

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO EM FÍSICA



Rejane Alves de Brito

Quantificações de Interferência em Sistemas Quânticos
Multipartidos

João Pessoa - PB

2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B862q Brito, Rejane Alves de.
Quantificações de interferência em sistemas
quânticos multipartidos / Rejane Alves de Brito. - João
Pessoa, 2021.
80 f. : il.

Orientação: Bertúlio de Lima Bernardo.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física quântica. 2. Interferência quântica. 3.
Correlações quântica. I. Bernardo, Bertúlio de Lima.
II. Título.

UFPB/BC

CDU 530.145(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado da aluna **Rejane Alves de Brito**,
candidata ao Título de Doutor em Física na Área
de Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos vinte e oito dias do mês de maio do ano de dois mil e vinte e um, às 09:00, reuniram-
2 se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar a
3 candidata ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Rejane**
4 **Alves de Brito**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores:
5 *Bertúlio de Lima Bernardo* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora,
6 *Alexandre da Silva Rosas* (UFPB), *Jesus Pavon Lopez* (UFPB), *André de Lima Moura*
7 (UFAL), *Fernando Roberto de Luna Parisio Filho* (UFPE). Dando início aos trabalhos,
8 o Prof. Bertúlio de Lima Bernardo comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A
9 seguir, passou a palavra para que a candidata fizesse, oralmente, a exposição do trabalho
10 de tese intitulado “*Quantificações de Interferência em Sistema Quânticos Multipartidos*”.
11 Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o
12 seguinte parecer: “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba
13 expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu,
14 Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da
15 Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **28 de maio de 2021**.

16 Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo

Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

PPGF/UFPB

Prof. Dr. Jesus Pavon Lopez

PPGF/UFPB

Prof. Dr. André de Lima Moura

UFAL

Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio

Filho

UFPE

17 Link da reunião

18 <https://meet.google.com/zcz-boqz-amq>

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a todas as pessoas que dedicam, ou dedicaram, suas vidas ao progresso da ciência. E, principalmente, aqueles que contribuíram para a minha formação até aqui.

Ao meu orientador, Professor Dr. Bertúlio de Lima Bernado, por sua paciência, humildade e dedicação. Por confiar na minha capacidade e me encorajar no caminho da ciência, que muitas vezes pode apresentar dificuldades, mas que é belo.

Aos meus colegas de estudo, pelas conversas, pelas dicas e pelos momentos divertidos. E ao corpo docente e discente do departamento de Física da UFPB.

A minha família.

E, por fim, ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Lista de Publicações

BRITO, R. A., and BERNARDO, B.L., Quantifying interference in multipartite quantum systems. **Phys. Lett. A** 384.24 (2020): 126611.

Sumário

Agradecimentos	1
Lista de Publicações	2
Lista de Figuras	6
Resumo	7
Abstract	8
1 Introdução	1
2 Descrição de um sistema quântico	6
2.0.1 Estados puros	7
2.0.2 Estados mistos	9
2.0.3 Sistemas compostos	11
2.0.4 Decomposição de Schmidt	12
3 Entropia e Informação Mútua	14
3.1 Entropia e informação mútua	14
3.1.1 Teoria da informação clássica	14
3.1.2 Teoria da informação quântica	15
3.1.3 Sistema de um qubit e a esfera de Bloch	18
4 Correlações quânticas e estados de Werner	21
4.1 Correlações quânticas e estados de Werner	21
4.1.1 Estados de Werner	21
4.1.2 Emaranhamento	22

	4
4.1.3	Discórdia quântica 25
4.1.4	Teorema de Bell e Teorema GHZ 30
4.1.5	Sistema tripartido: classificação de estados 34
4.1.6	Discórdia quântica global 34
5	Interferometrias clássica e quântica 39
5.1	Interferometrias clássica e quântica 39
5.1.1	Difração e Interferência 39
5.1.2	Interferência quântica de duas partículas 43
5.1.3	Quantificação da interferência quântica genuína entre dois qubits . . 45
5.1.4	Quantificação da interferência quântica genuína entre três qubits . . 50
6	Conclusões e perspectivas 56
6.1	Apêndice A 58
	Referências Bibliográficas 65

Lista de Figuras

3.1	Diagrama de Venn das entropias da informação para as variáveis X e Y , bem como, da entropia conjunta $H(X, Y)$ e da informação mútua (em azul).	16
3.2	Representação de um qubit como um vetor (em vermelho) na superfície da esfera de Bloch.	19
4.1	Emaranhamento de formação para um estado de Werner de dois qubits em função do parâmetro c	26
4.2	Discórdia quântica: medidas feitas utilizando um conjunto de projetores $\{\hat{\Pi}_k^A\}$, a partir do sistema A , computam apenas a parte $J(B : A)_{[\hat{\Pi}_k^A]}$ da informação mútua total $I(B : A)$ (área em azul). A área não alcançada por estas medidas representa a discórdia.	28
4.3	Discórdia quântica para o estado de Werner de dois qubits em função do parâmetro c [49].	30
4.4	Discórdia quântica global para um estado de Werner-GHZ em função do parâmetro c [50].	38
5.1	Difração por uma fenda: um feixe paralelo de partículas F é difratado através de uma fenda. A largura da fenda δz indica a precisão na posição de uma partícula ao longo do eixo z . Esta precisão está relacionada com a maior ou menor dispersão do momento vertical δp_z (em azul), através da relação de incerteza entre posição e momento linear. α indica o ângulo de dispersão máximo. Adaptado de [26].	40

- 5.2 Aparato fenda-dupla: um feixe F atravessa um anteparo contendo duas fendas, 1 e 2, separadas por uma distância d . Após percorrerem os caminhos r_1 e r_2 , os feixes são recombinados no ponto z de uma tela de detecção paralela ao anteparo, e que está a uma distância L do mesmo. Adaptado de [26]. 42
- 5.3 Uma fonte S gera um par de partículas, a e b , que são submetidas aos aparatos tipo fenda-dupla à esquerda e à direita, respectivamente. Após passarem por cada aparato, as partículas são detectadas nas telas S_A e S_B , nos pontos z_A e z_B 44
- 5.4 Diagrama do aparato apresentado na figura (5.3). O ângulo θ , bem como os parâmetros L e d são úteis para a determinação da densidade de probabilidade conjunta de detecção das partículas em S_A e S_B 46
- 5.5 Gráfico comparando a *interferência quântica genuína* com o emaranhamento de formação e a discórdia, para o estado de Werner de dois qubits, como função do parâmetro p . Podemos notar que tanto $\mathcal{I}_2^{(2)}$ como a discórdia são não-nulas para $0 \leq p \leq 1/3$, ou seja, mesmo quando o estado é separável. Todas as três correlações possuem valor 1 quando $p = 1$ 50
- 5.6 Ilustração de um sistema de três qubits: uma fonte S emite três partículas a , b e c . Posteriormente cada partícula é submetida a um aparato do tipo fenda-dupla. Após passarem pelos aparatos, tais partículas são detectadas nas telas S_A , S_B e S_C , que marcam suas posições nos pontos z_A , z_B e z_C , respectivamente. Investigando os comportamentos de interferência de uma única partícula, duas partículas e três partículas produzidas por este experimento, pode-se obter informações sobre a *interferência quântica genuína* entre três partículas. 51
- 5.7 Gráficos da interferência quântica $\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho}_W^{(GHZ)})$ e da discórdia quântica global para o estado Werner- GHZ , dados pela equação (5.24). Como podemos ver, ambos os quantificadores são não-nulos no intervalo $0 \leq p \leq 1/5$, para o qual o estado é separável [14, 70]. 55

Resumo

Através do formalismo de matriz densidade, analisamos o fenômeno de interferência quântica genuína em sistemas multipartidos. A caracterização e quantificação de correlações quânticas é de suma importância para melhor entender a teoria quântica, bem como para corretamente diferenciar correlações quânticas das correlações clássicas. Dentre as correlações quânticas, a que mais possui destaque é o emaranhamento, entretanto, não é de forma alguma a única. Além disso, quanto mais complexo o sistema, no que diz respeito ao número de constituintes e à dimensão do espaço de Hilbert que descreve os mesmos, mais tipos de correlações quânticas podem surgir. No que concerne a interferência quântica genuína de duas e três partículas, estudadas no decorrer deste trabalho, sua manifestação acontece quando se analisam as taxas de detecção conjunta das partículas constituintes. Neste caso, tem existido um consenso que, para que este tipo de fenômeno seja observado, é necessária a presença de emaranhamento no sistema. No entanto, como demonstraremos ao final deste trabalho, emaranhamento não é uma exigência para que se verifique esses tipos especiais de interferência, conforme a abordagem apresentada. Além disso, verificamos que os quantificadores de interferência propostos aqui também servem para quantificar emaranhamento, desde que aplicados aos casos de estados quânticos puros.

Palavras-chave: interferência quântica, correlações quânticas, sistemas bipartidos, sistemas tripartidos.

Abstract

By using the density matrix formalism, we analyze the phenomenon of genuine quantum interference for multipartite systems. The characterization and quantification of quantum correlations is of paramount importance to better understand quantum theory, as well as to correctly differentiate quantum correlations from classical ones. Among the quantum correlations, the most prominent one is entanglement, however, it is by no means the only one. Furthermore, the more complex the system, with regard to the number of constituents and the dimension of the Hilbert space that describes them, more types of quantum correlations can arise. Regarding the genuine quantum interference of two and three particles, studied in the course of this work, its manifestation occurs when analyzing the rates of joint detection of the constituent particles. In this case, there has been a consensus that, for this type of phenomenon to be observed, entanglement is necessary. However, as we will demonstrate at the end of this work, entanglement is not a requirement to verify these special types of interference, according to the approach presented here. In addition, we found that the interference quantifiers proposed here also serve to quantify entanglement, as long as they are applied to pure states.

Keywords: quantum interference, quantum correlations, bipartite systems, tripartite systems.

Capítulo 1

Introdução

“Every one of us is, in the cosmic perspective, precious. If a human disagrees with you, let him live. In a hundred billion galaxies, you will not find another.”

Carl Sagan

No que diz respeito à natureza fenomenológica e constitutiva da luz, devido ao comportamento ambivalente da mesma nas mais diversas situações experimentais, a disputa entre as teorias ondulatória e corpuscular é bastante conhecida. Hoje sabe-se que a luz apresenta um comportamento dual, partícula e onda, a depender da situação experimental analisada. Após a introdução da teoria de ondas de matéria por Louis de Broglie, esta dualidade comportamental passou a não se limitar somente à luz, mas também se estendeu a outros constituintes da matéria, como elétrons, nêutrons, átomos e até mesmo moléculas, os quais podemos comumente pensar classicamente como partículas, mas que apresentam comportamento de onda nas condições experimentais adequadas.

A teoria física que descreve atualmente este caráter dual dos constituintes da matéria é a mecânica quântica, muitas vezes também chamada de mecânica ondulatória, e a natureza ondulatória desta teoria pode ser revelada através de experimentos de interferência quântica. Os estudos de interferência podem se referir a um conjunto amplo de conceitos que existem tanto na física clássica, como por exemplo, a interferência espacial entre ondas de um fluido, ou entre ondas eletromagnéticas; quanto na mecânica quântica, como por exemplo, a situação de interferência espacial que advém da superposição

entre dois caminhos disponíveis para uma partícula atravessar um anteparo; como no interferômetro de Young. Os primeiros experimentos de interferência envolvendo coerência espacial, foram conduzidos e reportados originalmente por Thomas Young, já no início do século XIX, com feixes de luz (fótons), que eram divididos ao passarem por duas fendas estreitas, e depois recombinados, formando um padrão de faixas claras e escuras [1]. Tais experimentos encontram explicações tanto na teoria eletromagnética clássica, através do conceito de superposição espacial de ondas do campo elétrico, quanto na mecânica quântica, onde o princípio da superposição dos estados de uma partícula passar por cada uma das fendas é que surge para a descrição do fenômeno. De fato, a natureza quântica do campo eletromagnético torna as descrições clássica e quântica equivalentes [2].

Porém, este não é o único tipo de interferência quântica acarretada pelo princípio da superposição de estados quânticos. Nas palavras de Paul Dirac sobre interferência de fótons, “cada fóton...interfere apenas consigo mesmo. Interferência entre diferentes fótons nunca ocorre”[3]. Embora esta primeira frase logo acima esteja correta, a segunda não está completamente correta, pois, quando consideramos duas ou mais partículas, por exemplo, surgem diversos efeitos de interferência conjunta que, ao contrário da interferência “de uma única partícula”, não possuem análogos clássicos.

Nesse sentido, no final dos anos 1980, deu-se início à realização de uma série de experimentos de interferometria de duas partículas. Três grupos principais, encabeçados por Chung Ki Hong, Zhe Yu Ou e Leonard Mandel [4]; Heidi Fearn e Rodney Loudon [5]; e John G. Rarity e Paul R. Tapster [6] investigaram experimentalmente as detecções conjuntas de pares de fótons emaranhados, e reportaram alguns efeitos de *interferência de dois fótons*, sendo que neste caso o padrão de interferência foi observado na taxa de coincidência de detecção dos fótons. Um dos efeitos descobertos durante essa série de experimentos é o efeito Hong-Ou-Mandel (HOM) [4], onde dois fótons que chegam exatamente ao mesmo tempo a um divisor de feixe 50/50, tem seus pacotes de onda superpostos e emergem ambos sempre pela mesma porta de saída.

Até aqui, discorremos um pouco a respeito da dualidade partícula-onda, de alguns fenômenos de interferência de uma e duas partículas e seus papéis nas investigações experimentais sobre a mecânica quântica. Outros dois conceitos de caráter quântico, e que também podem ser associados ao fenômeno de interferência de duas partículas, é o

emaranhamento, ou inseparabilidade de sistemas quânticos, e não-localidade. O primeiro conceito foi primeiramente abordado por Schrodinger. O segundo conceito surgiu a partir da publicação do trabalho de Albert Einstein, Boris Podolski e Nathan Rosen (EPR) em 1935, que questionavam contradições entre as previsões da mecânica quântica e conceitos primordiais para a física clássica, como o determinismo das grandezas físicas antes da medição, e o princípio da localidade, advindo da teoria da relatividade restrita [7]. Nesse trabalho, eles argumentavam que a mecânica quântica (M.Q.) era uma teoria incompleta para descrever o realismo e a localidade, que acreditava-se serem duas propriedades inquestionáveis da natureza, faltando à M.Q. um conjunto de variáveis suplementares, o que veio a ser chamado de variáveis ocultas locais: um conjunto de mvariáveis que existiam, mas não estavam acessíveis à M.Q., por motivos de limitação experimental e/ou teórica.

Em 1964, John Bell publicou um trabalho contendo previsões estatísticas para uma teoria de variáveis locais [8]. A desigualdade de Bell, como ficou conhecida esta formulação matemática, foi aprimorada por John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, e Richard Holt, em um trabalho de 1969, e ficou conhecida como desigualdade CHSH [9]. Teoricamente, a mecânica quântica prevê a violação máxima da desigualdade CHSH para estados ditos maximamente emaranhados, os chamados, estados de Bell. Além disso, há estdos não-maximamente emaranhados que violam a desigualdade CHSH, mas não ocorre máxima violação.

No campo experimental, nos anos 1970 foram conduzidos os primeiros testes de violação desigualdade de Bell, os chamados testes de Bell, como por exemplo por Stuart J. Freedman e John Clauser [10]. Posteriormente, testes mais significativos foram realizados por Alain Aspect e colaboradores, nos anos 1980 [11]. Ainda no que diz respeito ao emaranhamento, quando tratamos de sistemas de 3 partes (tripartidos), os mesmos podem apresentar tipos inequivalentes de estados emaranhados, como por exemplo: os estados do tipo W e GHZ [14]. Já em 1989, foi publicado por Daniel Greenberger, Michael Horne e Anton Zeilinger, o teorema GHZ, demonstrando contradições diretas entre as previsões da mecânica quântica e as restrições impostas por uma teoria de variáveis locais, para medidas realizadas em um sistema de três qubits. No caso do teorema GHZ, não foi preciso recorrer à formulação de uma desigualdade, em contraste com o que Bell havia

feito para um sistema de dois qubits [15, 16].

A não-localidade está presente em sistemas emaranhados, e é uma característica de sistemas quânticos, sendo que durante algum tempo pensou-se que esta característica era advinda puramente do emaranhamento entre sistemas. No entanto, isto demonstrou-se válido especificamente para o caso de estados puros de sistemas construídos por duas partes (sistemas bipartidos, não-localidade de Bell). Neste sentido, no início dos anos 2000, surgiu o conceito de discórdia quântica, introduzida por Harold Ollivier e Wojciech H. Zurek [17]; e, independentemente, por L. Henderson and Vlatko Vedral [18]. Este conceito se baseia nas ideias de entropia da informação quântica, a entropia de von Neumann, e de haver, para alguns sistemas, a impossibilidade de acessar algumas correlações quânticas através de medições locais em um dos subsistemas. A discórdia quântica (D.Q.) pode existir mesmo para sistemas não-emaranhados. Podemos, por exemplo, encontrar D.Q. não-nula para uma família de estados mistos (conhecidos como estados de Werner), abaixo do limite de separabilidade dos mesmos.

Para estados quânticos mistos, conceitos como inseparabilidade (emaranhamento) e discórdia quântica não são equivalentes. Além disto, os limites em que a separabilidade ocorre dependem do número de componentes, bem como da dimensão do espaço de Hilbert de cada um dos subsistemas [19]. Sendo assim, vemos que a classificação e a quantificação de correlações quânticas em sistemas mistos é um problema que requer um tratamento matemático-estatístico mais geral que para sistemas quânticos puros. Com este intuito, optamos por considerar o formalismo de operador densidade, que permite um estudo mais completo, pois serve para descrever estados quânticos arbitrários. Além disso, qualquer estado real em um laboratório se apresenta como uma mistura.

A caracterização das correlações quânticas é crucial para o desenvolvimento de novas tecnologias quânticas, como também para compreender o quanto e como a mecânica quântica difere da física clássica. Nesta tese estudamos sistematicamente a interferência quântica de duas e três partículas, que individualmente representam qubits. Para tal, faremos uso de um conjunto de aparatos do tipo dupla fenda de Young, nos quais cada uma das partículas é submetida. Neste contexto, procuramos identificar *interferências quânticas genuínas* para esses sistemas, que como veremos, é um tipo específico de correlação

quântica, diferente das já conhecidas na literatura.

Como será demonstrado no decorrer deste trabalho, construímos quantificadores de interferência de duas e três partículas, para cada uma das duas situações experimentais especificadas no parágrafo anterior, baseando-nos na ideia de decomposição de Fourier para funções oscilatórias. Foi possível ainda, analisar os casos dos estados mistos de Werner de dois e três qubits, com medidas de correlações quânticas disponíveis na literatura, tais como: emaranhamento de formação e discórdia quântica para o caso de dois qubits, discórdia quântica para três qubits e discórdia quântica global para dois qutrits. A princípio, esperávamos quantificar teoricamente os efeitos de interferência advindos de estados emaranhados, para cada um destes sistemas. Entretanto, a proposta de quantificação aqui apresentada, acabou resultando em um outro tipo de quantificação, que difere de emaranhamento e de discórdia quântica.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no capítulo II faremos uma breve descrição de um sistema quântico puro, e uma introdução do formalismo de operador densidade que serve para tratar sistemas de modo mais generalizado, e a descrição de sistemas quânticos compostos por meio deste formalismo. No capítulo III vamos introduzir brevemente os conceitos de entropia da informação clássica e entropia da informação quântica, este último sendo um conceito chave para a definição de medidas como o emaranhamento de formação e as formas de discórdia quântica utilizadas no decorrer deste trabalho. No capítulo IV faremos uma recapitulação do famoso paradoxo EPR, como também discorreremos um pouco acerca do teorema GHZ. No capítulo V, vamos fazer um relato dos pontos de vista da mecânica quântica para o experimento de difração por uma fenda, associando-o ao princípio da incerteza; bem como do experimento da dupla-fenda. Nesse capítulo faremos também um breve relato sobre interferência quântica de duas ou mais partículas, no contexto da nossa proposição experimental. Por fim, apresentaremos a nossa proposta para a quantificação de interferência genuína entre duas a três partículas. O capítulo VI será dedicado às conclusões.

Capítulo 2

Descrição de um sistema quântico

“Hence, an ‘observation’ should not be seen as a subjective experience of an individual observer, but as a physical interaction between a microscopic object and a (macroscopic) measuring instrument, by which the measuring instrument is brought into a final state representing the measurement result.”.

