UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Kelyane Barboza de Abreu

O Movimento da Matemática Moderna: Repercussão na abordagem no Brasil do conceito de função nos livros didáticos das décadas de 1950 a 1970

João Pessoa – PB

2011

Kelyane Barboza de Abreu

O Movimento da Matemática Moderna: Repercussão na abordagem no Brasil do conceito de função nos livros didáticos das décadas de 1950 a 1970

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

João Pessoa – PB

2011

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

K29m Abreu, Kelyane Barboza de.
O movimento da matemática moderna: repercussão na abordagem no Brasil do conceito de função nos livros didáticos das décadas de 1950 a 1970. / Kelyane Barboza de Abreu. - João Pessoa, 2011.
56f. : il. -

Monografia (Graduação em Matemática) – UFPB/CCEN.
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

1.Matemática Moderna. 2. Matemática - Ensino. I. Título.

CDU: 51”21” (043.2)

BS/CCEN

O Movimento da Matemática Moderna: Repercussão na abordagem no Brasil do conceito de função nos livros didáticos das décadas de 1950 a 1970

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Aprovado em: 14 / 12 / 2011

COMISSÃO EXAMINADORA

Eduardo Gonçalves dos Santos.

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof.Ms. João Batista Alves Parente

Antônio Sales da Silva

Prof. Ms Antônio Sales da Silva

Aos meus pais, pela motivação
pelo sustento a cada dia de luta,
me fazendo acreditar em meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, por estar presente em minha vida a cada momento que pensei em desistir, por segurar em minha mão nas situações difíceis, de medos e dúvidas, apontando a direção que deveria tomar, por ser meu Porto Seguro, o Amigo e Pai Perfeito;

Aos **meus pais,** Crisante Pereira e Maria Cilene, e a toda minha família, que sempre acreditaram em mim, que me deram força e me apoiaram em minhas decisões;

Ao **meu orientador**, Eduardo Gonçalves, pela paciência e competência, pelo carinho e dedicação a este trabalho de pesquisa e pelas experiências compartilhadas a cada reunião e conversas informais;

As **minhas grandes amigas,** Enieze Cardoso e Tuanny Maciel, companheiras de estudo, pela paciência e conselhos, pelos momentos compartilhados, pelas situações de risos e lágrimas, pelo ombro amigo e abraço seguro, pelas experiências vivenciadas e por sempre acreditarem na minha capacidade que é dom e graça de Deus;

A **todos meus amigos**, pelos momentos vividos, pela presença em meus dias e pelas descontrações e alegrias;

A **todos os professores**, em especial, Milton de Lacerda, Antônio Sales, Everaldo Souto, Uberlândio Severo e Rogéria Gaudêncio, pelas contribuições direta ou indiretamente que me fizeram crescer como estudante de matemática e também como pessoa.

“A sabedoria muitas vezes está mais
perto quando nos curvamos do
que quando nos elevamos.”

William Wordsworth

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo analisar a abordagem do conceito de função em quatro coleções de livros didáticos, apontando de que forma o Movimento da Matemática Moderna repercutiu em suas estruturas metodológicas. Inicialmente fizemos um breve histórico sobre o surgimento do conceito de função ao longo dos tempos, desde períodos remotos até o presente, e como se deu a inserção desse assunto no ensino secundário do Brasil. Seguindo, apontamos como surgiu o Movimento da Matemática Moderna em nível mundial e brasileiro. Com base nesse conhecimento, fizemos uma síntese de como o conceito de função era abordado no período pré-matemática moderna e na matemática moderna partindo então para a análise dos livros didáticos. Essa análise foi realizada de forma exterior, apontando seus aspectos bibliográficos e em seguida de maneira interior, levando em consideração os aspectos metodológicos. Logo após fizemos algumas observações em pesquisas do período de 1990 a 2001, que tratavam das dificuldades encontradas pelos alunos ao estudarem o conceito de função e, apoiados nessas observações foram feitas algumas críticas ao currículo tradicional e ao currículo moderno. Por fim, apontamos algumas sugestões a serem utilizadas pelos professores no que se refere ao ensino de função

Palavras-chave: conceito de função, movimento da Matemática Moderna, livros didáticos.

ABSTRACT

This research work aims to examine the approach of the concept of mathematical function as presented by four collections of textbooks, pointing out how the Modern Mathematics Movement impacted on their methodological structures. Initially, we present an outline of the history of the emergence of the concept of function over time, from remote past to the present day, and how this subject was introduced in secondary school education in Brazil. Subsequently, we turn our attention to analyzing the context in which the Modern Mathematics Movement took place in Brazil and abroad. Based on this knowledge, we give an overview of how the concept of function was addressed in pre-modern mathematics and modern mathematics periods; we then proceed to analyze the textbooks. This analysis was firstly performed from an external viewpoint, emphasizing bibliographical aspects and then from an internal standpoint, taking into account their methodological aspects. As a natural step forward we examine some research works published from 1990 to 2001 dealing with difficulties faced by students when learning the concept of mathematical function, and taking these observations as a basis we present a critique of traditional and modern curricula of school mathematics. Finally, we point out some suggestions to be used by mathematics teachers in teaching functions.

Keywords: concept of function, modern mathematics movement, textbooks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS /SIGLAS

CIAEM	Comitê Interamericano de Educação Matemática
CIEM	Comission Internationale de l'Enseignement Mathematiqué
GEEM	Grupo de Estudos de Ensino da Matemática
IBEP	Instituto Brasileiro de Pesquisa Pedagógica
MMM	Movimento da Matemática Moderna
OECE	Organização Européia de Cooperação Econômica
PUC - RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC - SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UNIBAN	Universidade Bandeirante de São Paulo
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

Nosso trabalho de pesquisa foi motivado pela inquietação ao notar as dificuldades encontradas pelos alunos ao estudarem o conceito de função. Ao investigarmos o contexto histórico da disciplina de matemática, percebemos que essas dificuldades eram consequências de movimentos reformistas que a mesma tinha sofrido em períodos anteriores.

Esses movimentos vêm desde a unificação das disciplinas álgebra, aritmética e geometria, antes tratadas de maneira independente. Tal unificação resultou na disciplina matemática e aconteceu em 1929, defendida pelo professor Euclides Roxo (1890 – 1950). Além dessa junção, Roxo também defendia a inclusão do conceito de função no ensino secundário. Da década de 1920 até a década de 1950, o ensino de matemática sofreu várias modificações com as reformas de Francisco Campos (1932), Capanema (1942) e Simões Filho (1951).

No entanto, as discussões sobre o ensino da matemática e o desejo de mudança não pararam por aí. Na década de 1960 eclode o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, tendo à frente Osvaldo Sangiorgi. Esse movimento buscava uma visão diferente para o assunto tanto na forma como os conteúdos eram transmitidos, como nos conteúdos em si. Desse modo, tanto os alunos, quantos os professores que ensinavam na época foram bastante prejudicados por tais reestruturações. No entanto, no nosso trabalho vamos nos deter a falar apenas sobre como esse movimento afetou os alunos, visto que essas mudanças desejadas pelo Movimento da Matemática Moderna eram implantadas também nos livros didáticos e este fazendo parte do processo de aprendizagem do aluno torna-se objeto importante a ser observado.

Nesse sentido, nós procuramos fazer uma análise de quatros livros didáticos que dão uma amostra dos movimentos citados acima, observando quais foram as mudanças no tratamento dado ao conceito de função em cada período.

- Objetivos Gerais

  - No nosso trabalho temos por objetivos gerais analisar como o conceito de função é abordado em alguns livros didáticos compreendidos entre as décadas de 1950 e 1970;

- A partir dessa análise identificar as influências que o Movimento da Matemática Moderna causou e em que medida esse tratamento dado pela matemática moderna ao conceito de funções continua gerando dificuldades nos alunos.

➢ Objetivos específicos:

- Apontar como se deu o surgimento do conceito de função na sociedade e como este foi inserido no curso secundário no Brasil;
- Apresentar o que pretendiam os defensores da Matemática Moderna e como esta chegou até o Brasil;
- Investigar a abordagem do conceito de função em alguns livros didáticos no período anterior e posterior à matemática moderna;
- Identificar as dificuldades dos alunos ao depararem-se com o conceito de função moldado com os preceitos da Matemática Moderna;
- Apontar sugestões de abordagem no conceito de função.

A nossa investigação se deu por meio de busca em acervos culturais, dissertações no âmbito da Educação Matemática e livros, com destaque para Valente (2004), Valente (2008), Kline (1976), Braga (2006).

