UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A Compreensão da Razão Áurea por estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental: Um Estudo a Partir da Construção do Retângulo Áureo e da Espiral de Fibonacci.

PEDRO FERREIRA DA SILVA

João Pessoa - PB
2025

PEDRO FERREIRA DA SILVA

A Compreensão da Razão Áurea por estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental: Um Estudo a Partir da Construção do Retângulo Áureo e da Espiral de Fibonacci.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Edison Thadeu Bichara Dantas

João Pessoa - PB
2025

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586c Silva, Pedro Ferreira da.
A compreensão da razão áurea por estudantes do 9° ano do ensino fundamental : Um estudo a partir da construção do retângulo áureo e da sequência de Fibonacci. / Pedro Ferreira da Silva. - João Pessoa, 2025.
45 p. : il.

Orientação: Edison Thadeu Bichara Dantas.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Razão áurea. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Estruturação cognitiva. 4. Ensino de matemática. I. Dantas, Edison Thadeu Bichara. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

PEDRO FERREIRA DA SILVA

A Compreensão da Razão Áurea por estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental: Um Estudo a Partir da Construção do Retângulo Áureo e da Espiral de Fibonacci.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Prof. Me. Edison Thadeu Bichara Dantas
Orientador

Prof. Dr. Vinicius Martins Varella
Examinador

Prof. Me. João Batista Alves Parente
Examinador

João Pessoa - PB
2025

Digitalizado com CamScanner

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por me conceder saúde, pela sua misericórdia para comigo, ajudando-me a permanecer em pé, em busca dos meus objetivos. Ele sempre me impulsiona em meios as dificuldades e me ensina a olhar para frente, mesmo nas jornadas pesadas de trabalho e horas de estudos. Ele sempre foi a minha rocha para superar os desafios do dia a dia. Pela sua bondade, avanço para uma nova fase da minha vida. Estou muito grato a meu Deus por tudo.

À minha esposa Adriana, pelo constante apoio ao longo desta jornada, por suas orações, palavras de incentivo e por compartilhar comigo a realização deste sonho, cultivado desde a infância. Minha sincera gratidão.

Aos meus filhos, Pedro Luccas e Letícia Naara, pelo carinho e torcida incondicional. Vocês sempre estiveram ao meu lado, acreditando em mim e me motivando a seguir em frente.

Ao meu irmão, Antonio Ferreira da Silva, professor de Matemática, cuja trajetória sempre foi uma grande fonte de inspiração, meu reconhecimento pelo apoio e conselhos que recebi. Sua dedicação à docência despertou em mim o desejo de seguir pelo mesmo caminho. As lições transmitidas ao longo do tempo permanecem como base sólida na construção de minha trajetória.

Aos meus pais Celsa Feliciana e Severino Ferreira, em memória. Eles sonhavam em ver mais um filho formado, meu reconhecimento pelos conselhos, ensinamentos e tudo que fizeram por mim.

Ao Prof. Me. Edison Thadeu Bichara Dantas, agradeço por ter aceitado ser meu orientador, pelo incentivo constante e, sobretudo, pela inspiração durante a construção deste trabalho. Minha sincera gratidão pela valiosa contribuição para a concretização desta etapa.

Ao Prof. Dr. Vinicius Martins Varella e ao Prof. Me. João Batista Alves Parente pela valiosa participação na banca, cujas contribuições enriqueceram esta pesquisa e minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. A colaboração e o apoio de cada um foram essenciais. Muito obrigado a todos.

Resumo

Este estudo teve como objetivo investigar como estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental compreendem o significado da razão áurea a partir da aplicação de um procedimento didático envolvendo a construção do retângulo áureo e da espiral de Fibonacci, realizado com 25 estudantes de uma escola da rede municipal de João Pessoa. A intervenção ocorreu em dois momentos, uma aula teórica e uma prática, seguidos da aplicação de um teste. Especificamente, buscou-se: examinar como os estudantes articulam diferentes registros de representação semiótica, linguístico, simbólico, numérico e geométrico na compreensão do conceito; e descrever o percurso metodológico adotado na pesquisa, destacando os procedimentos de aplicação do teste e de desenvolvimento das atividades práticas. As respostas foram examinadas a partir dos níveis de estruturação cognitiva da teoria dos registros de representação semiótica de Duval(2012), que vão desde a ausência de compreensão conceitual (nível 0) até a mobilização e articulação de diferentes registros (nível 2). Os resultados revelaram predominância de produções no nível 1, indicando compreensão ainda parcial, mas também evidenciando o potencial do procedimento em promover avanços na aprendizagem. Esses achados possibilitam compreender o estágio de cada estudante e apontam caminhos para intervenções pedagógicas mais ajustadas, favorecendo uma aprendizagem significativa e integrada.

Palavras-chave: Razão áurea; Ensino de Matemática; Estruturação cognitiva; Procedimento didático.

Abstract

This study aimed to investigate how 9th-grade students from elementary school understand the meaning of the golden ratio through the implementation of a didactic procedure involving the construction of the golden rectangle and the Fibonacci spiral. The activity was carried out with 25 students from a public school in the municipal network of João Pessoa. The intervention took place in two stages: a theoretical lesson and a practical one, followed by the administration of a test. Specifically, the study sought to examine how students articulate different registers of semiotic representation, linguistic, symbolic, numerical, and geometric, in their understanding of the concept, and to describe the methodological approach adopted in the research, highlighting the test application procedures and the development of the practical activities. The responses were analyzed based on the levels of cognitive structuring proposed by Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, which range from the absence of conceptual understanding (level 0) to the mobilization and articulation of different registers (level 2). The results revealed a predominance of productions at level one, indicating a still partial understanding, but also showing the potential of the procedure to foster learning progress. These findings make it possible to understand each student's stage of development and point to paths for more targeted pedagogical interventions, thus promoting meaningful and integrated learning.

Keywords: Golden Ratio; Mathematics Education; Cognitive Structuring; Didactic Procedure.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação da proporção áurea sobre uma rosa vermelha 13
Figura 2 – Representação da Via Láctea sobreposta à espiral da proporção áurea . 14
Figura 3 – Representação geométrica da razão áurea 14
Figura 4 – Retângulo áureo 18
Figura 5 – Estudante de Nível 0 - Questão 1 33
Figura 6 – Estudante de Nível 0 - Questão 2 33
Figura 7 – Estudante de Nível 0 - Questão 3 33
Figura 8 – Estudante de Nível 0 - Questão 4 34
Figura 9 – Estudante de Nível 0 - Questão 5 34
Figura 10 – Estudante de Nível 0 - Questão 6 35
Figura 11 – Estudante de Nível 1 - Questão 1 36
Figura 12 – Estudante de Nível 1 - Questão 2 37
Figura 13 – Estudante de Nível 1 - Questão 3 37
Figura 14 – Estudante de Nível 1 - Questão 4 38
Figura 15 – Estudante de Nível 1 - Questão 5 38
Figura 16 – Estudante de Nível 1 - Questão 6 39

Sumário

1 INTRODUÇÃO 9

2 OBJETIVOS DA PESQUISA 11
2.1 Objetivo Geral 11
2.2 Objetivos específicos 11

3 RECORTE TEÓRICO 12
3.1 Breve Relato histórico sobre a razão áurea 12
3.2 A razão áurea na natureza 13
3.3 A razão áurea na matemática 13
3.4 Obtendo o Número de Ouro 14
3.5 Escrevendo de forma algébrica 15
3.6 Propriedades do número de ouro 16
3.7 Retângulo Áureo 18
3.7.1 Sequência de Fibonacci 19
3.8 A Relação entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci 19
3.9 A Construção do Significado em Matemática: Aprendizagem e a Teoria dos Registros de Representação de Duval 21
3.9.1 O Papel da Construção e do Registro Figural na Compreensão da Geometria 23
3.9.2 O Paradoxo Cognitivo e a Necessidade da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) 25

4 MÉTODO DA PESQUISA 29
4.1 Sujeitos pesquisados 29
4.2 Instrumento de coleta de dados e materiais utilizados 29
4.3 Procedimento da pesquisa 30

5 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS 32

6 CONCLUSÃO 42

REFERÊNCIAS 43

1 Introdução

A razão áurea, também conhecida como número de ouro, é um conceito matemático que, ao longo da história, tem despertado interesse pela sua presença em diferentes contextos. Desde a organização de elementos na natureza até sua aplicação em construções geométricas, obras de arte e projetos arquitetônicos, essa proporção revela uma conexão singular entre estética e matemática. Tal característica a torna um tema fértil para o ensino, possibilitando a articulação entre saberes distintos e favorecendo o desenvolvimento do pensamento crítico e da interdisciplinaridade.

