

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

$\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ - Órbitas do esquema de
Hilbert, $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com $a, b \in \{1, 2\}$

Antonio Fred Castro Pereira

João Pessoa – PB
Julho de 2026

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

$\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ - Órbitas do esquema de
Hilbert, $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com $a, b \in \{1, 2\}$

por

Antonio Fred Castro Pereira

sob a orientação de

Prof(a). Dr(a). Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Julho de 2026

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P436a Pereira, Antonio Fred Castro.
Aut(P^3) - Órbitas do esquema de Hilbert,
 $Hilb^{a+b}P^3$ com a, b em $\{1, 2\}$ / Antonio Fred Castro
Pereira. - João Pessoa, 2026.
105 f. : il.

Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Esquema de Hilbert. 2. Polinômio de Hilbert. 3.
Geometria algébrica. I. Arancibia, Jacqueline Fabiola
Rojas. II. Título.

UFPB/BC

CDU 510.722(043)

$\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ - Órbitas do esquema de Hilbert, $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com $a, b \in \{1, 2\}$

por

Antonio Fred Castro Pereira 

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 17 de julho de 2026

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA
Data: 23/07/2026 08:21:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof(a). Dr(a). Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia UFPB
(Orientadora)

Documento assinado digitalmente
 WALLACE MANGUEIRA DE SOUSA
Data: 23/07/2026 08:44:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wállice Manguiera de Sousa - UFPB
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
 RODRIGO JOSE GONDIM NEVES
Data: 23/07/2026 08:50:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves – UFRPE
(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

*Aos meus pais, José Clovis e
Maria Neuma.*

Agradecimentos

À minha família, em especial minha mãe Neuma e minha irmã Patricia por todo o apoio em minhas escolhas. Sem vocês, nada disso seria possível.

Ao meu orientador da graduação João Victor, mais que um professor e orientador, um amigo para a vida.

Aos amigos da graduação, Jeferson e Janael, o entusiasmo de vocês pela Matemática é algo inspirador.

Aos colegas da pós-graduação, em especial Artur, Assuerio, Rafael, Mateus Barreto, Mateus Vinicius, Edson, Elias e Tiago. Muitos momentos de alegria, mas também de dificuldades, foram compartilhados nesses 2 anos de mestrado, e eu não poderia estar em melhor companhia. Por toda ajuda, conhecimento compartilhado e café tomado, muito obrigado.

Ao professor Wallace Manguiera, pelos conselhos e sugestões para este trabalho durante as reuniões de tópicos especiais de álgebra, e ao professor Naéliton Marques, pelas breves, porém valiosas, reuniões para estudar álgebra.

À minha orientadora Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, por sua paciência, dedicação constante e orientação presente, fundamentais para a realização deste trabalho.

À banca examinadora, por se disponibilizar a avaliar este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O esquema de Hilbert, introduzido por Alexander Grothendieck na década de 1960, é um objeto fundamental na geometria algébrica, cujos pontos fechados parametrizam subesquemas fechados de um esquema projetivo com um polinômio de Hilbert fixado. Esta dissertação investiga a estratificação do esquema de Hilbert de curvas em $\mathbb{P}^3$, denotado por $\text{Hilb}^{at+b} \mathbb{P}^3$, com $a, b \in \{1, 2\}$, analisando as órbitas geradas sob a ação do grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. O estudo concentra-se nos polinômios de Hilbert: $t+1$, $t+2$, $2t+1$ e $2t+2$, que correspondem geometricamente a retas, à união esquemática de uma reta e um ponto, a cônicas e à união esquemática de retas disjuntas ou de uma cônica com um ponto em $\mathbb{P}^3$. Utilizando técnicas de álgebra comutativa, teoria de invariantes geométricos e o suporte computacional do software Macaulay2, apresenta-se a classificação explícita dessas órbitas, o cálculo de suas dimensões e a descrição das relações de especialização (degenerações) entre elas. Os resultados demonstram que os espaços se decompõem em um número finito de órbitas, revelando uma hierarquia geométrica bem definida que reflete a posição relativa das componentes irredutíveis e das estruturas não reduzidas das curvas estudadas.

Palavras-chave: Esquema de Hilbert, polinômio de Hilbert, mudança de coordenadas projetivas, ação de grupo, espaço de parâmetros.

Abstract

The Hilbert scheme, introduced by Alexander Grothendieck in the 1960s, is a fundamental object in algebraic geometry whose closed points parametrize closed subschemes of a projective scheme with a fixed Hilbert polynomial. This dissertation investigates the stratification of the Hilbert scheme of curves in $\mathbb{P}^3$, denoted by $\text{Hilb}^{at+b} \mathbb{P}^3$ with $a, b \in \{1, 2\}$, by analyzing the orbits generated under the action of the automorphism group $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. The study focuses on the Hilbert polynomials: $t + 1$, $t + 2$, $2t + 1$, and $2t + 2$, which correspond geometrically to lines, the schematic union of a line and a point, conics, and the schematic union of disjoint lines or of a conic with a point in $\mathbb{P}^3$. Using techniques from commutative algebra, geometric invariant theory, and computational support from the software Macaulay2, we present an explicit classification of these orbits, the computation of their dimensions, and the description of specialization relations (degenerations) among them. The results demonstrate that these spaces decompose into a finite number of orbits, revealing a well-defined geometric hierarchy that reflects the relative position of irreducible components and the non-reduced structures of the studied curves.

Keywords: Hilbert scheme, Hilbert polynomial, projective change of coordinates, group action, parameter space.

Sumário

Introdução	1
1 O Esquema de Hilbert	3
1.1 Anéis e Módulos graduados	3
1.1.1 O teorema de Hilbert-Serre	5
1.2 A função de Hilbert e o polinômio de Hilbert	6
1.3 O Esquema de Hilbert	10
1.3.1 $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como espaço de parâmetros	10
1.3.2 Esboço da construção do Esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$	11
2 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$	14
2.1 Mudança de Coordenadas Projetivas em $\mathbb{P}^n$	14
2.2 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$	16
2.2.1 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ nos ideais de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$	21
2.3 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$	22
2.3.1 Resultados preliminares para o cálculo da dimensão de órbitas	24
2.3.2 Dimensão das órbitas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$	26
3 Órbitas em $\mathbb{H}^{t+1}$, $\mathbb{H}^{t+2}$ e $\mathbb{H}^{2t+1}$	28
3.1 Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{t+1}$	28
3.2 Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{t+2}$	29
3.3 Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{2t+1}$	36
4 O Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{2t+2}$	43
4.1 Preliminares	43
4.2 Órbitas em $\text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$	49
4.2.1 Órbitas na componente $\mathcal{H}_1$	49
4.2.2 Órbitas na componente $\mathcal{H}_2$	56
4.2.3 Uniões esquemáticas de uma cônica e um ponto fora da cônica	57

4.2.4	Unões esquemáticas de uma cônica e um ponto mergulhado na cônica	65
4.2.5	Especializações em $\mathcal{H}_2$	75
A	Cálculos utilizando Macaulay2	83
A.0.1	Cálculo dos polinômios dos ideais do Teorema 3.2.2	83
A.0.2	Cálculo dos polinômios dos ideais do Teorema 3.3.2	83
A.0.3	Cálculo do polinômio de Hilbert dos ideais do capítulo 4	84
B	Resultados sobre cônicas em $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^3$	85
B.1	Classificação das cônicas em $\mathbb{P}^2$	85
B.2	Descrição da órbita do ideal que parametriza cônicas não singulares em $\mathbb{P}^3$	91
	Referências Bibliográficas	94

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{P}^n$ — espaço projetivo complexo de dimensão n .
- $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ — grupo das mudanças de coordenadas projetivas em $\mathbb{P}^n$.
- $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ — anel de polinômios com a graduação usual.
- Se T é um subconjunto de S então $[T]$ denota o subespaço vetorial gerado por T em S .
- S_d — componente homogênea de grau d (polinômios homogêneos de grau d).
- $h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d$ — função de Hilbert associada ao ideal homogêneo I .
- $p_I(t)$ — polinômio de Hilbert associado ao ideal I .
- I^{sat} — saturação do ideal I em relação ao ideal irrelevante $\mathfrak{m} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$.
- $\mathbb{H}_n^{p(t)}$ — conjunto dos ideais homogêneos saturados em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com polinômio de Hilbert $p(t)$.
- $\varphi_{\bullet} I$ — ação de $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ sobre o ideal I .
- $\mathcal{O}_I$ — órbita do ideal I sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.
- E_I — estabilizador do ideal I .

Introdução

O esquema de Hilbert é um dos objetos mais ricos e fundamentais da geometria algébrica moderna. Introduzido por Alexander Grothendieck na década de 1960, seus pontos fechados parametrizam todos os subesquemas fechados com um dado polinômio de Hilbert, fornecendo uma estrutura algébrica para o estudo de famílias de variedades. Embora a existência dos esquemas de Hilbert tenha sido provada pela primeira vez na década de 1960, surpreendentemente pouco se sabe sobre suas estruturas individuais. Por exemplo, a estrutura da compactificação pelo esquema de Hilbert do espaço das cúbricas torcidas foi descoberta apenas em meados da década de 1980 [15]. Mesmo os esquemas de Hilbert que parametrizam subsquemas de dimensão zero de $\mathbb{P}^n$ não são claramente compreendidos, exceto em casos rudimentares.

Entre as várias questões que emergem naturalmente nesse contexto, destaca-se o problema de compreender como os pontos do esquema de Hilbert se organizam sob a ação do grupo de automorfismos do espaço ambiente. Esta dissertação, baseada no texto **The Hilbert Schemes of curves in $\mathbb{P}^3$** de *Yoon-Ho Alex Lee* ([12]), tem como objetivo investigar a estratificação do esquema de Hilbert de curvas em $\mathbb{P}^3$ por órbitas da ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. Consideramos os espaços de parâmetros $\mathbb{H}^{p(t)}$, cujos pontos fechados correspondem a ideais homogêneos saturados em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ com polinômio de Hilbert $p(t)$. Nos concentramos nos casos em que $p(t)$ assume as formas $t + 1$, $t + 2$, $2t + 1$ e $2t + 2$, que correspondem, respectivamente, a retas, à união esquemática de uma reta e um ponto, cônicas e a união esquemática de retas disjuntas ou de uma cônica com um ponto em $\mathbb{P}^3$. O trabalho de Lee tem como principal referência o texto de Joe Harris em colaboração com David Eisenbud **Curves in Projective Space** ([10]) onde esses autores já abordam esse tipo de problema.

O objetivo principal deste trabalho é descrever explicitamente as órbitas desses ideais sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$, calcular suas dimensões e estabelecer as relações de especialização entre elas. Para isso, utilizamos técnicas de álgebra comutativa, teoria de invariantes geométricos e ferramentas computacionais como o Macaulay2. Os resultados obtidos mostram que, nos casos estudados, o espaço $\mathbb{H}^{p(t)}$ se decompõe em um número finito de órbitas, cujas dimensões e padrões de especialização revelam uma

hierarquia geométrica que reflete a posição relativa das componentes irredutíveis das curvas.

Além do interesse intrínseco na classificação de curvas em $\mathbb{P}^3$, este estudo contribui para a compreensão mais ampla da estrutura do esquema de Hilbert e das ações de grupos sobre ele, servindo como base para investigações futuras sobre a geometria das componentes irredutíveis e as possíveis degenerações.

O trabalho é dividido da seguinte forma: no *Capítulo 1*, introduzimos os conceitos de função de Hilbert e polinômio de Hilbert, destacando sua obtenção via teorema de Hilbert–Serre para módulos graduados finitamente gerados. Em seguida, apresentamos o esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$, enfatizando sua propriedade universal. De fato, os pontos fechados de $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ parametrizam todos os subesquemas fechados de $\mathbb{P}^n$ cujo polinômio de Hilbert é $p(t)$, o que corresponde, no contexto algébrico, ao conjunto $\mathbb{H}_n^{p(t)}$ dos ideais homogêneos saturados em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com polinômio de Hilbert igual a $p(t)$.

No *Capítulo 2*, definimos a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$. Estudamos a ação induzida de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ no anel de polinômios e em seus ideais, mostrando que propriedades como homogeneidade, saturação e singularidades são preservadas. Para $n = 3$, apresentamos resultados preliminares para o cálculo da dimensão das órbitas, utilizando a relação $\dim \mathcal{O}_I = 15 - \dim E_I$, onde E_I é o estabilizador do ideal I .

No *Capítulo 3*, classificamos as órbitas em $\mathbb{H}^{t+1}$, $\mathbb{H}^{t+2}$ e $\mathbb{H}^{2t+1}$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. Mostramos que $\mathbb{H}^{t+1}$ é homogêneo (uma única órbita), que $\mathbb{H}^{t+2}$ possui duas órbitas com dimensões 6 e 7 e que $\mathbb{H}^{2t+1}$ se decompõe em três órbitas com dimensões 5, 7 e 8. Além disso, descrevemos as relações de especialização entre as órbitas em cada caso.

No *Capítulo 4*, classificamos as órbitas em $\mathbb{H}^{2t+2}$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. Este espaço se decompõe em duas componentes irredutíveis: $\mathcal{H}_1$ (dimensão 8), cujo ponto genérico é a união esquemática de duas retas disjuntas, e $\mathcal{H}_2$ (dimensão 11), cujo ponto genérico é a união esquemática de uma cônica não singular e um ponto fora dela. Descrevemos todas as órbitas em cada componente, calculamos suas dimensões e estabelecemos as relações de especialização entre elas, revelando uma hierarquia que inclui retas duplas de diferentes gêneros aritméticos, uniões de retas com pontos mergulhados e outros esquemas não reduzidos.

Por fim, no apêndice A realizamos os cálculos dos polinômios de Hilbert dos ideais abordados utilizando a ferramenta *on-line* Macaulay2. Também abordamos resultados importantes sobre cônicas em $\mathbb{P}^2$ que nos foram úteis neste trabalho (cf. Apêndice B).

Capítulo 1

O Esquema de Hilbert

Um ingrediente fundamental na definição do esquema de Hilbert é o polinômio de Hilbert, motivo pelo qual iniciamos este capítulo com uma revisão sobre a existência desse polinômio. Salientamos que a maioria das demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser consultadas nas referências [2] e [3].

1.1 Anéis e Módulos graduados

Definição 1.1.1. Seja A um anel comutativo com unidade. Dizemos que A é um *anel graduado* se existe uma família $\{A_n\}_n$ com $n \geq 0$ inteiro, tal que

1. A_n é subgrupo de $(A, +)$, $\forall n$.
2. Se $a \in A$ e $a \neq 0$, então existem únicos $a_1, \dots, a_k$ com $a_i \in A_{n_i}$ não nulos tais que $a = a_1 + \dots + a_k$. O elemento a_i é chamado *parte ou componente homogênea* de grau n_i de a .
3. $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$, $\forall i, j$.

Nesse caso, usamos a notação $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$. Além disso $a \in A - \{0\}$ é dito *homogêneo de grau n* se $a \in A_n$ para algum n .

Observação 1. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ anel graduado, verifica-se que

1. A_0 é um subanel de A .
2. A é uma A_0 – álgebra via o homomorfismo inclusão $i : A_0 \rightarrow A$.
3. A_n é um A_0 – módulo.

Exemplo 1.1.2. Seja $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ o anel de polinômios sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada $d \in \mathbb{Z}$ não negativo, considere

$$A_d = [\{x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \mid i_0 + \cdots + i_n = d, i_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}].$$

Assim, $A_0 = \mathbb{K}$ e $A_1 = [x_0, \dots, x_n] = \{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n \mid a_i \in \mathbb{K}, 0 \leq i \leq n\}$. Observe que $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$. Esta graduação é chamada *graduação usual* do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

A seguir apresentaremos a definição de Módulo Graduado.

Definição 1.1.3. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado, e M um A -módulo. Dizemos que M é um A -módulo graduado se existe uma família $\{M_n\}_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}$ tal que

1. M_n é subgrupo de $(M, +)$, $\forall n$.
2. $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$.
3. $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$ não negativos.

Assim como no caso dos anéis graduados temos que

- i) Os elementos de M_n são chamados homogêneos. Se $m \in M_n$ e $m \neq 0$ então m é chamado homogêneo de grau n .
- ii) $M_i \cap M_j = \{0\}$ se $i \neq j$.
- iii) se $m \in M$ é não nulo, então existem únicos $m_1, \dots, m_s$ não nulos, tais que $m = m_1 + \cdots + m_s$ (m_i é chamada parte ou componente homogênea de m de grau r_i se $m_i \in M_{r_i}$).

Definição 1.1.4. Um ideal I de $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ é dito *homogêneo* se para todo $a \in I$ tal que $a = a_1 + \cdots + a_n$ com $a_i \in A_{n_i}$ tem-se que $a_i \in I$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo 1.1.5. Considere $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ anel graduado e $I \subseteq A$ ideal homogêneo.

Verifica-se que I é um A -módulo graduado, visto que $I = \bigoplus_{n \geq 0} I_n$, sendo $I_n = I \cap A_n$.

Exemplo 1.1.6. Se $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ é um anel graduado e $I \subseteq A$ é um ideal homogêneo,

então $\frac{A}{I}$ é um A -módulo graduado. De fato, $\left(\frac{A}{I}, +\right)$ é um grupo abeliano com a soma $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ e

$$\cdot : A \times \frac{A}{I} \rightarrow \frac{A}{I} \text{ dada por } (\lambda, \bar{a}) \mapsto \overline{\lambda a}$$

tornam $\frac{A}{I}$ um A -módulo. Note também que $\frac{A}{I} = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\frac{A}{I}\right)_n$ sendo

$$\left(\frac{A}{I}\right)_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_n}{I_n} = \left\{ \bar{\alpha} \in \frac{A}{I} \mid \alpha \in A_n \right\}.$$

1.1.1 O teorema de Hilbert-Serre

O Teorema de Hilbert-Serre nos permite representar a série de Poincaré associada a um módulo graduado como uma função racional. A seguir vamos apresentar o conceito de função aditiva, para logo introduzir a série de Poincaré, associada a um A -módulo M finitamente gerado (f.g.).

Definição 1.1.7. Seja A um anel comutativo com unidade. Uma função aditiva, é uma função $\lambda : \{M \mid M \text{ é um } A\text{-módulo f.g.}\} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que, para toda sequência exata de A -módulos f.g.

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M'' \rightarrow 0.$$

Verifica-se que $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$.

Exemplo 1.1.8. Seja M um A -módulo onde A é um corpo, se verifica que

$$M \text{ é } A\text{-módulo f.g.} \iff M \text{ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre } A.$$

Considere $\lambda(M) = \dim M$, a seguir vamos verificar que a função dimensão na categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita é uma função aditiva. De fato, sejam f, g transformações lineares que geram a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow V' \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} V'' \rightarrow 0$$

de espaços vetoriais sobre A . Pelo teorema do núcleo e imagem aplicado em f , obtemos

$$\dim V = \dim V' + \dim V''.$$

A seguir introduzimos a série de Poincaré associada a um A -módulo graduado M finitamente gerado.

Definição 1.1.9. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado finitamente gerado como A_0 -álgebra. Considere

$$\lambda : \{M \mid M \text{ é um } A\text{-módulo graduado f.g.}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

função aditiva. A *série de Poincaré* $\mathcal{P}_\lambda(M, t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ associada ao A -módulo M é dada por

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n.$$

Teorema 1.1.10. (Hilbert-Serre). Seja A um anel graduado noetheriano, gerado como A_0 -álgebra por m elementos homogêneos de grau $d_1, \dots, d_m$. Considere M um A -módulo graduado finitamente gerado e λ uma função aditiva, então

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^m (1 - t^{d_i})} \quad \text{com } f(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Demonstração. Veja Teorema 1.1, p. 19 em [3]. □

Corolário 1.1.11. Seja A anel graduado noetheriano finitamente gerado por s elementos de grau 1 como A_0 -álgebra. Seja M um A -módulo finitamente gerado. Assuma que

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \frac{f(t)}{(1 - t)^k} = \frac{g(t)}{(1 - t)^s}$$

com $0 \leq s \leq k$ e $g(1) \neq 0$. Então, existe um polinômio $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ de grau $s - 1$ tal que

$$\lambda(M_n) = h(n) \quad \text{para todo } n \gg 0.$$

Ou seja, para n suficientemente grande $\lambda(M_n) = h(n)$.

Demonstração. Veja Corolário 1.1, p. 20 em [3]. □

Definição 1.1.12. O polinômio $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ obtido pelo Corolário 1.1.11 é denominado *polinômio de Hilbert* associado ao módulo graduado M com respeito a função aditiva λ .

1.2 A função de Hilbert e o polinômio de Hilbert

Seja $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ anel graduado com a graduação usual, isto é, $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ sendo

$$S_d = \{0\} \cup \{F \in S \mid F \neq 0 \text{ homogêneo de grau } d\}.$$

Observação 2. Com as notações acima temos

1. S_d é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão $\binom{n+d}{d} = \binom{d+n}{n}$.
2. Se I é um ideal homogêneo de S , então $I_d = I \cap S_d$ é um subespaço vetorial de S_d . Por exemplo,

$$I_0 = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } I = S, \\ \{0\}, & \text{se } I \neq S. \end{cases}$$

Considere $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos inteiros não negativos.

Definição 1.2.1. Se I for um ideal homogêneo de $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, então a função $h_I : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ dada por

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d$$

é denominada a *função de Hilbert* associada ao ideal homogêneo I .

Observação 3. Temos que $h : \{M \mid M \text{ é um } S\text{-módulo graduado f.g.}\} \rightarrow \mathbb{Z}[[t]]$ dada por

$$M \mapsto \sum_{d \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} M_d t^d$$

é aditiva (no sentido que é aditiva em sequências exatas curtas). Segue então do Corolário 1.1.11 que existe um polinômio associado ao ideal I que será denotado por p_I e denominado polinômio de Hilbert associado a I (sendo o módulo graduado em questão $\frac{S}{I}$).

Exemplo 1.2.2. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Se $L_1, L_2 \in S_1$ são L.I. e $I = \langle L_1, L_2 \rangle \subset S$, então verifica-se que $h_I(d) = d + 1$ para todo d . Portanto, $p_I(t) = t + 1$. Lembremos que:

$$\dim S_d = \binom{3+d}{3}.$$

Logo,

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \binom{3+d}{3} - \dim I_d.$$

Neste caso, podemos dividir a determinação de $h_I(d)$ nas seguintes partes: $d = 0, d = 1$ e $d \geq 2$.

Para $d = 0$, como $I_0 = \{0\}$, então $\dim I_0 = 0$. Logo

$$h_I(0) = \dim S_0 - \dim I_0 = 1 = 0 + 1.$$

Para $d = 1$, como $I_1 = [L_1, L_2] \cong \mathbb{C}^2$ implica em $\dim I_1 = 2$. Logo

$$h_I(1) = \dim S_1 - \dim I_1 = 4 - 2 = 2 = 1 + 1.$$

1. O Esquema de Hilbert

Para $d \geq 2$, considere $\psi : S_{d-1} \times S_{d-1} \longrightarrow I_d$ definida por

$$(A, B) \mapsto A \cdot L_1 + B \cdot L_2.$$

Observe que ψ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear sobrejetora. Assim,

$$\dim I_d = 2 \dim S_{d-1} - \dim(\ker(\psi)).$$

Agora,

$$(A, B) \in \ker(\psi) \iff AL_1 = -BL_2 \iff B = C \cdot L_1 \text{ e } A = -C \cdot L_2 \text{ com } C \in S_{d-2}.$$

Assim, $\ker(\psi) \cong S_{d-2}$ (basta considerar o isomorfismo linear de S_{d-2} em $\ker(\psi)$ dado por $C \mapsto (-C \cdot L_2, C \cdot L_1)$). Portanto,

$$\dim I_d = 2 \dim S_{d-1} - \dim S_{d-2} \quad \forall d \geq 2.$$

De onde concluímos que:

$$h_I(d) = \dim S_d - 2 \dim S_{d-1} + \dim S_{d-2} \quad \forall d \geq 2.$$

Após alguns cálculos, obtemos $h_I(d) = d + 1 \quad \forall d \geq 2$. Portanto, $h_I(d) = d + 1 \quad \forall d$.

Visto que nosso objeto de estudo envolve os ideais homogêneos saturados. A seguir introduzimos o conceito de saturação.

Definição 1.2.3. Seja $\mathfrak{m} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ o ideal irrelevante do anel graduado $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Se I é um ideal homogêneo de S , definimos a *saturação* de I em relação a $\mathfrak{m}$ (ou simplesmente *saturação* de I), que será denotada por I^{sat} , da seguinte maneira

$$I^{sat} = \{f \in S \mid f\mathfrak{m}^k \subseteq I \text{ para algum inteiro } k > 0\}.$$

Observe que I^{sat} é um ideal homogêneo de S . Um ideal I é dito saturado se $I = I^{sat}$.

Lema 1.2.4. Sejam I e J ideais homogêneos de $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Se existe N_0 inteiro positivo tal que $I_d = J_d \quad \forall d \geq N_0$, então $I^{sat} = J^{sat}$.

Demonstração. Sendo I^{sat} e J^{sat} ideais homogêneos, tem-se que, se $f = f_0 + f_1 + \dots + f_e$, então

$$f \in I^{sat} \text{ (resp. } f \in J^{sat}) \iff f_i \in I^{sat} \text{ (resp. } f_i \in J^{sat}) \quad \forall i, 0 \leq i \leq e.$$

Observe que para mostrar a inclusão $I^{sat} \subseteq J^{sat}$ basta considerar elementos homogêneos de I^{sat} . Assim considere $f \in I^{sat}$ homogêneo de grau e . Lembre que

$$I^{sat} = \{f \in S \mid \exists k > 0 \text{ inteiro tal que } fx_i^k \in I \forall i\}.$$

Seja k um inteiro positivo tal que

$$fx_i^k \in I, \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Temos duas possibilidades:

(i) $\text{grau}(fx_i^k) = e + k \geq N_0$.

Neste caso, $fx_i^k \in I_{e+k} = J_{e+k} \forall i$. Com isso, temos que $fx_i^k \in J \forall i$, o que implica em $f \in J^{sat}$.

(ii) $\text{grau}(fx_i^k) = e + k < N_0$.

Escolha $u > 0$ tal que $e + k + u = N_0$ e observe que $fx_i^k \in I \forall i$, o que implica em $fx_i^{k+u} \in I \forall i$. Neste caso, $fx_i^{k+u} \in I_{N_0} = J_{N_0}$, logo $f \in J^{sat}$.

Portanto, $I^{sat} \subseteq J^{sat}$. De forma análoga prova-se que $J^{sat} \subseteq I^{sat}$.

□

Proposição 1.2.5. Sejam $I \subseteq J$ ideais homogêneos saturados em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tais que $p_I(t) = p_J(t)$. Então $I = J$.

Demonstração. Lembremos que a partir da definição da função de Hilbert temos

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d \quad \text{e} \quad h_J(d) = \dim S_d - \dim J_d \quad \forall d \geq 0.$$

Além disso, $h_I(d) = p_I(d)$ para todo $d \gg 0$ e $h_J(d) = p_J(d)$ para todo $d \gg 0$. Escolha $N_0 \gg 0$ tal que $h_I(d) = p_I(d)$ e $h_J(d) = p_J(d)$ para todo $d \geq N_0$. Logo $h_I(d) = h_J(d)$ para todo $d \geq N_0$, e isso implica que $\dim I_d = \dim J_d$ para todo $d \geq N_0$. Visto que $I \subseteq J$, segue que $I_d \subseteq J_d$ para todo $d \geq 0$. Portanto, $I_d = J_d$ para todo $d \geq N_0$.

Segue do Lema 1.2.4 que $I^{sat} = J^{sat}$. Entretanto, sendo I e J ideais homogêneos saturados, tem-se que $I^{sat} = I$ e $J^{sat} = J$. Portanto $I = J$. □

Proposição 1.2.6. Seja $I \subset S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (com a graduação usual) um ideal homogêneo e I^{sat} seu saturado. Então os polinômios de Hilbert $p_I(t)$ e $p_{I^{sat}}(t)$ são iguais.

Demonstração. Veja Lema 4.10, p. 19 em [11]. □

De posse desses resultados, mostraremos que o conjunto dos ideais homogêneos saturados em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com polinômio de Hilbert $p(t)$ está em correspondência com os pontos de fechados do esquema de Hilbert, denotado por $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$, nosso principal objeto de estudo neste trabalho.

1.3 O Esquema de Hilbert

A existência e a construção do esquema de Hilbert foram estabelecidas originalmente por Alexander Grothendieck em [8]. Desde então, esse objeto tem sido amplamente estudado por diversos matemáticos, dada a sua relevância e riqueza estrutural. Como foge ao foco principal deste trabalho, assumiremos a existência do esquema de Hilbert e apresentaremos apenas um breve esboço de sua construção, seguindo a abordagem de David Eisenbud e Joe Harris em [4], baseada na construção original de David Mumford em [14]. Usaremos conceitos elementares da teoria de esquemas e linguagem funtorial que podem ser encontrados a partir do Capítulo 2 em [9].

1.3.1 $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como espaço de parâmetros

Definição 1.3.1. Seja C uma coleção de objetos geométricos. Um esquema X é dito um *espaço de parâmetros* para C se existe uma correspondência natural entre os pontos geométricos de X e os objetos de C . Mais precisamente, X representa um funtor de moduli associado a C .

Proposição 1.3.2. (Propriedade universal do esquema de Hilbert). Seja $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ um polinômio. Então o esquema de Hilbert, $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$, representa o funtor

$$\begin{aligned} \text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{p(t)} : (\text{Sch})^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Sets} \\ T &\longmapsto \text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{p(t)}(T) \end{aligned}$$

que a cada esquema T associa o conjunto das famílias planas $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}^n \times T$ tais que, para todo $t \in T$, a fibra $\mathcal{Z}_t \subset \mathbb{P}^n$ tem polinômio de Hilbert $p(t)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n \times T \\ & \searrow \tilde{\pi}_2 & \downarrow \pi_2 \\ & & T \end{array}$$

Onde $\mathcal{Z}_t = (\tilde{\pi}_2)^{-1}(t)$.

Demonstração. Veja Proposição 6.8, p. 204 em [4]. $\square$

Corolário 1.3.3. Em particular, há uma correspondência biunívoca entre os pontos fechados de $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ e os subesquemas fechados $Z \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ cujo polinômio de Hilbert é $p(t)$.

Observação 4. Considere¹ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \text{Proj}(S)$, sendo $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Existe uma correspondência entre

$$\left\{ \text{pontos fechados de } \text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\mathbb{H}_n^{p(t)} := \{I \subset S \mid I \text{ é um ideal homogêneo saturado tal que } p_I(t) = p(t)\}.$$

1.3.2 Esboço da construção do Esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$

Considere $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com a graduação usual. O esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ é construído como um subesquema fechado da grassmanniana dos subespaços de codimensão $p(d)$ de S_d , o espaço das formas homogêneas de grau d , para d suficientemente grande. A possibilidade de fazer isso é fornecida por resultados da teoria de regularidade em álgebra comutativa que combinam ideias de Macaulay e Gotzmann que podem ser consultadas em [7]. Considere então I ideal homogêneo saturado em S que define um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ com polinômio de Hilbert $p(t)$, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.3.4. Existe um inteiro positivo m_0 (que só depende dos coeficientes de $p(t)$) tal que se $d \geq m_0$, então I_d é gerado a partir dos geradores de I_{m_0} e

$$\dim \frac{S_d}{I_d} = p(d).$$

Além disso, um subespaço vetorial V de S_d de dimensão $\dim S_d - p(d)$ gera um ideal com polinômio de Hilbert $p(t)$ se e somente se

$$\dim \left(\frac{S_{d+1}}{S_1 V} \right) = p(d+1) \text{ sendo } S_1 V = [\{hv \mid h \in S_1, v \in V\}].$$

Demonstração. Veja Teorema 6.9, p. 206 em [4]. $\square$

Observação 5. O numero m_0 do Teorema 1.3.4 é chamado de Castelnuovo–Mumford regularidade do ideal saturado $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.