W.M. De Muynck.

Classicamente, quando mencionamos o estado de um sistema, este está intuitivamente atrelado às propriedades físicas do sistema. Dito de outro modo, quando falamos, por exemplo, da posição de um objeto, estamos atrelando um símbolo a um valor numérico em uma correspondência direta, um para um. Existe, portanto, uma correspondência direta entre as propriedades físicas do sistema e suas representações formais na teoria.

Na mecânica quântica esta correspondência direta se perde, dando lugar ao conceito um pouco mais abstrato de estado quântico, que pode ser representado por um vetor de estado, e este vetor pertence a um espaço abstrato, o espaço de Hilbert. A conexão entre o estado quântico e quantidades físicas é feita através de medidas de observáveis, que são representados por operadores hermitianos neste espaço de Hilbert. O ato de medição, então, projeta o estado quântico em um dos auto-estados do operador que está sendo medido. A probabilidade de obtenção de cada auto-estado é dada pela regra de Born [20].

2.0.1 Estados puros

Na mecânica quântica, um estado quântico é dito *puro* se pudermos escrevê-lo na forma de um vetor de estado, utilizando a notação de Dirac $|\Psi\rangle$, pertencente a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão n .

Axioma 1: A cada instante de tempo t , o estado de um sistema quântico é descrito em termos de um vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ pertencente a um espaço de estados $\mathcal{H}$.

Assumindo que existe uma base completa para o espaço $\mathcal{H}$, podemos expressar o estado $|\Psi\rangle$ como uma combinação linear desses estados base $\{|\phi_i\rangle\}$, da seguinte forma,

$$|\Psi\rangle = \sum_i^n c_i |\phi_i\rangle, \quad (2.1)$$

que é chamada de superposição coerente dos estados base. O termo coerência está relacionado à capacidade do estado quântico, quando decomposto da forma (2.1), apresentar o fenômeno de interferência quântica.

Quando projetamos o estado quântico $|\Psi\rangle$ em um dos estados da base, digamos $|\phi_j\rangle$, a projeção, definida pelo produto interno, $\langle\phi_j|\Psi\rangle = c_j$, nos fornece o coeficiente $c_j \in \mathbb{C}$, que é a amplitude de probabilidade associada ao estado base $|\phi_j\rangle$ da base $\{|\phi_i\rangle\}$.

Axioma 2: para o caso de um espaço de Hilbert discreto, definimos a probabilidade P_j do estado $|\Psi\rangle$ ser encontrado no estado $|\phi_j\rangle$ como

$$P_j \equiv |c_j|^2.$$

Quando projetamos o estado quântico $|\Psi\rangle$ em um estado pertencente a uma base de estados contínua, digamos $|\vec{r}\rangle$ pertencente à base dos auto-estados de posição, temos $\langle\vec{r}|\Psi\rangle \equiv \psi(\vec{r})$, que é uma função de valor complexo, chamada *função de onda* no espaço das posições. A função de onda pode ser interpretada como uma amplitude de probabilidade de detecção de uma partícula em um ponto $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Definimos a densidade de probabilidade de encontrar a partícula no ponto $\vec{r}$ do espaço como

$$|\psi(\vec{r})|^2 \equiv p(\vec{r}).$$

Então, a probabilidade do sistema se encontrar entre $|\vec{r}\rangle$ e $|\vec{r} + d\vec{r}\rangle$ é dada por

$$|\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r},$$

de maneira que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1.$$

Axioma 3: A evolução temporal para um estado puro $|\Psi\rangle$ regradada pela equação de Schrödinger, que é a base da descrição dos sistemas quânticos não-relativísticos,

$$\hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt}. \quad (2.2)$$

Neste caso, $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano, que, de modo geral descreve o sistema quântico fechado. Esta evolução é linear e unitária, de tal modo que $\hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle = |\Psi(t)\rangle$, onde $|\Psi(0)\rangle$ é o estado inicial do sistema e $\hat{U}(t)$ é um operador unitário, tal que $\hat{U}^\dagger(t) = \hat{U}^{-1}(t)$ [21].

Axioma 4: O valor de um observável físico genérico O está associado a um operador linear hermitiano $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$, que atua no espaço de Hilbert do sistema. Os possíveis resultados de uma medição de um operador são os auto-valores do operador, que por sua vez são números reais [21].

Assim como os estados, os operadores vinculados a observáveis podem ser representados utilizando-se uma base. Por exemplo, o operador $\hat{O}$ associado a um observável pode ser representado na base de seus auto-estados $\{|o_i\rangle\}$

$$\hat{O} = \sum_i o_i |o_i\rangle \langle o_i| = \sum_i o_i \hat{P}_i, \quad (2.3)$$

onde $\hat{P}_i \equiv |o_i\rangle \langle o_i|$. O valor médio ou valor esperado de um observável $\hat{O}$ sobre um estado puro $|\Psi\rangle$ é definido como

$$\langle \hat{O} \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle. \quad (2.4)$$

Podemos ainda definir o desvio padrão sobre um observável $\hat{O}$ como

$$\Delta \hat{O} \equiv \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}. \quad (2.5)$$

A relação de incerteza estabelece que não é possível medir simultaneamente, com precisão maior que um certo valor, duas variáveis conjugadas, como por exemplo, a posição de uma partícula ao longo de uma direção e o momento conjugado. Deste modo, o produto dos respectivos desvios padrão dos dois observáveis conjugados será sempre maior ou igual a um valor limite, por exemplo,

$$\Delta\hat{z}\Delta\hat{p}_z \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.6)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck. A equação acima pode ser lida estatisticamente como: se em um experimento, o momento de uma partícula for medido com precisão $\Delta\hat{p}_z$, não é possível medir a posição ao longo do eixo z , com precisão maior que $\Delta\hat{z} = \hbar/\Delta\hat{p}_z$ [22]. Um exemplo simples de aplicação da relação de incerteza é na descrição quântica da difração de um feixe de partículas que passa por uma fenda estreita. Quanto mais estreita é a fenda, maior será a precisão sobre a localização de uma partícula com respeito ao eixo do anteparo. Deste modo o $\Delta\hat{z}$ passa a ser pequeno, e para que a relação dada em (2.6) seja satisfeita, a incerteza do momento conjugado ao longo eixo z tende a aumentar. Assim, ocorre o espalhamento do feixe de fótons, criando o processo de difração [22].

Como vimos, a evolução de um sistema quântico puro se dá através da equação de Schrödinger, que também pode ser descrita por meio da aplicação de uma transformação unitária sobre o vetor estado. Entretanto, quando uma medida quântica é realizada, a regra de evolução temporal do axioma 4 não se aplica, sendo necessária a introdução de um novo axioma, exclusivamente para as medidas quânticas [23].

Axioma 5: Medidas quânticas projetivas são descritas por uma coleção de operadores uni-dimensionais, $\{\hat{M}_m\}$, tais que, $\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{I}$. Se o estado do sistema antes da medição for $|\Psi\rangle$, a probabilidade de obtenção do resultado m é

$$p(m) = \langle \Psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \Psi \rangle. \quad (2.7)$$

O estado do sistema será modificado pela medida como $|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle$, onde

$$|\Psi'\rangle \equiv \frac{\hat{M}_m |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \Psi \rangle}}. \quad (2.8)$$

2.0.2 Estados mistos

Em alguns casos, o conjunto de partículas que compõe o sistemas não se encontra um estado quântico puro. Nestes casos, descrevemos o sistema em termos de uma mistura

de vários estados puros, formando um estado misto. O estado misto de um sistema quântico é, então, dado em termos de um conjunto de estados puros $|\psi_i\rangle$, cada um destes com uma respectiva probabilidade clássica de ocorrência p_i ,

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^l p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| = \sum_{i=1}^l p_i \hat{\Pi}_i, \quad (2.9)$$

onde $\hat{\Pi}_i \equiv |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|$ é um projetor uni-dimensional, e $0 \leq p_i \leq 1$ com $\sum_i^l p_i = 1$, e l é a quantidade de frações populacionais que não precisa, necessariamente, coincidir com a dimensionalidade d do espaço de Hilbert, já que os estados correspondentes a cada fração não necessariamente formam uma base entre si. Vale ressaltar ainda que esta decomposição não é única, já que dado um estado misto, temos infinitas matrizes densidade capazes de representá-lo indistintamente.

Além disso, o operador densidade é positivo semi-definido, o que significa que, o valor médio de $\hat{\rho}$ com relação a um estado quântico arbitrário $|\Phi\rangle$ fornece sempre um número real não-negativo

$$\langle \Phi | \hat{\rho} | \Phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \Psi_i | \Phi \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.10)$$

No caso especial em que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, recaímos em uma situação de estado puro. Com base na equação (2.1), o mesmo pode ser representado na forma de operador densidade da forma,

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j^* |\phi_i\rangle \langle \phi_j|. \quad (2.11)$$

Os termos $c_i c_j^*$, com $i \neq j$, são termos fora da diagonal principal de $\hat{\rho}$ que representam a existência de coerência entre diferentes vetores da base; são também chamados termos de interferência quântica na base $\{|\phi_i\rangle\}$. Por essa razão, embora exista uma base de estados para a qual o operador densidade tenha a forma diagonal, isto não significa que o sistema em questão não tenha propriedades quânticas de interferência, já que em outras bases, os termos fora da diagonal principal aparecem. De fato, a coerência quântica é uma propriedade cuja manifestação é dependente da base acessada no experimento em questão.

Então, concluímos que estados puros são caracterizados como todos os constituintes descritos pelo vetor de estado na notação de Dirac, $|\Psi\rangle$, enquanto que estados mistos devem ser descritos em termos do operador densidade $\hat{\rho}$. Para que o operador densidade $\hat{\rho}$

possua interpretação física, ele deve obedecer às seguintes restrições:

1) o traço de $\hat{\rho}$ deve ser unitário: $Tr[\hat{\rho}] = 1$.

2) o operador é positivo semi-definido: $\langle \Phi | \hat{\rho} | \Phi \rangle \geq 0$, para qualquer $|\Phi\rangle$ pertencente ao espaço de Hilbert do sistema.

Para um estado quântico arbitrário $\hat{\rho}$, o valor esperado de um observável $\hat{O}$ é dado por

$$\hat{O} \equiv Tr[\hat{\rho}\hat{O}]. \quad (2.12)$$

Temos também que a evolução temporal para um estado arbitrário de um sistema isolado, se dá por meio da equação de Liouville-von Neumann,

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] = i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt}, \quad (2.13)$$

onde $[\hat{H}, \hat{\rho}]$ é o comutador entre $\hat{H}$ e $\hat{\rho}$. Esta é uma generalização da equação de Schrödinger para estados arbitrários, isto é, puros e mistos [24].

O postulado da medida, dado pela equação (2.8), pode ser expandido para a situação em que temos um operador densidade. Neste caso, temos como possível resultado de uma medida, o valor m , e o estado do sistema após a medição será $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_m$, com probabilidade $p(m)$ de obter o resultado m dada por

$$p(m) = Tr(\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \hat{\rho}). \quad (2.14)$$

Se o resultado desta medida projetiva não foi revelado, devemos considerar que o estado após a medida é dado pela seguinte soma de estados mistos [25, 26],

$$\Phi\{\hat{\rho}\} = \sum_m p(m) \hat{\rho}_m. \quad (2.15)$$

2.0.3 Sistemas compostos

Sistemas compostos são aqueles constituídos por dois ou mais objetos quânticos que podem ser acessados separadamente, por meio de *operações locais*, ou ainda, quando há dois ou mais graus de liberdade independentes para uma mesma partícula. No caso de um sistema quântico, o espaço de Hilbert que descreverá a composição é dado em termos produto tensorial entre os espaços de Hilbert individuais.

Traço parcial e operador densidade reduzido

Para um sistema constituído por duas partes A e B , também chamado *bipartido*, associados a espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente, o espaço de Hilbert total será dado pelo produto tensorial entre os espaços individuais $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O operador densidade que descreverá o sistema geral será designado por $\hat{\rho}$. No caso em que estamos interessados em apenas uma das partes do sistema, digamos A , a mesma será descrita pelo operador densidade reduzido,

$$\hat{\rho}_A = Tr_B[\hat{\rho}], \quad (2.16)$$

onde Tr_B é o traço parcial sobre o subsistema B . O operador $\hat{\rho}_A$ contém toda informação que pode ser extraída por um observador que faz medições no sistema A .

Para um sistema constituído por três partes (*tripartido*) A , B e C , temos, similarmemente, que o espaço de Hilbert será dado pelo produto tensorial dos espaços de cada parte ou subsistema, na forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$. Neste caso, o operador densidade reduzido para o subsistema A será

$$\hat{\rho}_A = Tr_{BC}[\hat{\rho}_{ABC}]. \quad (2.17)$$

Um cálculo similar pode ser feito para a matriz densidade reduzida dos outros subsistemas [20].

2.0.4 Decomposição de Schmidt

Dado um sistema quântico bipartido, descrito pelo espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, cujas respectivas dimensões são n e m para $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, podemos escrever um estado puro na forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} |a_i\rangle |b_j\rangle, \quad (2.18)$$

onde $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$ são bases completas, pertencentes a $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente.

Para qualquer estado puro $|\Psi\rangle$, de um sistema bipartido, existem as bases $|\tilde{a}_i\rangle$ e $|\tilde{b}_i\rangle$, para $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente, onde podemos decompor o estado na forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i |\tilde{a}_i\rangle |\tilde{b}_i\rangle, \quad (2.19)$$

onde os coeficientes λ_i são não-negativos, chamados coeficientes de Schmidt, para os quais vale $\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 = 1$. Esta é a chamada decomposição de Schmidt para estados puros ou decomposição bi-ortornormal [25].

Capítulo 3

Entropia e Informação Mútua

“ Information handling is limited by the laws of physics and the number of parts available in the universe; the laws of physics are, in turn, limited by the range of information processing available. ”

Rolf Landauer.

3.1 Entropia e informação mútua

Durante o século XX houve uma verdadeira revolução na maneira como se enxergava o conceito de informação. Em particular, como veremos neste capítulo, Shannon formulou a ideia de que a informação desconhecida de um sistema probabilístico é medida em termos da entropia da distribuição de probabilidade [27].

3.1.1 Teoria da informação clássica

Classicamente, a entropia da informação foi introduzida por Claude Shannon em 1948 [28], que descreve a quantidade de informação associada a um conjunto de probabilidades associadas a uma variável aleatória. A ideia inicial de Shannon era converter qualquer informação física em uma sequência de 0 e 1, possibilitando que a mesma fosse enviada através de um fio. A quantidade de informação enviada pode ser calculada em termos da “desordem” da sequência, isto é, da entropia da sequência. Seja a variável aleatória discreta X , a qual temos associados os resultados $x_1, x_2, \dots, x_n$, cada um com as

respectivas probabilidades de ocorrência $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$. Define-se a entropia de X como

$$H(X) \equiv - \sum_{j=1}^n p(x_j) \log_2 p(x_j). \quad (3.1)$$

Como é associada à incerteza sobre o resultado de uma variável aleatória, esta quantidade tem valor nulo no caso de um evento com cem por cento de chance de ocorrer uma das possibilidades. Além disso, a unidade de medida de da entropia de Shannon é o *bit*. Se tivermos $n = 2^a$ resultados possíveis, o valor máximo assumindo por $H(X)$ é *a bits*, que é o comprimento da sequência de dígitos binários.

Ainda é possível definir, a partir da entropia da informação, o conceito de informação mútua para um sistema constituído de duas partes. Sejam duas variáveis aleatórias, X e Y , as quais podemos, além de associar as respectivas distribuições de probabilidades individuais, P_X e P_Y , uma distribuição de probabilidade conjunta $P_{XY}(x, y)$. A informação mútua é definida por:

$$I(X : Y) \equiv H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (3.2)$$

onde $H(X)$, $H(Y)$ e $H(X, Y)$ estão associada às distribuições $P_X(x)$, $P_Y(y)$ e $P_{XY}(x, y)$, respectivamente [28].

Utilizando o teorema de Bayes, podemos escrever a informação mútua em termos da entropia condicional $H(X|Y)$,

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y). \quad (3.3)$$

Ao ser escrita desta maneira, associamos o conceito de informação desconhecida, proveniente da entropia de Shannon, à informação mútua. Ela representa o quanto é possível conhecer de um subsistema, a partir de informações que possuímos sobre o outro. O diagrama de Venn na figura 4.3 ilustra a relação entre as entropias da informação das distribuições de probabilidade para X e Y : cada círculo completo representa a entropia da informação de cada variável (X ou Y); enquanto que, cada meia lua representa a entropia condicional de uma variável, dado que a outra é conhecida. A região intersecção entre os círculos (em azul) representa a informação mútua.

3.1.2 Teoria da informação quântica

No caso de um sistema quântico, a entropia de Shannon deve dar lugar à entropia de von Neumann, que foi introduzida em 1927, pelo matemático John von Neumann, e

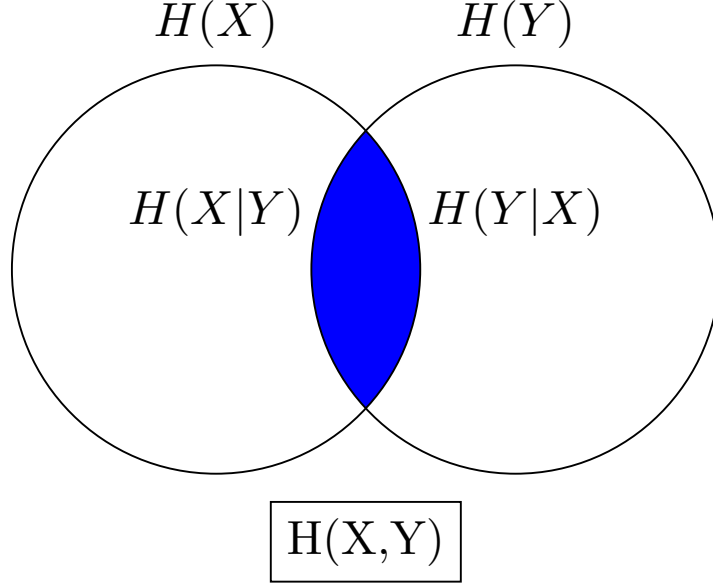


Figura 3.1: Diagrama de Venn das entropias da informação para as variáveis X e Y , bem como, da entropia conjunta $H(X,Y)$ e da informação mútua (em azul).

pode ser entendida como uma generalização do caso clássico da entropia de Shannon, para o caso do operador densidade $\hat{\rho}$, da seguinte forma

$$S(\hat{\rho}) \equiv -Tr[\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}] \equiv - \sum_i \kappa_i \log_2 \kappa_i, \quad (3.4)$$

onde κ_i são os auto-valores de $\hat{\rho}$ [25]. Neste caso, o operador densidade $\hat{\rho}$ funciona como uma distribuição de probabilidade conjunta. Desta maneira vemos que, no caso em que todos os $\kappa_i = 0$, exceto por um, temos $S(\hat{\rho}) = 0$. Isto implica que um estado puro é caracterizado por uma entropia de von Neumann nula. No caso extremo oposto, temos um estado dito maximamente misto, e para descrevê-lo precisamos de N estados puros $|\psi_i\rangle$, com $i = 1, 2, \dots, N$, com iguais probabilidades de ocorrência $p_i = 1/N$. Temos, então, que $S(\hat{\rho}) = \log_2 N$, que é o valor máximo para a entropia de von Neumann para um sistema com dimensão N .

Esta definição de entropia vai ao encontro da noção clássica de entropia da informação, onde o conhecimento máximo de um sistema resulta em entropia nula. No caso quântico este conhecimento máximo se reflete na descrição do sistema por um único estado puro, enquanto que o mínimo de conhecimento se dá quando temos uma mistura

equipartida de estados ortogonais $|\psi_i\rangle$, com $i = 1, 2, \dots, N$. Qualquer estado intermediário é dito parcialmente misto e sua entropia não excede a entropia máxima de von Neumann [29].