Nesse cenário, investigar como estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental compreendem o significado da razão áurea a partir da construção do retângulo áureo e da espiral de Fibonacci mostra-se relevante. A escolha dessa temática não se limita apenas ao aspecto matemático, mas também ao potencial pedagógico de explorar registros visuais e práticos que auxiliam na construção de conceitos abstratos. Ao tomar como referência a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond (Duval, 2012).

PretenFde-se examinar a forma como os estudantes articulam diferentes registros de representação semiótica, linguístico, simbólico, numérico e geométrico , na compreensão do conceito de razão áurea; e descrever o percurso metodológico adotado na pesquisa, destacando os procedimentos de aplicação do teste e de desenvolvimento das atividades práticas.

A relevância deste estudo reside justamente em contribuir para o ensino da matemática, apontando caminhos que valorizem a aprendizagem significativa e a integração entre múltiplas formas de representação. Ao propor atividades que envolvem o uso de instrumentos geométricos na construção do retângulo áureo e da espiral de Fibonacci, busca-se compreender em que medida tais práticas favorecem a consolidação do conceito, além de identificar avanços e desafios no processo de aprendizagem.

Dessa forma, este trabalho está estruturado em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta a introdução, na qual se expõem o tema, a relevância do estudo e os fundamentos teóricos que o sustentam. Nesse momento inicial, delineiam-se também as motivações que orientaram a escolha da razão áurea como objeto de investigação e sua relação com a aprendizagem matemática mediada por diferentes registros de representação.

O segundo capítulo explicita os objetivos da pesquisa, distinguindo o propósito geral e os objetivos específicos que nortearam o desenvolvimento do estudo. Essa delimitação permite compreender a direção metodológica adotada e os aspectos que se pretendeu observar ao longo do processo investigativo.

O terceiro capítulo, intitulado Recorte Teórico, reúne os principais referenciais teóricos que embasam a pesquisa. Nele, discute-se a razão áurea em suas dimensões

histórica, natural, matemática e geométrica, bem como sua relação com a sequência de Fibonacci. Além disso, aborda-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, que serve de fundamento para a análise da aprendizagem e para a compreensão das transformações semióticas realizadas pelos estudantes.

O quarto capítulo descreve o método da pesquisa, apresentando o contexto da investigação, os sujeitos participantes, os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos empregados no desenvolvimento das atividades. O quinto capítulo é destinado à análise e interpretação dos dados, evidenciando as produções dos estudantes e os indícios de articulação entre diferentes registros de representação. Por fim, o sexto capítulo reúne as considerações finais, destacando as conclusões alcançadas, as contribuições do estudo para o ensino da matemática e as possibilidades de continuidade em futuras pesquisas.

2 Objetivos da Pesquisa

2.1 Objetivo Geral

Analisar a compreensão do conceito de razão áurea por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir da construção do retângulo áureo e da espiral de Fibonacci com o uso de instrumentos geométricos, tomando como referência a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

2.2 Objetivos específicos

Examinar a forma como os estudantes articulam diferentes registros de representação semiótica, linguístico, simbólico, numérico e geométrico , na compreensão do conceito de razão áurea.

Descrever o percurso metodológico adotado na pesquisa, destacando os procedimentos de aplicação do teste e de desenvolvimento das atividades práticas.

3 Recorte teórico

Este capítulo propõe uma reflexão teórica sobre a razão áurea, partindo das contribuições de Euclides e ampliando o olhar para sua presença em fenômenos naturais, bem como em manifestações históricas e contemporâneas. Ao explorar o conceito da seção áurea, dá-se destaque ao retângulo áureo e à espiral de Fibonacci, formas que ilustram a recorrência desse padrão em múltiplos contextos e evidenciam sua relevância para diferentes áreas do conhecimento.

Na segunda parte do capítulo, o foco se volta para as Representações Semióticas e os Processos Cognitivos no campo da Educação Matemática. Discute-se como os diversos registros de representação e as estratégias cognitivas adotadas pelos estudantes podem contribuir significativamente para a construção de significados e a compreensão de conceitos abstratos. Com isso, o texto estabelece uma base teórica que articula a dimensão matemática com a dimensão pedagógica, oferecendo subsídios para uma abordagem mais integrada e significativa do ensino.

3.1 Breve Relato histórico sobre a razão áurea

A história da razão áurea, tal como a conhecemos atualmente, revela-se extraordinária tanto em seu conceito teórico quanto em sua aplicação prática. Trata-se do conhecido "número de ouro", representado pela letra grega ϕ (Lê-se: “fi”), em homenagem ao escultor e arquiteto grego Fídias. Apesar de sua relevância histórica e estética, observa-se uma aplicação ainda tímida desse conceito no contexto da Educação Básica. Compreende-se, no entanto, a importância da razão áurea como fundamento matemático que pode e deve ser explorado em sala de aula, considerando sua presença recorrente no cotidiano dos estudantes.

Segundo (Livio, 2006, p. 13), "A primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecida como razão áurea foi dada por volta de 300 a.C., pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria."Ainda que Euclides tenha formalizado a razão áurea em sua obra Os Elementos, há indícios de sua utilização anterior, ainda que de maneira empírica

Neste sentido, (Pinheiro, 2015, p. 12) destaca que “Estudos mostram que alguns artistas, entre eles destacam-se Le Corbusier, mais conhecido como o Modulor, e Leonardo da Vinci, utilizaram dessa proporção para realizar seus trabalhos.” Tais registros reforçam a hipótese de que a razão áurea exerceu influência significativa não apenas no campo da matemática, mas também nas artes e na arquitetura ao longo da história.

3.2 A razão áurea na natureza

A razão áurea ou proporção áurea está presente em muitos fenômenos da natureza. Segundo (Ramos, 2016) ela é considerada uma das proporções mais harmoniosas entre duas medidas ou segmentos. Sendo observada em estruturas que vão desde a organização de galáxias até configurações atômicas. O número de ouro, é visto como divino pela sua harmonia que se apresenta aos nossos olhos, este número que se aproxima de 1,618, chamado de ϕ (Lê-se "fi") está esteticamente visível e agradável na natureza pois possui um padrão harmônico em vários elementos da natureza, como por exemplo uma rosa.

Figura 1 – Representação da proporção áurea sobre uma rosa vermelha



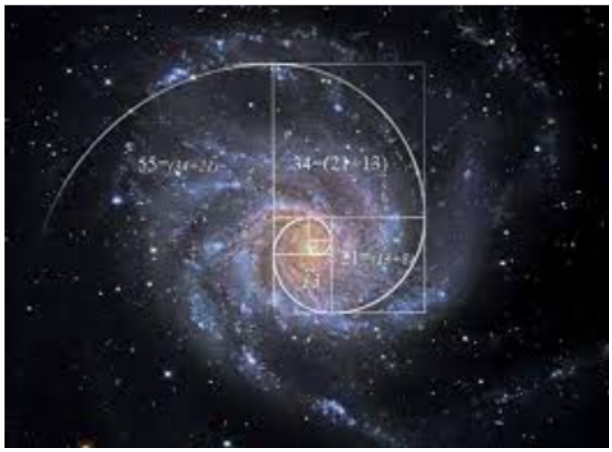
Fonte: (InstaArts, s.d.)

No sistema solar, a razão áurea também se destaca nas distâncias entre os planetas e o Sol. Conforme (Ribeiro, 2021, p. 58): "a distância dos planetas e o Sol no Sistema Solar é uma sequência numérica", inferindo que as órbitas planetárias podem seguir proporções matemáticas definidas. Essa regularidade nas distâncias planetárias reforça a ideia de que a razão áurea desempenha um papel fundamental na organização do sistema solar, refletindo uma ordem matemática na disposição dos corpos celestes.

3.3 A razão áurea na matemática

Este trabalho tem como foco os estudantes do Ensino Fundamental, com ênfase em uma abordagem didática. Um dos temas mais explorados é a razão áurea, ela também é conhecida como número de ouro ou proporção áurea. Seu valor aproximado é 1,618, no entanto seu valor exato tem infinitas casas decimais não periódicas, é um número irracional e não pode ser representado por uma fração com numerador e denominador inteiros.

Figura 2 – Representação da Via Láctea sobreposta à espiral da proporção áurea



Fonte: (Matematicando, s.d.)

