uma certa vantagem em relação ao TSERG, pois, como argumenta Rovelli ((ROVELLI; VIDOTTO, 2015), seção 3.2), as tétradas são objetos mais fundamentais do que a métrica, devido a sua possibilidade de permitir o acoplamento com férmions, algo que não é realizável pela métrica.

No que diz respeito ao TERG, as bases não holonômicas lá utilizadas são ortonormais. De certo modo, isso pode se configurar como uma limitação que, em princípio, não é necessária, em face à infinidade de bases que existem. Logo, a generalização das tétradas para o caso não ortonormal $\{e_a\}$ remove essa limitação e, somado a isso, possibilita incluir outro grau de liberdade na teoria: a não metricidade, de modo que se pode, então, ter uma teoria teleparalela com torção e não metricidade. Nesse sentido, torna-se possível trabalhar com cada caso particular, isto é, com um teleparallelismo apenas com torção e com um teleparallelismo apenas com não metricidade, sendo possível usar o formalismo

das tétradas em ambos os casos, como será visto na última seção.

Com essa generalização, torna-se possível adotar o uso de vetores de Killing que não têm norma constante. Também devido à essa generalização, a possibilidade de tomar qualquer base como base teleparalela permite uma análise mais minuciosa no que diz respeito ao problema do referencial teleparalelo (FORMIGA, 2022). Outra possibilidade que tal generalização permite é o estudo de forma mais aprofundada do problema da energia gravitacional. Além disso, no estudo de cenários em que o campo gravitacional é consideravelmente intenso, pode ser que seja necessário usar um referencial teleparalelo que não seja ortonormal, uma vez que cenários extremos podem exigir interações não gravitacionais muito intensas para garantir a ortonormalidade do referencial. Por fim, ela também torna possível a abordagem das teorias $f(T)$ e $f(Q)$ em uma única estrutura geométrica, o que leva à obtenção simultânea de resultados para as duas teorias, sem que haja a necessidade de analisar cada caso.

6.2 Equações de campo do TGERG

Esta seção diz respeito aos primeiros resultados que este trabalho possibilitou, que são a generalização do teleparallelismo, as equações de campo, os tensores de energia e momento gravitacionais e o hipermomento gravitacional.

Como discutido no capítulo 3, a generalização do teleparallelismo partiu da teoria de gauge métrica-afim da gravitação, por essa se tratar de um quadro mais geral com todos os graus de liberdades possíveis, que leva à condição de teleparallelismo por meio do método dos multiplicadores de Lagrange. Foi visto no capítulo 3 que, dada a seguinte lagrangiana

$$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_g + \mathbf{L}_m + \mathbf{R}_a{}^b \wedge \boldsymbol{\lambda}_b{}^a, \quad (6.1)$$

o princípio da mínima ação permite obter

$$\mathbf{D}\mathbf{M}^{ab} - \mathbf{m}^{ab} = \boldsymbol{\sigma}^{ab}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{H}_a - \mathbf{E}_a = \boldsymbol{\Sigma}_a, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{H}_b{}^a - \mathbf{E}_b{}^a - \mathbf{D}\boldsymbol{\lambda}_b{}^a = \boldsymbol{\Delta}_b{}^a, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{R}_a{}^b = 0. \quad (6.5)$$

Diante disso, o procedimento para obter cada uma das equações procedeu da seguinte forma:

1. Quando necessário, foram usadas as seguintes identidades (retiradas de (OBUKHOV; RUBILAR, 2006)):

$$\boldsymbol{\vartheta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}_a = \delta_a^b \boldsymbol{\eta}, \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}_{cd} = \delta_d^b \boldsymbol{\eta}_c - \delta_c^b \boldsymbol{\eta}_d, \quad (6.7)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}_{acd} = \delta_a^b \boldsymbol{\eta}_{cd} + \delta_d^b \boldsymbol{\eta}_{ac} + \delta_c^b \boldsymbol{\eta}_{da}, \quad (6.8)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}_{aec d} = \delta_d^b \boldsymbol{\eta}_{aec} - \delta_c^b \boldsymbol{\eta}_{aed} + \delta_e^b \boldsymbol{\eta}_{acd} - \delta_a^b \boldsymbol{\eta}_{ecd}, \quad (6.9)$$

em que

$$\boldsymbol{\eta} = \sqrt{|\mathcal{G}|} \boldsymbol{\vartheta}^{(0)} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{(1)} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{(2)} \wedge \boldsymbol{\vartheta}^{(3)} \quad (6.10)$$

é a 4-forma de volume, $\mathcal{G} = \det\|g_{ab}\|$, e

$$\boldsymbol{\eta}_a = \boldsymbol{e}_a \rfloor \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta}_{ab} = \boldsymbol{e}_b \rfloor \boldsymbol{\eta}_a, \quad \boldsymbol{\eta}_{abc} = \boldsymbol{e}_c \rfloor \boldsymbol{\eta}_{ab}, \quad \boldsymbol{\eta}_{abcd} = \boldsymbol{e}_d \rfloor \boldsymbol{\eta}_{abc}; \quad (6.11)$$

2. Cálculo dos momentos gravitacionais conjugados $\boldsymbol{H}_a$, $\boldsymbol{M}^{ab}$ e $\boldsymbol{H}^a_b$;
3. Cálculo da 3-forma de energia e momento canônica $\boldsymbol{E}_a$, da 4-forma de energia e momento métrica $\boldsymbol{m}^{ab}$ e do hipermomento gravitacional $\boldsymbol{E}^a_b$;
4. Por fim, foi realizado o desenvolvimento das equações do coframe (6.3), da métrica (6.2) e da conexão (6.4).

O ponto de partida para o desenvolvimento desta seção foi considerar a construção do modelo geométrico generalizado da teoria. Para isso, foi realizada a decomposição do tensor de curvatura, como apresentada no capítulo 2. Lá, foi construído o escalar de curvatura geral, que é dado por

$$R = \mathring{R} + \mathring{\nabla}_\rho N^{\rho\mu}_\mu - \mathring{\nabla}_\nu N^{\rho\nu}_\rho + N, \quad (6.12)$$

em que

$$N = T + Q + TQ, \quad (6.13)$$

e

$$T \equiv \frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\rho\mu} T_{\mu\lambda\nu} - T^\lambda T_\lambda, \quad (6.14)$$

$$Q \equiv \frac{1}{4} Q^{\lambda\mu\nu} Q_{\lambda\mu\nu} - \frac{1}{2} Q^{\lambda\mu\nu} Q_{\mu\lambda\nu} - \frac{1}{4} \tilde{Q}^\lambda \tilde{Q}_\lambda + \frac{1}{2} \tilde{Q}^\lambda Q_\lambda, \quad (6.15)$$

$$TQ \equiv T_{\lambda\nu\mu} Q^{\nu\lambda\mu} + T_\lambda Q^\lambda - T_\lambda \tilde{Q}^\lambda. \quad (6.16)$$

Para a construção da lagrangiana da teoria, a equação (6.12) foi de grande utilidade. Primeiramente, essa equação foi multiplicada por $\sqrt{-g}$ e foi considerado o fato de que $\sqrt{-g}(\mathring{\nabla}_\lambda A^\lambda) = \partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda)$ (devido à compatibilidade métrica da conexão de Levi-Civita), procedimento este que levou à seguinte identidade

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\mathring{R} + \sqrt{-g}N + \partial_\lambda \left[\sqrt{-g} \left(Q^\lambda - \tilde{Q}^\lambda - 2T^\lambda \right) \right], \quad (6.17)$$

em que

$$N^{\lambda\mu}_{\mu} - N^{\mu\lambda}_{\mu} = Q^{\lambda} - \tilde{Q}^{\lambda} - 2T^{\lambda}. \quad (6.18)$$

A partir da definição da densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert (4.7) e ao isolar $\mathring{R}$ na equação (6.17), foi possível definir a lagrangiana gravitacional, como segue

$$\mathbf{L}_g = -k\mathbf{R}^{ab} \wedge \boldsymbol{\eta}_{ab} - k\boldsymbol{\eta}N. \quad (6.19)$$

Para se chegar à definição acima, foi usado o fato de que $\mathbf{L}_g = \mathcal{L}_{EH}d^4x$. Além disso, foram usados também que $\sqrt{-g}d^4x\mathring{R} = \boldsymbol{\eta}\mathring{R} = -\mathring{\mathbf{R}}^{ab} \wedge \boldsymbol{\eta}_{ab}$, $\sqrt{-g}d^4xR = -\mathbf{R}^{ab} \wedge \boldsymbol{\eta}_{ab}$, bem como o termo de fronteira foi desprezado.

Desse modo, na MAG, a lagrangiana total é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{tot} &= \mathbf{L}_g + \mathbf{L}_m + \mathbf{R}_a^b \wedge \boldsymbol{\lambda}_b^a \\ &= -k\mathbf{R}^{ab} \wedge \boldsymbol{\eta}_{ab} - k\boldsymbol{\eta}N + \mathbf{L}_m + \mathbf{R}_a^b \wedge \boldsymbol{\lambda}_b^a, \end{aligned} \quad (6.20)$$

em que $\mathbf{L}_g = \mathbf{L}_g(g_{ab}, \boldsymbol{\vartheta}^a, \mathbf{T}^a, \mathbf{Q}_{ab}, \mathbf{R}_a^b, \boldsymbol{\lambda}_b^a)$. Nesse ponto, o leitor pode questionar se na equação referente à lagrangiana gravitacional (6.19), o termo envolvendo a curvatura não deveria estar presente, pois no caso teleparalelo é necessário que a curvatura seja nula, isto é, $\mathbf{R}_a^b = 0$. Na literatura, até onde sabemos, a curvatura é sempre negligenciada como se pode observar nas referências (BLAGOJEVIC, 2002; JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018; JIMÉNEZ et al., 2020; GOMES; JIMÉNEZ; KOIVISTO, 2023; ADAK et al., 2023; FORMIGA; COSTA, 2025). Por exemplo, nas referências (BLAGOJEVIC, 2002; FORMIGA; COSTA, 2025), tem-se

$$\mathcal{L}_{tot} = -keT - c\lambda_{\hat{a}\hat{b}}^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}^{\hat{a}\hat{b}} - \mathcal{L}_m, \quad (6.21)$$

onde $e = \det\|e^{\hat{a}}_{\mu}\|$, c é a velocidade da luz no vácuo e $\lambda_{\hat{a}\hat{b}}^{\mu\nu}$ é multiplicador de Lagrange. Na equação anterior, nota-se que a curvatura não é mantida como na equação (6.20). A justificativa para que $\mathbf{R}_a^b$ seja mantido no presente trabalho é de que sua presença é mais natural no formalismo variacional aqui abordado. Em outras palavras, tomar $\mathbf{R}_a^b = 0$ levaria a equação (6.20) a uma forma semelhante à (6.21), contudo, isso seria impor o anulamento a priori da curvatura, algo que, no formalismo variacional, só é alcançado quando variações com respeito ao multiplicador de Lagrange são tomadas. De qualquer forma, é possível motivar a ausência da curvatura na equação (6.19) a partir de uma analogia com as lagrangianas quadráticas do tipo Yang-Mills, tendo sido essa a abordagem que vinculou o teleparallelismo com a teoria de gauge do grupo das translações (CHO, 1976).

6.2.1 Momentos conjugados, hipermomento e correntes gravitacionais

Para a obtenção das equações de campo, foi mais conveniente, a princípio, obter os momentos gravitacionais conjugados à torção e à não metricidade: $\mathbf{H}_a$ e $\mathbf{M}^{ab}$, bem

como o momento gravitacional conjugado à curvatura, $\mathbf{H}_b^a$, respectivamente; em seguida, a 3-forma de energia e momento canônica $\mathbf{E}_a$ e a 4-forma de energia e momento métrica $\mathbf{m}^{ab}$ e o hipermomento $\mathbf{E}_b^a$.

Para obter $\mathbf{H}_a$, foi usada a segunda equação do conjunto de equações (3.36) e a lagrangiana gravitacional (6.19). Com isso, foi possível obter (ver o Apêndice A.1)

$$\mathbf{H}_a = 2kS_a^{bc}\boldsymbol{\eta}_{bc}, \quad (6.22)$$

em que

$$S^{abc} \equiv \Sigma^{abc} + \Xi^{abc}, \quad (6.23)$$

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} (T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2} (g^{ac}T^b - g^{ab}T^c), \quad (6.24)$$

$$\Xi^{abc} = \frac{1}{4} [Q^{bac} - Q^{cab} + g^{ab} (Q^c - \tilde{Q}^c) - g^{ac} (Q^b - \tilde{Q}^b)]. \quad (6.25)$$

Das definições acima, nota-se que S^{abc} , Σ^{abc} e Ξ^{abc} são antissimétricos nos dois últimos índices.

Analogamente, $\mathbf{M}^{ab}$ foi obtido a partir da primeira equação das equações (3.36) e da equação (6.19). Logo, foi obtido que (Apêndice A.2)

$$\mathbf{M}^{bc} = 4kU^{abc}\boldsymbol{\eta}_a, \quad U^{abc} \equiv P^{abc} + V^{abc}, \quad (6.26)$$

em que

$$P^{abc} = -\frac{1}{4}Q^{abc} + \frac{1}{4}(Q^{bac} + Q^{cab}) + \frac{1}{4}g^{bc}(Q^a - \tilde{Q}^a) - \frac{1}{8}(g^{ab}Q^c + g^{ac}Q^b), \quad (6.27)$$

$$V^{abc} = -\frac{1}{4}(T^{bac} + T^{cab} + 2g^{bc}T^a - g^{ac}T^b - g^{ab}T^c), \quad (6.28)$$

das quais é possível notar a simetria nos dois últimos índices.

Ao longo dos cálculos, diante das definições de S^{abc} e U^{abc} , foi possível definir o escalar N (6.13) de forma mais conveniente, como segue

$$N = T_{abc}S^{abc} - Q_{abc}U^{abc}. \quad (6.29)$$

Por fim, o último passo foi obter o momento gravitacional conjugado à curvatura. No que diz respeito ao cálculo de $\mathbf{H}_b^a$, obteve-se (Apêndice D.1)

$$\mathbf{H}_b^a = k\boldsymbol{\eta}_b^a, \quad (6.30)$$

em que foram usadas a terceira equação de (3.36) e a equação (6.19).

Com os momentos conjugados obtidos, o próximo passo foi obter a 3-forma de energia e momento canônica. Para o cálculo de $\mathbf{E}_a$, foi necessário desprezar os termos de curvatura presentes na equação (3.41), conforme impõe a equação (6.5), e usar equações

(6.22) e (6.26), bem como a segunda identidade (6.7). Dessa forma, chegou-se ao seguinte resultado para a 3-forma de energia e momento canônica (Apêndice B.1):

$$\mathbf{E}_a = \left(-k N \delta_a^b + 4k T_{ac}^d S_d^{bc} - 2k Q_{adc} U^{bdc} \right) \boldsymbol{\eta}_b. \quad (6.31)$$

Tendo em mente que $\mathbf{E}_a = t_a^b \boldsymbol{\eta}_b$, obteve-se

$$t_a^b = -k N \delta_a^b + 4k T_{ac}^d S_d^{bc} - 2k Q_{adc} U^{bdc}, \quad (6.32)$$

em que t_a^b é o tensor de energia e momento canônico, que pode ser interpretado como o tensor de energia e momento do campo gravitacional.

De maneira análoga, as equações (3.40), (6.6), (6.7), (6.22) e (6.26) permitiram obter a 4-forma $\mathbf{m}^{ab}$ (Apêndice B.2):

$$\mathbf{m}^a_b = \left(t^a_b - 4k Q_{dbc} U^{dac} - 2k T^{acd} S_{bcd} \right) \boldsymbol{\eta}, \quad (6.33)$$

em que foram anulados os termos de curvatura e da qual se extraiu o tensor de energia e momento métrico

$$m^a_b = t^a_b - 4k Q_{dbc} U^{dac} - 2k T^{acd} S_{bcd}, \quad (6.34)$$

em que foi usado $\mathbf{m}^{ab} = m^{ab} \boldsymbol{\eta}$ e que também pode ser interpretado como o tensor de energia e momento do campo gravitacional.

Por fim, o último objeto a ser calculado foi a 3-forma de hipermomento $\mathbf{E}^a_b$. Ao usar as equações (3.39) e (6.7), bem como as equações (6.22) e (6.26), foi possível obter o seguinte resultado (Apêndice D.2):

$$\mathbf{E}^a_b = -4k (S_b^{ca} + U^{ca}_b) \boldsymbol{\eta}_c. \quad (6.35)$$

6.2.2 Equação do coframe

Na obtenção da equação do coframe, foram levados em conta os resultados das equações (6.22) e (6.31), bem como o fato de que $\boldsymbol{\Sigma}_a = \mathcal{T}_a^b \boldsymbol{\eta}_b$. Assim, ao realizar a aplicação de $\mathbf{D}$ à equação (6.22) e usar equação a (6.3), obteve-se (Apêndice C.1)

$$\nabla_\nu(\omega) \left(\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu} \right) = \frac{\sqrt{-g}}{4k} \tau_a^\mu, \quad \tau_a^\mu = t_a^\mu + \mathcal{T}_a^\mu, \quad (6.36)$$

em que τ_a^μ é interpretado como o tensor de energia e momento do espaço-tempo e t_a^μ , o tensor de energia e momento do campo gravitacional é definido como na equação (6.32).

A título de elucidar o leitor, a notação $\nabla_\nu(\omega)$ representa as componentes da derivada covariante com respeito à conexão ∇ atuando apenas em índices de tetradas. Desse modo, $\nabla_\nu \left(\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\vartheta}^a \right) = [\nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu})] \boldsymbol{\vartheta}^a$, o que significa que $\nabla_\nu(\omega) \sqrt{-g} S_a^{\mu\nu}$ são as componentes de $\nabla_\nu \left(\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\vartheta}^a \right)$. Explicitamente, isso significa que

$$\nabla_\nu(\omega) \left(\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu} \right) = \partial_\nu \left(\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu} \right) - \sqrt{-g} \omega_{\nu a}^b S_b^{\mu\nu}. \quad (6.37)$$

Em relação à equação de campo (6.36), ela nada mais é do que as equações de campo de Einstein escritas na forma teleparalela. Para verificar isso, usou-se as equações de Einstein escritas na forma $\mathring{G}^\mu_a = (1/2k)\mathcal{T}^\mu_a$, como pode ser visto no Apêndice C.2. Desse modo, esse resultado faz a generalização proposta ser equivalente à RG, daí o nome Teleparallelismo Generalizado Equivalente à Relatividade Geral.