Para um sistema bipartido, a entropia de von Neumann pode ser usada para definir a informação mútua entre as partes A e B . Se o operador densidade total do sistema é dado por $\hat{\rho}$, temos

$$I(\hat{\rho}) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}), \quad (3.5)$$

onde $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}]$ e $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A[\hat{\rho}]$ são os operadores densidade reduzidos das partes A e B , que são análogos quânticos das distribuições de probabilidade para cada subsistema. Por sua vez, $S(\hat{\rho}_M) = -\text{Tr}[\hat{\rho}_M \log_2 \hat{\rho}_M]$, com $M = A, B$, são as respectivas entropias de von Neumann para A e B . Nesta fórmula, $S(\hat{\rho}_A)$ e $S(\hat{\rho}_B)$ representam as incertezas de A e B quando tratados separadamente, enquanto $S(\hat{\rho})$ representa a incerteza do sistema combinado AB , descrito pela matriz $\hat{\rho}$.

No caso de um estado quântico puro, $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$, para o qual a entropia de von Neumann conjunta é nula, $S(\hat{\rho}) = 0$, é possível fazer a decomposição de Schmidt dada pela equação (2.19), de modo que, a entropia marginal, $S(\hat{\rho}_A)$, de A é igual à entropia marginal de B . Assim, a informação mútua quântica será dada por:

$$I(\hat{\rho}) = 2S(\hat{\rho}_A), \quad (3.6)$$

ou seja, para um estado bipartido puro, a informação mútua quântica é duas vezes maior que a entropia de cada subsistema [29]. Como veremos no capítulo seguinte, a entropia marginal tem um papel fundamental como medida de emaranhamento em sistemas bipartidos.

Como salientado parcialmente acima, a entropia de von Neumann obedece a algumas regras, as quais vamos listar aqui:

- $S(\hat{\rho}) \geq 0$, não-negatividade;
- $\sum_i p_i S(\hat{\rho}_i) \leq S(\sum_i p_i \hat{\rho}_i)$, concavidade;
- Se um sistema bipartido AB se encontrar em estado puro, então $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B)$;

- Suponha a distribuição de probabilidade $\vec{p} = (p_1, \dots, p_j, \dots, p_n)$, e que $\hat{\Pi}_j^A = |a_j\rangle\langle a_j|$ são projetores de estados ortornormais que formam uma base completa para o sistema A e $\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_j^A}$ é um conjunto de operadores densidade para o sistema B , então temos

$$S\left(\sum_j p_j \hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_j^A} |a_j\rangle\langle a_j|\right) = H(\vec{p}) + \sum_j p_j S(\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_j^A}), \quad (3.7)$$

onde $H(\vec{p})$ é a entropia de Shannon da distribuição de probabilidades dada pelo vetor $\vec{p} = (p_1, \dots, p_j, \dots, p_n)$. Este é o *teorema da entropia conjunta* [25].

Dados dois estados quânticos, descritos por $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$, podemos definir a entropia quântica relativa entre estes dois estados. Esta entropia serve para medir o quão próximos entre si os dois estados estão, ou, em outras palavras, o quão similar eles são. Definimos a entropia relativa por

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) - \text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\sigma}), \quad (3.8)$$

que é uma quantidade não-negativa, $S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \geq 0$ [28, 25].

3.1.3 Sistema de um qubit e a esfera de Bloch

A unidade fundamental de informação na teoria clássica é chamada de bit, que é uma abreviação na língua inglesa para binary digit, já que o bit pode assumir dois valores, geralmente nomeados de 0 e 1. Classicamente, só é possível que um único destes dois estados sejam acessados por vez, isto é, não há estado intermediário entre 0 e 1. Quanticamente, o análogo é o qubit, que pode ser representado por um sistema arbitrário de dois níveis, que por sua vez é descrito por um espaço de Hilbert bidimensional $\mathcal{H}^2$. Este é o sistema quântico mais simples possível, sendo que, realizações experimentais de um qubit podem ser, por exemplo, o spin de uma partícula de spin 1/2, a polarização de um fóton ou uma partícula passando por um aparato do tipo dupla-fenda [22]. Se nomearmos os dois estados ortogonais do sistema como $|0\rangle$ e $|1\rangle$, temos que um qubit genérico em estado puro é representado pelo vetor de estado normalizado

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad (3.9)$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$, $\phi \in [0, 2\pi]$, e $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é chamada base computacional.

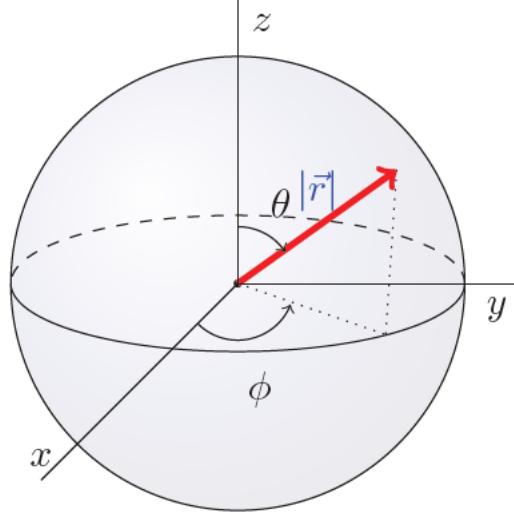


Figura 3.2: Representação de um qubit como um vetor (em vermelho) na superfície da esfera de Bloch.

Podemos instituir a representação de um qubit em uma superfície esférica. A localização do qubit na superfície da esfera é dada pelo vetor unitário $\vec{r} = (\sin \theta \sin(\phi), \sin \theta \cos(\phi), \cos \theta)$. Varrendo todos os valores possíveis para θ e ϕ , temos a figura geométrica chamada *esfera de Bloch*.

Um estado arbitrário de um sistema de um qubit reside em um ponto qualquer do interior até a superfície da esfera, e pode ser escrito em termos do vetor $\vec{\sigma}$ formado pelas matrizes de Pauli, da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \frac{(\hat{I} + \vec{\sigma} \cdot \vec{s})}{2}, \quad (3.10)$$

onde $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ é chamado de vetor de Bloch, que satisfaz $|\vec{s}|^2 \leq 1$ [25].

Já quando consideramos o caso de um sistema de dois qubits, um estado puro pode ser representado na base de estados formada por $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, por meio da superposição

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (3.11)$$

com $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ e $\sum |\alpha_{ij}|^2 = 1$.

Além da base computacional, outra base bastante distinta para um sistema de dois qubits é a base de Bell, também conhecida como base de estados EPR, que pode ser escrita em termos da base computacional como: $|\psi^{(\pm)}\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$, $|\phi^{(\pm)}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Os

estados que formam a base de Bell são especiais, pois estes estados violam maximamente a desigualdade CHSH, como veremos adiante, que é construída com base nas premissas de realismo e localidade. Além disto, eles são essenciais para a realização de várias tarefas baseadas na lógica da informação quântica, como o processo de teletransporte quântico [25]. Outros estados podem ser utilizados para o teletransporte, com eficiência menor que 100 por cento.

Capítulo 4

Correlações quânticas e estados de Werner

“No theory of reality compatible with quantum theory can require spatially separate events to be independent.”

John Stewart Bell

4.1 Correlações quânticas e estados de Werner

Os sistemas quânticos são conhecidos por poderem apresentar correlações que não possuem correspondentes clássicos, as chamadas correlações quânticas. E, embora o emaranhamento seja o tipo mais conhecido destas correlações, ele não é o único, principalmente quando se trata de estados mistos. Daí surge a importância de diferenciar e quantificar os tipos de correlações que um dado sistema apresenta [19]. Neste capítulo iremos apresentar e discutir sobre algumas medidas de correlações quânticas, como emaranhamento e discórdia quântica, bem como abordar sobre uma classe especial de estados quânticos, os estados de Werner.

4.1.1 Estados de Werner

Dado o estado de um sistema bipartido, se ele é classicamente correlacionado, isto é, se é possível reproduzir o estado de cada subsistema por meio de operações locais e comunicação clássica, então este sistema pode ser modelado através de uma teoria local e, portanto, satisfaz algum tipo de desigualdade de Bell. Uma teoria de variáveis locais

procura descrever correlações de experimentos quânticos, de modo que o realismo local é preservado. Além disto, se o sistema for puro, o inverso também é válido, ou seja, se esse sistema admite um modelo de variáveis locais, ele é classicamente correlacionado [30].

Entretanto, no caso de sistemas bipartidos mistos, Werner mostrou que é possível construir uma família de estados, conhecidos como estados de Werner [31], que pode ser modelada por uma teoria local para além do limite de separabilidade.

Os estados de Werner de dois qubits podem ser escritos na forma

$$\hat{\rho} = c|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1-c}{4}\hat{I} \quad (4.1)$$

com $0 \leq c \leq 1$, onde

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle - |10\rangle],$$

é o estado de singlete e $\hat{I}$ é o operador identidade. Como mostrado por Werner, estes estados são separáveis se $c \leq 1/3$, mas admitem uma descrição em termos de medidas locais (Modelo de Werner) para $c \leq 1/2$ [31].

4.1.2 Emaranhamento

O emaranhamento é definido como uma classe de correlações que não podem ser criadas via Operações Locais e Comunicação Clássica (OLCC) [32]. Estas correlações podem ocorrer entre variáveis conjugadas, tais como momento e posição [33], energia e tempo [34, 35] posição angular e momento angular orbital [36]; e também como a impossibilidade de descrever separadamente estados quânticos de duas ou mais partículas por meio de estados individuais e locais de cada partícula, como, por exemplo, estados de polarização de pares de fótons [37, 38]. Embora tenha permanecido como uma curiosidade até o início dos anos 1980, hoje sabe-se dos vários efeitos práticos do emaranhamento para a comunicação e computação quânticas [39, 40], tais como: criptografia quântica; teletransporte quântico; codificação superdensa, sendo este, portanto, considerado um recurso, tal como o é a energia. Além disso, o emaranhamento tem um papel na descrição do surgimento da classicalidade, através do processo de decoerência [41]. Dito isso, o interesse em entender melhor estas correlações tem crescido bastante.

Um estado quântico bipartido arbitrário $\hat{\rho}$ é dito separável (ou não-emaranhado),

se ele pode ser escrito como uma soma convexa,

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^k p_i \hat{\rho}_{iA} \otimes \hat{\rho}_{iB}, \quad (4.2)$$

onde $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ com os fatores p_i compondo uma distribuição de probabilidades clássicas. Caso não seja possível escrever $\hat{\rho}$ desta forma, ele é dito emaranhado [31]. Vale salientar que esta decomposição não é única. De fato, existem infinitas maneiras de se decompor um estado, e para um estado separável $\hat{\rho}$ a decomposição que possui o menor número de termos, M , é dita decomposição ótima, onde M é chamada de cardinalidade do estado [42].

A determinação da separabilidade de um estado quântico nem sempre é fácil, sendo conhecida somente em alguns casos específicos. Por exemplo, existe um critério de separabilidade para sistemas bipartidos. Neste critério, para que o sistema seja separável, é necessário que a matriz obtida a partir da transposição parcial de $\hat{\rho}$ tenha apenas autovalores não-negativos. Este critério é suficiente para determinar a separabilidade apenas no caso de um sistema constituído de dois qubits e também para o caso de um sistema constituído de um qubit e um qutrit, sendo chamado de critério de Peres-Horodecki ou critério PPT (positive-partial transpose) [43, 44].

A definição de separabilidade dada em (4.2) pode ser estendida para o caso de um sistema constituído de N partes, que pode ser então fatorado da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^k p_i \hat{\rho}_{iA} \otimes \hat{\rho}_{iB} \dots \otimes \hat{\rho}_{iN}. \quad (4.3)$$

Emaranhamento em sistemas bipartidos

Para sistemas quânticos puros bipartidos, mede-se o emaranhamento através do cálculo da *entropia de emaranhamento*, que nada mais é do que a entropia de von Neumann de uma das partes [45]. Assim, dado um estado puro bipartido $|\Psi\rangle$, o operador densidade será dado por $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$, e a entropia de emaranhamento é dada por

$$E(\hat{\rho}) \equiv S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B), \quad (4.4)$$

onde $\hat{\rho}_A = Tr_B[\hat{\rho}]$ é a matriz reduzida da parte A. Se considerarmos o estado puro em questão escrito de acordo com (2.19), temos que $\hat{\rho}_A = \sum_i \lambda_i^2 |\tilde{a}_i\rangle \langle\tilde{a}_i|$. Então, a entropia

de emaranhamento para este sistema puro bipartido $|\Psi\rangle$ será dada por

$$E(|\Psi\rangle) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = - \sum_i \lambda_i^2 \log_2 \lambda_i^2. \quad (4.5)$$

Assim, os coeficientes de Schmidt podem ser usados para distinguir estados bipartidos puros emaranhados de estados bipartidos separáveis. Por exemplo, se consideramos o estado puro bipartido maximamente emaranhado de singleto, escrito na base computacional

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle - |10\rangle],$$

temos que $S(\hat{\rho}_A) = 1$. Já se considerarmos o estado puro separável

$$|\psi\rangle = |01\rangle,$$

temos que $S(\hat{\rho}_A) = 0$.

A entropia de emaranhamento pode ser interpretada da seguinte forma: se as partes A e B querem criar n cópias de um estado particular $\hat{\rho}$, eles devem possuir $nE(\hat{\rho})$ estados de singleto para executar esta tarefa. Esta é apenas uma forma de quantificar o emaranhamento. Existem outras.

Já no caso de sistemas mistos bipartidos, nem toda entropia do sistema advirá do emaranhamento. Então, para quantificar o emaranhamento presente, calcula-se o *emaranhamento de formação* de um estado $\hat{\rho}$, que pode ser obtido fazendo-se a seguinte minimização

$$E_{oF}(\hat{\rho}) \equiv \min[\mathcal{E}_{\hat{\rho}}] \sum_i^l p_i E(|\psi_i\rangle), \quad (4.6)$$

onde $E(|\psi_i\rangle)$ é a entropia de emaranhamento do estado $|\psi_i\rangle$ e a minimização se dá sobre um ensemble de todas as possíveis decomposições $\mathcal{E}_{\hat{\rho}}$:

$$\mathcal{E}_{\hat{\rho}} = [p_i, |\psi_i\rangle]_{i=1}^l. \quad (4.7)$$

O emaranhamento de formação pode ser entendido como a quantidade *mínima* de singletons necessários para se criar o estado $\hat{\rho}$ [46]. O ensemble para o qual o emaranhamento de formação é mínimo é chamado de ensemble ótimo, podendo haver vários ensembles ótimos para um único estado $\hat{\rho}$. Se o estado é separável, temos que $E_{oF}(\hat{\rho}) = 0$.

Para o caso de um sistema arbitrário de dois qubits, o emaranhamento de formação foi calculado por Wootters, baseando-se no conceito de *concorrência* [47]. A concorrência

$C(|\Psi\rangle)$ é uma função utilizada para medir emaranhamento de estados puros em um sistema de dois qubits, da seguinte forma: seja um estado $|\Psi\rangle$, define-se

$$C(|\Psi\rangle) = |\langle\Psi|\tilde{\Psi}\rangle|, \quad (4.8)$$

onde $0 \leq C(|\Psi\rangle) \leq 1$, $|\tilde{\Psi}\rangle = (\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) |\Psi^*\rangle$ é chamada operação de *spin-flip*, $|\Psi^*\rangle$ é o vetor de estado conjugado-complexo de $|\Psi\rangle$ e $\hat{\sigma}_y$ é o operador de Pauli na direção y . A operação spin-flip projeta um estado puro em uma direção na esfera de Bloch, que é diametralmente oposta à original. Assim, caso o estado seja separável, a concorrência é nula, e caso ele seja maximamente emaranhado, a concorrência tem valor máximo igual a 1.

A relação entre a entropia de emaranhamento e concorrência para um estado puro $|\Psi\rangle$ é dada por

$$E(|\Psi\rangle) = \epsilon[C(|\Psi\rangle)], \quad (4.9)$$

onde

$$\epsilon[C(|\Psi\rangle)] = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (4.10)$$

e $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$. O emaranhamento de formação para estados mistos é dado em termos da concorrência pela fórmula (4.10), onde $C(\hat{\rho}) = \max\{0, (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)\}$, os λ_i são os autovalores, em ordem decrescente, do operador $\hat{\rho}\hat{\hat{\rho}}$, onde $\hat{\hat{\rho}} = (\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}^* (\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$.

No caso de Werner para dois qubits, o emaranhamento de formação é dado explicitamente por $E_{oF}(\hat{\rho}) = 0$, se $0 \leq c \leq 1/3$ e $E_{oF}(\hat{\rho}) = h(x)$, se $1/3 \leq c \leq 1$ [46], onde

$$x \equiv \frac{1 + \sqrt{1 - (\frac{1-3c}{2})^2}}{2}. \quad (4.11)$$

4.1.3 Discórdia quântica

No começo do desenvolvimento da teoria da informação quântica, o emaranhamento era visto como o único recurso que dá aos computadores quânticos uma vantagem sobre seus análogos clássicos. Entretanto, Henderson e Vedral, e independentemente, Ollivier e Zurek, concluíram que o emaranhamento não contabiliza todas as correlações não-clássicas, e que, até mesmo alguns estados separáveis contêm correlações não inteiramente clássicas [19].

A discórdia quântica é historicamente a primeira medida de correlações quânticas para além do emaranhamento. Esta medida se baseia na inequivalência entre medidas

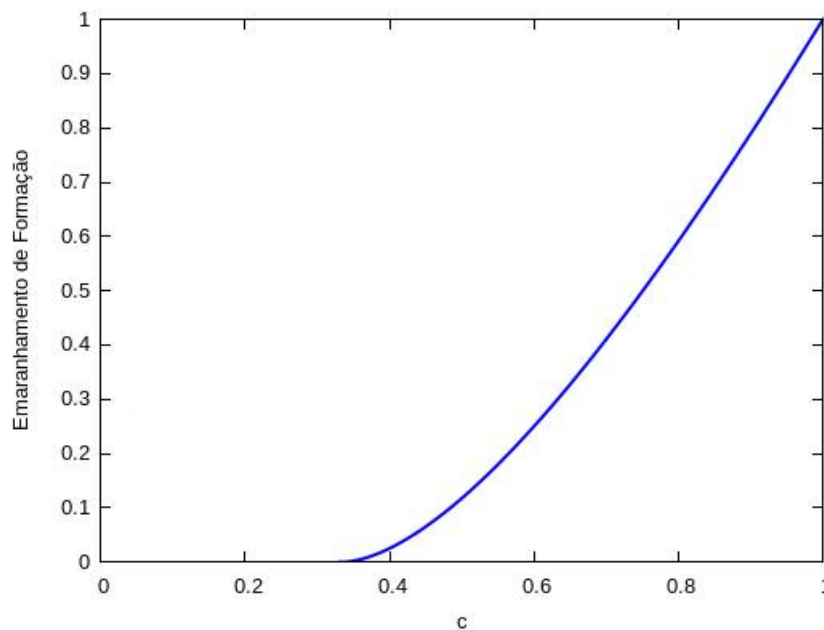


Figura 4.1: Emaranhamento de formação para um estado de Werner de dois qubits em função do parâmetro c .

quânticas feitas de acordo com duas definições de informação mútua, para um sistema bipartido, esta última (inf. mútua) contendo tanto correlações clássicas quanto quânticas. Esta quantidade se caracteriza por ser não-nula mesmo para alguns estados separáveis, diferentemente do emaranhamento, o que implica que ausência de emaranhamento não quer dizer necessariamente classicalidade.

Para definir a discórdia quântica, Ollivier e Zurek utilizaram o conceito de medida projetiva de von Neumann, escolhendo um conjunto de projetores unidimensionais. Vamos seguir com fidelidade a definição utilizada por eles [17]. Classicamente, as medidas de informação mútua definidas por (3.2) e (3.3) são equivalentes. Se quisermos generalizar para o caso de um sistema bipartido quântico, podemos utilizar diretamente a equação (3.5). Entretanto, quando tratamos da entropia condicional, dada em (3.3), não é possível escrever diretamente uma expressão correspondente. Isto acontece porque, por exemplo, se escolhermos medir $S(B|A)$, isto é, a incerteza de B , *dado* que A é conhecido, esta será uma definição ambígua, que vai depender do conjunto de projetores escolhidos para medir A .

Dado o conjunto de projetores para o sistema A , $\{\hat{\Pi}_k^A\}$, onde cada k representa

diferentes resultados de medidas feitas em A , o estado de B será

$$\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_k^A} = \frac{\hat{\Pi}_k^A \hat{\rho} \hat{\Pi}_k^A}{Tr_{AB}[\hat{\Pi}_k^A \hat{\rho}]}, \quad (4.12)$$

onde $p_k = Tr_{AB}[\hat{\Pi}_k^A \hat{\rho}]$ é a probabilidade de obtermos $\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_k^A}$.