3.4 Obtendo o Número de Ouro

De acordo com (Euclides, 2009), para que um segmento seja dividido em seção áurea, é necessário que a razão entre o segmento inteiro e a parte maior seja igual à razão entre a parte maior e a parte menor. A partir dessa constatação, é possível determinar o número de ouro usando-se as noções dos seguintes tópicos:

- Razão e proporção
- Equação do 2º Grau
- Definição geométrica

Considerando-se a abordagem geométrica proposta por Euclides (2009) o segmento AB está dividido segundo a razão áurea, quando existe um ponto C entre AeB, de modo que $AC > CB$, de tal forma que AC dividido por CB seja igual a AB divido por AC, conforme a figura abaixo:

Figura 3 – Representação geométrica da razão áurea



Fonte:Produzida pelo autor

Podemos definir a relação matemática como:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

3.5 Escrevendo de forma algébrica

Partindo-se da relação matemática $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ é possível desenvolver uma equação algébrica que leva a obtenção do número de ouro.

Tomando-se $AC = x$ e $CB = y$, pode-se, pela definição geométrica substituir os valores, então:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Desenvolvendo-se o cálculo, fixando y, encontra-se x em função de y. E assim obtém-se a razão $\frac{x}{y}$

Aplicando a Propriedade Fundamental das Proporções (produto dos extremos é igual ao produto dos meios) na igualdade abaixo, obtém-se:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$x^2 = xy + y^2$$

$$x^2 - xy - y^2 = 0 \text{ (Equação do 2º grau)}$$

Considerando-se a equação do segundo grau em relação à variável x, com $x > 0$ e $y > 0$, os coeficientes da equação, são:

$$a = 1, \quad b = -y, \quad c = -y^2$$

Usando-se a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cálculo do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-y^2)$$
$$\Delta = y^2 + 4y^2$$
$$\Delta = 5y^2$$

Substituindo-se os valores na fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-(-y) \pm \sqrt{5y^2}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{y \pm y\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{y(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Como x e y são segmentos, não podem assumir valores negativos, tem-se a razão:

$$\frac{x}{y} = 1{,}61803\ldots$$

Assim, o valor algébrico do número de ouro é $\phi = 1,61803...$

3.6 Propriedades do número de ouro

i. $\phi^2 - \phi - 1 = 0$

Demonstração. Tem-se que o número de ouro é definido por:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Calculando-se o valor de ϕ^2, obtém-se:

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}.$$

Agora, calculando-se $\phi + 1$, tem-se:

$$\phi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Multiplicando numerador e denominador por 2:

$$\phi + 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}.$$

Logo:

$$\phi^2 = \phi + 1.$$

Reorganizando a equação:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

□

ii. $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$

Demonstração. O valor do número de ouro já é conhecido:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Calculando-se $\frac{1}{\phi}$, obtém-se:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}.$$

Multiplicando numerador e denominador por $1 - \sqrt{5}$, tem-se:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Agora somando 1 com $\frac{1}{\phi}$:

$$1 + \frac{1}{\phi} = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - (1 - \sqrt{5})}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto:

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi.$$

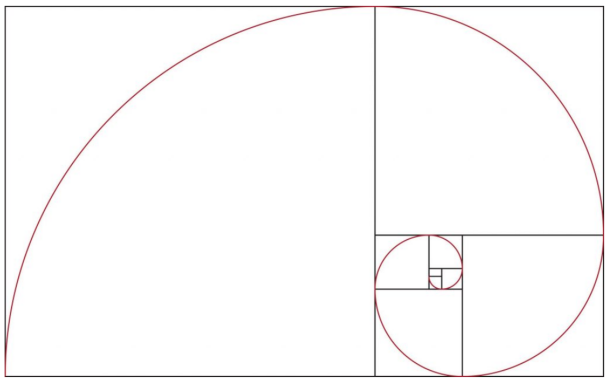
□

3.7 Retângulo Áureo

O Retângulo Áureo é amplamente reconhecido por sua estética visual agradável, ele é considerado um exemplo clássico de proporção harmoniosa. Essa forma geométrica é usada com frequência por artistas, arquitetos e designers, sendo valorizado por sua associação à proporção áurea. Uma relação matemática tida como símbolo de equilíbrio, harmonia e beleza (Santos, 2020).

A construção do Retângulo Áureo baseia-se na razão entre seus lados, em que o lado maior (a) dividido pelo lado menor (b) é igual ao número ϕ (Lê-se: "fi"), conhecido como número áureo, cujo valor é aproximadamente 1,618. Essa proporção está presente em diversas manifestações da natureza, arte e arquitetura, sendo estudada desde a antiguidade como princípio universal de harmonia.

Figura 4 – Retângulo áureo



Fonte: (Jovens Cientistas Brasil, 2023)

Este trabalho utiliza régua e compasso como instrumentos didáticos para a construção do retângulo áureo. A abordagem é voltada para estudantes do Ensino Fundamental, com o objetivo de proporcionar uma visualização mais clara e concreta dos conceitos matemáticos envolvidos.

Busca-se, facilitar a compreensão de conteúdos tradicionalmente apresentados de forma abstrata, promovendo a conexão entre a matemática e a razão áurea de uma forma acessível e significativa.

3.7.1 Sequência de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci é uma sequência numérica em que cada termo posterior é a soma dos dois anteriores, começando com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Seus primeiros termos são:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Formalmente,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Diversas propostas didáticas têm utilizado a sequência de Fibonacci como ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Tanto (Leopoldino, 2016) quanto (Santos, 2020) exploram a resolução de problemas de análise combinatória envolvendo essa sequência e propõem atividades de natureza geométrica que evidenciam suas propriedades. Os autores destacam, ainda, o potencial da sequência para integrar diferentes áreas da Matemática e favorecer uma compreensão contextualizada das relações numéricas e espaciais

3.8 A Relação entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci

A razão áurea (ϕ), também conhecida como proporção divina ou número de ouro, e a Sequência de Fibonacci (F_n) são dois conceitos matemáticos distintos, mas intrinsecamente ligados por uma relação fascinante e fundamental. Essa conexão não é apenas uma curiosidade matemática, mas um pilar que demonstra como a matemática pode descrever padrões recorrentes na natureza, na arte e no design. Estudos acadêmicos recentes têm explorado essa relação não só na teoria, mas também em propostas didáticas para o Ensino Fundamental e Médio (Santos, 2020; Leopoldino, 2016; Santos, 2018; Belini, 2015; Pereira; Ferreira, 2016).

A Conexão Fundamental

A relação entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci emerge quando se analisa a razão entre termos sucessivos da sequência. À medida que n aumenta, a razão

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

converge para ϕ. Exemplos numéricos podem ilustrar isso:

- $\frac{1}{1} = 1$
- $\frac{2}{1} = 2$
- $\frac{3}{2} = 1.5$
- $\frac{5}{3} \approx 1.666\ldots$
- $\frac{8}{5} = 1.6$
- $\frac{13}{8} = 1.625$
- $\frac{21}{13} \approx 1.615\ldots$
- $\frac{34}{21} \approx 1.619\ldots$

Matematicamente, pode-se dizer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Essa aproximação e limites são discutidos com profundidade em estudos acadêmicos abertos, inclusive com demonstrações formais ou geométricas (Santos, 2018; Belini, 2015; Pereira; Ferreira, 2016).

A conexão entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea revela que conceitos aparentemente distintos, sequência recursiva, número irracional, limites, se interconectam de maneira natural. Essa relação não é apenas numérica, mas conceitual, servindo como ponte entre teoria e prática, especialmente no ensino da matemática.

Além disso, as dissertações citadas mostram que trabalhar com esses temas no Ensino Fundamental e Médio (construção geométrica, história, aplicações na natureza, etc.) pode aumentar a compreensão e o interesse dos estudantes pela matemática (Leopoldino, 2016; Santos, 2020). Assim, essa relação entre Fibonacci e o número ϕ não deve ser vista como um detalhe da matemática, mas como uma ferramenta pedagógica poderosa, que possibilita ao estudante ver padrões, estimar, conjecturar, entender limites e apreciar a matemática como algo vivo e conectado ao mundo real.

3.9 A Construção do Significado em Matemática: Aprendizagem e a Teoria dos Registros de Representação de Duval

A compreensão dos conceitos matemáticos vai muito além da simples memorização de regras ou da execução mecânica de algoritmos. Para que o estudante atribua sentido ao que aprende, é indispensável que consiga transitar entre diferentes formas de representação, construindo significados e estabelecendo conexões entre ideias que, à primeira vista, podem parecer desconexas. Neste Sentido (Duval, 2012) destaca que:

> É essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc.) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. (Duval, 2012, p. 40)

Essa observação chama atenção para algo que, muitas vezes, passa despercebido nas práticas de sala de aula: limitar-se a um único registro não basta para que o estudante compreenda plenamente um objeto matemático.