¹Considere $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ um anel graduado e $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$ o ideal irrelevante. O espectro primo homogêneo de S é dado por $\text{Proj}(S) = \{P \in \text{Spec}(S) \mid P \text{ é homogêneo e } S_+ \not\subset P\}$.

Definição 1.3.5. Considere $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Uma representação de Gotzmann de $p(t)$ é uma representação binomial tal que, para todo inteiro $m \gg 0$

$$p(m) = \binom{m + a_1}{m} + \binom{m - 1 + a_2}{m - 1} + \cdots + \binom{m - (s - 1) + a_s}{m - (s - 1)}$$

sendo $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$ tais que $a_1 \geq \cdots \geq a_s \geq 0$.

Proposição 1.3.6. Seja $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo e $p_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ seu polinômio de Hilbert. Então $p_I(t)$ possui uma única representação de Gotzmann.

Demonstração. Corolário B. 31, p. 361 em [17]. □

Observação 6. A quantidade de termos que aparecem na representação de Gotzmann associada ao polinômio de Hilbert $p_I(t)$ é denominada número de Gotzmann de I .

Teorema 1.3.7. O número de Gotzmann de um polinômio admissível² $p(t)$ é o melhor limite superior para a regularidade de Castelnuovo-Mumford de um subesquema fechado tendo $p(t)$ como polinômio de Hilbert.

Demonstração. Veja Lema 2.9, p. 65 em [6]. □

Seja m_0 o número de Gotzmann de um polinômio admissível $p(t)$ e $q(m) := \dim S_m - p(m)$ para todo $m \geq 0$ inteiro. Assim o Teorema 1.3.7 nos permite aplicar o Teorema 1.3.4 utilizando o número de Gotzmann m_0 , de onde obtemos a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_n^{p(t)} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ I &\longmapsto I_{m_0} \end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{H} = \{V \leq S_{m_0} \mid \dim V = q(m_0) \text{ e } \dim S_1 V = q(m_0 + 1)\}.$$

Note que a inversa da correspondência acima, é dada por $V \longmapsto \langle V \rangle^{sat}$. Agora observe que:³

$$V \in \mathcal{H} \implies \dim V = q(m_0) \implies V \in G_{q(m_0)}(S_{m_0}).$$

²Um polinômio $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ é dito *admissível* se existe um k -módulo graduado finitamente gerado M sobre $k[x_0, \dots, x_n]$ tal que $P(t)$ coincide, para $t \gg 0$, com a função de Hilbert $H_M(t) = \dim_k(M_t)$. Equivalentemente, $P(t)$ admite uma decomposição da forma

$$P(t) = \binom{t + a_d}{d} + \binom{t + a_{d-1}}{d - 1} + \cdots + \binom{t + a_0}{0},$$

com inteiros $a_d \geq a_{d-1} \geq \cdots \geq a_0 \geq 0$.

³ $G_N(U)$ denota a grassmanniana dos subespaços vetoriais de dimensão N do espaço vetorial U .

Portanto,

$$\mathcal{H} \subset G_{q(m_0)}(S_{m_0}).$$

Proposição 1.3.8. $\mathcal{H}$ define um fechado em $G_{q(m_0)}(S_{m_0})$.

Demonstração. Veja Proposição 2.9, p. 48 em [3]. □

Com isso, temos a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{c} \left\{ \text{Pontos fechados de } \text{Hilb}^{p(t)}(\mathbb{P}^n) \right\} \\ \updownarrow \\ \mathbb{H}_n^{p(t)} = \{I \subseteq S \mid I \text{ é um ideal homogêneo saturado tal que } p_I(t) = p(t)\} \\ \updownarrow \\ \mathcal{H} = \{V \subseteq S_{m_0} \mid \dim V = q(m_0) \text{ e } \dim S_1 V = q(m_0 + 1)\} \hookrightarrow G_{q(m_0)}(S_{m_0}) \end{array}$$

O que nos permite visualizar $\text{Hilb}^{p(t)} \mathbb{P}^n$ como um fechado da grassmanniana $G_{q(m_0)}(S_{m_0})$.

Capítulo 2

A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$

Assumiremos alguns conceitos elementares de geometria algébrica, como a definição do espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^n$, bem como as noções de pontos e retas em $\mathbb{P}^n$. O leitor pode consultar tais definições no Capítulo 1 de [16]. Neste capítulo, introduziremos o conceito central deste trabalho, a ação do grupo das mudanças de coordenadas projetivas, $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$, em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$. Começaremos estudando a ação do grupo das mudanças de coordenadas projetivas sobre o anel de polinômios e seus ideais, o que nos permitirá simplificar equações e classificar subesquemas fechados em $\mathbb{P}^n$ por meio de invariantes algébricos.

2.1 Mudança de Coordenadas Projetivas em $\mathbb{P}^n$

Seja $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1}) = \{T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \mid T \text{ é um isomorfismo } \mathbb{C}\text{-linear}\}$. Uma função $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ é denominada uma *mudança de coordenadas projetivas* (MCP) se existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $\varphi([v]) = [T(v)]$, $\forall [v] \in \mathbb{P}^n$. Considere o conjunto

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^n) = \{\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mid \varphi \text{ é uma mudança de coordenadas projetivas}\}.$$

Observe que tanto $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ quanto $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ são grupos com a operação de composição de funções.

Proposição 2.1.1. Sejam $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ determinados por $T, T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ respectivamente, então $\varphi = \psi$ se, e somente se $T = \lambda T_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

Demonstração. ($\implies$) Assuma que $\varphi = \psi$. Note que

$$\varphi(p) = \psi(p) \text{ com } p = [v] \in \mathbb{P}^n \implies [T(v)] = [T_1(v)] \implies T(v) = \lambda(v)T_1(v),$$

para algum $\lambda(v) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Considere $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{C}^{n+1}$. Logo $T(v_i) = \lambda_i T_1(v_i)$ com $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $i \in \{0, \dots, n\}$. Se $v = v_0 + v_1 + \dots + v_n \in \mathbb{C}^{n+1}$, então, note que

$$\begin{aligned} T(v) = \lambda T_1(v) &\iff T(v_0) + \dots + T(v_n) = \lambda(T_1(v_0) + \dots + T_1(v_n)) \\ &\iff \lambda_0 T_1(v_0) + \dots + \lambda_n T_1(v_n) = \lambda T_1(v_0) + \dots + \lambda T_1(v_n). \end{aligned}$$

Como $\{v_i\}_{i=0}^n$ é base de $\mathbb{C}^{n+1}$ e $T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, então $\{T(v_i)\}_{i=0}^n$ também é base de $\mathbb{C}^{n+1}$. Segue por conta da unicidade da escrita de vetores numa base que $\lambda_i = \lambda$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Por outro lado, para qualquer $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ existem únicos $a_0, \dots, a_n$ em $\mathbb{C}$ tais que $v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. De onde concluímos que

$$T(v) = \sum_{i=0}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda T_1(v_i) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i T_1(v_i) = \lambda T_1(v).$$

Portanto $T = \lambda T_1$.

($\Leftarrow$) Perceba que $\varphi = \psi$ se, e somente se, $\varphi(p) = \psi(p)$ para todo $p \in \mathbb{P}^n$. Considere $p = [v] \in \mathbb{P}^n$ qualquer e note que

$$\varphi(p) = \varphi([v]) = [T(v)] \stackrel{\text{Hip.}}{=} [\lambda T_1(v)] = [T_1(v)] = \psi(p).$$

□

Exemplo 2.1.2. Se $p \in \mathbb{P}^3$, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\varphi(p) = [1 : 0 : 0 : 0]$.

De fato $p = [v]$, com $v \in \mathbb{C}^4$ não nulo. Assim precisamos determinar $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T(v) = (1, 0, 0, 0)$. Sendo $\{e_i\}_{i=1}^4$ a base canônica de $\mathbb{C}^4$, basta então completar à base $\{v, v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{C}^4$ e escolher $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T(v) = e_1$ e $T(v_i) = e_{i+1}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim, φ definida por T satisfaz $\varphi(p) = \varphi([v]) = [T(v)] = [e_1]$.

Exemplo 2.1.3. Considere a reta $L \subset \mathbb{P}^3$, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\varphi(L) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$.

Usemos o seguinte fato: $L \subset \mathbb{P}^3$ é uma reta se, e somente se, $L = \mathbb{P}(W)$, com $W \in G_2(\mathbb{C}^4)^1$ (confira Corolário 1.9, p. 68 em [16]). Temos que

$$\mathcal{Z}(x_0, x_1) = \{[0 : 0 : a_2 : a_3] \mid [a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Afirmção: $\mathcal{Z}(x_0, x_1) = \mathbb{P}([e_3, e_4])$.

¹ A k -grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n) := \{W \subset \mathbb{C}^n \mid W \text{ é subespaço com } \dim W = k\}$.

Observe que

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{Z}(x_0, x_1) &\iff p = [v], \text{ com } v = (0, 0, a_2, a_3), \ a_2, a_3 \in \mathbb{C}, \text{ não ambos nulos} \\ &\iff p = [v] \text{ com } v = a_2 e_3 + a_3 e_4 \in [e_3, e_4] \\ &\iff p \in \mathbb{P}([e_3, e_4]). \end{aligned}$$

Seja $\{w_1, w_2\}$ base de $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ tal que $L = \mathbb{P}(W)$, completando $\{w_1, w_2\}$ à base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ de $\mathbb{C}^4$, então considere o único isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ tal que $T(w_1) = e_3, T(w_2) = e_4, T(w_3) = e_1$ e $T(w_4) = e_2$. Observe que $T(W) = [e_3, e_4]$, logo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por T satisfaz $\varphi(L) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$.

Exemplo 2.1.4. Sejam $L \subset \mathbb{P}^3$ uma reta e $p \in \mathbb{P}^3$ então:

1. Existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\varphi(L) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\varphi(p) = [0 : 1 : 0 : 0]$ se $p \notin L$.
2. Existe $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\psi(L) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\psi(p) = [0 : 0 : 1 : 0]$ se $p \in L$.

De fato, assumamos que $L = \mathbb{P}(W)$ com $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ e $p = [v]$ com $v \in \mathbb{C}^4$ não nulo.

1. Observe que $\mathcal{Z}(x_0, x_1) = \mathbb{P}([e_3, e_4])$ e $[0 : 1 : 0 : 0] = [e_2]$. Note que

$$p \notin L \iff v \notin W.$$

Considere $\{w_1, w_2\}$ base de W . Como $v \notin W$ concluímos que $\{w_1, w_2, v\}$ é L.I. e podemos completar à base $\{w_1, w_2, v, v_1\}$ de $\mathbb{C}^4$. Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T(w_1) = e_3, T(w_2) = e_4, T(v) = e_2$ e $T(v_1) = e_1$. Seja $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por T . Assim, $\varphi(L) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\varphi(p) = [e_2]$.

2. Queremos determinar $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\psi(L) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\psi(p) = [e_3]$. Escolha $\{v, w\}$ base de W contendo v , e complete à base $\{v, w, w_1, w_2\}$ de $\mathbb{C}^4$. Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$, tal que $T(v) = e_3, T(w) = e_4, T(w_1) = e_1$ e $T(w_2) = e_2$. Logo, considere $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por T .

2.2 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

No restante deste capítulo, consideraremos $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Definimos:

$$\begin{aligned} \bullet : \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1}) \times S &\longrightarrow S \\ (T, F) &\longmapsto T_\bullet F \end{aligned}$$

sendo $T_\bullet F := F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$.

Observação 1. Com as notações acima, " $\bullet$ " define uma ação à esquerda de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ em S .

No que segue do texto, vamos considerar a graduação usual em S . Assim, $S_0 = \mathbb{C}$, $S_1 = [x_0, \dots, x_n]$, em geral $S_d = [\{x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \mid i_0 + \cdots + i_n = d, i_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}]$.

Proposição 2.2.1. Para cada $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$. Considere $T_\bullet : S \rightarrow S$ dada por

$$F \mapsto T_\bullet F.$$

Verifica-se que

1. $T_\bullet$ é um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear.
2. $T_\bullet(G + F) = T_\bullet G + T_\bullet F$ e $T_\bullet(GF) = (T_\bullet G)(T_\bullet F)$, $\forall F, G \in S$.
3. $(T_\bullet)^{-1} = (T^{-1})_\bullet$ e $(T \circ R)_\bullet = T_\bullet \circ R_\bullet$ se $T, R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$.
4. $T_\bullet$ é um isomorfismo de anéis.
5. $F \in S$ é irredutível $\iff T_\bullet F$ é irredutível.
6. Se $F \in S_d$ então $T_\bullet F \in S_d$. Além disso, $T_\bullet : S_d \rightarrow S_d$ é isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear.

Demonstração. Veja Proposição 1.34 p. 127 em [16]. □

Proposição 2.2.2. Se $\{L_0, \dots, L_n\}$ é uma base de $S_1 = [x_0, \dots, x_n]$, então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T_\bullet L_i = x_i$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Demonstração. Observe que

$$T_\bullet L_i = x_i \iff L_i = (T_\bullet)^{-1} x_i \iff L_i = x_i(T(x_0, \dots, x_n)) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Considere $[T] = [a_{ij}]$, com $0 \leq i, j \leq n$, a matriz associada a T na base canônica de $\mathbb{C}^{n+1}$. Note que

$$T(x_0, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=0}^n a_{0j} x_j, \sum_{j=0}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=0}^n a_{nj} x_j \right).$$

Assuma que

$$L_i = b_{i0} x_0 + b_{i1} x_1 + \cdots + b_{in} x_n \quad \text{com } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Da igualdade $L_i = x_i(T(x_0, \dots, x_n))$ segue que

$$L_i = \sum_{j=0}^n b_{ij} x_j = \sum_{j=0}^n a_{ij} x_j \implies b_{ij} = a_{ij} \quad \forall i, j.$$

Assim, as linhas da matriz $[T]$ são dadas pelos coeficientes de L_i na base $\{x_i\}_{i=0}^n$. $\square$

Corolário 2.2.3. Sejam $\{L_i\}_{i=0}^n$ e $\{M_i\}_{i=0}^n$ bases de $S_1 = [x_0, \dots, x_n] \subset S$, então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T_\bullet L_i = M_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Demonstração. Pela Proposição 2.2.2, existem $T_1, T_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tais que $T_{1\bullet} L_i = x_i$ e $T_{2\bullet} M_i = x_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Segue que $M_i = (T_2^{-1})_\bullet x_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Considere $T := T_2^{-1} \circ T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, temos então que

$$T_\bullet L_i = (T_2^{-1} \circ T_1)_\bullet (L_i) = (T_2^{-1})_\bullet (T_{1\bullet} L_i) = (T_2^{-1})_\bullet x_i = M_i,$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. $\square$

A seguir mostraremos que mudanças de coordenadas projetivas preservam conjuntos algébricos e também irredutibilidade.

Proposição 2.2.4. Seja $F \in S_d$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$, verifica-se que

$$\varphi(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(T_\bullet F).$$

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ uma MCP determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$. Considere $p \in \mathbb{P}^n$ e note que

$$\begin{aligned} p \in \varphi(\mathcal{Z}(F)) &\iff p = \varphi(q) \text{ para algum } q \in \mathcal{Z}(F) \\ &\iff p = \varphi([u]) \text{ para algum } q = [u] \in \mathcal{Z}(F) \text{ (i.e. } F(u) = 0) \\ &\iff p = [v] \text{ com } [v] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } v = T(u) \text{ e } F(T^{-1}(v)) = 0 \\ &\iff p = [v] \text{ e } (T_\bullet F)(v) = 0 \\ &\iff p \in \mathcal{Z}(T_\bullet F). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.2.5. Mudanças de coordenadas projetivas preservam conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^n$.

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico. Assim, existem $F_1, \dots, F_k$ homogêneos em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tais que

$$X = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(F_i).$$

Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$. Note que,

$$\varphi(X) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(F_i)\right) = \bigcap_{i=1}^k \varphi(\mathcal{Z}(F_i)).$$

Segue da Proposição 2.2.4 que $\varphi(\mathcal{Z}(F_i)) = \mathcal{Z}(T_{\bullet}F_i)$. Logo,

$$\varphi(X) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(T_{\bullet}F_i).$$

□

Proposição 2.2.6. Toda MCP preserva conjuntos irredutíveis em $\mathbb{P}^n$.

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um conjunto irredutível e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$. Queremos mostrar que $\varphi(X)$ é irredutível.

De fato, considere $Y_1, Y_2 \subseteq \varphi(X)$ fechados tais que $Y_1 \cup Y_2 = \varphi(X)$. Logo,

$$X = \varphi^{-1}(Y_1) \cup \varphi^{-1}(Y_2).$$

Temos que cada $Y_i = \varphi(X) \cap Z_i$, com Z_i fechado em $\mathbb{P}^n$. Logo,

$$\varphi^{-1}(Y_i) = X \cap \varphi^{-1}(Z_i),$$

e segue do Corolário 2.2.5 que $\varphi^{-1}(Z_i)$ é fechado em $\mathbb{P}^n$. Portanto, cada $\varphi^{-1}(Y_i)$ é fechado em $\mathbb{P}^n$. Como X é irredutível, segue que

$$X = \varphi^{-1}(Y_1) \quad \text{ou} \quad X = \varphi^{-1}(Y_2).$$

Aplicando φ , tem-se que

$$\varphi(X) = Y_1 \quad \text{ou} \quad \varphi(X) = Y_2,$$

ou seja, $\varphi(X)$ é irredutível em $\mathbb{P}^n$.

□

Outro conceito importante na classificação das variedades algébricas é a noção de ponto singular, que introduziremos a seguir. Vale salientar que a mudança de coordenadas projetivas preservam pontos singulares (cf. Proposição 2.2.9).

Definição 2.2.7. Considere $[F] \in \mathbb{P}(S_d)$ sendo $d \geq 1$ e $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Dizemos que $p \in \mathbb{P}^n$ é um *ponto singular* de $[F]$ se $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Denotamos por $\text{Sin}F = \{p \in \mathbb{P}^n \mid p \text{ é ponto singular de } [F]\}$.

Exemplo 2.2.8. Considere $F = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. As derivadas parciais de F são:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 2x_0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0.$$

O conjunto singular de $[F]$ é dado por

$$\text{Sin} F = \mathcal{Z}\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) = \{[0 : 0 : 0 : 1]\}.$$

A próxima proposição nos permite concluir que MCP preservam pontos singulares.

Proposição 2.2.9. Considere $[F] \in \mathbb{P}(S_d)$ com $d \geq 1$, $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$, definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$. Verifica-se que:

$$p \in \text{Sin} F \iff \varphi(p) \in \text{Sin} T_{\bullet} F.$$

Demonstração. Queremos provar que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \iff \frac{\partial T_{\bullet} F}{\partial x_i}(\varphi(p)) = 0,$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Considere a composta $F \circ T^{-1} : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ das funções F e T^{-1} . Verifica-se que:

$$d(F \circ T^{-1})(v) = dF(T^{-1}(v)) dT^{-1}(v).$$

Ou seja

$$\left[\frac{\partial(F \circ T^{-1})}{\partial x_0}(v) \cdots \frac{\partial(F \circ T^{-1})}{\partial x_n}(v) \right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(T^{-1}(v)) \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}(T^{-1}(v)) \right] [T^{-1}].$$

Considere $u = T^{-1}(v)$ e $p = [u]$. Dessa forma,

$$\left[\frac{\partial T_{\bullet} F}{\partial x_0}(v) \cdots \frac{\partial T_{\bullet} F}{\partial x_n}(v) \right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(u) \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}(u) \right] [T^{-1}].$$

Visto que $\varphi(p) = [T(u)]$, segue que:

$$\left[\frac{\partial T_{\bullet} F}{\partial x_0}(\varphi(p)) \cdots \frac{\partial T_{\bullet} F}{\partial x_n}(\varphi(p)) \right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \right] [T^{-1}].$$

Como $T^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, segue da última igualdade acima que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \iff \frac{\partial T_{\bullet} F}{\partial x_i}(\varphi(p)) = 0,$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

□

2.2.1 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ nos ideais de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

Seja $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal e $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$. Defina

$$T_{\bullet}I = \{T_{\bullet}f \in S \mid f \in I\}.$$

Observação 7. Se $I \subseteq S$ é um ideal e $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, então $T_{\bullet}I$ é um ideal.

Proposição 2.2.10. Se $I \subseteq S$ é um ideal gerado por $\{f_1, \dots, f_k\}$ então $T_{\bullet}I$ é gerado por $\{T_{\bullet}f_1, \dots, T_{\bullet}f_k\}$.

Demonstração. De fato, se $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$, então, dado $f \in I$, existem $g_1, \dots, g_k \in S$ tais que $f = f_1g_1 + \dots + f_kg_k$. Logo

$$T_{\bullet}f = T_{\bullet}(f_1g_1 + \dots + f_kg_k) = (T_{\bullet}f_1)T_{\bullet}g_1 + \dots + (T_{\bullet}f_k)T_{\bullet}g_k.$$

Onde a última igualdade segue das propriedades apresentadas na Proposição 2.2.1.

Seja $F \in T_{\bullet}I$ então temos o seguinte,

$$F = T_{\bullet}f, \text{ para algum } f \in I \implies F \in \langle T_{\bullet}f_1, \dots, T_{\bullet}f_k \rangle.$$

Por outro lado, $f_i \in I \forall i \in \{1, \dots, k\}$, logo $T_{\bullet}f_i \in T_{\bullet}I \forall i \in \{1, \dots, k\}$ e como $T_{\bullet}I$ é um ideal de S , segue que $\langle T_{\bullet}f_1, \dots, T_{\bullet}f_k \rangle \subseteq T_{\bullet}I$. □

A seguir vamos definir uma ação à esquerda de $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ em $\mathcal{I} = \{I \subseteq S \mid I \text{ é um ideal}\}$. Definamos

$$\begin{aligned} \bullet : \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1}) \times \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ (T, I) &\longrightarrow T_{\bullet}I \end{aligned}$$

Proposição 2.2.11. Com as notações acima. Para todo $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ e $I \in \mathcal{I}$. Temos

1. $T_{\bullet}I$ é homogêneo se I for homogêneo em S .
2. $T_{\bullet}I$ é saturado se I for saturado em S .

Demonstração. 1. Considere $I \subseteq S$ ideal homogêneo. Assim, I admite um conjunto finito de geradores homogêneos $f_1, \dots, f_k$. Segue da Proposição 2.2.10 que $T_{\bullet}I = \langle T_{\bullet}f_1, \dots, T_{\bullet}f_k \rangle$ se $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, entretanto, sabemos pela Proposição 2.2.1 que $T_{\bullet}f_j$ é homogêneo se f_j é homogêneo. Logo, $T_{\bullet}I \subseteq S$ é gerado por polinômios homogêneos

e, portanto, é um ideal homogêneo.

2. Segue da definição do saturado de um ideal que $T_\bullet I \subseteq (T_\bullet I)^{\text{sat}}$. Assim, só precisamos mostrar que $(T_\bullet I)^{\text{sat}} \subseteq T_\bullet I$. Para isso, considere $f \in (T_\bullet I)^{\text{sat}}$ e $R = T^{-1}$. Observe que

$$\begin{aligned} f \in (T_\bullet I)^{\text{sat}} &\iff \exists k > 0 \text{ tal que } fx_i^k \in T_\bullet I, \forall i \in \{0, \dots, n\} \\ &\implies fx_i^k = T_\bullet g_i, \text{ com } g_i \in I, \forall i \in \{0, \dots, n\} \\ &\implies R_\bullet(fx_i^k) = R_\bullet(T_\bullet g_i), \forall i \in \{0, \dots, n\} \\ &\implies (R_\bullet f)(R_\bullet x_i)^k = g_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Segue da Proposição 2.2.1 que $R_\bullet : S_d \rightarrow S_d$ é um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear, logo $S_1 = [x_0, \dots, x_n] = [R_\bullet x_0, \dots, R_\bullet x_n]$, como também $\{(R_\bullet x_0)^{i_0} \cdots (R_\bullet x_n)^{i_n} \mid i_0 + \cdots + i_n = d\}$ é base de S_d .

Afirmção: $(R_\bullet f)x_i^N \in I, \forall i \in \{0, \dots, n\}$, se $N = (n+1)k$.

De fato

$$x_i^N \in S_N \implies x_i^N = \sum_{\alpha_c \in \mathbb{C}} \alpha_c (R_\bullet x_0)^{i_0} \cdots (R_\bullet x_n)^{i_n},$$

com $c = (i_0, \dots, i_n)$ e $N = i_0 + \cdots + i_n$. Logo

$$(R_\bullet f)x_i^N = \sum_{\alpha_c} \alpha_c (R_\bullet f)(R_\bullet x_0)^{i_0} \cdots (R_\bullet x_n)^{i_n}.$$

Note que $N = (n+1)k$ implica que existe $k \in \{0, \dots, n\}$ de modo que $i_k \geq k$ em $(R_\bullet x_0)^{i_0} \cdots (R_\bullet x_n)^{i_n}$ uma vez que $i_0 + \cdots + i_n = N$, suponha então $i_0 = k + \gamma$ com $\gamma > 0$. Logo $\alpha_c (R_\bullet f)(R_\bullet x_0)^k (R_\bullet x_0)^\gamma \cdots (R_\bullet x_n)^{i_n} \in I$, pois $(R_\bullet f)(R_\bullet x_0)^k = g_0 \in I$. Portanto $(R_\bullet f)x_i^N \in I \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Assim, como I é saturado, temos

$$R_\bullet f \in I^{\text{sat}} \implies R_\bullet f = g \in I \implies (T_\bullet)R_\bullet f = T_\bullet g \implies f = T_\bullet g \in T_\bullet I.$$

Portanto, $(T_\bullet I)^{\text{sat}} = T_\bullet I$. □

2.3 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$

Considere $\mathcal{I}^h = \{I \subseteq S \mid I \text{ é um ideal homogêneo}\}$. Se $I \in \mathcal{I}^h$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ é determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, então defina

$$\varphi_\bullet I := T_\bullet I.$$

Observação 8. A função $\varphi_\bullet : \mathcal{I}^h \rightarrow \mathcal{I}^h$ está bem definida, ou seja, se $T, T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ definem φ , então $T_\bullet I = (T_1)_\bullet I$ para todo $I \in \mathcal{I}^h$.

De fato,

$$f \in T_\bullet I \implies f = T_\bullet g, \text{ com } g \in I.$$

Lembremos que $T_1 = \lambda T$ para algum $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Logo, se f for homogêneo de grau s segue que

$$f = T_\bullet g = (\lambda^{-1} T_1)_\bullet g = (T_1)_\bullet (\lambda^{-1})^s g.$$

Assim $T_\bullet I \subseteq (T_1)_\bullet I$. A inclusão $(T_1)_\bullet I \subseteq T_\bullet I$ prova-se de forma análoga.

A seguir, para cada $I \subseteq S$ ideal homogêneo, considere h_I a função de Hilbert associada ao ideal I (cf. Definição 1.2.1).

Proposição 2.3.1. Seja $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ideal homogêneo, então $h_I(d) = h_{\varphi_\bullet I}(d)$, $\forall \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

Demonstração. Recordemos que $h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d$, sendo $I_d = S_d \cap I$.

Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ que determina $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$. Segue da Proposição 2.2.1 que $T_\bullet : S_d \rightarrow S_d$ é um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear, logo $\dim I_d = \dim T_\bullet(I_d)$. Lembremos que $(\varphi_\bullet I)_d = (T_\bullet I)_d$, e note que

$$(T_\bullet I)_d = (T_\bullet I) \cap S_d = (T_\bullet I) \cap (T_\bullet S_d) = T_\bullet(I \cap S_d) = T_\bullet(I_d).$$

De onde concluímos que

$$\dim(\varphi_\bullet I)_d = \dim(T_\bullet I)_d = \dim T_\bullet(I_d) = \dim I_d.$$

Portanto, $h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \dim S_d - \dim(\varphi_\bullet I)_d = h_{\varphi_\bullet I}(d)$. $\square$

Corolário 2.3.2. Para todo $I \in \mathcal{I}^h$ verifica-se que $p_I(t) = p_{\varphi_\bullet I}(t)$ se $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

Concluímos está subseção rerepresentando nosso objeto de estudo, a saber, o espaço de parâmetros, cujos pontos fechados são os subesquemas fechados de $\mathbb{P}^n$ tendo $p(t)$ como polinômio de Hilbert. Visto que existe uma correspondência entre os subesquemas fechados de $\mathbb{P}^n$ e os ideais homogêneos saturados em S (cf. Corolário 5.16 p. 119 e Ex. 5.10. p. 125 em [9]), vamos considerar

$$\mathbb{H}_n^{p(t)} := \{I \subseteq S \mid I \text{ ideal homogêneo saturado tal que } p_I(t) = p(t)\}. \quad (2.1)$$

A Proposição 2.2.11 e o Corolário 2.3.2 nos garantem que a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{H}_n^{p(t)}$, dada por

$$(\varphi, I) \longmapsto \varphi_\bullet I := T_\bullet I \quad \text{sendo } \varphi \text{ determinada por } T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1}). \quad (2.2)$$

Está bem definida.

Em nosso estudo, trabalharemos com a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ nos ideais de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, então por simplicidade usaremos a notação $\mathbb{H}^{p(t)}$ em lugar de $\mathbb{H}_3^{p(t)}$.

2.3.1 Resultados preliminares para o cálculo da dimensão de órbitas

A seguir apresentamos alguns resultados preliminares que nos permitirão determinar a dimensão das órbitas em $\mathbb{H}^{p(t)}$ sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$.

Lema 2.3.3. Seja X espaço topológico e $Y \subseteq X$ com a topologia induzida.

$$Y \text{ é irredutível} \iff \forall U \subseteq Y, U \neq \emptyset \text{ aberto, tem-se que } \overline{U} = Y.$$

Demonstração. Veja Proposição 1.5, p. 5 em [9]. □

Proposição 2.3.4. Seja Y uma variedade quase-afim, então $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

Demonstração. Veja Proposição 1.10, p. 6 em [9]. □

Fato 1: $\dim \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) = (n+1)^2$.

Demonstração. Observe que temos uma bijeção natural entre as matrizes quadradas de ordem $n+1$ com entradas em $\mathbb{C}$, $M_{n+1}(\mathbb{C})$, e $\mathbb{C}^{(n+1)^2} = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2}$. De modo que, sob esta bijeção o grupo $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ pode ser identificado com o aberto $U = \{v \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2} \mid \det v \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2}$, conforme ilustra o diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc} M_{n+1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{Bij.}} & \mathbb{C}^{(n+1)^2} = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2} \\ \uparrow & & \uparrow U \neq \emptyset \\ \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{Bij.}} & U \end{array}$$

Como $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2}$ é irredutível e $U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2}$ é um aberto não vazio, a partir do Lema 2.3.3 e da Proposição 2.3.4 seguem as igualdades

$$\dim \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) = \dim U = \dim \overline{U} = \dim \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{(n+1)^2} = (n+1)^2.$$

□

A seguir considere $\mathcal{D} = \{\lambda I \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}\}$ sendo I a matriz identidade de ordem $n+1$. Sendo $\mathcal{D}$ um subgrupo normal de $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, vamos considerar o grupo quociente:

$$\text{PGL}_n(\mathbb{C}) := \frac{\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})}{\mathcal{D}}.$$

Fato 2: $\dim \text{PGL}_n(\mathbb{C}) = (n+1)^2 - 1$.