As entropias $S(\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_k^A})$, com os respectivos pesos probabilísticos p_k , nos fornecem a entropia condicional de B dado que A foi medido, da seguinte forma

$$S(B|[\hat{\Pi}_k^A]) = \sum_k p_k S(\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_k^A}). \quad (4.13)$$

Podemos, então, generalizar (3.3) para o caso quântico

$$J(B : A)_{[\hat{\Pi}_k^A]} = S(\hat{\rho}_B) - S(B|[\hat{\Pi}_k^A]). \quad (4.14)$$

As duas expressões para a informação mútua clássica não vão necessariamente coincidir para o caso quântico. Definimos a *discórdia quântica* como a diferença entre as expressões (3.5) e (4.14), da seguinte forma

$$\delta(B : A) \equiv I(B : A) - J(B : A)_{[\hat{\Pi}_k^A]}. \quad (4.15)$$

Vemos que discórdia quântica depende do conjunto de projetores $[\hat{\Pi}_k^A]$.

A discórdia quântica, definida desta maneira, não é uma quantidade simétrica com relação a troca entre B e A , já que a entropia condicional não é simétrica. O ideal é que haja a escolha de um conjunto de projetores para o qual a discórdia seja minimizada, isto quer dizer que, neste caso a medição perturba minimamente o sistema, mas mesmo assim extrai o máximo de informação sobre a parte B , através de uma medição na parte A , ou vice-versa.

No caso de um sistema misto bipartido de dois qubits, no artigo [49] calcula-se uma medida da discórdia para estados de Werner de dois qubits, e compara-se a *discórdia quântica* ao *emaranhamento de formação*, concluindo que *são medidas de duas naturezas distintas*. Aqui, vamos reproduzir o cálculo.

Temos que um estado quântico de dois qubits pode ser escrito como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \left[\hat{I} + \sum_{j=1}^3 c_j \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_j \right], \quad (4.16)$$

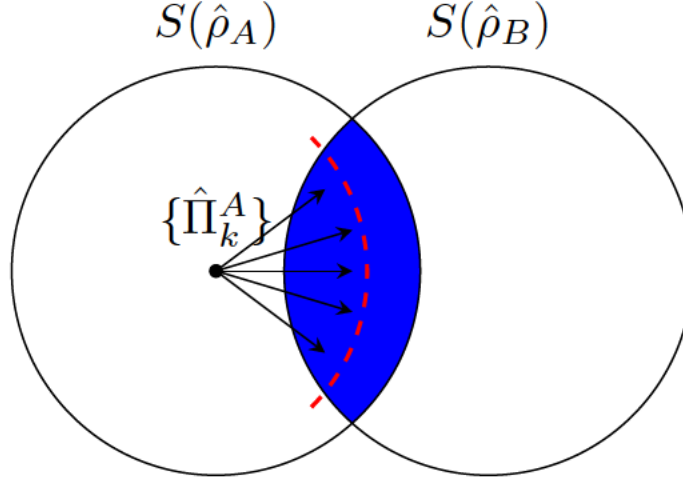


Figura 4.2: Discórdia quântica: medidas feitas utilizando um conjunto de projetores $\{\hat{\Pi}_k^A\}$, a partir do sistema A , computam apenas a parte $J(B : A)_{[\hat{\Pi}_k^A]}$ da informação mútua total $I(B : A)$ (área em azul). A área não alcançada por estas medidas representa a discórdia.

onde $[c_j, j = 1, 2, 3; c_j \in \mathbb{R}]$ são constantes. É possível verificar que os autovalores de $\hat{\rho}$ são

$$\lambda_0 = \frac{1}{4} \left[1 - (c_1 + c_2 + c_3) \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left[1 - c_1 + c_2 + c_3 \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left[1 + c_1 - c_2 + c_3 \right],$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4} \left[1 + c_1 + c_2 - c_3 \right].$$

Também pode-se verificar que $\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \frac{\hat{I}}{2}$. Assim, a informação mútua como definida em (3.5) é dada por

$$I(\hat{\rho}) = 2 + \sum_{l=0}^3 \lambda_l \log_2(\lambda_l). \quad (4.17)$$

Já (4.14) é calculada como: seja o conjunto de projetores $[\hat{\Pi}_k^B = |k\rangle\langle k|, k = 0, 1]$ que realiza medidas no sistema B . Qualquer medida para a parte B é dada pelo seguinte conjunto de operadores $[\hat{B}_k = \hat{V}\hat{\Pi}_k\hat{V}^\dagger, k = 0, 1]$, onde $\hat{V} = t\hat{I} + i\vec{y}\cdot\hat{\sigma} \in \mathbf{U}(2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, com $t^2 + |\vec{y}|^2 = 1$. O resultado obtido para este conjunto de medidas é

$$J(A : B)_{[\Pi_k^B]} = \frac{(1 - \theta)}{2} \log_2(1 - \theta) + \frac{(1 + \theta)}{2} \log_2(1 + \theta), \quad (4.18)$$

onde $\theta \equiv \sqrt{|c_1 z_1|^2 + |c_2 z_2|^2 + |c_3 z_3|^2}$, $z_1 \equiv 2(-ty_2 + y_1 y_2)$, $z_2 \equiv 2(ty_1 + y_2 y_3)$ e $z_3 \equiv t^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2$. Ainda é possível mostrar que $\sum_{i=1}^3 z_i^2 = 1$, o que implica que $\theta \leq \sqrt{c^2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)} = c$, com $c \equiv \max[|c_1|, |c_2|, |c_3|]$. Assim, o valor máximo de θ é c , então o valor de θ que maximiza (4.18) é $\theta = c$. Por fim, temos

$$J(A : B)_{[\Pi_k^B]} = \frac{(1 - c)}{2} \log_2(1 - c) + \frac{(1 + c)}{2} \log_2(1 + c). \quad (4.19)$$

Finalmente, aplicando (4.17) e (4.19) em (4.15), temos

$$\begin{aligned} \delta(B : A) = & \frac{1}{4} \left[(1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) + \right. \\ & (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3) + \\ & (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) + \\ & \left. (1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) \right] - \\ & \left[\frac{(1 - c)}{2} \log_2(1 - c) + \frac{(1 + c)}{2} \log_2(1 + c) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para $c_1 = c_2 = c_3 = -c$, temos os estados de Werner para dois qubits

$$\hat{\rho} = \frac{1 - c}{4} \hat{I} + c |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|$$

, onde $|\Psi^-\rangle$ é o estado de singleto. Finalmente, a discórdia quântica para estados de Werner de dois qubits é dada por

$$\delta(A : B) = \frac{1 - c}{4} \log_2(1 - c) + \frac{1 + c}{2} \log_2(1 + c) + \frac{1 + 3c}{4} \log_2(1 + 3c). \quad (4.21)$$

Vamos considerar dois casos especiais: i) $c = 0$, temos $\delta(A : B) = 0$, ou seja, para um estado de Werner de dois qubits maximamente misto, temos uma discórdia quântica nula. Isto é esperado, já que, este estado é apenas classicamente correlacionado.

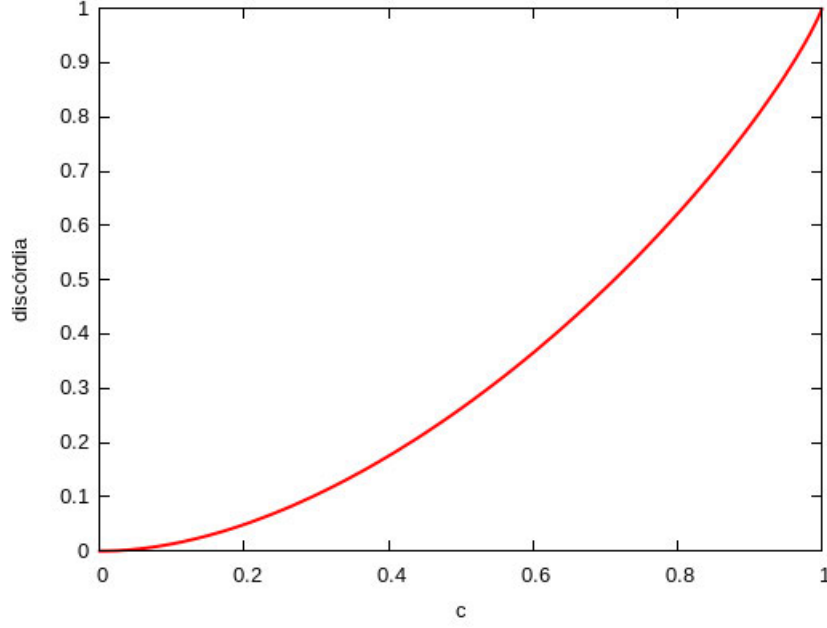


Figura 4.3: Discórdia quântica para o estado de Werner de dois qubits em função do parâmetro c [49].

ii) $c = 0$, temos $\delta(A : B) = 1$, neste caso temos um estado maximamente emaranhado de singlete. A informação mútua neste caso, é dada pela equação (3.6), sendo que a entropia marginal de cada subsistema é $S(\hat{\rho}_A) = 1$. Desta forma, temos $I(\hat{\rho}) = 2$ e da equação (4.19), temos $J(A : B)_{[\Pi_k^B]} = 1$.

4.1.4 Teorema de Bell e Teorema GHZ

No artigo EPR de 1935, Einstein, Podolsky e Rosen [7] questionavam se a mecânica quântica era capaz de descrever completamente um sistema físico. Para Einstein, uma descrição satisfatória de um sistema deveria ser independente de qualquer interação do mesmo com um aparato de medição. Sendo assim, para que não houvesse qualquer perturbação induzida por um aparato de medição, era melhor procurar descrever uma situação em que não haveria qualquer contato entre o instrumento de medição e o objeto da medição.

Para compreender melhor a situação acima descrita, vamos descrever aqui um exemplo proposto por Bohm, envolvendo duas partículas de spin $1/2$, que estão no estado emaranhado de singlete, $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle - |10\rangle]$. Sendo assim, ao medirmos o spin de uma

das duas partículas em qualquer direção, o spin da outra partícula será oposto, mesmo que a separação espacial entre elas seja tal que não é possível uma comunicação clássica entre as partículas. Se a mecânica quântica fornece uma descrição realística do sistema, no sentido do realismo que Einstein defendia, ela apenas revela o valor pré-existente da componente de spin naquela direção. Entretanto, o estado de singlete possui simetria esférica, não importando a direção em que se mede a componente de spin de uma das partículas, a outra componente sempre será imediatamente encontrada na direção contrária. Além do mais, se os valores são existentes pré-medida, medidas de componentes incompatíveis, como por exemplo, S_x e S_z , apenas revelariam valores simultaneamente presentes, o que não está de acordo com os resultados fornecidos pela mecânica quântica [21]. Havia então um impasse entre os resultados previstos pela teoria quântica e conceitos primordiais para a física clássica, como o realismo e o princípio da localidade.

Só em 1964, o teorema de Bell trouxe pela primeira vez a ideia de que estes conceitos, como o princípio da localidade e o realismo das grandezas físicas, até então inquestionáveis nas teorias físicas, não são compatíveis com as previsões estatísticas da mecânica quântica [8]. Aqui, vale ressaltar que o *princípio da localidade* se refere ao fato que um sistema físico só consegue exercer alguma influência sobre o outro a partir de um sinal cuja informação viaja com velocidade menor ou igual a da luz. Por *realismo*, entende-se o fato de que grandezas físicas associadas ao sistema sempre possuem um valor bem definido, independente se medidas forem ou não realizadas.

Em particular, Bell tratou desta contradição para um sistema constituído por um par partículas de spin $1/2$ cada. Inspirados pelo trabalho de Bell, os físicos Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) também derivaram uma desigualdade que fornece um meio de verificar se uma descrição local seria capaz de descrever as previsões da mecânica quântica para o sistema de um par partículas de spin $1/2$ [9]. Esta desigualdade é conhecida como desigualdade CHSH, e fornece um limite superior clássico, para uma função de correlação, construída a partir dos valores esperados de um conjunto medidas feitas por dois observadores; um observador podendo medir o spin ao longo de duas direções arbitrárias distintas. A desigualdade é surpreendentemente violada pela mecânica quântica, mais precisamente, a máxima violação ocorre para o próprio estado de singlete [24]. Portanto, a conclusão é que a mecânica quântica tem uma natureza não-local.

Nos artigos intitulados “going beyond Bell’s theorem” e “Bell’s theorem without

inequalities”, Daniel Greenberger, Michael Horne e Anton Zeilinger (GHZ) [15, 16] apontam que, como salientado no parágrafo anterior, quando consideramos algumas direções especiais de medição para a componente de spin, por dois observadores espacialmente separados, para um sistema de duas partículas de spin $1/2$ no estado de singlete, o teorema de Bell faz uma previsão estatística para o caso de ângulos de medição arbitrários que a teoria quântica contradiz a clássica. Mas, no caso de correlações *perfeitas*, isto é, quando os spins das duas partículas são medidos ao longo da mesma direção, não há nenhuma restrição imposta pela desigualdade de Bell a uma descrição em termos de variáveis clássicas locais. Quando consideram um sistema de quatro partículas, os autores demonstram uma incompatibilidade entre as previsões da mecânica quântica, quando se considera uma situação de correlações *perfeitas* e as proposições de localidade e realismo.

Para exemplificar a diferença entre o teorema de Bell e o argumento proposto no teorema GHZ, vamos considerar novamente um sistema de duas partículas 1 e 2 que se encontram no estado de singlete. Quando um observador A realiza uma medição do spin da partícula 1 em uma direção arbitrária $\hat{n}_1$ e um observador B realiza uma medição do spin de 2 em $\hat{n}_2$, o valor esperado do produto entre as medições spins das duas partículas é dado, de acordo com a mecânica quântica, por

$$E(\hat{n}_1.\hat{n}_2) = -\cos(\hat{n}_1.\hat{n}_2). \quad (4.22)$$

Se considerarmos, por simplicidade, que as duas partículas se movem na direção z , e que as medições são feitas no plano xy , com direções dadas por ângulos medidos a partir do eixo x , α e β , respectivamente para A e B, temos

$$E(\hat{n}_1.\hat{n}_2) = -\cos(\alpha - \beta). \quad (4.23)$$

Para os dois casos especiais em que a diferença entre os ângulos é $\alpha - \beta = 0, \pi$, há correlações perfeitas e a desigualdade de Bell é satisfeita. Entretanto, para uma diferença de ângulos de medição que seja outra qualquer, o comportamento mecânico-quântico não é compatível com nenhum modelo local e realístico.

Agora, vamos considerar uma nova situação, envolvendo não duas, mas quatro partículas de spin $1/2$ cada se propagando na direção z , no seguinte estado emaranhado

$$|\Psi\rangle = \frac{|0011\rangle - |1100\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.24)$$

onde $|0\rangle$ significa spin paralelo ao sentido da medição e $|1\rangle$ significa spin antiparalelo ao sentido da medição. O valor esperado para o conjunto de quatro medições simultâneas, ao longo de quatro direções de medição $\hat{n}_i, i = 1, 2, 3, 4$, no plano xy , para os observadores separados espacialmente A, B, C e D é dado por

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4), \quad (4.25)$$

onde ϕ_i representa o ângulo azimutal, entre o eixo x e respectiva direção de medida para o spin de cada partícula. Neste novo esquema, para que haja correlações *perfeitas*, devemos alinhar as medições nas seguintes configurações de ângulos

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0, \quad (4.26)$$

com

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -1; \quad (4.27)$$

e

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4, \quad (4.28)$$

com

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = 1. \quad (4.29)$$

Se consideramos que o valor medido de spin de cada uma das quatro partículas é função apenas do respectivo ângulo do medidor ϕ_i e de uma variável λ local, assim como considerado no teorema de Bell, temos que estas duas variáveis fornecem a descrição completa do estado físico de cada partícula localmente. Ainda em paralelo com o trabalho de Bell, nomenando-se quatro funções locais para a medição do spin de cada uma das quatro partículas, $A(\phi_1)_\lambda$, $B(\phi_2)_\lambda$, $C(\phi_3)_\lambda$ e $D(\phi_4)_\lambda$, respectivamente, os valores assumidos por cada uma delas são $+1$ ou -1 . Pode-se, então, definir a seguinte a função

$$f(\lambda) = A(\phi_1)_\lambda B(\phi_2)_\lambda C(\phi_3)_\lambda D(\phi_4)_\lambda, \quad (4.30)$$

dada pelo produto da medição do spin de cada uma das quatro partículas. É possível mostrar que há uma inconsistência entre os resultados fornecidos por $f(\lambda)$ e a previsão da mecânica quântica para os casos de correlações perfeitas, dados em (4.26) e (4.28). Os autores salientam que não há necessidade sequer de formular uma desigualdade, como foi feito no caso de duas partículas de spin $1/2$, já que algumas manipulações algébricas fornecem resultados matemáticos contraditórios para $f(\lambda)$. Fica, então, claro que, nesta

situação de quatro partículas no estado (4.24), não é possível conciliar as proposições de (i) até (iv) com os resultados da mecânica quântica, para a situação de correlações perfeitas.

Além do exemplo acima envolvendo quatro partículas de spin $1/2$, GHZ trazem um segundo exemplo em que uma partícula de momento angular nulo decai em três partículas. Nesta segunda situação, a conservação do momento angular do sistema, bem como o modo como o aparato experimental é modelado, permite introduzir o seguinte estado emaranhado, conhecido como estado GHZ,

$$|\Psi\rangle_{GHZ} = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4.31)$$

Para este novo estado, uma nova função de correlação é calculada. Também são introduzidas as respectivas situações para as quais se obtêm correlações *perfeitas*. Novamente há a mesma contradição entre a previsão quântica e as premissas de localidade e realismo para este estado dado em (4.31). A confirmação experimental deste último experimento, em favor da mecânica quântica, foi reportada em [48]

4.1.5 Sistema tripartido: classificação de estados

É possível classificar os estados puros de três qubits em quatro classes: estados não-emaranhados, estados com emaranhamento bipartido, estados com emaranhamento genuinamente tripartido (EGT) do tipo W e estados EGT do tipo GHZ [14]. Esta classificação se baseia na ideia de que, se é possível converter um estado emaranhado $|\Psi\rangle$ em outro estado emaranhado $|\Phi\rangle$, por meio de operações locais e comunicação clássica, com alguma probabilidade não nula, então $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ pertencem à mesma classe de emaranhamento. Além disto, o estado *GHZ* possui emaranhamento frágil quando há a perda de um dos três qubits. Ou seja, quando um dos qubits é retirado, o estado residual é totalmente separável. Por outro lado, o estado *W* possui emaranhamento robusto quanto à perda de um dos qubits, de modo que o estado dos dois qubits residuais possui emaranhamento.

4.1.6 Discórdia quântica global

Como tentativa de estender o conceito de discórdia quântica apresentado anteriormente, foi proposta a construção da *discórdia quântica global*, que é uma quantidade

simétrica com relação a troca de A por B [50]. Baseando-se no conceito de entropia quântica relativa entre dois estados, dada pela equação (3.8), e a regra de medida de von Neumann, dada em (4.12), é possível construir a discórdia quântica global, da maneira que será apresentada a seguir. Dado um sistema bipartido, descrito por meio do operador densidade $\hat{\rho}$, uma medida projetiva com valor não revelado, feita somente na parte A do sistema, nos leva ao seguinte estado [ver eq. (2.15)]

$$\Phi\{\hat{\rho}\} = (\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{I}_B) \hat{\rho} (\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{I}_B) = \sum_k p_k \hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_k^A} \otimes |a_k\rangle \langle a_k|. \quad (4.32)$$

Calculando-se o traço sobre os estados do sistema B , temos

$$\Phi\{\hat{\rho}_A\} = \sum_k p_k |a_k\rangle \langle a_k|. \quad (4.33)$$

Utilizando o teorema da entropia conjunta, dado em (3.7), podemos escrever as entropias de von Neumann para os estados (4.32) e (4.33)

$$S(\Phi\{\hat{\rho}\}) = H(\vec{p}) + \sum_k p_k S(\hat{\rho}_{B|\hat{\Pi}_k^A}) \quad (4.34)$$

e

$$S(\Phi\{\hat{\rho}_A\}) = H(\vec{p}), \quad (4.35)$$

respectivamente.