Ao refletir sobre isso, percebemos que a aprendizagem em matemática demanda a articulação entre diferentes formas de linguagem, o que amplia a capacidade de entendimento e permite ao estudante enxergar o mesmo conceito sob múltiplas perspectivas. É por essa razão que a teoria dos registros de representação semiótica não pode ser vista apenas como um recurso complementar, mas como um instrumento fundamental para com-

preender os processos cognitivos envolvidos no ensino e na aprendizagem da matemática.

Ao tratar da aprendizagem matemática, é importante reconhecer que ela não se resume a procedimentos técnicos ou à simples resolução de problemas. A matemática deve ser entendida também como um campo de significados, cuja compreensão depende de um processo de construção que envolve conhecimento, interpretação e representação. Como observa (Colombo, 2008, p. 19):

> ao falarmos em representação, inevitavelmente estaremos falando de conhecimento, significado, compreensão, modelização, que são noções essenciais para a Educação Matemática, Psicologia, Epistemologia, ciências e tecnologias que se ocupam da cognição humana.

A citação reforça que a representação não é um elemento isolado, mas um elo fundamental que conecta a matemática ao desenvolvimento cognitivo mais amplo do sujeito. Nesse sentido, compreender o papel das representações torna-se essencial para que o processo de ensino-aprendizagem seja efetivo, favorecendo não apenas a resolução de problemas, mas também a construção de significados duradouros.

Essa reflexão amplia a discussão sobre o ensino da matemática, lembrando-nos de que a representação não é apenas um recurso acessório, mas um aspecto constitutivo do próprio processo cognitivo.

Assim, compreender o papel das representações torna-se essencial para que o processo de ensino-aprendizagem seja efetivo. Mais do que ajudar na resolução de problemas imediatos, elas possibilitam que o estudante construa significados duradouros, articulando a matemática ao desenvolvimento de suas capacidades cognitivas e interpretativas.

O estudo das representações não se restringe às linguagens externas, como gráficos, símbolos e figuras; ele abrange também os processos internos que se desenvolvem na mente do sujeito ao lidar com conceitos matemáticos e abstratos. Essa dimensão menos visível é fundamental, pois evidencia como o pensamento organiza e reelabora os objetos de estudo.

> as formas em que codificamos características, propriedades, imagens, sensações, etc., de um objeto percebido (por exemplo, uma lâmpada), de um objeto imaginado (por exemplo, um extraterrestre) ou de um conceito abstrato (por exemplo, a liberdade), de maneira tal que possamos recordá-los, pensar sobre eles, etc.. Estas representações são consideradas como estados mentais particulares, que contêm em si mesmos o objeto ao qual se referem. (Greca, 2005, p. 8).

Essa definição reforça que a representação não se limita a um registro externo, mas envolve estados mentais capazes de preservar, organizar e dar forma ao objeto representado. Dessa forma, compreender como essas representações se constituem e se articulam é essencial para o ensino da matemática. Mais do que recursos auxiliares, elas funcionam como estruturas cognitivas que permitem ao estudante atribuir significado aos conceitos e estabelecer conexões entre diferentes saberes. Investigar tais processos possibilita ampliar a compreensão sobre como ocorre a aprendizagem matemática, contribuindo para práticas pedagógicas que valorizem tanto os registros externos quanto a dimensão mental e cognitiva do sujeito.

3.9.1 O Papel da Construção e do Registro Figural na Compreensão da Geometria

A aprendizagem em Matemática não se limita à aplicação de regras ou algoritmos; ela se fortalece quando o estudante consegue transitar entre diferentes registros de representação semiótica. No campo da Geometria, essa exigência se torna ainda mais evidente, já que o objeto matemático, como o Retângulo Áureo, possui uma dimensão perceptiva, materializada na figura, que muitas vezes é confundida com suas propriedades conceituais.

Como ressalta (Moretti, 2025), compreender a Geometria exige a coordenação de três atividades cognitivas fundamentais: a visualização, a construção e o raciocínio. Essas dimensões, quando articuladas, permitem que o estudante ultrapasse a leitura imediata da figura e avance para a compreensão de seus aspectos conceituais.

Nesse processo, o registro figural ocupa posição central, pois desafia o estudante a ir além da percepção sensível da forma. Para (Duval, 2012), olhar uma figura geométrica não é apenas um ato visual, mas também um

exercício cognitivo, que demanda a capacidade de desconstrução dimensional. Em outras palavras, trata-se de decompor a figura em partes menores, como segmentos de reta e pontos, e reorganizá-las mental ou materialmente, construindo novas relações a partir dessa análise.

Nessa perspectiva, estudos como o de (Neres; Miguel; Guterres, 2016) reforçam que o Retângulo Áureo é um exemplo privilegiado dessa dinâmica: ao ser decomposto, ele revela proporções e propriedades conceituais que só se tornam claras quando o estudante é capaz de mobilizar diferentes registros, associando o que vê ao que compreende.

A possibilidade de reconfiguração de uma figura é o que caracteriza o tratamento figural. No caso do Retângulo Áureo, esse processo se evidencia quando o estudante percebe que, ao retirar o quadrado interno, o retângulo menor que permanece mantém a mesma proporção da figura original. Esse reconhecimento, embora simples à primeira vista, abre caminho para a exploração heurística e para a compreensão das propriedades conceituais ligadas à razão áurea (Moretti, 2025; Neres; Miguel; Guterres, 2016).

Mais do que um exercício de observação, a construção geométrica assume papel fundamental nesse processo, pois estabelece a ligação entre o registro figural e o raciocínio discursivo. Como destaca (Duval, 2011), ao utilizar instrumentos como régua e compasso, o estudante não apenas reproduz formas, mas vivencia uma experiência cognitiva em que as ações realizadas e os resultados observados se conectam diretamente aos objetos matemáticos.

Além disso, seguir instruções de construção exige mais do que habilidade manual: envolve mobilizar a língua natural, compreender termos matemáticos, como reta e proporção, e dominar propriedades geométricas. É nesse ponto que a análise de (Barboza; Bergamin; Trivizoli, 2019) se torna pertinente, ao ressaltar que o ato de construir favorece a articulação entre registros de representação e contribui para que o estudante desenvolva uma compreensão mais sólida e significativa da geometria.

Sem a atividade de construção acompanhada de análise, a figura

geométrica corre o risco de ser interpretada apenas por sua aparência, reduzida ao que os olhos veem. Essa limitação, como apontam (Costa; SANTOS, 2020), configura um obstáculo recorrente na aprendizagem da Geometria, já que a percepção visual, isolada, não garante o acesso às propriedades conceituais da figura.

Por isso, a articulação entre o resultado da construção expresso no registro figural e sua descrição discursiva ou simbólica é fundamental. É justamente nessa passagem, como lembra (Duval, 2012), que ocorre a conversão entre registros e, consequentemente, a compreensão conceitual do objeto matemático.

Nesse contexto, a construção do Retângulo Áureo e da Espiral de Fibonacci, seja realizada em papel, com régua e compasso, ou por meio de softwares de geometria dinâmica, não deve ser entendida como simples recurso auxiliar. Ao contrário, ela desempenha papel estruturante, funcionando como motor do tratamento figural. Esse processo amplia a apreensão operatória do estudante e prepara o terreno cognitivo para que a conversão do registro figural ao algébrico aconteça, favorecendo a compreensão da proporção numérica que caracteriza a razão áurea.

3.9.2 O Paradoxo Cognitivo e a Necessidade da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)

Segundo (Colombo, 2008), a representação é um elemento fundamental no ensino da Matemática. No entanto, a verdadeira dificuldade de aprendizagem está no que (Moretti, 2025) chama de Paradoxo Cognitivo da Matemática. Isso acontece porque os objetos matemáticos, como o número π, uma função ou, neste caso, a razão áurea, são, por natureza, abstratos e inacessíveis aos sentidos. O estudante nunca terá contato direto com o conceito em si, mas apenas com as suas representações: símbolos, gráficos, desenhos. Como afirma (Duval, 2012, p. 13), "a única via de acesso aos objetos matemáticos, e a única possibilidade de seu tratamento, é a mobilização de representações semióticas".