Além disso, ao aplicar $\nabla_\mu(\omega)$ na equação (6.36), devido a antissimetria de $S_a^{\mu\nu}$ nos dois últimos índices, isto é, $S_a^{\mu\nu} = -S_a^{\nu\mu}$, foi possível verificar¹

$$\nabla_\mu(\omega)\nabla_\nu(\omega)\left(\sqrt{-g}S_a^{\mu\nu}\right) = 0, \quad (6.38)$$

o que levou ao resultado seguinte:

$$\nabla_\mu(\omega)\left[\sqrt{-g}(t^\mu_a + \mathcal{T}^\mu_a)\right] = 0, \quad (6.39)$$

que consiste em uma equação de conservação no caso do referencial teleparalelo, conforme será visto mais adiante.

6.2.3 Equação da métrica

Os cálculos para se obter a equação da métrica foram análogos àqueles realizados na seção anterior. Para mais detalhes, ver o Apêndice C.3. Ao desenvolver a derivada exterior na equação (6.2) e usar equações (6.26) e (6.33), obteve-se que

$$\nabla_\nu(\omega)\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\right) = \frac{\sqrt{-g}}{4k}\left(m^{ab} + \mathcal{T}^{ab}\right). \quad (6.40)$$

onde m^{ab} está definido na equação (6.34) e, além disso, foi o usado o fato de que $\sigma^{ab} = \mathcal{T}^{ab}$, em que $\sigma^a_b = \sigma^a_b \boldsymbol{\eta}$ e $\mathcal{T}^{ab}$ é o tensor de energia e momento da matéria. Em relação ao último fato, será evidenciado adiante por que a igualdade foi estabelecida.

Aqui, a expressão $\nabla_\nu(\omega)\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\right)$ representa as componentes de $\boldsymbol{\nabla}_\nu\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b\right)$, pois $\boldsymbol{\nabla}_\nu\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b\right) = \left[\nabla_\nu\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\right)\right]\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b$. Em outras palavras, tem-se

$$\nabla_\nu(\omega)\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\right) = \partial_\nu\left(\sqrt{-g}U^{\nu ab}\right) + \sqrt{-g}\omega^a_{\nu c}U^{\nu cb} + \sqrt{-g}\omega^b_{\nu c}U^{\nu ac}. \quad (6.41)$$

Como mencionado no capítulo 3, as equações do coframe e da métrica são equivalentes (é válido lembrar ao leitor para consultar (HEHL et al., 1995), especificamente a página 80). Desse modo, ambas as equações (6.36) e (6.40) são equivalentes às equações de Einstein, no TGERG. Contudo, o foco deste trabalho será apenas na equação do coframe, pois, ao que tudo indica, $S_a^{\mu\nu}$ é mais adequado na análise do problema da energia do campo gravitacional.

¹ O resultado (6.38) é consequência do fato da curvatura da conexão ser nula (as derivadas covariantes comutam).

6.2.4 Equação da conexão

Os resultados desta subseção estão demonstrados no Apêndice D.3. Primeiramente, o procedimento foi aplicar $\mathbf{D}$ sobre $\mathbf{H}^a_b$ que, conforme a equação (6.30), é dado por $\mathbf{H}^a_b = k\boldsymbol{\eta}^a_b$. Disso, foi obtido que

$$\mathbf{D}\mathbf{H}^a_b = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (\nabla_\nu(\omega) J^{a\ \nu\mu}_b) \boldsymbol{\eta}_\mu, \quad (6.42)$$

em que

$$J^{ab\nu\mu} \equiv 2k\sqrt{-g} (e^{a\mu} e^{b\nu} - e^{a\nu} e^{b\mu}), \quad (6.43)$$

resultado este que é análogo à equação (13) de (FORMIGA; COSTA, 2025).

Da definição da 3-forma de hipermomento gravitacional (6.35), foi possível demonstrar que $\mathbf{D}\mathbf{H}^a_b = \mathbf{E}^a_b$. Diante deste fato, o resultado obtido para a equação da conexão (6.4) foi

$$-\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda}^a_b = \boldsymbol{\Delta}^a_b, \quad (6.44)$$

ou, equivalentemente, em termos das componentes,

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b) = \Delta^{\mu a}_b, \quad (6.45)$$

em que foi usado o fato de que $\boldsymbol{\Delta}^a_b = \Delta^{\mu a}_b \boldsymbol{\eta}_\mu$ e $\lambda^{a\ \mu\nu}_b$ são as componentes do multiplicador de Lagrange, que têm as seguintes simetrias: $\lambda^{a\ \mu\nu}_b = -\lambda^{a\ \nu\mu}_b$ e $\lambda^{a\ \mu\nu}_b = -\lambda^{a\ \nu\mu}_b$.

No presente caso, $\nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b)$ corresponde às componentes de $\boldsymbol{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b \mathbf{e}_a \otimes \boldsymbol{\vartheta}^a)$, dado que $\boldsymbol{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b \mathbf{e}_a \otimes \boldsymbol{\vartheta}^a) = [\nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b)] \mathbf{e}_a \otimes \boldsymbol{\vartheta}^a$. Então, explicitamente, se tem

$$\nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b) = \partial_\nu (\sqrt{-g} \lambda^{a\ \nu\mu}_b) + \sqrt{-g} \omega^a_{\ \nu d} \lambda^{d\ \nu\mu}_b - \sqrt{-g} \omega^d_{\ \nu b} \lambda^{a\ \nu\mu}_d. \quad (6.46)$$

Em relação à equação (6.44) (ou (6.45)), nota-se que ela difere da equação (3.63b) de (BLAGOJEVIC, 2002), mas tal diferença não é significativa, dado a equação da conexão tem função apenas de determinar o multiplicador de Lagrange. Essa diferença surge devido ao fato de que Blagojevic usa uma lagrangiana diferente, como foi argumentado anteriormente. Como essa diferença afeta apenas a equação da equação da conexão, equação essa que é obtida por meio de variações com respeito a conexão $\boldsymbol{\Gamma}^b_a$, então, não há nenhuma inconsistência.

Antes de finalizar esta seção, é importante considerar a seguinte demonstração da equivalência entre T^a_b e σ^a_b . A partir da equação (5.3.2) (HEHL et al., 1995), pode-se obter

$$\sigma^a_b = \boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \boldsymbol{\Sigma}_b + \mathbf{D}\boldsymbol{\Delta}^a_b. \quad (6.47)$$

Diante do resultado acima e da equação (6.44), foi possível verificar que $\mathbf{D}\boldsymbol{\Delta}^a_b = 0$. Desse modo, restou apenas $\sigma^a_b = \boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \boldsymbol{\Sigma}_b$, o que permitiu, ao usar a primeira identidade (6.6), concluir que $\sigma^a_b = \mathcal{T}^a_b$, resultado este que foi utilizado na equação da métrica (6.40).

6.3 Referencial teleparalelo

Nesta seção, a condição do referencial (tétrada) ser teleparalelo é considerada. Em seguida, os casos de teleparallelismo apenas com torção e de teleparallelismo apenas com não metricidade são estudados, o que permitiu analisar e caracterizar a natureza do referencial em cada caso. Por fim, semelhantemente ao caso do TERG (seção 5.1), o 4-momento é definido.

6.3.1 Referencial Teleparalelo

Aqui, o referencial teleparalelo será denotado por $\mathbf{p}_a = p_a^\mu \partial_\mu$ e sua base dual correspondente será denotada por $\boldsymbol{\varrho}^a = p^a_\mu dx^\mu$, em que tanto p_a^μ como p^a_μ pertencem ao grupo linear geral $GL(4, \mathbb{R})$. Está claro que as componentes do frame e do coframe satisfazem $p^a_\mu p_b^\mu = \delta_b^a$ e $p^a_\nu p_a^\mu = \delta_\nu^\mu$.

Com isso, segue a definição.

Definição 6.1. (Referencial Teleparalelo) *Dada uma variedade dotada de uma métrica e uma conexão afim (L_4, g) . O conjunto de campos vetoriais que define um referencial teleparalelo é denotado por $\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_{(0)}, \mathbf{p}_{(1)}, \mathbf{p}_{(2)}, \mathbf{p}_{(3)}$ e satisfaz a seguinte equação*

$$\nabla_\mu \mathbf{p}_a = 0 \iff \omega^a_{bc} = 0. \quad (6.48)$$

Os coeficientes da conexão na equação acima estão expandidos em uma base não necessariamente holonômica. Caso esses coeficientes sejam expandidos em uma base holonômica, obtém-se $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = p_a^\lambda \partial_\mu p^a_\nu$. Diante disso, constata-se que os coeficientes da conexão têm a forma da geometria de Weitzenböck.

No referencial teleparalelo, com o auxílio da equação (2.152), percebe-se que $\mathbf{T}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = -[\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b]$. Isso leva ao seguinte resultado

$$T^a_{bc} = \Omega^a_{bc} = p^a_\mu p^b_\nu (\partial_\mu p^a_\nu - \partial_\nu p^a_\mu). \quad (6.49)$$

Por outro lado, também no referencial teleparalelo, a equação (2.158) permitiu chegar a

$$Q_{abc} = \mathbf{p}_a[g_{ab}], \quad (6.50)$$

$$Q_a{}^{bc} = -\mathbf{p}_a[g^{ab}]. \quad (6.51)$$

que corresponde à não metricidade em uma base não holonômica. Já em uma base holonômica, a não metricidade é dada por

$$Q_{\lambda\mu\nu} = p^a_\mu p^b_\nu \partial_\lambda g_{ab}. \quad (6.52)$$

Por fim, a equação (2.167) e o fato de que $\omega^a_{bc} = 0$, possibilitou chegar ao seguinte resultado para a conexão espinorial de Levi-Civita

$$\hat{\omega}^a_{bc} = -K^a_{bc} - L^a_{bc}, \quad (6.53)$$

em que, vale lembrar, K^a_{bc} e L^a_{bc} são os tensores de contorção e deformação.

6.3.2 Teleparallelismo com torção

O presente caso consiste no cenário em que a não metricidade é nula e torção é diferente de zero, caso em que o campo gravitacional é descrito inteiramente pela torção e corresponde ao TERG.

Para se alcançar esse caso, como foi possível verificar, quando a não metricidade for nula, isto é, $Q_{abc} = 0$, o referencial teleparalelo deve ser tal que $\mathbf{p}_a[g_{bc}] = 0$, em que $g_{bc} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_b, \mathbf{p}_c)$. Essa situação ocorre quando a tetrada tem produto escalar constante, caso no qual pode-se tomá-la como ortonormal, por conveniência; assim, tem-se $\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_{\hat{a}}$, tal que $\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_{\hat{a}}, \mathbf{p}_{\hat{b}})$. Diante deste fato, constata-se que o TERG está restrito a bases não holonômicas que possuem produto interno constante. Além disso, nota-se que

$$K^a_{bc} = -\bar{\Omega}^a_{bc}. \quad (6.54)$$

Com o anulamento da não metricidade, as equações (6.22) e (6.25) e a segunda equação de (6.26) evidenciam que $S^{abc} = \Sigma^{abc}$ e $U^{abc} = V^{abc}$. Logo, diante do primeiro fato, no TERG, o tensor de energia e momento do campo gravitacional (6.32) é dado por

$$t^b_a = 4kT^d_{ac}\Sigma_d^{bc} - k\delta^b_a T_{cde}\Sigma^{cde}, \quad (6.55)$$

que corresponde à definição da equação (30) de (MALUF, 2013).

6.3.3 Teleparallelismo com não metricidade

Este caso corresponde ao TSERG, no qual a configuração geométrica consiste em admitir que a torção é nula e a não metricidade é diferente de zero, onde o campo gravitacional é, agora, completamente descrito pela não metricidade.

Para caracterizar esse cenário, foi necessário verificar que, se a torção for nula, então o referencial teleparalelo deverá satisfazer $[\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b] = 0$, o que implica bases holonômicas. Dessa forma, constata-se que teorias teleparalelas com não metricidade restringem os referenciais teleparalelos a bases coordenadas. Para esse caso, nota-se que a não metricidade está relacionada com a não constância da métrica, como pode ser inferido da equação (6.52). Também segue que

$$L^a_{bc} = -\bar{\Gamma}^a_{bc}. \quad (6.56)$$

Vale destacar que, agora os índices latinos $a, b, \dots$ são equivalentes aos índices gregos $\mu, \nu, \dots$, pois $\mathbf{p}_a = \delta^{(\mu)}_a \partial_\mu$. Neste caso, a base está relacionada ao sistema de coordenadas x^μ . Logo, dado que

$$\mathbf{p}_a = \delta^{(\mu)}_a \partial_\mu, \quad \mathbf{q}^a = \delta^a_{(\mu)}, \quad (6.57)$$

as componentes da tétrada são

$$p_a{}^\mu = \delta_a^{(\mu)}, \quad p^a{}_\mu = \delta_{(\mu)}^a. \quad (6.58)$$

Portanto, obtém-se

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} \delta_a^{(\mu)} \delta_b^{(\nu)}, \quad g^{ab} = g^{\mu\nu} \delta_{(\mu)}^a \delta_{(\nu)}^b. \quad (6.59)$$

Diante desses apontamentos, seguem as seguintes possibilidades de notação: $\mathbf{p}_{(\mu)} = \delta_\mu^\nu \partial_\nu$ ou ainda, como já apresentado, $\mathbf{p}_a = \delta_a^{(\mu)} \partial_\mu$; bem como $g_{(\rho)(\sigma)} = g_{\mu\nu} \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu$. Para ser mais preciso, tem-se $g_{(\mu)(\nu)} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_{(\mu)}, \mathbf{p}_{(\nu)}) = g_{\mu\nu}$.

Por fim, no TSERG, como a torção é nula, a partir de (6.22) e (6.24), constata-se que

$$S^a{}_{bc} = \Xi^a{}_{bc}, \quad (6.60)$$

além disso, da segunda equação de (6.26) e da (6.28), tem-se também

$$U^{abc} = P^{abc}. \quad (6.61)$$

Dessa forma, no TSERG, em face da última equação, o tensor de energia e momento do campo gravitacional (6.32) é dado por

$$t^b{}_a = k \delta_a^b Q_{cde} P^{cde} - 2k Q_{adc} P^{bdc}. \quad (6.62)$$

6.3.4 4-momento do campo gravitacional

No formalismo de tétrada puro (equivalente a usar o referencial teleparalelo), a derivada covariante $\nabla_\mu(\omega)$ é trocada pela derivada parcial ∂_μ . Desse modo, a equação do coframe (6.36) é reescrita como

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} S_a{}^{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{4k} (t^\mu{}_a + \mathcal{T}^\mu{}_a). \quad (6.63)$$

Além disso, as equações (6.38) e (6.39) podem ser reescritas, respectivamente, nas formas

$$\partial_\mu \partial_\nu (\sqrt{-g} S_a{}^{\mu\nu}) = 0, \quad (6.64)$$

$$\partial_\mu [\sqrt{-g} (t^\mu{}_a + \mathcal{T}^\mu{}_a)] = 0. \quad (6.65)$$

Da última equação, nota-se que essa se trata de uma equação de conservação. Com isso, constata-se que além de ser equivalente à RG, o TGERG possibilita a construção de uma equação de conservação, o que pode, possivelmente, resolver o problema da conservação presente na RG nesse sentido.

Ao seguir uma abordagem semelhante à adotada por (MALUF, 2013) e abordado na subseção 5.1.3, foi possível definir o 4-momento para o TGERG como segue

$$P_a = \int_V d^3x \sqrt{-g} (t^0{}_a + \mathcal{T}^0{}_a), \quad (6.66)$$

ou ainda

$$P_a = 4k \oint_S dS_j \sqrt{-g} S_a^{0j}. \quad (6.67)$$

Antes de prosseguir para a próxima seção, é importante destacar que embora os resultados apresentados até aqui tenham sido obtidos de forma independente, descobrimos durante a realização deste trabalho que já existia na literatura a abordagem do teleparalelismo para o caso de uma tétrada arbitrária. No caso, nossos resultados estão em acordo com (ADAK et al., 2023). Vale ressaltar, entretanto, que não foi encontrado na literatura uma abordagem focada no papel do referencial teleparalelo como apresentado aqui. Além disso, em nenhuma dessas abordagens aparece a definição do 4-momento que usamos aqui. Em geral, o foco dos autores no caso generalizado não é o problema da energia do campo gravitacional. Uma das poucas exceções é (GOMES; JIMÉNEZ; KOIVISTO, 2023). Porém, esses autores não usam a tétrada, eles se limitam às quantidades obtidas com a métrica e a conexão, em um formalismo de Palatini. Portanto, os principais resultados deste capítulo, que estão relacionados a (6.32) e (6.67), constituem resultados novos.

6.4 A energia de espaços-tempos de ondas de frente plana (pp-waves)

Como em toda teoria, a constatação de sua validade se dá por meio de aplicações. Nesse sentido, como parte dos objetivos do presente trabalho, através da generalização do teleparalelismo aqui alcançada, a energia de espaços-tempos de ondas de frente plana é analisada e os resultados aqui obtidos são comparados, a fim de analisar suas consistências, com os resultados das referências (FORMIGA; DUARTE, 2023; COSTA; FORMIGA, 2025).

Esta seção está estruturada da forma detalhada a seguir. Na primeira subseção, o espaço-tempo de ondas de frente plana é apresentado. Em seguida, o primeiro resultado é obtido, que consiste no 4-momento. Na terceira subseção, a energia do campo gravitacional é obtida, por meio do tensor de energia e momento do campo gravitacional (6.32). Por fim, encerra-se esta seção com o cálculo do tensor do espaço-tempo. Para tornar a exposição dos resultados mais direta, os cálculos intermediários foram omitidos nesta seção e estão disponíveis no Apêndice E.