Dessa forma, nosso trabalho foi estruturado da seguinte forma:

- **Capítulo 1 – Introdução:** Apresenta algumas justificativas para a escolha do tema e em seguida cita algumas reformas que aconteceram no ensino da matemática. Ressalta quais os objetivos gerais e específicos do nosso trabalho.
- **Capítulo 2 - O conceito de função:** Aponta como se deu o surgimento do conceito de função, enfatizando a Idade Moderna, finalizando com a definição usual dada pelo grupo Bourbaki. Relata ainda como se deu o movimento que inseriu o conceito de função no ensino secundário, apontando as dificuldades encontradas por Euclides Roxo na defesa do seu ideário.

- **Capítulo 3 – O Movimento da Matemática Moderna:** Apresenta quais principais motivos deram origem a esse movimento no mundo e seus precursores. Aponta como esse movimento foi difundido no Brasil e quais suas motivações e principais defensores.
- **Capítulo 4 – Análise das coleções de livros didáticos das décadas de 1950 a 1970:** Nesse capitulo é dada uma ideia de como se fará a nossa análise dos livros e são apresentados ao leitor alguns aspectos bibliográficos dos mesmos. Por fim, analisamos cada um separadamente no que diz respeito ao tratamento que é dado ao conceito de função.
- **Capítulo 5 - Dificuldades, críticas e sugestões para o ensino:** Neste capítulo, inicialmente são discutidas algumas dificuldades encontradas pelos estudantes ao serem apresentados ao conceito de função, baseando-nos em algumas pesquisas de mestrado e doutorado. A partir das dificuldades apresentadas são feitas algumas críticas aos currículo tradicional e moderno e, por fim, são apontadas algumas sugestões para o ensino.
- **Capítulo 6 – Considerações finais:** No último capítulo retomamos nosso objetivo inicial e apontamos algumas contribuições do trabalho de pesquisa para nosso conhecimento. Por fim, sugerimos alguns futuros trabalhos tratando desta mesma temática.

2 – O CONCEITO DE FUNÇÃO

Nesse capítulo, apresentamos como se deu o surgimento do conceito de função ao longo de toda a história, desde tempos remotos até os conceitos utilizados nos dias atuais e, após esse histórico, discutiremos um pouco sobre o movimento que gerou a inserção do conceito de função no ensino secundário do Brasil.

2.1 - O SURGIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A construção do conceito de função, assim como a de qualquer conceito matemático, não se dá em apenas um momento da história, mas depende de fatores sócioculturais que estão ligados à necessidade de cada época. Desde tempos remotos, o homem já desejava compreender os fenômenos da natureza e quais suas interrelações. Para tanto, era preciso recortar do todo uma parte que fosse importante para analisá-la. Por exemplo, para estudarmos o crescimento de uma planta, precisamos verificar o clima e o solo em que se dará esse crescimento. Assim, surgem várias relações, como por exemplo, crescimento versus clima. Dessa forma, tentando resolver problemas de interdependência e fluência foi que surgiu de maneira intuitiva o conceito de funções. Como afirma Zuffi (2001, p.11),

> ... não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo] (...) As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a idéia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

Na Antiguidade, existiam vários estudos visando verificar as dependências entre quantidades. Já na Idade Média esses estudos continuaram, mas já começaram a surgir as representações geométricas e mecânicas. Voltando para a construção do conceito de função na Idade Moderna, observamos que Leibniz (1649-1716), em 1694, usou pela primeira vez o termo função. Ele considera função como “os segmentos de retas obtidas por construção de retas correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada” (Oliveira, 1997). Conforme afirma Zuffi (2001, p.11), as primeiras definições de função eram dadas por expressões algébricas, como nos mostra a definição dada por Jean Bernoulli (1667-1748), na qual “*Função* *de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes"*. Bernoulli interessava-se em estudar funções que fossem bem comportadas, tendo dado grandes contribuições, como o aprimoramento das regras de L'Hospital e à Geometria Diferencial, com seus estudos sobre geodésias. Ele utilizou algumas notações para o termo função, onde a que mais se aproximou da atual é dada por fx. Uma outra definição, bastante semelhante com a dada por Bernoulli, é a definição de Euler (1707-1783), a citar "*Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes".* Observe que Euler já começa a tratar de expressões analíticas, no entanto, segundo Zuffi (2001, p.12) essa definição não deixava claro o que seria essas expressões analíticas. Euler contribuiu ainda para a linguagem simbólica e algumas notações que utilizamos, como por exemplo, $f(x)$ que expressa uma função de x.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), por sua vez, definiu função da seguinte forma: "*Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com as outras quantidades, que se vêem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis"*. Descartes (1596-1650), na tentativa de algebrizar a geometria, introduziu formas euclidianas dentro de um plano bidimensional formado por dois eixos perpendiculares, hoje conhecido por plano cartesiano. Muitos outros matemáticos, como Galileu, Newton, Cauchy, entre outros, tiveram sua colaboração para a construção do conceito de função. A definição que hoje é utilizada em todos os meios científicos e matemáticos é do grupo francês, conhecido por Bourbaki, que prezava pelo formalismo e pelo método axiomático. Segundo Chaves e Carvalho [3], a definição formulada em 1939 é a seguinte:

> Sejam A e B dois conjuntos, uma relação entre uma variável $x \in A$, e uma variável $y \in B$ é dita relação funcional se a qualquer que seja $x \in A$, existe um único elemento y de B, que esteja na relação considerada.

Dessa forma podemos ver que a construção do conceito de função foi sendo formulada ao longo do tempo. A inserção desse conceito no ensino secundário do Brasil também passou por determinados processos, não acontecendo em um único momento, nem foi muito aceito por alguns matemáticos da época, como veremos a seguir.

2.2 - A INSERÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO SECUNDÁRIO DO BRASIL

A inserção do conceito de função no ensino secundário brasileiro deu-se pela criação de uma nova disciplina, no ano de 1929, denominada matemática, formada pela unificação de três disciplinas, álgebra, aritmética e geometria, antes tratadas de forma independente. Essa unificação foi motivada por um movimento internacional de modernização do ensino secundário da matemática, liderado por Felix Klein (1849 – 1925) e que tinha como principais objetivos a união dos diferentes ramos da matemática e a inclusão do conceito de função com o papel de eixo central dos diversos assuntos matemáticos. No entanto, como se deu o surgimento desse movimento e como ele interferiu no Brasil?

No início do século XX, o mundo passava por grandes mudanças nos setores econômico, político e social. Com a revolução industrial, percebia-se a urgência em novas qualificações de profissionais. O ensino secundário necessitava de uma ampla reforma em seu currículo, para atender as necessidades que a sociedade exigia naquela época, pois com a revolução industrial evidenciava-se a busca pela mão de obra qualificada. Nos primeiros anos de 1900, tornam-se visíveis iniciativas de alguns países em realizar essas reformas, onde podemos citar a Alemanha, por exemplo. Em 1908, em Roma, ocorreu o IV Congresso Internacional de Matemática, e foi o primeiro congresso que reuniu estudiosos do mundo inteiro para tratar do ensino. Nesse congresso, foi criado a Comissão Internacional de Ensino em Matemática (Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique – CIEM), que teve como primeiro presidente Felix Klein. O objetivo inicial desse comitê era realizar um diagnóstico do ensino nos países mais desenvolvidos. No entanto, logo o comitê passou a ser observado como agente de mudança, que defendia a ideia de urgência na reforma do ensino. Felix Klein, matemático alemão, que desejava a princípio realizar mudanças no ensino superior, percebeu que a reforma deveria começar pela educação básica. Como presidente do CIEM, percebeu a oportunidade de ampliar suas ideias.

No Brasil, existiam professores ligados a esse movimento modernizador, um deles Arthur Thiré, professor do Colégio Pedro II, que era referência nacional da época. Em 1912, ocorre o V Congresso Internacional da Matemática, e Thiré designa Eugênio Barros Raja Gabaglia como representante do Brasil. No entanto, a sua viagem não propiciou nada de concreto em termos de mudanças o que se confirma pelo fato de que era um professor bastante conservador e tradicional e não via necessidades de mudança. Paralelo a ele, tínhamos o professor Euclides Roxo (1890-1950), aluno Colégio Pedro II no início do século e convidado a dar aulas na mesma instituição no ano de 1915. Roxo foi o grande mentor do movimento modernizador no Brasil. Ele encontrou muitas resistências às idéias defendidas por esse movimento e isso acabou gerando dificuldades para que surgissem discussões dentro do Colégio sobre o que era proposto. Dentre os opositores encontrava-se o professor Eugênio Barros Raja Gabaglia e Joaquim Inácio de Almeida Lisboa. Com a morte de Gabaglia em 1919 e pela licença temporária de Lisboa durante os três últimos anos da década de 20, a situação de Roxo começa a ficar favorável.