Eis o paradoxo: para compreender o objeto, o estudante depende de múltiplas representações, mas é comum que ele confunda o objeto com a forma como ele é representado. É justamente aí que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) se mostra essencial, pois oferece um caminho para superar essa confusão, focando na função e na natureza das próprias representações.

De acordo com (Duval, 2012), para que um sistema de representação seja considerado um Registro de Representação Semiótica (RRS), ele precisa permitir três atividades cognitivas centrais. A primeira é a formação de uma representação (semiose), que é a capacidade de produzir um registro seguindo suas regras próprias. Por exemplo, ao estudar a razão áurea, o estudante pode desenhar um Retângulo Áureo e sua espiral respeitando as regras geométricas ou escrever a equação

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{ou a expressão} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

seguindo as convenções da álgebra.

A segunda atividade é o tratamento, que consiste em transformar uma representação dentro do mesmo registro, sem alterar o objeto representado (Duval, 2012). Na geometria, isso ocorre quando o estudante, ao observar o Retângulo Áureo, identifica mentalmente o quadrado interno e percebe que o retângulo remanescente também é áureo. No registro algébrico, o tratamento se dá ao manipular a equação da razão áurea até chegar à forma

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Por fim, a terceira e mais crucial atividade é a conversão: transformar uma representação de um registro para outro, mantendo o mesmo objeto matemático (Duval, 2012). Essa é a ponte para a compreensão verdadeira, e também a mais negligenciada no ensino. No caso da razão áurea, a compreensão integral (ou noese) só acontece quando o estudante consegue relacionar a figura geométrica do retângulo com a sua expressão numérica, $\phi \approx 1,618$. Essa capacidade de transitar entre o visual e o formal é o que

permite a real apropriação do conceito, libertando-o de uma forma única de representação e permitindo seu uso em diferentes contextos (Moretti, 2025).

É justamente essa coordenação entre registros, com especial atenção à conversão entre o figural (geométrico) e o algébrico que orientará a análise da construção do conceito da razão áurea.

A Coerência da Compreensão

Este capítulo teve como objetivo construir as bases conceituais para analisar a aprendizagem da razão áurea, partindo de uma visão que recusa a redução da Matemática a um simples catálogo de regras e procedimentos mecânicos. O percurso que fizemos aqui nos leva a entender que a verdadeira compreensão matemática é um processo complexo, um ato de construção de significado que depende, sobretudo, da capacidade de articular diferentes formas de representação.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, mostra-se, assim, muito mais que um arcabouço teórico: é um instrumento potente para identificar e compreender as dificuldades dos estudantes. Como vimos, o Paradoxo Cognitivo nos lembra que o objeto matemático é, por essência, abstrato só podemos acessá-lo por meio de suas representações. E é justamente aí que reside tanto o desafio quanto a saída: a conversão entre registros.

No caso específico da razão áurea, conceito que navega entre a visualidade geométrica e a precisão numérica, exige-se do estudante um esforço intelectual significativo. A atividade de construção do Retângulo Áureo, por exemplo, vai muito além de reproduzir uma figura harmoniosa: é por meio do tratamento no registro figural (como a reconfiguração mental da figura ao retirar quadrados sucessivos) que o estudante se prepara para dar o salto em direção ao simbólico. É nesse momento que a proporção se traduz em fórmula e se materializa no número ϕ, irracional e cheio de significado.

Desse modo, avaliar a efetividade da aprendizagem não se restringe a verificar se o estudante resolveu uma equação ou desenhou corretamente. O que importa, de fato, é a coerência que ele consegue estabelecer entre essas diferentes linguagens. A coordenação entre Geometria e Álgebra é a evidência de que o conhecimento deixou de ser fragmentado e passou a ser integrado, sinal de que o objeto matemático foi verdadeiramente apreendido (Duval, 2012).

Com esse arcabouço teórico devidamente estruturado, estamos prontos para levar a TRRS ao campo empírico. A etapa seguinte consistirá em observar como os estudantes mobilizam ou não os registros figural e simbólico durante a construção da razão áurea, identificando tanto os obstáculos quanto os avanços no delicado processo de conversão. A fundamentação aqui construída será nosso guia para transformar ações e falas em insights pedagógicos e cognitivos significativos.

4 Método da pesquisa

4.1 Sujeitos pesquisados

A pesquisa foi realizada com 25 estudantes do 9º ano do ensino fundamental, matriculados em uma escola pública situada no município de João Pessoa. O estudo desenvolveu-se em dois momentos distintos, durante os quais os participantes responderam a um teste elaborado com o objetivo de investigar sua compreensão acerca do conceito de razão áurea. Cada sessão teve duração de 50 minutos. Ao longo do processo investigativo, foram analisadas as transformações semióticas e os mecanismos cognitivos mobilizados pelos alunos na construção de conhecimentos matemáticos, permitindo observar como esses elementos se articulam na formação do pensamento matemático.

4.2 Instrumento de coleta de dados e materiais utilizados

Instrumentos e materiais utilizados na coleta de dados

Para compreender como os alunos assimilam o conceito de razão áurea, optou-se por utilizar um teste composto por seis questões abertas. Cada uma delas foi cuidadosamente elaborada com o intuito de favorecer não apenas a expressão livre dos estudantes, mas também a observação das estratégias de resolução e dos processos cognitivos envolvidos. Essa abordagem permitiu ir além das respostas finais, valorizando o caminho percorrido por cada aluno em sua construção de sentido.

A escolha por questões abertas teve como propósito criar um espaço mais flexível e acolhedor, onde os participantes pudessem se sentir à vontade para compartilhar suas ideias, raciocínios e interpretações. Antes da aplicação, as perguntas passaram por uma análise criteriosa quanto à clareza, relevância e adequação ao nível de escolaridade dos envolvidos, assegurando a validade de conteúdo. Além disso, a aplicação seguiu um protocolo

padronizado, garantindo a confiabilidade na coleta das informações.

Materiais disponibilizados aos participantes

Durante a atividade, cada aluno recebeu uma folha contendo as seis questões previamente elaboradas, abordando o conceito de razão áurea, sua relação com a sequência de Fibonacci e suas implicações matemáticas. Para o registro das respostas, foram disponibilizadas canetas, assegurando que todos tivessem acesso aos mesmos recursos.

Essa escolha buscou garantir condições equitativas para todos os participantes, respeitando o princípio da padronização na coleta de dados. Mais do que uma questão técnica, tratou-se de uma decisão que reforça o compromisso com a integridade e a qualidade do processo investigativo.

4.3 Procedimento da pesquisa

A coleta de dados desta pesquisa foi cuidadosamente planejada para se desenvolver ao longo de quatro aulas, distribuídas em dois momentos complementares. A proposta buscou articular teoria e prática de forma significativa, favorecendo uma experiência de aprendizagem mais rica e envolvente para os estudantes.

No primeiro momento, os alunos participaram de uma exposição teórica sobre o conceito de razão áurea, realizada em 8 de setembro de 2025. Essa apresentação abordou não apenas os fundamentos matemáticos, mas também suas conexões com a sequência de Fibonacci, exemplos encontrados na natureza e aplicações em diferentes campos, como arte, fotografia, cinema e tecnologia. A intenção foi ampliar o olhar dos estudantes, aproximando o conteúdo de suas vivências cotidianas e despertando o interesse pelo tema. Ao final da aula, foi aplicado um teste composto por seis questões abertas, elaborado para captar a compreensão inicial dos participantes. As respostas foram recolhidas para posterior análise, com tempo médio de 50 minutos para o preenchimento.

O segundo momento ocorreu em 9 de setembro de 2025, e teve como

foco a vivência prática dos conceitos previamente discutidos. Os estudantes analisaram o retângulo áureo, explorando suas proporções e a relação geométrica com a espiral de Fibonacci. Essa atividade proporcionou um espaço para que os estudantes manipulassem segmentos, identificassem padrões e registrassem suas próprias interpretações, promovendo uma aprendizagem ativa e reflexiva. Ao final da aula, o mesmo teste foi reaplicado, permitindo observar possíveis avanços cognitivos e transformações na forma como os alunos representavam e compreendiam a razão áurea.

5 Análise e interpretação dos dados

Níveis de Estruturação Cognitiva

A análise do nível de estruturação cognitiva, neste estudo, está fundamentada na teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por (Duval, 2012). Esse nível é compreendido a partir dos registros produzidos pelos estudantes, da maneira como mobilizam diferentes representações e dos tratamentos que realizam ao resolver uma situação matemática. Parte-se do entendimento de que a aprendizagem não se limita ao domínio de um único registro, mas se manifesta na capacidade de articular distintas formas de representação por meio de conversões e tratamentos (Duval, 2012); (Henriques; Almouloud, 2016). Com base nessa perspectiva, a investigação busca identificar em que medida os estudantes, ao trabalhar com a razão áurea, revelam indícios de compreensão conceitual ao produzir, mobilizar e relacionar diferentes registros.