6.4.1 Espaços-tempos de ondas de frente plana (pp-waves)

Como se sabe, as ondas gravitacionais são previsões da RG, quando Einstein, em 1916, linearizou suas respectivas equações de campo (4.31). Essas ondas podem ser entendidas como perturbações no “tecido” do espaço-tempo e se propagam com velocidade c , isto é, na velocidade da luz no vácuo. De um certo modo, qualquer objeto com massa

e que esteja acelerado pode ser fonte de ondas gravitacionais, contudo, em geral, essas emissões são consideravelmente fracas, sendo difícil de detectá-las. A detecção só se torna possível quando se trata de corpos massivos. Nesse sentido, algumas das principais fontes de energia gravitacional são: objetos massivos com assimetrias esféricas, isto é, objetos que se assemelham com um geoide; sistemas binários e a possível fusão entre os objetos que compõem esses sistemas; entre outras. Uma característica das ondas gravitacionais é que, tal como as ondas eletromagnéticas, elas possuem modos de polarizações, que consistem em dois modos de polarizações: a polarização $+$ (plus) e a polarização $\times$ (cross). Para mais detalhes, recomenda-se ao leitor os capítulos 35 e 36 de (THORNE; MISNER; WHEELER, 1973), bem como (MAGGIORE, 2008).

Para o estudo da energia gravitacional, foi considerado o mesmo elemento de linha de (COSTA; FORMIGA, 2025), que é dado por²

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + l_x^2(u) dx^2 + l_y^2(u) dy^2 + 2l_{xy}(u) dx dy + dz^2, \quad (6.68)$$

que corresponde a uma onda gravitacional com os dois modos de polarização presentes e que se propaga na direção do eixo z , em que

$$\begin{aligned} l_x^2 &= f_1^2(u) + g_2^2(u), & l_y^2 &= f_2^2(u) + g_1^2(u) \\ l_{xy} &= f_1(u)f_2(u) + g_1(u)g_2(u), & u &= t - \frac{z}{c}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Em relação às funções f_1 , f_2 , g_1 , e g_2 , elas devem satisfazer a equação

$$f_2 \dot{f}_1 - f_1 \dot{f}_2 - g_2 \dot{g}_1 + g_1 \dot{g}_2 = 0, \quad (6.70)$$

onde o ponto sobre as funções representa a derivada com respeito a u .

Da equação (6.68), é possível escrever as componentes da métrica na forma

$$g_{\mu\nu} = -\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + \delta_\mu^3 \delta_\nu^3 + l_x^2(u) \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 + l_y^2(u) \delta_\mu^2 \delta_\nu^2 + l_{xy}(u) (\delta_\mu^1 \delta_\nu^2 + \delta_\mu^2 \delta_\nu^1). \quad (6.71)$$

Sua inversa, por outro lado, é dada por

$$g^{\mu\nu} = -\delta_0^\mu \delta_0^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu - \frac{l_y^2}{g} \delta_1^\mu \delta_1^\nu - \frac{l_x^2}{g} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \frac{l_{xy}}{g} (\delta_1^\mu \delta_2^\nu + \delta_2^\mu \delta_1^\nu), \quad (6.72)$$

em que $g = \det\|g_{\mu\nu}\| = -(f_1 g_1 - f_2 g_2)^2$ é o determinante da métrica.

6.4.1.1 Preliminares para os cálculos

Na referência (COSTA; FORMIGA, 2025), os autores adotaram como referencial teleparalelo uma base de tétradas cujo produto interno é constante. Lá, o caso de teoria teleparalela usado foi o TERG, que foi discutido na seção 5.1 e na subseção 6.3.2 deste capítulo.

² Para esta parte, caso o leitor deseje se aprofundar, recomenda-se (GRIFFITHS, 2016).

Na análise do presente trabalho, o caso a ser analisado será o de uma téttrade holonômica (teleparalela) adaptada ao sistema de coordenadas $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Nesse sentido, o referencial é denotado por $\mathbf{p}_a = (\partial_{(0)}, \partial_{(1)}, \partial_{(2)}, \partial_{(3)})$, isto é $\mathbf{p}_a = \delta_a^{(\mu)} \partial_\mu$.

Para a simplificação dos cálculos, tal como na referência (COSTA; FORMIGA, 2025), a métrica (6.71) foi adaptada para ser escrita em termos da base ortonormal $\{\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, que é dada por

$$\hat{t}^\mu = \delta_0^\mu, \quad \hat{x}^\mu = \frac{g_1}{\sqrt{-g}} \delta_1^\mu - \frac{g_2}{\sqrt{-g}} \delta_2^\mu, \quad (6.73)$$

$$\hat{y}^\mu = -\frac{f_2}{\sqrt{-g}} \delta_1^\mu + \frac{f_1}{\sqrt{-g}} \delta_2^\mu, \quad \hat{z}^\mu = \delta_3^\mu. \quad (6.74)$$

$$\hat{t}_\mu = -\delta_\mu^0, \quad \hat{x}_\mu = f_1(u) \delta_\mu^1 + f_2(u) \delta_\mu^2, \quad (6.75)$$

$$\hat{y}_\mu = g_2(u) \delta_\mu^1 + g_1(u) \delta_\mu^2, \quad \hat{z}_\mu = \delta_\mu^3. \quad (6.76)$$

Em termos dessa base, a métrica pode ser reescrita na forma seguinte

$$g_{\mu\nu} = -\hat{t}_\mu \hat{t}_\nu + \hat{x}_\mu \hat{y}_\nu + \hat{y}_\mu \hat{y}_\nu + \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu. \quad (6.77)$$

Para os cálculos, as seguintes identidade foram utilizadas (retiradas de (COSTA; FORMIGA, 2025)). As primeiras delas são:

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = -1, \quad \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \quad (6.78)$$

$$\hat{t} \cdot \hat{x} = \hat{t} \cdot \hat{y} = \hat{t} \cdot \hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{y} = \dots = 0, \quad (6.79)$$

que evidenciam o fato de $\hat{t}$ ser do tipo tempo e os demais do tipo espaço. Além disso, é conveniente introduzir o campo vetorial nulo $v^\mu = \hat{t}^\mu + \hat{z}^\mu$. Das duas equações acima, nota-se que

$$v \cdot v = 0, \quad v \cdot \hat{x} = v \cdot \hat{y} = 0, \quad v \cdot \hat{t} = -1, \quad v \cdot \hat{z} = 1. \quad (6.80)$$

Além disso, foram utilizadas as seguintes identidades, que podem ser obtidas a partir das equações (6.75) e (6.76),

$$\delta_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{-g}} (g_1 \hat{x}_\mu - f_2 \hat{y}_\mu), \quad \delta_\mu^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g_2 \hat{x}_\mu + f_1 \hat{y}_\mu), \quad (6.81)$$

$$\delta_\mu^0 = -\hat{t}_\mu, \quad \delta_\mu^3 = \hat{z}_\mu. \quad (6.82)$$

Ao longo dos cálculos, outras duas identidades foram derivadas, que são

$$\delta_1^\mu = f_1 \hat{x}^\mu + g_2 \hat{y}^\mu, \quad \delta_2^\mu = f_2 \hat{x}^\mu + g_1 \hat{y}^\mu. \quad (6.83)$$

Por fim, foram também utilizados os seguintes resultados:

$$\partial_\mu \hat{x}_\nu = v_\mu (\alpha \hat{x}_\nu + \beta \hat{y}_\nu), \quad \partial_\mu \hat{y}_\nu = v_\mu (\beta \hat{x}_\nu + \bar{\alpha} \hat{y}_\nu), \quad (6.84)$$

em que

$$\alpha \equiv \frac{-\dot{f}_1 g_1 + \dot{f}_2 g_2}{\sqrt{-g} c}, \quad \bar{\alpha} \equiv \frac{-\dot{g}_1 f_1 + \dot{g}_2 f_2}{\sqrt{-g} c}, \quad (6.85)$$

$$\beta \equiv \frac{\dot{g}_1 g_2 - \dot{g}_2 g_1}{\sqrt{-g} c}, \quad \bar{\beta} \equiv \frac{\dot{f}_1 f_2 - \dot{f}_2 f_1}{\sqrt{-g} c}. \quad (6.86)$$

Da equação (6.70), pode-se constatar que $\beta \equiv \bar{\beta}$.

6.4.2 4-momento do espaço-tempo de ondas de frente plana

Nesta subseção, serão apresentados o roteiro para obtenção do espaço-tempo em questão. Como a análise do presente trabalho consiste em considerar o caso de tétradas holonômicas, conforme visto na subseção 6.3.3, a torção é nula. Desse modo, o campo gravitacional será descrito pela não metricidade. O procedimento adotado foi o seguinte:

1. Cálculo da não metricidade;
2. Cálculo do momento gravitacional conjugado S^{abc} ;
3. Por fim, cálculo do 4-momento P_a .

6.4.2.1 Não metricidade

A partir das definições da não metricidade dadas na subseção 6.3.3, segue que

$$Q_{abc} = p_a^\lambda \partial_\lambda g_{bc}. \quad (6.87)$$

Contudo, uma vez que se trata de tétradas holonômicas, em outras palavras, como se trata do TSERG, tem-se $p_a^\mu = \delta_a^{(\mu)}$ e, também, $g_{ab} = g_{\mu\nu} \delta_a^{(\mu)} \delta_b^{(\nu)}$. Desse modo, uma vez que $g_{(\mu)(\nu)} = g_{\mu\nu}$, a equação (6.87) pode ser reescrita como

$$Q_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (6.88)$$

Ao inserir a equação (6.77) na equação acima, foi possível obter o seguinte resultado

$$Q_{\lambda\mu\nu} = 2v_\lambda \left(\alpha \hat{x}_\mu \hat{x}_\nu + 2\beta \hat{x}_{(\mu} \hat{y}_{\nu)} + \bar{\alpha} \hat{y}_\mu \hat{y}_\nu \right), \quad (6.89)$$

em que foi usado $A_{(\mu} B_{\nu)} = (1/2)(A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu)$ e os fatos de que $\hat{t}_\mu = -\delta_\mu^0$ e $\hat{z}_\mu = \delta_\mu^3$, bem como a equação (6.84).

O próximo passo, foi calcular os traços da não metricidade $Q_\lambda = Q_{\lambda\mu}{}^\mu$ e $\tilde{Q}_\nu = Q_\lambda{}^\lambda{}_\nu$. A partir da equação (6.89) e das equações (6.78) e (6.79), obteve-se

$$Q_\lambda = 2v_\lambda (\alpha + \bar{\alpha}), \quad (6.90)$$

e

$$\tilde{Q}_\nu = 0. \quad (6.91)$$

6.4.2.2 Momento gravitacional conjugado

Como pontuado na subseção 6.3.3, $S^{abc} = \Xi^{abc}$, em que Ξ^{abc} está definido na equação (6.25). Dado que $\tilde{Q}_\nu = 0$, a equação para Ξ^{abc} pode ser reescrita como

$$\Xi^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4} \left(Q^{\mu\lambda\nu} - Q^{\nu\lambda\mu} + g^{\lambda\mu} Q^\nu - g^{\lambda\nu} Q^\mu \right), \quad (6.92)$$

em que, deve-se notar, foram realizadas as seguintes mudança índices: $a \rightarrow \lambda$, $b \rightarrow \mu$ e $c \rightarrow \nu$. Para prosseguir com o cálculo, é conveniente analisar o primeiro e segundo termos e, em seguida, o terceiro e quarto termos. Assim, foi possível obter que

$$Q^{\mu\lambda\nu} - Q^{\nu\lambda\mu} = 4 \left(\alpha \hat{x}^\lambda v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} + \bar{\alpha} \hat{y}^\lambda v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \beta \hat{x}^\lambda v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \beta \hat{y}^\lambda v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} \right), \quad (6.93)$$

bem como

$$g^{\lambda\mu} Q^\nu - g^{\lambda\nu} Q^\mu = 2 \left[\alpha \left(g^{\lambda\mu} v^\nu - g^{\lambda\nu} v^\mu \right) + \bar{\alpha} \left(g^{(\lambda\mu} v^{\nu)} - g^{\lambda\nu} v^\mu \right) \right]. \quad (6.94)$$

Ao substituir o resultados acima na equação (6.92), chegou-se ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Xi^{\lambda\mu\nu} &= \left(-\bar{\alpha} v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} + \beta v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} \right) \hat{x}^\lambda + \left(-\alpha v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \beta v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} \right) \hat{y}^\lambda \\ &- (\alpha + \bar{\alpha}) v^\lambda \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]}, \end{aligned} \quad (6.95)$$

que é exatamente o resultado obtido por (COSTA; FORMIGA, 2025) na equação (34). Lá porém, o tensor calculado foi Σ^{abc} .

6.4.2.3 4-momento

Conforme definido na equação (6.67), para esse caso, o 4-momento será reescrito na forma

$$P_a = 4k \oint_S dS_j \sqrt{-g} \Xi_a^{0j}. \quad (6.96)$$

Para o cálculo da equação acima, a integral foi avaliada em uma região de volume V que consiste em uma caixa de lados: $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ e $z_1 < z < z_2$. Dado que a onda gravitacional se propaga na direção do eixo z e que, somado a isso, Ξ_λ^{0j} não depende de x e y , a única contribuição será em termos de z . Em outras palavras, a única contribuição será de Ξ_λ^{03} . Essa contribuição foi avaliada nas faces $z = z_1$ e $z = z_2$ da caixa. Portanto, foi possível obter a seguinte equação para o 4-momento

$$P_\lambda = -\frac{c^4}{8\pi G} \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial z} \right) \right]_{z_1}^{z_2} v_\lambda, \quad (6.97)$$

que corresponde ao 4-momento do espaço-tempo de ondas de frente plana. Vale destacar que o resultado acima está consistente com a equação (40) de (COSTA; FORMIGA, 2025) e com a equação (39) da referência (FORMIGA; DUARTE, 2023) (para o caso de uma onda com polarização +, que corresponde ao caso particular (6.68) quando $f_2 = g_2 = 0$).

6.4.3 Tensor de energia e momento do campo gravitacional

Para o cálculo do tensor de energia e momento do campo gravitacional (6.62), o procedimento foi o seguinte:

1. Cálculo de P^{abc} ;
2. Cálculo de $Q_{acd}P^{bcd}$;
3. Cálculo de $Q_{acd}P^{adc}$;
4. Por fim, o cálculo de t^b_a .

Para realizar o cálculo de P^{abc} , deve-se considerar o fato de que $\tilde{Q}_\nu = 0$. Desse modo, ao realizar a seguinte mudança de índices: $a \rightarrow \lambda$, $b \rightarrow \mu$ e $c \rightarrow \nu$, a equação (6.27) é reescrita como

$$P^{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{4}Q^{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{4}(Q^{\mu\lambda\nu} + Q^{\nu\lambda\mu}) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}Q^\lambda - \frac{1}{8}(g^{\lambda\mu}Q^\nu + g^{\lambda\nu}Q^\mu). \quad (6.98)$$

O próximo passo é substituir as equações (6.89) e (6.90) na equação acima. Após uma longa manipulação algébrica e com o uso das identidades fornecidas acima, foi possível chegar ao resultado abaixo

$$\begin{aligned} P^{\lambda\mu\nu} &= \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} [v^\lambda (-\hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu) + \hat{t}^\lambda \hat{t}^{(\mu} v^{\nu)} - \hat{z}^\lambda \hat{z}^{(\mu} v^{\nu)}] \\ &+ \frac{v^\lambda}{2} (\bar{\alpha} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \alpha \hat{y}^\mu \hat{y}^\nu - 2\beta \hat{x}^{(\mu} \hat{y}^{\nu)}) \\ &+ \frac{\hat{x}^\lambda}{2} (\alpha - \bar{\alpha}) \hat{x}^{(\mu} v^{\nu)} + \beta \hat{x}^\lambda \hat{y}^{(\mu} v^{\nu)} \\ &+ \frac{\hat{y}^\lambda}{2} (\bar{\alpha} - \alpha) \hat{y}^{(\mu} v^{\nu)} + \beta \hat{y}^\lambda \hat{x}^{(\mu} v^{\nu)}. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Com esse resultado em mãos e o resultado obtido na equação (6.89), o cálculo de $Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu}$ pode ser realizado. Para essa realização, uma boa simplificação pode ser feita ao se observar o que se segue. Da equação (6.89), pode-se observar que o primeiro índice, nesse caso ρ , se relaciona com o vetor v^ρ , enquanto os dois últimos índices se relacionam com os vetores $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Desse modo, ao multiplicar $Q_{\rho\mu\nu}$ por $P^{\lambda\mu\nu}$ e usar ortonormalidade dos vetores, foi possível obter

$$Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu} = 2(\alpha\bar{\alpha} - \beta^2)v^\lambda v_\rho. \quad (6.100)$$

Agora, a manipulação do termo entre parênteses levou ao seguinte resultado

$$Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{c^2\sqrt{-g}}(\dot{f}_1\dot{g}_1 - \dot{g}_2\dot{f}_2)v^\lambda v_\rho. \quad (6.101)$$

Por fim, o próximo passo é efetuar o cálculo de $Q_{\rho\mu\nu}P^{\rho\mu\nu}$. Como já discutido, na equação (6.89), o primeiro índice se relaciona com o vetor v . Por outro lado, no que diz

respeito à equação (6.99), o primeiro índice se relaciona aos vetores v , $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Desse modo, o produto $Q_{\rho\mu\nu}P^{\rho\mu\nu}$ consiste realizar o produto interno de v com ele próprio e com os vetores $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Desse modo, ao considerar os resultados da (6.80), conclui-se que $Q_{\rho\mu\nu}P^{\rho\mu\nu} = 0$.

Portanto, ao reescrever o tensor de energia e momento (6.62) na forma seguinte

$$t^\lambda{}_\rho = k\delta^\lambda_\rho Q_{\sigma\mu\nu}P^{\sigma\mu\nu} - 2kQ_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu}, \quad (6.102)$$

obteve-se o seguinte resultado para o tensor de energia e momento do campo gravitacional

$$t^\lambda{}_\rho = -\frac{4k}{c^2\sqrt{-g}} \left(\dot{f}_1 g_1 - \dot{g}_2 f_2 \right) v^\lambda v_\rho, \quad (6.103)$$

que corresponde à equação (45) de (COSTA; FORMIGA, 2025) e está de acordo com a equação (35) de (FORMIGA; DUARTE, 2023) no caso particular em que $f_2 = 0$ e $g_2 = 0$.

6.4.4 Tensor de energia e momento do espaço-tempo

Na subseção anterior, o tensor de energia e momento do campo gravitacional foi obtido. Nesta subseção, será calculado o tensor de energia e momento do espaço-tempo $\tau^\mu{}_a$, sem que haja a necessidade de conhecer o tensor de energia e momento da matéria $\mathcal{T}^\mu{}_a$.