A informação mútua para este sistema, dada em (3.2), pode ser expressa em termos da entropia relativa entre o estado $\hat{\rho}$ e o estado separável $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$,

$$I(B : A) = S(\hat{\rho} || \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B). \quad (4.36)$$

Já a informação mútua dada em (3.3) pode ser expressa como

$$J(B : A)_{\{\hat{\Pi}_k^A\}} = S(\Phi\{\hat{\rho}\} || \hat{\rho}_B \otimes \Phi\{\hat{\rho}_A\}). \quad (4.37)$$

Assim, podemos escrever a discórdia em termos de (4.36) e (4.37), como

$$\delta(B : A)_{\{\hat{\Pi}_k^A\}} = S(\hat{\rho} || \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) - S(\Phi\{\hat{\rho}\} || \hat{\rho}_B \otimes \Phi\{\hat{\rho}_A\}). \quad (4.38)$$

Podemos, por sua vez, realizar as medidas projetivas no sistema B , utilizando um conjunto de projetores $\{\hat{\Pi}_j^B\}$. Desta maneira, a equação (4.43) será simétrica em relação a A e B ,

$$\delta(\hat{\rho})_{\{\hat{\Pi}_k^A, \hat{\Pi}_j^B\}} = S(\hat{\rho} || \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) - S(\Phi\{\hat{\rho}\} || \Phi\{\hat{\rho}_B\} \otimes \Phi\{\hat{\rho}_A\}), \quad (4.39)$$

onde

$$\Phi\{\hat{\rho}\} = \sum_{k,j} (\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{\Pi}_j^B) \hat{\rho} (\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{\Pi}_j^B). \quad (4.40)$$

Esta é a versão simétrica, com relação aos sistemas A e B , da discórdia quântica dada em (4.15).

Como a discórdia é uma medida que depende da base de projetores, mais uma vez estamos interessados em encontrar um conjunto de projetores que a minimiza,

$$\delta(\hat{\rho})_{\min\{\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{\Pi}_j^B\}} = S(\hat{\rho} || \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) - S(\Phi\{\hat{\rho}\} || \Phi\{\hat{\rho}_B\} \otimes \Phi\{\hat{\rho}_A\}). \quad (4.41)$$

Podemos ainda rearranjá-la da seguinte maneira

$$\delta(\hat{\rho})_{\min\{\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{\Pi}_j^B\}} = S(\hat{\rho} || \Phi\{\hat{\rho}\}) - S(\hat{\rho}_A || \Phi\{\hat{\rho}_A\}) - S(\hat{\rho}_B || \Phi\{\hat{\rho}_B\}). \quad (4.42)$$

Desta maneira, é possível estender esta definição para a situação em que temos N subsistemas, da seguinte maneira [50]:

$$\delta(\hat{\rho})_{\min\{\hat{\Pi}_k\}} = S(\hat{\rho} || \Phi\{\hat{\rho}\}) - \sum_{i=1}^N S(\hat{\rho}_{A_i} || \Phi\{\hat{\rho}_{A_i}\}), \quad (4.43)$$

onde $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{A_1 \dots A_N}$ é o operador densidade para o sistema, com $A_1, \dots, A_N$ subsistemas; $\Phi\{\hat{\rho}\} = \hat{\Pi}_k \hat{\rho} \hat{\Pi}_k$, com $\{\hat{\Pi}_k\} = \{\hat{\Pi}_{A_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}_{A_N}^{j_N}\}$ sendo o produto tensorial do conjunto de medidas feitas localmente; e cada medida local é dada por

$$\Phi\{\hat{\rho}_{A_i}\} = \sum_{j'} \hat{\Pi}_{A_j}^{j'} \hat{\rho}_{A_i} \hat{\Pi}_{A_j}^{j'}. \quad (4.44)$$

A partir de (4.43), para um sistema tripartido temos

$$\delta(\hat{\rho})_{\min\{\hat{\Pi}_k^A \otimes \hat{\Pi}_j^B \otimes \hat{\Pi}_l^C\}} = S(\hat{\rho} || \Phi\{\hat{\rho}\}) - S(\hat{\rho}_A || \Phi\{\hat{\rho}_A\}) - S(\hat{\rho}_B || \Phi\{\hat{\rho}_B\}) - S(\hat{\rho}_C || \Phi\{\hat{\rho}_C\}). \quad (4.45)$$

O estado de Werner-GHZ, dado por

$$\hat{\rho} = \frac{1-c}{8} \hat{I} + c |GHZ\rangle \langle GHZ|, \quad (4.46)$$

onde $0 \leq c \leq 1$ e $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|000\rangle + |111\rangle]$. Este estado pode ser reescrito na forma

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{8} + c \frac{\hat{c}}{8} \{\sigma_1^z \sigma_2^z + \sigma_1^z \sigma_3^z + \sigma_2^z \sigma_3^z + \sigma_1^x \sigma_2^x \sigma_3^x - \sigma_1^y \sigma_2^y \sigma_3^y - \sigma_1^y \sigma_2^x \sigma_3^y - \sigma_1^y \sigma_2^y \sigma_3^x\}, \quad (4.47)$$

onde σ_i^x , σ_i^y e σ_i^z são as matrizes de Pauli para o i -ésimo qubit. Assim, medidas locais para o j -ésimo qubit podem ser realizadas com a base $\{|+\rangle_j, |-\rangle_j\}$, onde

$$|+\rangle_j = \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |0\rangle_j + e^{i\phi_j} \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |1\rangle_j \quad (4.48)$$

e

$$|-\rangle_j = \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |1\rangle_j - e^{-i\phi_j} \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |0\rangle_j, \quad (4.49)$$

com $j = A, B, C$ e $\{|0\rangle_j, |1\rangle_j\}$ são os autoestados do operador σ_j^z . Temos também que $\hat{\rho}_i = \text{Tr}_{j,k}(\hat{\rho}) = a\hat{I}_i$, o que implica que $S(\hat{\rho}_{A_i} || \Phi\{\hat{\rho}_{A_i}\}) = 0$.

Assim, a discórdia global para este estado será dada por

$$\delta(\hat{\rho})_{\min\{\theta_i, \phi_i\}} = S(\hat{\rho} || \Phi\{\hat{\rho}\}). \quad (4.50)$$

De acordo com [50], temos

$$S(\hat{\rho}) = 3 - \frac{7}{8} \log_2(1 - c) - \frac{1}{8} (1 + 7c) \log_2(1 + 7c) \quad (4.51)$$

e

$$S(\Phi\{\hat{\rho}\}) = 3 - \frac{3}{4} (1 - c) \log_2(1 - c) - \frac{1}{4} (1 + 3c) \log_2(1 + 3c). \quad (4.52)$$

Desta maneira, a discórdia quântica global será dada por

$$\delta(\hat{\rho}) = -\frac{1}{4} (1 + 3c) \log_2(1 + 3c) + \frac{1}{8} (1 - c) \log_2(1 - c) + \frac{1}{8} (1 + 7c) \log_2(1 + 7c). \quad (4.53)$$

Vemos que, para um estado maximamente emaranhado do tipo GHZ, temos $\delta(\hat{\rho}) = 1$; e para um estado maximamente misto, temos $\delta(\hat{\rho}) = 0$. No primeiro caso, a discórdia global é capaz de capturar toda a correlação que advém do emaranhamento. Já no segundo caso, como o sistema é separável, todas as correlações são clássicas e não há diferença entre medir a entropia do sistema usando qualquer uma das fórmulas para a informação mútua, sendo assim, a discórdia é nula.

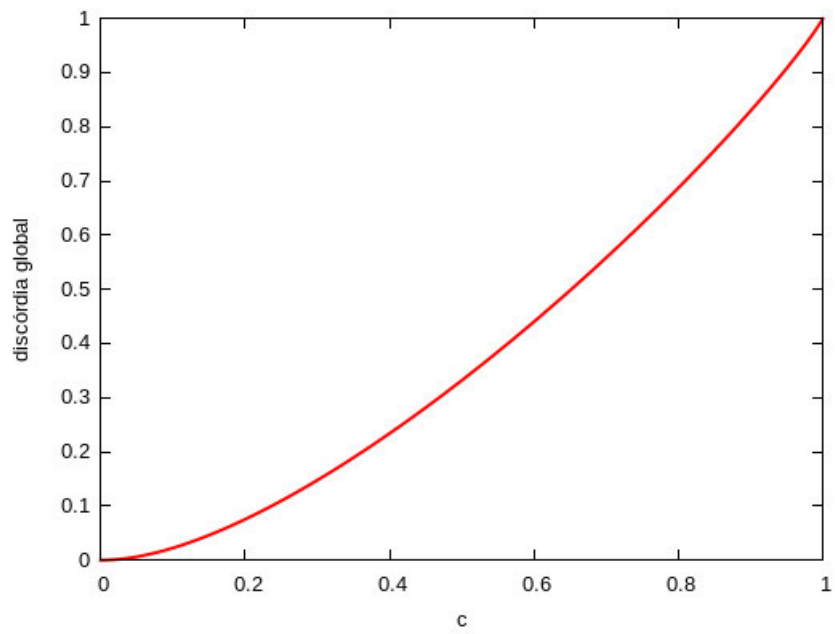


Figura 4.4: Discórdia quântica global para um estado de Werner-GHZ em função do parâmetro c [50].

Capítulo 5

Interferometrias clássica e quântica

“In general, there is no way to explain what an individual photon does, and we have good reasons to believe that this is not just our ignorance, but that this fundamental role of probability is a basic feature of how the universe works.”

Anton Zeilinger

5.1 Interferometrias clássica e quântica

Após mais de cem anos de experimentos quânticos com partículas individuais, um novo campo de interferometria quântica teve início no final dos anos 1980, a interferometria de duas partículas [51, 52]. A essência deste tipo de interferometria reside na aplicação de técnicas de recombinação de feixes de estados quânticos emaranhados [53].

Neste capítulo, vamos discutir acerca dos experimentos de difração por uma abertura estreita e interferência clássica da dupla-fenda de Young, bem como a visão da mecânica quântica sobre tais experimentos, sendo este último conhecido, neste contexto, como experimento de interferência de uma partícula. Vamos também abordar o conceito de interferência quântica entre duas ou mais partículas, o qual também costuma estar bastante associado ao conceito de emaranhamento.

5.1.1 Difração e Interferência

Vamos considerar primeiramente o processo de difração, e, para isto, vamos imaginar a situação em que um feixe de partículas que passa por uma tela com uma única

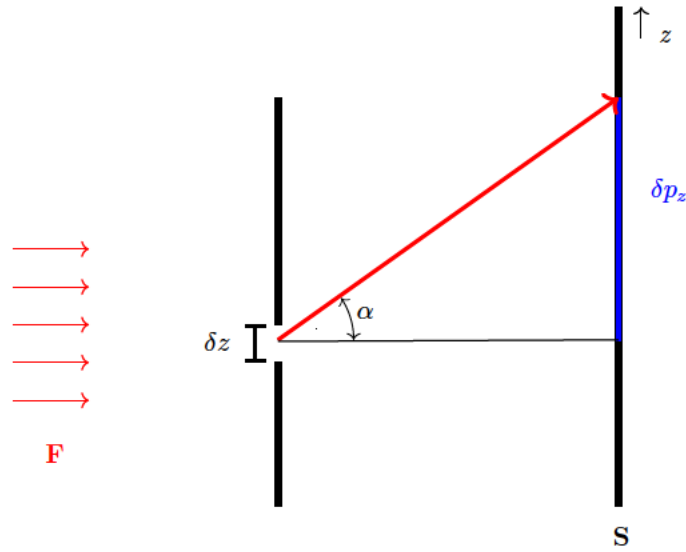


Figura 5.1: Difração por uma fenda: um feixe paralelo de partículas F é difratado através de uma fenda. A largura da fenda δz indica a precisão na posição de uma partícula ao longo do eixo z . Esta precisão está relacionada com a maior ou menor dispersão do momento vertical δp_z (em azul), através da relação de incerteza entre posição e momento linear. α indica o ângulo de dispersão máximo. Adaptado de [26].

abertura, com largura a . Neste caso o ângulo α , que determina a largura do padrão de difração formado ao longo de uma tela de detecção, será relacionado com a largura da abertura por

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a}, \quad (5.1)$$

onde λ é o comprimento de onda de de Broglie associado a uma partícula. Se considerarmos a relação de de Broglie $\lambda = h/p$, onde h é a constante de Planck e p é o momento linear, temos $\sin \alpha = h/pa$. E, além disso, a componente vertical de p será dada por $\delta p_z = p \sin \alpha$. Assim, se considerarmos que a é a incerteza da posição δz da partícula na direção z , temos

$$\delta z \delta p_z \geq h. \quad (5.2)$$

Concluimos que, quanto menor a largura a da fenda é, maior a indeterminação em p_z , e vice-versa [26].

Agora vamos considerar que haja duas fendas, ao invés de uma. Neste caso, podemos citar o experimento clássico da dupla fenda de Young [1], onde a luz monocromática é dividida em dois feixes que, após percorrerem caminhos separados, eles são recombinados.

dos no ponto de observação. Este experimento pode ser descrito sem que recorramos à mecânica quântica, da seguinte forma: o feixe de luz é descrito em termos da amplitude de campo elétrico, sendo o princípio da superposição de ondas aplicado, assim, a amplitude resultante do campo elétrico no ponto de observação será dada pela superposição dos campos oriundos de cada fenda. Esta soma de amplitudes das ondas que chegam à tela de detecção, em fase ou não, possibilita o surgimento de um padrão sinusoidal na intensidade medida na tela de detecção [55].

Entretanto, algo interessante ocorre quando a intensidade da fonte é atenuada: mesmo que o experimento seja performado de modo que tenhamos a certeza que, apenas um fóton passa pelas fendas por vez, o padrão de interferência ainda pode ser observado após um grande número de detecções. A descrição quântica do processo de interferência em um experimento do tipo duas fendas se dá por meio, não mais das amplitudes de campo elétrico provenientes de cada fenda, mas por meio do princípio da superposição, e da soma resultante das amplitudes de probabilidade de uma partícula passar por cada uma das fendas [54, 26]. Neste caso, a função de onda no ponto z da tela de detecção será

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z). \quad (5.3)$$

A densidade de probabilidade de detecção de uma partícula no ponto z será dada por $p(z) = |\psi(z)|^2$. Deste modo,

$$p(z) = p_1(z) + p_2(z) + p_i(z), \quad (5.4)$$

onde $p_1(z) = |\psi_1(z)|^2$, $p_2(z) = |\psi_2(z)|^2$ e $p_i(z) = \psi_1(z)^*\psi_2(z) + \psi_1(z)\psi_2(z)^*$. O último termo da equação (5.4) é chamado termo cruzado, e é o que dá origem ao padrão de interferência.

Quando não há, em princípio, um meio de saber qual caminho a partícula tomou, isto é, quando a partícula não deixa no ambiente qualquer informação física de por qual fenda ela passou, a superposição de amplitudes de probabilidade de passar por cada fenda pode ser aplicada e, neste caso, há origem de um padrão de interferência quântico com máxima visibilidade. Já na situação em que é possível determinar completamente a trajetória da partícula, nenhum padrão de interferência é observado. Temos, portanto, duas situações possíveis que se complementam: comportamento ondulatório, através do padrão de interferência de uma partícula; e comportamento corpuscular, por meio da possibilidade de determinação do caminho da partícula [56]. Estes comportamentos são

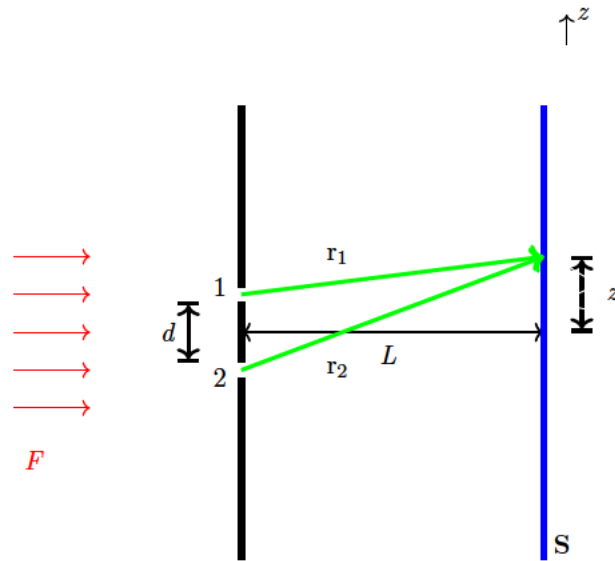


Figura 5.2: Aparato fenda-dupla: um feixe F atravessa um anteparo contendo duas fendas, 1 e 2, separadas por uma distância d . Após percorrerem os caminhos r_1 e r_2 , os feixes são recombinados no ponto z de uma tela de detecção paralela ao anteparo, e que está a uma distância L do mesmo. Adaptado de [26].

manifestações limites, regidos pelo princípio da complementaridade, quando aplicado às propriedades posição e momento linear conjugado de uma partícula [57]. Niels Bohr considerou que haviam apenas os dois extremos acima citados: se o experimento era tal que havia a possibilidade de determinar o caminho da partícula, nenhum padrão de interferência era formado; se no experimento não havia como determinar o caminho, o padrão de interferência aparecia. Para Bohr, as descrições da realidade microscópica estavam intimamente relacionadas à interação entre o aparato experimental e o objeto de experimento, e que era necessário escolher qual das duas manifestações experimentais iria ser observada, pois elas eram mutuamente excludentes: “somos apresentados à escolha de traçar o caminho da partícula *ou* observar os efeitos de interferência” [58].

Trabalhos posteriores demonstraram, porém, que esses dois extremos experimentais considerados por Bohr, são só duas manifestações de uma situação mais geral em que é possível ter informação parcial sobre caminho e ainda assim obter um padrão parcial de interferência [59, 60]. É possível, também, relacionar matematicamente duas quantidades interferométricas que estão atreladas, respectivamente, a qual caminho a partícula tomou (distinguíbilidade) e o padrão de interferência formado em uma tela de detecção (visibil-

idade) [61]. A relação matemática entre distinguibilidade e visibilidade é dada por meio de uma desigualdade, conhecida como relação de dualidade Englert–Greenberger–Yasin [62, 63], sendo que, máxima distinguibilidade significa nenhuma visibilidade do padrão de interferência, e padrão de interferência maximamente visível significa nenhuma informação a respeito do caminho tomado por cada partícula. Até aqui, nossa análise neste capítulo se restringiu aos experimentos de única e dupla-fenda, envolvendo uma única partícula.

5.1.2 Interferência quântica de duas partículas

Experimentos envolvendo interferência quântica de duas partículas podem envolver mais de um tipo de fenômenos [4, 51, 52]. Aqui vamos considerar uma situação específica, envolvendo duas partículas, a e b , descritas por uma única função de onda $\Psi(\vec{r}_a, \vec{r}_b; t)$; cuja a probabilidade de detecção conjunta de a no ponto $\vec{r}_a$ e de b no ponto $\vec{r}_b$, em coincidência, é dada por

$$P = |\Psi(\vec{r}_a, \vec{r}_b; t)|^2. \quad (5.5)$$

Aqui, também, há dois tipos de situação que se complementam: se, em um experimento envolvendo este par de partículas, existe a possibilidade determinar o caminho tomado por uma partícula por meio da observação da trajetória da outra, então as taxas de detecção individuais em cada detector serão constantes, e não haverá padrões de interferência individuais, por motivos já explicados nas seções anteriores. Entretanto, quando se analisa a taxa de detecção conjunta dos dois detectores (5.5), a mesma têm dependência sinusoidal, e este é um tipo de interferência não-local, que é uma característica da mecânica quântica [64]. Por outro lado, se o experimento é tal que não existe a possibilidade de determinar o caminho de uma partícula por meio da observação da outra, então ambas as partículas podem apresentar padrões individuais em cada tela de detecção, mas não haverá padrão sinusoidal na probabilidade de detecção em coincidência [65].

Vale ressaltar que, em todos os casos descritos, tanto para o experimento com uma única partícula descrito na seção anterior, como para o par de partículas aqui mencionado, não é necessário que nenhuma observação seja realmente feita, o que importa é que exista a informação armazenada no experimento, que pode ser coletável ou não, de “por qual caminho” a partícula passou. O “rastro” físico deixado pela partícula é o que destrói, parcial ou completamente, o padrão de interferência.