Estudantes no Nível 0

Ao analisar as respostas dos estudantes ao teste que explorava a definição da razão áurea, sua conexão com a sequência de Fibonacci e suas manifestações na natureza, foi possível observar nuances interessantes no modo como cada estudante se relaciona com os conceitos matemáticos propostos. As seis questões serviram como ponto de partida para compreender até que ponto cada um mobiliza seus conhecimentos prévios, bem como as estratégias que adotam, ou deixam de adotar, ao recorrer a diferentes formas de representação semiótica.

Mais do que apenas verificar acertos ou erros, esse conjunto de registros revela caminhos singulares de construção de sentido. Cada resposta carrega marcas do percurso individual de aprendizagem, evidenciando como os estudantes interpretam, conectam e ressignificam os conteúdos matemáticos a partir de suas próprias experiências e repertórios.

Questão 1 - Nível 0

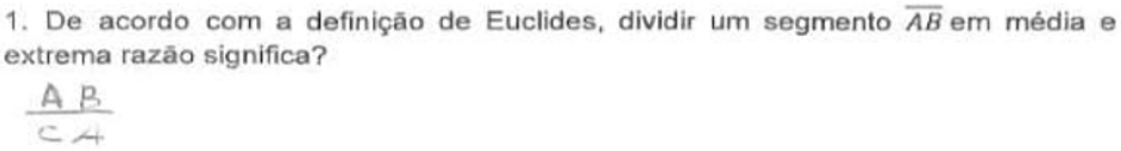


Figura 5 – Estudante de Nível 0 - Questão 1

O estudante reproduz a razão de forma isolada, sem atribuir significado à divisão áurea. Utiliza o registro simbólico, mas não realiza o tratamento por falta de convenção ou de outros registros. Segundo Duval (2012), o símbolo deve servir à compreensão do objeto matemático.

Questão 2 - Nível 0

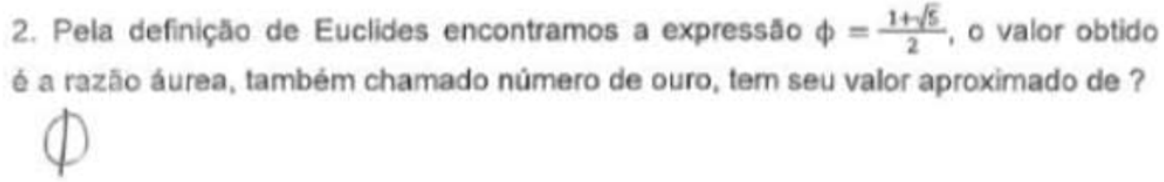


Figura 6 – Estudante de Nível 0 - Questão 2

O estudante limita-se a escrever o símbolo ϕ, sem apresentar cálculos ou explicações sobre seu valor numérico. Não mobiliza o registro algébrico, tampouco realiza o tratamento simbólico correspondente. Isso evidencia uma falta de consistência entre os registros, conforme aponta Duval (2012).

Questão 3 - Nível 0

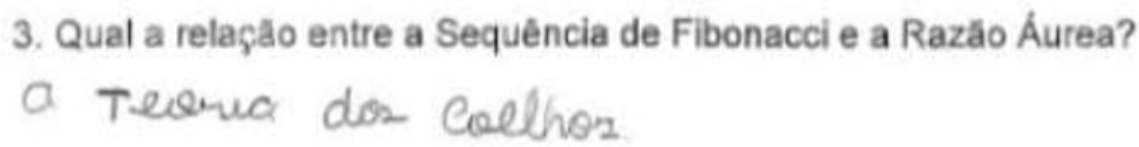


Figura 7 – Estudante de Nível 0 - Questão 3

O estudante recorre à "teoria dos coelhos" como tentativa de atribuir

sentido à questão, mas sem estabelecer vínculo com a sequência de Fibonacci. Apesar do esforço verbal em conectar os registros, a resposta revela, segundo (Duval, 2012), um pensamento de natureza perceptiva, não conceitual.

Questão 4 - Nível 0

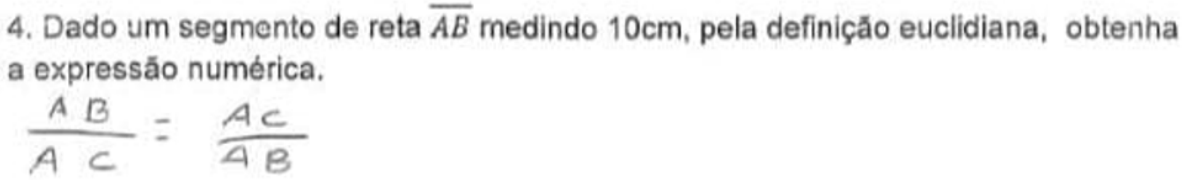


Figura 8 – Estudante de Nível 0 - Questão 4

O estudante apresenta a proporção de maneira equivocada, evidenciando dificuldades na compreensão da proporcionalidade e não realiza qualquer resolução. Embora mobilize o registro algébrico, não há desenvolvimento das operações necessárias. Conforme Duval, essa ausência impede a transposição para o registro numérico, o que compromete a compreensão plena da razão áurea.

Questão 5 - Nível 0

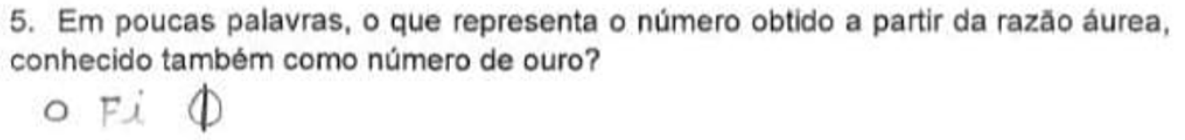


Figura 9 – Estudante de Nível 0 - Questão 5

Nesta resposta, o estudante limita-se a escrever "FI", demonstrando apenas o reconhecimento superficial do símbolo, sem atribuir-lhe significado conceitual. A mobilização do registro simbólico é mínima e não há transposição para o registro verbal. Segundo (Duval, 2012), esse tipo de manifestação caracteriza um uso estático do registro, desprovido de articulação semiótica.

Questão 6 - Nível 0

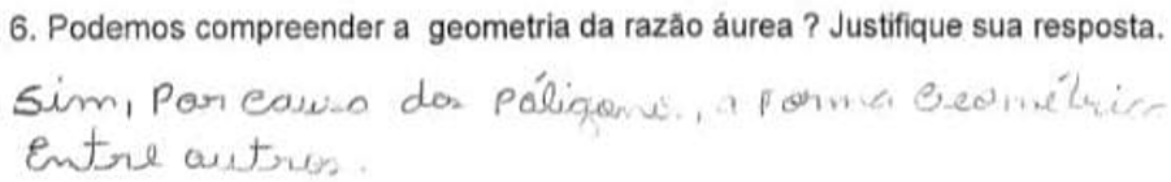


Figura 10 – Estudante de Nível 0 - Questão 6

Na resposta apresentada, o estudante afirma "sim, por causa dos polígonos e forma geométrica", buscando uma justificativa geométrica sem estabelecer vínculo conceitual com a razão áurea. Há mobilidade verbal nos registros matemático e geométrico, mas sem aprofundamento. Conforme Duval (2012), essa abordagem revela uma compreensão intuitiva, não cognitiva, do conceito.

Ao observar atentamente as produções dos estudantes, percebemos que os registros de representação semiótica ainda carecem de uma estrutura mais consistente, o que dificulta a compreensão plena do objeto matemático em questão. A ausência de correspondência entre os diferentes registros indica que as operações de tratamento, essenciais para transitar entre formas de representação não foram mobilizadas de forma eficaz.

Essa fragilidade se evidencia, sobretudo, na falta de uma verbalização matemática que sustente essas transições. Em ambos os casos analisados, nota-se que as representações construídas pelos estudantes não dialogam com as relações matemáticas propostas nos enunciados das tarefas, o que aponta para uma desconexão entre intenção e expressão.

As justificativas apresentadas pelos estudantes, embora reveladoras de esforço e engajamento, deixam lacunas na identificação dos atributos relevantes de cada registro. Essa dificuldade compromete não apenas a articulação entre os diferentes modos de representação, mas também a coordenação entre eles, elementos centrais para a construção de significados, conforme nos orienta o referencial teórico de (Duval, 2012).