A partir da equação (6.63), o tensor de energia e momento do espaço-tempo pode ser definido como

$$\tau^\mu{}_a = \frac{4k}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} S_a{}^{\mu\nu} \right), \quad \tau^\mu{}_a = t^\mu{}_a + \mathcal{T}^\mu{}_a. \quad (6.104)$$

Todavia, no presente caso, em que não há torção e a tétrada é holonômica, a equação é reescrita como

$$\tau^\mu{}_\lambda = \frac{4k}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda{}^{\mu\nu} \right). \quad (6.105)$$

Portanto, a partir da (6.95), foi possível obter que o tensor de energia e momento do espaço tempo para o espaço-tempo de ondas de frente plana é dado por

$$\tau^\mu{}_\lambda = -\frac{2k}{c^2\sqrt{-g}} v_\lambda v^\mu \frac{d^2\sqrt{-g}}{du^2}, \quad (6.106)$$

cujos resultados correspondem à equação (46) de (COSTA; FORMIGA, 2025).

7 Conclusões e Perspectivas

Foram objetivos deste trabalho propor uma generalização do teleparalelismo, identificar a natureza do referencial teleparalelo e estudar o problema da energia do campo gravitacional. Conforme visto na seção 6.2, ao aplicar o formalismo variacional da MAG, a generalização do teleparalelismo foi alcançada. Essa generalização possibilitou caracterizar o referencial teleparalelo e, além disso, definir o 4-momento e o tensor de energia e momento do campo gravitacional. Por fim, também permitiu analisar o problema da energia do campo gravitacional.

Em relação ao teleparalelismo generalizado, foi possível criar uma versão que é equivalente à Relatividade Geral, como demonstrado no Apêndice C.2. Isso permitiu constatar que as equações do coframe e da métrica, (6.36) e (6.40), são equivalentes às equações de Einstein (4.31) no Teleparalelismo Generalizado Equivalente à Relatividade Geral. Além disso, a lagrangiana construída para o modelo deste trabalho, (6.19), levou ao resultado (6.44), o que possibilitou mostrar que os tensores de energia e momento da matéria definidos nas equações do coframe e da métrica coincidem. É importante destacar que a escolha de manter o primeiro termo do lado direito de (6.19), o termo de curvatura, fez com que a equação obtida com a variação da conexão afim, (6.44), tenha uma forma mais simples do que (3.63b) de (BLAGOJEVIC, 2002) (obtida no contexto do TERG). Embora essa diferença interfira apenas nos multiplicadores de Lagrange, é possível que a inclusão desse termo tenha algum impacto em teorias com lagrangianas mais gerais.

No que diz respeito à condição de referencial teleparalelo, constatou-se a sua natureza. Conforme visto, o caso das teorias teleparalelas com torção e sem não metricidade restringe o referencial teleparalelo a tétradas não holonômicas cujo produto interno é constante. Por outro lado, teorias teleparalelas com não metricidade e sem torção restringem o referencial teleparalelo a tétradas holonômicas e com produto escalar variável. Além disso, no formalismo de tétradas puro, foi possível obter uma equação que constitui uma lei de conservação válida para qualquer referencial teleparalelo, o que permite atacar o problema da conservação da energia de uma maneira mais abrangente do que no TERG; com isso, obteve-se também uma equação para o 4-momento, que também é mais flexível que a do TERG na escolha do referencial teleparalelo. Neste sentido, constata-se que as teorias teleparalelas que permitem que qualquer base seja uma base teleparalela são mais promissoras do que aquelas que se limitam a um tipo de referencial.

Por fim, a proposta da energia do campo gravitacional foi aplicada. A generalização proposta neste trabalho permitiu considerar o caso de tétradas holonômicas adaptadas ao sistema de coordenadas $\{x^0, x, y, z\}$. O espaço-tempo estudado foi o de ondas de frente

plana. O cálculo do 4-momento P_a , do tensor de energia e momento do campo gravitacional t^b_a e do tensor de energia e momento do espaço-tempo τ^μ_a forneceu resultados que, quando comparados com aqueles já presentes na literatura do TERG, mostraram-se consistentes.

Para trabalhos futuros, uma das propostas é analisar a energia do campo gravitacional utilizando bases de tétradas associadas a vetores de Killing. Outras propostas dizem respeito à análise do problema do referencial teleparalelo nesse cenário mais geral, bem como ao estudo da energia do campo gravitacional para espaços-tempos mais gerais. Além disso, uma perspectiva futura é o desenvolvimento do formalismo hamiltoniano para o TGERG. Ademais, também é possível vislumbrar uma abordagem espinorial na qual o referencial teleparalelo possa ser um espinor. Nessa linha, também é possível imaginar o desenvolvimento de um formalismo em uma variedade complexa, tudo com o objetivo de flexibilizar o campo teleparalelo, buscando, eventualmente, uma conexão com gravitação quântica.

Referências

- ADAK, M. et al. General teleparallel metrical geometries. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 20, n. supp01, p. 2350215, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 14, 95 e 103.
- ADAK, M.; KALAY, M.; SERT, Ö. Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 15, n. 05, p. 619–634, 2006. Citado na página 85.
- ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *Teleparallel gravity: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 173. Citado 3 vezes nas páginas 40, 62 e 84.
- ALEMAÑ-BERENGUER, R.-A. Controversy on the materiality and structure of spacetime: Issues and insights. *J. Gen. Philos. Sci*, Springer Nature, p. 1572, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10838-025-09720-0>>. Citado na página 81.
- BAHAMONDE, S. et al. Teleparallel gravity: from theory to cosmology. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 86, n. 2, p. 026901, 2023. Citado na página 54.
- BAMBI, C. *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*. Singapore: Springer, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 9, 52 e 73.
- BLAGOJEVIC, M. *Gravitation and gauge symmetries*. [S.l.: s.n.], 2002. ISBN 978-0-429-18716-2. Citado 5 vezes nas páginas 17, 50, 95, 99 e 110.
- CAPOZZIELLO, S.; FALCO, V. D.; FERRARA, C. Comparing equivalent gravities: common features and differences. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 10, p. 865, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 90.
- CARMELI, M.; LEIBOWITZ, E.; NISSANI, N. *Gravitation: $SL(2, C)$ Gauge Theory and Conservation Laws*. [S.l.]: World Scientific, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 80.
- CARMO, M. P. D. *Geometria Riemanniana*. Quinta edição, segunda impressão. Rio de Janeiro, RJ: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015. ISBN 978-85-244-0036-0. Citado na página 50.
- CASOLA, E. D.; LIBERATI, S.; SONEGO, S. Nonequivalence of equivalence principles. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 83, n. 1, p. 39–46, 2015. Citado na página 74.
- CHO, Y. Einstein lagrangian as the translational yang-mills lagrangian. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 10, p. 2521, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 95.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; DILLARD-BLEICK, M. *Analysis, Manifolds and Physics*. Revised edition. Amsterdam: Elsevier Science, 1982. ISBN 978-0-444-86159-5. Citado 11 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20, 22, 23, 28, 35, 36, 50 e 61.
- COSTA, R.; FORMIGA, J. Gravitational energy in pp-wave spacetimes. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, p. 2550105, 2025. Citado 8 vezes nas páginas 14, 15, 85, 103, 104, 105, 107 e 109.

- DERIGLAZOV, A. A. *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalisms*. 2. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. v. 113. (Fundamental Theories of Physics, v. 113). ISBN 978-3-319-44146-7. Citado na página 65.
- D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. New York: Oxford University Press Inc, 1992. Citado 8 vezes nas páginas 30, 46, 49, 52, 60, 72, 73 e 75.
- EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. v. 17, p. 891–921, 1905. Tradução: "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento". Citado 2 vezes nas páginas 16 e 72.
- EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. p. 844–847, 1915. Tradução: "As equações de campo da gravitação". Citado 2 vezes nas páginas 13 e 72.
- EISENHART, L. P. *Non-riemannian geometry*. [S.l.]: College Offset Press, 1927. v. 8. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 84.
- FERRARIS, M.; FRANCAVIGLIA, M.; REINA, C. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 “palatini’s method” discovered by einstein in 1925. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 14, n. 3, p. 243–254, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.
- FORMIGA, J. The gravitational energy–momentum density of radially accelerated observers in schwarzschild spacetime. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 532, n. 3, p. 1900507, 2020. Citado na página 85.
- FORMIGA, J. On the teleparallel frame problem. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 37, n. 33n34, p. 2250222, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 93.
- FORMIGA, J. The meaning of torsion in teleparallel theories. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 21, n. 12, p. 2450211, 2024. Citado na página 88.
- FORMIGA, J.; COSTA, R. Angular momentum in the teleparallel equivalent of general relativity. *arXiv preprint arXiv:2509.00191*, 2025. Citado 3 vezes nas páginas 95, 99 e 131.
- FORMIGA, J.; DUARTE, J. A. Gravitational energy problem and the energy of photons. *Physical Review D*, APS, v. 108, n. 4, p. 044043, 2023. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 85, 103, 107 e 109.
- FORMIGA, J. B.; GONÇALVES, V. R. Generalization of the ADM gravitational energy momentum. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 4, p. 044021, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 14, 83 e 85.
- FRANKEL, T. *The Geometry of Physics: An Introduction*. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado na página 28.
- GASPERINI, M. *Theory of Gravitational Interactions*. 2. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 978-3-319-70786-0. Citado na página 61.
- GOMES, D. A.; JIMÉNEZ, J. B.; KOIVISTO, T. S. General parallel cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2023, n. 12, p. 010, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 14, 95 e 103.

- GRIFFITHS, J. B. *Colliding plane waves in general relativity*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2016. Citado na página 104.
- GRONWALD, F. Metric-affine gauge theory of gravity: I. fundamental structure and field equations. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 6, n. 03, p. 263–303, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 69.
- HAYASHI, K. The gauge theory of the translation group and underlying geometry. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 69, n. 4, p. 441–444, 1977. Citado na página 85.
- HEHL, F.; KERLICK, G.; Von der Heyde, P. On a new metric affine theory of gravitation. *Physics Letters B*, v. 63, n. 4, p. 446–448, 1976. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269376903932>>. Citado na página 64.
- HEHL, F. W.; KERLICK, G. D.; HEYDE, P. v. d. On hypermomentum in general relativity i. the notion of hypermomentum. *Zeitschrift fuer Naturforschung A*, Verlag der Zeitschrift für Naturforschung, v. 31, n. 2, p. 111–114, 1976. Citado na página 64.
- HEHL, F. W.; KERLICK, G. D.; HEYDE, P. v. d. On hypermomentum in general relativity ii. the geometry of spacetime. *Zeitschrift für Naturforschung A*, Verlag der Zeitschrift für Naturforschung, v. 31, n. 6, p. 524–527, 1976. Citado na página 64.
- HEHL, F. W.; KERLICK, G. D.; HEYDE, P. v. d. On hypermomentum in general relativity iii. coupling hypermomentum to geometry. *Zeitschrift für Naturforschung A*, Verlag der Zeitschrift für Naturforschung, v. 31, n. 7, p. 823–827, 1976. Citado na página 64.
- HEHL, F. W. et al. Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Phys. Rept.*, v. 258, p. 1–171, 1995. Citado 13 vezes nas páginas 15, 17, 41, 42, 50, 61, 62, 65, 69, 70, 71, 98 e 99.
- JIMÉNEZ, J. B. et al. General teleparallel quadratic gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 805, p. 135422, 2020. Citado na página 95.
- JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. Coincident general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 4, p. 044048, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 84, 85, 90 e 95.
- JIMENEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. The geometrical trinity of gravity. *Universe*, MDPI, v. 5, n. 7, p. 173, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 57, 84 e 89.
- JIMÉNEZ-CANO, A. *Metric-Affine Gauge theories of gravity: Foundations and new insights*. 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2201.12847>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 71.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. New York: John Wiley & Sons, 1963. v. 1. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, v. 1). ISBN 978-0-471-15733-2. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 22.
- LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página 71.

- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd. ed. New York: Springer, 2013. v. 218. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). ISBN 978-1-4419-9981-8. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 22 e 28.
- LEMOIS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 67.
- LOW, F. E. *Classical field theory: electromagnetism and gravitation*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 67.
- MAGGIORE, M. *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*. New York: Oxford University Press, 2008. v. 1. Citado na página 104.
- MALUF, J. et al. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *arXiv preprint gr-qc/0204035*, 2002. Citado na página 85.
- MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 35, n. 1, p. 335–343, 1994. Citado na página 85.
- MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 13, 14, 84, 85, 87, 88, 101 e 102.
- MALUF, J. W. et al. Tetrad fields, reference frames, and the gravitational energy–momentum in the teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 535, n. 12, p. 2300241, 2023. Citado na página 42.
- MINKOWSKI, H. Raum und zeit. In: *Physikalische Zeitschrift*. [S.l.: s.n.], 1909. v. 10, p. 75–88. Conferência apresentada em 21 de setembro de 1908. Tradução: "Espaço e tempo". Citado na página 16.
- MØLLER, C. Conservation laws and absolute parallelism in general relativity. *Nordita Publ.*, v. 64, p. 50, 1961. Citado na página 85.
- NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. 2nd. ed. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2003. ISBN 978-0-7503-0606-5. Citado 14 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 29, 32, 36, 37, 44, 45 e 50.
- NĂSTASE, H. *Classical field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado na página 67.
- NESTER, J. M. Positive energy via the teleparallel hamiltonian. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 4, n. 07, p. 1755–1772, 1989. Citado na página 85.
- NESTER, J. M.; YO, H.-J. Symmetric teleparallel general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9809049*, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 14, 84 e 85.
- NORTON, J. What was einstein's principle of equivalence? *Studies in history and philosophy of science Part A*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 203–246, 1985. Citado na página 74.
- NORTON, J. D. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 7, p. 791, 1993. Citado na página 73.

- OBUKHOV, Y. N.; RUBILAR, G. F. Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, APS, v. 73, n. 12, p. 124017, 2006. Citado na página 94.
- OHANIAN, H. C. What is the principle of equivalence? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 45, n. 10, p. 903–909, 1977. Citado na página 74.
- ORTÍN, T. *Gravity and strings*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 54.
- PALATINI, A. Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di hamilton. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, Springer, v. 43, n. 1, p. 203–212, 1919. Citado na página 64.
- PENROSE, R. Quasilocal mass and angular momentum in general relativity. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 381, p. 53–63, 1982. Citado na página 83.
- PONOMAREV, V. N.; BARVINSKI, A. O.; OBUKHOV, Y. N. *Gauge approach and quantization methods in gravity theory*. [S.l.]: Nauka Moscow, 2017. v. 10. Citado na página 17.
- ROVELLI, C. Statistical mechanics of gravity and the thermodynamical origin of time. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 10, n. 8, p. 1549, 1993. Citado na página 13.
- ROVELLI, C.; VIDOTTO, F. *Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 92.
- SAUER, T. Field equations in teleparallel spacetime: Einstein’s fernparallelismus approach towards unified field theory. *Historia Math.*, v. 33, p. 399–439, 2006. Citado na página 84.
- SCHUTZ, B. F. *Geometrical methods of mathematical physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 17, 24, 37 e 39.
- SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor analysis*. [S.l.]: Wiley New York, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- SYNGE, J. L.; SCHILD, A. *Tensor calculus*. Toronto: University of Toronto Press, 1949. (Mathematical expositions ; no. 5). ISBN 0802010318. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. Citado 15 vezes nas páginas 13, 17, 20, 28, 31, 32, 39, 52, 63, 74, 75, 78, 80, 81 e 104.
- TRAUTMAN, A. Fibre bundles associated with space-time. *Reports on Mathematical Physics*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 29–62, 1970. Citado na página 62.
- TRAUTMAN, A. FIBER BUNDLES, GAUGE FIELDS, AND GRAVITATION. 1981. Citado na página 62.
- UNZICKER, A.; CASE, T. *Translation of Einstein’s Attempt of a Unified Field Theory with Teleparallelism*. 2005. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/physics/0503046>>. Citado na página 84.

WEYL, H. Gravitation und Elektrizität. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1918, p. 465, 1918. Citado na página 84.