Demonstração. Considere o homomorfismo de grupos $\pi : \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ dado por $A \mapsto \bar{A}$. Note que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\bar{A}) &= \{B \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \bar{B} = \bar{A}\} \\ &= \{\lambda A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0\} \\ &\cong \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Visto que $\dim \mathbb{C}^* = 1$ (pois $\mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ é aberto), concluímos que a dimensão das fibras $\pi^{-1}(\bar{A})$ é 1. Assim utilizando o teorema da dimensão das fibras², obtemos que $\dim \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) - \dim \text{PGL}_n(\mathbb{C}) = 1$. Logo, $\dim \text{PGL}_n(\mathbb{C}) = (n+1)^2 - 1$. $\square$

Fato 3: $\dim \text{Aut}(\mathbb{P}^n) = (n+1)^2 - 1$.

Se $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, então podemos associar $T_A \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ determinado por A . Seja $\varphi_A \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ o automorfismo determinado por T_A . Considere o isomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \text{PGL}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^n) \\ \bar{A} &\longmapsto \varphi_A. \end{aligned}$$

Logo $\dim \text{Aut}(\mathbb{P}^n) = \dim \text{PGL}_n(\mathbb{C}) = (n+1)^2 - 1$.

Observação 9. Seja $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$. Considere

$$\begin{aligned} \psi : \text{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{PGL}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto \bar{A}. \end{aligned}$$

Note que ψ é um homomorfismo de grupos sobrejetor.

Assim, segue do teorema dos isomorfismos de grupos que:

$$\frac{\text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})}{\ker(\psi)} \cong \text{PGL}_n(\mathbb{C}).$$

²veja Teorema 1.3.2 p. 132 em [16].

Além disso, se $H \leq \text{PGL}_n(\mathbb{C})$, então existe $H_1 \leq \text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ contendo $\ker(\psi)$, tal que

$$\frac{H_1}{\ker(\psi)} \cong H.$$

Logo, $\dim H = \dim H_1$, visto que $\psi^{-1}(\overline{A}) = \{\lambda A \mid \lambda^{n+1} = 1\}$ é um conjunto finito.

2.3.2 Dimensão das órbitas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$

Lembremos que, para uma ação geral de um grupo G em um conjunto X (por exemplo, G e X algébricos), vale a relação

$$\dim \mathcal{O}_x = \dim G - \dim G_x,$$

sendo $\mathcal{O}_x$ a órbita associada a $x \in X$ e G_x o estabilizador de x .

Assim, para $G = \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ e $x = I$ ideal homogêneo saturado em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$, obtemos

$$\dim \mathcal{O}_I = \dim \text{Aut}(\mathbb{P}^3) - \dim E_I = 15 - \dim E_I, \quad (2.3)$$

onde E_I é o estabilizador do ideal I .

Para o cálculo da dimensão do estabilizador E_I , utilizaremos o seguinte raciocínio.

Observação 2.

1. Sabemos que $\dim E_I = \dim H_I$, sendo $H_I = \{A \in \text{SL}_4(\mathbb{C}) \mid (T_A)_\bullet I = I\}$.³
2. Observe que podemos identificar H_I com um subconjunto de $M_4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{16}$, que vamos continuar denotando por H_I .

$$H_I \hookrightarrow M_4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{16}.$$

As 16 entradas (ou parâmetros) que compõem $A \in H_I$ irão satisfazer relações polinomiais, digamos $f_1, \dots, f_r$, isso determina o ideal das relações de H_I , que denotaremos por $\mathfrak{I}(H_I)$. Por exemplo, se o número de parâmetros livres em A é N e $f_1, \dots, f_r$ formam uma sequência regular, então

$$\dim E_I = \dim H_I = N - r.$$

$$\text{Em geral } \dim E_I = \dim \frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_{16}]}{\mathfrak{I}(H_I)}.$$

³ $T_A \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ denota o isomorfismo linear induzido por A .

3. Usaremos o Macaulay2 (Apêndice A) para os cálculos em que $r \geq 2$, pois no caso $r = 1$, podemos usar o seguinte resultado.⁴

Proposição 2.3.5. Uma variedade Y em $\mathbb{A}^n$ tem dimensão $n - 1$ se, e somente se, é o conjunto dos zeros $\mathcal{Z}(f)$ de um único polinômio irredutível não constante em $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

Demonstração. Veja Proposição 1.13, p. 7 em [9]. □

⁴Essencialmente, no caso $r = 1$ a relação $f_1 = \det A - 1$.

Capítulo 3

Órbitas em $\mathbb{H}^{t+1}$, $\mathbb{H}^{t+2}$ e $\mathbb{H}^{2t+1}$

Vale salientar que os esquemas de Hilbert: $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^3$ com $p(t) \in \{t+1, t+2, 2t+1\}$ são irredutíveis e não singulares. Neste capítulo faremos o cálculo das órbitas, respectivas dimensões e especializações nos espaços de parâmetros $\mathbb{H}^{t+1}$, $\mathbb{H}^{t+2}$ e $\mathbb{H}^{2t+1}$ pela ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. Segue a definição de especialização.

Definição 3.0.1. Sejam $\mathcal{O}_I$ e $\mathcal{O}_J$ órbitas em $\mathbb{H}^{p(t)}$ sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. Dizemos que $\mathcal{O}_I$ *especializa* em $\mathcal{O}_J$ se existe $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{H}^{p(t)}$, com $(-\delta, \delta) \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, tal que $\gamma(t) \in \mathcal{O}_I$ para todo $t \neq 0$ e $\gamma(0) \in \mathcal{O}_J$. Usaremos a notação

$$\mathcal{O}_I \longrightarrow \mathcal{O}_J \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \mathcal{O}_I \\ | \\ \mathcal{O}_J \end{array}$$

3.1 Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{t+1}$

Considere $\mathbb{H}^{t+1}$ o espaço que parametriza ideais homogêneos saturados em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ com polinômio de Hilbert igual a $t+1$ (ou seja, retas em $\mathbb{P}^3$).

Teorema 3.1.1. Considere a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ em $\mathbb{H}^{t+1}$ (cf. (2.2)). Então verifica-se que $\mathbb{H}^{t+1}$ é homogêneo¹ e $\dim \mathbb{H}^{t+1} = 4$.

Demonstração. Segue do Lema 3.2.2 em [12] (ou Proposição 3.2 em [3]) que

$$I \in \mathbb{H}^{t+1} \iff I = \langle h_0, h_1 \rangle, \text{ com } \{h_0, h_1\} \subset S_1 \text{ L.I.} \quad (3.1)$$

Afirmção 1: Se $I_0 = \langle x_0, x_1 \rangle \in \mathbb{H}^{t+1}$, então $\mathcal{O}_{I_0} = \mathbb{H}^{t+1}$.

Para isso, basta mostrar que $\mathbb{H}^{t+1} \subseteq \mathcal{O}_{I_0}$. Seja $I \in \mathbb{H}^{t+1}$, então segue de (3.1) que

¹Sob a ação do grupo G num conjunto X . Dizemos que X é homogêneo se X possui uma única órbita.

$I = \langle h_0, h_1 \rangle$ com $h_0, h_1 \in S_1$ L.I. Segue da Proposição 2.2.2 que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet h_i = x_i$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, sendo $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 . Logo, a Proposição 2.2.10 nos garante que

$$T_\bullet I = T_\bullet \langle h_0, h_1 \rangle = \langle T_\bullet h_0, T_\bullet h_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle.$$

Dessa igualdade, segue que:

$$I = (T^{-1})_\bullet \langle x_0, x_1 \rangle = \psi_\bullet \langle x_0, x_1 \rangle \in \mathcal{O}_{I_0},$$

sendo $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por T^{-1} . Logo, $\mathcal{O}_{I_0} = \mathbb{H}^{t+1}$.

Afirmção 2: $\dim \mathbb{H}^{t+1} = 4$.

Considere $\varphi \in E_{I_0}$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $\det[T] = 1$. Assuma que $[T^{-1}] = [a_{ij}]$, com $0 \leq i, j \leq 3$, é a matriz associada a T^{-1} na base canônica. Visto que

$$\varphi \in E_{I_0} \iff T_\bullet I_0 = I_0 \iff \langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle.$$

Concluimos que $T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \in [x_0, x_1]$, logo $a_{i2} = a_{i3} = 0$, para $i \in \{0, 1\}$. Assim,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Observe que em $[T^{-1}]$ comparecem 12 parâmetros sujeitos à condição $\det[T^{-1}] = 1$. Assim a Observação 2 nos permite concluir que $\dim E_{I_0} = 12 - 1 = 11$. Portanto² $\dim \mathbb{H}^{t+1} = \dim \mathcal{O}_{I_0} = 15 - 11 = 4$. $\square$

3.2 Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{t+2}$

No Teorema 3.2.2 mostraremos que $\mathbb{H}^{t+2}$ possui duas órbitas distintas, com representantes $I_0 = \langle x_0, x_1^2, x_1 x_2 \rangle$ e $I_1 = \langle x_0, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle$. A seguir daremos uma caracterização dos estabilizadores destes ideais.

Lema 3.2.1. Sejam $I_0 = \langle x_0, x_1^2, x_1 x_2 \rangle$ e $I_1 = \langle x_0, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle$ ideais em S , E_{I_i} o estabilizador de I_i sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ em $\mathbb{H}^{t+2}$. Considere o plano $H = \mathcal{Z}(x_0)$, a reta $l = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e os pontos $p_0 = [0 : 0 : 0 : 1], p_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$ em $\mathbb{P}^3$. Verifica-se que $\varphi \in E_{I_j}$ se, e somente se $\varphi(H) = H, \varphi(l) = l$ e $\varphi(p_j) = p_j$ para $j = 0, 1$.

²Sabemos que $\dim \mathcal{O}_{I_0} = \dim \text{Aut}(\mathbb{P}^3) - \dim E_{I_0}$.

Demonstração. $\boxed{j=1}$ ($\implies$) Considere $\varphi \in E_{I_1}$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Assim, temos $\varphi_\bullet I_1 = I_1$, ou seja $T_\bullet I_1 = I_1$. Logo

$$\mathcal{Z}(T_\bullet I_1) = \mathcal{Z}(I_1) \xrightarrow{\text{Prop. 2.2.4}} \varphi(\mathcal{Z}(I_1)) = \mathcal{Z}(I_1) \implies \varphi(l) \cup \{\varphi(p_1)\} = l \cup \{p_1\}.$$

Pela unicidade da decomposição em componentes irredutíveis,³ temos $\varphi(l) = l$ e $\varphi(p_1) = p_1$. Note também que

$$T_\bullet I_1 = I_1 \iff \langle T_\bullet x_0, T_\bullet(x_1 x_2), T_\bullet(x_1 x_3) \rangle = \langle x_0, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle \implies T_\bullet x_0 \in I_1.$$

A partir da Proposição 2.2.1 concluímos que $T_\bullet x_0 \in S_1 \cap I_1$. Obtemos então $T_\bullet x_0 = Ax_0$, com $A \in \mathbb{C}^*$. Portanto

$$\langle T_\bullet x_0 \rangle = \langle x_0 \rangle \implies \mathcal{Z}(T_\bullet x_0) = \mathcal{Z}(x_0) \xrightarrow{\text{Prop. 2.2.4}} \varphi(\mathcal{Z}(x_0)) = \mathcal{Z}(x_0) \implies \varphi(H) = H.$$

$\boxed{j=1}$ ($\impliedby$) Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\varphi(H) = H, \varphi(l) = l$ e $\varphi(p_1) = p_1$. Utilizando o Teorema dos Zeros de Hilbert obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(H) = H &\iff \mathcal{Z}(T_\bullet x_0) = \mathcal{Z}(x_0) \implies \mathfrak{I}(\mathcal{Z}(T_\bullet x_0)) = \mathfrak{I}(\mathcal{Z}(x_0)) \\ &\implies \sqrt{\langle T_\bullet x_0 \rangle} = \sqrt{\langle x_0 \rangle} \\ &\implies \langle T_\bullet x_0 \rangle = \langle x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Assim temos que $T_\bullet x_0 = \lambda x_0$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo.

Por outro lado

$$\begin{cases} \varphi(l) = l &\iff \mathcal{Z}(\langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_1 \rangle), \\ \varphi(p_1) = p_1 &\iff \mathcal{Z}(\langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_2, T_\bullet x_3 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_2, x_3 \rangle). \end{cases}$$

Aplicando $\mathfrak{I}$ e o Teorema dos Zeros de Hilbert, obtemos

$$\langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \text{ e } \langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_2, T_\bullet x_3 \rangle = \langle x_0, x_2, x_3 \rangle.$$

O que implica em $[T_\bullet x_0, T_\bullet x_1] = [x_0, x_1]$ e $[T_\bullet x_0, T_\bullet x_2, T_\bullet x_3] = [x_0, x_2, x_3]$.

Logo

$$\begin{cases} T_\bullet x_1 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1, \text{ com } \lambda_1 \neq 0, \\ T_\bullet x_2 = b_{20} x_0 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3, \\ T_\bullet x_3 = b_{30} x_0 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3. \end{cases} \quad (3.2)$$

³Ver Proposição 1.5, p. 5 em [9].

Visto que $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$ com $\lambda \neq 0$, obtemos

$$[T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_2, T_{\bullet}x_3] = [x_0, b_{22}x_2 + b_{23}x_3, b_{32}x_2 + b_{33}x_3] = [x_0, x_2, x_3],$$

com $b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} \neq 0$.

Afirmção: $\varphi_{\bullet}I_1 = I_1$.

Substituindo as equações (3.2) em $\varphi_{\bullet}I_1 = T_{\bullet}I_1 = \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}(x_1x_2), T_{\bullet}(x_1x_3) \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_{\bullet}I_1 &= \langle \lambda x_0, (\lambda_0x_0 + \lambda_1x_1)T_{\bullet}x_2, (\lambda_0x_0 + \lambda_1x_1)T_{\bullet}x_3 \rangle \\ &= \langle x_0, \lambda_0x_0T_{\bullet}x_2 + \lambda_1x_1T_{\bullet}x_2, \lambda_0x_0T_{\bullet}x_3 + \lambda_1x_1T_{\bullet}x_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1T_{\bullet}x_2, x_1T_{\bullet}x_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1(b_{22}x_2 + b_{23}x_3), x_1(b_{32}x_2 + b_{33}x_3) \rangle. \end{aligned}$$

Caso $b_{22} = 0$, temos que $b_{23} \neq 0$ e $b_{32} \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle x_0, x_1(b_{22}x_2 + b_{23}x_3), x_1(b_{32}x_2 + b_{33}x_3) \rangle &= \langle x_0, b_{23}x_1x_3, b_{32}x_1x_2 + b_{33}x_1x_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1x_3, x_1x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Caso $b_{22} \neq 0$, considere $h = (b_{32}x_2 + b_{33}x_3)b_{22} - (b_{22}x_2 + b_{23}x_3)b_{32} = (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})x_3$, dessa forma

$$\langle x_0, x_1(b_{22}x_2 + b_{23}x_3), x_1(b_{32}x_2 + b_{33}x_3) \rangle = \langle x_0, x_1(b_{22}x_2 + b_{23}x_3), x_1h \rangle.$$

Logo, obtemos $\langle x_0, x_1(b_{22}x_2 + b_{23}x_3), x_1h \rangle = \langle x_0, x_1x_2, x_1x_3 \rangle$. Portanto $\varphi_{\bullet}I_1 = I_1$.

$j = 0$ ($\implies$) Considere $\varphi \in E_{I_0}$ determinado por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Podemos decompor I_0 em seus ideais primários⁴, obtendo $I_0 = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle$. Note que o conjunto dos primos associados a I_0 (que é único) é

$$\{\sqrt{\langle x_0, x_1 \rangle}, \sqrt{\langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle}\} = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_1, x_2 \rangle\}.$$

Visto que $\varphi_{\bullet}I_0$ admite a decomposição primária, a seguir,

$$\varphi_{\bullet}I_0 = \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)^2, (T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) \rangle = \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle \cap \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)^2, T_{\bullet}x_2 \rangle,$$

e $\varphi_{\bullet}I_0 = I_0$, segue que

$$\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle \cap \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)^2, T_{\bullet}x_2 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle = I_0.$$

⁴O teorema da decomposição primária nos garante essa decomposição e a unicidade dos primos associados. Para mais detalhes confira o a Seção 4.1 deste trabalho ou veja o Capítulo 4 de [2].

Logo, pela unicidade do conjunto dos primos associados, segue que

$$\{\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle, \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2 \rangle\} = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_1, x_2 \rangle\}.$$

De onde concluímos que $\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2 \rangle = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$. O que implica em

$$\mathcal{Z}(\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_1 \rangle) \text{ e } \mathcal{Z}(\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_1, x_2 \rangle).$$

Portanto $\varphi(l) = l$ e $\varphi(p_0) = p_0$. Para mostrar que $\varphi(H) = H$ o processo é análogo ao caso $j = 1$.

$j = 0$ ($\Leftarrow$) Seja $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $\varphi(H) = H$, $\varphi(l) = l$ e $\varphi(p_0) = p_0$. Vamos mostrar que $\varphi \in E_{I_0}$. Similarmente ao caso $j = 1$, vamos ter

$$\varphi(H) = H \text{ e } \varphi(l) = l \implies T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0 \text{ e } T_{\bullet}x_1 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$$

com $\lambda, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$ e $\lambda\lambda_1 \neq 0$. Note que

$$\varphi(p_0) = p_0 \implies \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2 \rangle = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle.$$

Logo, $T_{\bullet}x_2 = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi \cdot I_0 &= \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)^2, (T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) \rangle \\ &= \langle \lambda x_0, (\lambda_0 x_0)^2 + 2\lambda_0 \lambda_1 x_0 x_1 + (\lambda_1 x_1)^2, (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) \left(\sum_{i=0}^2 \beta_i x_i \right) \rangle \\ &= \langle x_0, x_1^2, x_1 x_2 \rangle = I_0. \end{aligned}$$

□

Um fato que nos será útil no que segue do texto é o seguinte:

Fato. Sejam $l \subseteq \mathbb{P}^3$ uma reta e $p \in \mathbb{P}^3$ um ponto. Se $p \notin l$ então existe um único plano $H \subseteq \mathbb{P}^3$ contendo l e p , ou equivalentemente, existe $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ base se S_1 tal que

$$H = \mathcal{Z}(h_0), l = \mathcal{Z}(h_0, h_1) \text{ e } p = \mathcal{Z}(h_0, h_2, h_3).$$

De posse do Lema 3.2.1 e do fato acima, abordaremos a seguir o teorema principal dessa subseção.

Teorema 3.2.2. Considere a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ em $\mathbb{H}^{t+2}$ (cf. (2.2)). Verifica-se que:

1. $I_0 = \langle x_0, x_1^2, x_1x_2 \rangle$ e $I_1 = \langle x_0, x_1x_2, x_1x_3 \rangle$ pertencem a $\mathbb{H}^{t+2}$.
2. $\mathbb{H}^{t+2} = \mathcal{O}_{I_0} \dot{\cup} \mathcal{O}_{I_1}$ (ou seja, $\mathbb{H}^{t+2}$ possui exatamente duas órbitas).
3. $\mathcal{O}_{I_1}$ está em bijeção com $\Gamma_1 = \{(l, p) \in \Sigma \times \mathbb{P}^3 \mid p \notin l\}$ e $\mathcal{O}_{I_0}$ mapeia sobrejetivamente em $\Gamma_0 = \{(l, p) \in \Sigma \times \mathbb{P}^3 \mid p \in l\}$ com fibras em bijeção com $\mathbb{P}^1$, sendo $\Sigma = \{l \subset \mathbb{P}^3 \mid l \text{ é uma reta}\}$.
4. $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$ e $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 6$.
5. $\mathcal{O}_{I_1}$ especializa em $\mathcal{O}_{I_0}$.

Demonstração. 1. Veja os cálculos na Seção A.0.1 do Apêndice A.

2. A partir do Teorema 3.1 em [3] tem-se que

$$I \in \mathbb{H}^{t+2} \iff I = \begin{cases} \langle h_0, h_1h_2, h_1h_3 \rangle & \text{com } [h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1, \\ \text{ou} \\ \langle h_0, h_1^2, h_1h_2 \rangle & \text{com } \{h_0, h_1, h_2\} \subset S_1 \text{ L.I.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Considere $I \in \mathbb{H}^{t+2}$, segue de (3.3) que temos duas possibilidades

- $I = \langle h_0, h_1h_2, h_1h_3 \rangle$, com $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$. Logo, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet h_i = x_i \forall i \in \{0, \dots, 3\}$. Basta então considerar $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por T , que satisfaz $\psi_\bullet I = I_1 \in \mathcal{O}_{I_1}$.
 - $I = \langle h_0, h_1^2, h_1h_2 \rangle$ com $\{h_0, h_1, h_2\}$ L.I. Podemos então completar a uma base de S_1 com h_3 e como no caso anterior considerar $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_\bullet h_i = x_i \forall i \in \{0, \dots, 3\}$. Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por R , temos então $\varphi_\bullet I = I_0 \in \mathcal{O}_{I_0}$.
3. Considere $\Omega_1 : \mathcal{O}_{I_1} \rightarrow \Gamma_1$, dada por $\Omega_1(\varphi_\bullet I_1) = (\varphi(l), \varphi(p_1))$, sendo $l = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\{p_1\} = \mathcal{Z}(x_0, x_2, x_3)$. Observe que
- Ω_1 está bem definida. De fato, dados $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tais que $\varphi_\bullet I_1 = \psi_\bullet I_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \varphi_\bullet I_1 = \psi_\bullet I_1 &\iff (\psi^{-1})_\bullet \varphi_\bullet I_1 = I_1 \\ &\iff (\psi^{-1} \circ \varphi)_\bullet I_1 = I_1 \\ &\iff (\psi^{-1} \circ \varphi) \in E_{I_1}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.1 temos $(\psi^{-1} \circ \varphi)(l) = l$ e $(\psi^{-1} \circ \varphi)(p_1) = p_1$. Que implica em $\psi(l) = \varphi(l)$ e $\psi(p_1) = \varphi(p_1)$.

- Ω_1 é injetora. Considere $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tais que $\Omega_1(\varphi \bullet I_1) = \Omega_1(\psi \bullet I_1)$, logo $(\psi(l), \psi(p_1)) = (\varphi(l), \varphi(p_1))$. Assim,

$$\begin{cases} \psi(l) = \varphi(l) \implies \psi^{-1} \circ \varphi(l) = l, \\ \psi(p_1) = \varphi(p_1) \implies \psi^{-1} \circ \varphi(p_1) = p_1, \end{cases} \xRightarrow{\text{Fato}} \psi^{-1} \circ \varphi(H) = H = \mathcal{Z}(x_0).$$

Pelo Lema 3.2.1, vamos ter que

$$\psi^{-1} \circ \varphi \in E_{I_1} \implies (\psi^{-1} \circ \varphi) \bullet I_1 = I_1 \implies (\psi^{-1}) \bullet \varphi \bullet I_1 = I_1 \implies \varphi \bullet I_1 = \psi \bullet I_1.$$

- Ω_1 é sobrejetora. Dado $(L, p) \in \Gamma_1$ queremos mostrar que existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\Omega_1(\varphi \bullet I_1) = (L, p)$, ou seja, $(\varphi(l), \varphi(p_1)) = (L, p)$, sendo $l = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\{p_1\} = \mathcal{Z}(x_0, x_2, x_3)$.

Pelo **Fato**, podemos supor sem perda de generalidade que $L = \mathcal{Z}(h_0, h_1)$ e $\{p\} = \mathcal{Z}(h_0, h_2, h_3)$, com $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 . Assim, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T \bullet x_i = h_i$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Basta então tomar φ determinada por T e temos

$$\varphi(l) = \mathcal{Z}(T \bullet x_0, T \bullet x_1) = \mathcal{Z}(h_0, h_1) = L \text{ e } \varphi(p_1) = \mathcal{Z}(T \bullet x_0, T \bullet x_2, T \bullet x_3) = \{p\}.$$

Considere $\Omega_0 : \mathcal{O}_{I_0} \rightarrow \Gamma_0$, definida por $\Omega_0(\varphi \bullet I_0) = (\varphi(l), \varphi(p_0))$, sendo $l = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $\{p_1\} = \mathcal{Z}(x_0, x_1, x_2)$. Observe que

- Ω_0 está bem definida. A demonstração é análoga ao caso de Ω_1 no item 3.
- Ω_0 é sobrejetiva. Dado $(L, p) \in \Gamma_0$. Queremos encontrar $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ tal que $\Omega_0(\varphi \bullet I_0) = (\varphi(l), \varphi(p_0)) = (L, p)$. Temos que $L = \mathcal{Z}(h_0, h_1)$ com $h_0, h_1 \in S_1$ L.I. e como $p \in L$, podemos considerar $\{p\} = \mathcal{Z}(h_0, h_1, h_2)$ (ou seja, zeros de 3 formas lineares linearmente independentes). Completando a uma base, considere $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 , logo o Corolário 2.2.3 nos garante que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T \bullet x_i = h_i$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por T , satisfaz

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= \varphi(\mathcal{Z}(x_0, x_1)) = \mathcal{Z}(T \bullet x_0, T \bullet x_1) = \mathcal{Z}(h_0, h_1) = L \text{ e} \\ \{\varphi(p_0)\} &= \varphi(\mathcal{Z}(x_0, x_1, x_2)) = \mathcal{Z}(T \bullet x_0, T \bullet x_1, T \bullet x_2) = \mathcal{Z}(h_0, h_1, h_2) = \{p\}. \end{aligned}$$

- $\Omega_0^{-1}(L, p)$ está em bijeção com $\mathbb{P}^1$.

Por simplicidade, faremos a prova para a reta $L = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $p = [0 : 0 : 0 : 1]$. Seja $\pi = \mathcal{Z}(h)$ um plano em $\mathbb{P}^3$. Utilizando o Teorema dos Zeros de Hilbert, obtemos:

$$\begin{aligned} L \subseteq \pi &\implies \mathfrak{I}(L) = \mathfrak{I}(\mathcal{Z}(x_0, x_1)) \supseteq \mathfrak{I}(\pi) = \mathfrak{I}(\mathcal{Z}(h)) \\ &\implies \langle x_0, x_1 \rangle \supseteq \langle h \rangle \\ &\implies h \in \langle x_0, x_1 \rangle. \end{aligned}$$

De fato, verifica-se que $L \subseteq \pi$ se, e somente se, $h \in [x_0, x_1]$. O que nos permite definir a seguinte bijeção

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \{\pi \subset \mathbb{P}^3 \mid \pi \text{ é um plano contendo a reta } \mathcal{Z}(x_0, x_1)\} \\ [a_0 : a_1] &\longmapsto \mathcal{Z}(a_0x_0 + a_1x_1) \end{aligned}$$

Portanto, $\Omega_0^{-1}(L, p)$ também está em bijeção com $\mathbb{P}^1$, uma vez que, fixados L e p , a fibra consiste exatamente dos planos π contendo L (e automaticamente contendo p , já que $p \in L$), e cada um desses planos está em correspondência com um ponto da forma $[a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$.

4. Afirmação 1: $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$.

Seja $\varphi \in E_{I_1}$ determinado por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Segue do Lema 3.2.1 que $\varphi(H) = H$, $\varphi(l) = l$ e $\varphi(p_1) = p_1$, o que nos permite concluir que

$$\mathcal{Z}(T_\bullet x_0) = \mathcal{Z}(x_0), \mathcal{Z}(T_\bullet x_0, T_\bullet x_1) = \mathcal{Z}(x_0, x_1) \text{ e } \mathcal{Z}(T_\bullet x_0, T_\bullet x_2, T_\bullet x_3) = \mathcal{Z}(x_0, x_2, x_3).$$

Que implica em $T_\bullet x_0 \in [x_0]$, $T_\bullet x_1 \in [x_0, x_1]$ e $T_\bullet x_2, T_\bullet x_3 \in [x_0, x_2, x_3]$. Logo, a matriz de T^{-1} na base canônica de $\mathbb{C}^4$ será da forma

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Nessa matriz aparecem 9 entradas sujeitas à condição $\det[T^{-1}] = 1$, logo $\dim E_{I_1} = 8$ (cf. Observação 2). Portanto $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$.

Afirmação 2: $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 6$.

Seja $\varphi \in E_{I_0}$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Segue do Lema 3.2.1 que $\varphi(H) = H$, $\varphi(l) = l$ e $\varphi(p_0) = p_0$. O que implica em $T_\bullet x_0 \in [x_0]$, $T_\bullet x_1 \in [x_0, x_1]$ e $T_\bullet x_2 \in$

$[x_0, x_1, x_2]$. Assim a matriz de T^{-1} na base canônica de $\mathbb{C}^4$ é dada por

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Nessa matriz aparecem 10 entradas sujeitas à condição $\det[T^{-1}] = 1$, logo $\dim E_{I_0} = 9$ (cf. Observação 2). Portanto $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 6$.

5. Basta considerar $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{t+2}$ dada por

$$s \mapsto \gamma(s) = \langle x_0, x_1(x_1 + sx_3), x_1x_2 \rangle.$$

Observe que γ satisfaz $\gamma(0) = \langle x_0, x_1^2, x_1x_2 \rangle = I_0$ e $\gamma(s) \in \mathcal{O}_{I_1} \forall s \neq 0$.

□

3.3 Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{2t+1}$

No Teorema 3.3.2 mostraremos que existem exatamente três órbitas em $\mathbb{H}^{2t+1}$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ com representantes $I_0 = \langle x_0, x_1^2 \rangle$, $I_1 = \langle x_0, x_1x_2 \rangle$ e $I_2 = \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$ (um reflexo natural da classificação das cônicas no plano projetivo).

O seguinte lema caracteriza os estabilizadores de I_0 , I_1 e I_2 , respectivamente.

Lema 3.3.1. Com as notações acima, sejam $H = \mathcal{Z}(x_0)$, $L = \mathcal{Z}(I_0)$, $L_1 = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $L_2 = \mathcal{Z}(x_0, x_2)$ as componentes de $\mathcal{Z}(I_1)$ e $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(I_2)$. Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$, verifica-se que:

1. $\varphi \in E_{I_0} \iff \varphi(H) = H$ e $\varphi(L) = L$.
2. $\varphi \in E_{I_1} \iff \varphi(L_i) = L_i$ para $i \in \{1, 2\}$ ou $\varphi(L_1) = L_2$ e $\varphi(L_2) = L_1$.
3. $\varphi \in E_{I_2} \iff \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Demonstração. No que segue, considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$.