Estudantes no Nível 1

As produções dos estudantes revelam um primeiro movimento de aproximação ao conceito de razão áurea. Ainda que de forma incipiente, é possível perceber o uso de convenções matemáticas que dialogam com as relações propostas nos enunciados das atividades. Nesse estágio de compreensão, os registros construídos pelos alunos apontam para uma estrutura cognitiva em formação, um processo que se desenha aos poucos, marcado pelo uso predominante da linguagem natural e por representações visuais mais simples.

Esses registros, embora ainda não plenamente articulados entre si, indicam que os estudantes estão começando a se apropriar do conceito. Há sinais de que estão tentando dar sentido ao conteúdo, mesmo que a coordenação entre diferentes formas de representação, como a simbólica, a gráfica e a verbal, ainda não se estabeleça de maneira clara. Trata-se de um momento importante, em que o pensamento matemático começa a ganhar forma, mesmo que ainda em construção.

Questão 1 - Nível 1

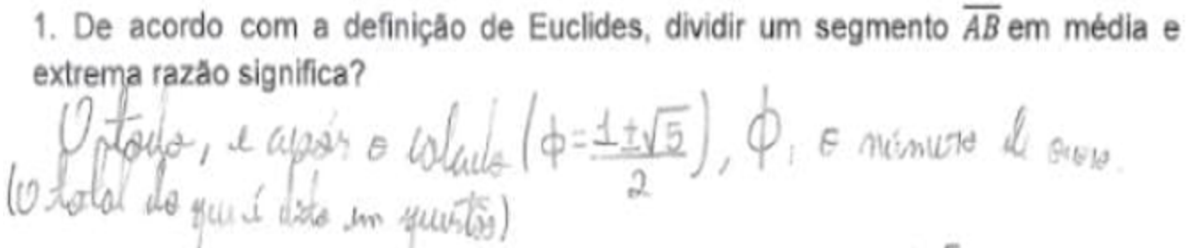


Figura 11 – Estudante de Nível 1 - Questão 1

O estudante busca resgatar o conceito da razão áurea por meio do registro algébrico, utilizando a expressão do número de ouro. No entanto, essa mobilização ocorre de forma isolada, sem articulação com o registro verbal. A ausência de conversão entre os registros impede o tratamento conceitual necessário, caracterizando, conforme Duval (2012), uma ruptura na comunicação semiótica que compromete a compreensão plena do conceito.

Questão 2 - Nível 1

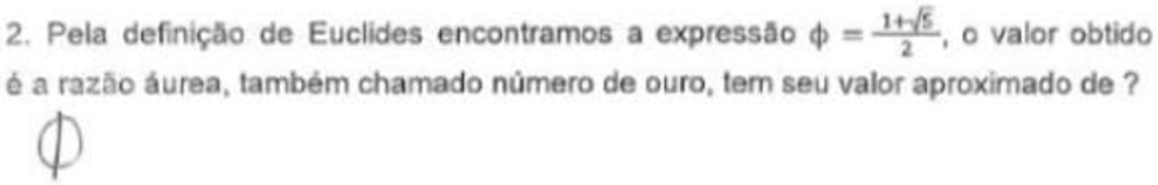


Figura 12 – Estudante de Nível 1 - Questão 2

A partir da expressão fornecida, o estudante realiza a transposição do registro algébrico para o numérico, embora o valor obtido não corresponda ao número 1,618... O tratamento numérico, portanto, revela-se incompleto. Segundo (Duval, 2012), essa limitação decorre da ausência de conversão adequada entre os registros simbólico e numérico, comprometendo a compreensão plena do conceito.

Questão 3 - Nível 1

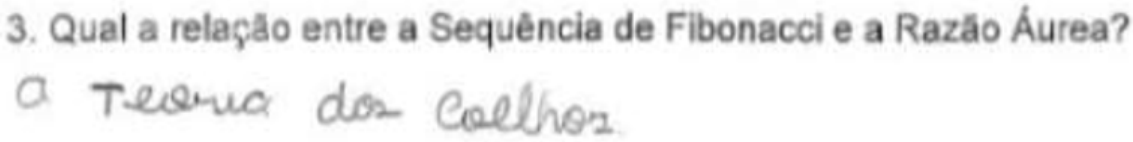


Figura 13 – Estudante de Nível 1 - Questão 3

O estudante faz a mobilização do registro numérico por meio da citação da sequência de Fibonacci, porém o tratamento realizado é incompleto, sem explicitação clara do percurso que levou à conclusão sobre o número de ouro. De acordo com (Duval, 2012), essa limitação decorre da ausência de conversão adequada entre a linguagem natural e o registro numérico, comprometendo a construção conceitual do conteúdo.

Questão 4 - Nível 1

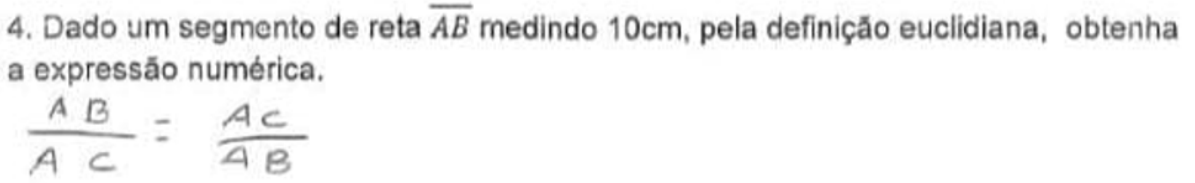


Figura 14 – Estudante de Nível 1 - Questão 4

O estudante aplica a definição euclidiana a um segmento de reta, mobilizando o registro geométrico e iniciando a transposição para o algébrico. No entanto, esse tratamento permanece incompleto, revelando também dificuldades na compreensão da proporcionalidade. Conforme Duval (2012), há indícios de conversão entre os registros do geométrico ao algébrico e, posteriormente, ao numérico, o que demonstra uma tentativa de articulação semiótica, ainda que parcial.

Questão 5 - Nível 1

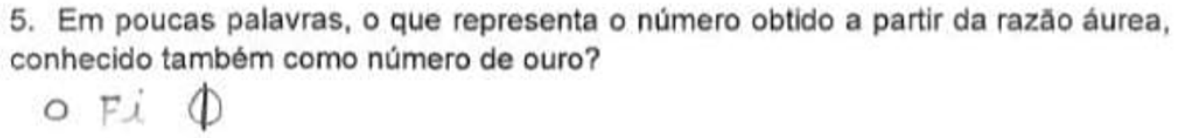


Figura 15 – Estudante de Nível 1 - Questão 5

A resposta apresentada busca abordar o número de ouro, porém de maneira genérica e com pouca fundamentação conceitual. Para que o tratamento fosse adequado, seria necessário mobilizar o registro verbal, explicitando como esse número se manifesta em diferentes contextos. Segundo (Duval, 2012), o processo ideal envolveria conversões entre os registros simbólico, numérico, verbal e figural, promovendo uma compreensão mais articulada e significativa do conceito.

Questão 6 - Nível 1

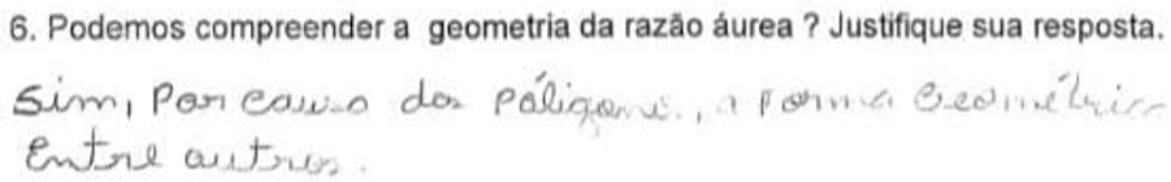


Figura 16 – Estudante de Nível 1 - Questão 6

O estudante tenta construir uma interpretação geométrica ao referir-se à divisão dos lados como "levemente desigual", propondo a razão 16:3 como representação do número de ouro. Essa escolha, no entanto, revela um equívoco matemático. O esperado seria a mobilização do registro geométrico por meio da figura do retângulo áureo, evidenciando suas proporções específicas em contraste com outras formas. Segundo (Duval, 2012), a compreensão adequada do conceito exige uma conversão articulada entre os registros geométrico, algébrico, numérico e verbal, o que não se concretiza na resposta apresentada.