Apêndices

APÊNDICE A – Momentos Conjugados Gravitacionais

A.1 Momento conjugado à torção

O objetivo aqui é realizar o cálculo do momento conjugado à torção, a primeira equação do conjunto de equações (3.36), isto é, o cálculo do objeto

$$\mathbf{H}_a = -\frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{T}^a}. \quad (\text{A.1})$$

Da lagrangiana (6.19), os únicos termos que contribuem nesse cálculo são termos T e QT , dessa forma

$$\mathbf{H}_d = -\frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial T^d} = k \left[\frac{\partial T}{\partial T_{ef}^d} + \frac{\partial (QT)}{\partial T_{ef}^d} \right] \boldsymbol{\eta}_{ef} \quad (\text{A.2})$$

Para realizar o cálculo de cada termo entre os colchetes, é conveniente reescrever os objetos a serem derivados das formas seguintes:

$$T = \frac{1}{4} g^{bm} g^{cn} T_{mn}^a g_{al} T_{bc}^l + \frac{1}{2} g^{bm} g^{cn} T_{mn}^a g_{bl} T_{ac}^l - g^{bm} T_{am}^a T_{cb}^c, \quad (\text{A.3})$$

$$QT = g_{al} T_{cb}^l Q^{cab} + T_{ab}^a Q_{c}^b - T_{ab}^a Q_{c}^c{}^b. \quad (\text{A.4})$$

Dessa forma, para o primeiro termo, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial T_{ef}^d} &\doteq \frac{1}{4} g^{bm} g^{cn} g_{al} T_{bc}^l \delta_d^a \delta_m^e \delta_n^f + \frac{1}{4} g^{bm} g^{cn} g_{al} T_{mn}^a \delta_d^l \delta_b^e \delta_c^f + \frac{1}{2} g^{bm} g^{cn} g_{bl} T_{ac}^l \delta_d^a \delta_m^e \delta_n^f \\ &+ \frac{1}{2} g^{bm} g^{cn} g_{bl} T_{mn}^a \delta_d^l \delta_a^e \delta_c^f - g^{bm} T_{cb}^c \delta_d^a \delta_a^e \delta_m^f - g^{bm} T_{am}^a \delta_d^c \delta_c^e \delta_b^f \\ \frac{\partial T}{\partial T_{ef}^d} &\doteq \frac{1}{4} g^{be} g^{cf} g_{dl} T_{bc}^l + \frac{1}{4} g^{em} g^{fn} g_{ad} T_{mn}^a + \frac{1}{2} g^{cf} \underbrace{g^{be} g_{bl}}_{\delta_l^e} T_{ac}^l \delta_d^a \\ &+ \frac{1}{2} g^{fn} \underbrace{g^{bm} g_{bd}}_{\delta_d^m} T_{mn}^e - g^{bf} \delta_d^e T_{cb}^c - g^{fm} \delta_d^e T_{am}^a \\ \frac{\partial T}{\partial T_{ef}^d} &\doteq \frac{1}{4} T_d{}^{ef} + \frac{1}{4} T_d{}^{ef} + \frac{1}{2} T_d{}^{ef} + \frac{1}{2} T_d{}^{ef} - T_c{}^f \delta_d^e - T_a{}^f \delta_d^e \\ \frac{\partial T}{\partial T_{ef}^d} &\doteq \frac{1}{2} T_d{}^{ef} + T_d{}^{ef} - 2 T_a{}^f \delta_d^e. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Analogamente, para o segundo termo de (A.2), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(TQ)}{\partial T_{ef}^d} &\doteq \underbrace{g_{ad}\delta_d^l\delta_c^e\delta_b^f Q^{cab}}_{g_{ad}} + \underbrace{\delta_d^a\delta_a^e\delta_b^f Q^{b\ c}}_{\delta_d^e} - \underbrace{\delta_d^a\delta_a^e\delta_b^f Q^{c\ b}}_{\delta_d^e} \\ \frac{\partial(TQ)}{\partial T_{ef}^d} &\doteq Q_d^{e\ f} + \delta_d^e Q_c^{f\ c} - \delta_d^e Q_c^{c\ f}.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Logo, ao inserir (A.5) e (A.6) em (A.2), obtém-se

$$\mathbf{H}_d \doteq k \left(\frac{1}{2} T_d^{ef} + T_d^{e\ f} - 2T_a^{a\ f} \delta_d^e + Q_d^{e\ f} + \delta_d^e Q_c^{f\ c} - \delta_d^e Q_c^{c\ f} \right) \boldsymbol{\eta}_{ef}. \quad (\text{A.7})$$

Agora, o procedimento é antissimetrizar os índices e e f . Desse modo,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_d &= k \left[\underbrace{\frac{1}{4} (T_d^{ef} - \overbrace{T_d^{fe}}^{-T_d^{ef}})}_{\frac{1}{2} T_d^{ef}} + \frac{1}{2} (T_d^{e\ f} - T_d^{f\ e}) - \frac{1}{2} (2\delta_d^e T_a^{a\ f} - 2\delta_d^f T_a^{a\ e}) \right] \boldsymbol{\eta}_{ef} \\ &+ \frac{k}{2} [Q_d^{e\ f} - Q_d^{f\ e} + \delta_d^e Q_c^{f\ c} - \delta_d^f Q_c^{e\ c} - \delta_d^e Q_c^{c\ f} + \delta_d^f Q_c^{c\ e}] \boldsymbol{\eta}_{ef} \\ \mathbf{H}_d &= 2k \left[\frac{1}{4} (T_d^{ef} + T_d^{e\ f} - T_d^{f\ e}) + \frac{1}{2} (\delta_d^f T_a^{a\ e} - \delta_d^e T_a^{a\ f}) \right] \boldsymbol{\eta}_{ef} \\ &+ 2k \left\{ \frac{1}{4} [Q_d^{e\ f} - Q_d^{f\ e} + \delta_d^e (Q_c^{f\ c} - Q_c^{c\ f}) - \delta_d^f (Q_c^{e\ c} - Q_c^{c\ e})] \right\} \boldsymbol{\eta}_{ef}.\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Portanto, pode-se fazer as seguintes definições a partir dos cálculos anteriores

$$H_d = 2k S_d^{ef} \boldsymbol{\eta}_{ef}, \quad S_d^{ef} = \Sigma_d^{ef} + \Xi_d^{ef}, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\Sigma_d^{ef} = \frac{1}{4} (T_d^{ef} + T_d^{e\ f} - T_d^{f\ e}) + \frac{1}{2} (\delta_d^f T_a^{a\ e} - \delta_d^e T_a^{a\ f}), \quad (\text{A.10})$$

$$\Xi_d^{ef} = \frac{1}{4} [Q_d^{e\ f} - Q_d^{f\ e} + \delta_d^e (Q_c^{f\ c} - Q_c^{c\ f}) - \delta_d^f (Q_c^{e\ c} - Q_c^{c\ e})]. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Momento conjugado à não metricidade

De maneira análoga ao momento conjugado à torção, o cálculo aqui vai ser em relação a

$$\mathbf{M}^{ab} = -2 \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{Q}_{ab}}. \quad (\text{A.12})$$

Da lagrangiana (6.19) os únicos termos que vão contribuir são os termos Q e TQ . Desse modo, segue que

$$\mathbf{M}^{ed} = -2 \frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{Q}_{de}} = -2k \left[\frac{\partial Q}{\partial Q_{fed}} + \frac{\partial(TQ)}{\partial Q_{fed}} \right] \boldsymbol{\eta}_f \quad (\text{A.13})$$

Agora, para realizar o cálculo, é mais conveniente escrever Q e TQ da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4}g^{al}g^{bm}g^{cn}Q_{lmn}Q_{abc} - \frac{1}{2}g^{al}g^{bm}g^{cn}Q_{lmn}Q_{bac} \\ &\quad - \frac{1}{4}g^{al}g^{bm}Q_{lbm}g^{cn}Q_{acn} + \frac{1}{2}g^{cn}Q_{bcn}g^{al}g^{bm}Q_{alm}, \end{aligned} \quad (A.14)$$

$$TQ = T_{acb}g^{cn}g^{al}g^{bm}Q_{nlm} + T_{ab}^a g^{bm}g^{cn}Q_{mcn} - T_{ab}^a g^{cn}g^{bm}Q_{ncm} \quad (A.15)$$

Dessa forma, para o primeiro termo em (A.14), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial Q_{fde}} &\doteq \frac{1}{4}g^{al}g^{bm}g^{cn}(\delta_l^f\delta_m^d\delta_n^eQ_{abc} + Q_{lmn}\delta_a^f\delta_b^d\delta_c^e) - \frac{1}{2}g^{al}g^{bm}g^{cn}(\delta_l^f\delta_m^d\delta_n^eQ_{bac} + Q_{lmn}\delta_b^f\delta_a^d\delta_c^e) \\ &\quad - \frac{1}{4}g^{al}g^{bm}g^{cn}(\delta_l^f\delta_b^d\delta_m^eQ_{acn} + Q_{lbm}\delta_a^f\delta_c^d\delta_n^e) + \frac{1}{2}g^{cn}g^{al}g^{bm}(\delta_b^f\delta_c^d\delta_n^eQ_{alm} + Q_{bcn}\delta_a^f\delta_l^d\delta_m^e) \\ \frac{\partial Q}{\partial Q_{fde}} &\doteq \frac{1}{4}(g^{af}g^{bd}g^{ce}Q_{abc} + g^{fl}g^{dm}g^{en}Q_{lmn}) - \frac{1}{2}(g^{af}g^{bd}g^{ce}Q_{bac} + g^{dl}g^{fm}g^{en}Q_{lmn}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(g^{af}g^{de}g^{cd}Q_{acn} + g^{fl}g^{bm}g^{de}Q_{lbm}) + \frac{1}{2}(g^{de}g^{al}g^{fm}Q_{alm} + g^{fd}g^{be}g^{cn}Q_{bcn}) \\ \frac{\partial Q}{\partial Q_{fde}} &\doteq \frac{1}{4}(Q^{fde} + Q^{fde}) - \frac{1}{2}(Q^{dfe} + Q^{dfe}) - \underbrace{\frac{1}{4}(g^{de}Q_c^{f\ c} + g^{de}Q_b^{f\ b})}_{-\frac{1}{2}g^{de}Q_a^{f\ a}} + \frac{1}{2}(g^{de}Q_l^{f\ f} + g^{fd}Q_c^{e\ c}) \\ \frac{\partial Q}{\partial Q_{fde}} &\doteq \frac{1}{2}Q^{fde} - Q^{dfe} - \frac{1}{2}g^{de}(Q_a^{f\ a} - Q_a^{a\ f}) + \frac{1}{2}g^{df}Q_a^{e\ a}. \end{aligned} \quad (A.16)$$

Ja para o segundo termos, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(TQ)}{\partial Q_{fde}} &\doteq T_{acb}g^{cn}g^{al}g^{bm}\delta_n^f\delta_l^d\delta_m^e + T_{ab}^a g^{bm}g^{cn}\delta_m^f\delta_c^d\delta_n^e - T_{ab}^a g^{cn}g^{bm}\delta_n^f\delta_c^d\delta_l^e \\ \frac{\partial(TQ)}{\partial Q_{fde}} &\doteq T_{acb}g^{ad}g^{be}g^{cf} + T_{ab}^a g^{bf}g^{de} - T_{ab}^a g^{df}g^{be} \\ \frac{\partial(TQ)}{\partial Q_{fde}} &\doteq T^{dfe} + g^{de}T_a^{a\ f} - g^{df}g^{be}T_a^{a\ f} \end{aligned} \quad (A.17)$$

Dessa forma, ao substituir (A.16) e (A.17) em (A.13), obtém-se

$$\mathbf{M}^{de} \doteq -2k \left[\frac{1}{2}Q^{fde} - Q^{dfe} - \frac{1}{2}g^{de}(Q_a^{f\ a} - Q_a^{a\ f}) + \frac{1}{2}g^{df}Q_a^{e\ a} + T^{dfe} + g^{de}T_a^{a\ f} - g^{df}g^{be}T_a^{a\ f} \right] \boldsymbol{\eta}_f. \quad (A.18)$$

Agora, simetriza-se os índices e e d , de modo que se chega ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{de} &= -2k \left[\frac{1}{2}Q^{fde} - \frac{1}{2}(Q^{dfe} + Q^{efd}) - \frac{1}{2}g^{de}(Q_a^{f\ a} - Q_a^{a\ f}) + \frac{1}{2}(g^{fd}Q_a^{e\ a} + g^{fe}Q_a^{d\ a}) \right] \boldsymbol{\eta}_f \\ &\quad - 2k \left[\frac{1}{2}(T^{dfe} + T^{efd}) + g^{de}T_a^{a\ f} - \frac{1}{2}T_{ab}^a (g^{fd}g^{be} + g^{fe}g^{bd}) \right] \boldsymbol{\eta}_f \\ \mathbf{M}^{de} &= 4k \left[-\frac{1}{4}Q^{fde} + \frac{1}{4}(Q^{dfe} + Q^{efd}) + \frac{1}{4}g^{de}(Q_a^{f\ a} - Q_a^{a\ f}) - \frac{1}{8}(g^{fd}Q_a^{e\ a} + g^{fe}Q_a^{d\ a}) \right] \boldsymbol{\eta}_f \\ &\quad + 4k \left[-\frac{1}{4}(T^{dfe} + T^{efd}) - \frac{1}{2}g^{de}T_a^{a\ f} + \frac{1}{4}(T_a^{a\ e}g^{fd} + T_a^{a\ d}g^{fe}) \right] \boldsymbol{\eta}_f. \end{aligned} \quad (A.19)$$

A partir do resultado anterior, é possível fazer a seguinte definição:

$$\mathbf{M}^{de} = 4kU^{fde}\boldsymbol{\eta}_f, \quad U^{fde} \equiv P^{fde} + V^{fde}, \quad (\text{A.20})$$

onde

$$P^{fde} = -\frac{1}{4}Q^{fde} + \frac{1}{4}\left(Q^{dfe} + Q^{efd}\right) + \frac{1}{4}g^{de}\left(Q^f{}_a{}^a - Q^a{}_a{}^f\right) - \frac{1}{8}\left(g^{fd}Q^e{}_a{}^a + g^{fe}Q^d{}_a{}^a\right), \quad (\text{A.21})$$

$$V^{fde} = -\frac{1}{4}\left(T^{dfe} + T^{efd} + 2g^{de}T^a{}_a{}^f - T^a{}_a{}^e g^{fd} - T^a{}_a{}^d g^{fe}\right). \quad (\text{A.22})$$

APÊNDICE B – Cálculo da 3-forma de energia e momento canônica e da 4-forma de energia e momento métrica

B.1 3-forma de energia e momento canônica

Para o cálculo da 3-forma $\mathbf{E}_a$, despreza-se o termos de curvatura de (3.41), de modo que

$$\mathbf{E}_a = -k N e_a \rfloor \boldsymbol{\eta} + (e_a \rfloor \mathbf{T}^b) \wedge \mathbf{H}_b + \frac{1}{2} (e_a \rfloor \mathbf{Q}_{bc}) \mathbf{M}^{bc} \quad (\text{B.1})$$

Dado que $e_a \rfloor \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_a$, $e_a \rfloor \mathbf{T}^b = T_{ac}^b \boldsymbol{\vartheta}^c$ e $e_a \rfloor \mathbf{Q}_{bc} = -Q_{abc}$. Além disso, como $\mathbf{H}_b = 2k S_b^{de} \boldsymbol{\eta}_{de}$ e $\mathbf{M}^{ab} = 4k U^{fbc} \boldsymbol{\eta}_f$, segue que

$$\mathbf{E}_a = -k N \boldsymbol{\eta}_a + T_{ag}^b \boldsymbol{\vartheta}^g \wedge (2k S_b^{de} \boldsymbol{\eta}_{de}) - \frac{1}{2} Q_{abc} (4k U^{fbc} \boldsymbol{\eta}_f) \quad (\text{B.2})$$

Em relação ao segundo termo, segue que

$$\begin{aligned} 2k T_{ag}^b S_b^{de} \boldsymbol{\vartheta}^g \wedge \boldsymbol{\eta}_{de} &= 2k T_{ag}^b S_b^{de} (\delta_e^g \boldsymbol{\eta}_d - \delta_d^g \boldsymbol{\eta}_e) \\ &= 2k (T_{ag}^b S_b^{dg} \boldsymbol{\eta}_d - T_{ag}^b S_b^{ge} \boldsymbol{\eta}_e) \\ &= 4k T_{ag}^b S_b^{dg} \boldsymbol{\eta}_d, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde foi usada a identidade (6.7). Dessa forma, obtém-se

$$\mathbf{E}_a = (-k N \delta_a^b + 4k T_{ac}^d S_d^{bc} - 2k Q_{adc} U^{bdc}) \boldsymbol{\eta}_b. \quad (\text{B.4})$$

Ao usar o fato de que $\mathbf{E}_a = t_a^b \boldsymbol{\eta}_b$, foi possível obter as componentes do tensor de energia e momento canônico, como segue

$$t_a^b = -k N \delta_a^b + 4k T_{ac}^d S_d^{bc} - 2k Q_{adc} U^{bdc}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 4-forma de energia e momento métrico

Para se obter a 4-forma de energia e momento métrico, despreza-se o termos de curvatura em (3.40), de modo que a equação se reduz à

$$\mathbf{m}^a_b = \boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \mathbf{E}_b + \mathbf{Q}_{bc} \wedge \mathbf{M}^{bc} - \mathbf{T}^a \wedge \mathbf{H}_b \quad (\text{B.6})$$

Das definições de $\mathbf{M}^{bc}$, de $\mathbf{H}_b$, $\mathbf{Q}_{bc}$ e $\mathbf{T}^a$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^a{}_b &= t^d{}_b \boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \boldsymbol{\eta}_d + (-Q_{ebc} \boldsymbol{\vartheta}^e) \wedge (4kU^{fac} \boldsymbol{\eta}_f) \\ &- \frac{1}{2} \left(\mathbf{T}^a{}_{gh} \boldsymbol{\vartheta}^g \wedge \boldsymbol{\vartheta}^h \right) \wedge (2kS_b{}^{\bar{c}\bar{d}} \boldsymbol{\eta}_{\bar{c}\bar{d}}) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dado que $\boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \boldsymbol{\eta}_d = \delta_d^a \boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\vartheta}^g \wedge \boldsymbol{\vartheta}^h \wedge \boldsymbol{\eta}_{\bar{c}\bar{d}} = \left(\delta_{\bar{d}}^h \delta_{\bar{c}}^g - \delta_{\bar{c}}^h \delta_{\bar{d}}^g \right) \boldsymbol{\eta}$, segue que

$$\mathbf{m}^a{}_b = t^d{}_d \delta_d^a \boldsymbol{\eta} - Q_{ebc} (4kU^{fac}) \delta_f^e \boldsymbol{\eta} - k \left(T^a{}_{gh} S_b{}^{\bar{c}\bar{d}} \right) \left(\delta_{\bar{d}}^h \delta_{\bar{c}}^g - \delta_{\bar{c}}^h \delta_{\bar{d}}^g \right) \boldsymbol{\eta}.$$

Após algumas manipulações e fazer a troca de $\bar{c} \rightarrow e$ e $\bar{d} \rightarrow f$, obteve-se

$$\mathbf{m}^a{}_b = \left(t^a{}_b - 4kQ_{ebc} U^{eac} - 2kT^{aef} S_{bef} \right) \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{B.8})$$

Ao usar o fato de que $\mathbf{m}^a{}_b = m^a{}_b \boldsymbol{\eta}$, foi possível extrair as componentes do tensor de energia e momento métrico:

$$m^a{}_b = t^a{}_b - 4kQ_{ebc} U^{eac} - 2kT^{aef} S_{bef}. \quad (\text{B.9})$$