1. ($\implies$) Se $\varphi \in E_{I_0}$ então $\varphi_\bullet I_0 = I_0$. Logo,

$$\langle T_\bullet x_0, (T_\bullet x_1)^2 \rangle = \langle x_0, x_1^2 \rangle \implies T_\bullet x_0 = \lambda x_0 \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

De onde concluímos que $\varphi(H) = H$. Por outro lado, assumamos que $T_{\bullet}x_1 = \alpha_0x_0 + M$ com $M = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3$. Assim, $(T_{\bullet}x_1)^2 \in I_0$ e

$$(T_{\bullet}x_1)^2 = (\alpha_0x_0)^2 + 2\alpha_0x_0M + M^2 = x_0(\alpha_0^2x_0 + 2\alpha_0M) + M^2.$$

De onde concluímos que $M^2 \in I_0$. Portanto $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo, $M = \alpha_1x_1$. Portanto, $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$ e $T_{\bullet}x_1 = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1$, com $\alpha_0, \alpha_1, \lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda\alpha_1 \neq 0$. Dessa forma

$$\begin{aligned}\varphi(L) &= \varphi(\langle x_0, x_1 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle) \\ &= \mathcal{Z}(\langle \lambda x_0, \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 \rangle) \\ &= \mathcal{Z}(\langle x_0, x_1 \rangle) = L.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Temos $\varphi(H) = H$ e $\varphi(L) = L$. Por um raciocínio análogo ao do Lema 3.2.1 segue que $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$, e $T_{\bullet}x_1 = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1$ com λ, α_0 e $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda\alpha_1 \neq 0$. Logo, lembre que $\varphi_{\bullet}I_0 = T_{\bullet}I_0$ e observe que

$$\langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)^2 \rangle = \langle \lambda x_0, x_0(\alpha_0^2x_0 + 2\alpha_0\alpha_1x_1) + (\alpha_1x_1)^2 \rangle = \langle x_0, x_1^2 \rangle = I_0.$$

2. ($\Rightarrow$) Considere $\varphi \in E_{I_1}$, sendo $I_1 = \langle x_0, x_1x_2 \rangle$, logo $T_{\bullet}I_1 = I_1$. Assim,

$$\langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) \rangle = \langle x_0, x_1x_2 \rangle.$$

De onde obtemos $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. A seguir escreva

$$T_{\bullet}x_1 = \alpha_0x_0 + M_1 \quad \text{e} \quad T_{\bullet}x_2 = \beta_0x_0 + M_2 \quad \text{com} \quad M_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Logo,

$$(T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) = x_0M_3 + M_1M_2 \quad \text{com} \quad M_3 = \alpha_0T_{\bullet}x_2 + \beta_0M_1.$$

Como $(T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) \in I_1$, concluímos que $M_1M_2 \in I_1$. Portanto, $M_1M_2 = \gamma x_1x_2$ para algum $\gamma \in \mathbb{C}$ não nulo. Assim temos duas possibilidades

(a) $M_1 = \gamma_1x_1$ e $M_2 = \gamma_2x_2$ ou (b) $M_1 = \mu_1x_2$ e $M_2 = \mu_2x_1$.

Analisando cada caso, obtemos

(a) Nesse caso $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$, $T_{\bullet}x_1 = \alpha_{01}x_0 + \gamma_1x_1$ e $T_{\bullet}x_2 = \alpha_{02}x_0 + \gamma_2x_2$. Logo

$$\begin{cases} \varphi(H) = H, \\ \varphi(L_i) = \mathcal{Z}(\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_i \rangle) = \mathcal{Z}(\langle \lambda x_0, \alpha_{0i}x_0 + \gamma_i x_i \rangle) = \mathcal{Z}(x_0, x_i) = L_i. \end{cases}$$

(b) Neste caso $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$, $T_{\bullet}x_1 = \alpha_{01}x_0 + \mu_1x_2$ e $T_{\bullet}x_2 = \alpha_{02}x_0 + \mu_2x_1$. Logo

$$\begin{cases} \varphi(H) = H, \\ \varphi(L_1) = \mathcal{Z}(\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle \lambda x_0, \alpha_{01}x_0 + \mu_1x_2 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_2 \rangle) = L_2, \\ \varphi(L_2) = \mathcal{Z}(\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_2 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle \lambda x_0, \alpha_{02}x_0 + \mu_2x_1 \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_1 \rangle) = L_1. \end{cases}$$

Assim se verifica que $\varphi(H) = H$ e $\varphi(L_i) = L_i$ para $i = 1, 2$ ou $\varphi(H) = H$ com $\varphi(L_1) = L_2$ e $\varphi(L_2) = L_1$.

2. ($\Leftarrow$) Assuma que (a) $\varphi(L_i) = L_i$ para $i = 1, 2$ ou (b) $\varphi(L_1) = L_2$ e $\varphi(L_2) = L_1$. Observe que em ambos os casos $\varphi(H) = H$, visto que H é o único plano em $\mathbb{P}^3$ contendo as retas L_1, L_2 . No caso (a) verifica-se para $i = 1, 2$ que

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{Z}(x_0, x_i)) = \mathcal{Z}(x_0, x_i) &\Longleftrightarrow \mathcal{Z}(T_{\bullet}\langle x_0, x_i \rangle) = \mathcal{Z}(\langle x_0, x_i \rangle) \\ &\Longleftrightarrow \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_i \rangle = \langle x_0, x_i \rangle. \end{aligned}$$

Já foi demonstrado no Lema 3.2.1 que $\varphi(H) = H$ implica em $T_{\bullet}x_0 = \lambda x_0$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. Por outro lado

$$\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_i \rangle = \langle x_0, x_i \rangle \implies T_{\bullet}x_i = \alpha_{0i}x_0 + \alpha_i x_i \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } \alpha_1\alpha_2 \neq 0.$$

Logo $\varphi_{\bullet}I_1 = T_{\bullet}\langle x_0, x_1x_2 \rangle = \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) \rangle = \langle \lambda x_0, x_0M + \alpha_1\alpha_2x_1x_2 \rangle$, sendo $M = \alpha_{01}\alpha_{02}x_0 + \alpha_{01}\alpha_2x_2 + \alpha_{02}\alpha_1x_1$. Portanto $\varphi_{\bullet}I_1 = I_1$.

No caso (b), similarmente temos que

$$\begin{cases} \varphi(\mathcal{Z}(x_0, x_1)) = \mathcal{Z}(x_0, x_2) \Longleftrightarrow \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle = \langle x_0, x_2 \rangle, \\ \varphi(\mathcal{Z}(x_0, x_2)) = \mathcal{Z}(x_0, x_1) \Longleftrightarrow \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_2 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle. \end{cases}$$

De onde obtemos $T_{\bullet}x_i = \alpha_{0i}x_0 + \alpha_i x_j$ para $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Logo,

$$\varphi_{\bullet}I_1 = T_{\bullet}\langle x_0, x_1x_2 \rangle = \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_2) \rangle = \langle \lambda x_0, x_0M + \alpha_1\alpha_2x_1x_2 \rangle = I_1.$$

$$3. \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Longleftrightarrow \varphi(\mathcal{Z}(I_2)) = \mathcal{Z}(I_2) \Longleftrightarrow T_{\bullet}I_2 = I_2.$$

□

De posse desses resultados, podemos abordar o teorema principal desta subseção.

Teorema 3.3.2. Considere a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ em $\mathbb{H}^{2t+1}$ dada em (2.2). Sejam $I_0 = \langle x_0, x_1^2 \rangle$, $I_1 = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle$ e $I_2 = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle$ ideais em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Verifica-se que

1. I_0, I_1 e $I_2 \in \mathbb{H}^{2t+1}$.
2. $\mathbb{H}^{2t+1} = \mathcal{O}_{I_0} \dot{\cup} \mathcal{O}_{I_1} \dot{\cup} \mathcal{O}_{I_2}$.
3. $\dim \mathcal{O}_{I_2} = 8$, $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$ e $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 5$.
4. Temos as especializações $\mathcal{O}_{I_2} \longrightarrow \mathcal{O}_{I_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{I_0}$.

Demonstração. 1. Veja os cálculos na Seção A.0.2 do Apêndice A.

2. Seja $I \in \mathbb{H}^{2t+1}$, segue do Lema 3.4.3 em [12] (ou Teorema 3.2 em [3]) que existem $h \in S_1$ não nulo e $f \in S_2 - hS_1$ tais que $I = \langle h, f \rangle$. Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet h = x_0$. Assim

$$T_\bullet I = \langle T_\bullet h, T_\bullet f \rangle = \langle x_0, T_\bullet f \rangle.$$

Note que $T_\bullet f = x_0 L + g(x_1, x_2, x_3)$, com $L \in S_1$. Logo $T_\bullet I = \langle x_0, g \rangle$, com $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

Afirmção: Existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que exatamente uma das seguintes possibilidades ocorre

$$R_\bullet(T_\bullet I) = \begin{cases} I_0 = \langle x_0, x_1^2 \rangle, \\ I_1 = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle, \\ I_2 = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle. \end{cases}$$

Pela classificação das cônicas em $\mathbb{P}^2$ (confira a Proposição B.1.1 no Apêndice B), para todo $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ temos que existe $\tilde{R} \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que somente uma das três possibilidades para $\tilde{R}_\bullet g$ a seguir ocorre

$$\tilde{R}_\bullet g = \begin{cases} x_1^2 - x_2 x_3, \\ x_1 x_2, \\ x_1^2. \end{cases}$$

Assim, considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ determinada por $R_\bullet x_0 = x_0$ e $R_\bullet x_i = \tilde{R}_\bullet x_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

3. A seguir utilizaremos o Lema 3.3.1 para calcular as dimensões das órbitas de $\mathbb{H}^{2t+1}$. Consideraremos em todos os casos $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ e a matriz de T^{-1} na base canônica de $\mathbb{C}^4$.

Afirmção 1: $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 5$.

Pelo Lema 3.3.1, se $\varphi \in E_{I_0}$, tem-se que

$$T_{\bullet}x_0 \in [x_0], T_{\bullet}x_1 \in [x_0, x_1] \text{ e } T_{\bullet}x_2, T_{\bullet}x_3 \in [x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Logo, a matriz de T^{-1} será da forma

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Observe que na matriz acima comparecem 11 parâmetros sob a condição $\det[T^{-1}] = 1$, logo $\dim E_{I_0} = 11 - 1 = 10$ (cf. Observação 2). Assim $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 15 - 10 = 5$.

Afirmção 2: $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$.

Se $\varphi \in E_{I_1}$, então, por conta do Lema 3.3.1 temos duas possibilidades a considerar:

(a) $\varphi(L_i) = L_i$, para $i = 1, 2$. Neste caso temos

$$T_{\bullet}x_0 \in [x_0], T_{\bullet}x_1 \in [x_0, x_1], T_{\bullet}x_2 \in [x_0, x_2] \text{ e } T_{\bullet}x_3 \in [x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Logo, a matriz de T^{-1} é dada por

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(b) $\varphi(L_1) = L_2$ e $\varphi(L_2) = L_1$. Neste caso temos

$$T_{\bullet}x_0 \in [x_0], T_{\bullet}x_1 \in [x_0, x_2], T_{\bullet}x_2 \in [x_0, x_1] \text{ e } T_{\bullet}x_3 \in [x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Logo a matriz de T^{-1} é dada por

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & a_{12} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Em ambos dos casos comparecem 9 parâmetros sob a condição de $\det[T^{-1}] = 1$. Logo, obtemos $\dim E_{I_1} = 8$ (cf. Observação 2), assim $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 15 - 8 = 7$.

Afirmção 3: $\dim \mathcal{O}_{I_2} = 8$.

Pelo Lema 3.3.1, se $\varphi \in E_{I_2}$, temos que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e similarmente aos casos anteriores obtemos também que $\varphi(H) = H$. Assim, temos que

$$T_{\bullet}x_0 = a_{00}x_0 \quad \text{e} \quad T_{\bullet}x_i = a_{i0}x_0 + M_i \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\},$$

onde $\{M_i\}_{i=1}^3 \subseteq [x_1, x_2, x_3]$ é L.I.⁵ Portanto existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ que determina $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $R_{\bullet}x_i = M_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, satisfazendo a condição do Lema B.1.4 que $\psi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$, sendo $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Z}(x_1^2 - x_2x_3) \subset \mathbb{P}^2$. Assim, a matriz de T^{-1} será

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & & & \\ a_{20} & (R^{-1}) & & \\ a_{30} & & & \end{bmatrix}.$$

Segue da Proposição B.1.5 que $[R^{-1}]$ pertence a um conjunto algébrico em $M_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^9$ de dimensão 4 e temos os parâmetros independentes a_{10}, a_{20}, a_{30} , visto que a condição de $\det[T^{-1}] = 1$ implica em $a_{00} = 1$. Portanto $\dim E_{I_2} = 3 + 4 = 7$ (cf. Observação 2). Assim, $\dim \mathcal{O}_{I_2} = 15 - 7 = 8$.

4. **Afirmção 1:** $\mathcal{O}_{I_2}$ especializa em $\mathcal{O}_{I_1}$.

Considere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{2t+1}$ dada por

$$s \mapsto \gamma(s) = \langle x_0, sx_1^2 - x_2x_3 \rangle.$$

Observe que γ satisfaz $\gamma(0) = \langle x_0, -x_2x_3 \rangle \in \mathcal{O}_{I_1}$ e $\gamma(s) \in \mathcal{O}_{I_2} \forall s \neq 0$.

Afirmção 2: $\mathcal{O}_{I_1}$ especializa em $\mathcal{O}_{I_0}$.

De fato, considere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{2t+1}$ dada por

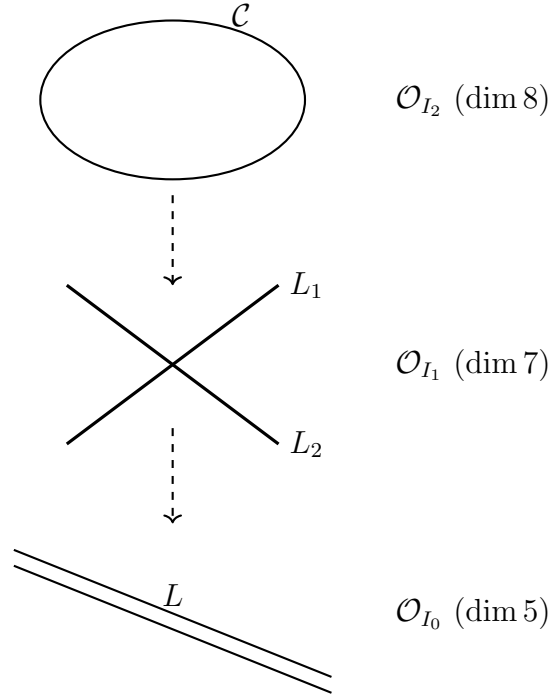
$$s \mapsto \gamma(s) = \langle x_0, x_1(x_1 + sx_2) \rangle.$$

γ satisfaz $\gamma(0) = \langle x_0, x_1^2 \rangle = I_0$ e $\gamma(s) \in \mathcal{O}_{I_1} \forall s \neq 0$.

□

⁵Observe que $T_{\bullet}(x_1^2 - x_2x_3) = x_0A + M_1^2 - M_2M_3$.

Observações: (1) Com essas especializações temos o seguinte diagrama



(2) Podemos especializar $\mathcal{O}_{I_2}$ diretamente para $\mathcal{O}_{I_0}$.

Para isso, considere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{2t+1}$ dada por $s \mapsto \gamma(s) = \langle x_0, x_1^2 - sx_2x_3 \rangle$. Temos que γ satisfaz $\gamma(0) = \langle x_0, x_1^2 \rangle = I_0$ e $\gamma(s) \in \mathcal{O}_{I_2} \forall s \neq 0$.

Capítulo 4

O Cálculo das órbitas em $\mathbb{H}^{2t+2}$

Neste capítulo abordaremos um dos exemplos mais simples de esquemas de Hilbert, $\text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$, no qual aparece, a assim denominada componente fantasma. De fato, $\text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$ possui duas componentes irredutíveis e não singulares: $\mathcal{H}_1$ cujo ponto genérico é um par de retas disjuntas, que possui exatamente 4 órbitas, e a componente fantasma $\mathcal{H}_2$, que tem por ponto genérico a união esquemática de uma cônica não singular e um ponto (fora da cônica) e possui exatamente 16 órbitas (um dos motivos, como o leitor poderá conferir mais adiante, da extensão maior deste capítulo em relação ao Capítulo 3). Salientamos que existem exatamente duas órbitas comuns a $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.

4.1 Preliminares

Nesta seção, são apresentados os fundamentos teóricos necessários para o estudo das órbitas no espaço de parâmetros $\mathbb{H}^{2t+2}$ sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$.

Definição 4.1.1. Seja C um subesquema fechado em $\mathbb{P}^3$ definido pelo ideal homogêneo I_C em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

- Dizemos que C é *reduzido* se I_C é um ideal radical (i.e. $\sqrt{I_C} = I_C$).
- Dizemos que C é *irredutível* se $\sqrt{I_C}$ for primo.

Exemplo 4.1.2. Considere o subesquema fechado C em $\mathbb{P}^3$ definido pelo ideal $I_C = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$. Note que $\sqrt{I_C} = \langle x_0, x_1 \rangle \neq I_C$ é primo. Assim, C é um subesquema não reduzido e irredutível.¹

Exemplo 4.1.3. Considere o subesquema fechado C em $\mathbb{P}^3$ definido pelo ideal $I_C = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Afirmção: $I_C = \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

¹Note que $p_{I_C}(t) = 3t + 1$, logo C é uma cubica racional que determina um ponto em $\text{Hilb}^{3t+1}\mathbb{P}^3$.

$I_C \subseteq \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ se verifica de imediato. Agora, para a outra inclusão considere $f \in \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, temos

$$f = Ax_0 + B(x_1^2 - x_2x_3) = Cx_1 + Dx_2 + Ex_3 \quad \text{para algum } A, B, C, D, E \in S.$$

De onde concluímos que

$$Ax_0 \in \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \implies A \in \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \implies f \in I_C.$$

Segue da **Afirmação** que

$$\sqrt{I_C} = \sqrt{\langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle} = \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = I_C.$$

Logo, C é reduzida, mas não é irredutível, pois $\sqrt{I_C} = I_C$ não é primo.

União Esquemática

Definição 4.1.4. Sejam X e Y subesquemas fechados de $\mathbb{P}^3$ definidos pelos ideais homogêneos I_X e I_Y em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, respectivamente. A *união esquemática* de X e Y é denotada por $X \sqcup Y$ e é o subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ definida pelo ideal $I_X \cap I_Y$.

Exemplo 4.1.5. Considere a cônica $\mathcal{C}$ em $\mathbb{P}^3$ dada por $I_{\mathcal{C}} = \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$ e p um ponto fora de $\mathcal{C}$ dado por $I_p = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$. Neste caso a união esquemática $\mathcal{C} \sqcup \{p\}$ é definida pelo ideal

$$\langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2 - x_2x_3 \rangle.$$

Exemplo 4.1.6. Considere a reta $L \subset \mathbb{P}^3$ dada por $I_L = \langle x_0, x_1 \rangle$ e um ponto $p \in \mathbb{P}^3$.

- Se $p \notin L$ é dado por $I_p = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, então a união esquemática $L \sqcup \{p\}$ é dada pelo ideal

$$\langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_2, x_3 \rangle = \langle x_0, x_1x_2, x_1x_3 \rangle.$$

- Se o ponto² $p \in L$ é dado por $I_p = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$, então a união esquemática $L \sqcup \{p\}$ é dada pelo ideal

$$\langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle.$$

Exemplo 4.1.7. Se r é o ponto não reduzido em $\mathbb{P}^3$, definido pelo ideal $I_r = \langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle$

²Sejam X e Y subesquemas fechados de $\mathbb{P}^3$ definidos pelos ideais I_X e I_Y respectivamente. Dizemos que $X \subseteq Y$ se $I_Y \subseteq I_X$.

e $L \subset \mathbb{P}^3$ dada por $I_L = \langle x_0, x_1 \rangle$. Neste caso $L \sqcup \{r\}$ é definido pelo ideal

$$\langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle = \langle x_0, x_1^2, x_1 x_2 \rangle.$$

Pontos Mergulhados

Definição 4.1.8. Sejam A um anel comutativo com unidade e I um ideal de A . Dizemos que I é *primário* se para todo $f, g \in A$ tais que $fg \in I$ e $f \notin I$, então $g \in \sqrt{I}$.

Note que se I é um ideal primo então I é primário.³

Teorema 4.1.9. (Lasker-Noether). Sejam A um anel noetheriano e I um ideal próprio de A . Então existe uma quantidade finita de ideais primários, digamos $I_1, I_2, \dots, I_k$ tais que

$$I = I_1 \cap \dots \cap I_k.$$

Onde $I_1 \cap \dots \cap I_k$ é chamada decomposição primária de I . A decomposição primária é dita *minimal* se

$$\bigcap_{i \neq j} I_i \not\subseteq I_j \quad \forall j \quad \text{e} \quad \sqrt{I_i} \neq \sqrt{I_j} \quad \forall i \neq j.$$

Os ideais primos $\sqrt{I_j}$ são chamados primos associados a I .

Demonstração. Veja Teorema 18.19, p. 142 em [1]. □

Considere $\Sigma = \{\sqrt{I_1}, \sqrt{I_2}, \dots, \sqrt{I_k}\}$ o conjunto dos primos associados a I . Os primos minimais de Σ determinam as chamadas *componentes isoladas* de I e os que não são primos minimais determinam as chamadas *componentes mergulhadas* (ou imersas) de I .

Exemplo 4.1.10. Considere $I = \langle x_0, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Uma decomposição primária de I é

$$I = \langle x_0, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_2, x_3 \rangle.$$

Com primos associados $\Sigma = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_2, x_3 \rangle\}$. Neste caso, temos duas componentes isoladas: uma reta e um ponto fora dessa reta.

Definição 4.1.11. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ definido pelo ideal homogêneo I_C em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Considere a decomposição primária minimal de I_C dada por:

$$I_C = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k.$$

³Podemos verificar se um ideal I é ou não é primário utilizando o pacote (on-line) Macaulay2.

Dizemos que a componente mergulhada I_j (se existir) é um *ponto mergulhado* se $\sqrt{I_j}$ define um ponto em $\mathbb{P}^3$.

Exemplo 4.1.12. Considere $I = \langle x_0, x_1^2, x_2x_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Uma decomposição primária de I é

$$I = \langle x_0, x_1^2, x_2x_3 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle.$$

Com primos associados $\Sigma = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_1, x_2 \rangle\}$. Observe que $\langle x_0, x_1 \rangle$ é a única componente isolada de I e $\langle x_0, x_1^2, x_2 \rangle$ é uma componente mergulhada com suporte no ponto definido por $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Exemplo 4.1.13. Seja $I = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0x_2x_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Uma decomposição primária de I é

$$I = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0x_2x_3 \rangle = \langle x_0, x_1^2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_1, x_2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_1, x_3 \rangle.$$

Com primos associados $\Sigma = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_1, x_2 \rangle, \langle x_0, x_1, x_3 \rangle\}$. Neste caso $\langle x_0, x_1 \rangle$ determina a única componente isolada de I , $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ e $\langle x_0, x_1, x_3 \rangle$ determinam pontos mergulhados nessa componente.

Definição 4.1.14. Se $I = I_1 \cap I_2$ com $I_1 = \langle h, f \rangle \in \mathbb{H}^{2t+1}$ e $\mathcal{Z}(I_2)$ é um ponto em $\mathcal{Z}(I_1)$ tal que $h \notin I_2$, então dizemos que I_2 define um ponto mergulhado espacial.

Proposição 4.1.15. Considere L_1 e L_2 retas distintas concorrentes em $\mathbb{P}^3$ definidas pelos ideais I_1 e I_2 em $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Considere $I = I_1 \cdot I_2$ em S . Então

1. I não é radical.
2. $p_I(t) = 2t + 2$.
3. I determina o subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ que corresponde a união esquemática da cônica $L_1 \sqcup L_2$ e um ponto mergulhado espacial na interseção das componentes L_1 e L_2 .

Demonstração. A menos de uma mudança de coordenadas projetivas em $\mathbb{P}^3$, podemos assumir que $I_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $I_2 = \langle x_0, x_2 \rangle$. Assim, $I = I_1 \cdot I_2 = \langle x_0^2, x_0x_2, x_0x_1, x_1x_2 \rangle$. Além disso,

1. I não é radical, visto que $x_0 \in \sqrt{I}$ e $x_0 \notin I$.
2. Utilizando o Macaulay2, obtemos $p_I(t) = 2t + 2$.
3. Uma decomposição primária para $I = \langle x_0^2, x_0x_2, x_0x_1, x_1x_2 \rangle$ é dada por

$$I = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_1, x_2 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_1, x_2 \rangle. \quad (4.1)$$

Com primos associados $\Sigma = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_2 \rangle, \langle x_0, x_1, x_2 \rangle\}$. De (4.1), segue que I determina a união esquemática da cônica $L_1 \sqcup L_2$ dada por $\langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_2 \rangle$ e um ponto mergulhado espacial determinado pelo ideal $\langle x_0^2, x_1, x_2 \rangle$.

□

Retas duplas

Definição 4.1.16. Considere C um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ definido pelo ideal homogêneo saturado I_C em $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. C será denominado *reta dupla* se

1. $\sqrt{I_C}$ define uma reta em $\mathbb{P}^3$.
2. Se $\sqrt{I_C} = \langle h_0, h_1 \rangle$ e $S_1 = [h_0, h_1, h_2, h_3]$, então existem F, G em $\mathbb{C}[h_2, h_3]$ homogêneos de mesmo grau (não ambos nulos) tais que

$$I_C = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_1^2, h_0 F - h_1 G \rangle.$$

Definição 4.1.17. Se I é um ideal homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tal que seu polinômio de Hilbert p_I tem grau 1, então $1 - p_I(0)$ é denominado gênero aritmético de I (ou do subesquema fechado definido por I em $\mathbb{P}^3$).

Considere $I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, F x_0 - G x_1 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ nos seguintes exemplos.

Exemplo 4.1.18. Considere $F, G \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Temos

$$I = \begin{cases} \langle x_1^2, F x_0 - G x_1 \rangle, & \text{se } F \neq 0, \\ \langle x_0^2, x_1 \rangle, & \text{se } F = 0, G \neq 0. \end{cases}$$

Nesse caso, $p_I(t) = 2t + 1$. Logo o gênero aritmético de I é 0.

Exemplo 4.1.19. Considere $F = x_2$ e $G = 0$. Verifica-se que $p_I(t) = 2t + 2$, logo I possui gênero aritmético -1 . Note que $I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_2 \rangle$ admite a seguinte decomposição primária

$$I = \langle x_0, x_1^2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_2 \rangle.$$

Com primos associados $\Sigma = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_1, x_2 \rangle\}$. Assim, I define uma união esquemática de uma reta dupla de gênero aritmético 0 e um ponto mergulhado.

Exemplo 4.1.20. Considere $F = x_2$ e $G = x_3$. Note que

$$I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_2 - x_1 x_3 \rangle$$

é um ideal primário tal que $p_I(t) = 2t + 2$. Assim I define uma reta dupla de gênero aritmético -1 sem pontos mergulhados.

Proposição 4.1.21. Considere a reta $l \subseteq \mathbb{P}^3$ definida pelo ideal $\langle x_0, x_1 \rangle \subset S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Sejam $F, G \in \mathbb{C}[x_2, x_3]$ homogêneos de grau e (se não nulos). Seja $p_I(t)$ o polinômio de Hilbert associado ao ideal $I = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0F - x_1G \rangle \subseteq S$. Então

1. Se $F = G = 0$ então $p_I(t) = 3t + 1$.
2. Se $F \neq 0$ ou $G \neq 0$ então $p_I(t) = 2t + 1 + e$.

Demonstração. 1. Considere $d \geq 3$ e $J = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$, temos

$$J_d \cong x_0^2 S_{d-2} \oplus x_0x_1 \frac{S_{d-2}}{x_0 S_{d-3}} \oplus x_1^2 \frac{S_{d-2}}{x_0 S_{d-3}}.$$

Assim,

$$\dim J_d = \dim S_{d-2} + 2 \dim \frac{S_{d-2}}{x_0 S_{d-3}} = \binom{3+d-2}{3} + 2 \binom{2+d-2}{2}.$$

Logo,

$$h_J(d) = \dim S_d - \dim J_d = \binom{3+d}{3} - \binom{d+1}{3} - 2 \binom{d}{2} = 3d + 1.$$

2. Considere agora $I = J + \langle H \rangle$ com $H = x_0F - x_1G$ homogêneo de grau $e + 1$. Para $d \geq e + 1$, temos

$$I_d = (\langle x_0, x_1 \rangle^2)_d + H \cdot S_{d-e-1} = (\langle x_0, x_1 \rangle^2)_d \oplus H \frac{S_{d-e-1}}{\langle x_0, x_1 \rangle_{d-e-1}}$$

Logo, $\dim I_d = \dim S_d - (3d + 1) + d - e$. Assim,

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \dim S_d - \dim S_d + 3d + 1 - d + e = 2d + 1 + e.$$

Portanto I define um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ de grau 2, dimensão 1 e gênero aritmético $-e$. □

4.2 Órbitas em $\text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$

Teorema 4.2.1. Seja $\mathcal{H} := \text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$ o esquema de Hilbert que parametriza subesquemas fechados de $\mathbb{P}^3$ cujo polinômio de Hilbert é $2t + 2$. Então

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2,$$

sendo $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ componentes irredutíveis de $\mathcal{H}$ tais que

- $\dim \mathcal{H}_1 = 8$ e tem por ponto genérico a união esquemática de duas retas disjuntas em $\mathbb{P}^3$.
- $\dim \mathcal{H}_2 = 11$ e tem como ponto genérico a união esquemática de uma cônica não singular e um ponto fora da cônica.

Demonstração. Veja Teorema 3.5.1, p. 26 em [12]. □

4.2.1 Órbitas na componente $\mathcal{H}_1$

A partir do Teorema 3.5.1 em [12], obtemos uma descrição para os ideais homogêneos que determinam pontos fechados em $\mathcal{H}_1$ indicados na proposição a seguir.

Proposição 4.2.2. Seja I um ideal homogêneo saturado em $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ que determina um ponto fechado em $\mathcal{H}_1$. Então, tem-se as seguintes possibilidades para I :

1. $I = \langle h_0h_2, h_0h_3, h_1h_2, h_1h_3 \rangle$ sendo $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$.
2. $I = \langle h_0^2, h_0h_1, h_0h_2, h_1h_2 \rangle$ com $\{h_0, h_1, h_2\} \subseteq S_1$ L.I.
3. $I = \langle h_0^2, h_0h_1, h_1^2, f \rangle$ com $\{h_0, h_1\} \subset S_1$ L.I. e $f \in \langle h_0, h_1 \rangle_2 - [h_0^2, h_0h_1, h_1^2]$.

Demonstração. Veja Teorema 3.5.1, p. 26 em [12]. □

Observação 10. Com as notações da Proposição 4.2.2. Considere o ideal

$I = \langle h_0^2, h_0h_1, h_1^2, f \rangle$ com $\{h_0, h_1\} \subset S_1$ L.I. e $f \in \langle h_0, h_1 \rangle_2 - [h_0^2, h_0h_1, h_1^2]$. Assuma que $S_1 = [h_0, h_1, h_2, h_3]$, note que

$$\langle h_0, h_1 \rangle_2 = [h_0^2, h_0h_1, h_1^2, h_0h_2, h_0h_3, h_1h_2, h_1h_3].$$

Assim, se $f \in \langle h_0, h_1 \rangle_2$ temos que

$$f = \alpha_0h_0^2 + \alpha_1h_0h_1 + \alpha_2h_1^2 + \alpha_3h_0h_2 + \alpha_4h_0h_3 + \alpha_5h_1h_2 + \alpha_6h_1h_3 \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{C}, i \in \{0, \dots, 6\}.$$

Logo

$$I = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_1^2, f \rangle = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_1^2, h_0 F - h_1 G \rangle,$$

sendo $F = \alpha_3 h_2 + \alpha_4 h_3$ e $-G = \alpha_5 h_2 + \alpha_6 h_3$ polinômios homogêneos em $[h_2, h_3]$. Portanto I define uma reta dupla em $\mathbb{P}^3$.

A seguir, considere os ideais I_0, I_1, I_2 e I_3 em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ dados por

$$\begin{aligned} I_3 &= \langle x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle, \\ I_2 &= \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, x_1 x_2 \rangle, \\ I_1 &= \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_2 - x_1 x_3 \rangle, \\ I_0 &= \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_2 \rangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Proposição 4.2.3. Considere os ideais em (4.2). Sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ em $\mathbb{H}^{2t+2}$, verifica-se que $\dim E_{I_3} = 7$, $\dim E_{I_2} = \dim E_{I_1} = 8$ e $\dim E_{I_0} = 9$.