Em 1923, Roxo lança seu livro, “Lições da Aritmética” e esse é considerado um passo importante diante dos seus objetivos. Nesse livro, Roxo já expressava suas idéias, ainda que em pequenos traços. Em 1925, Roxo assume a direção do Externato Pedro II. Sua proposta de unificação curricular da matemática foi aprovada na Ata da Congregação do Colégio Pedro II em 14 de Novembro de 1927, após muita luta.

Essa unificação, segundo Braga,

> ...se fazia necessária para atender principalmente a duas concepções modernizadoras. A primeira delas referia-se as exigências de se estabelecerem conexões entre os diversos ramos da matemática escolar. (...) A segunda concepção delegava à noção de função com suas representações algébrica, geométrica e tabular o papel de coordenadora dos diversos assuntos da matemática do secundário. (Braga, 2006, p.69)

Em 12 de Janeiro de 1929, é assinado o Decreto 18564 que oficializa as propostas modernizadoras defendidas por Roxo. Ainda em 1929, Euclides Roxo, lança o livro ”Curso de Matemática Elementar”, volume 1, elaborado com as ideias do novo programa e com um novo método de ensino.

No entanto, eclode a revolulção de 1930 e em 1931 é decretada uma ampla reforma no ensino brasileiro, a Reforma Francisco Campos. Delegado primeiro ministro do recém-criado, Ministério da Educação e Saúde, Fransciso Campos, fragmenta o ensino secundário em dois ciclos, o ensino fundamental com cinco anos e o ensino visando a preparação para o ensino superior com dois anos. Quando Vargas assume a presidência, Roxo pede exoneração do cargo de diretor do Externato do Colégio Pedro II, mas no mesmo ano é nomeado por Vargas e Campos como diretor do Internato do Colégio Pedro II e é convidado a participar da organização de uma reforma para o ensino brasileiro. No entanto, todas as suas propostas para inovação do ensino secundário logo voltam a ser criticadas. Com o retorno de Lisboa, é travada uma grande luta entre ambos. Em meio às discussões, Roxo destaca em um de seus artigos “o conceito de função como eixo axial do ensino”. A intenção de Roxo, segundo Rocha (2001, apud Valente, 2002, p.19) afirmava era de “familiarizar desde cedo o aluno com a noção de função, por meio de sua representação gráfica e analítica, e dela fazer o ponto central do ensino, de maneira a possibilitar a conexão entre as diversas partes da matemática.”

Assim, o conceito de função é inserido na matemática escolar nos programas advindos da Reforma Francisco Campos. Essa presença, desde o primeiro ciclo é assegurada por uma política educacional rígida e autoritária.

Em 1934, o Ministério da Educação e Saúde é assumido por Gustavo Capanema. Em Janeiro de 1936, Capanema decide realizar um inquérito sobre a educação no Brasil, distribuindo um extenso e detalhado questionário. Além deste, muitos outros meios de pesquisa são realizados por ele, na busca de uma reorganização do sistema de ensino nacional. A Reforma Capanema é promulgada em 9 de Abril de 1942, por meio do Decreto 4.244. Esta reforma visava reorganizar a divisão do ensino secundário, continuando com dois ciclos. No entanto o primeiro tinha quatro ciclos, conhecido por curso ginasial, e no segundo ciclo, com três anos, que seria o curso colegial, em duas modalidades, clássico e científico. A Portaria Ministerial forma uma comissão para organização do programa de ensino, com Capanema como presidente e Roxo um dos integrantes. Existiam ainda aqueles que representavam a Igreja, Arlindo Vieira e os militares, Azevedo Amaral.

No dia 20 de maio de 1942, Roxo envia uma carta a Capanema com sua proposta para os programas do ensino no curso ginasial. Ao receber esta proposta, Capanema a envia para Vieira e Amaral. Arlindo Vieira faz várias sugestões, e a única exclusão que ele defende é a principal ideia de Roxo. Para ele, incluir a noção de função no curso ginasial seria confundir os alunos naquele momento. Por outro lado, os militares demonstraram concordância com as propostas sugeridas por Roxo. Em 11 de Junho de 1942, a decisão ministerial acata a sugestão de Arlindo Vieira e a noção de função é retirada do ensino ginasial, ou seja, do primeiro ciclo do ensino secundário.

Na década de 1950, entrou em vigor a Reforma de Simões Filho e foi conduzida pelas portarias 966, de 2 de Outubro de 1951 e 1045, de 14 de Dezembro de 1951.Essa reforma trouxe para o ensino secundário no Brasil, os chamados “Programas mínimos”. Esse programa tinha a intenção de estabelecer um limite mínimo de conteúdos, os quais todas as instituições escolares teriam a obrigação de executar. Além de defender a reorganização do currículo da matemática no ensino secundário, a Reforma de Simões Filho propôs um programa de ensino com 3 horas semanais para a disciplina de Matemática. Segundo a portaria 1045, existiam algumas diferenças com relação aos conteúdos entre o curso clássico e científico, no entanto o conceito de função seria visto em ambos os cursos e apenas na 3ª série. Diante da instituição desse novo programa para a matemática, o diretor do Externato do Colégio Pedro II, professor Gildásio Amado comenta que:

> Os programas de ensino secundário eram elaborados por comissões designadas pelo Ministro da Educação. Em 1951, a Congregação do Colégio Pedro II reivindicou que ela própria fizesse os programas das matérias ensinadas no Colégio. O Ministro Simões Filho, foi além: determinou que os Programas do Colégio Pedro II fossem oficiais para todos os estabelecimentos secundários do país. Os programas encaminhados ao Ministro – dizia o presidente da Congregação – "contêm a matéria mínima e permitem que os professores do ensino secundário neles encontrem um roteiro disciplinador, sem prejuízo da liberdade de apresentação dos assuntos de conformidade com as conveniências didáticas". Eram, portanto, "programas mínimos". (Amado, 1973 apud Valente 2008, p.20)

No entanto, os "Programas Mínimos" não obtiveram o sucesso que era esperado e foram muito criticados por diversos autores de livros didáticos. Assim, podemos perceber que houve grandes movimentações no ensino da matemática durante esse período. Um pouco depois, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, as formas como eram aplicados os conteúdos matemáticos passaram a ser questionados, como veremos no capítulo seguinte.

3 – O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Nesse capítulo discutiremos sobre o Movimento da Matemática Moderna a nível mundial e brasileiro, suas críticas a matemática tradicional e quais seus principais objetivos e defensores.

3.1 – O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO MUNDO

Na década de 1950, o mundo estava inserido num contexto de pós-guerra, onde a disputa tecnológica e científica estava cada vez mais evidenciada. Segundo Henrique Guimarães (2007, apud Larovente 2008, p.49), foi nesse ambiente que a matemática moderna surgiu. Assim, o principal motivo do seu surgimento não se deu por interesses na mudança do ensino e dos conteúdos, mas por uma necessidade de novos conhecimentos científicos e tecnológicos, visando interesses políticos e sociais. A matemática moderna teve seu desenvolvimento nos Estados Unidos e paralelamente em alguns países da Europa. Os Estados Unidos, ao entrarem na Segunda guerra mundial, logo perceberam que os seus estudantes eram deficientes em matemática, conforme nos sugere Sangiorgi:

> A verdade é que depois do lançamento do "Sputink", pelos russos, em 1957, houve como que uma nova tomada de posição, por parte dos educadores norte-americanos, em relação à estrutura do ensino de seu país, notadamente na parte que dizia respeito à Matemática e as Ciências, de um modo geral. (Sangiorgi, 1960, apud Valente, 2008, p.27)

Como já foi citado, não foi a necessidade de modificar o ensino secundário o principal motivo para essa reforma no currículo da matemática, mas o contexto do período pós-guerra em que os países estavam inseridos, como por exemplo, o lançamento do primeiro satélite soviético, Sputnik, em 1957, que levou os Estados Unidos a refletir urgentemente sobre uma reforma no ensino da matemática, em busca de superar a União Soviética, em termos de tecnologia e ciência.

Dessa forma, os Estados Unidos, na busca de ultrapassar os Russos numa "corrida ao espaço", perceberam a necessidade de uma nova formação para engenheiros e cientistas. Isso fez com que o presidente, John Kennedy, convidasse cientistas, particularmente matemáticos de diversas partes do mundo para juntar-se aos norte-americanos nessa disputa com os russos, querendo colocar o homem no espaço em 10 anos.