APÊNDICE C – Equações de Campo do Coframe e da Métrica

C.1 Equação do coframe

Ao aplicar $\mathbf{D}$ em $\mathbf{H}_a$, segue que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\mathbf{H}_a &= d\mathbf{H}_a - \Gamma_a^b \wedge \mathbf{H}_b \\
 &= d(2k S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}) - 2k \omega_{\lambda a}^b S_b^{\mu\nu} dx^\lambda \wedge \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} \\
 &= 2k [d(S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}) - \omega_{\lambda a}^b S_b^{\mu\nu} (\delta_\nu^\lambda \boldsymbol{\eta}_\mu - \delta_\mu^\lambda \boldsymbol{\eta}_\nu)] \\
 &= 2k [d(S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}) - \omega_{\nu a}^b S_b^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_\mu + \omega_{\mu a}^b S_b^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_\nu] \\
 &= 2k [d(S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}) - \omega_{\nu a}^b S_b^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_\mu + \omega_{\nu a}^b S_b^{\nu\mu} \boldsymbol{\eta}_\mu] \\
 \mathbf{D}\mathbf{H}_a &= 2k [d(S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}) - 2\omega_{\nu a}^b S_b^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_\mu], \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

onde foi usada a identidade (6.7) para calcular $dx^\lambda \wedge \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}$. Dado que

$$d(S_a^{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu}) \boldsymbol{\eta}_\mu. \tag{C.2}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\mathbf{H}_a &= 2k \left[\frac{2}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu}) - 2\omega_{\nu a}^b S_b^{\mu\nu} \right] \boldsymbol{\eta}_\mu \\
 &= \frac{4k}{\sqrt{-g}} [\partial_\nu (\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu}) - \sqrt{-g} \omega_{\nu a}^b S_b^{\mu\nu}] \boldsymbol{\eta}_\mu \\
 \mathbf{D}\mathbf{H}_a &= \frac{4k}{\sqrt{-g}} \nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu}) \boldsymbol{\eta}_\mu \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

Da definição da equação do coframe (3.47), com $\mathbf{E}_a = t_a^\mu \boldsymbol{\eta}_\mu$ e $\boldsymbol{\Sigma}_a = \mathcal{T}_a^\mu \boldsymbol{\eta}_\mu$, obteve-se

$$\nabla_\nu(\omega) (\sqrt{-g} S_a^{\mu\nu}) \boldsymbol{\eta}_\mu = \frac{\sqrt{-g}}{4k} \tau_a^\mu \boldsymbol{\eta}_\mu, \quad \tau_a^\mu = t_a^\mu + \mathcal{T}_a^\mu. \tag{C.4}$$

C.2 Equivalência da equação do coframe com a RG

A partir da definição da contorção (2.172), é possível reescrever a referida equação da seguinte forma

$$T^{\mu\nu\lambda} + T^{\nu\mu\lambda} - T^{\lambda\mu\nu} = -2K^{\lambda\mu\nu}. \tag{C.5}$$

O resultado acima pode ser introduzido na equação (6.24) para fornecer

$$\Sigma^{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2}K^{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(g^{\mu\lambda}T^\nu - g^{\mu\nu}T^\lambda\right), \quad (\text{C.6})$$

o que resulta em

$$K^{\lambda\mu\nu} = -2\Sigma^{\mu\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}T^\nu - g^{\mu\nu}T^\lambda. \quad (\text{C.7})$$

Agora, da equação da definição da deformação (2.173), pode-se chegar ao seguinte resultado

$$Q^{\nu\mu\lambda} - Q^{\mu\nu\lambda} = -2L^{\lambda\mu\nu} - Q^{\mu\nu\lambda}. \quad (\text{C.8})$$

Ao introduzir a equação acima na equação (6.25), obtém-se

$$\Xi^{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2}L^{\lambda\mu\nu} - \frac{1}{4}Q^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4}\left[g^{\mu\nu}\left(Q^\lambda - \tilde{Q}^\lambda\right) - g^{\mu\lambda}\left(Q^\nu - \tilde{Q}^\nu\right)\right]. \quad (\text{C.9})$$

Isolar a deformação na equação anterior fornecerá

$$L^{\lambda\mu\nu} = -2\Xi^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2}Q^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4}\left[g^{\mu\nu}\left(Q^\lambda - \tilde{Q}^\lambda\right) - g^{\mu\lambda}\left(Q^\nu - \tilde{Q}^\nu\right)\right]. \quad (\text{C.10})$$

Portanto, ao partir da equação que define a distorção (2.171) e introduzir as equações (C.7) e (C.10) nela, se obtém

$$N^{\lambda\mu\nu} = -2S^{\mu\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}T^\nu - g^{\mu\nu}T^\lambda - \frac{1}{2}Q^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\left(Q^\lambda - \tilde{Q}^\lambda\right) - g^{\mu\lambda}\left(Q^\nu - \tilde{Q}^\nu\right)\right], \quad (\text{C.11})$$

onde foi usado que $-2\Sigma^{\mu\nu\lambda} - 2\Xi^{\mu\nu\lambda} = -2S^{\mu\nu\lambda}$. O resultado acima será útil para escrever o tensor de Einstein em termos dele.

Ao tomar $R_{\alpha\beta} = 0$ e $R = 0$ nas equações (2.183) e (2.184), é possível reescrevê-las nas formas

$$\mathring{R}_{\alpha\beta} = \mathring{\nabla}_\beta N^\nu_{\nu\alpha} - \mathring{\nabla}_\nu N^\nu_{\beta\alpha} + N^\lambda_{\nu\alpha} N^\nu_{\beta\lambda} - N^\nu_{\nu\lambda} N^\alpha_{\beta\alpha}, \quad (\text{C.12})$$

$$\mathring{R} = \mathring{\nabla}_\beta N^\nu_{\nu}{}^\beta - \mathring{\nabla}_\nu N^\nu_{\alpha}{}^\alpha - N, \quad (\text{C.13})$$

em que foram feitas as mudanças de índices $\mu \rightarrow \alpha$ e $\nu \rightarrow \beta$. Agora, multiplica-se a equação (C.12) por $g^{\mu\alpha}e_a{}^\beta$ para se obter

$$\mathring{R}^\mu_a = e_a{}^\beta \mathring{\nabla}_\beta N^\nu_{\nu}{}^\mu - \mathring{\nabla}_\nu N^\nu_a{}^\mu + N^\lambda_{\nu}{}^\mu N^\nu_{a\lambda} - N^\nu_{\nu\lambda} N^\lambda_a{}^\mu. \quad (\text{C.14})$$

Já a equação (C.13) pode ser rescrita como

$$\mathring{R} = \mathring{\nabla}_\nu \left(2T^\nu + \tilde{Q}^\nu - Q^\nu\right) - N, \quad (\text{C.15})$$

onde foram usados os fatos de que

$$N^\nu_{\nu}{}^\beta = T^\beta - \frac{1}{2}Q^\beta, \quad N^{\nu\alpha}_{\alpha} = -T^\nu - \tilde{Q}^\nu + \frac{1}{2}Q^\nu. \quad (\text{C.16})$$

Como se sabe, o tensor de Einstein é dado por

$$\mathring{G}_{\alpha\beta} = \mathring{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathring{R}. \quad (\text{C.17})$$

Ao multiplicá-lo por $g^{\mu\alpha}e_a^\beta$, obtém-se

$$\mathring{G}^\mu_a = \mathring{R}^\mu_a - \frac{1}{2}e_a^\mu \mathring{R}, \quad (\text{C.18})$$

em que $g_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}e_a^\beta = \delta^\mu_\beta e_a^\beta = e_a^\mu$.

Por fim, é necessário manipular a equação (C.11). Primeiramente, se faz a seguinte troca: $\lambda \rightarrow \nu$, $\mu \rightarrow \sigma$ e $\nu \rightarrow \mu$. Em seguida, multiplica-se a equação (C.11) por $e_{a\sigma}$. Desse modo, chega-se a

$$N^\nu_a{}^\mu = -2S_a^{\mu\nu} + e_a^\nu T^\mu - e_a^\mu T^\mu - \frac{1}{2}Q_a^{\mu\nu} + \left[e_a^\mu (Q^\nu - \tilde{Q}^\nu) - e_a^\nu (Q^\mu - \tilde{Q}^\mu) \right]. \quad (\text{C.19})$$

Portanto, a partir das equações (C.18), (C.14), (C.15) e (C.19), obtém-se

$$\mathring{G}^\mu_a = 2\mathring{\nabla}_\nu S_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\nu Q_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2}e_a^\nu \mathring{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\mu + \frac{1}{2}e_a^\mu N + N^\nu_{a\alpha} N^\alpha_{\nu}{}^\mu - N^\nu_{\nu\alpha} N^\alpha_a{}^\mu. \quad (\text{C.20})$$

O próximo passo é eliminar o termos que contêm as derivadas covariantes da não metricidade. Para isso, utiliza-se a identidade de Bianchi

$$\mathbf{D}\mathbf{Q}_{ab} = 2\mathbf{R}_{(ab)}. \quad (\text{C.21})$$

Como $\mathbf{R}_a{}^b = 0$, obtém-se

$$d\mathbf{Q}_{ab} = \Gamma_a{}^c \wedge \mathbf{Q}_{cb} + \Gamma_b{}^c \wedge \mathbf{Q}_{ac}. \quad (\text{C.22})$$

Diante desse resultado, pode-se obter

$$\nabla_\lambda Q_{cab} - e^d_\lambda \nabla_c Q_{dab} + (N^d_{\lambda c} - N^d_{c\lambda}) Q_{dab} = 0. \quad (\text{C.23})$$

Em termos da conexão de Levi-Civita, a equação acima se transforma em

$$\mathring{\nabla}_\lambda Q_{cab} - \mathring{\nabla}_\nu Q_{dab} e^d_\lambda + N^d_{ca} Q_{\lambda db} + N^d_{cb} Q_{\lambda da} - N^d_{\lambda a} Q_{cdb} - N^d_{\lambda b} Q_{cda} = 0. \quad (\text{C.24})$$

Ao realizar a contração com $e^{b\lambda}e^{a\mu}$, pode-se obter

$$\mathring{\nabla}_\nu Q_a^{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_a \tilde{Q}^\mu = N^{db\mu} Q_{adb} + N^{db}{}_b Q_{ad}{}^\mu - N^d_a{}^\mu \tilde{Q}_d - N^d_{ab} Q_d{}^b{}^\mu. \quad (\text{C.25})$$

Portanto, o próximo passo consiste em substituir o resultado acima na (C.20) e multiplicar $\sqrt{-g}$, o que fornece

$$\sqrt{-g}\mathring{G}^\mu_a = 2\nabla_\nu(\omega) \left(\sqrt{-g}S_a^{\mu\nu} \right) - \frac{\sqrt{-g}}{2k}t^\mu_a, \quad (\text{C.26})$$

como se queria mostrar.

C.3 Equação da Métrica

Primeiramente, aplica-se $\mathbf{D}$ sobre $\mathbf{M}^{ab}$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathbf{M}^{ab} &= d\mathbf{M}^{ab} + \Gamma_d^a \wedge \mathbf{M}^{db} + \Gamma_d^b \wedge \mathbf{M}^{ad} \\ &= d(4k U^{\lambda ab} \boldsymbol{\eta}_\lambda) + \omega_{\lambda d}^a dx^\lambda \wedge (4k U^{\alpha db} \boldsymbol{\eta}_\alpha) \\ &\quad + \omega_{\lambda d}^b dx^\lambda \wedge (4k U^{\beta ad} \boldsymbol{\eta}_\beta)\end{aligned}\tag{C.27}$$

Dado que

$$d(4k U^{\lambda ab} \boldsymbol{\eta}_\lambda) = \frac{4k}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) \boldsymbol{\eta},\tag{C.28}$$

a equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathbf{M}^{ab} &= \frac{4k}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) \boldsymbol{\eta} + 4k \omega_{\lambda d}^a U^{\alpha db} dx^\lambda \wedge \boldsymbol{\eta}_\alpha \\ &\quad + 4k \omega_{\lambda d}^b U^{\beta ad} dx^\lambda \wedge \boldsymbol{\eta}_\beta \\ &= \frac{4k}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) \boldsymbol{\eta} + 4k \omega_{\lambda d}^a U^{\alpha db} \delta_\alpha^\lambda \boldsymbol{\eta} \\ &\quad + 4k \omega_{\lambda d}^b U^{\beta ad} \delta_\beta^\lambda \boldsymbol{\eta} \\ &= \frac{4k}{\sqrt{-g}} \left[\partial_\lambda (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) + \sqrt{-g} \omega_{\lambda d}^a U^{\lambda db} + \sqrt{-g} \omega_{\lambda d}^b U^{\lambda ad} \right] \boldsymbol{\eta}.\end{aligned}\tag{C.29}$$

Portanto,

$$\mathbf{D}\mathbf{M}^{ab} = \frac{4k}{\sqrt{-g}} \nabla_\lambda(\omega) (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) \boldsymbol{\eta}\tag{C.30}$$

Da definição da equação da métrica (3.46), obtém-se

$$\frac{4k}{\sqrt{-g}} \nabla_\lambda(\omega) (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) \boldsymbol{\eta} - m^{ab} \boldsymbol{\eta} = \mathcal{T}^{ab} \boldsymbol{\eta}.\tag{C.31}$$

Ao reorganizar os termos, chegou-se a

$$\nabla_\lambda(\omega) (\sqrt{-g} U^{\lambda ab}) \boldsymbol{\eta} = \frac{\sqrt{-g}}{4k} (m^{ab} + \mathcal{T}^{ab}) \boldsymbol{\eta},\tag{C.32}$$

como se queria obter.

APÊNDICE D – Equação da conexão

D.1 Momento conjugado à curvatura

O primeiro objetivo é calcular o objeto

$$\mathbf{H}^a_b = -\frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial \mathbf{R}^b_a}. \quad (\text{D.1})$$

Da lagrangiana (6.19), o único termo que vai contribuir é o termo que contém a 2-forma da curvatura $\mathbf{R}^b_a$. Dessa forma, segue que

$$\mathbf{H}^a_b = k\boldsymbol{\eta}^a_b \quad (\text{D.2})$$

D.2 Hipermomento gravitacional

A partir de (3.39) e das definições de $\mathbf{H}_a$ e $\mathbf{M}^{ab}$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a_b &= -\boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \mathbf{H}_b - g_{bc} \mathbf{M}^{ac} \\ &= -\boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \left(2k S_b^{de} \boldsymbol{\eta}_{de} \right) - g_{bc} \left(4k U^{fac} \boldsymbol{\eta}_f \right) \\ &= -2k S_b^{de} (\delta_e^a \boldsymbol{\eta}_d - \delta_d^a \boldsymbol{\eta}_e) - 4k U^{fa}_b \boldsymbol{\eta}_f \\ &= -2k (S_b^{da} \boldsymbol{\eta}_d - S_b^{ae} \boldsymbol{\eta}_e) - 4k U^{fa}_b \boldsymbol{\eta}_f \\ &= -4k S_b^{da} \boldsymbol{\eta}_d - 4k U^{fa}_b \boldsymbol{\eta}_f \\ \mathbf{E}^a_b &= -4k (S_b^{ca} + U^{ca}_b) \boldsymbol{\eta}_c, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde foi usada a segunda identidade (6.7) para o cálculo de $\boldsymbol{\vartheta}^a \wedge \boldsymbol{\eta}_{de}$.

D.3 Equação da Conexão

Nesta parte, será obtida a equação da conexão (3.48). O primeiro passo será aplicar $\mathbf{D}$ sobre $\mathbf{H}^a_b$. Desse modo,

$$\mathbf{D}\mathbf{H}^a_b = k (\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}^a_b + \Gamma_c^a \wedge \boldsymbol{\eta}^c_b - \Gamma_b^c \wedge \boldsymbol{\eta}^a_c), \quad (\text{D.4})$$

em que foi usado $\mathbf{H}^a_b = k\boldsymbol{\eta}^a_b$.

No que diz respeito aos dois últimos termos na equação acima, ao usar a segunda identidade (6.7), foi possível verificar que

$$\Gamma_c^a \wedge \boldsymbol{\eta}^c_b - \Gamma_b^c \wedge \boldsymbol{\eta}^a_c = (\omega_b^{ac} + \omega_b^{ca}) \boldsymbol{\eta}_c - \omega_c^{ac} \boldsymbol{\eta}_b - \omega_{cb}^c \boldsymbol{\eta}^a. \quad (\text{D.5})$$

O próximo passo é analisar $d\eta^a_b$. Tendo em mente que

$$\eta^a_b = \frac{1}{2!} \varepsilon^a_{bcd} e^c_\mu e^d_\nu dx^\rho \wedge dx^\nu, \quad (D.6)$$

segue que

$$d\eta^a_b = \frac{1}{2!} \partial_\alpha \left(\varepsilon^a_{bcd} e^c_\mu e^d_\nu \right) dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (D.7)$$

Agora, é necessário fazer o seguinte procedimento. Primeiro se considera

$$\eta_\alpha = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\nu, \quad (D.8)$$

que ao ser multiplicada por $\varepsilon^{\alpha\gamma\rho\sigma}$ dará

$$\varepsilon^{\alpha\gamma\rho\sigma} \eta_\alpha = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\alpha\gamma\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\nu. \quad (D.9)$$

É possível verificar que

$$\varepsilon^{\alpha\gamma\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\nu = -3! dx^\gamma \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (D.10)$$

Logo, a partir do resultado acima, ao substituí-lo na equação (D.9), obtém-se

$$dx^\gamma \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = -\varepsilon^{\alpha\gamma\rho\sigma} \eta_\alpha. \quad (D.11)$$

Portanto, ao substituir (D.11) em (D.7), segue que

$$d\eta^a_b = -\frac{1}{2} \partial_\alpha \left(\varepsilon^a_{bcd} e^c_\mu e^d_\nu \right) \varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} \eta_\lambda. \quad (D.12)$$

Agora, nota-se que $\varepsilon^a_{b\mu\nu} = e^{a\rho} e_b^\sigma \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}$. Porém, como $\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} = \sqrt{-g} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}$, segue que

$$\varepsilon^a_{b\mu\nu} = \sqrt{-g} e^{a\rho} e_b^\sigma \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (D.13)$$

Ao se ter em mente que

$$\varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} = \frac{-1}{\sqrt{-g}} \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu}, \quad (D.14)$$

substituir (D.13) na equação (D.12) fornecerá

$$d\eta^a_b = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} e^{a\rho} e_b^\sigma \right) \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} \eta_\lambda. \quad (D.15)$$

Uma vez que $\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} = 2 \left(\delta_\rho^\lambda \delta_\sigma^\alpha - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\lambda \right)$, obtém-se

$$d\eta^a_b = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left[\sqrt{-g} \left(e^{a\lambda} e_b^\alpha - e^{a\alpha} e_b^\lambda \right) \right] \eta_\lambda, \quad (D.16)$$

e portanto,

$$d\eta^a_b = \frac{1}{2k\sqrt{-g}} \left(\partial_\alpha J_b^{a\lambda} \right) \eta_\lambda, \quad J_b^{a\lambda} \equiv 2k\sqrt{-g} \left(e^{a\lambda} e_b^\alpha - e^{a\alpha} e_b^\lambda \right). \quad (D.17)$$