Demonstração. Lembremos que $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$, satisfaz

$$\varphi \in E_{I_j} \iff \varphi_\bullet I_j = T_\bullet I_j = I_j.$$

Assuma que a matriz de T^{-1} na base canônica é $[T^{-1}] = [a_{ij}]_{0 \leq i, j \leq 3}$ com $\det[T^{-1}] = 1$.

Afirmção 1: $\dim E_{I_3} = 7$

Se $\varphi \in E_{I_3}$, segue que

$$\varphi(\mathcal{Z}(I_3)) = \mathcal{Z}(T_\bullet I_3) = \mathcal{Z}(I_3) = L_1 \cup L_2 \implies \varphi(L_1) \cup \varphi(L_2) = L_1 \cup L_2,$$

sendo $L_1 = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ e $L_2 = \mathcal{Z}(x_2, x_3)$. Logo, temos duas possibilidades.

(a) $\varphi(L_i) = L_i$ com $i = 1, 2$.

Com um raciocínio similar ao cálculo da dimensão da órbita do ideal $\langle x_0, x_1 x_2 \rangle$ no Teorema 3.3.2, segue que $\langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $\langle T_\bullet x_2, T_\bullet x_3 \rangle = \langle x_2, x_3 \rangle$. Portanto,

$$T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \in [x_0, x_1] \text{ e } T_\bullet x_2, T_\bullet x_3 \in [x_2, x_3].$$

Nesse caso a matriz de T^{-1} é dada por

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(b) $\varphi(L_1) = L_2$ e $\varphi(L_2) = L_1$.

Nesse caso, temos $\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle = \langle x_2, x_3 \rangle$ e $\langle T_{\bullet}x_2, T_{\bullet}x_3 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$. Portanto,

$$T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \in [x_2, x_3] \text{ e } T_{\bullet}x_2, T_{\bullet}x_3 \in [x_0, x_1].$$

Assim, a matriz de T^{-1} é dada por

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{30} & a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em ambos dos casos, na matriz $[T^{-1}]$ comparecem 8 parâmetros sujeitos à condição $\det[T^{-1}] = 1$. Portanto $\dim E_{I_3} = 8 - 1 = 7$ (cf. Observação 2) e segue que $\dim \mathcal{O}_{I_3} = 15 - 7 = 8$.

Afirmção 2: $\dim E_{I_2} = 8$.

Considere $\varphi \in E_{I_2}$. Assim $T_{\bullet}I_2 = I_2$, de onde concluímos que $\mathcal{Z}(T_{\bullet}I_2) = \mathcal{Z}(I_2)$. Logo,

$$\varphi(\mathcal{Z}(I_2)) = \mathcal{Z}(I_2) = L_1 \cup L_2 \quad \text{sendo } L_i = \mathcal{Z}(x_0, x_i) \text{ para } i = 1, 2.$$

Portanto $\varphi(L_1) \cup \varphi(L_2) = L_1 \cup L_2$. Novamente temos dois casos:

(a) $\varphi(L_i) = L_i$ para $i = 1, 2$. e (b) $\varphi(L_1) = L_2$ e $\varphi(L_2) = L_1$.

A contagem de parâmetros nesses casos é totalmente análoga aos casos do cálculo da dimensão da órbita do ideal $\langle x_0, x_1x_2 \rangle$ no Teorema 3.3.2. Verificamos que em ambos dos casos comparecem 9 parâmetros sob a condição de $\det[T^{-1}] = 1$. Logo, obtemos $\dim E_{I_2} = 8$ (cf. Observação 2), assim $\dim \mathcal{O}_{I_2} = 15 - 8 = 7$.

Afirmção 3: $\dim E_{I_1} = 8$.

Considere $\varphi \in E_{I_1}$. Note que

$$\varphi_{\bullet}I_1 = I_1 \implies \mathcal{Z}(T_{\bullet}I_1) = \mathcal{Z}(I_1) \implies \varphi(L) = L \implies \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle.$$

Logo, $T_{\bullet}x_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1$ para $i = 0, 1$. Por outro lado,

$$T_{\bullet}(x_0x_2 - x_1x_3) = T_{\bullet}x_0\left(\sum_{i=0}^3 a_{2i}x_i\right) - T_{\bullet}x_1\left(\sum_{i=0}^3 a_{3i}x_i\right) = r + q \in I_1 = T_{\bullet}I_1,$$

com $r \in \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle \subseteq I_1$ e

$$\begin{aligned} q = & (a_{00}a_{22} - a_{10}a_{32})x_0x_2 + (a_{00}a_{23} - a_{10}a_{33})x_0x_3 \\ & + (a_{01}a_{23} - a_{11}a_{33})x_1x_3 + (a_{01}a_{22} - a_{11}a_{32})x_1x_2. \end{aligned}$$

Como $q \in I_1$, segue que

$$\begin{cases} a_{00}a_{23} - a_{10}a_{33} = 0 \\ a_{01}a_{22} - a_{11}a_{32} = 0 \\ a_{00}a_{22} - a_{10}a_{32} = -(a_{01}a_{23} - a_{11}a_{33}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, em

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

comparecem 12 parâmetros (estamos em $\mathbb{A}^{12}$), sob as condições (4.3) e $\det[T^{-1}] = 1$. A seguir, utilizamos o Macaulay2 para mostrar que $\dim E_{I_1} = 8$.

```
i1 : R = QQ[a00,a01,a10,a11,a20,a21,a22,a23,a30,a31,a32,a33];
i2 : I = ideal(
      (a00*a11 - a01*a10)*(a22*a33 - a23*a32) - 1,
      a00*a23 - a10*a33,
      a01*a22 - a11*a32,
      a00*a22 - a10*a32 + a01*a23 - a11*a33
    );
o2 : Ideal of R
i3 : dim(R/I)
o3 = 8.
```

Portanto $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$.

Afirmção 4: $\dim E_{I_0} = 9$.

Considere $\varphi \in E_{I_0}$. Assim, $\sqrt{T_{\bullet}I_0} = \sqrt{I_0}$. Logo, $\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$, que implica em $T_{\bullet}x_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1$ e $T_{\bullet}x_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1$. Note que $T_{\bullet}(x_0x_2) = (T_{\bullet}x_0)(T_{\bullet}x_2) = (a_{00}x_0 + a_{01}x_1)(a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$. Assim,

$$T_{\bullet}(x_0x_2) = r + a_{00}a_{23}x_0x_3 + a_{01}a_{22}x_1x_2 + a_{01}a_{23}x_1x_3 \quad \text{com} \quad r \in \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle \subset I_0.$$

De onde concluímos que,

$$a_{00}a_{23} = 0, \quad a_{01}a_{22} = 0 \quad \text{e} \quad a_{01}a_{23} = 0. \quad (4.4)$$

Visto que $\{T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2\}$ é L.I, segue de (4.4) que $a_{01} = a_{23} = 0$ e $a_{00} \neq 0$. Portanto,

em

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

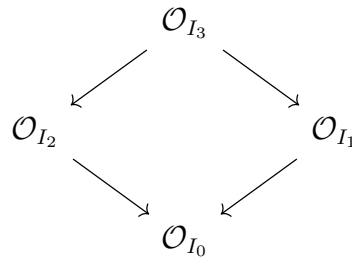
comparecem 10 parâmetros (estamos em $\mathbb{A}^{10}$) sob a condição de $\det[T^{-1}] = 1$. Portanto $\dim E_{I_0} = 9$. Logo $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 6$. $\square$

Teorema 4.2.4. Sejam I_j com $j = 0, 1, 2, 3$. os ideais em (4.2). Sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ em $\mathcal{H}_1$ verifica-se que

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{O}_{I_3} \dot{\cup} \mathcal{O}_{I_2} \dot{\cup} \mathcal{O}_{I_1} \dot{\cup} \mathcal{O}_{I_0}.$$

Além disso,

1. $\mathcal{O}_{I_3}$ parametriza pares de retas disjuntas e $\dim \mathcal{O}_{I_3} = 8$.
2. $\mathcal{O}_{I_2}$ parametriza pares de retas concorrentes com um ponto mergulhado não planar na interseção dessas retas e $\dim \mathcal{O}_{I_2} = 7$.
3. $\mathcal{O}_{I_1}$ parametriza retas duplas de gênero aritmético -1 sem pontos mergulhados e $\dim \mathcal{O}_{I_1} = 7$.
4. $\mathcal{O}_{I_0}$ parametriza retas duplas de gênero aritmético zero com um ponto mergulhado não planar e $\dim \mathcal{O}_{I_0} = 6$.
5. No diagrama a seguir, indicamos as especializações.



Demonstração. A partir da Proposição 4.2.2 temos três possibilidades para I .

Caso 1. $I = \langle h_0 h_2, h_0 h_3, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle$ com $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$. Tome $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T \bullet h_i = x_i$, para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Com isso temos $T \bullet I = I_3$, ou equivalentemente, $I = (T^{-1}) \bullet I_3 = \psi \bullet I_3 \in \mathcal{O}_{I_3}$ com $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definido por T^{-1} .

Caso 2. $I = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_0 h_2, h_1 h_2 \rangle$ com $\{h_0, h_1, h_2\} \subset S_1$ L.I. Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T \bullet h_i = x_i$ para $i \in \{0, 1, 2\}$. Logo, $T \bullet I = I_2$. Portanto $I = \psi \bullet I_2 \in \mathcal{O}_{I_2}$, sendo $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por T^{-1} .

Caso 3. $I = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_1^2, f \rangle$ com $\{h_0, h_1\} \subset S_1$ L.I. e $f \in \langle x_0, x_1 \rangle_2 - [h_0^2, h_0 h_1, h_1^2]$.

Segue da Observação 10 que se $S_1 = [h_0, h_1, h_2, h_3]$ então existem $F, G \in [h_2, h_3]$ (não ambos nulos) de modo que

$$I = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_1^2, h_0 F - h_1 G \rangle.$$

A seguir, vamos considerar as seguintes possibilidades: $\{F, G\}$ L.I. e $\{F, G\}$ L.D.

(a) $\{F, G\}$ L.I.

Neste caso, $[F, G] = [h_2, h_3]$. Logo $S_1 = [h_0, h_1, F, G]$. Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet h_i = x_i$ para $i = 0, 1$, $T_\bullet F = x_2$ e $T_\bullet G = x_3$. Assim

$$T_\bullet I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_2 - x_1 x_3 \rangle = I_1.$$

Portanto $I = \psi_\bullet I_1 \in \mathcal{O}_{I_1}$, sendo $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por T^{-1} .

(b) $\{F, G\}$ L.D.

Assuma que $F \neq 0$ e $G = \lambda F$ com $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo $I = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_1^2, h_0 F - h_1(\lambda F) \rangle$. Note que

$$I = \langle (h_0 - \lambda h_1)^2, (h_0 - \lambda h_1)h_1, h_1^2, (h_0 - \lambda h_1)F \rangle$$

e $\{h_0 - \lambda h_1, h_1, F\} \subseteq S_1$ L.I. Considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet(h_0 - \lambda h_1) = x_0$, $T_\bullet h_1 = x_1$ e $T_\bullet F = x_2$. Assim temos que $T_\bullet I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_2 \rangle = I_0$. Ou equivalentemente, $I = \psi_\bullet I_0 \in \mathcal{O}_{I_0}$, sendo $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por T^{-1} .

1. Note que $I_3 = \langle x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle$. Tendo em consideração que $T_\bullet$ preserva interseções (i.e. $T_\bullet(I \cap J) = (T_\bullet I) \cap (T_\bullet J)$), segue que

$$T_\bullet I_3 = (T_\bullet \langle x_0, x_1 \rangle) \cap (T_\bullet \langle x_2, x_3 \rangle) \quad \forall T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4).$$

Assim, na decomposição primária de $T_\bullet I_3$ aparecem duas componentes isoladas, que correspondem a um par de retas disjuntas em $\mathbb{P}^3$.

2. Note que I_2 admite a seguinte decomposição primária.

$$I_2 = \langle x_0, x_1 \rangle \cap \langle x_0, x_2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_1, x_2 \rangle. \quad (4.5)$$

Logo, para todo $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tem-se que

$$T_\bullet I_2 = \langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \rangle \cap \langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_2 \rangle \cap \langle (T_\bullet x_0)^2, T_\bullet x_1, T_\bullet x_2 \rangle.$$

Portanto, $\mathcal{O}_{I_2}$ parametriza retas distintas e concorrentes com um ponto mergulhado não planar determinado pela componente primária $\langle (T_\bullet x_0)^2, T_\bullet x_1, T_\bullet x_2 \rangle$.

3. Note que I_1 é um ideal primário tal que $\sqrt{I_1} = \langle x_0, x_1 \rangle$. Segue da Definição 4.1.16 que I_1 define uma reta dupla de gênero aritmético -1 (cf. Proposição 4.1.21) sem pontos mergulhados. De fato,

$$T_{\bullet}I_1 = \langle (T_{\bullet}x_0)^2, (T_{\bullet}x_0)(T_{\bullet}x_1), (T_{\bullet}x_1)^2, (T_{\bullet}x_0)(T_{\bullet}x_2) - (T_{\bullet}x_1)(T_{\bullet}x_3) \rangle$$

define uma reta dupla suportada em $\mathcal{Z}(T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1)$, pois temos

$$S_1 = [T_{\bullet}x_0T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2, T_{\bullet}x_3] \text{ e } F = T_{\bullet}x_2, G = T_{\bullet}x_3 \in \mathbb{C}[T_{\bullet}x_2, T_{\bullet}x_3] \text{ de grau } 1.$$

Sem pontos mergulhados uma vez que $T_{\bullet}I_1$ é primário e $\mathcal{Z}(T_{\bullet}I_1)$ define uma reta.

4. Observe que I_0 admite a seguinte decomposição primária

$$I_0 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0x_2 \rangle = \langle x_0, x_1^2 \rangle \cap \langle x_0^2, x_1, x_2 \rangle.$$

Além disso,

$$T_{\bullet}I_0 = \langle T_{\bullet}x_0, (T_{\bullet}x_1)^2 \rangle \cap \langle (T_{\bullet}x_0)^2, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2 \rangle \quad \forall T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4).$$

Ou seja, os pontos de $\mathcal{O}_{I_0}$ parametrizam retas duplas de gênero aritmético zero com um ponto mergulhado.

5. Seguem as especializações:

Lembremos que

$$p \in \mathcal{Z}(x_0, x_1) \iff p = [0 : 0 : a_2 : a_3] \text{ para algum } [a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^1.$$

(a) $\mathcal{O}_{I_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{I_2}$

Considere $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{H}_1$ dado por $\gamma(t) = \langle x_0, x_1 \rangle \cdot \langle x_0 - tx_3, x_2 \rangle$. Suponha que $p = [0 : 0 : a_2 : a_3] \in \mathcal{Z}(x_0 - tx_3, x_2)$ para algum $t \neq 0$. Logo $-ta_3 = 0$ e $a_2 = 0$. Como $t \neq 0$, segue $a_2 = a_3 = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{I_3}$ para todo $t \neq 0$ e $\gamma(0) = I_2 \in \mathcal{O}_{I_2}$.

(b) $\mathcal{O}_{I_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{I_1}$

Considere $\gamma(t) = \langle x_0, x_1 \rangle \cdot \langle x_0 - tx_3, x_1 - tx_2 \rangle + \langle x_0x_2 - x_1x_3 \rangle$. Observe que para $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \langle x_0, x_1 \rangle \langle x_0 - tx_3, x_1 - tx_2 \rangle + \langle t(x_0x_2 - x_1x_3) \rangle \\ &= \langle x_0, x_1 \rangle \langle x_0 - tx_3, x_1 - tx_2 \rangle. \end{aligned}$$

Suponha que $p = [0 : 0 : a_2 : a_3] \in \mathcal{Z}(x_0 - tx_3, x_1 - tx_2)$ para algum $t \neq 0$. Assim, $-ta_3 = 0$ e $-ta_2 = 0$. Como $t \neq 0$, segue que $a_2 = a_3 = 0$ uma contradição.

Portanto $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{I_3} \quad \forall t \neq 0$, e note que $\gamma(0) = I_1$.

(c) $\mathcal{O}_{I_2} \longrightarrow \mathcal{O}_{I_0}$

Considere $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 - tx_1x_2, x_0x_2 \rangle$. Temos $\gamma(0) = I_0$ e para $t \neq 0$, $\gamma(t) = \langle x_0, x_1 \rangle \cdot \langle x_0, x_1 - tx_2 \rangle \in \mathcal{O}_{I_2}$.

(d) $\mathcal{O}_{I_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{I_0}$

Considere $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0x_2 - tx_1x_3 \rangle$. Temos que $\gamma(0) = I_0 \in \mathcal{O}_{I_0}$ e $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{I_1}$ para $t \neq 0$.

Com isso, a figura a seguir exemplifica a componente $\mathcal{H}_1$ de $\text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$.

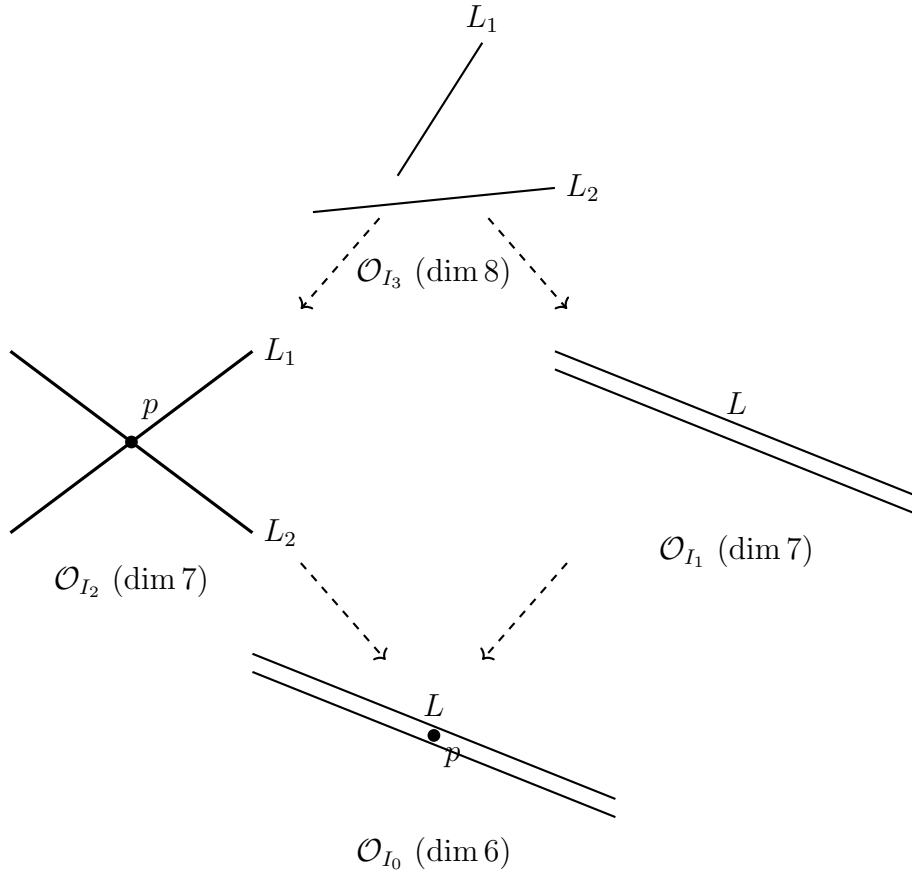


Figura 4.1: Órbitas na componente $\mathcal{H}_1$

□

4.2.2 Órbitas na componente $\mathcal{H}_2$

A partir da demonstração do Teorema 3.5.1 em [12] pode se obter a seguinte caracterização dos ideais homogêneos em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ que determinam pontos fechados em $\mathcal{H}_2$.

Teorema 4.2.5. Seja $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ um ideal homogêneo que determina um ponto fechado em $\mathcal{H}_2$. Então temos as seguintes possibilidades para I :

1. $I = \langle h_0, f \rangle \cap \langle h_1, h_2, h_3 \rangle = \langle h_0 h_1, h_0 h_2, h_0 h_3, f h_1, f h_2, f h_3 \rangle$ com $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$ e $f \in S_2 - h_0 S_1$.
2. $I = \langle h_0, f \rangle \cap \langle h_0, h_1, h_2 \rangle = \langle h_0, f h_1, f h_2 \rangle$ sendo $\{h_0, h_1, h_2\}$ L.I., $f \in S_2 - h_0 S_1$ e $f \notin \langle h_1, h_2 \rangle_2$.
3. $I = J + \langle g \rangle$ sendo $J = \langle h_0, f \rangle \cdot \langle h_0, h_1, h_2 \rangle$, com $\{h_0, h_1, h_2\}$ L.I., $f \in \langle h_1, h_2 \rangle_2 - [h_0 h_1, h_0 h_2]$ e $g \in \langle h_0, f \rangle_3 - J_3$.

Demonstração. Veja Teorema 3.5.1, p. 26 em [12]. □

Vamos dividir o estudo em dois casos: I define uma união esquemática de uma cônica e um ponto fora da cônica, ou I define a união esquemática de uma cônica e um ponto mergulhado na cônica.

4.2.3 Uniões esquemáticas de uma cônica e um ponto fora da cônica

Proposição 4.2.6. Considere $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ um ideal homogêneo saturado tal que I define a união esquemática de uma cônica $\mathcal{C}$ e um ponto p fora de $\mathcal{C}$. Então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet I$ é dado por uma das seguintes possibilidades:

1. $J_0 = \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, f \rangle$ com $f = x_1^2 - x_2 x_3$.
2. $J_1 = \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2 \rangle$.
3. $J_2 = \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1^2 \rangle$.
4. $J_3 = \langle x_0, x_2 f, x_3 f \rangle$ com $f = x_1^2 - x_2 x_3$.
5. $J_4 = \langle x_0, (x_1 + x_2) x_1 x_2, x_1 x_2 x_3 \rangle$.
6. $J_5 = \langle x_0, x_2 x_1^2, x_3 x_1^2 \rangle$.

Demonstração. A partir do Teorema 4.2.5 concluímos que existem dois casos a considerar (o ponto p pertence ou não pertence ao plano suporte da cônica). A seguir vamos considerar o caso 1: o ponto p definido pelo ideal $\langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ não pertence ao plano definido por $\langle h_0 \rangle$. Lembremos que se $\mathcal{C}$ é uma cônica, temos 3 possibilidades. $\mathcal{C}$ é não singular, um par de retas distintas e concorrentes ou uma reta dupla. Consideremos então esses casos:

a) $\mathcal{C}$ é uma cônica não singular.

Assuma que $\mathfrak{I}(\mathcal{C}) = \langle h_0, f \rangle$ e $\mathfrak{I}(p) = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$. Sabemos pelo Teorema 3.3.2 que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_\bullet \langle h_0, f \rangle = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle$. Logo,

$$R_\bullet I = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle \cap \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \text{ com } m_i = R_\bullet h_i \text{ } i \in \{1, 2, 3\},$$

tais que $[x_0, m_1, m_2, m_3] = S_1$. Considere p_1, p_2 pontos distintos na cônica $\mathcal{C}$, temos que existem únicos planos $H_i = \mathcal{Z}(n_i)$ com $i = 1, 2$ que contém o ponto $\{p\} = \mathcal{Z}(m_1, m_2, m_3)$ e as retas tangentes a cônica L_1 e L_2 passando pelos pontos p_1 e p_2 respectivamente. E existe um único plano $H_3 = \mathcal{Z}(n_3)$ contendo o ponto p e a reta secante a cônica passando pelos ponto p_1 e p_2 . Nesse caso verifica-se que:⁴

$$\langle m_1, m_2, m_3 \rangle = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle.$$

A seguir considere $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $(R_1)_\bullet x_0 = x_0$ e $(R_1)_\bullet n_i = x_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Logo, para $T = R_1 \circ R$, temos

$$\begin{aligned} T_\bullet I &= (R_1)_\bullet R_\bullet I = \langle x_0, (R_1)_\bullet (x_1^2 - x_2 x_3) \rangle \cap (R_1)_\bullet \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle \cap (R_1)_\bullet \langle n_1, n_2, n_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \\ &= \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle = J_0. \end{aligned}$$

b) A cônica $\mathcal{C}$ é um par de retas distintas.

Assuma que $\mathfrak{I}(\mathcal{C}) = \langle g_0, g_1 g_2 \rangle$ com $\{g_0, g_1, g_2\} \subset S_1$ L.I. Pelo Teorema 3.3.2, sabemos que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que

$$R_\bullet I = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle \cap \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \text{ com } m_i = R_\bullet h_i \text{ } i \in \{1, 2, 3\},$$

tais que $[x_0, m_1, m_2, m_3] = S_1$. Similarmente ao caso da cônica não singular, existem dois planos distintos $H_i = \mathcal{Z}(n_i)$ com $i = 1, 2$ que contém o ponto p e as retas $L_i = \mathcal{Z}(x_0, x_i)$ respectivamente. Além disso, existe um plano $H_3 = \mathcal{Z}(n_3)$ que contém o ponto p e uma reta $L_3 \subseteq \mathcal{Z}(h_0)$ que não passa na interseção de L_1 e L_2 . Verifica-se que⁵

$$\langle m_1, m_2, m_3 \rangle = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle.$$

Novamente, considere $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $(R_1)_\bullet x_0 = x_0$ e $(R_1)_\bullet n_i = x_i$ para

⁴Visto que $n_i \in \langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ e $\{n_1, n_2, n_3\} \subset S_1$ é L.I.

⁵Visto que $n_i \in \langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ e $\{n_1, n_2, n_3\} \subset S_1$ é L.I.

$i \in \{1, 2, 3\}$. Logo, $T = R_1 \circ R$ satisfaz

$$\begin{aligned} T_{\bullet}I &= \langle x_0, (R_1)_{\bullet}(x_1x_2) \rangle \cap (R_1)_{\bullet}\langle m_1, m_2, m_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1x_2 \rangle \cap (R_1)_{\bullet}\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1x_2 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \\ &= \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2 \rangle = J_1. \end{aligned}$$

c) A cônica $\mathcal{C}$ é uma reta dupla.

Considere a reta dupla definida pelo ideal $\langle h_0, h_1^2 \rangle$, e $L = \mathcal{Z}(h_0, h_1)$, de modo que o plano $H = \mathcal{Z}(h_1)$ que contém a reta L e o ponto p . Podemos supor que $\{p\} = \mathcal{Z}(h_1, h_2, h_3)$ com $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$. Logo, basta considerar $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_{\bullet}h_i = x_i$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Temos

$$T_{\bullet}I = \langle x_0, x_1^2 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2 \rangle = J_2.$$

Consideremos agora os casos em que $I \in \mathcal{H}_2$ define a união esquemática de uma cônica $\mathcal{C}$ e um ponto p fora da cônica mas contido no plano suporte da mesma. Novamente temos três possibilidades;

a) $\mathcal{C}$ cônica não singular.

Considere as retas tangentes L_1, L_2 à cônica que passam pelo ponto p . Então

$$L_i = \mathcal{Z}(h_0, h_i) \quad \text{para } i = 1, 2. \quad \text{e} \quad \{p\} = \mathcal{Z}(h_0, h_1, h_2).$$

Logo $I = \langle h_0, g \rangle \cap \langle h_0, h_1, h_2 \rangle$, com $g = h_1^2 - h_2h_3$. Portanto, $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_{\bullet}h_i = x_i$ com $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, satisfaz

$$T_{\bullet}\langle h_0, g \rangle = \langle x_0, f \rangle \quad \text{com } f = x_1^2 - x_2x_3 \quad \text{e} \quad T_{\bullet}\langle h_0, h_1, h_2 \rangle = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle.$$

$$\text{Assim, } T_{\bullet}I = \langle x_0, f \rangle \cap \langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle x_0, x_1f, x_2f \rangle = J_3.$$

b) $\mathcal{C}$ é um par de retas distintas.

Assuma que $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(h_0, h_1h_2)$ e $L_i = \mathcal{Z}(h_0, h_i)$ com $i = 1, 2$. Considere a reta $L_3 = \mathcal{Z}(h_0, h_3)$ passando por p e que encontra as retas L_1 e L_2 em pontos distintos. Note que $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$. Seja $\{q\} = L_1 \cap L_2$, considere L_4 passando por p e q . Dessa forma⁶, temos que $L_4 = \mathcal{Z}(h_0, \alpha h_1 + \beta h_2)$ com $\alpha\beta \neq 0$, e portanto

⁶Em $\mathbb{P}^2$, se $l_1 = \mathcal{Z}(h_1)$ e $l_2 = \mathcal{Z}(h_2)$ são retas distintas, tais que $\{p\} = l_1 \cap l_2$. Então se $l \subset \mathbb{P}^2$ é uma reta tal que $p \in l$, segue que $l = \mathcal{Z}(\alpha h_1 + \beta h_2)$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$.

temos p definido por $\langle h_0, h_3, \alpha h_1 + \beta h_2 \rangle$. Assim, obtemos

$$I = \langle h_0, h_1 h_2 \rangle \cap \langle h_0, h_3, \alpha h_1 + \beta h_2 \rangle.$$

Considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_\bullet h_i = x_i$, logo

$$R_\bullet I = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle \cap \langle x_0, x_3, \alpha x_1 + \beta x_2 \rangle \stackrel{\alpha \neq 0}{=} \langle x_0, x_1 x_2 \rangle \cap \langle x_0, x_3, x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 \rangle.$$

Note que existe $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ onde $(R_1)_\bullet(x_2) = \frac{\alpha x_2}{\beta}$ e $(R_1)_\bullet(x_i) = x_i$ para $i \neq 2$. Considere $T = R_1 \circ R$. Dessa forma

$$T_\bullet I = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle \cap \langle x_0, x_3, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_0, x_1 x_2(x_1 + x_2), x_1 x_2 x_3 \rangle = J_4.$$

c) $\mathcal{C}$ é uma reta dupla

Temos a reta dupla $\mathcal{C}$ definida por $\langle h_0, h_1^2 \rangle$ e um ponto p fora da reta $L = \mathcal{Z}(h_0, h_1)$, definido por $\langle h_0, h_2, h_3 \rangle$, de modo que $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$. Então

$$I = \langle h_0, h_1^2 \rangle \cap \langle h_0, h_2, h_3 \rangle.$$

Tome $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet h_i = x_i$, logo

$$T_\bullet I = \langle x_0, x_1^2 \rangle \cap \langle x_0, x_2, x_3 \rangle = \langle x_0, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3 \rangle = J_5.$$

□

A seguir vamos determinar as dimensões das órbitas associadas aos 6 ideais obtidos na Proposição 4.2.6.

Proposição 4.2.7. Verifica-se que:

1. $\dim \mathcal{O}_{J_0} = 11$, sendo $J_0 = \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, f \rangle$ com $f = x_1^2 - x_2 x_3$.
2. $\dim \mathcal{O}_{J_1} = 10$, sendo $J_1 = \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2 \rangle$.
3. $\dim \mathcal{O}_{J_2} = 8$, sendo $J_2 = \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1^2 \rangle$.
4. $\dim \mathcal{O}_{J_3} = 10$, sendo $J_3 = \langle x_0, x_2 f, x_3 f \rangle$ com $f = x_1^2 - x_2 x_3$.
5. $\dim \mathcal{O}_{J_4} = 9$, sendo $J_4 = \langle x_0, (x_1 + x_2) x_1 x_2, x_1 x_2 x_3 \rangle$.
6. $\dim \mathcal{O}_{J_5} = 7$, sendo $J_5 = \langle x_0, x_2 x_1^2, x_3 x_1^2 \rangle$.