Criado pelo professor Marshall Stone, dos Estados Unidos, em 1961, o CIAEM (Comitê Interamericano de Educação Matemática), tinha por objetivo reunir países da América para tratarem da Educação Matemática. Paralelamente aos Estados Unidos estava a Europa, que também vinha em busca de modernizar o currículo da matemática. Essa busca iniciou-se, com o inquérito, que foi realizado pela Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE), que tratava da situação em que se encontrava o ensino da matemática nos países europeus. Teve continuidade numa sessão de trabalhos, conhecida por seminário de Royaumont, em 1959, com a participação de Jean Dieudonné, um dos líderes do grupo de pesquisa conhecido por Bourbaki. Dieudonné ainda apresentou um livro "*L'enseigment dês Mathematiquees",* com temas que tratavam da introdução da matemática moderna no ensino secundário.

O grupo Bourbaki defendia o ensino da matemática dado por uma sistematização das relações matemáticas baseado nas noções de estruturas algébricas, de ordem e topológicas. Possuíam três idéias centrais: a unidade matemática, o conceito de estruturas e o método axiomático.

Além de necessitar de novos conteúdos, os modernistas defendiam mudanças na maneira como se ensinava. No entanto, a principal mudança seria no currículo do ensino secundário da matemática: alguns conteúdos seriam excluídos e outros reformulados. Assim, os conteúdos propostos seriam: teoria dos conjuntos, conceito de grupo, anel e corpo, espaços vetoriais, matrizes, álgebra de Boole, noções de cálculo diferencial e integral e estatística. Segundo Kline os professores que defendiam a matemática moderna tinham a seguinte mensagem principal: "o ensino da matemática tinha malogrado porque o currículo tradicional oferecia matemática antiquada, pela qual se referiam a matemática criada antes de 1700" (Kline, 1976, p.34).

No entanto, ainda Kline, não concordando com essa ideia, justifica que os professores que defendiam a matemática moderna, ao pensarem dessa forma,

> ...ignoravam completamente o fato de que a matemática é um desenvolvimento cumulativo e que é praticamente impossível aprender as mais novas criações se se desconhecem as mais antigas (Kline, 1976, p.35).

Como já foi citado, a reforma curricular resultou numa mudança na forma como os assuntos eram ministrados e na inclusão de novos conteúdos. Este último, no entanto, era o mais discutido e enfatizado pelos professores, onde alguns grupos de estudo, como por exemplo, o

Royaumont, na França, 1959, sugeriam que todo conteúdo anterior fosse abandonado, inclusive a geometria euclidiana.

3.2 - O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL

A década de 1950 no Brasil é marcada por grandes modificações. Eram tempos de redemocratização e de crescimento industrial gerando aumento na necessidade da mão de obra qualificada. O projeto de construção de Brasília tornou-se fator influente na modernidade político-econômica. Em São Paulo, ocorre um aumento expressivo da população passando de 239.820, em 1900, para 2.662.786, em 1950, conforme nos informa a citação abaixo

> São Paulo transformar-se na maior metrópole brasileira, e ao mesmo tempo, o maior centro industrial latino-americano, gerando sozinha, mais de 50% de toda a população industrial do país. (SEVCENKO, 2000, p.12 apud VALENTE, 2008, p.1).

Nessa mesma década, cresciam também as campanhas visando a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e a luta pela escola pública. Em 1959, veio a público o "Movimento dos Educadores" que defendia a existência das duas redes de ensino, público e privado. Crescia a população dos alunos que ingressavam no ensino secundário, chegando a 360 mil, em 1960.

Com isso aumentou também a produção dos livros didáticos, onde podemos destacar Osvaldo Sangiorgi, dentre os que faziam parte da Companhia Editora Nacional, fundada em 1920. Sangiorgi era ótimo professor e muito disputado pelas famílias ricas de São Paulo. A princípio baseava-se pelos livros de Ary Quintela para organizar suas aulas, segundo sua própria opinião, no entanto, com as experiências que foi obtendo no curso que lecionava aos normalistas começou a empolgar-se para publicar seus próprios livros, como nos informa Wagner (2008, p.18),

> ...motivou-se a elaborar uma de suas primeiras publicações pela Companhia Editora Nacional: o livro "Matemática e Estatística", obra destinada ao instituto de educação e escolas normais. O texto teve na sua primeira edição de abril de 1955, 10030 exemplares, de acordo com o "Mapa das Edições" da editora, que pertence hoje, ao acervo histórico do IBEP (Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas).

Outra publicação de Osvaldo Sangiorgi foi a coleção de quatro volumes, “Matemática – curso ginasial”, a qual foi considerado carro-chefe das suas publicações na Companhia Editora Nacional, lançado em 1953. O volume para o 1º ano dessa coleção teve em fevereiro do mesmo ano, tiragem de 20213 exemplares, em Julho com tiragem de 20216 e em Novembro, com tiragem de 25266. Assim, saíram também, os volumes para o 2º e 3º ano. Essa publicação, diferente da primeira, estava ligada a organização do ensino para a matemática. Sangiorgi, referindo-se ao programa de ensino da matemática afirma que

> O ensino da Matemática, como o de outras disciplinas, tem sofrido enormemente com as sucessivas reformas do ensino secundário. Realmente não temos tido sorte nas diversas programações efetuadas desde a Reforma Francisco Campos, em 1931, reforma Capanema, em 1942 e reforma Simões Filho, em 1951. Como estamos com novo ministério já ensaia, como não poderia deixar de ser, mais um nova reforma. Até parece que a preocupação dos novos titulares da Educação é marcar respectivas passagens pelo ministério com reformas do ensino médio, esquecendo-se numa hora dessas que os mais visados com isso são justamente os menos culpados: os alunos (Sangiorgi, 1954 apud Valente, 2008, p.21).

Osvaldo Sangiorgi também critica os “Programas Mínimos” ao defender que deveriam ser atribuídas 5 horas semanais para a disciplina de matemática e não 3 horas. Ele tinha um posicionamento contrário aos programas vigentes e defendia uma formação matemática diferenciada para os normalistas. Para Sangiorgi, a diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna era que a primeira tinha por base elementos simples, como os números inteiros, o ponto, a reta, já a segunda tinha por base um sistema operatório e uma serie de estruturas.

Segundo Kline (1976) existiam grandes falhas no currículo da matemática tradicional que era aplicada no ensino. A álgebra apresentava processos mecânicos e forçava o estudante a memorização e não a compreensão. Era grande o número de técnicas e algoritmos. A geometria passa a priorizar seu aspecto dedutivo, visto que os conteúdos começavam com axiomas, definições, e em seguida teoremas com demonstrações feitas por raciocínio dedutivo. No entanto, no final, dava no mesmo, bastava decorar tudo. Existia falta de motivação, o aluno não sabia por que estudar matemática. Os problemas eram mal contextualizados. Dessa forma eram urgentes novas propostas para o ensino da matemática no Mundo e em particular, no Brasil.

Em 1960, Sangiorgi estagiou nos EUA, onde fez dois cursos, os quais tinham por título, Summer Institute for High School e College Teachers of Mathematics, ocorrido no período de junho a agosto de 1960 na universidade de Kansas e foi realizado no departamento de matemática da própria instituição. Depois desses dois cursos começou a articular modificações que seriam feitas na sua obra "Matemática – curso ginasial". Logo após a participação de Sangiorgi nesse estágio, foi criado o GEEM (Grupo de Estudos de Ensino da Matemática) que tinha o objetivo de promover cursos para o ensino secundário, visando a formação de professores de matemática em relação à matemática moderna, mas não tinha a intenção de substituir a graduação. Os cursos oferecidos pelo grupo eram: Teoria dos Conjuntos, Lógica Matemática e Práticas Modernas, Cálculo e Álgebra.

Em 1962, ocorre o IV Congresso de Ensino da Matemática, em Belém (PA). Osvaldo Sangiorgi se aproveita do momento para divulgar seus pensamentos modernizadores para a matemática e o GEEM apresenta uma proposta para o currículo do ensino da matemática. Essa proposta seria conhecida por *Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática* e foi resultado de várias discussões entre os membros do grupo. Essa proposta foi aprovada e ratificada no V Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, realizado em São José dos Campos (SP), em 1966. Daí

> O programa proposto foi o primeiro a incorporar matemática moderna no currículo. (...) Para o secundário, a sugestão foi que os tópicos se aproximassem da teoria dos conjuntos e das estruturas algébricas. Maior ênfase foi dada ao estudo das propriedades das operações, o estudo de diferentes sistemas numéricos foi recomendado, assim como o estudo das funções (D´AMBROSIO apud SILVA, apud Valente e Lopes [2]).