A partir das equações (D.17) e (D.5), a equação (D.4) será

$$\mathbf{D}\mathbf{H}_b^a = k \left[\frac{1}{2k\sqrt{-g}} \left(\partial_\alpha J_b^{a\alpha\lambda} \right) + \omega_{bc}^a e^{c\lambda} + \omega_{bc}^{ca} e_c^\lambda - \omega_c^{ac} e_b^\lambda - \omega_{cb}^c e^{a\lambda} \right] \boldsymbol{\eta}_\lambda. \quad (\text{D.18})$$

Em relação à última equação, é possível mostrar que

$$\omega_{bc}^a e^{c\lambda} + \omega_{bc}^{ca} e_c^\lambda - \omega_c^{ac} e_b^\lambda - \omega_{cb}^c e^{a\lambda} = \frac{1}{2k\sqrt{-g}} \left(\omega_{ac}^a J_b^{c\alpha\lambda} - \omega_{ab}^c J_c^{a\alpha\lambda} \right). \quad (\text{D.19})$$

Logo, chega-se a

$$\mathbf{D}\mathbf{H}_b^a = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(\partial_\alpha J_b^{a\alpha\lambda} + \omega_{ac}^a J_b^{c\alpha\lambda} - \omega_{ab}^c J_c^{a\alpha\lambda} \right) \boldsymbol{\eta}_\lambda. \quad (\text{D.20})$$

Portanto,

$$\mathbf{D}\mathbf{H}_b^a = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(\nabla_\alpha(\omega) J_b^{a\alpha\lambda} \right) \boldsymbol{\eta}_\lambda. \quad (\text{D.21})$$

O próximo passo é demonstrar que $\mathbf{D}\mathbf{H}_b^a = \mathbf{E}_b^a$, que consiste em calcular $S_b^{\lambda a} + U^{\lambda a}_c$. Primeiramente, parte-se da definição da não holonomicidade (2.90). Por meio desta, é possível obter a seguinte identidade

$$\sqrt{-g} (e_c^\mu \Omega_{ab}^c + e_b^\mu \Omega_a - e_a^\mu \Omega_b) = -\frac{1}{2k} \partial_\alpha J_{ab}^{\mu\alpha} + \frac{1}{4k} g^{cd} g_{cd,\alpha} J_{ab}^{\mu\alpha}. \quad (\text{D.22})$$

Esta identidade é válida para o caso geral, em que $e_a^\mu \in GL(4, \mathbb{R})$. No caso de tétradas ortonormais, ela coincide com a equação (12) de (FORMIGA; COSTA, 2025). Da equação (6.24), pode-se notar que

$$\Sigma^{a\mu b} - \Sigma^{b\mu a} = \frac{1}{2} T^{\mu ab} + \frac{1}{2} (e^{b\mu} T^a - e^{a\mu} T^b). \quad (\text{D.23})$$

Da definição da torção (2.152) e da equação (D.22), chega-se a

$$\sqrt{-g} (\Sigma^{a\mu}_b - \Sigma_b^{\mu a}) = \frac{1}{4k} \nabla_\alpha(\omega) J_b^{a\alpha\mu} + \frac{\sqrt{-g}}{2} Q_b^{a\mu} - \frac{\sqrt{-g}}{2} e_b^\mu \tilde{Q}^a - \frac{1}{8k} Q_\alpha J_b^{a\alpha\mu}, \quad (\text{D.24})$$

em que foram usadas as identidades

$$g_{ca,\alpha} = Q_{acd} + \omega_{dac} + \omega_{cad}, \quad (\text{D.25})$$

e

$$g^{ac}_{,\alpha} = -Q_\alpha^{ac} - \omega_\alpha^{ac} - \omega_\alpha^{ca}. \quad (\text{D.26})$$

Das equações (6.24) e (6.28), ao utilizar a equação (D.23), encontra-se

$$\Sigma_b^{\mu a} + V_b^{\mu a} = -\frac{1}{2} (\Sigma^{a\mu}_b - \Sigma_b^{\mu a}). \quad (\text{D.27})$$

Agora, ao multiplicar (D.27) por $\sqrt{-g}$ e usar o membro direito de (D.27), obtém-se

$$\sqrt{-g} (\Sigma_b^{\mu a} + V_b^{\mu a}) = -\frac{1}{8k} \nabla_\alpha(\omega) J_b^{a\alpha\mu} - \frac{\sqrt{-g}}{4} Q_b^{a\mu} + \frac{\sqrt{-g}}{4} e_b^\mu \tilde{Q}^a + \frac{\sqrt{-g}}{8} (e^{a\mu} Q_b - e_b^\mu Q^a). \quad (\text{D.28})$$

Agora, da equações (6.25) e (6.27), segue que

$$\Xi_b^{\mu a} + P^{\mu a}_b = \frac{1}{8} (e_b^{\mu} Q^a - e^{a\mu} Q_b) + \frac{1}{4} Q_b^{a\mu} - \frac{1}{4} e_b^{\mu} \tilde{Q}^a. \quad (\text{D.29})$$

Ao multiplicar a equação acima por $\sqrt{-g}$ e adicionar o resultado à equação (D.28), chega-se ao resultado desejado

$$\sqrt{-g} (S_b^{\mu a} + U^{\mu a}_b) = -\frac{1}{8k} \nabla_{\alpha} (\omega) J_b^{a \alpha \mu}. \quad (\text{D.30})$$

Do resultado anterior e da equação (6.35), prova-se que

$$\mathbf{D}H^a_b = \mathbf{E}^a_b. \quad (\text{D.31})$$

APÊNDICE E – Cálculo da Energia Gravitacional

E.1 4-momento do campo gravitacional

E.1.1 Não metricidade

O primeiro objetivo é calcular a não metricidade. Dados $Q_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu}$ e

$$g_{\mu\nu} = -\hat{t}_\mu \hat{t}_\nu + \hat{x}_\mu \hat{x}_\nu + \hat{y}_\mu \hat{y}_\nu + \hat{z}_\mu \hat{z}_\nu. \quad (\text{E.1})$$

Ao substituir (E.1) na definição da não metricidade, segue que

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \left(-\cancel{\hat{t}_\mu \hat{t}_\nu}^0 + \hat{x}_\mu \hat{x}_\nu + \hat{y}_\mu \hat{y}_\nu + \cancel{\hat{z}_\mu \hat{z}_\nu}^0 \right) \\ &= \partial_\lambda (\hat{x}_\mu \hat{x}_\nu) + \partial_\lambda (\hat{y}_\mu \hat{y}_\nu), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde o primeiro e o quarto termos se anularam devido ao fato de que $\hat{t}_\mu = -\delta_\mu^0$ e $\hat{z}_\mu = \delta_\mu^3$. Agora, ao aplicar a regra do produto na equação anterior e usar as equações (6.84), chega-se ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\mu\nu} &= v_\lambda (\alpha \hat{x}_\mu + \beta \hat{y}_\mu) \hat{x}_\nu + v_\lambda (\alpha \hat{x}_\nu + \beta \hat{y}_\nu) \hat{x}_\mu \\ &= v_\lambda (\bar{\alpha} \hat{y}_\mu + \beta \hat{x}_\mu) \hat{y}_\nu + v_\lambda (\beta \hat{x}_\nu + \bar{\alpha} \hat{y}_\nu) \hat{y}_\mu. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Uma manipulação algébrica simples permite obter

$$Q_{\lambda\mu\nu} = 2v_\lambda (\alpha \hat{x}_\mu \hat{x}_\nu + 2\beta \hat{x}_{(\mu} \hat{y}_{\nu)} + \bar{\alpha} \hat{y}_\mu \hat{y}_\nu). \quad (\text{E.4})$$

Para calcular o traço da não metricidade $Q_\lambda = Q_{\lambda\mu}{}^\mu$, uma vez que se tratam de vetores, basta levantar o terceiro índice em (E.4) e contrair com o segundo índice. Logo,

$$Q_\lambda = Q_{\lambda\mu}{}^\mu = 2v_\lambda \left(\underbrace{\alpha \hat{x}_\mu \hat{x}^\mu}_1 + 2\beta \cancel{\hat{x}_{(\mu} \hat{y}^{\mu)}}^0 + \bar{\alpha} \underbrace{\hat{y}_\mu \hat{y}^\mu}_1 \right), \quad (\text{E.5})$$

onde foi usada ortonormalidade entre os vetores, o que resultará em

$$Q_\lambda = 2v_\lambda (\alpha + \bar{\alpha}). \quad (\text{E.6})$$

O outro traço consiste na contração do primeiro com o segundo índice, isto é, $\tilde{Q}_\nu = Q_\lambda{}^\lambda{}_\nu$. Desse modo,

$$\tilde{Q}_\nu = 2v_\lambda (\alpha \hat{x}^\lambda \hat{x}_\nu + 2\beta \hat{x}^{(\lambda} \hat{y}_{\nu)} + \bar{\alpha} \hat{y}^\lambda \hat{y}_\nu). \quad (\text{E.7})$$

Portanto, a ortonormalidade entre $v_\lambda = \hat{t}_\lambda + \hat{z}_\lambda$ e $\hat{x}^\lambda$ e $\hat{y}^\lambda$ resultará em

$$\tilde{Q}_\nu = 0. \quad (\text{E.8})$$

E.1.2 Cálculo de $S^{\lambda\mu\nu}$

Para o cálculo do quadrimomento (6.67), é necessário calcular S_{abc} . No entanto, como se trata de um caso apenas com não metricidade, a partir da equação (6.23), nota-se que $S_{abc} = \Xi_{abc}$. Como $\tilde{Q}_\nu = 0$, da equação (6.25) se obtém

$$\Xi^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4} \left(Q^{\mu\lambda\nu} - Q^{\nu\lambda\mu} + g^{\lambda\mu} Q^\nu - g^{\lambda\nu} Q^\mu \right). \quad (\text{E.9})$$

Para efetuar o cálculo de (E.9), é necessário o uso da equação (E.4). Desse modo, faz-se o passo seguinte:

$$Q^{\mu\lambda\nu} = 2v^\mu \left(\alpha \hat{x}^\lambda \hat{x}^\nu + 2\beta \hat{x}^{(\lambda} \hat{y}^{\nu)} + \bar{\alpha} \hat{y}^\lambda \hat{y}^\nu \right), \quad (\text{E.10})$$

$$Q^{\nu\lambda\mu} = 2v^\nu \left(\alpha \hat{x}^\lambda \hat{x}^\mu + 2\beta \hat{x}^{(\lambda} \hat{y}^{\mu)} + \bar{\alpha} \hat{y}^\lambda \hat{y}^\mu \right). \quad (\text{E.11})$$

Agora se realiza a subtração entre (E.10) e (E.11). A partir disso, será possível obter o seguinte resultado

$$Q^{\mu\lambda\nu} - Q^{\nu\lambda\mu} = 4 \left(\alpha \hat{x}^\lambda v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} + \bar{\alpha} \hat{y}^\lambda v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \beta \hat{x}^\lambda v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \beta \hat{y}^\lambda v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} \right). \quad (\text{E.12})$$

A partir de (E.6) e (E.1), considera-se:

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu} Q^\nu &= 2v^\nu g^{\lambda\mu} (\alpha + \bar{\alpha}) \\ &= 2\alpha g^{\lambda\mu} v^\nu + 2\bar{\alpha} g^{\lambda\mu} v^\nu, \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} g^{\lambda\nu} Q^\mu &= g^{\lambda\nu} 2v^\mu (\alpha + \bar{\alpha}) \\ &= 2\alpha g^{\lambda\nu} v^\mu + 2\bar{\alpha} g^{\lambda\nu} v^\mu \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Desse modo, a subtração entre as duas equações anteriores fornecerá

$$g^{\lambda\mu} Q^\nu - g^{\lambda\nu} Q^\mu = 2 \left[\alpha \left(g^{\lambda\mu} v^\nu - g^{\lambda\nu} v^\mu \right) + \bar{\alpha} \left(g^{\lambda\mu} v^\nu - g^{\lambda\nu} v^\mu \right) \right] \quad (\text{E.15})$$

A partir da equação anterior e pela substituição de (E.1) nela, será possível obter

$$g^{\lambda\mu} Q^\nu - g^{\lambda\nu} Q^\mu = 4(\alpha + \bar{\alpha}) \left(-\hat{t}^\lambda \hat{t}^{[\mu} v^{\nu]} + \hat{x}^\lambda \hat{x}^{[\mu} v^{\nu]} + \hat{y}^\lambda \hat{y}^{[\mu} v^{\nu]} + \hat{z}^\lambda \hat{z}^{[\mu} v^{\nu]} \right) \quad (\text{E.16})$$

Portanto, de (E.12) e (E.16) em (E.9), obtém-se

$$\begin{aligned} \Xi^{\lambda\mu\nu} &= (\alpha + \bar{\alpha}) \left(-\hat{t}^\lambda \hat{t}^{[\mu} v^{\nu]} + \hat{x}^\lambda \hat{x}^{[\mu} v^{\nu]} + \hat{y}^\lambda \hat{y}^{[\mu} v^{\nu]} + \hat{z}^\lambda \hat{z}^{[\mu} v^{\nu]} \right) + \beta \left(\hat{x}^\lambda v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \hat{y}^\lambda v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} \right) \\ &+ \alpha \left(\hat{x}^\lambda v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} + \hat{x}^\lambda \hat{x}^{[\mu} v^{\nu]} \right) + \bar{\alpha} \left(\hat{y}^\lambda v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \hat{y}^\lambda \hat{y}^{[\mu} v^{\nu]} \right) \\ &+ \bar{\alpha} \hat{x}^\lambda \hat{x}^{[\mu} v^{\nu]} + \alpha \hat{y}^\lambda \hat{y}^{[\mu} v^{\nu]}, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

onde o terceiro e quarto termos se anularam devido aos fatos de que $v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} = -\hat{x}^{[\mu}v^{\nu]}$ e $v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} = -\hat{y}^{[\mu}v^{\nu]}$, respectivamente. Ao reorganizar os termos da equação anterior, torna-se possível reescrevê-la na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Xi^{\lambda\mu\nu} &= \hat{x}^\lambda \left(-\bar{\alpha} v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} + \beta v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} \right) + \hat{y}^\lambda \left(-\alpha v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} + \beta v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} \right) \\ &+ (\alpha + \bar{\alpha}) \left(-\hat{t}^\lambda v^{[\mu}\hat{t}^{\nu]} + \hat{z}^\lambda v^{[\mu}\hat{z}^{\nu]} \right)\end{aligned}\quad (\text{E.18})$$

A partir dos seguintes resultados

$$v^{[\mu}\hat{t}^{\nu]} = \hat{z}^{[\mu}\hat{t}^{\nu]} = -\hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]}, \quad (\text{E.19})$$

$$v^{[\mu}\hat{z}^{\nu]} = \hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]}, \quad (\text{E.20})$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\Xi^{\lambda\mu\nu} &= \left(-\bar{\alpha} v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} + \beta v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} \right) \hat{x}^\lambda + \left(-\alpha v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} + \beta v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} \right) \hat{y}^\lambda \\ &- (\alpha + \bar{\alpha}) \left[-\hat{t}^\lambda \left(-\hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]} \right) + \hat{z}^\lambda \left(\hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]} \right) \right].\end{aligned}\quad (\text{E.21})$$

Da equação anterior, nota-se que o termo entre colchetes $\hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]}$ pode ser colocado em evidência, de tal forma que se obtém $(\hat{t}^\lambda + \hat{z}^\lambda)\hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]} = v^\lambda \hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]}$. Com isso, é possível, finalmente, chegar ao resultado a seguir

$$\begin{aligned}\Xi^{\lambda\mu\nu} &= \left(-\bar{\alpha} v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} + \beta v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} \right) \hat{x}^\lambda + \left(-\alpha v^{[\mu}\hat{y}^{\nu]} + \beta v^{[\mu}\hat{x}^{\nu]} \right) \hat{y}^\lambda \\ &- (\alpha + \bar{\alpha}) v^\lambda \hat{t}^{[\mu}\hat{z}^{\nu]}.\end{aligned}\quad (\text{E.22})$$

E.1.3 Cálculo do quadrimomento

De acordo com a equação (6.67), o quadrimomento, para esse caso, é dado por

$$P_\lambda = 4k \oint_S dS_j \sqrt{-g} \Xi_\lambda^{0j}. \quad (\text{E.23})$$

Para o cálculo de (E.23), a propagação da onda será avaliada em uma caixa com faces $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ e $z_1 < z < z_2$. Como a onda se propaga na direção z e Ξ_λ^{0j} não depende de x e y , a única contribuição será em termos de z . Em outras palavras, a única contribuição será de Ξ_λ^{03} . Logo, segue que

$$\begin{aligned}\Xi_\lambda^{03} &= \left(-\bar{\alpha} v^{[0}\hat{x}^{3]} + \beta v^{[0}\hat{y}^{3]} \right) \hat{x}_\lambda + \left(-\alpha v^{[0}\hat{y}^{3]} + \beta v^{[0}\hat{x}^{3]} \right) \hat{y}_\lambda \\ &- (\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda \hat{t}^{[0}\hat{z}^{3]},\end{aligned}\quad (\text{E.24})$$

onde os termos se anularam de devido às equações (6.73)-(6.76). Desse modo, chega-se a

$$\Xi_\lambda^{03} = -\frac{1}{2} (\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda. \quad (\text{E.25})$$

Logo, de (E.25) em (E.23), com a integração feita avaliada nas faces z_1 e z_2 da caixa, segue que

$$P_\lambda = 4k \left[\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dx dy \left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03} \right)_{z_2} - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dx dy \left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03} \right)_{z_1} \right]. \quad (\text{E.26})$$

Uma vez que não há dependência em x e y , a integração anterior fornecerá

$$P_\lambda = 4k \Delta x \Delta y \left[\left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03} \right)_{z_2} - \left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03} \right)_{z_1} \right]. \quad (\text{E.27})$$

Para prosseguir o cálculo, é necessária a análise do termo $\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03}$. Então, de (E.25), segue que

$$\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} (\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda. \quad (\text{E.28})$$