Demonstração. Para o cálculo da dimensão das órbitas, primeiramente calculemos a dimensão dos estabilizadores. Nos casos a seguir, considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$.

1. **Afirmção:** $\dim E_{J_0} = 4$.

Se $\varphi \in E_{J_0}$ então $T_{\bullet} J_0 = J_0$. Assim

$$\varphi(\mathcal{Z}(J_0)) = \mathcal{Z}(T_{\bullet} J_0) = \mathcal{Z}(J_0) = \mathcal{Z}(x_0, f) \cup \mathcal{Z}(x_1, x_2, x_3).$$

Logo,

$$\varphi(\mathcal{C} \cup \{p\}) = \varphi(\mathcal{C}) \cup \varphi(p) = \mathcal{C} \cup \{p\} \implies \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \quad \text{e} \quad \varphi(p) = p.$$

Como $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ (como no caso do ideal I_2 no Teorema 3.3.2), segue que

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & & & \\ a_{20} & & N & \\ a_{30} & & & \end{bmatrix},$$

com N submatriz pertencente a um conjunto algébrico em $M_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^9$ de dimensão 4 (cf. Proposição B.1.5). Para concluir, observe que

$$\varphi(p) = p \iff [T(e_1)] = [e_1] \iff [a_{00} : a_{10} : a_{20} : a_{30}] = [1 : 0 : 0 : 0].$$

Portanto, $a_{i0} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Visto que $\dim[T^{-1}] = 1$ implica em $a_{00} = 1$. Assim, temos $\dim E_{J_0} = 4$ e portanto $\dim \mathcal{O}_{J_0} = 15 - 4 = 11$.

2. **Afirmção:** $\dim E_{J_1} = 5$.

Se $\varphi \in E_{J_1}$ então, como no cálculo da dimensão da órbita do ideal I_1 no Teorema 3.3.2 segue que temos duas possibilidades

a) $\varphi(l_i) = l_i$ para $i = 1, 2$.

Nesse caso

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Com a condição adicional que $\varphi(p) = p$ temos $a_{i0} = 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Logo

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

b) $\varphi(l_1) = l_2$ e $\varphi(l_2) = l_1$.

Neste caso

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & a_{12} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Com a condição $\varphi(p) = p$ temos $a_{i0} = 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, nos resta

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos temos 6 parâmetros sujeitos a condição de $\det[T^{-1}] = 1$.

Portanto $\dim E_{J_1} = 5$ e segue que $\dim \mathcal{O}_{J_1} = 15 - 5 = 10$.

3. **Afirmção:** $\dim E_{J_2} = 7$.

Se $\varphi \in E_{J_2}$ então $T_{\bullet} J_2 = J_2$, similarmente ao cálculo da dimensão da órbita do ideal I_0 no Teorema 3.3.2, a matriz de T^{-1} será dada por

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Com a condição adicional $\varphi(p) = p$ temos $a_{i0} = 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Portanto

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Temos 8 parâmetros sujeitos a condição de $\det[T^{-1}] = 1$, logo $\dim E_{J_2} = 7$ e portanto $\dim \mathcal{O}_{J_2} = 15 - 7 = 8$.

4. **Afirmção:** $\dim E_{J_3} = 5$.

Se $\varphi \in E_{J_3}$ então $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e $\varphi(p) = p$. Pela Proposição B.1.6, segue que

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & & & \\ a_{20} & & N & \\ a_{30} & & & \end{bmatrix},$$

com N submatriz pertencente a um conjunto algébrico de dimensão 2. Portanto $\dim E_{J_3} = 3 + 2 = 5$, logo $\dim \mathcal{O}_{J_3} = 10$.

5. **Afirmção:** $\dim E_{J_4} = 6$.

Se $\varphi \in E_{J_4}$, então temos duas possibilidades:

a) $\varphi(l_i) = l_i$ e $\varphi(p) = p$.

Visto que $\varphi(l_i) = l_i$, então como no caso do cálculo da dimensão do estabilizador do ideal J_1 temos

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Como $p = [0 : 1 : -1 : 0]$, temos

$$\varphi(p) = p \iff [0 : a_{11} : -a_{22} : a_{31} - a_{32}] = p \iff a_{31} = a_{32} \text{ e } a_{11} = a_{22}.$$

Assim, em $[T^{-1}]$ comparecem 7 parâmetros sujeitos a condição $\det[T^{-1}] = 1$, logo $\dim E_{J_4} = 7 - 1 = 6$.

b) $\varphi(l_1) = l_2$, $\varphi(l_2) = l_1$ e $\varphi(p) = p$. Por $\varphi(l_1) = l_2$, $\varphi(l_2) = l_1$, assim como no caso do estabilizador do ideal J_1 temos,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & a_{12} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Como $p = [0 : 1 : -1 : 0]$, segue que

$$\varphi(p) = p \iff [0 : a_{12} : -a_{21} : a_{31} - a_{32}] = p \iff a_{31} = a_{32}, a_{12} = a_{21}.$$

Portanto, em $[T^{-1}]$ temos 7 parâmetros sob a condição $\det[T^{-1}] = 1$, logo $\dim E_{J_4} = 6$. Como em ambos os casos $\dim E_{J_4} = 6$, obtemos que $\dim \mathcal{O}_{J_4} = 15 - 6 = 9$.

6. **Afirmção:** $\dim E_{J_5} = 8$.

Se $\varphi \in E_{J_5}$ então $\varphi_{\bullet}(\mathcal{Z}(x_0, x_1^2)) = \mathcal{Z}(T_{\bullet}(x_0, x_1^2)) = \mathcal{Z}(x_0, x_1^2)$ e $\varphi(p) = p$. Como no cálculo de $\dim \mathcal{O}_{I_0}$ no Teorema 3.3.2, temos que

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Com a condição de $\varphi(p) = p$ temos

$$[0 : a_{11} : a_{21} : a_{31}] = [0 : 1 : 0 : 0] \iff a_{21} = a_{31} = 0.$$

Assim na matriz $[T^{-1}]$ temos 9 parâmetros sujeitos a condição $\det[T^{-1}] = 1$, portanto $\dim E_{J_5} = 8$. Com isso $\dim \mathcal{O}_{J_5} = 15 - 8 = 7$.

□

Na figura a seguir indicamos as 6 órbitas obtidas em $\mathcal{H}_2$ com a união esquemática de uma cônica e um ponto fora da cônica.

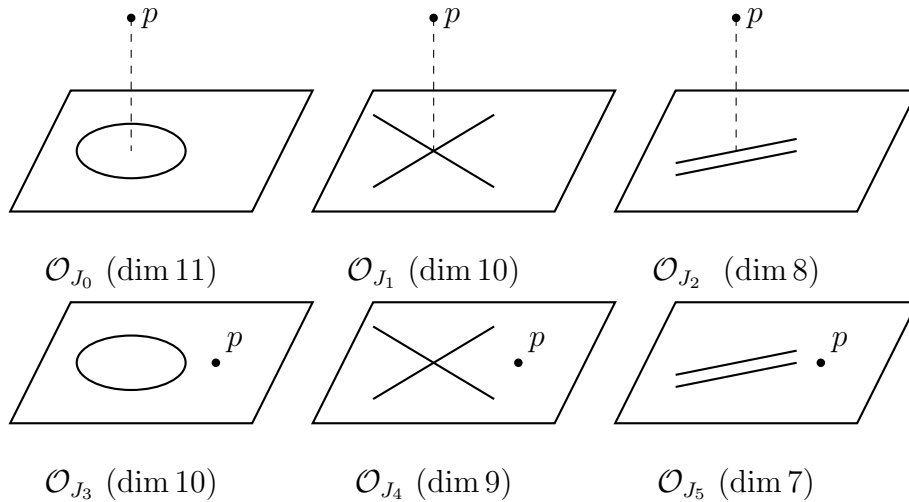


Figura 4.2: Órbitas de J_0 a J_5 parametrizando as possíveis posições relativas de uma cônica e um ponto fora da cônica em $\mathbb{P}^3$.

4.2.4 Uniões esquemáticas de uma cônica e um ponto mergulhado na cônica

Considere $I \in \mathcal{H}_2$ tal que I define a união esquemática de uma cônica e um ponto mergulhado na cônica.

Observação 11. Segue do Teorema 4.2.5 que $I = J^{sat}$, sendo $J = \tilde{J} + \langle g \rangle$ com $\tilde{J} = \langle h_0, Q \rangle \cdot \langle h_0, h_1, h_2 \rangle$, $\{h_0, h_1, h_2\} \subset S_1$ L.I, $Q \in \langle h_0, h_1, h_2 \rangle_2 - h_0 \cdot S_1$, $g \in \langle h_0, Q \rangle_3 - \tilde{J}_3$. Escolha $h_3 \in S_1$ tal que $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ seja uma base de S_1 . Note que

$$\tilde{J} = \langle h_0^2, h_0 h_1, h_0 h_2, Q h_0, Q h_1, Q h_2 \rangle.$$

Logo, $\tilde{J}_3 = h_0 \langle h_0, h_1, h_2 \rangle_2 + [Q h_0, Q h_1, Q h_2]$. Além disso,

$$\langle h_0, Q \rangle_3 = h_0 S_2 + Q S_1 \quad \text{e} \quad S_2 = \langle h_0, h_1, h_2 \rangle_2 + [h_3^2].$$

Assim, $\langle h_0, Q \rangle_3 = h_0 \langle h_0, h_1, h_2 \rangle_2 + [h_0 h_3^2] + Q S_1$. Portanto $g \in [h_0 h_3^2, Q h_3]$. Dessa forma,

$$g = \alpha h_0 h_3^2 + \beta Q h_3 \quad \text{com} \quad [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \quad \text{e} \quad h_3 \in S_1 \text{ tal que } [h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1.$$

Diremos que o ponto mergulhado na cônica é planar se $\beta = 0$, mergulhado espacial se $\alpha = 0$ e mergulhado espacial geral se $\alpha\beta \neq 0$.

Proposição 4.2.8. Considere $I \in \mathcal{H}_2$ tal que I define a união esquemática de uma cônica não singular e um ponto mergulhado na cônica. Então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet I$ é igual a exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$K_0 = \langle x_0, x_1 f, x_2 f \rangle \quad \text{ou} \quad K_1 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f \rangle, \quad \text{sendo } f = x_1^2 - x_2 x_3.$$

Demonstração. Lembremos que $I = J^{sat}$, com $J = \langle h_0, Q \rangle \langle h_0, h_1, h_2 \rangle + \langle g \rangle$ conforme a Observação 11. Por outro lado, a partir da Proposição B.1.1 segue que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que

$$T_\bullet \langle h_0, Q \rangle = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle \quad \text{e} \quad T_\bullet \langle h_0, h_1, h_2 \rangle = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle.$$

Logo $T_\bullet I = T_\bullet J^{sat} = (T_\bullet J)^{sat}$, sendo (cf. Observação 11)

$$T_\bullet J = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle \alpha x_3^2 x_0 + \beta (x_1^2 - x_2 x_3) x_3 \rangle \quad \text{com} \quad [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Seja $K = T_\bullet J$ e $f = x_1^2 - x_2 x_3$. Temos os seguintes casos a considerar: (a) $\beta = 0$, (b)

$\alpha = 0$ e (c) $\alpha\beta \neq 0$.

(a) Temos $K = \langle x_0, f \rangle \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle x_0 x_3^2 \rangle = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3^2, f x_1, f x_2 \rangle$. Observe que $x_0 \in K^{sat}$. Então $\langle x_0, f x_1, f x_2 \rangle \subseteq K^{sat} = T_\bullet I$. Como $\langle x_0, f x_1, f x_2 \rangle$ é saturado, contido em $T_\bullet I$ e ambos possuem o mesmo polinômio de Hilbert, segue pela Proposição 1.2.5 que $T_\bullet I = \langle x_0, f x_1, f x_2 \rangle = K_0$.

(b) Neste caso, $K = \langle x_0, f \rangle \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle f x_3 \rangle$. Note que $f \in K^{sat}$. Assim, $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f \rangle \subseteq K^{sat}$. Logo $T_\bullet I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f \rangle = K_1$.

(c) Neste caso, por uma mudança de escala, temos

$$K = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f x_0, f x_1, f x_2, (f + x_0 x_3) x_3 \rangle.$$

Note que $f + x_3 x_0 \in K^{sat}$ e $f x_i \in \langle f + x_0 x_3, x_0 x_i \rangle$ para $i \in \{0, \dots, 3\}$. Assim,

$$T_\bullet I = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f + x_0 x_3 \rangle.$$

Afirmção: Sejam $K_1 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f \rangle$ e $\tilde{K}_1 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, f + x_0 x_3 \rangle$. Verifica-se que $\mathcal{O}_{K_1} = \mathcal{O}_{\tilde{K}_1}$, ou seja, existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_\bullet \tilde{K}_1 = K_1$.

De fato, considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ com $R_\bullet x_i = x_i$ para $i = 0, 1, 3$ e $R_\bullet x_2 = x_2 + x_0$. Assim,

$$R_\bullet \tilde{K}_1 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0(x_2 + x_0), f - x_0 x_3 + x_0 x_3 \rangle = K_1.$$

□

Observação 12. Os ideais K_0 e K_1 pertencem a órbitas distintas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. De fato, K_0 contém o gerador x_0 , que é uma forma linear (grau 1), enquanto K_1 não possui nenhum gerador de grau 1: seus geradores são $x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2$ e $f = x_1^2 - x_2 x_3$ (grau 2). Como a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ preserva o grau dos geradores em cada grau, K_0 e K_1 não podem estar na mesma órbita.

Proposição 4.2.9. Se $I \in \mathcal{H}_2$ define uma união esquemática de duas retas distintas concorrentes e um ponto mergulhado em exatamente uma das componentes, então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet I$ é igual a exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$K_2 = \langle x_0, x_1^2 x_2, x_1 x_2 x_3 \rangle \quad \text{ou} \quad K_3 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_3, x_1 x_2 \rangle$$

Demonstração. Neste caso temos a cônica $\mathcal{C}$ e o ponto p definido pelos ideais $\langle h_0, h_1 h_2 \rangle$ e $\langle h_0, h_1, h_3 \rangle$, respectivamente com $[h_0, h_1, h_2, h_3] = S_1$. Observe que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que

$$T_\bullet \langle h_0, h_1 h_2 \rangle = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle \quad \text{e} \quad T_\bullet \langle h_0, h_1, h_3 \rangle = \langle x_0, x_1, x_3 \rangle.$$

Assim, $K = T_{\bullet}J = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \langle x_0, x_1, x_3 \rangle + \langle \alpha x_0x_2^2 + \beta x_1x_2^2 \rangle$ (cf. Observação 11). No-
vamente, consideremos as seguintes possibilidades: (a) $\beta = 0$, (b) $\alpha = 0$ e (c) $\alpha\beta \neq 0$.
No que segue considere $\tilde{K} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1^2x_2, x_1x_2x_3 \rangle$. Além disso, observe que K_i
é saturado com polinômio de Hilbert $2t + 2$ para $i = 2, 3$.

- (a) Nesse caso $K = \tilde{K} + \langle x_0x_2^2 \rangle$. Note que $x_0 \in K^{sat} \subseteq K_2$. Logo segue da Proposição
1.2.5 que $T_{\bullet}J = K^{sat} = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2x_3 \rangle = K_2$.
- (b) Nesse caso, $K = \tilde{K} + \langle x_1x_2^2 \rangle$. Note que $x_1x_2 \in K^{sat} \subseteq K_3$. Portanto, pela
Proposição 1.2.5, $T_{\bullet}I = K^{sat} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1x_2 \rangle = K_3$.
- (c) Neste caso, após mudança de escala ($\alpha = \beta = 1$),

$$K^{sat} = \tilde{K} + \langle x_0x_2^2 + x_1x_2^2 \rangle = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1^2x_2, x_1x_2x_3, x_2(x_1x_2 + x_0x_2) \rangle.$$

Para finalizar, observe que $K^{sat} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1x_2 + x_0x_2 \rangle$.

Afirmação: $\mathcal{O}_{K^{sat}} = \mathcal{O}_{K_3}$.

Considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_{\bullet}x_1 = x_1 - x_0$ e $R_{\bullet}x_i = x_i$ para $i = 0, 2, 3$. Assim,

$$R_{\bullet}K^{sat} = \langle x_0^2, x_0(x_1 - x_0), x_0x_3, (x_1 - x_0)x_2 + x_0x_2 \rangle = K_3.$$

□

Proposição 4.2.10. Considere $I \in \mathcal{H}_2$ tal que I define uma união esquemática de duas
retas concorrentes e um ponto mergulhado no ponto de interseção dessas retas, então
existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_{\bullet}I$ é igual a exatamente uma das seguinte possibilidades:

$$K_4 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle, K_5 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle \text{ ou } K_6 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + x_0x_3 \rangle.$$

Demonstração. Neste caso temos a cônica $\mathcal{C}$ e o ponto p definido pelos ideais $\langle h_0, h_1h_2 \rangle$
e $\langle h_0, h_1, h_2 \rangle$, respectivamente. Assim existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que

$$T_{\bullet}\langle h_0, h_1h_2 \rangle = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \quad \text{e} \quad T_{\bullet}\langle h_0, h_1, h_2 \rangle = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle.$$

Segue da Observação 11 que $T_{\bullet}I$ é igual ao saturado do ideal

$$K = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle \alpha x_0x_3^2 + \beta x_1x_2x_3 \rangle \quad \text{com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Seja $\tilde{K} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle$. Consideremos as possibilidades: (a) $\beta = 0$, (b)
 $\alpha = 0$ e (c) $\alpha\beta \neq 0$.

- (a) Neste caso, $K = \tilde{K} + \langle x_0x_3^2 \rangle$. Logo $K^{sat} = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle = K_4$.

(b) Neste caso, $K = \tilde{K} + \langle x_1x_2x_3 \rangle$. Logo $K^{sat} = \langle x_0, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle = K_5$.

(c) A menos de uma mudança de coordenadas segue que

$$K = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_1x_2^2, x_3(x_1x_2 + x_0x_3) \rangle.$$

Verifica-se que $K^{sat} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + x_0x_3 \rangle = K_6$.

Afirmção: Verifica-se que $\mathcal{O}_{K_5} \neq \mathcal{O}_{K_6}$.

Por absurdo, suponha que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_\bullet K_6 = K_5$. Assim $\sqrt{R_\bullet K_6} = \sqrt{K_5}$. Logo, $\langle R_\bullet x_0, R_\bullet(x_1x_2) \rangle = \langle x_0, x_1x_2 \rangle$. Dessa forma, $R_\bullet x_0 = a_{00}x_0$ com $a_{00} \neq 0$. Temos também para $i = 1, 2$

$$R_\bullet(x_0x_i) = a_{00}x_0(a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3) \in K_5 \implies a_{i3} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R_\bullet(x_1x_2 + x_0x_3) &= \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i}x_i \right) \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i}x_i \right) + a_{00}x_0 \left(\sum_{i=0}^3 a_{3i}x_i \right) \\ &= a_{00}a_{33}x_0x_3 + r, \quad \text{com } r \in \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $a_{00}a_{33} = 0$, portanto $a_{33} = 0$ o que é uma contradição. $\square$

Observação 13. Note que $K_5 = I_2$ com $I_2 \in \mathcal{H}_1$.

Proposição 4.2.11. Se $I \in \mathcal{H}_2$ define a união esquemática de uma reta dupla de gênero aritmético zero e um ponto mergulhado, então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet I$ é igual a exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$K_7 = \langle x_0, x_1^3, x_1^2x_2 \rangle, \quad K_8 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 \rangle \quad \text{ou} \quad K_9 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 + x_0x_3 \rangle.$$

Demonstração. Neste caso temos a cônica $\mathcal{C}$ e o ponto p definidos pelos ideais $\langle h_0, h_1^2 \rangle$ e $\langle h_0, h_1, h_2 \rangle$, respectivamente. Logo existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que

$$T_\bullet \langle h_0, h_1^2 \rangle = \langle x_0, x_1^2 \rangle \quad \text{e} \quad T_\bullet \langle h_0, h_1, h_2 \rangle = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle.$$

Assim, segue da Observação 11 que $T_\bullet I$ é igual ao saturado do ideal

$$K = \langle x_0, x_1^2 \rangle \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle \alpha x_0x_3^2 + \beta x_1^2x_3 \rangle, \quad \text{com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Consideremos as possibilidades: (a) $\beta = 0$, (b) $\alpha = 0$ e (c) $\alpha\beta \neq 0$.

(a) Neste caso, $K^{sat} = \langle x_0, x_1^3, x_1^2x_2 \rangle = K_7$.

(b) Neste caso, $K^{sat} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 \rangle = K_8$.

(c) Neste caso⁷, $K^{sat} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 + x_0x_3 \rangle = K_9$.

Afirmção: $\mathcal{O}_{K_8} \neq \mathcal{O}_{K_9}$. De fato, ao supormos por contradição que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $R_\bullet K_8 = K_9$, analogamente a afirmação sobre as órbitas $\mathcal{O}_{K_5}$ e $\mathcal{O}_{K_6}$, obtemos $a_{i3} = 0$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Uma contradição. $\square$

Observação 14. $K_8 = I_0$ com $I_0 \in \mathcal{H}_1$.

Dimensão das órbitas em $\mathcal{H}_2$, quando o ponto está mergulhado na cônica

Proposição 4.2.12. Considere os ideais $K_0 = \langle x_0, x_1f, x_2f \rangle$ e $K_1 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, f \rangle$, sendo $f = x_1^2 - x_2x_3$. Verifica-se que $\dim \mathcal{O}_{K_0} = 9$ e $\dim \mathcal{O}_{K_1} = 10$.

Demonstração. Seja $\varphi \in E_{K_i}$ definido por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Assim, para $i = 0$, tem-se

$$T_\bullet K_0 = K_0 \iff \langle T_\bullet x_0, T_\bullet(x_1f), T_\bullet(x_2f) \rangle = \langle x_0, x_1f, x_2f \rangle.$$

Logo, $T_\bullet x_0 = a_{00}x_0$ e $T_\bullet x_j = a_{j0}x_0 + M_j$, com $M_j = \sum_{i=1}^3 a_{ji}x_i$, para $j = 1, 2, 3$. Com isso, $T_\bullet(x_1f) = \alpha x_0 + M_1(M_1^2 - M_2M_3)$, com $\alpha \in S$. Portanto, $M_1(M_1^2 - M_2M_3) \in K_0$. Logo,

$$M_1(M_1^2 - M_2M_3) = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)f \implies M_1 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \quad \text{e} \quad M_1^2 - M_2M_3 = f.$$

Assim,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Verificamos que $M_1^2 - M_2M_3 = f$ impõe as seguintes condições polinomiais sobre os parâmetros da matriz $[T^{-1}]$:

$$\begin{cases} a_{11}^2 - a_{21}a_{31} = a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}, & 2a_{11}a_{12} - a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = 0 \\ -a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} = 0, & a_{12}^2 - a_{22}a_{32} = 0, & -a_{23}a_{33} = 0 \end{cases}$$

Adicionando a condição $\det[T^{-1}] = 1$ e utilizando Macaulay2, obtemos $\dim E_{K_0} = 6$, e portanto $\dim \mathcal{O}_{K_0} = 9$.

⁷A menos de uma mudança de coordenadas.

Para $i = 1$, segue que $T_{\bullet}K_1 = K_1$, implica em $\sqrt{T_{\bullet}K_1} = \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}f \rangle = \langle x_0, f \rangle$. Assim, obtemos $T_{\bullet}x_0 = a_{00}x_0$ com $a_{00} \neq 0$. Temos também para $j = 1, 2$

$$T_{\bullet}(x_0x_j) = a_{00}x_0(a_{j0}x_0 + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3) \in K_1 \implies a_{j3} = 0.$$

Portanto, $T_{\bullet}x_0 = a_{00}x_0$ e $T_{\bullet}x_j = a_{j0}x_0 + M_j$ com $M_j = \sum_{i=1}^2 a_{ji}x_i$, para $j = 1, 2, 3$. Assim,

$$\begin{aligned} T_{\bullet}f &= (T_{\bullet}x_1)^2 - (T_{\bullet}x_2)(T_{\bullet}x_3) \\ &= (a_{10}x_0 + M_1)^2 - (a_{20}x_0 + M_2)(a_{30}x_0 + M_3) \\ &= A + M_1^2 - a_{20}a_{33}x_0x_3 - M_2M_3 \quad \text{com } A \in [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que como $a_{i3} = 0$ para $i = 0, 1, 2$, segue que $a_{33} \neq 0$. Portanto, de (4.6) obtemos que $a_{20} = 0$. Assim,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Como $T_{\bullet}f \in K_1$, segue de (4.6) que $M_1^2 - M_2M_3 = \mu f$ com $\mu \in \mathbb{C}$, que impõe as condições

$$a_{11}^2 - a_{21}a_{31} = a_{22}a_{33}, \quad 2a_{11}a_{12} - a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = 0, \quad a_{21}a_{33} = 0, \quad a_{12}^2 - a_{22}a_{32} = 0,$$

juntamente com $\det[T^{-1}] = 1$. Utilizando o Macaulay2, segue que $\dim E_{K_1} = 5$, portanto $\dim \mathcal{O}_{K_1} = 10$. $\square$

Proposição 4.2.13. Considere os ideais

$$K_2 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2x_3 \rangle \quad \text{e} \quad K_3 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1x_2 \rangle.$$

Então $\dim \mathcal{O}_{K_2} = 8$ e $\dim \mathcal{O}_{K_3} = 7$.

Demonstração. Note que $\sqrt{K_i} = \langle x_0, x_1x_2 \rangle$ para $i = 2, 3$. Assim para qualquer $\varphi \in E_{K_i}$ ($i = 2, 3$), definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$, segue

$$\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}(x_1x_2) \rangle = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \implies T_{\bullet}x_0 = a_{00}x_0 \text{ com } a_{00} \neq 0.$$

Além disso temos duas possibilidades a considerar

(i) $\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_i \rangle = \langle x_0, x_i \rangle$, que implica em $T_{\bullet}x_i = a_{i0}x_0 + a_{ii}x_i$ para $i = 1, 2$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

(ii) $\langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_i \rangle = \langle x_0, x_j \rangle$, para $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Assim, $T_{\bullet}x_1 = a_{10}x_0 + a_{12}x_2$ e $T_{\bullet}x_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & a_{12} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

No que segue considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$.

1. Para $K_2 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2x_3 \rangle$. Se $\varphi \in E_{K_2}$, visto que $T_{\bullet}(x_1x_2x_3) \in K_2$, temos no caso (i)

$$T_{\bullet}(x_1x_2x_3) = Ax_0 + a_{11}a_{22}x_1^2x_2 + a_{11}a_{22}a_{33}x_1x_2x_3 + a_{11}a_{22}a_{32}x_1x_2^2,$$

com $A \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Como $a_{11}a_{22}a_{32}x_1x_2^2 \notin K_2$ e $a_{11}a_{22} \neq 0$ temos que $a_{32} = 0$. Logo

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \implies \dim E_{K_2} = 8 - 1 = 7.$$

No caso (ii), temos

$$T_{\bullet}(x_1^2x_2) = (a_{10}x_0 + a_{12}x_2)^2(a_{20}x_0 + a_{21}x_1) = Ax_0 + a_{21}a_{12}^2x_2^2x_1 \in K_2.$$

Como $a_{21}a_{12}^2x_2^2x_1 \notin K_2$, devemos ter $a_{21}a_{12}^2 = 0$ o que é uma contradição, pois caso $a_{12} = 0$ ou $a_{21} = 0$, teríamos $\{T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}x_1, T_{\bullet}x_2\}$ L.D. Portanto o caso (ii) não ocorre. Assim, temos apenas o caso (i). Portanto $\dim O_{K_2} = 15 - 7 = 8$.

2. Para $K_3 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1x_2 \rangle$. Considere $\varphi \in E_{K_3}$.

No caso (i), ao considerarmos a matriz (4.7) se verifica que $T_{\bullet}(x_0^2)$ e $T_{\bullet}(x_0x_1)$ pertencem a K_3 , assim não acrescentam condições adicionais aos parâmetros da

matriz (4.7). Entretanto, $T_{\bullet}(x_1x_2) \in K_3$ e

$$T_{\bullet}(x_1x_2) = (a_{10}x_0 + a_{11}x_1)(a_{20}x_0 + a_{22}x_2) = A + a_{10}a_{22}x_0x_2$$

com $A \in \langle x_0^2, x_0x_1, x_1x_2 \rangle \subseteq K_3$. Assim, $a_{10}a_{22} = 0$, logo $a_{10} = 0$. Também $T_{\bullet}(x_0x_3) \in K_3$ e

$$\begin{aligned} T_{\bullet}(x_0x_3) &= (a_{00}x_0)(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\ &= a_{00}a_{30}x_0^2 + a_{00}a_{31}x_0x_1 + a_{00}a_{32}x_0x_2 + a_{00}a_{33}x_0x_3. \end{aligned}$$

Assim, $a_{00}a_{32} = 0$, logo $a_{32} = 0$. Temos então

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \implies \dim E_{K_3} = 7 - 1 = 6.$$

Para K_3 no caso (ii) temos: $T_{\bullet}x_0 = a_{00}x_0$, $T_{\bullet}x_1 = a_{10}x_0 + a_{12}x_2$ e $T_{\bullet}x_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1$. Note que $T_{\bullet}(x_0x_1) \in K_3$ e

$$T_{\bullet}(x_0x_1) = a_{00}x_0(a_{10}x_0 + a_{12}x_2) = a_{00}a_{10}x_0^2 + a_{00}a_{12}x_0x_2$$

Como $x_0^2 \in K_3$ e $x_0x_2 \notin K_3$, devemos ter $a_{00}a_{12} = 0$, novamente uma contradição. Assim, o caso (ii) não ocorre e no caso (i) $\dim E_{K_3} = 6$. Portanto, $\dim \mathcal{O}_{K_3} = 9$.

□

Proposição 4.2.14. Considere os ideais

$$K_4 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle, K_5 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle \text{ e } K_6 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + x_0x_3 \rangle.$$

Então $\dim \mathcal{O}_{K_4} = 7$, $\dim \mathcal{O}_{K_5} = 7$ e $\dim \mathcal{O}_{K_6} = 8$.

Demonstração. Note que o radical dos ideais K_4 , K_5 e K_6 é igual a $\langle x_0, x_1x_2 \rangle$. Então como na proposição anterior, temos as mesmas condições (i) e (ii) (e as respectivas matrizes em (4.7) e (4.8)) a considerar. Segue a análise para cada ideal K_i com $i = 4, 5, 6$ sob os casos (i) e (ii). A seguir, considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$.

1. Para $K_4 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle$. Se $\varphi \in E_{K_4}$ temos

$$T_{\bullet}K_4 = K_4 \iff \langle T_{\bullet}x_0, T_{\bullet}(x_1^2x_2), T_{\bullet}(x_1x_2^2) \rangle = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle.$$

No caso (i), verificamos que $T_{\bullet}(x_1^2x_2)$ e $T_{\bullet}(x_1x_2^2) \in K_4$, logo, nenhuma condição extra sobre os parâmetros é necessária⁸. Assim, nesse caso a matriz de T^{-1} é a matriz (4.7) com a condição de $\det[T^{-1}] = 1$, segue que $\dim E_{K_4} = 9 - 1 = 8$.

No caso (ii) similarmente ao caso (i) nenhuma condição adicional é imposta aos parâmetros da matriz (4.8), portanto $\dim E_{K_4} = 9 - 1 = 8$. Como $\dim E_{K_4} = 8$ em ambos os casos, segue que $\dim \mathcal{O}_{K_4} = 7$.

2. Para $K_5 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle$ o processo é totalmente análogo aos casos de K_4 , logo $\dim \mathcal{O}_{K_5} = 7$.