Segundo Burigo [1], essa proposta não organizava os conteúdos de acordo com as séries. Tal organização viria no documento "Sugestões para um Roteiro de Programa para a Cadeira de Matemática" (GEEM, 1965). Assim, a matemática moderna começa a tomar espaço no cenário brasileiro, conforme Valente (2008) nos informa:

> O cenário construído para a entrada da matemática moderna no ensino brasileiro teve seu ápice com o lançamento de uma coleção de livros didáticos. Em 1963 a Cia Editora nacional lança o volume um da obra, matemática – um curso moderno, de Osvaldo Sangiorgi.

Para Sangiorgi a matemática clássica estava responsável por resolver problemas com fórmulas prontas, já a matemática moderna, criando estruturas gerais, colocava num ponto bem mais amplo. Era preciso renovar os programas da matemática para o ensino secundário e aproximá-los da matemática ensinada nas universidades

Os livros de Sangiorgi tinham por princípio o que era defendido pelo Movimento da Matemática Moderna, o estudo das estruturas matemáticas que iria propiciar a tomada de consciência de propriedades já utilizadas. Tinham muito rigor e precisão. Para Sangiorgi, era necessário aprender os conceitos e propriedades e não memorizá-los.

O Movimento da Matemática Moderna enfatiza as propriedades e definições dos conteúdos. O currículo proposto por este movimento sugere uma abordagem lógica no ensino da aritmética e álgebra, afirma que a ênfase deles sobre a estrutura lógica ensina o aluno a pensar dedutivamente. Alguns líderes da Matemática Moderna desejam apresentar um desenvolvimento dedutivo rigoroso. Para eles a linguagem do currículo tradicional era imprecisa, a maneira como os problemas eram escritos era muito vaga. A nova matemática explora muito a simbologia, alegando que esta traz precisão, exatidão. Para os modernos, a matemática era auto-suficiente, auto-criadora. Eles separam a matemática do mundo físico, e veem a matemática isolada, achando que a matemática em si própria seria atrativa para os jovens. Alegam que o ensino das estruturas é o que unifica um corpo matemático porque mostra que os teoremas seguem de um conjunto de axiomas e são dispostos numa sequência lógica. Em resumo, a matemática moderna tinha como características, segundo Kline: "O desenvolvimento lógico como a estrada para a compreensão, o rigor, a precisão através da terminologia, o simbolismo e a ênfase na matemática" (Kline, 1976, p.108).

Para os modernos, se um estudante compreende o conceito geral de determinado conteúdo compreenderá as suas particularidades. Diante de todas essas mudanças que o currículo da matemática sofreu, tanto com relação aos conteúdos, como nas metodologias, será feita uma análise de algumas coleções no período pré-Matemática Moderna e no período da Matemática Moderna, no que diz respeito ao tratamento dado ao ensino de função no segundo ciclo do ensino secundário.

4 - ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DAS DÉCADAS DE 1950 A 1970

Neste capítulo será feita uma abordagem do conceito de função no período pré-matemática moderna e no período da matemática moderna e, logo após, serão analisados alguns livros didáticos, desses dois períodos.

4.1 – EVOLUÇÃO DA ABORDAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Como vimos em capítulos anteriores, os conteúdos de matemática passaram por diversas transformações, buscando sempre atender aos objetivos dos precursores de cada época. De acordo com esses objetivos o conceito de função é abordado de algumas formas diferenciadas, no entanto, não sendo de formas estritamente divergentes, pois em todos os casos o conceito de função é visto como unificador da matemática. Já citamos que o movimento modernizador do ensino da matemática no Brasil teve seu marco inicial por volta das décadas de 20 e 30 do século XX.

No período pré-matemática moderna, Euclides Roxo, ao defender a inserção do conceito de função, afirmava que este era o eixo central da matemática e deveria ser visto de forma gradativa. O professor deveria estar atento para trazer os alunos a perceberem também a relação de dependência de uma grandeza com relação a outras. Pouco tempo depois, ainda no período que antecede a matemática moderna com a criação dos "Programas Mínimos", o conceito de função era o conteúdo que daria "porta de entrada" para o cálculo infinitesimal. Essa afirmação fica clara quando observamos esses programas que tratam o conceito de função na 3ª série do 2º ciclo na seguinte distribuição:

> I Tópico – Conceito de função; representação cartesiana, reta e círculo; noção intuitiva de limite e continuidade;
> II Tópico – Noção sobre derivadas e primitivas; interpretações e aplicações
> (Portaria nº1045, 14 de Dezembro de 1951)

Assim, podemos notar que o conceito de função nas coleções didáticas desse período estava intimamente ligado com o cálculo infinitesimal. Como não analisamos todos os livros desse primeiro período considerado, não podemos generalizar, no entanto os dois livros que observamos abordam o conceito de função, identificando-os em duas classes de funções, as unívocas, em que a cada valor da variável livre corresponde um único valor da função e funções plurívocas, onde a cada valor da variável livre poderá corresponder mais de um valor da função. Essa característica no leva a acreditar que nessa época, função era vista como uma relação, no sentido que hoje é adotado.

Osvaldo Sangiorgi, precursor da matemática moderna no Brasil, cita a necessidade de estudar a matéria, em certos aspectos que destacam a indiscutível unidade da matemática. Segundo ele dois desses aspectos seriam: "o papel central desempenhado pelas estruturas matemáticas (...) e o importantíssimo conceito de relação e, mais especificamente, conceito de função."

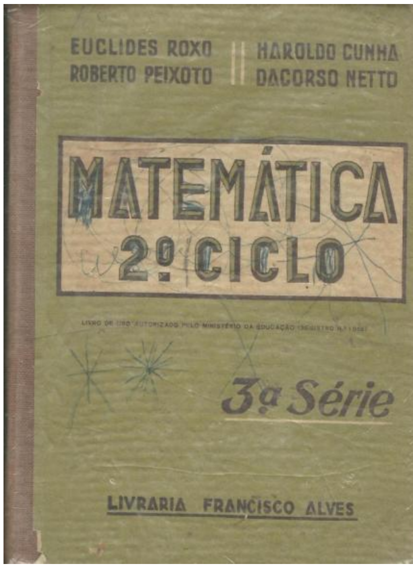
Assim, podemos perceber que o conceito de função na matemática moderna é defendido como base para o estudo das estruturas, tanto que nos livros didáticos antes de estudar-se função são necessários alguns pré-requisitos como as noções de conjuntos e relações. Função é considerada uma correspondência entre dois conjuntos, uma correspondência unívoca. Os livros didáticos da matemática moderna trazem o estudo de função muito detalhado, enfatizando suas propriedades e com uma linguagem bastante formal levando em conta aspectos da teoria dos conjuntos.

Essas afirmações sobre como o conceito de função foi abordado em determinados contextos serão destacadas nas próximas seções deste capítulo, onde serão feitas análises de livros didáticos de períodos entre as décadas de 1950 e 1970.

4.2 – APRESENTAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Esta seção tem a intenção de propiciar ao leitor um primeiro contato com os livros didáticos, objetos da nossa pesquisa, levando em consideração seus aspectos bibliográficos. Serão analisados quatro livros didáticos, dois ligados ao movimento da matemática moderna e dois que trazem idéias contrárias e anteriores a esse movimento.

O primeiro livro (Livro 1) a ser analisado será

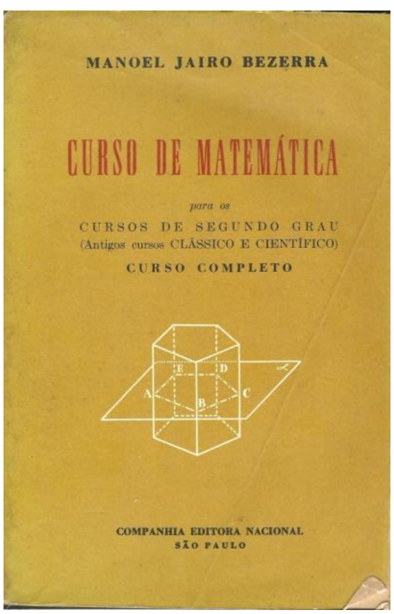


MATEMÁTICA, 2º CICLO, 3ª SÉRIE.
ROXO, E. ; PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; NETTO, D.
4ª Edição, Editora Paulo de Azevedo, Livraria Francisco Alves, 1955.

Figura 1 – Livro didático: MATEMÁTICA, 2º CICLO, 3ª SÉRIE.

O livro está de acordo com a portaria ministerial 1045 de 14 de Dezembro de 1951. Os professores Euclides Roxo e Haroldo Lisboa da Cunha faziam parte do corpo docente do Colégio Pedro II e os professores Roberto Peixoto e Cesar Darcoso Netto, do Instituto de Educação.