Dadas as equações em (6.85), é possível obter

$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{1}{c\sqrt{-g}} \left(-\dot{f}_1 g_1 + \dot{f}_2 g_2 - \dot{g}_1 f_1 + \dot{g}_2 f_2 \right). \quad (\text{E.29})$$

Para uma dada função $h(u)$, onde $u = t - z/c$, nota-se que

$$\frac{\partial h(u)}{\partial t} = \frac{\partial h(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dh(u)}{du} \frac{\partial (t - z/c)}{\partial t} = \frac{dh(u)}{du}. \quad (\text{E.30})$$

$$\frac{\partial h(u)}{\partial z} = \frac{\partial h(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dh(u)}{du} \frac{\partial (t - z/c)}{\partial z} = \frac{-1}{c} \frac{dh(u)}{du}. \quad (\text{E.31})$$

Desse modo, obtém-se a seguinte relação

$$\dot{h}(u) = \frac{dh(u)}{du} = \frac{\partial h(u)}{\partial t} = -c \frac{\partial h(u)}{\partial z}, \quad (\text{E.32})$$

onde o ponto indica a derivada com respeito a u . A partir da equação (E.29), nota-se que o termo entre parênteses é uma regra do produto. Nesse caso, com respeito a u . Esse termo pode ser reescrito como a derivada de $(f_1 g_1 - f_2 g_2)$, que dá exatamente a derivada de $\sqrt{-g}$. Logo, ao usar (E.32) em (E.29), chega-se ao seguinte resultado

$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial z} \right], \quad (\text{E.33})$$

de tal forma que

$$\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{03} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial z} \right]. \quad (\text{E.34})$$

Portanto, o 4-momento será dado por

$$P_\lambda = -\frac{c^4}{8\pi G} \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial z} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} \right] v_\lambda. \quad (\text{E.35})$$

E.2 Cálculo do tensor de energia e momento gravitacional

Como não há torção, o tensor de energia e momento canônico (6.32) se reduz a

$$t^b_a = kN\delta_a^b - 2kQ_{adc}P^{bdc}, \quad (\text{E.36})$$

onde nesse caso (6.13)

$$N = -Q_{abc}P^{abc} \quad (\text{E.37})$$

Para iniciar o cálculo, faz-se as seguintes trocas: $a \rightarrow \lambda$, $b \rightarrow \mu$ e $c \rightarrow \nu$. Logo, a partir das equações (E.3) e (E.6), segue que

$$Q^{\lambda\mu\nu} = 2v^\lambda \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + 4\beta \hat{x}^{(\mu} \hat{y}^{\nu)} v^\lambda + 2\bar{\alpha} v^\lambda \hat{y}^\mu \hat{y}^\nu, \quad (\text{E.38})$$

$$Q^\lambda = 2v^\lambda (\alpha + \bar{\alpha}). \quad (\text{E.39})$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu} Q^\nu &= 2v^\lambda (\alpha + \bar{\alpha}) \left(-\hat{t}^\lambda \hat{t}^\mu \hat{v}^\nu + \hat{z}^\lambda \hat{z}^\mu \hat{v}^\nu \right) \\ &\quad + 2v^\lambda (\alpha + \bar{\alpha}) \left(-\hat{x}^\lambda \hat{x}^\mu \hat{v}^\nu + \hat{y}^\lambda \hat{y}^\mu \hat{v}^\nu \right). \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Da equação (6.27), pode-se calcular $P^{\lambda\mu\nu}$. Com as equações acima, basta fazer uma mudança de índices nos termos de $P^{\lambda\mu\nu}$. Desse modo, poder-se-á obter

$$\begin{aligned} P^{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{8} \left\{ 4(\alpha + \bar{\alpha}) \left[v^\lambda \left(-\hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \right) + \hat{t}^\lambda \hat{t}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} - \hat{z}^\lambda \hat{z}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} \right] \right. \\ &\quad + 4v^\lambda \left(\bar{\alpha} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \alpha \hat{y}^\mu \hat{y}^\nu - 2\beta \hat{x}^{(\mu} \hat{y}^{\nu)} \right) \\ &\quad + \hat{x}^\lambda \left[4(\alpha - \bar{\alpha}) \hat{x}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} + 8\beta \hat{y}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} \right] \\ &\quad \left. + \hat{y}^\lambda \left[4(\bar{\alpha} - \alpha) \hat{y}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} + 8\beta \hat{x}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

Alguns termos acima podem ser manipulados. É possível mostrar que $\hat{t}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} = \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + \hat{z}^{(\mu} \hat{t}^{\nu)}$, bem como $\hat{z}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} = \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu + \hat{z}^{(\mu} \hat{t}^{\nu)}$. Logo, do primeiro termo, tem-se

$$\begin{aligned} v^\lambda \left(-\hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \right) + \hat{t}^\lambda \hat{t}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} - \hat{z}^\lambda \hat{z}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} &= -\cancel{\hat{t}^\lambda \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu} + \hat{t}^\lambda \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \\ &\quad - \hat{z}^\lambda \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + \cancel{\hat{z}^\lambda \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu} + \cancel{\hat{t}^\lambda \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu} + \hat{t}^\lambda \hat{z}^\mu \hat{t}^\nu + \hat{t}^\lambda \hat{z}^\nu \hat{t}^\mu - \cancel{\hat{z}^\lambda \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu} \\ &\quad - \hat{z}^\lambda \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu - \hat{z}^\lambda \hat{z}^\nu \hat{t}^\mu. \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

Logo, de (E.41) e (E.42), é possível chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} P^{\lambda\mu\nu} &= \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \left[v^\lambda \left(-\hat{t}^\mu \hat{t}^\nu + \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \right) + \hat{t}^\lambda \hat{t}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} - \hat{z}^\lambda \hat{z}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} \right] \\ &\quad + \frac{v^\lambda}{2} \left(\bar{\alpha} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \alpha \hat{y}^\mu \hat{y}^\nu - 2\beta \hat{x}^{(\mu} \hat{y}^{\nu)} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{x}^\lambda}{2} (\alpha - \bar{\alpha}) \hat{x}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} + \beta \hat{x}^\lambda \hat{y}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} \\ &\quad + \frac{\hat{y}^\lambda}{2} (\bar{\alpha} - \alpha) \hat{y}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)} + \beta \hat{y}^\lambda \hat{x}^{(\mu} \hat{v}^{\nu)}. \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

No cálculo de t^λ_ρ , há uma simplificação que pode ser feita. De (E.4), ρ se relaciona v^ρ , enquanto μ e ν com $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Com isso, ao fazer a distributiva $Q_{\rho\mu\nu}$ com $P^{\lambda\mu\nu}$, equação (E.43), pode-se usar $\hat{t} \cdot \hat{x} = \hat{t} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{x} = \hat{z} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{x} = v \cdot \hat{y} = 0$. Desse modo, o produto $Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu}$ será

$$Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu} = v_\rho \left(\alpha \hat{x}_\mu \hat{x}_\nu + \bar{\alpha} \hat{y}_\mu \hat{y}_\nu + \beta \hat{x}_\mu \hat{y}_\nu + \beta \hat{y}_\mu \hat{x}_\nu \right) \times v^\lambda \left(\bar{\alpha} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu + \alpha \hat{y}^\mu \hat{y}^\nu - \beta \hat{x}^\mu \hat{y}^\nu - \beta \hat{y}^\mu \hat{x}^\nu \right). \quad (\text{E.44})$$

Ao efetuar a distributiva e considerar os produtos escalares, chega-se a

$$Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu} = 2 \left(\alpha \bar{\alpha} - \beta^2 \right) v^\lambda v_\rho \quad (\text{E.45})$$

$$(\text{E.46})$$

Agora, é necessário analisar $\alpha \bar{\alpha}$ e β^2 . Das equações (6.85) e (6.85), pode-se obter

$$\alpha \bar{\alpha} = -\frac{1}{g c^2} \left(\dot{f}_1 g_1 \dot{g}_1 f_1 - \dot{f}_1 g_1 \dot{g}_2 f_2 - \dot{f}_2 g_2 \dot{g}_1 f_1 + \dot{f}_2 g_2 \dot{g}_2 f_2 \right), \quad (\text{E.47})$$

bem como

$$\beta^2 = -\frac{1}{g c^2} \left(\dot{g}_1 g_2 \dot{f}_1 f_2 - \dot{g}_1 g_2 \dot{f}_2 f_1 - \dot{g}_2 g_1 \dot{f}_1 f_2 + \dot{g}_2 g_1 \dot{f}_2 f_1 \right). \quad (\text{E.48})$$

Com isso, efetua-se $(\alpha \bar{\alpha} - \beta^2)$. Após algumas manipulações algébricas se obtém:

$$\alpha \bar{\alpha} - \beta^2 = \frac{1}{g c^2} \left(\dot{f}_1 \dot{g}_1 - \dot{g}_2 \dot{f}_2 \right) \left(g_2 f_2 - g_1 f_1 \right). \quad (\text{E.49})$$

Agora, nota-se que $(g_2 f_2 - g_1 f_1) = -(g_1 f_1 - g_2 f_2)$. Ciente do fato de que $\sqrt{-g} = g_1 f_1 - g_2 f_2$, chega-se então a

$$\alpha \bar{\alpha} - \beta^2 = \frac{\sqrt{-g}}{-g c^2} \left(\dot{f}_1 \dot{g}_1 - \dot{g}_2 \dot{f}_2 \right) = \frac{1}{c^2 \sqrt{-g}} \left(\dot{f}_1 \dot{g}_1 - \dot{g}_2 \dot{f}_2 \right). \quad (\text{E.50})$$

Portanto, o produto $Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu}$ será

$$Q_{\rho\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{c^2 \sqrt{-g}} \left(\dot{f}_1 \dot{g}_1 - \dot{g}_2 \dot{f}_2 \right) v^\lambda v_\rho. \quad (\text{E.51})$$

Por fim, é fácil ver que $Q_{\lambda\mu\nu}P^{\lambda\mu\nu} = 0$, pois $v^\lambda v_\lambda = 0$, bem como o produto de v com os demais vetores, conforme (6.79). Desse modo, o tensor de energia e momento do campo gravitacional será, de (E.36) e (E.51),

$$t^\lambda_\rho = -\frac{4k}{c^2 \sqrt{-g}} \left(\dot{f}_1 \dot{g}_1 - \dot{g}_2 \dot{f}_2 \right) v^\lambda v_\rho. \quad (\text{E.52})$$

E.3 Cálculo do tensor de energia e momento do espaço-tempo

Para realizar este cálculo, parte-se da equação:

$$\tau^\mu_\lambda = \frac{4k}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{\mu\nu} \right). \quad (\text{E.53})$$

O próximo passo é analisar a ação da derivada no termo em parênteses. De (E.22), tem-se

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \Xi_\lambda^{\mu\nu} \right) &= \left[\sqrt{-g} \left(-\bar{\alpha} v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} + \beta v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} \right) \hat{x}_\lambda + \sqrt{-g} \left(-\alpha v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]} + \beta v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]} \right) \hat{y}_\lambda \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-g} (\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

Uma vez que v , $\hat{t}$ e $\hat{z}$ são constantes, por uma questão de simplicidade, é válido considerar primeiramente a atuação da derivada no terceiro termo. Assim,

$$\partial_\nu \left[-(\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]} \sqrt{-g} \right] = -v_\lambda \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]} \partial_\nu \left[(\alpha + \bar{\alpha}) \sqrt{-g} \right]. \quad (\text{E.55})$$

Muito embora o termo $(\alpha + \bar{\alpha})$ já tenha sido explorado, é interessante analisá-lo novamente. De (6.85), segue que

$$\begin{aligned} (\alpha + \bar{\alpha}) &= \frac{1}{\sqrt{-g}c} \left(-\dot{f}_1 g_1 + \dot{f}_2 g_2 - \dot{g}_1 f_1 + \dot{g}_2 f_2 \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}c} \left(\dot{f}_1 g_1 + \dot{g}_1 f_1 - \dot{f}_2 g_2 - \dot{g}_2 f_2 \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}c} \frac{d}{du} (f_1 g_1 - f_2 g_2) \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

Desse modo, ao substituir o resultado anterior em $\partial_\nu [(\alpha + \bar{\alpha}) \sqrt{-g}]$, obtém-se

$$\partial_\nu \left[(\alpha + \bar{\alpha}) \sqrt{-g} \right] = -\frac{1}{c} \partial_\nu \left(\dot{\sqrt{-g}} \right), \quad (\text{E.57})$$

onde o ponto sobre $\sqrt{-g}$ indica a derivada com respeito a u . Agora, é útil fazer a seguinte consideração: seja $G(u) = \dot{\sqrt{-g}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \partial_\nu G(u) &= \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} = \frac{dG}{du} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (ct - z) \\ &= \frac{\dot{G}}{c} (\delta_\nu^0 - \delta_\nu^3) = -\frac{1}{c} \dot{G} v_\nu, \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

onde foi usado o fato de que $(\delta_\nu^0 - \delta_\nu^3) = -v_\nu$. Dessa forma,

$$\partial_\nu \left[(\alpha + \bar{\alpha}) \sqrt{-g} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{du^2} \left(\sqrt{-g} \right) v_\nu \quad (\text{E.59})$$

Logo, de (E.55) e (E.59), chega-se a

$$\partial_\nu \left[-(\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]} \sqrt{-g} \right] = -v_\lambda v_\nu \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]} \left[\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{du^2} \left(\sqrt{-g} \right) \right]. \quad (\text{E.60})$$

Para $v_\nu \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]}$, nota-se que

$$\begin{aligned} v_\nu \hat{t}^{[\mu} \hat{t}^{\nu]} &= \frac{1}{2} (v_\nu \hat{t}^\mu \hat{z}^\nu - v_\nu \hat{z}^\mu \hat{t}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{t}^\mu + \hat{z}^\mu) = \frac{1}{2} v^\mu. \end{aligned} \quad (\text{E.61})$$

Dessa forma,

$$\partial_\nu \left[-(\alpha + \bar{\alpha}) v_\lambda \hat{t}^{[\mu} \hat{z}^{\nu]} \sqrt{-g} \right] = -\frac{1}{2c^2} v_\lambda v^\mu \frac{d^2}{du^2} (\sqrt{-g}) \quad (\text{E.62})$$

que é o terceiro termo de (E.55). No lugar de explorar os demais termos dessa equação, é melhor analisar $\partial_\nu (\sqrt{-g} \hat{x}^\mu)$ e $\partial_\nu (\sqrt{-g} \hat{y}^\mu)$. A partir da equação (6.73) é possível obter

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} \hat{x}^\mu) = \partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(\frac{g_1}{\sqrt{-g}} \delta_1^\mu - \frac{g_2}{\sqrt{-g}} \delta_2^\mu \right) \right] = \partial_\nu (g_1 \delta_1^\mu - g_2 \delta_2^\mu). \quad (\text{E.63})$$

Logo,

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} \hat{x}^\mu) = -\frac{1}{c} (-\dot{g}_1 \delta_1^\mu - \dot{g}_2 \delta_2^\mu) v_\nu. \quad (\text{E.64})$$

E analogamente,

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} \hat{y}^\mu) = -\frac{1}{c} (-\dot{f}_2 \delta_1^\mu + \dot{f}_1 \delta_2^\mu) v_\nu \quad (\text{E.65})$$

Das definições de $\hat{x}^\mu$ e $\hat{y}^\mu$, tem-se que

$$\sqrt{-g} \hat{x}^\mu = g_1 \delta_1^\mu - g_2 \delta_2^\mu \quad \text{e} \quad \sqrt{-g} \hat{y}^\mu = -f_2 \delta_1^\mu - f_1 \delta_2^\mu, \quad (\text{E.66})$$

de tal forma que este resultado conduz a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ -f_2 & f_1 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \delta_1^\mu \\ \delta_2^\mu \end{pmatrix} = \sqrt{-g} \begin{pmatrix} \hat{x}^\mu \\ \hat{y}^\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{E.67})$$

Ao tomar o determinante da matriz M , obtém-se $\det \|M\| = g_1 f_1 - g_2 f_2 = \sqrt{-g}$. Como é sabido, a inversa de M é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{ab - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (\text{E.68})$$

Desse modo, se tem

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} f_1 & g_2 \\ f_2 & g_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ -f_2 & f_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.69})$$

Ao multiplicar (E.67) por M^{-1} , segue que

$$\begin{pmatrix} \delta_1^\mu \\ \delta_2^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & g_2 \\ f_2 & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}^\mu \\ \hat{y}^\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{E.70})$$

o que implica

$$\delta_1^\mu = f_1 \hat{x}^\mu + g_2 \hat{y}^\mu, \quad (\text{E.71})$$

$$\delta_2^\mu = f_2 \hat{x}^\mu + g_1 \hat{y}^\mu. \quad (\text{E.72})$$

Ao substituir (E.71) e (E.72) em (E.64), algumas manipulações algébricas possibilitam obter

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g} \hat{x}^\mu \right) = \sqrt{-g} (\bar{\alpha} \hat{x}^\mu - \beta \hat{y}^\mu) v_\nu. \quad (\text{E.73})$$

E similarmente,

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g} \hat{y}^\mu \right) = \sqrt{-g} (-\beta \hat{x}^\mu - \alpha \hat{y}^\mu) v_\nu. \quad (\text{E.74})$$

Desse modo, isso permite concluir que

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g} \hat{x}^\nu \right) = \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \hat{y}^\nu \right) = 0. \quad (\text{E.75})$$

Como v^μ é constante, ao analisar o termos de (E.54) quem envolvem $v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]}$ e $v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]}$, dos resultados anteriores, conclui-se que $\partial_\nu (\sqrt{-g} v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]}) = \partial_\nu (\sqrt{-g} v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]}) = 0$. Além disso, uma vez que $\bar{\alpha}$, β e α são funções de u , a partir (E.58), conclui-se que $\partial_\nu (G(u) v^{[\mu} \hat{x}^{\nu]}) = \partial_\nu (G(u) v^{[\mu} \hat{y}^{\nu]}) = 0$, devido à ortonormalidade dos vetores. Portanto, de (E.53), (E.54) e (E.62), o tensor de energia e momento do espaço-tempo será:

$$\tau^\mu{}_\lambda = -\frac{2k}{c^2 \sqrt{-g}} v_\lambda v^\mu \frac{d^2 \sqrt{-g}}{du^2}. \quad (\text{E.76})$$