3. Se $K_6 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + x_0x_3 \rangle$ e $\varphi \in E_{K_6}$ então

$$\langle T_{\bullet}(x_0^2), T_{\bullet}(x_0x_1), T_{\bullet}(x_0x_2), T_{\bullet}(x_1x_2 + x_0x_3) \rangle = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + x_0x_3 \rangle.$$

Verificamos nos casos (i) e (ii) que $T_{\bullet}(x_0^2)$, $T_{\bullet}(x_0x_1)$ e $T_{\bullet}(x_0x_2)$ pertencem a K_6 , assim nenhuma condição adicional é imposta aos parâmetros das matrizes em (4.7) e (4.8). Para $T_{\bullet}(x_1x_2 + x_0x_3)$ temos no caso (i) que

$$T_{\bullet}(x_1x_2 + x_0x_3) = A + a_{11}a_{22}x_1x_2 + a_{00}a_{33}x_0x_3 \quad \text{com } A \in \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle.$$

Logo, como $T_{\bullet}(x_1x_2 + x_0x_3) \in K_6$ temos

$$a_{11}a_{22}x_1x_2 + a_{00}a_{33}x_0x_3 = \mu(x_1x_2 + x_0x_3) \implies a_{11}a_{22} - a_{00}a_{33} = 0.$$

Portanto, os parâmetros da matriz (4.7), estão sujeitos a duas condições⁹, assim $\dim E_{K_6} = 9 - 2 = 7$.

No caso (ii), seguindo um processo análogo ao caso (i), obtemos $a_{21}a_{12} - a_{00}a_{33} = 0$. Os parâmetros da matriz (4.8) também estão sujeitos a duas condições¹⁰, assim $\dim E_{K_6} = 9 - 2 = 7$.

Em ambos os casos temos $\dim E_{K_6} = 7$, portanto $\dim \mathcal{O}_{K_6} = 15 - 7 = 8$. □

Proposição 4.2.15. Considere os ideais

$$K_7 = \langle x_0, x_1^3, x_1^2x_2 \rangle, \quad K_8 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 \rangle \text{ e } K_9 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 + x_0x_3 \rangle.$$

Então $\dim \mathcal{O}_{K_7} = 6$, $\dim \mathcal{O}_{K_8} = 6$ e $\dim \mathcal{O}_{K_9} = 7$.

⁸Por exemplo, $T_{\bullet}(x_1^2x_2) = (a_{10}x_0 + a_{11}x_1)^2(a_{20}x_0 + a_{22}x_2) = Ax_0 + a_{11}^2a_{22}x_1^2x_2$. com $A \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

⁹Utilizamos o Macaulay2 para checar que $\dim E_{K_6} = 7$.

¹⁰Aqui também utilizamos Macaulay2 para o cálculo desta dimensão.

Demonstração. Considere $\varphi \in E_{K_i}$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Observe que para qualquer um dos ideais K_7, K_8 e K_9 , tem-se que seu radical é $\langle x_0, x_1 \rangle$. Logo $\langle T_\bullet x_0, T_\bullet x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $T_\bullet x_i \in [x_0, x_1]$ para $i = 0, 1$. Assuma que $T_\bullet x_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1$ para $i = 0, 1$.

1. $K_7 = \langle x_0, x_1^3, x_1^2x_2 \rangle$.

Se $\varphi \in E_{K_7}$, então $a_{01} = 0$ visto que $(K_7)_1 = [x_0]$ e $a_{11} \neq 0$. Assim,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Note que $T_\bullet x_1^3 \in K_7$, logo não acrescenta condições adicionais aos parâmetros de $[T^{-1}]$. Entretanto, como

$$T_\bullet(x_1^2x_2) = (a_{10}x_0 + a_{11}x_1)^2(a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = A + a_{11}^2a_{23}x_1x_3,$$

com $A \in K_7$ e $T_\bullet(x_1^2x_2) \in K_7$. Portanto $a_{11}^2a_{23} = 0$, logo $a_{23} = 0$. Assim $\dim E_{K_7} = 10 - 1 = 9$ e consequentemente $\dim \mathcal{O}_{K_7} = 6$.

2. $K_8 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 \rangle$

Verifica-se que $T_\bullet(x_0^2), T_\bullet(x_0x_1)$ e $T_\bullet(x_1^2) \in K_8$, logo não acrescentam condições extras sobre os parâmetros de $[T^{-1}]$. Agora,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_0x_2) &= (a_{00}x_0 + a_{01}x_1)(a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &= A + a_{00}a_{23}x_0x_3 + a_{01}a_{22}x_1x_2 + a_{01}a_{23}x_1x_3 \text{ com } A \in K_8, \end{aligned}$$

e $T_\bullet(x_0x_2) \in K_8$. Temos então que $a_{00}a_{23} = 0$, $a_{01}a_{22} = 0$ e $a_{01}a_{23} = 0$. Como $\{T_\bullet x_0, T_\bullet x_1, T_\bullet x_2\}$ são L.I. Temos $a_{23} = 0$ e $a_{01} = 0$. Portanto

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \dim E_{K_8} = 9 \implies \dim \mathcal{O}_{K_8} = 6.$$

3. $K_9 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 + x_0x_3 \rangle$

Observe que $T_\bullet x_0^2 = A + a_{01}^2x_1^2 \in K_9$ com $A \in [x_0^2, x_0x_1]$, assim temos $a_{01} = 0$. Verificamos que $T_\bullet(x_0x_1) \in K_9$, logo não impõe condições adicionais nos

parâmetros de $[T^{-1}]$, mas

$$T_{\bullet}(x_0x_2) = (a_{00}x_0)(a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = B + a_{00}a_{23}x_0x_3,$$

com $B \in K_9$ e $T_{\bullet}(x_0x_2) \in K_9$. Logo $a_{00}a_{23} = 0$, como $a_{00} \neq 0$, segue que $a_{23} = 0$. Para finalizar, note que

$$T_{\bullet}(x_1^2 + x_0x_3) = C + a_{11}x_1^2 + a_{00}a_{33}x_0x_3 \quad \text{com } C \in K_9$$

e $T_{\bullet}(x_1^2 + x_0x_3) \in K_9$. Assim temos que $a_{11}^2 - a_{00}a_{33} = 0$. Logo

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{com } \det[T^{-1}] = 1 \text{ e } a_{11}^2 - a_{00}a_{33} = 0.$$

Utilizando o Macaulay2 checamos que $\dim E_{K_9} = 8$. Assim, $\dim \mathcal{O}_{K_9} = 7$.

□

4.2.5 Especializações em $\mathcal{H}_2$

A seguir apresentaremos as especializações entre as órbitas da componente $\mathcal{H}_2$. Conforme ilustramos na Figura 4.8, optamos por apresentar as especializações por estratos (de acordo com a dimensão das órbitas, em ordem decrescente). Assim, na proposição a seguir apresentamos a especialização da única órbita de dimensão 11, para as 3 de dimensão 10 e assim por diante. Exceto na Proposição 4.2.17 onde há uma especialização de uma órbita de dimensão 10 para uma de dimensão 8. No quadro em (4.9)

exibimos os representantes das órbitas de $\mathcal{H}_2$ organizada por estratos.

Estratos	Ideais
Estrato 1 (dim 11)	$J_0 = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2 - x_2x_3 \rangle.$
Estrato 2 (dim 10)	$J_1 = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2 \rangle,$ $K_1 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, f \rangle,$ $J_3 = \langle x_0, x_2f, x_3f \rangle,$ com $f = x_1^2 - x_2x_3.$
Estrato 3 (dim 9)	$K_0 = \langle x_0, x_1(x_1^2 - x_2x_3), x_2(x_1^2 - x_2x_3) \rangle,$ $J_4 = \langle x_0, x_1x_2(x_1 + x_2), x_1x_2x_3 \rangle,$ $K_3 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_3, x_1x_2 \rangle.$
Estrato 4 (dim 8)	$J_2 = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2 \rangle,$ $K_2 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2x_3 \rangle,$ $K_6 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + x_0x_3 \rangle.$
Estrato 5 (dim 7)	$J_5 = \langle x_0, x_2x_1^2, x_3x_1^2 \rangle,$ $K_9 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 + x_0x_3 \rangle,$ $K_4 = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle,$ $K_5 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle.$
Estrato 6 (dim 6)	$K_7 = \langle x_0, x_1^3, x_1^2x_2 \rangle,$ $K_8 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 \rangle.$

(4.9)

Proposição 4.2.16. Considere o ideal J_0 do estrato 1 cuja órbita possui dimensão 11 e os ideais J_1 , K_1 e J_3 do estrato 2 cujas as órbitas tem dimensão 10 (cf. (4.9)). Temos as especializações: 1. $\mathcal{O}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{J_1}$, 2. $\mathcal{O}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{K_1}$ e 3. $\mathcal{O}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{J_3}$.

Demonstração. 1. Considere $\gamma(t) = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, tx_1^2 - x_2x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\langle x_0, tx_1^2 - x_2x_3 \rangle$ define uma cônica não singular e o ponto dado por $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ está fora do plano suporte da cônica. Logo para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_0}$ e $\gamma(0) = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_2x_3 \rangle \in \mathcal{O}_{J_1}$.

2. Considere $\gamma(t) = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0(x_0 + tx_3), f \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t)$ define uma cônica não singular e um ponto fora do plano da cônica e $\gamma(0) = K_1$.

3. Considere $\gamma(t) = \delta(t)^{sat}$ sendo

$$\delta(t) = \langle x_0, f \rangle \cdot \langle x_0 + tx_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_0^2 + tx_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, f(x_0 + tx_1), fx_2, fx_3 \rangle.$$

Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_0}$. Como $\delta(0) = \langle x_0^2, x_0x_2, x_0x_3, x_0x_1^2, fx_2, fx_3 \rangle$ segue que $\gamma(0) = \delta(0)^{sat} = \langle x_0, fx_2, fx_3 \rangle = J_3$.

□

A seguir um diagrama que exemplifica estas especializações, nele assim como nos demais a seguir o ponto preto mergulhado na cônica representa um ponto mergulhado espacial.

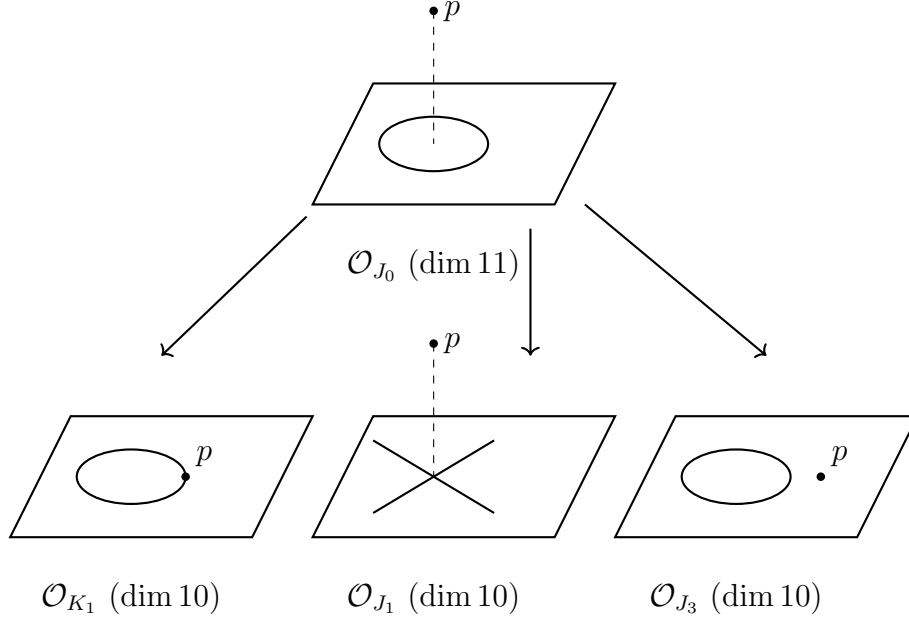


Figura 4.3: Especializações da órbita de dimensão para as de dimensão 10.

Proposição 4.2.17. Considere os ideais J_1 , K_1 e J_3 do estrato 2, e os ideais K_0 , J_4 e K_3 do estrato 3 que possuem órbitas de dimensão 9 e o ideal J_2 do estrato 4 cuja a órbita tem dimensão 8 (cf. (4.9)). Temos as especializações: 1. $\mathcal{O}_{K_1} \rightarrow \mathcal{O}_{K_3}$, 2. $\mathcal{O}_{K_1} \rightarrow \mathcal{O}_{K_0}$, 3. $\mathcal{O}_{J_1} \rightarrow \mathcal{O}_{K_3}$, 4. $\mathcal{O}_{J_1} \rightarrow \mathcal{O}_{J_4}$, 5. $\mathcal{O}_{J_1} \rightarrow \mathcal{O}_{J_2}$, 6. $\mathcal{O}_{J_3} \rightarrow \mathcal{O}_{K_0}$ e 7. $\mathcal{O}_{J_3} \rightarrow \mathcal{O}_{J_4}$.

Demonstração. 1. Tome $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, tx_1^2 - x_2x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, temos uma cônica não singular com um ponto mergulhado e $\gamma(0) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_2x_3 \rangle \in \mathcal{O}_{K_3}$, pois define um par de retas concorrentes com um ponto mergulhado em somente uma das retas.

2. Tome $\gamma(t) = \delta(t)^{sat}$, sendo $\delta(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1f, x_2f, x_0x_3 + tf \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_1}$ e para $t = 0$, temos $\delta(0) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1f, x_2f, x_0x_3 \rangle$. Logo $\gamma(0) = \delta(0)^{sat} = \langle x_0, x_1f, x_2f \rangle = K_0$.

3. Tome $\gamma(t) = \langle x_0x_1, x_0(x_0 + tx_2), x_0x_3, x_1x_2 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_1}$ e $\gamma(0) = K_3$.

4. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \cap \langle x_0 + tx_1, x_1 + x_2, x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_1}$ e $\gamma(0) = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \cap \langle x_0, x_1 + x_2, x_3 \rangle = J_4$.

5. Tome $\gamma(t) = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1(x_1 + tx_2) \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_1}$ e $\gamma(0) = J_2$.

6. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, fx_2, f(x_1 + tx_3) \rangle$. Para $t \neq 0$, temos $p_t = [0 : -t : 0 : 1] \notin \mathcal{C} = \mathcal{Z}(x_0, f)$, logo $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_3}$ e $\gamma(0) = K_0$.
7. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, (tx_3^2 - x_1x_2)(x_1 + x_2), (tx_3^2 - x_1x_2)x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) = \langle x_0, tx_3^2 - x_1x_2 \rangle \cap \langle x_0, x_1 + x_2, x_3 \rangle \in \mathcal{O}_{J_3}$ e $\gamma(0) = J_4$.

□

A figura a seguir exemplifica as especializações desse estrato, nela, assim como nas próximas, o ponto azul representa um ponto mergulhado planar na cônica.

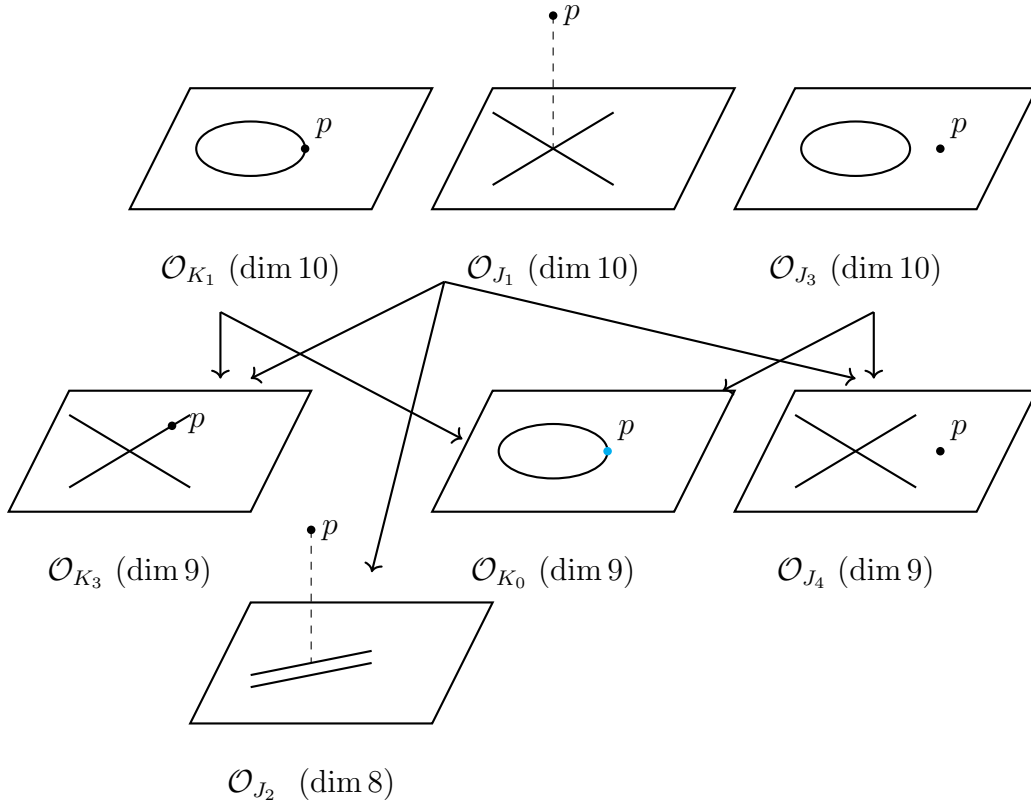


Figura 4.4: Especializações das órbitas de dimensão 10 para as de dimensão 9 ou 8.

Proposição 4.2.18. Considere os ideais K_0 , J_4 e K_3 do estrato 3 e os ideais K_2 e K_6 do estrato 4 que possuem órbitas de dimensão 8 (cf. (4.9)). Temos as especializações:

1. $\mathcal{O}_{K_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{K_6}$, 2. $\mathcal{O}_{K_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{K_2}$, 3. $\mathcal{O}_{J_4} \longrightarrow \mathcal{O}_{K_2}$ e 4. $\mathcal{O}_{K_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{K_2}$.

Demonstração. 1. Considere $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0(x_2 + tx_3), x_1x_2 + x_0x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_3}$ e $\gamma(0) = K_6$.

2. Considere $\gamma(t) = \delta(t)^{sat}$, sendo $\delta(t) = \langle x_0, x_1x_2 \rangle \cdot \langle x_0, x_1, x_3 \rangle + \langle x_2^2x_0 + tx_2^2x_1 \rangle$. Sabemos pela caracterização de K_3 (cf. Proposição 4.2.9) que para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_3}$ e $\gamma(0) = \delta(0)^{sat} = K_2$.

3. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, x_1x_2(x_1 + tx_2), x_1x_2x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, temos $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_4}$ e $\gamma(0) = K_2$.
4. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, x_1(tx_1^2 - x_2x_3), x_2(tx_1^2 - x_2x_3) \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_0}$ e $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{K_2}$.

□

A figura a seguir ilustra as especializações desse estrato, nela assim como nas próximas o ponto vermelho indica um ponto mergulhado espacial geral na cônica.

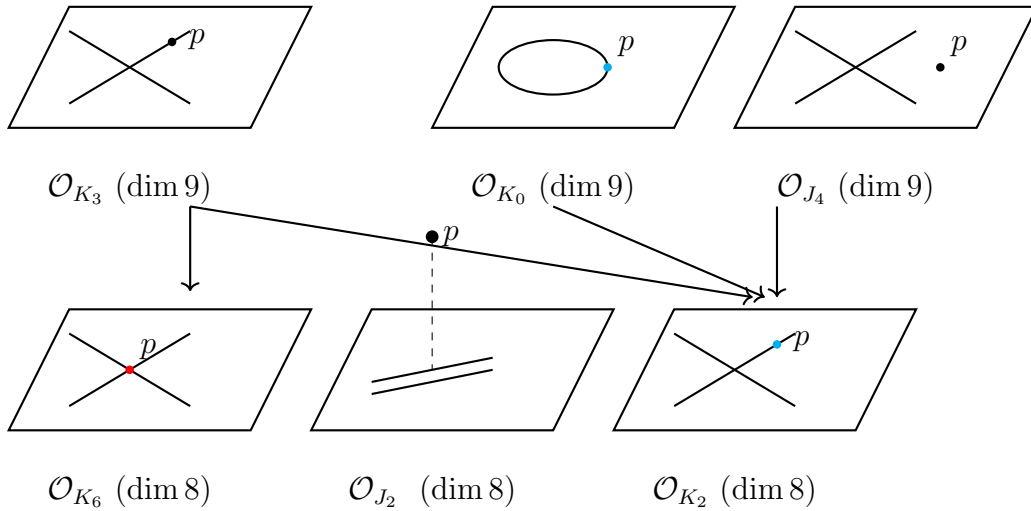


Figura 4.5: Especializações das órbitas de dimensão 9 para as de dimensão 8.

Proposição 4.2.19. Considere os ideais J_2 , K_2 e K_6 do estrato 4 e os ideais J_5 , K_9 , K_4 e K_5 do estrato 5 que possuem órbitas de dimensão 7 (cf. (4.9)). Temos as especializações: 1. $\mathcal{O}_{J_2} \rightarrow \mathcal{O}_{K_9}$, 2. $\mathcal{O}_{J_2} \rightarrow \mathcal{O}_{J_5}$, 3. $\mathcal{O}_{K_2} \rightarrow \mathcal{O}_{K_4}$, 4. $\mathcal{O}_{K_6} \rightarrow \mathcal{O}_{K_9}$, 5. $\mathcal{O}_{K_6} \rightarrow \mathcal{O}_{K_4}$ e 6. $\mathcal{O}_{K_6} \rightarrow \mathcal{O}_{K_5}$.

Demonstração. 1. Tome $\gamma(t) = \langle x_0x_1, x_0x_2, x_0(x_0 + tx_3), x_1^2 + x_2x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_2}$ e $\gamma(0) = K_9$.

2. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, x_1^2 \rangle \cap \langle x_0 + tx_1, x_2, x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_2}$ e $\gamma(0) = J_5$.

3. Tome $\gamma(t) = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1x_2(x_2 + tx_3) \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_2}$ e $\gamma(0) = K_4$.

4. Tome $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1(x_1 + tx_2) + x_0x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_6}$ e $\gamma(0) = K_9$.

5. Tome $\gamma(t) = \delta(t)^{sat}$, sendo

$$\delta(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, (x_1x_2)x_0, (x_1x_2)x_1, (x_1x_2)x_2, x_3^2x_0 + tx_1x_2x_3 \rangle.$$

Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_6}$ e $\gamma(0) = \delta(0)^{sat} = K_4$.

6. Tome $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + tx_0x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_6}$ e $\gamma(0) = K_5$. $\square$

A figura a seguir ilustra as especializações desse estrato.

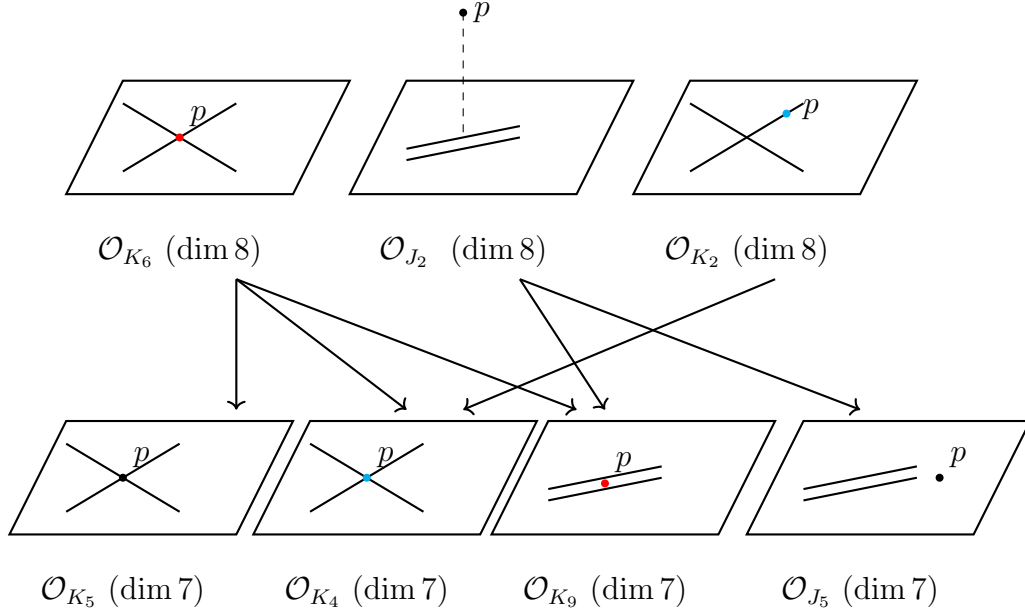


Figura 4.6: Especializações das órbitas de dimensão 8 para as de dimensão 7

Proposição 4.2.20. Considere os ideais J_5 , K_4 , K_5 e K_9 do estrato 5 e os ideais K_7 e K_8 do estrato 6 que possuem órbitas de dimensão 6 (cf. (4.9)). Temos as especializações: 1. $\mathcal{O}_{K_5} \rightarrow \mathcal{O}_{K_8}$, 2. $\mathcal{O}_{K_4} \rightarrow \mathcal{O}_{K_7}$, 3. $\mathcal{O}_{K_9} \rightarrow \mathcal{O}_{K_7}$, 4. $\mathcal{O}_{K_9} \rightarrow \mathcal{O}_{K_8}$ e 5. $\mathcal{O}_{J_5} \rightarrow \mathcal{O}_{K_7}$.

Demonstração. 1. Considere $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1(x_1 + tx_2) \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_5}$ e $\gamma(0) = K_8$.

2. Considere $\gamma(t) = \langle x_0, x_1^2x_2, x_1(x_1 + tx_2)^2 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_4}$ e $\gamma(0) = K_7$.

3. Considere $\gamma(t) = \delta(t)^{sat}$, sendo $\delta(t) = \langle x_0, x_1^2 \rangle \langle x_0, x_1, x_2 \rangle + \langle x_0x_3^2 + tx_1^2x_3 \rangle$. para $t \neq 0$, pela Proposição 4.2.11, temos $\gamma(t) = \delta(t)^{sat} \in \mathcal{O}_{K_9}$ e $\gamma(0) = \delta(0)^{sat} = K_7$.

4. Considere $\gamma(t) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2 + tx_0x_3 \rangle$. Para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{K_9}$ e $\gamma(0) = K_8$.

5. Considere $\gamma(t) = \langle x_0, x_2x_1^2, (x_1 + tx_3)x_1^2 \rangle$. para $t \neq 0$, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{J_5}$ e $\gamma(0) = K_7$. $\square$

A figura a seguir ilustra as especializações desse estrato.

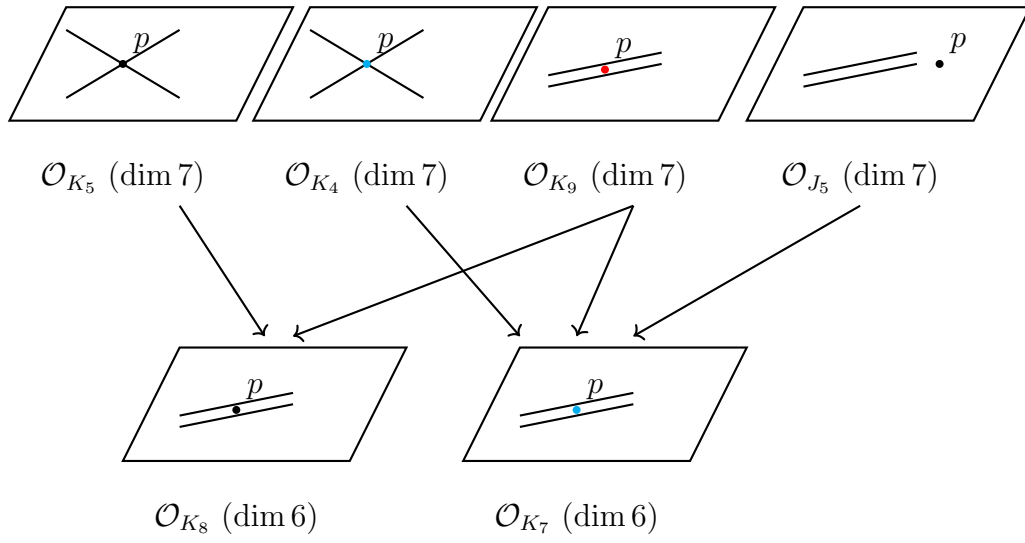


Figura 4.7: Especializações das órbitas de dimensão 7 para as de dimensão 6.

No próximo diagrama (Figura 4.8) exibimos as especializações obtidas para as 16 órbitas em $\mathcal{H}_2$.

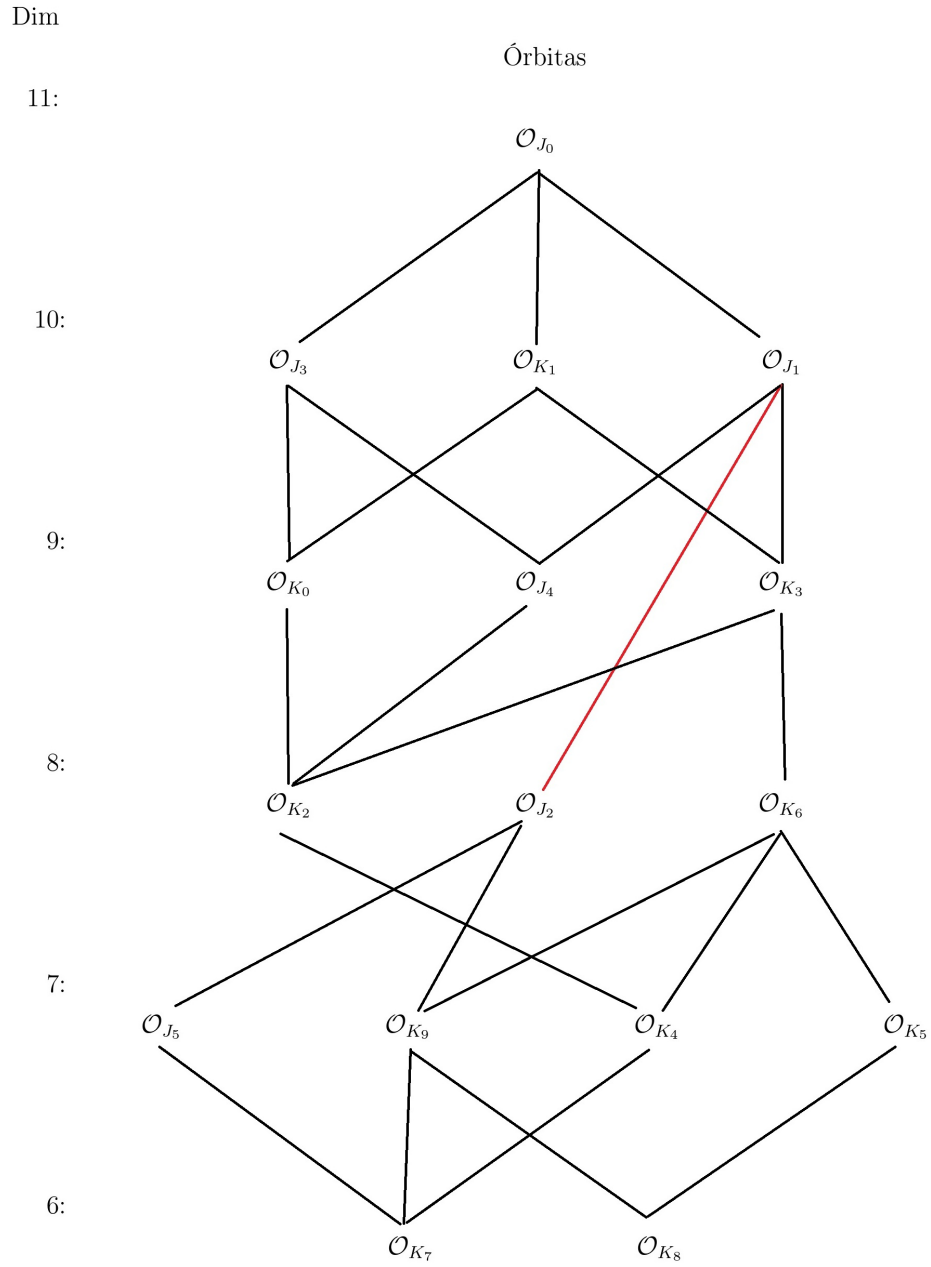


Figura 4.8: Especializações das órbitas em $\mathcal{H}_2$

Apêndice A

Cálculos utilizando Macaulay2

Traremos aqui os cálculos dos polinômios de Hilbert dos ideais trabalhados nos capítulos 3 e 4. O Macaulay2 é uma ferramenta gratuita e de código aberto, muito útil para o cálculo com objetos algébricos que demandariam muito esforço para serem realizados manualmente. Ao calcular o polinômio de Hilbert dos ideais, o Macaulay2 retorna por padrão o resultado em termos do polinômio de Hilbert do espaço projetivo, pois esta é uma boa forma de extrair informações geométricas a partir deste polinômio. Para contornar isso e obter o polinômio em função de uma variável usamos o comando `hilbertPolynomial(I, Projective=>false)`. Que retorna o polinômio de Hilbert do ideal I em função da variável padrão i . O Macaulay2 pode ser acessado em <https://macaulay2.com>.