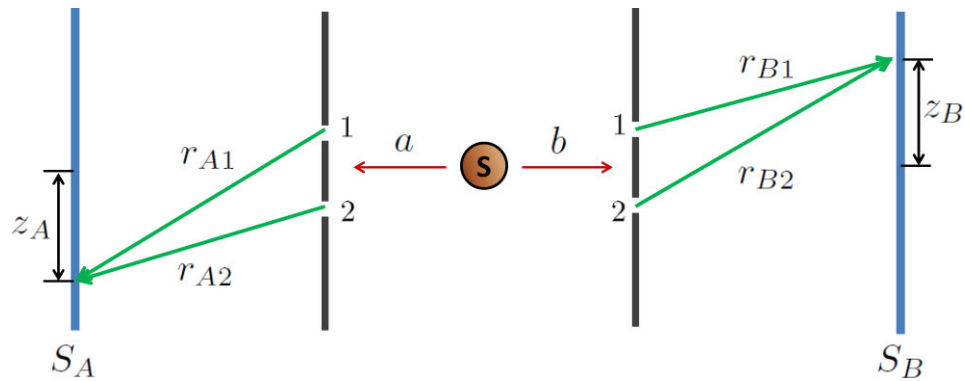


Figura 5.3: Uma fonte S gera um par de partículas, a e b , que são submetidas aos aparatos tipo fenda-dupla à esquerda e à direita, respectivamente. Após passarem por cada aparato, as partículas são detectadas nas telas S_A e S_B , nos pontos z_A e z_B .

Para uma melhor visualização do experimento envolvendo um par de partículas, vamos considerar o exemplo de uma fonte S , que emite um par de partículas, a e b . Esta fonte está posicionada no meio de um interferômetro constituído de duas placas paralelas e opacas, com duas fendas simetricamente posicionadas em cada placa. Também há duas telas de detecção posicionadas atrás de cada placa, S_A e S_B , respectivamente. Os detectores marcam as coordenadas verticais para as quais o par de partículas chega.

Se a fonte S está inicialmente com sua posição vertical bem definida, para que a relação de incerteza seja satisfeita, o seu momento linear vertical deve possuir grande dispersão. Neste caso, por causa da dispersão vertical do momento, não haverá como determinar a trajetória de uma partícula com base na observação da outra. Entretanto, se a fonte se encontra aproximadamente em repouso, a incerteza com relação a sua localização vertical é considerável, já que o seu momento linear vertical é bem definido. Deste modo, pelo princípio da conservação do momento linear, as duas partículas emitidas se deslocarão em direções opostas, sendo possível determinar o caminho de uma através da observação da outra.

O tipo de interferência predominante que poderá surgir está relacionado com a geometria vertical da fonte e com a distância entre as fendas. Por exemplo, uma fonte dispersa (verticalmente larga), isto é, onde a largura vertical D da fonte é tal que, $D \gg \lambda/\theta$, onde θ é o ângulo formado entre o par de aberturas e λ é o comprimento de onda (óptico ou de de Broglie), provoca o apagamento das franjas de interferência individuais, já que há uma precisão maior no momento linear vertical, pela relação de incerteza, o que

acarreta na pouca iluminação simultânea das fendas. Por outro lado, no caso de uma fonte bem localizada ($D \ll \lambda/\theta$) há a origem de padrões de interferência individuais em cada tela de detecção, já que isto implicará numa maior dispersão do momento linear vertical, novamente pela relação de incerteza, e portanto, as fendas serão ambas bem iluminadas simultaneamente

5.1.3 Quantificação da interferência quântica genuína entre dois qubits

Para a configuração do experimento da figura (5.3), vamos denominar $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ os estados quânticos para a partícula a , correspondentes às passagens pelas fendas 1 e 2 à esquerda, respectivamente. De modo análogo, vamos nomear $|B_1\rangle$ e $|B_2\rangle$ os estados quânticos para a partícula b , que correspondem às passagens pelas fendas 1 e 2 à direita, respectivamente. Podemos estabelecer a base para o sistema bipartido AB através de quatro estados quânticos ortogonais, dados pelos produtos tensoriais $|A_i\rangle |B_j\rangle$, com $i, j = 1, 2$. Assim, o operador densidade que descreve genericamente este sistema é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \rho_{11} |A_1\rangle |B_1\rangle \langle A_1| \langle B_1| + \rho_{12} |A_1\rangle |B_1\rangle \langle A_1| \langle B_2| + \rho_{13} |A_1\rangle |B_1\rangle \langle A_2| \langle B_1| + \\ & \rho_{14} |A_1\rangle |B_1\rangle \langle A_2| \langle B_2| + \rho_{21} |A_1\rangle |B_2\rangle \langle A_1| \langle B_1| + \rho_{22} |A_1\rangle |B_2\rangle \langle A_1| \langle B_2| + \\ & \rho_{23} |A_1\rangle |B_2\rangle \langle A_2| \langle B_1| + \rho_{24} |A_1\rangle |B_2\rangle \langle A_2| \langle B_2| + \rho_{31} |A_2\rangle |B_1\rangle \langle A_1| \langle B_1| + \\ & \rho_{32} |A_2\rangle |B_1\rangle \langle A_1| \langle B_2| + \rho_{33} |A_2\rangle |B_1\rangle \langle A_2| \langle B_1| + \rho_{34} |A_2\rangle |B_1\rangle \langle A_2| \langle B_2| + \\ & \rho_{41} |A_2\rangle |B_2\rangle \langle A_1| \langle B_1| + \rho_{42} |A_2\rangle |B_2\rangle \langle A_1| \langle B_2| + \rho_{43} |A_2\rangle |B_2\rangle \langle A_2| \langle B_1| + \\ & \rho_{44} |A_2\rangle |B_2\rangle \langle A_2| \langle B_2|, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde ρ_{ij} com $i, j = 1, 2, 3$ e 4 são os elementos de matriz na base referida.

Estamos interessados em obter a densidade de probabilidade conjunta para este sistema, pois, a partir desta, poderemos computar a interferência de duas partículas. Para tanto, vamos calcular a densidade probabilidade conjunta de detecção da partícula a no ponto z_A , e da partícula b no ponto z_B , respectivamente em S_A e S_B . Esta densidade conjunta é dada por

$$\rho(z_A, z_B) \equiv \langle z_A | \langle z_B | \hat{\rho} | z_B \rangle | z_A \rangle, \quad (5.7)$$

onde $|z_A\rangle$ e $|z_B\rangle$ são os respectivos autoestados de posição.

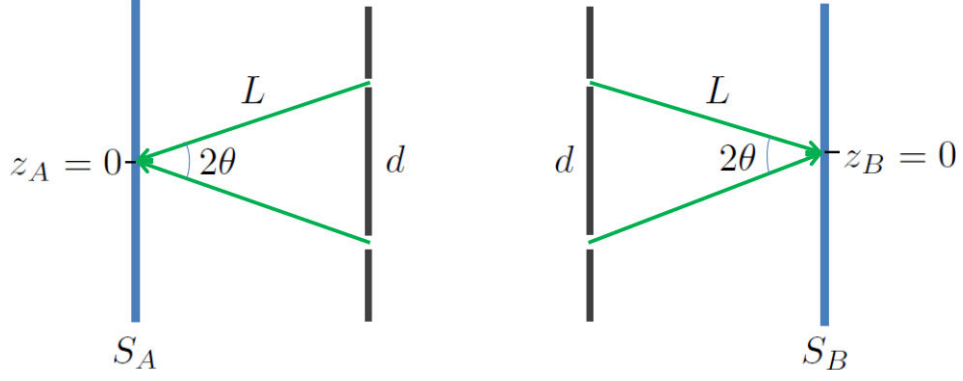


Figura 5.4: Diagrama do aparato apresentado na figura (5.3). O ângulo θ , bem como os parâmetros L e d são úteis para a determinação da densidade de probabilidade conjunta de detecção das partículas em S_A e S_B .

Vamos assumir que, após atravessar uma fenda, a função de onda associada à partícula emergente tem forma esférica. Desta maneira, podemos escrever

$$\psi_{Al}(r_{Al}) = \langle r_{Al} | A_l \rangle = \frac{e^{ikr_{Al}}}{r_{Al}} \quad (5.8)$$

e

$$\psi_{Bl}(r_{Bl}) = \langle r_{Bl} | B_l \rangle = \frac{e^{ikr_{Bl}}}{r_{Bl}}, \quad (5.9)$$

para as partículas à esquerda e à direita, respectivamente. Aqui, k representa o número de onda, e $r_{(A,B)l}$ as distâncias entre as fendas e pontos de detecção, com $l = 1, 2$, como ilustrado na figura (5.3).

No limite em que a distância entre as fendas é muito menor que a distância do aparato até à tela de detecção, podemos considerar que o regime de difração de Fraunhofer é válido [66, 67]. Então, temos $r_{A(1,2)} \approx L \mp \theta z_A$ e $r_{B(1,2)} \approx L \mp \theta z_B$, com L e θ definidos na figura (5.4).

Levando em consideração estas informações, podemos reescrever (5.7) como

$$\begin{aligned} \rho(z_A, z_B) = & \frac{\rho_{11}}{L^3[L - 2\theta(z_A + z_B)]} + \frac{\rho_{22}}{L^3[L - 2\theta(z_A - z_B)]} + \frac{\rho_{33}}{L^3[L + 2\theta(z_A - z_B)]} + \\ & \frac{\rho_{44}}{L^3[L + 2\theta(z_A + z_B)]} + \frac{2}{L^4} \left[\text{Re}(\rho_{23}e^{-2ik\theta(z_A - z_B)}) + \text{Re}(\rho_{14}e^{-2ik\theta(z_A + z_B)}) + \right. \\ & \left. \text{Re}(\rho_{24}e^{-2ik\theta z_A}) + \text{Re}(\rho_{13}e^{2ik\theta z_A}) + \text{Re}(\rho_{12}e^{2ik\theta z_B}) + \text{Re}(\rho_{34}e^{-2ik\theta z_B}) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Rearranjando esta expressão, temos

$$\begin{aligned}
\rho(z_A, z_B) = & \frac{\rho_{11}}{L^3[L - 2\theta(z_A + z_B)]} + \frac{\rho_{22}}{L^3[L - 2\theta(z_A - z_B)]} + \frac{\rho_{33}}{L^3[L + 2\theta(z_A - z_B)]} + \\
& \frac{\rho_{44}}{L^3[L + 2\theta(z_A + z_B)]} + \frac{2}{L^4} \left[[R_{23} + R_{14}] \cos(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) + \right. \\
& [R_{23} - R_{14}] \sin(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) + [I_{23} + I_{14}] \sin(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) + \\
& [I_{14} - I_{23}] \cos(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) + [R_{13} + R_{24}] \cos(2k\theta z_A) + \\
& \left. [R_{12} + R_{34}] \cos(2k\theta z_B) + [I_{24} - I_{13}] \sin(2k\theta z_A) + [I_{34} - I_{12}] \sin(2k\theta z_B) \right], \quad (5.11)
\end{aligned}$$

onde usamos a notação $\rho_{ij} = R_{ij} + iI_{ij}$ para as entradas da matriz densidade, com i sendo a unidade imaginária, e, R_{ij} e I_{ij} as partes real e imaginária de ρ_{ij} , respectivamente. Podemos observar que, os quatro primeiros termos da equação (5.11) representam as densidades de probabilidade de detecção das partículas a e b , respectivamente, nos pontos z_A e z_B para os casos em que há informação completa sobre o caminho que cada partícula tomou, ou seja, por qual fenda elas passaram. Estes termos não contribuem com nenhum tipo de efeitos de interferência. Os primeiros quatro termos dentro dos colchetes quantificam a existência de oscilações na taxa de detecção em coincidência das partículas a e b , nas respectivas telas de detecção. Por último, os quatro últimos termos dos colchetes são responsáveis por efeitos de interferência de uma única partícula. Isto significa que estes últimos termos dão origem a padrões espaciais de interferência individuais nas telas de detecção.

Uma oscilação na taxa de detecção conjunta de pares de partículas a e b , advinda da interferência de duas partículas, é um fenômeno puramente quântico, sem qualquer analogia clássica. Entretanto, devemos considerar também que, ao considerar-se conjuntamente os padrões de interferência individuais em cada tela, estes vão contribuir nas medidas da taxa de detecção conjunta, embora não sejam, obviamente, características da interferência de duas partículas. Assim, a interferência entre duas partículas só é contabilizada corretamente quando subtrairmos esses padrões individuais. Após a subtração, restará apenas a interferência que caracteriza uma correlação *não-local* entre a e b .

Para exemplificar melhor o argumento de subtração dos termos que representam interferências individuais, vamos considerar o modo oscilatório $\cos(2k\theta z_A)\cos(2k\theta z_B)$. Na equação (5.11), vemos que este termo acompanha o fator $2(R_{23} + R_{14})$ e, como mencionado anteriormente, este termo é um dos quatro que representam a *interferência quântica genuína* entre duas partículas. Podemos notar ainda que o produto de ter-

mos de interferência individual $4[(R_{13} + R_{24})(R_{12} + R_{34})]$ também está associado ao modo oscilatório $\cos(2k\theta z_A)\cos(2k\theta z_B)$. Desta maneira, devemos subtrair o segundo caso do primeiro, para que tenhamos apenas *interferência quântica genuína* entre duas partículas. O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado para os outros três modos oscilatórios: os termos $2(R_{23} - R_{14})$ e $4[(I_{24} - I_{13})(I_{34} + I_{12})]$ contribuem com o modo oscilatório $\sin(2k\theta z_A)\sin(2k\theta z_B)$; os termos $2(I_{23} + I_{14})$ e $4[(I_{24} - I_{13})(R_{12} + R_{34})]$ contribuem com o modo $\sin(2k\theta z_A)\cos(2k\theta z_B)$; e os termos $2(I_{14} - I_{23})$ e $4[(R_{13} + R_{24})(I_{34} + I_{12})]$ contribuem com uma interferência do tipo $\cos(2k\theta z_A)\sin(2k\theta z_B)$.

Os quatro modos oscilatórios acima considerados formam uma base para funções bidimensionais oscilatórias com período $\ell = \pi/k\theta$ para z_A e z_B . Portanto, podemos escrever

$$f(z_A, z_B) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) + C \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) + D \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right), \quad (5.12)$$

onde

$$A = 4/\ell^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(z_A, z_B) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) dz_A dz_B, \quad (5.13)$$

$$B = 4/\ell^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(z_A, z_B) \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) dz_A dz_B, \quad (5.14)$$

$$C = 4/\ell^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(z_A, z_B) \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) dz_A dz_B, \quad (5.15)$$

$$D = 4/\ell^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(z_A, z_B) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} z_A\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} z_B\right) dz_A dz_B. \quad (5.16)$$

Assim, os quatro modos oscilatórios bidimensionais, apresentados na equação (5.11), são linearmente independentes, o que nos permite analisá-los separadamente.

Baseando-se nos argumentos apresentados acima, podemos construir um quantificador de interferência genuína entre dois qubits, isto é, duas partículas a e b , submetidas ao aparato apresentado na figura (5.3). Este quantificador nos fornece a quantidade de *interferência quântica genuína*, e é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{(2)}(\hat{\rho}) \equiv 2 \Big\{ & |(R_{23} + R_{14})^2 - 4[(R_{13} + R_{24})(R_{12} + R_{34})]|^2 \\ & + |(R_{23} - R_{14})^2 - 4[(I_{24} - I_{13})(I_{34} - I_{12})]|^2 \\ & + |(I_{23} + I_{14})^2 - 4[(I_{24} - I_{13})(R_{12} + R_{34})]|^2 \\ & + |(I_{14} - I_{23})^2 - 4[I_{34} - I_{12})(R_{13} + R_{24})]|^2 \Big\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

dado em termos das entradas da matriz densidade $\hat{\rho}$. O índice superescrito 2 na expressão $\mathcal{I}_2^{(2)}(\hat{\rho})$ indicam a dimensão do espaço de Hilbert de cada parte; enquanto o índice 2 subscrito indica a quantidade de partes.

Vamos analisar o quantificador dado em (5.17) para alguns casos. Por simplicidade, vamos considerar que: $|A_1\rangle|B_1\rangle \rightarrow |00\rangle$, $|A_1\rangle|B_2\rangle \rightarrow |01\rangle$, $|A_2\rangle|B_1\rangle \rightarrow |10\rangle$ e $|A_2\rangle|B_2\rangle \rightarrow |11\rangle$. Estados puros gerais de dois qubits podem ser escritos nas formas $|\Phi(\theta, \phi)\rangle = \cos\theta|00\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|11\rangle$ e $|\Psi(\theta, \phi)\rangle = \cos\theta|01\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|10\rangle$, para os quais temos $\mathcal{I}_2^{(2)} = \sin^2(2\theta)$. Vemos que este resultado é independente de ϕ , e ainda que $\mathcal{I}_2^{(2)} = 1$ para os estados de Bell, que são obtidos quando fazemos $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ (para $\phi = 0$), e $\mathcal{I}_2^{(2)} = 0$ para estados separáveis, obtidos quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. Outro exemplo importante é quando consideramos um estado arbitrário puro separável, $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$, com $|\psi_A\rangle = \cos(\theta_1/2)|0\rangle + e^{i\phi_1}\sin(\theta_1/2)|1\rangle$ e $|\psi_B\rangle = \cos(\theta_2/2)|0\rangle + e^{i\phi_2}\sin(\theta_2/2)|1\rangle$. Neste caso é possível mostrar que $\mathcal{I}_2^{(2)} = 0$, o que é esperado para estados puros separáveis. Podemos perceber que o quantificador é eficaz na captação das correlações desde estados maximamente emaranhados, até os totalmente separáveis.

Ainda é possível analisar o seguinte estado misto

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

para o qual temos $\mathcal{I}_2^{(2)} = 0$, como seria esperado. Devido ao fato do quantificador $\mathcal{I}_2^{(2)}$ ser nulo para o caso em que todos os elementos de fora da diagonal principal serem nulos, poderíamos estar tentados a achar que há uma conexão entre este e o conceito de coerência quântica, já que ambos apresentam esta mesma propriedade [68, 69].

Vamos analisar agora o caso do estado de Werner de dois qubits, definido como

$$\hat{\rho}_W = p|\psi^{(-)}\rangle\langle\psi^{(-)}| + \frac{1-p}{4}\hat{\mathbf{1}}. \quad (5.19)$$

Como demonstrado nos capítulos anteriores, para este estado, a discórdia quântica é não nula para $p \geq 0$, e o emaranhamento de formação é não-nulo para $p \geq 1/3$. Podemos comparar os comportamentos da discórdia quântica e do emaranhamento de formação com o quantificador dado em (5.17), em função do parâmetro p . A partir da figura (5.5), podemos perceber que há interferência de duas partículas mesmo quando não há emaran-

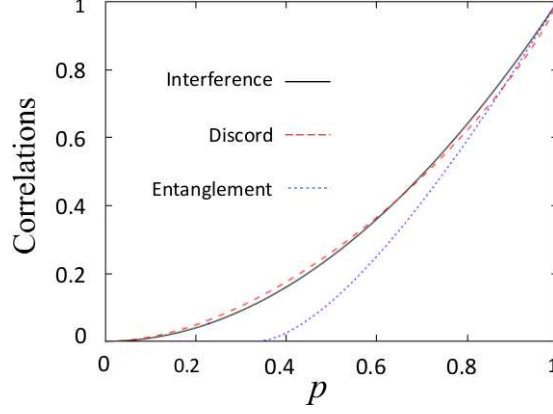


Figura 5.5: Gráfico comparando a *interferência quântica genuína* com o emaranhamento de formação e a discórdia, para o estado de Werner de dois qubits, como função do parâmetro p . Podemos notar que tanto $\mathcal{I}_2^{(2)}$ como a discórdia são não-nulas para $0 \leq p \leq 1/3$, ou seja, mesmo quando o estado é separável. Todas as três correlações possuem valor 1 quando $p = 1$.

hamento. Esta descoberta contraria a ideia de que é preciso que haja emaranhamento para que haja interferência de duas partículas [2].

5.1.4 Quantificação da interferência quântica genuína entre três qubits

De maneira similar à abordagem feita na seção anterior, vamos tratar agora do caso de três qubits. Para tal, vamos imaginar que uma fonte emite simultaneamente três partículas a , b e c , e que estas partículas são enviadas separadamente para cada um dos três aparatos tipo fenda-dupla apresentados na figura (5.6). Vamos nomear os estados $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ para a partícula a passando pelas fendas 1 e 2 do seu respectivo aparato experimental; $|B_1\rangle$ e $|B_2\rangle$ para a partícula b ; e $|C_1\rangle$ e $|C_2\rangle$ para a partícula c . Podemos escolher como base os estados-produto $|A_i\rangle |B_j\rangle |C_k\rangle$, com $i, j, k = 1, 2$, para representar um estado geral do sistema tripartido em questão. Como no caso anterior, podemos representar o operador densidade nesta base (ver apêndice A).