Ao examinar as respostas apresentadas pelos estudantes, é possível perceber que o tratamento matemático está presente, embora de forma ainda superficial e, em alguns casos, com certos equívocos conceituais. Apesar dessas limitações, chama atenção o esforço dos estudantes em atribuir sentido às convenções matemáticas utilizadas. Essa atribuição, embora não surja de maneira espontânea, parece ser fruto direto da mediação pedagógica recebida, o que reforça o papel da instrução no processo de construção de significado.

Os registros analisados revelam um movimento inicial de apropriação conceitual, típico do que se denomina como nível 1 de compreensão. Nesse estágio, já se observam avanços importantes, especialmente no reconhecimento e uso de elementos matemáticos, ainda que a mobilização e a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica se mostrem incipientes. Trata-se de um momento promissor, em que os estudantes

começam a construir pontes entre o que aprendem e o que conseguem expressar, ainda que essas pontes estejam em fase de estruturação.

Estudantes no Nível 2

A análise das produções dos estudantes indica que nenhum deles alcançou o nível 2 de estruturação cognitiva. As evidências concentram-se nos níveis 0 e 1, o que revela que a compreensão do conceito de razão áurea ainda está em fase inicial. No nível 0, observa-se dificuldade em estabelecer correspondências significativas com o objeto matemático, enquanto no nível 1 há tentativas de atribuir sentido por meio da linguagem natural e de representações visuais simples, embora com limitações conceituais e pouca articulação entre registros. Esse cenário reforça a necessidade de intervenções pedagógicas que favoreçam maior integração entre representações e tratamentos matemáticos.

Reflexões sobre os Resultados

A observação das produções dos estudantes revelou uma predominância de registros situados no nível 1 de estruturação cognitiva. Esse dado sugere que a maioria dos alunos encontra-se em uma etapa inicial de compreensão do conceito de razão áurea. Embora já se perceba um esforço em construir significados, os registros ainda não demonstram uma articulação consistente entre as diferentes formas de representação semiótica. Esse cenário reforça a relevância de práticas pedagógicas que estimulem a transição entre registros e promovam a integração entre linguagem natural, visualizações e formalizações matemáticas.

Também foi possível identificar uma parcela de estudantes no nível 0, o que indica ausência de registros que expressem compreensão significativa do conceito. Essa dificuldade pode estar relacionada à interpretação dos enunciados, à pouca familiaridade com o tema ou mesmo à necessidade de abordagens mais exploratórias que despertem a curiosidade e favoreçam o engajamento com o conteúdo.

Importa destacar que nenhum estudante atingiu o nível 2, considerado ideal por representar uma compreensão mais consolidada e articulada. Ainda que a combinação entre atividades práticas e teóricas tenha gerado avanços pontuais, ela não se mostrou suficiente para promover uma apropriação mais profunda do conceito entre os participantes. Esse resultado aponta para a necessidade de estratégias didáticas mais contínuas e diversificadas, capazes de favorecer o desenvolvimento de conexões significativas e o uso autônomo das representações matemáticas.

Diante disso, recomenda-se a implementação de sequências didáticas mais longas e progressivas, que permitam aos estudantes construir, aos poucos, uma compreensão mais sólida e articulada da razão áurea, especialmente no que diz respeito à mobilização e coordenação entre diferentes registros semióticos.

6 Conclusão

Este estudo buscou compreender como estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental se apropriam do conceito de razão áurea a partir de uma proposta didática que integra teoria e prática, ancorada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A intervenção, realizada com 25 alunos de uma escola da rede municipal de João Pessoa, revelou que, embora a maioria tenha alcançado o nível 1 de estruturação cognitiva, indicando uma compreensão parcial, os resultados também apontam para o potencial da abordagem em promover avanços significativos na aprendizagem.

A construção do retângulo áureo e da espiral de Fibonacci, mediada por instrumentos geométricos, mostrou-se eficaz em despertar o interesse dos estudantes e favorecer a mobilização de diferentes registros de representação. Ainda assim, a presença expressiva de produções no nível 0 evidencia que muitos alunos ainda enfrentam dificuldades em articular os registros de forma integrada, o que reforça a necessidade de práticas pedagógicas mais contínuas e aprofundadas.

Diante disso, recomenda-se a implementação de sequências didáticas mais longas, progressivas e interdisciplinares, que permitam aos estudantes construir gradualmente uma compreensão conceitual sólida da razão áurea. Tais intervenções devem considerar não apenas o conteúdo matemático, mas também os modos como os alunos representam, interpretam e conectam ideias por meio de diferentes linguagens.

A razão áurea, por sua natureza estética e matemática, oferece uma oportunidade rara de integrar saberes e estimular o pensamento crítico. Ao trazer esse conceito para o cotidiano escolar, este trabalho contribui para ampliar as possibilidades de ensino da matemática, valorizando abordagens que respeitam os ritmos de aprendizagem e promovem uma formação mais significativa e sensível.

Referências

Barboza, A. C. F.; Bergamin, E. G. Jardim; Trivizoli, L. M. História da matemática e o ensino da razão Áurea: uma sequência de atividade. *Revista História da Matemática para Professores*, v. 5, n. 1, p. 9–18, 2019. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/download/40/39>. Acesso em: 24 set. 2025.

Belini, Marcelo Manechine. *A razão áurea e a sequência de Fibonacci*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT).

Colombo, Janecler Aparecida Amorin. *Representações semióticas no ensino: contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar*. Tese (Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica)) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

Costa, André Pereira da; SANTOS, Marilene Rosa dos. O pensamento geométrico na licenciatura em matemática: uma análise à luz de duval e van-hiele. *Educação Matemática em Revista – RS*, n. 1, p. 23–34, 2020. Disponível em:<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7485336>. Acesso em: 18 set. 2025.

Duval, Raymond. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM, 2011.

Duval, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat)*, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/54097>. Acesso em: 18 set. 2025.

Euclides. *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 264 p.

Greca, Ileana M. Representaciones mentais. In: MOREIRA, M. A. (Ed.). *Representações mentais, modelos mentais e representações mentais: Textos de apoio para pesquisadores em educação em ciências*. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2005. p. 7–45.

Henriques, Afonso; Almouloud, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na educação matemá-

tica no ensino superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software maple. *Ciência & Educação (Bauru)*, v. 22, n. 2, p. 465–487, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/>. Acesso em: 24 set. 2025.

InstaArts. *Proporção áurea: a beleza das curvas*. s.d. Disponível em: <https://instaarts.com/fotografia/proporcao-aurea-beleza-das-curvas/>. Acesso em: 18 abr. 2025.

Jovens Cientistas Brasil. *A proporção áurea e sua presença na arte e na natureza*. 2023. Disponível em: <https://www.jovenscientistasbrasil.com.br/post/a-propor

Leopoldino, Karlo Sérgio Medeiros. *Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea – aplicações no ensino básico*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT).

Livio, Mario. *A razão áurea: A história de fi, um número surpreendente*. Rio de Janeiro: Editora Record, 2006.

Matematicando. *O Homem Vitruviano e o Número Phi – Matemática da Beleza*. s.d. Disponível em: <https://matematicando.net.br/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-matematica-da-beleza/>. Acesso em: 18 abr. 2025.

Moretti, Méricles T. Sobre o livro "semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual" de raymond duval – estudo hermenêutico da introdução e capítulo i. *RECEM – Revista Catarinense de Educação Matemática*, v. 4, n. 5, 2025. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/recem/article/download/4454 Acesso em: 22 set. 2025.

Neres, R. S.; Miguel, A. G.; Guterres, E. O. Explorando registros figurais: implicações para o desenvolvimento do pensamento geométrico. *Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemática*, v. 13, n. 25, p. 33–45, 2016. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5893198.pdf>.Acesso em: 18 set. 2025.

Pereira, Lívia da Cás; Ferreira, Márcio Violante. Sequência de fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea.

Disciplinarum Scientia | Naturais e Tecnológicas, v. 9, n. 1, p. 67–81, 2016. Https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/view/1236.

Pinheiro, Nilo. *Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2015.

Ramos, Paulo Luiz da Silva. *Razão áurea: uma proposta para o ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2016.

Ribeiro, Rodrigo Alexandre. *A astronomia no ensino da matemática: aplicações na educação básica*. Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, SP, 2021.

Santos, Fabio Honorato dos. *Funções de Fibonacci: um estudo sobre a razão áurea e a sequência de Fibonacci*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Alagoas, 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT).

Santos, Lisandra Mayara dos. *Razão áurea: abordagem histórica, aplicações e sua relação com Fibonacci*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.