O nosso segundo livro (Livro 2) a ser analisado será



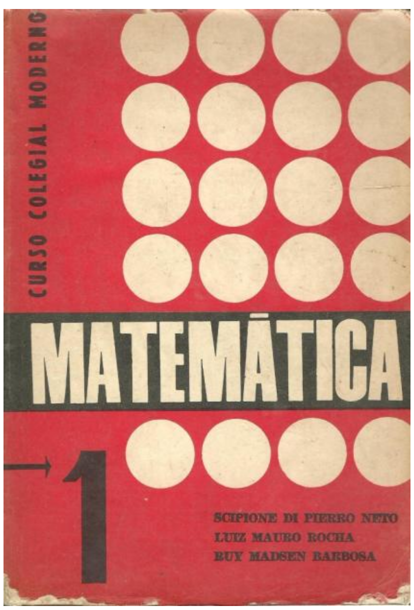
CURSO DE MATEMÁTICA, CURSO COMPLETO PARA OS CURSOS DE SEGUNDO GRAU.
BEZERRA, M. J.
33ª Edição, Editora Companhia nacional, 1976.

Figura 2 – Livro didático: CURSO DE MATEMÁTICA, CURSO COMPLETO PARA O 2º GRAU

Segundo Valente e Lopes (2003), mesmo não incorporando os ideários modernizadores da matemática, sendo considerada tradicional e tenha sido editada pela primeira vez em 1961, esta obra obteve grande sucesso, tendo mais de um milhão de exemplares vendidos. O livro foi resultado da fusão de três obras de Jairo Bezerra para o curso colegial, clássico e científico, Curso de Matemática, volumes 1, 2 e 3. O professor Jairo (em entrevista a Valente, 2003, p.10) justifica o sucesso de sua obra, mesmo em tempos de matemática moderna, fazendo a seguinte afirmação

> Eu tenho a impressão, vamos dizer assim, que o número de pessoas modernas era muito pequeno em relação àqueles que já tinham nome no ensino de Matemática. Assim, a opção por formas mais tradicionais também se justifica, pois, um professor aprendeu seu ofício de modo tradicional e tem em mãos grandes autores, já sedimentados, pouco se arrisca às novidades e livros com moderna orientação, com material didático, que muitas vezes apresentam pecados matemáticos.

O terceiro livro (Livro 3) será



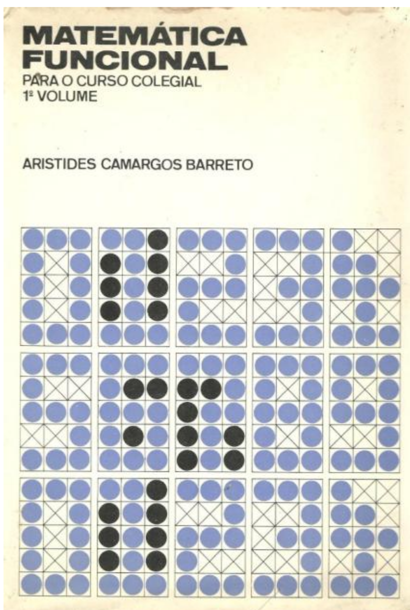
CURSO COLEGIAL MODERNO, MATEMÁTICA 1ª SÉRIE.
NETO S. D. P. ; ROCHA L. M. ; BARBOSA B. M. ;
1ª Edição, Editora Instituto Brasileiro de Edições pedagógicas (IBEP), 1967.

Figura 3 – Livro didático: CURSO COLEGIAL MODERNO, MATEMÁTICA 1ª SÉRIE.

Na apresentação, justificam os motivos para edição da série colegial de “Matemática Moderna”, apontando a necessidade de serem apresentadas aos professores obras nacionais e estrangeiras, que os ajudem na atualização do ensino da matemática. Vejamos o que nos dizem os autores: “sentimos bem de perto a angústia com que os nossos colegas se referiam a dificuldade que encontravam para atualização do ensino da matemática no colégio, dada a inexistência, ao seu alcance, de obras nacionais e estrangeiras.”

Scipione lecionou na USP e na PUC - SP, sendo que, nessa última trabalhou até o fim de sua vida. Grande defensor da matemática moderna chegou a participar do GEEM e seus livros eram escritos conforme os objetivos desse movimento. Na década de 80 fundou sua própria editora, e mais tarde a Editora Ática acabou incorporando a Editora Scipione.

Nosso quarto livro (Livro 4) a ser analisado será



MATEMÁTICA FUNCIONAL PARA O CURSO COLEGIAL 1º VOLUME
BARRETO, A.C. ;
2 ª Edição, Editora Veja S.A, 1970

Figura 4 – Livro didático: MATEMÁTICA FUNC. PARA O CURSO COLEGIAL 1º VOLUME

Aristides Camargo Barreto, autor deste último livro, formado em engenharia, inicialmente trabalhou em Matemática Pura e logo após passou a atuar na Educação Matemática na PUC - RJ. Este último livro também é destinado a alunos do curso colegial, tanto clássico quanto científico, no entanto o autor já deixa claro na sua apresentação que ele é voltado para estudantes que desejam fazer cursos superiores na área de ciências exatas.

Diante do conhecimento bibliográfico de cada obra passaremos agora para a análise interna dos livros, no que diz respeito a sua abordagem no conceito de funções.

4.3 – ANÁLISE INTERNA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Na análise interna dos livros, observaremos os aspectos estruturais do conceito de função, como por exemplo, em qual série este conceito está inserido no curso colegial, o capítulo que é abordado, a ênfase dada às propriedades, como os exercícios estão distribuídos e será feita também uma análise baseada nos registros de representação semiótica, teoria de Raymond Duval. Segunda Ubiratam B. Arrais, essa teoria "se apresenta como uma maneira didático/metodológica que o professor pode usar quando busca a conceitualização e a aquisição de conhecimentos matemáticos."

Essa teoria consiste em dois aspectos, a forma (representação) e o conteúdo (representado). Assim, por exemplo, temos que o gráfico seria a representação e a função o representado. Para haver aprendizagem torna-se necessário que o aluno saiba distinguir o objeto da sua representação.

Vejamos abaixo um quadro retirado de um texto didático escrito pelo Professor Ubiratan B. Arrais para os alunos de licenciatura da UNIBAN, onde ele nos apresenta algumas características associadas a essa teoria.

> *Três atividades cognitivas fundamentais são ligadas às representações semióticas segundo Duval.*
>
> · ***A formação de uma representação identificável*** – *Trata-se de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, composição de um texto, desenhos de uma figura geométrica, a escrita de uma fórmula, de um gráfico, etc*.
>
> · ***O tratamento de uma representação*** – é a transformação de uma representação em outra representação dentro de um mesmo registro.

Figura 5 - Quadro elaborado pelo Professor Ubiratan B. Arrais.

Fonte:http://www.diadematematica.com/Ubiratan_Arrais/ARTIGO_REGISTROS_DE_REPRESENTACAO_SEMIOTICA.htm#_ftnref1 (acessado em Novembro de 2011)

Três atividades cognitivas fundamentais são ligadas às representações semióticas segundo Duval.

- ***A formação de uma representação identificável*** *– Trata-se de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, composição de um texto, desenhos de uma figura geométrica, a escrita de uma fórmula, de um gráfico, etc*.
- ***O tratamento de uma representação*** – é a transformação de uma representação em outra representação dentro de um mesmo registro. Por exemplo:

$0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$ (1) $\rightarrow$ $\frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$ (2)

Em (1) temos uma representação decimal com um tratamento decimal e em (2) a representação é fracionária com um tratamento fracionário.

A conversão de uma representação – trata-se da transformação de um registro para outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão.

Por exemplo:

Um certo número somado ao seu sucessor e adicionado de 4 unidades é igual a 15 (1)

$x + x + 1 + 4 = 15$ (2)

Em (1) temos uma representação em língua natural, em (2) este registro é convertido da língua natural para o registro simbólico algébrico.

Figura 5 - Quadro elaborado pelo Professor Ubiratan B. Arrais.

Em sua dissertação “O tratamento dado ao Conceito de Função nos Livros Didáticos da Educação Básica, Lígia Maria (2010) afirma que “a noção de função, como objeto matemático é uma noção abstrata, assim sendo, é a representação que possibilita o aprendizado e a apreensão do objeto.”