Neste caso, a densidade de probabilidade conjunta de medirmos a , b e c nos pontos z_A , z_B e z_C , em coincidência, é dada por

$$\rho(z_A, z_B, z_C) \equiv \langle z_A | \langle z_B | \langle z_C | \hat{\rho} | z_C \rangle | z_B \rangle | z_A \rangle. \quad (5.20)$$

Se assumirmos que as funções de onda das partículas, após emergirem das fendas,

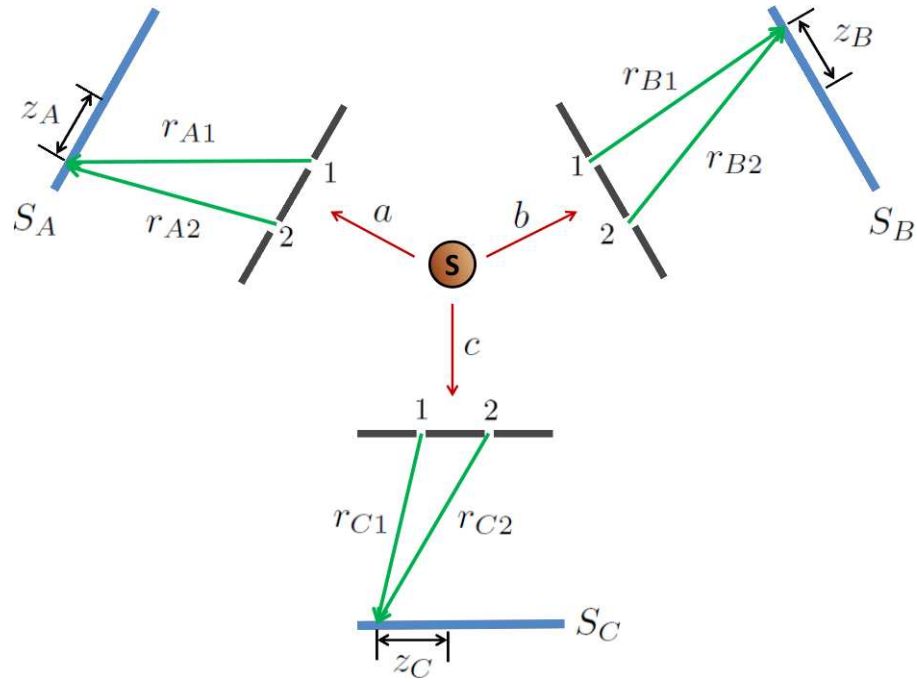


Figura 5.6: Ilustração de um sistema de três qubits: uma fonte S emite três partículas a , b e c . Posteriormente cada partícula é submetida a um aparato do tipo fenda-dupla. Após passarem pelos aparatos, tais partículas são detectadas nas telas S_A , S_B e S_C , que marcam suas posições nos pontos z_A , z_B e z_C , respectivamente. Investigando os comportamentos de interferência de uma única partícula, duas partículas e três partículas produzidas por este experimento, pode-se obter informações sobre a *interferência quântica genuína* entre três partículas.

são esféricas, e que a geometria de cada um dos aparatos é tal que é possível aplicar o limite de difração de Fraunhofer, temos uma densidade de probabilidade conjunta, cuja expressão se encontra no apêndice A.

Como mencionado no capítulo 3, quando tratamos de um sistema de três qubits, os mesmos podem apresentar emaranhamento tripartido através de duas classes distintas: estados do tipo GHZ e estados do tipo W . Para a classe GHZ , se medirmos o estado de um dos subsistemas, os outros dois subsistemas passarão a estar em um estado puro separável. Já para a classe W , se medirmos um subsistema os outros dois subsistemas passarão a estar em um estado emaranhado bipartido. Inferimos disto que um sistema de três qubits pode produzir dois tipos inequivalentes de interferência de três partículas: um que existe quando todas as três partículas são monitoradas simultaneamente, que chamaremos de interferência do tipo GHZ ; e outro que aparece apenas quando as partículas são monitoradas aos pares, que chamaremos de interferência do tipo W .

A partir desta argumentação, para construir um quantificador de interferência do tipo GHZ , esperamos que os únicos efeitos de interferência produzidos por estados do tipo GHZ sejam oscilações nas taxas de detecção conjunta das três partículas. Estas oscilações podem ser observadas quando se varia as posições relativas dos pontos de detecção z_A , z_B and z_C . Por outro lado, não esperamos nenhum outro tipo de interferência para estados do tipo GHZ , como por exemplo, quando temos oscilações na taxa de coincidência observando apenas um par de partículas, ou no caso de interferência espacial de uma única partícula.

Assim, como feito para o caso de dois qubits, podemos quantificar a *interferência quântica genuína* de três partículas, a partir da expressão para densidade de probabilidade de detecção conjunta, que se encontra no apêndice A. Novamente, para contabilizar corretamente a interferência de três partículas para tipo GHZ , é preciso levar em conta que combinações de produtos de funções oscilatórias de duas partículas com uma função oscilatória de uma única partícula, ou até mesmo a combinação de produtos de três funções oscilatórias de uma única partícula, podem produzir um comportamento que poderia ser confundido com uma interferência genuína produzida por um estado GHZ . Deste modo, devemos subtrair os efeitos destas combinações para que reste apenas a *interferência quântica genuína* de três partículas.

Se estamos interessados, por exemplo, em estudar o termo de interferência

$\{\cos(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)\}$, vemos que o mesmo está associado à soma $R_{18} + R_{27} + R_{36} + R_{45}$, aos produtos $(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{14} + R_{23} + R_{58} + R_{67})$, $(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(R_{16} + R_{25} + R_{38} + R_{47})$, $(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})(R_{17} + R_{28} + R_{35} + R_{46})$, e ao produto $(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})$. Entre todas estas contribuições, a única que está relacionada com *interferência quântica genuína* de três partículas é a do fator $\{R_{18} + R_{27} + R_{36} + R_{45}\}$. Além do modo de interferência do tipo $\cos(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$, há ainda, na expressão para a densidade de probabilidade conjunta, outros sete modos de interferência de três partículas, e que são linearmente independentes.

Finalmente, podemos construir o quantificador para *interferência quântica genuína* de três partículas de estados do tipo GHZ , que é dado por

$$\mathcal{I}_{GHZ}(\hat{\rho}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 \mathcal{I}_{GHZ}^{(i)}, \quad (5.21)$$

onde os elementos $\mathcal{I}_{GHZ}^{(i)}$ estão listados no apêndice A.

Vamos exemplificar a validade do quantificador dado em Eq. (5.21). Por simplicidade, vamos considerar a base computacional para os três qubits: $|A_1\rangle |B_1\rangle |C_1\rangle \rightarrow |000\rangle$; $|A_1\rangle |B_1\rangle |C_2\rangle \rightarrow |001\rangle$; $|A_1\rangle |B_2\rangle |C_1\rangle \rightarrow |010\rangle$; $|A_1\rangle |B_2\rangle |C_2\rangle \rightarrow |011\rangle$; $|A_2\rangle |B_1\rangle |C_1\rangle \rightarrow |100\rangle$; $|A_2\rangle |B_1\rangle |C_2\rangle \rightarrow |101\rangle$; $|A_2\rangle |B_2\rangle |C_1\rangle \rightarrow |110\rangle$ e $|A_2\rangle |B_2\rangle |C_2\rangle \rightarrow |111\rangle$. Assim, temos que o estado $|\psi\rangle_1 = \cos(\alpha) |000\rangle + e^{i\phi} \sin(\alpha) |111\rangle$ nos fornece $\mathcal{I}_{GHZ} = \sin^2(2\alpha)$. Para $\alpha = \pi/4$ ou $3\pi/4$, temos $\mathcal{I}_{GHZ}(\hat{\rho}) = 1$, que corresponde a estados GHZ maximamente emaranhados. Por outro lado, para o caso de estados arbitrários separáveis, $|\psi\rangle_2 = |\psi_A\rangle |\psi_B\rangle |\psi_C\rangle$, com $|\psi_A\rangle = \cos(\theta_1/2) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin(\theta_1/2) |1\rangle$, $|\psi_B\rangle = \cos(\theta_2/2) |0\rangle + e^{i\phi_2} \sin(\theta_2/2) |1\rangle$ e $|\psi_C\rangle = \cos(\theta_3/2) |0\rangle + e^{i\phi_3} \sin(\theta_3/2) |1\rangle$, temos $\mathcal{I}_{GHZ} = 0$.

Nos voltamos agora para a produção de *interferência quântica genuína* de três partículas de estados do tipo W , no aparato da figura (5.6). Neste caso, efeitos de interferência do tipo W surgem quando observamos duas partículas por vez nas telas de detecção, mas não há efeitos de interferência simultâneos de três partículas, e nem de uma única partícula. Assim, efeitos de interferência para os estados W são detectáveis apenas quando as partículas são detectadas em pares, i.e., quando são verificadas oscilações na taxa de detecção apenas quando se varia a posição relativa de dois pontos de detecção tomados dentre z_A , z_B e z_C . Para quantificar a interferência para estados do tipo W devemos nos voltar novamente para a densidade de probabilidade dada na equação (6.6). Devemos

encontrar todos os termos que contêm o produto de duas funções oscilatórias das variáveis z_A , z_B e z_C , assim como também a combinação (produto) de funções oscilatórias individuais que produzem efeitos similares. Estas quantidades estão listadas no apêndice A.

Dados os quantificadores para todos os modos possíveis de interferência de duas partículas, e sabendo que estados do tipo W apresentam *interferência quântica genuína* se todas as três partículas são quanticamente correlacionadas, mas que estas correlações se estabelecem apenas entre pares de partículas, podemos escrever um quantificador para estados do tipo W . Assim, a *interferência quântica genuína* para estados do tipo W para um estado arbitrário de três qubits é dada por

$$\mathcal{I}_W(\hat{\rho}) = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \left[\sum_{i=1}^4 \mathcal{I}_{Wab}^{(i)} \sum_{j=1}^4 \mathcal{I}_{Wac}^{(j)} \sum_{k=1}^4 \mathcal{I}_{Wbc}^{(k)} \right], \quad (5.22)$$

com $\mathcal{I}_{Wab}^{(i)}$, $\mathcal{I}_{Wac}^{(j)}$ e $\mathcal{I}_{Wbc}^{(k)}$ dados pelo conjunto de equações de (6.15) até (6.26), que se encontram no apêndice A. O fator de normalização $(9/8)^3$ foi introduzido para estabelecer que $\mathcal{I}_W(\hat{\rho}) = 1$, para estados maximamente emaranhados do tipo W . Testando este quantificador um estado arbitrário puro e separável, da forma $|\psi\rangle_1 = |\psi_A\rangle |\psi_B\rangle |\psi_C\rangle$, com $|\psi_A\rangle = \cos(\theta_1/2) |0\rangle + e^{i\phi_1} \sin(\theta_1/2) |1\rangle$, $|\psi_B\rangle = \cos(\theta_2/2) |0\rangle + e^{i\phi_2} \sin(\theta_2/2) |1\rangle$ e $|\psi_C\rangle = \cos(\theta_3/2) |0\rangle + e^{i\phi_3} \sin(\theta_3/2) |1\rangle$, obtemos $\mathcal{I}_W(\hat{\rho}) = 0$, como esperado. Para um estado geral do tipo W , $|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} [|100\rangle + e^{i\phi_1} |010\rangle + e^{i\phi_2} |001\rangle]$, obtemos $\mathcal{I}_W(\hat{\rho}) = 1$.

De um modo geral, para quantificar a interferência quântica genuína de três partículas, precisamos somar os quantificadores para estados dos tipos GHZ e W , sendo esses quantificadores independentes entre si, ou seja, quantificam interferência para duas as classes distintamente. Deste modo, o quantificador geral é dado por

$$\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho}) = \mathcal{I}_{GHZ}(\hat{\rho}) + \mathcal{I}_W(\hat{\rho}), \quad (5.23)$$

com $\mathcal{I}_{GHZ}(\hat{\rho})$ e $\mathcal{I}_W(\hat{\rho})$ dados pelas equações (5.21) e (5.22), respectivamente. Os índices 3 e 2 em $\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho})$ indicam o número de partes e a dimensão do espaço de Hilbert de cada parte, respectivamente. De acordo com os testes realizados com o quantificador geral, observamos que $\mathcal{I}_{GHZ}(\hat{\rho}) > 0$ e $\mathcal{I}_W(\hat{\rho}) = 0$ para todos os estados do tipo GHZ , e $\mathcal{I}_{GHZ}(\hat{\rho}) = 0$ e $\mathcal{I}_W(\hat{\rho}) > 0$ para todos os estados do tipo W , como esperado.

Vamos considerar o estado misto de três qubits a seguir, conhecido estado Werner- GHZ . Este estado pode ser definido como uma mistura do estado GHZ e da identidade

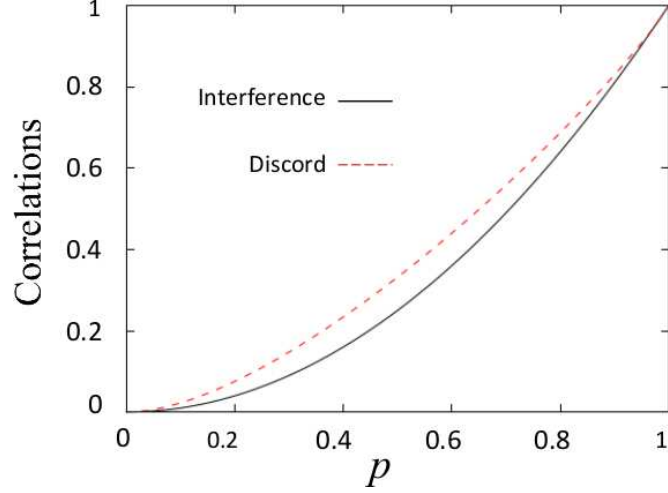


Figura 5.7: Gráficos da interferência quântica $\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho}_W^{(GHZ)})$ e da discórdia quântica global para o estado Werner- GHZ , dados pela equação (5.24). Como podemos ver, ambos os quantificadores são não-nulos no intervalo $0 \leq p \leq 1/5$, para o qual o estado é separável [14, 70].

[71, 72, 73]:

$$\hat{\rho}_W^{(GHZ)} = p |GHZ\rangle \langle GHZ| + \frac{1-p}{8} \hat{\mathbf{1}}, \quad (5.24)$$

com $0 \leq p \leq 1$.

Na figura (5.7) comparamos nossos resultados, dados na equação (5.23), com a discórdia quântica global, dada na referência [?] para o estado Werner- GHZ . Como podemos ver, ambas as quantidades são não-nulas para $p > 0$. Este estado é separável para $p < 1/5$ [14, 70], e biseparável para $p < 3/7$ [74]. Estes resultados confirmam que alguns estados separáveis, bem como biseparáveis, podem exibir efeitos de interferência de três partículas. É importante chamar atenção para o fato de que a interferência computada para o estado Werner- GHZ , $\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho}_W^{(GHZ)})$, possui contribuições apenas do estado tipo GHZ , ou seja, $\mathcal{I}_W(\hat{\rho}_W^{(GHZ)}) = 0$ para todos os valores do parâmetro p .

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Durante o desenvolvimento deste trabalho, propusemos um método para quantificar correlações quânticas através da *interferência quântica genuína* de duas e três partículas, que é um fenômeno puramente quântico. Esta interferência, em cada caso estudado, é produzida por uma composição de sistemas, em que cada parte consiste de um aparato do tipo dupla-fenda. As expressões obtidas em cada caso abordado neste trabalho são funções de elementos da respectiva matriz densidade, de modo que cada quantificador funciona para um sistema genérico de dois e três qubits.

Em casos especiais, onde consideramos estados puros, estes quantificadores servem para medir emaranhamento em sistemas de dois e três qubits. De fato, os quantificadores $\mathcal{I}_2^{(2)}(\hat{\rho})$ e $\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho})$ satisfazem alguns axiomas necessários para candidatos a quantificadores de emaranhamento [32], como:

- O emaranhamento não pode aumentar sob operações locais e comunicação clássica (monotonicidade) ;
- O emaranhamento desaparece para estados separáveis: $\mathcal{I}_2^{(2)}(\hat{\rho})_{sep} = 0$ e $\mathcal{I}_3^{(2)}(\hat{\rho})_{sep} = 0$;

Além dos dois axiomas acima, nossos quantificadores satisfazem a condição de normalização: $\mathcal{I}(|\Phi_d\rangle) = \log_2 d$, onde $|\Phi_d\rangle$ é um estado maximamente emaranhado e d é a dimensão do espaço de Hilbert de cada parte.

Observamos ainda, por meio da aplicação dos dois quantificadores para estados de Werner, que a interferência não desaparece para os intervalos em que estes estados são separáveis. Estes estados também possuem discórdia quântica não-nula nos respectivos

intervalos de separabilidade [49, 50]. Por fim, ao contrário do que se espera, nossos resultados demonstram que, possivelmente, não há necessidade de que haja emaranhamento para que efeitos de interferência de muitas partículas sejam observados, como aceito até então na literatura [2, 75, 76].

Esperamos, em breve, aplicar a metodologia desenvolvida durante este trabalho para outros sistemas, como por exemplo, um sistema constituído por 2 qutrits.

$$+\rho_{57} |A_2\rangle |B_1\rangle |C_1\rangle \langle A_2| \langle B_2| \langle C_1| + \rho_{75} |A_2\rangle |B_2\rangle |C_1\rangle \langle A_2| \langle B_1| \langle C_1| \quad (6.1)$$

$$+\rho_{58} |A_2\rangle |B_1\rangle |C_1\rangle \langle A_2| \langle B_2| \langle C_2| + \rho_{85} |A_2\rangle |B_2\rangle |C_2\rangle \langle A_2| \langle B_1| \langle C_1| \quad (6.2)$$

$$+\rho_{67} |A_2\rangle |B_1\rangle |C_2\rangle \langle A_2| \langle B_2| \langle C_1| + \rho_{76} |A_2\rangle |B_2\rangle |C_1\rangle \langle A_2| \langle B_1| \langle C_2| \quad (6.3)$$

$$+\rho_{68} |A_2\rangle |B_1\rangle |C_2\rangle \langle A_2| \langle B_2| \langle C_2| + \rho_{86} |A_2\rangle |B_2\rangle |C_2\rangle \langle A_2| \langle B_1| \langle C_2| \quad (6.4)$$

$$+\rho_{78} |A_2\rangle |B_2\rangle |C_1\rangle \langle A_2| \langle B_2| \langle C_2| + \rho_{87} |A_2\rangle |B_2\rangle |C_2\rangle \langle A_2| \langle B_2| \langle C_1|, \quad (6.5)$$

que possui 64 entradas: ρ_{ij} com i e j variando de 1 até 8.