A.0.1 Cálculo dos polinômios dos ideais do Teorema 3.2.2

Considere o ideal $I_0 = \langle x_0, x_1^2, x_1x_2 \rangle$.

```
i1 : R = QQ[x_0,x_1,x_2,x_3];
i2 : I_0 = ideal(x_0,x_1^2,x_1*x_2);
o2 : Ideal of R
i3 : hilbertPolynomial(I_0, Projective=>false)
o3 = i + 2
o3 : Q[i]
```

O processo é análogo para o ideal $I_1 = \langle x_0, x_1x_2, x_1x_3 \rangle$.

A.0.2 Cálculo dos polinômios dos ideais do Teorema 3.3.2

Considere o ideal $I_0 = \langle x_0, x_1^2 \rangle$.

```
i1 : R=QQ[x_0,x_1,x_2,x_3];
```

```
i2 : I_0=ideal(x_0,x_1^2);
o2 : Ideal of R
i3 : hilbertPolynomial(I_0, Projective=>false)
o3 : 2i + 1
o3 : Q[i]
```

Analogamente verifica-se que o polinômio de Hilbert dos ideais $I_1 = \langle x_0, x_1x_2 \rangle$ e $I_2 = \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$ é $2t + 1$.

A.0.3 Cálculo do polinômio de Hilbert dos ideais do capítulo 4

Considere o ideal $K_0 = \langle x_0, x_1(x_1^2 - x_2x_3), x_2(x_1^2 - x_2x_3) \rangle$.

```
i1 : R=QQ[x_0,x_1,x_2,x_3];
i2 : K_0=ideal(x_0,(x_1)*(x_1^2-x_2*x_3),(x_2)*(x_1^2-x_2*x_3));
o2 : Ideal of R
i3 : hilbertPolynomial(K_0, Projective=>false)
o3 = 2i + 2
o3 : Q[i]
```

Analogamente verifica-se que o polinômio de Hilbert dos demais ideais apresentados no capítulo 4 é $2t + 2$.

Apêndice B

Resultados sobre cônicas em $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^3$

B.1 Classificação das cônicas em $\mathbb{P}^2$

Traremos aqui resultados sobre cônicas em $\mathbb{P}^2$ que são usados em algumas demonstrações deste trabalho. Iniciamos com a classificação para as cônicas no plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2$ pela ação de $\text{Aut}(\mathbb{C}^3)$.

Proposição B.1.1. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $f \in S_2$ não nulo. Então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que exatamente uma das seguintes possibilidades é válida:

$$T_{\bullet}f = \begin{cases} x_0^2, \\ x_0^2 + x_1^2, \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Demonstração. Considere $f \in S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo de grau 2 não nulo. Temos duas possibilidades: f é redutível ou irredutível.

f é redutível Neste caso $f = L_1 \cdot L_2$ com $L_1, L_2 \in S_1$. A proposição 2.2.2 nos garante que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_{\bullet}(L_1 \cdot L_2) = x_0^2$ ou $T_{\bullet}(L_1 \cdot L_2) = x_0^2 + x_1^2$.

f é irredutível Assuma que $f = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$.

1. Suponha primeiro que $a_0 \neq 0$.

Neste caso, observe que

$$\begin{aligned} f &= a_0 \left(x_0 + \frac{a_1}{2a_0} x_1 \right)^2 - \frac{a_1^2 x_1^2}{4a_0} + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2 \\ f &= a_0 \left(x_0 + \frac{a_1}{2a_0} x_1 \right)^2 + \left(a_3 - \frac{a_1^2}{4a_0} \right) x_1^2 + x_2 (a_2 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2) \\ f &= (b_0 L_0)^2 + \alpha x_1^2 + M x_2 \text{ com } b_0 \in \mathbb{C} \text{ tal que } b_0^2 = a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

sendo $M = a_2x_0 + a_4x_1 + a_5x_2$, $\alpha = a_3 - \frac{a_1^2}{4a_0}$ e $L_0 = x_0 + \beta x_1$ com $\beta = \frac{a_1}{2a_0}$.

Agora, note que $\{b_0L_0, x_1, x_2\}$ é base de S_1 , logo o Corolário 2.2.3, nos garante que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet(b_0L_0) = x_0$ e $R_\bullet x_i = x_i$ para $i = 1, 2$. De fato,

$$b_0L_0 = b_0x_0 + b_0\beta x_1 \xrightarrow{R_\bullet} x_0 = b_0R_\bullet x_0 + b_0\beta x_1 \implies R_\bullet x_0 = \frac{x_0}{b_0} - \beta x_1$$

$$\text{e } R_\bullet M = a_2\left(\frac{x_0}{b_0} - \beta x_1\right) + a_4x_1 + a_5x_2 = c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{com } c_0 = \frac{a_2}{b_0}, c_1 = a_4 - \frac{a_2\beta}{b_0} \text{ e } c_2 = a_5.$$

Assim, obtemos

$$g := R_\bullet f = x_0^2 + \alpha x_1^2 + x_2(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2).$$

A seguir, vamos analisar as possibilidades: $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$.

Se $\alpha = 0$ então

$$\begin{aligned} g &= x_0^2 + x_2(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2) \\ &= \left(x_0 + \frac{c_0}{2}x_2\right)^2 - \frac{c_0^2}{4}x_2^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2 \\ &= \left(x_0 + \frac{c_0}{2}x_2\right)^2 + \left(c_2 - \frac{c_0^2}{4}\right)x_2^2 + c_1x_1x_2. \end{aligned}$$

Observe que $\{x_0 + \frac{c_0}{2}x_2, x_1, x_2\}$ é uma base de A_1 . Logo, a Proposição 2.2.2, nos garante que existe $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_1)_\bullet(x_0 + \frac{c_0}{2}x_2) = x_0$ e $(R_2)_\bullet x_i = x_i$ para $i = 1, 2$. Obtemos, assim

$$\begin{aligned} g_1 := (R_1)_\bullet g &= x_0^2 + \gamma x_2^2 + c_1x_1x_2 \\ &= x_0^2 + x_2(\gamma x_2 + c_1x_1) \quad \text{sendo } \gamma = c_2 - \frac{c_0^2}{4}. \end{aligned}$$

- Se $c_1 = 0$, então, $g_1 = x_0^2 + \gamma x_2^2$ é redutível¹, o que é um absurdo já que f é irredutível.
- Se $c_1 \neq 0$, então considere a base $\{c_1x_1 + \gamma x_2, x_0, x_2\}$ de S_1 . Assim, segue do Corolário 2.2.3 que existe $R_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_2)_\bullet(c_1x_1 + \gamma x_2) = x_1$ e $(R_2)_\bullet x_i = x_i$ para $i = 0, 2$. Logo, $g_2 := (R_2)_\bullet g_1 = x_0^2 + x_2x_1$. Por fim, sendo $\{x_0, x_1 + ix_2, x_1 - ix_2\}$ uma base de S_1 , novamente segue do Corolário

¹Basta escolher $\theta \in \mathbb{C}$ tal que $\gamma = -\theta^2$, com isso $g_1 = x_0^2 + \gamma x_2^2 = x_0^2 - \theta^2 x_2^2 = (x_0 - \theta x_2)(x_0 + \theta x_2)$ (de fato, todo polinômio homogêneo em duas variáveis de grau $d \geq 2$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ é redutível).

2.2.3 que existe $R_3 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_3)_\bullet x_0 = x_0$, $(R_3)_\bullet(x_1 + ix_2) = x_1$ e $(R_3)_\bullet(x_1 - ix_2) = x_2$. Assim, $g_3 := (R_3)_\bullet g_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Agora, se $\alpha \neq 0$ então considere $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha_1^2 = \alpha$. Assim,

$$g = R_\bullet f = x_0^2 + \alpha x_1^2 + M_1 x_2 \quad \text{com } M_1 = c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

pode ser representado na forma $g = R_\bullet f = x_0^2 + (\alpha_1 x_1)^2 + M_1 x_2$.

Visto que $\{x_0, \alpha_1 x_1, x_2\}$ é base de S_1 , então o Corolário 2.2.3 nos garante que existe $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_1)_\bullet(\alpha_1 x_1) = x_1$ e $(R_1)_\bullet x_i = x_i$, para $i = 0, 2$. Assim,

$$\begin{aligned} g_1 := (R_1)_\bullet g &= x_0^2 + x_1^2 + x_2 M_2 \quad \text{com } M_2 = d_0 x_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2. \\ &= (x_0 + \frac{d_0}{2} x_2)^2 + (x_1 + \frac{d_1}{2} x_2)^2 + (d_2 - \frac{d_0^2}{4} - \frac{d_1^2}{4}) x_2^2 \\ &= (x_0 + \frac{d_0}{2} x_2)^2 + (x_1 + \frac{d_1}{2} x_2)^2 + (\lambda_1 x_2)^2 \quad \text{com } \lambda_1^2 = d_2 - \frac{d_0^2}{4} - \frac{d_1^2}{4}. \end{aligned}$$

Observe que $\lambda_1 \neq 0$ visto que f é irredutível. Assim, $\{x_0 + \frac{d_0}{2} x_2, x_1 + \frac{d_1}{2} x_2, \lambda_1 x_2\}$ é uma base para S_1 , o que nos permite escolher $R_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_2)_\bullet(x_0 + \frac{d_0}{2} x_2) = x_0$, $(R_2)_\bullet(x_1 + \frac{d_1}{2} x_2) = x_1$ e $(R_2)_\bullet(\lambda_1 x_2) = x_2$. Portanto, $g_2 := (R_2)_\bullet g_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Em resumo, se o coeficiente de x_0^2 é não nulo, podemos obter $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Sendo assim, basta analisar o seguinte caso:

2. Suponha que $a_0 = 0$.

Neste caso, $f = a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2$. Note que se a_3 ou a_5 são não nulos, basta considerar $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet(x_i) = x_0$ para $i = 1$ se $a_3 \neq 0$ (resp. $i = 2$ se $a_5 \neq 0$) de modo que apareça o termo em x_0^2 e assim proceder como no caso (1). De fato, se $a_3 \neq 0$ então considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet x_1 = x_0$, $T_\bullet x_0 = x_2$ e $T_\bullet x_2 = x_1$. Daí, temos que $T_\bullet f = a_1 x_0 x_2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_0^2 + a_4 x_0 x_1 + a_5 x_1^2$, sendo $a_3 \neq 0$ o resultado segue do caso (1).

Por outro lado, se $a_3 = a_5 = 0$, então $f = a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_4 x_1 x_2$. Sendo f irredutível segue que $a_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 4\}$. A seguir considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet x_0 = x_0$, $T_\bullet x_1 = x_0 + x_1$ e $T_\bullet x_2 = x_2$. Logo, $T_\bullet f = a_1 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + (a_2 + a_4) x_0 x_2 + a_4 x_1 x_2$ com $a_1 \neq 0$. Novamente, o resultado segue do caso (1).

□

Exemplo B.1.2. Considere $f = x_2^2 - x_0x_1$ e $g = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet g = f$. Basta considerar R onde $R_\bullet x_0 = x_0 + ix_1$, $R_\bullet x_1 = -x_0 + ix_1$ e $R_\bullet x_2 = x_2$. Assim,

$$R_\bullet(x_2^2 - x_0x_1) = R_\bullet(x_2^2) - R_\bullet(x_0x_1) = x_2^2 - (x_0 + ix_1)(-x_0 + ix_1) = x_2^2 + x_1^2 + x_0^2.$$

Proposição B.1.3. Considere $f = x_2^2 - x_1x_0 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbb{P}^2$. Então $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $[a : b] \mapsto [a^2 : b^2 : ab]$ é uma bijeção.

Demonstração. Temos

- ψ está bem definida.

Para $[a : b] \in \mathbb{P}^1$, temos $(a, b) \neq (0, 0)$. Então $(a^2, b^2, ab) \neq (0, 0, 0)$ e

$$f(a^2, b^2, ab) = (ab)^2 - b^2 \cdot a^2 = 0 \implies [a^2 : b^2 : ab] \in \mathcal{Z}(f) = \mathcal{C}.$$

- ψ é injetiva.

Considere $[a : b], [c : d] \in \mathbb{P}^1$ tais que $[a^2 : b^2 : ab] = [c^2 : d^2 : cd]$. Assim, existe um $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{C}$ tal que

$$a^2 = \lambda c^2, \quad b^2 = \lambda d^2 \quad \text{e} \quad ab = \lambda cd. \quad (\text{B.2})$$

Temos duas possibilidades: (i) $a = 0$ ou (ii) $a \neq 0$.

(i) Se $a = 0$ então segue de (B.2) que $c = 0$. O que implica em $b \cdot d \neq 0$. Logo, $[0 : b] = [0 : 1] = [0 : d]$.

(ii) Se $a \neq 0$ então $[a : b] = [a^2 : ab] \stackrel{(\text{B.2})}{=} [\lambda c^2 : \lambda cd] = [c : d]$.

- ψ é sobrejetiva.

Considere $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathcal{C}$. Logo, $a_2^2 = a_0a_1$. A seguir vamos analisar as possibilidades: (i) $a_0 = 0$ ou (ii) $a_0 \neq 0$.

(i) Se $a_0 = 0$ então $a_2 = 0$ e $p = [0 : 1 : 0] = \psi([0 : 1])$.

(ii) Se $a_0 \neq 0$ então $p = [a_0 : a_1 : a_2] = [a_0^2 : a_0a_1 : a_0a_2] = [a_0^2 : a_2^2 : a_0a_2] = \psi([a_0 : a_2])$.

□

Lema B.1.4. Considere $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbb{P}^2$, com $f = x_2^2 - x_1x_0$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ verifica-se que:

$$\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \iff \text{existem } [a : b], [c : d] \in \mathbb{P}^1 \text{ distintos, tais que}$$

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} -d^2 & -c^2 & 2cd \\ -b^2 & -a^2 & 2ab \\ -bd & -ac & ad + bc \end{bmatrix},$$

possui determinante 1 e define φ .

Demonstração. ($\implies$) Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Considere $p_0 = [0 : 1 : 0]$ e $q_0 = [1 : 0 : 0]$ pontos distintos em $\mathcal{C}$, $T_{p_0}\mathcal{C} = \mathcal{Z}(x_0)$ e $T_{q_0}\mathcal{C} = \mathcal{Z}(x_1)$ respectivas retas tangentes e a reta secante $L_{p_0,q_0} = \mathcal{Z}(x_2)$, conforme ilustra a Figura (B.1)

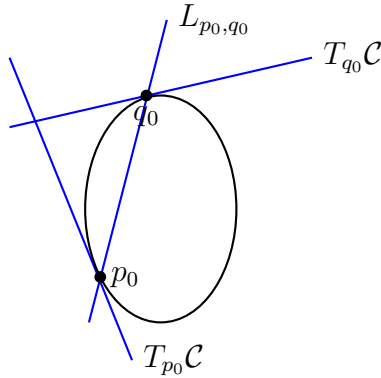


Figura B.1: Retas tangentes a $\mathcal{C}$ em p_0 e q_0 .

Sabemos pela Proposição B.1.3 que existem únicos $[a : b], [c : d] \in \mathbb{P}^1$ tais que $\varphi(p_0) = p = \psi([a : b])$ e $\varphi(q_0) = q = \psi([c : d])$. Assim, verifica-se que $T_\bullet : [x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_0, x_1, x_2]$ satisfaz $T_\bullet x_0 = L_p$, $T_\bullet x_1 = L_q$ e $T_\bullet x_2 = L_{p,q}$, visto que

$$\begin{cases} \varphi(T_{q_0}(\mathcal{C})) = \varphi(\mathcal{Z}(x_1)) = \mathcal{Z}(T_\bullet x_1) = T_q \mathcal{C} = \mathcal{Z}(L_q), \\ \varphi(T_{p_0}(\mathcal{C})) = \varphi(\mathcal{Z}(x_0)) = \mathcal{Z}(T_\bullet x_0) = T_p \mathcal{C} = \mathcal{Z}(L_p). \end{cases}$$

Note que

$$\begin{cases} L_q = -b^2 x_0 - a^2 x_1 + 2abx_2 & \text{pois } q = [a^2 : b^2 : ab] \quad \text{e} \quad \nabla_q f = [-b^2, -a^2, 2ab], \\ L_p = -d^2 x_0 - c^2 x_1 + 2cdx_2 & \text{pois } p = [c^2 : d^2 : cd] \quad \text{e} \quad \nabla_p f = [-d^2, -c^2, 2cd]. \end{cases}$$

Além disso, $L_{p,q} = -bdx_0 - acx_1 + (ad + bc)x_2$. Com isso, obtemos a matriz M_φ que define $T^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Note que podemos escolher $[a : b]$ e $[c : d]$ de modo que $\det M_\varphi = 1$.

($\impliedby$) Considere a matriz M_φ . Note que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ se, e somente se $\mathcal{C} = \varphi^{-1}(\mathcal{C})$. Assim,

dado um ponto r qualquer na cônica, ele será da forma $[x^2 : y^2 : xy]$. Aplicando T^{-1} a esse ponto, i.e, multiplicando a matriz M_φ por r , obtemos

$$M \cdot r = [-(dx - cy)^2 : -(bx - ay)^2 : (bx - ay)(cy - dx)] \in \mathcal{C}$$

Logo $\varphi^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e consequentemente $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. □

Proposição B.1.5. Seja

$$\chi = \{M_\varphi \in M_3(\mathbb{C}) \mid \varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \text{ e } \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

Então $\dim \chi = 4$.

Demonstração. Note que para calcular a dimensão de χ é necessário determinar o ideal das relações que define χ em $M_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^9$. Mais precisamente seja $\tilde{\chi} \subset \mathbb{C}^9$ a imagem de χ pelo isomorfismo $M_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^9$. Assim, obtemos $I_{\tilde{\chi}} \subseteq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_9]$. Portanto, $\dim \chi = \dim \tilde{\chi} = \dim \frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_9]}{\mathfrak{I}_{\tilde{\chi}}}$. Utilizamos o Macaulay2 para realizar tal cálculo. Segue o procedimento:

```
R = QQ[a,b,c,d,y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,y8,y9, MonomialOrder => Eliminate 4]
```

```
-- Ideal que define a parametrização
```

```
J = ideal(y1 + b^2, y2 + a^2, y3 - 2*a*b, y4 + d^2, y5 + c^2,
y6 - 2*c*d, y7 + b*d, y8 - a*c, y9 - (a*d + b*c))
```

```
-- Eliminação: ideal das relações
```

```
IX = eliminate({a,b,c,d}, J)
```

```
-- Calculando dimensao de X
```

```
K = IX + ideal(a,b,c,d)
```

```
dim R/K -- 4
```

Portanto, $\dim \chi = 4$. □

Proposição B.1.6. Considere a cônica $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(x_2^2 - x_0x_1) \subseteq \mathbb{P}^2$ e $p = [0 : 0 : 1]$. Seja

$$Y = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \mid \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \text{ e } \varphi(p) = p\}.$$

Então $\dim Y = 2$.

Demonstração. Considere $\varphi \in Y$. Segue da Proposição B.1.5 que existem únicos

$[a : b], [c : d] \in \mathbb{P}^1$ distintos de modo que

$$M = \begin{bmatrix} -d^2 & -c^2 & 2cd \\ -b^2 & -a^2 & 2ab \\ -bd & -ac & ad + bc \end{bmatrix}$$

possui determinante igual a 1 e define φ . Note que:

$$\begin{aligned} \varphi(p) = p &\iff [2ab : 2cd : ad + bc] = [0 : 0 : 1] \\ &\iff ab = cd = 0 \quad \text{e} \quad ad + bc \neq 0 \\ &\iff a = d = 0 \quad \text{ou} \quad b = c = 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que analisar as possibilidades: (i) $b = c = 0$ e (ii) $a = d = 0$.

(i) Neste caso,

$$M = \begin{bmatrix} -d^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & ad \end{bmatrix}.$$

Logo $y_1 = -d^2$, $y_5 = -a^2$, $y_9 = ad$ e $y_j = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, 9\} - \{1, 5, 9\}$. Assim, o ideal das relações que define Y , é dado por

$$I_Y = \langle y_2, y_3, y_4, y_6, y_7, y_8, y_9^2 - y_1 y_5 \rangle.$$

Além disso,

$$\frac{\mathbb{C}[y_1, \dots, y_9]}{I_Y} \cong \frac{\mathbb{C}[y_1, y_5, y_9]}{\langle y_9^2 - y_1 y_5 \rangle}.$$

Portanto, $\dim Y = 3 - 1 = 2$.

(ii) Neste caso

$$M = \begin{bmatrix} -0 & -c^2 & 0 \\ -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bc \end{bmatrix}.$$

Por um raciocínio análogo ao caso (i), segue que $\dim Y = 2$. □

B.2 Descrição da órbita do ideal que parametriza cônicas não singulares em $\mathbb{P}^3$

No capítulo 2, demos a definição de ponto singular, no caso de hipersuperfícies, ou seja, subesquemas fechados cujo ideal de definição é principal. Os resultados a seguir, nos colocam perante a definição de cônica não singular em $\mathbb{P}^3$, via posto da jacobiano de

seu ideal de definição. Na Proposição B.2.2 vamos apresentar uma descrição da órbita associada ao ideal $I_2 = \langle x_0, x_1^2 - x_2x_3 \rangle$ que é composta de cônicas não singulares, mas antes introduzimos um lema que nos auxiliará na demonstração de tal proposição.

Lema B.2.1. Considere $I_2 = \langle x_0, f \rangle$ com $f = x_1^2 - x_2x_3$ e $J = \langle h, g \rangle$, $h \in S_1$ não nulo e $g \in S_2 - hS_1$. Seja $\text{Jac}(J)$ a matriz jacobiana de h e g . Então verifica-se que:

$$J \in \mathcal{O}_{I_2} \iff \text{posto}(\text{Jac}(J)(p)) = 2, \forall p \in \mathcal{Z}(J) \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Demonstração. ($\implies$) Dado $J \in \mathcal{O}_{I_2}$ então $J = T_\bullet I_2$ para algum $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$, logo $J = \langle T_\bullet x_0, T_\bullet f \rangle$.

Afirmção: O posto de $\text{Jac}(J)(p)$ é 2 para todo $p \in \mathcal{Z}(J)$.

Temos que

$$\text{Jac}(I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 & -x_3 & -x_2 \end{bmatrix}.$$

Observe que o posto $\text{Jac}(I_2) = 1$ se, e somente se $x_i = 0$ com $i = 1, 2, 3$. Como $[1 : 0 : 0 : 0] \notin \mathcal{Z}(I_2)$, concluímos que posto de $\text{Jac}(I_2)(p)$ é 2 para todo $p \in \mathcal{Z}(I_2)$. Além disso, $\nabla T_\bullet x_0 = \nabla x_0[T^{-1}]$ e $\nabla T_\bullet f = \nabla f[T^{-1}]$. Assim,

$$\{\nabla x_0(p), \nabla f(p)\} \text{ é L.I. } \forall p \in \mathcal{Z}(I_2) \iff \{\nabla T_\bullet x_0(q), \nabla T_\bullet f(q)\} \text{ é L.I. } \forall q \in \mathcal{Z}(J).$$

($\impliedby$) Considere $J = \langle h, g \rangle$ tal que o posto de $\text{Jac}(J)(q)$ é 2 para todo $q \in \mathcal{Z}(J)$. A seguir considere $T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $(T_1)_\bullet h = x_3$. Assim obtemos o ideal

$$J_1 = (T_1)_\bullet J = \langle x_3, (T_1)_\bullet g \rangle.$$

Dessa forma, $J_1 = \langle x_3, g_1 \rangle$ com $g_1 \in S_2 - x_3S_1$. Segue que

$$\text{Jac}(J_1)(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_0}(p) & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(p) & 0 \end{bmatrix}$$

tem posto 2 para todo $p \in \mathcal{Z}(J_1) \subseteq \mathbb{P}^3$. Note que $g_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ define uma cônica não singular em $\mathbb{P}^2$. Assim, pela Proposição B.1.1 no Apêndice B, sabemos que existe $\tilde{R} \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $\tilde{R}_\bullet g_1 = x_2^2 - x_1x_0$.

A seguir considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ determinada por $R_\bullet x_i = \tilde{R}_\bullet x_i$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ e $R_\bullet x_3 = x_3$. Portanto

$$R_\bullet J_1 = \langle R_\bullet x_3, R_\bullet g_1 \rangle = \langle x_3, \tilde{R}_\bullet g_1 \rangle = \langle x_3, x_2^2 - x_1x_0 \rangle.$$

Para concluir, considere $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ onde

$$(R_1)_\bullet x_0 = x_2, (R_1)_\bullet x_1 = x_3, (R_1)_\bullet x_2 = x_1 \text{ e } (R_1)_\bullet x_3 = x_0.$$

Logo, $(R_1 \circ R)_\bullet J_1 = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle$, ou seja existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ onde $T_\bullet J = I_2$, de onde concluímos que $J \in \mathcal{O}_{I_2}$. $\square$

Proposição B.2.2. Seja Γ_2 constituído por todos os conjuntos algébricos $D \subseteq \mathbb{P}^3$ tais que

$$\begin{cases} \mathfrak{I}(D) = \langle h, g \rangle \text{ com } h \in S_1 \text{ não nulo, } g \in S_2 - hS_1, \\ \text{posto}(\text{Jac}(\mathfrak{I}(D))(p)) = 2 \ \forall p \in D. \end{cases}$$

Considere $\Omega_2 : \mathcal{O}_{I_2} \rightarrow \Gamma_2$ dada por $\Omega_2(\varphi_\bullet I_2) = \varphi(\mathcal{C})$, sendo $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(I_2) \subseteq \mathbb{P}^3$. Verifica-se que Ω_2 é uma bijeção.

Demonstração. Temos $I_2 = \langle x_0, x_1^2 - x_2 x_3 \rangle$ e $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(I_2) \subseteq \mathbb{P}^3$.

- Ω_2 está bem definida. Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Observe que

$$\varphi(\mathcal{C}) = \varphi(\mathcal{Z}(x_0, f)) = \mathcal{Z}(T_\bullet x_0, T_\bullet f).$$

Assim,

$$\mathfrak{I}(\varphi(\mathcal{C})) = \mathfrak{I}(\mathcal{Z}(T_\bullet x_0, T_\bullet f)) = \langle T_\bullet x_0, T_\bullet f \rangle = T_\bullet I_2.$$

Segue do Lema B.2.1 que o posto de $\text{Jac}(T_\bullet I_2)(p)$ é 2 para todo $p \in \varphi(\mathcal{C})$. Além disso, $T_\bullet x_0 \in S_1$ é não nulo e $T_\bullet f \in S_2 - T_\bullet x_0 S_1$. Portanto $\varphi(\mathcal{C}) \in \Gamma_2$.

- Ω_2 é sobrejetiva.

Seja $\mathcal{D} \in \Gamma_2$. Assim, $\mathcal{D}$ é um conjunto algébrico em $\mathbb{P}^3$ tal que $\mathfrak{I}(\mathcal{D}) = \langle h, g \rangle$ com $h \in S_1$ não nulo, $g \in S_2 - hS_1$, e posto de $\text{Jac}(\mathfrak{I}(\mathcal{D}))(p)$ é 2 para todo $p \in \mathcal{D}$. Segue do Lema B.2.1 que $\mathfrak{I}(\mathcal{D}) \in \mathcal{O}_{I_2}$. Assim, existe φ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet I_2 = \mathfrak{I}(\mathcal{D})$. Logo $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{Z}(T_\bullet I_2) = \mathcal{D}$.

- Ω_2 é injetiva.

Dados $\varphi_\bullet I_2, \psi_\bullet I_2 \in \mathcal{O}_{I_2}$ tais que $\varphi(\mathcal{C}) = \psi(\mathcal{C})$. A partir do Lema 3.3.1, concluímos que $\psi^{-1} \circ \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Assim,

$$\psi^{-1} \circ \varphi \in E_{I_2} \implies \varphi_\bullet I_2 = \psi_\bullet I_2.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Altman, A. B.; Kleiman, S. L. *A term of commutative algebra*. [S.l.]: Worldwide Center of Mathematics, 2013.
- [2] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1969.
- [3] Cabral, E. S. *Pontos fechados no esquema de Hilbert de curvas $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$* . 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2023.
- [4] Eisenbud, D.; Harris, J. *3264 and all that: intersection theory in algebraic geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [5] Eisenbud, D.; Harris, J. *The geometry of schemes*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [6] Gotzmann, G. *Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes*. Mathematische Zeitschrift, v. 158, n. 1, p. 61–70, 1978.
- [7] Green, M. *Restrictions of linear series to hyperplanes, and some results of Macaulay and Gotzmann*. In: Ballico, E.; Ciliberto, C. (ed.). Algebraic curves and projective geometry. Berlin: Springer, 1989. p. 76–86.
- [8] Grothendieck, A. *Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique IV: les schémas de Hilbert*. Séminaire Bourbaki, v. 6, exp. 221, p. 249–276, 1960–1961.
- [9] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [10] Harris, J.; Eisenbud, D. *Curves in projective space*. Séminaire de Mathématiques Supérieures, v. 88, Montreal: Les Presses de l’Université de Montréal, 1982.
- [11] Herzog, J.; Popescu, D. *Hilbert functions and generic forms*. Journal of Pure and Applied Algebra, 1998.

- [12] Lee, A. *The Hilbert schemes of curves in $\mathbb{P}^3$* . 2000. Undergraduate Honors Thesis – Harvard University, Cambridge, 2000.
- [13] Lima, E. S. *Classificação de retas e planos no espaço projetivo das cônicas e algumas aplicações*. 2025. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2025.
- [14] Mumford, D. *Lectures on curves on an algebraic surface*. Princeton: Princeton University Press, 1966.
- [15] Piene, R.; Schlessinger, M. *On the Hilbert Scheme Compactification of the Space of Twisted Cubics*. American Journal of Mathematics, v. 107, n. 4, p. 761–774, Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1985.
- [16] Rojas, J.; Andria, S.; Manguiera, W. *Contando retas em superfícies no espaço projetivo*. Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
- [17] Vasconcelos, W. V. *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.