Dessa forma, podemos perceber a importância que se tem de termos mais de uma representação para cada objeto matemático ensinado em sala de aula. No caso do conceito de função, nos deteremos a analisar, as representações do tipo algébrica, no caso das representações simbólicas, geométricas, que seriam os gráficos, e aritméticas, que podem ser identificadas como numérica e representada, por exemplo, pelo uso de tabelas. Verificaremos como estas representações eram abordadas e a importância que era dada a cada uma delas. Vamos as análises dos livros.

- Análise do Livro 1

O primeiro livro, Matemática, 2º ciclo, é um livro da terceira série do curso colegial e apresenta como índice os próprios "Programas Mínimos" instituídos pela portaria 1045. Está compreendido em três tópicos e nosso objeto de pesquisa encontra-se no primeiro deles, como consta na figura abaixo:

Na figura abaixo, que apresenta o índice do livro, podemos observar que o conceito de função está localizado no início do livro didático e já vem precedido de uma noção de cálculo infinitesimal. Dessa forma, como já foi citado anteriormente, nesse período o conceito de função era visto rapidamente e de forma superficial para introduzir o cálculo.

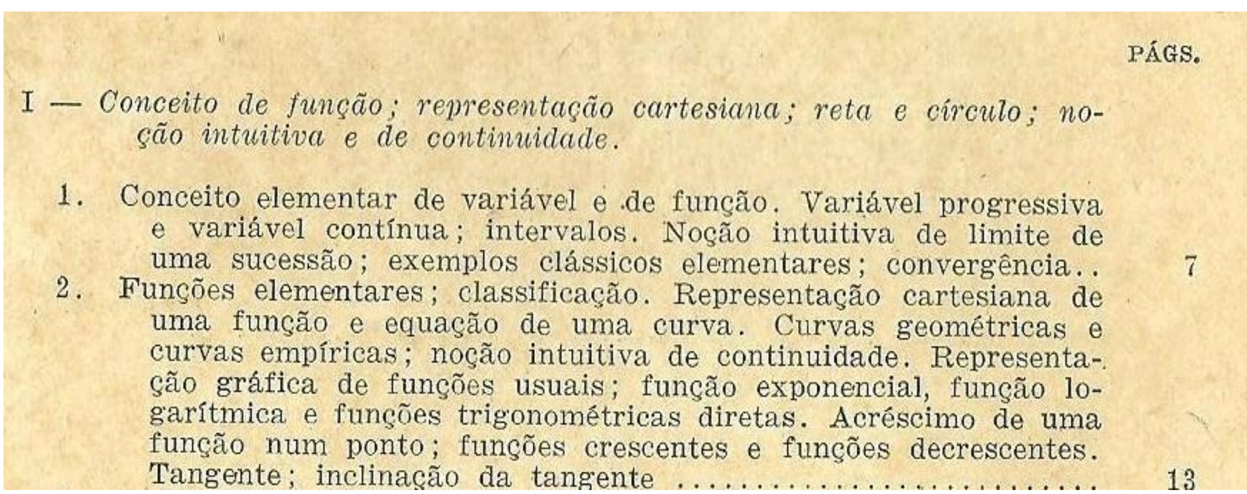


Figura 6 – Índice do livro didático 1.

No que diz respeito à definição do conceito de função, observemos primeiro como ele está apresentado.

3 — Imaginemos, agora, duas variáveis x e y, por tal forma *conjugadas* que, dos valores da primeira, possamos deduzir os valores *correspondentes* da segunda.

Diz-se, neste caso, que y é uma *função* de x, dando-se, a esta, a denominação de *variável independente* ou, simplesmente, *variável*, e àquela, a de *variável dependente*, ou, mais brevemente, *função* (*).

Simbòlicamente, escreve-se:

$$y = f(x)$$

Figura 7 – Definição do conceito de função do livro didático 1.

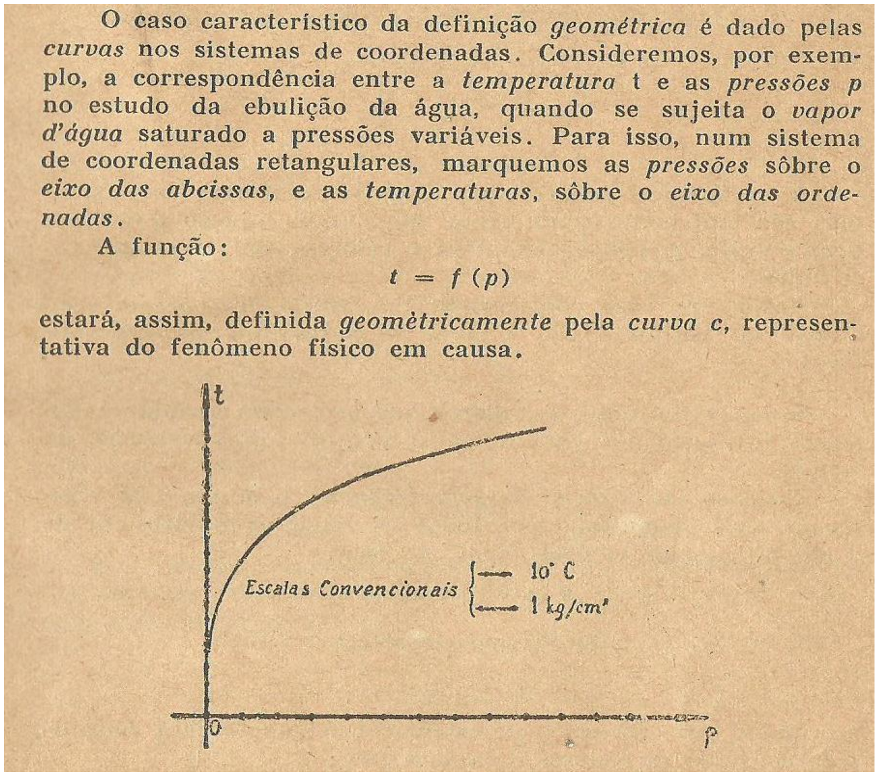
Observe que nesse caso função é determinada como uma relação de dependência entre duas variáveis. Notemos que segundo a teoria de registros de representação semiótica, a primeira representação do conceito de função se dá na forma de linguagem natural, mas logo abaixo é apresentado outro registro, o simbólico algébrico. O livro ainda apresenta alguns exemplos que expressam outros tipos de registros dado ao conceito de função. Abaixo esta ilustrada a representação simbólica aritmética e geométrica. O primeiro exemplo expressa os números de sobreviventes em função da idade.

Suponhamos, por exemplo, como se consigna no quadro abaixo, os números que representam os *sobreviventes* de um grupo inicial de 100 000 pessoas observadas, para cada idade, entre 20 e 30 anos:

Idades: t	Sobreviventes: s	Idades: t	Sobreviventes: s
20	66 642	26	63 944
21	66 225	27	63 487
22	65 781	28	63 033
23	65 322	29	62 582
24	64 862	30	62 133
25	64 403		

Figura 8 – Exemplo de representação por tabela no livro didático 1.

Já o segundo é representado pelo gráfico da temperatura em função da pressão em determinada situação da água.



O caso característico da definição *geométrica* é dado pelas *curvas* nos sistemas de coordenadas. Consideremos, por exemplo, a correspondência entre a *temperatura* t e as *pressões* p no estudo da ebulição da água, quando se sujeita o *vapor d'água* saturado a pressões variáveis. Para isso, num sistema de coordenadas retangulares, marquemos as *pressões* sôbre o *eixo das abcissas*, e as *temperaturas*, sôbre o *eixo das ordenadas*.

A função:

$$t = f(p)$$

estará, assim, definida *geomètricamente* pela *curva c*, representativa do fenômeno físico em causa.

Figura 9 – Exemplo de representação geométrica no livro didático 1.

Assim, apesar do livro não se aprofundar nos conceitos gerais de maneira mais clara, ele apresenta todas as formas de representação de uma função. Os autores tratam o conceito de domínio de forma muito sintetizada e atribuem a ele o conjunto de valores que se podem atribuir à variável independente, porém nada é citado a respeito de contra-domínio. Afinal, como o interesse era introduzir o cálculo infinitesimal, o conceito de contra-domínio não se tornava tão necessário.

As definições das propriedades de função são seguidas de apenas um ou dois exemplos, não muito esclarecedores. O livro cita rapidamente funções inversas, crescentes e decrescentes e funções unívocas. E também não aborda muito as funções elementares, quadráticas, logarítmicas e exponenciais. A idéia que se tem é que esses livros não objetivam fazer uma apresentação detalhada dos mais variados tipos de funções, suas representações e propriedades. Os exercícios propostos não possuem contextualização e estão dispostos apenas após a apresentação de todos estes conteúdos gerando um enorme acúmulo de assuntos. Nota-se ainda, a respeito dos exercícios, que é dada ênfase a análise dos comportamentos dos gráficos.