2. Expressão para a densidade de probabilidade conjunta do caso de três

qubits:

$$\begin{aligned}
\rho(z_A, z_B, z_C) = & \frac{\rho_{11}}{L^5[L - 2\theta(z_A + z_B + z_C)]} + \frac{\rho_{22}}{L^5[L + 2\theta(-z_A + z_B + z_C)]} \\
& + \frac{\rho_{33}}{L^5[L + 2\theta(-z_A + z_B - z_C)]} + \frac{\rho_{44}}{L^5[L + 2\theta(-z_A + z_B + z_C)]} \\
& + \frac{\rho_{55}}{L^5[L + 2\theta(z_A - z_B - z_C)]} + \frac{\rho_{66}}{L^5[L + 2\theta(z_A - z_B + z_C)]} \\
& + \frac{\rho_{77}}{L^5[L + 2\theta(z_A + z_B - z_C)]} + \frac{\rho_{88}}{L^5[L + 2\theta(z_A + z_B + z_C)]} \\
& + \frac{2}{L^6} \left\{ [R_{18} + R_{27} + R_{36} + R_{45}] \cos(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) \cos(2k\theta z_C) \right. \\
& + [I_{18} - I_{27} + I_{36} - I_{45}] \cos(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [I_{18} + I_{27} - I_{36} - I_{45}] \cos(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [I_{18} + I_{27} + I_{36} + I_{45}] \sin(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [-R_{18} - R_{27} + R_{36} + R_{45}] \sin(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [-R_{18} + R_{27} + R_{36} - R_{45}] \cos(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [-I_{18} + I_{27} + I_{36} - I_{45}] \sin(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [-R_{18} + R_{27} - R_{36} + R_{45}] \sin(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [R_{17} + R_{28} + R_{35} + R_{46}] \cos(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) \\
& + [I_{17} + I_{28} - I_{35} - I_{46}] \cos(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) \\
& + [I_{17} + I_{28} - I_{35} + I_{46}] \sin(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_B) \\
& + [-R_{17} - R_{28} + R_{35} + R_{46}] \sin(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_B) \\
& + [R_{16} + R_{25} + R_{38} + R_{47}] \cos(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [I_{16} - I_{25} + I_{38} - I_{47}] \cos(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [I_{16} + I_{25} + I_{38} + I_{47}] \sin(2k\theta z_A) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [-R_{16} + R_{25} - R_{38} + R_{47}] \sin(2k\theta z_A) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [R_{14} + R_{23} + R_{58} + R_{67}] \cos(2k\theta z_B) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [I_{14} - I_{23} + I_{58} + I_{67}] \cos(2k\theta z_B) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [I_{14} + I_{23} + I_{58} - I_{67}] \sin(2k\theta z_B) \cos(2k\theta z_C) \\
& + [-R_{14} + R_{23} - R_{58} + R_{67}] \sin(2k\theta z_B) \sin(2k\theta z_C) \\
& + [R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48}] \cos(2k\theta z_A) + [I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48}] \sin(2k\theta z_A) \\
& + [R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68}] \cos(2k\theta z_B) + [I_{13} + I_{24} + I_{57} + R_{68}] \sin(2k\theta z_B) \\
& \left. + [R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78}] \cos(2k\theta z_C) + [R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78}] \sin(2k\theta z_C) \right\}, \tag{6.6}
\end{aligned}$$

com R_{ij} e I_{ij} na Eq. (6.1), sendo as partes real e imaginária de ρ_{ij} , respectivamente.

3. Modos linearmente independentes para três qubits:

i) $\cos(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(1)} = & 4|(R_{18} + R_{27} + R_{36} + R_{45})^2 - \\ & 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{14} + R_{23} + R_{58} + R_{67}) + \\ & (R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(R_{16} + R_{25} + R_{38} + R_{47}) + \\ & (R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})(R_{17} + R_{28} + R_{35} + R_{46})]^2 - \\ & 16[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.7)$$

ii) $\cos(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B) \sin(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(2)} = & 4|(I_{18} - I_{27} + I_{36} - I_{45})^2 - \\ & 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(I_{14} + I_{23} + I_{58} + I_{67}) + \\ & (R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(I_{16} - I_{25} + I_{38} - I_{47}) + \\ & (I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})(R_{17} + R_{28} + R_{35} + R_{46})]^2 - \\ & 16[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.8)$$

iii) $\cos(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(3)} = & 4|(I_{18} + I_{27} - I_{36} - I_{45})^2 - \\ & 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(I_{14} - I_{23} + I_{58} - I_{67}) + \\ & (I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(R_{16} + R_{25} + R_{38} + R_{47}) + \\ & (R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})(I_{17} + I_{28} - I_{35} - I_{46})]^2 - \\ & 16[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.9)$$

iv) $\sin(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(4)} = & 4|(I_{18} + I_{27} + I_{36} + I_{45})^2 - \\ & 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(R_{14} + R_{23} + R_{58} + R_{67}) + \\ & (R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(I_{16} + I_{25} + I_{38} + I_{47}) + \\ & (R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})(I_{17} + I_{28} - I_{35} + I_{46})]^2 - \\ & 16[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.10)$$

v) $\sin(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(5)} = & 4|(-R_{18} - R_{27} + R_{36} + R_{45})^2 - \\ & 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(I_{14} - I_{23} + I_{58} - I_{67}) + \\ & (I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(I_{16} + I_{25} + I_{38} + I_{47}) + \\ & (R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})(-R_{17} - R_{28} + R_{35} + R_{46})]^2 - \\ & 16[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

vi) $\cos(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_B) \sin(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(6)} = & 4|(-R_{18} + R_{27} + R_{36} - R_{45})^2 - \\ & 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(-R_{14} + R_{23} - R_{58} + R_{67}) + \\ & (I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(I_{16} - I_{25} + I_{38} - I_{47}) + \\ & (I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})(I_{17} + I_{28} - I_{35} - I_{46})]^2 - \\ & 16[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.12)$$

vii) $\sin(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_B) \sin(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(7)} = & 4|(-I_{18} + I_{27} + I_{36} - I_{45})^2 - \\ & 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(-R_{14} + R_{23} - R_{58} + R_{67}) + \\ & (I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(-R_{16} + R_{25} + R_{38} + R_{47}) + \\ & (I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})(-R_{17} - R_{28} - R_{35} - R_{46})]^2 - \\ & 16[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.13)$$

viii) $\sin(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B) \sin(2k\theta y_C)$ modo para partículas A-B-C:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{GHZ}^{(8)} = & 4|(-R_{18} + R_{27} - R_{36} + R_{45})^2 - \\ & 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(I_{14} - I_{23} + I_{58} + I_{67}) + \\ & (R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(-R_{16} + R_{25} - R_{38} + R_{47}) + \\ & (I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})(I_{17} + I_{28} - I_{35} + I_{46})]^2 - \\ & 16[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \end{aligned} \quad (6.14)$$

4. Contribuições para a interferência quântica genuína em estados do tipo W :

i) $\cos(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B)$ modo linearmente independente para as partículas A-B:

$$\mathcal{I}_{Wab}^{(1)} = 4|(R_{17} + R_{28} + R_{35} + R_{46})^2 - 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})]^2|. \quad (6.15)$$

ii) $\cos(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_B)$ modo linearmente independente para as partículas A-B:

$$\mathcal{I}_{Wab}^{(2)} = 4|(I_{17} + I_{28} - I_{35} - I_{46})^2 - 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})]^2|. \quad (6.16)$$

iii) $\sin(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_B)$ modo linearmente independente para as partículas A-B:

$$\mathcal{I}_{Wab}^{(3)} = 4|(I_{17} + I_{28} - I_{35} + I_{46})^2 - 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})]^2|. \quad (6.17)$$

iv) $\sin(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_B)$ modo linearmente independente para as partículas A-B:

$$\mathcal{I}_{Wab}^{(4)} = 4|(-R_{17} - R_{28} + R_{35} + R_{46})^2 - 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})]^2|. \quad (6.18)$$

v) $\cos(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas A-C:

$$\mathcal{I}_{Wac}^{(1)} = 4|(R_{16} + R_{25} + R_{38} + R_{47})^2 - 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \quad (6.19)$$

vi) $\cos(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas A-C:

$$\mathcal{I}_{Wac}^{(2)} = 4|(I_{16} - I_{25} + I_{38} - I_{47})^2 - 4[(R_{15} + R_{26} + R_{37} + R_{48})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \quad (6.20)$$

vii) $\sin(2k\theta y_A) \cos(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas A-C:

$$\mathcal{I}_{Wac}^{(3)} = 4|(I_{16} + I_{25} + I_{38} + I_{47})^2 - 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \quad (6.21)$$

viii) $\sin(2k\theta y_A) \sin(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas A-C:

$$\mathcal{I}_{Wac}^{(4)} = 4|(-R_{16} + R_{25} - R_{38} + R_{47})^2 - 4[(I_{15} + I_{26} + I_{37} + I_{48})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \quad (6.22)$$

ix) $\cos(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas B-C:

$$\mathcal{I}_{Wbc}^{(1)} = 4|(R_{14} + R_{23} + R_{58} + R_{67})^2 - 4[(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \quad (6.23)$$

x) $\cos(2k\theta y_B) \sin(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas B-C:

$$\mathcal{I}_{Wbc}^{(2)} = 4|(I_{14} - I_{23} + I_{58} + I_{67})^2 - 4[(R_{13} + R_{24} + R_{57} + R_{68})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \quad (6.24)$$

xi) $\sin(2k\theta y_B) \cos(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas B-C:

$$\mathcal{I}_{Wbc}^{(3)} = 4|(I_{14} + I_{23} + I_{58} - I_{67})^2 - 4[(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(R_{12} + R_{34} + R_{56} + R_{78})]^2|. \quad (6.25)$$

xii) $\sin(2k\theta y_B) \sin(2k\theta y_C)$ modo linearmente independente para as partículas B-C:

$$\mathcal{I}_{Wbc}^{(4)} = 4|(-R_{14} + R_{23} - R_{58} + R_{67})^2 - 4[(I_{13} + I_{24} + I_{57} + I_{68})(I_{12} + I_{34} + I_{56} + I_{78})]^2|. \quad (6.26)$$

Referências Bibliográficas

- [1] YOUNG, Thomas. I. The Bakerian Lecture. Experiments and calculations relative to physical optics. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, n. 94, p. 1-16, 1804.
- [2] PAN, Jian-Wei et al. Multiphoton entanglement and interferometry. **Reviews of Modern Physics**, v. 84, n. 2, p. 777, 2012.
- [3] DIRAC, Paul Adrien Maurice. **The principles of quantum mechanics**. Oxford university press, 1981.
- [4] HONG, Chong-Ki; OU, Zhe-Yu; MANDEL, Leonard. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. **Physical review letters**, v. 59, n. 18, p. 2044, 1987.
- [5] FEARN, H.; LOUDON, R. Quantum theory of the lossless beam splitter. **Optics communications**, v. 64, n. 6, p. 485-490, 1987.
- [6] RARITY, J. G.; TAPSTER, P. R. Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 21, p. 2495, 1990.
- [7] EINSTEIN, Albert; PODOLSKY, Boris; ROSEN, Nathan. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. **Physical review**, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- [8] BELL, John S. On the einstein podolsky rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, v. 1, n. 3, p. 195, 1964.
- [9] CLAUSER, John F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. **Physical review letters**, v. 23, n. 15, p. 880, 1969.

- [10] FREEDMAN, Stuart J.; CLAUSER, John F. Experimental test of local hidden-variable theories. **Physical Review Letters**, v. 28, n. 14, p. 938, 1972.
- [11] ASPECT, Alain; GRANGIER, Philippe; ROGER, Gérard. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities. **Physical review letters**, v. 49, n. 2, p. 91, 1982.
- [12] BENNETT, Charles H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **Physical review letters**, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- [13] EKERT, Artur K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. **Physical review letters**, v. 67, n. 6, p. 661, 1991.
- [14] DÜR, Wolfgang; VIDAL, Guifre; CIRAC, J. Ignacio. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. **Physical Review A**, v. 62, n. 6, p. 062314, 2000.
- [15] GREENBERGER, Daniel M.; HORNE, Michael A.; ZEILINGER, Anton. Going beyond Bell's theorem. In: **Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe**. Springer, Dordrecht, 1989. p. 69-72.
- [16] GREENBERGER, Daniel M. et al. Bell's theorem without inequalities. **American Journal of Physics**, v. 58, n. 12, p. 1131-1143, 1990.
- [17] OLLIVIER, Harold; ZUREK, Wojciech H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. **Physical review letters**, v. 88, n. 1, p. 017901, 2001.
- [18] HENDERSON, Leah; VEDRAL, Vlatko. Classical, quantum and total correlations. **Journal of physics A: mathematical and general**, v. 34, n. 35, p. 6899, 2001.
- [19] MODI, Kavan et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. **Reviews of Modern Physics**, v. 84, n. 4, p. 1655, 2012.
- [20] SCHLOSSHAUER, Maximilian A. **Decoherence: and the quantum-to-classical transition**. Springer Science Business Media, 2007.
- [21] SAKURAI, Jun John; COMMINS, Eugene D. Modern quantum mechanics, revised edition. 1995.

- [22] FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew. The feynman lectures on physics; vol. i. **American Journal of Physics**, v. 33, n. 9, p. 750-752, 1965.
- [23] TESCHL, Gerald. Mathematical methods in quantum mechanics. **Graduate Studies in Mathematics**, v. 99, p. 106, 2009.
- [24] PERES, Asher. **Quantum theory: concepts and methods**. Springer Science Business Media, 2006.
- [25] NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac. Quantum computation and quantum information. 2002.
- [26] DE MUYNCK, Willem M. **Foundations of quantum mechanics, an empiricist approach**. Springer Science and Business Media, 2006.
- [27] SHANNON, Claude E. A mathematical theory of communication. **The Bell system technical journal**, v. 27, n. 3, p. 379-423, 1948.
- [28] COVER, Thomas M.; THOMAS, Joy A. Entropy, relative entropy and mutual information. **Elements of information theory**, v. 2, n. 1, p. 12-13, 1991.
- [29] FANCHINI, Felipe Fernandes; PINTO, Diogo de Oliveira Soares; ADESSO, Gerardo (Ed.). **Lectures on General Quantum Correlations and their Applications**. Berlin: Springer, 2017.
- [30] SUMMERS, Stephen J.; WERNER, Reinhard. Bell's inequalities and quantum field theory. I. General setting. **Journal of Mathematical Physics**, v. 28, n. 10, p. 2440-2447, 1987.
- [31] WERNER, Reinhard F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. **Physical Review A**, v. 40, n. 8, p. 4277, 1989.
- [32] HORODECKI, Ryszard et al. Quantum entanglement. **Reviews of modern physics**, v. 81, n. 2, p. 865, 2009.
- [33] HOWELL, John C. et al. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using momentum-and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 21, p. 210403, 2004.

- [34] MACLEAN, Jean-Philippe W.; DONOHUE, John M.; RESCH, Kevin J. Direct characterization of ultrafast energy-time entangled photon pairs. **Physical review letters**, v. 120, n. 5, p. 053601, 2018.
- [35] MEI, Yefeng et al. Einstein-Podolsky-Rosen Energy-Time Entanglement of Narrow-Band Biphotons. **Physical review letters**, v. 124, n. 1, p. 010509, 2020.
- [36] LEACH, Jonathan et al. Quantum correlations in optical angle-orbital angular momentum variables. **Science**, v. 329, n. 5992, p. 662-665, 2010.
- [37] PERRIE, W. et al. Polarization correlation of the two photons emitted by metastable atomic deuterium: a test of Bell's inequality. **Physical review letters**, v. 54, n. 16, p. 1790, 1985.
- [38] KWIAT, Paul G. et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 24, p. 4337, 1995.
- [39] DEUTSCH, David. Uncertainty in quantum measurements. **Physical Review Letters**, v. 50, n. 9, p. 631, 1983.
- [40] DEUTSCH, David. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 400, n. 1818, p. 97-117, 1985.
- [41] ZUREK, Wojciech Hubert. Decoherence and the transition from quantum to classical—revisited. In: **Quantum Decoherence**. Birkhäuser Basel, 2006. p. 1-31.
- [42] BENGTTSSON, Ingemar; ?YCZKOWSKI, Karol. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. Cambridge university press, 2017.
- [43] PERES, Asher. Separability criterion for density matrices. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 8, p. 1413, 1996.
- [44] HORODECKI, Michal; HORODECKI, R.; HORODECKI, P. **On the necessary and sufficient conditions for separability of quantum mixed states**. 1996.
- [45] BENNETT, Charles H. et al. Concentrating partial entanglement by local operations. **Physical Review A**, v. 53, n. 4, p. 2046, 1996.

- [46] WOOTTERS, William K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- [47] WOOTTERS, William K. Entanglement of formation and concurrence. **Quantum Inf. Comput.**, v. 1, n. 1, p. 27-44, 2001.
- [48] PAN, Jian-Wei et al. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement. **Nature**, v. 403, n. 6769, p. 515-519, 2000.
- [49] LUO, Shunlong. Quantum discord for two-qubit systems. **Physical Review A**, v. 77, n. 4, p. 042303, 2008.
- [50] RULLI, C. C.; SARANDY, M. S. Global quantum discord in multipartite systems. **Physical Review A**, v. 84, n. 4, p. 042109, 2011.
- [51] GHOSH, R.; MANDEL, Leonard. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. **Physical Review Letters**, v. 59, n. 17, p. 1903, 1987.
- [52] RARITY, J. G.; TAPSTER, P. R. Two-color photons and nonlocality in fourth-order interference. **Physical Review A**, v. 41, n. 9, p. 5139, 1990.
- [53] HORNE, Michael A.; SHIMONY, Abner; ZEILINGER, Anton. Two-particle interferometry. **Physical Review Letters**, v. 62, n. 19, p. 2209, 1989.
- [54] TAYLOR, Geoffrey Ingram. Interference fringes with feeble light. **In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. 1909. p. 114-115.
- [55] FICEK, Zbigniew; SWAIN, Stuart. **Quantum interference and coherence: theory and experiments**. Springer Science and Business Media, 2005.
- [56] ZEILINGER, Anton. Experiment and the foundations of quantum physics. **More Things in Heaven and Earth**, p. 482-498, 1999.
- [57] D'ESPAGNAT, Bernard. **Conceptual foundations of quantum mechanics**. CRC Press, 2018.
- [58] BOHR, Niels. Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics. **In: Niels Bohr Collected Works**. Elsevier, 1996. p. 339-381.

- [59] WOOTTERS, William K.; ZUREK, Wojciech H. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr's principle. **Physical Review D**, v. 19, n. 2, p. 473, 1979.
- [60] MITTELSTAEDT, Peter; PRIEUR, Annette; SCHIEDER, Rudolf. Unsharp particle-wave duality in a photon split-beam experiment. **Foundations of Physics**, v. 17, n. 9, p. 891-903, 1987.
- [61] JAEGER, Gregg; SHIMONY, Abner; VAIDMAN, Lev. Two interferometric complementarities. **Physical Review A**, v. 51, n. 1, p. 54, 1995.
- [62] ENGLERT, Berthold-Georg. Fringe visibility and which-way information: An inequality. **Physical review letters**, v. 77, n. 11, p. 2154, 1996.
- [63] GREENBERGER, Daniel M.; YASIN, Allaine. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. **Physics Letters A**, v. 128, n. 8, p. 391-394, 1988.
- [64] GREENBERGER, Daniel M.; HORNE, Mike A.; ZEILINGER, Anton. Multiparticle interferometry and the superposition principle. **Physics Today**, v. 46, p. 22-22, 1993.
- [65] GOTTFRIED, Kurt. Two-particle interference. **American Journal of Physics**, v. 68, n. 2, p. 143-147, 2000.
- [66] DE LIMA BERNARDO, Bertúlio. Time correlation and decoherence in a two-particle interferometer. **Brazilian Journal of Physics**, v. 44, n. 2-3, p. 202-207, 2014.
- [67] BORN, Max; WOLF, Emil. **Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light**. Elsevier, 2013.
- [68] BAUMGRATZ, Tillmann; CRAMER, Marcus; PLENIO, Martin B. Quantifying coherence. **Physical review letters**, v. 113, n. 14, p. 140401, 2014.
- [69] BU, Kaifeng et al. Duality relation between coherence and path information in the presence of quantum memory. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 51, n. 8, p. 085304, 2018.

- [70] PITTENGER, Arthur O.; RUBIN, Morton H. Note on separability of the Werner states in arbitrary dimensions. *Optics Communications*, v. 179, n. 1-6, p. 447-449, 2000.
- [71] M CUNHA, Márcio; FONSECA, Alejandro; O SILVA, Edilberto. Tripartite entanglement: Foundations and applications. **Universe**, v. 5, n. 10, p. 209, 2019.
- [72] SIEWERT, Jens; ELTSCHKA, Christopher. Quantifying tripartite entanglement of three-qubit generalized Werner states. **Physical review letters**, v. 108, n. 23, p. 230502, 2012.
- [73] ELTSCHKA, Christopher; SIEWERT, Jens. Entanglement of three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger-symmetric states. **Physical review letters**, v. 108, n. 2, p. 020502, 2012.
- [74] GÜHNE, Otfried; SEEVINCK, Michael. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement. **New Journal of Physics**, v. 12, n. 5, p. 053002, 2010.
- [75] HORNE, Michael A.; SHIMONY, Abner; ZEILINGER, Anton. Two-particle interferometry. **Physical Review Letters**, v. 62, n. 19, p. 2209, 1989.
- [76] HORNE, Michael; SHIMONY, Abner; ZEILINGER, Anton. Two-particle interferometry. **Nature**, v. 347, n. 6292, p. 429-430, 1990.