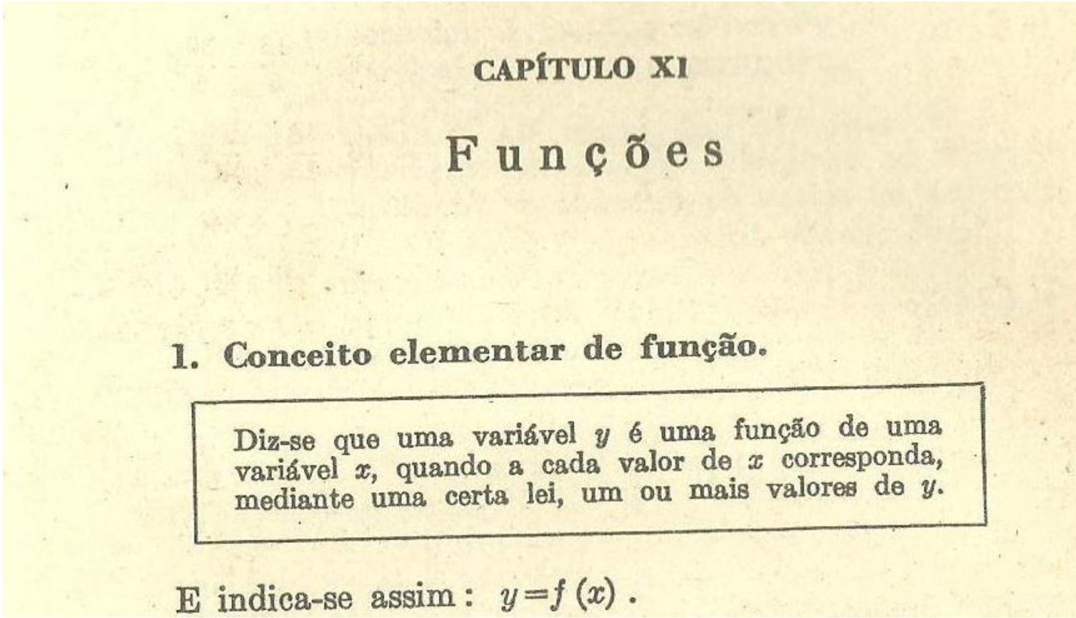
Não são usadas muitas notações no decorrer da seção, sendo a maioria das definições apresentadas por extenso. A ideia do livro adota uma sequência de idas e vindas, pois os autores apresentam o conceito de função e várias de suas propriedades, daí passam para limites de sucessões e voltam para outras propriedades de função. No entanto, a proposta do livro está dentro dos propósitos do programa, que é chegar ao cálculo infinitesimal.

- Análise do Livro 2

O nosso segundo livro, do autor Jairo Bezerra, é um volume único para o 2º grau, que divide o índice por áreas, sendo a primeira aritmética e álgebra (1º, 2º e 3º anos), a segunda geometria (1º ano), terceira, trigonometria (2º amo) e geometria (3º ano). O conceito de função encontra-se na primeira área citada e é ensinado na 3º série. Vejamos:

Figura 10 – Índice do livro didático 2.

Podemos observar também que o conceito de função é abordado como conteúdo introdutório para o cálculo infinitesimal. Esse fato é muito claro quando percebemos que a intenção do autor ao expor os tipos de funções é de apenas citá-los e apresentar como se dá o comportamento do gráfico de alguns deles. No que tange à definição de função, podemos verificar o seguinte:



CAPÍTULO XI

Funções

1. Conceito elementar de função.

Diz-se que uma variável y é uma função de uma variável x, quando a cada valor de x corresponda, mediante uma certa lei, um ou mais valores de y.

E indica-se assim: $y = f(x)$.

Figura 11 – Definição do conceito de função no livro didático 2.

Observando essa definição podemos afirmar que o autor trata o conceito de função como uma relação entre duas grandezas, expressando essa idéia na forma da linguagem natural, e na forma algébrica, segundo a teoria de registros de representação.

O autor não aborda nenhuma outra representação para a definição de função e o exemplo tratado, logo após a conceituação é considerado um tanto abstrato. Ele exemplifica usando o desenvolvimento do binômio de Newton. O domínio é chamado de campo de existência/definição da função e são apresentados alguns exemplos logo após, porém não é falado a respeito do contra domínio. O conceito de sucessão é definido como um caso de função, com campo de existência nos naturais.

As propriedades de função, como crescimento e decrescimento, funções unívocas e plurívocas são rapidamente apontadas. O livro apresenta a definição de zeros de uma função, no entanto não informa que esses zeros são justamente os pontos em que o gráfico da função corta o eixo das abscissas o que corrobora com a ausência dada à representação gráfica. Ao tratar dos exercícios, eles são muito bem distribuídos, no decorrer de todo o capítulo. Além desses exercícios, existem outros já resolvidos servindo de auxílio ao aluno. No entanto, eles não são contextualizados, cobrando apenas a aplicação de algoritmos, propriedades e fórmulas prontas.

Análise do Livro 3

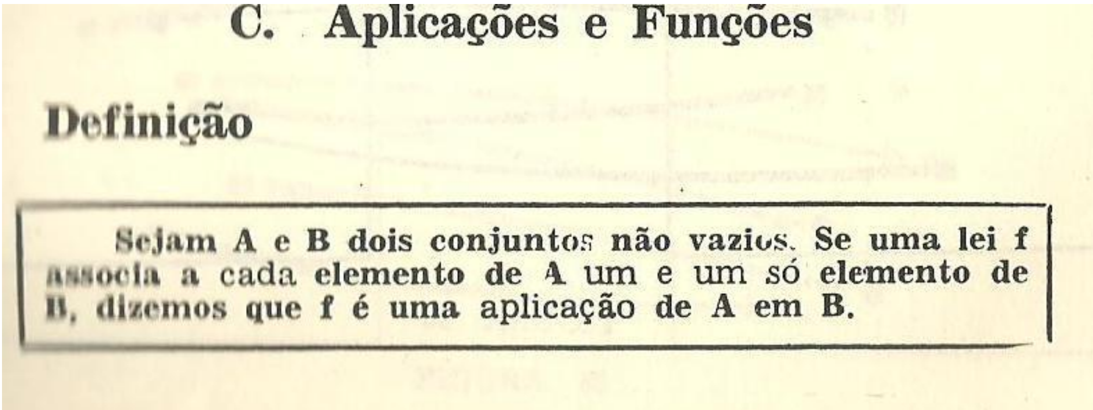
O terceiro livro a ser analisado é o livro “Curso Colegial Moderno” e, antes de entrarmos na análise do nosso objeto de estudo, gostaríamos de apresentar uma citação feita pelos autores no início do primeiro capítulo – Conjuntos e lógica matemática. Vamos observar quão é o zelo ao tratar da matemática moderna.

> Quando usamos a expressão “moderna” para a matemática atualmente ensinada, muitos são levados a pensar que se trata da substituição, pura e simples, dos assuntos tradicionais da aritmética, álgebra e geometria, por uma matemática completamente diferente. Pelo contrário, o que se pretende é estudar as mesmas coisas, e alguns novos tópicos de maior importância para as ciências modernas, através de uma linguagem mais fácil e precisa, capaz de penetrar todos os ramos da matemática.

Toda essa paixão pela matemática moderna será claramente refletida em todo o livro didático. No entanto, vamos nos deter apenas no conceito de função. Nesse livro, o conceito de função é visto na 1ª série do colegial e será estudado após uma abordagem a respeito de conjuntos e lógica matemática, vejamos a estrutura do índice:

Figura 12 – Índice do livro didático 3.

Note que, antes de estudar função, o aluno verá todo conteúdo relacionado à teoria de conjuntos, pois, como já citado, o conceito de função levará em consideração os aspectos de estruturas. No que diz respeito à definição dada a função vejamos como ela é apresentada aos alunos.



C. Aplicações e Funções

Definição

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Se uma lei f associa a cada elemento de A um e um só elemento de B, dizemos que f é uma aplicação de A em B.

Figura 13 – Definição do conceito de função no livro didático 3.

Observemos que a definição aborda inteiramente a noção de teoria dos conjuntos, e primeiramente é exposta na linguagem natural, pouco simbólica. No entanto perceba que ele usa o termo aplicação ao invés de função. A razão disso é que, alguns autores reservam o termo função para função com contra domínio sendo um conjunto numérico e dessa forma podemos perceber a força da presença da matemática moderna. O livro apresenta em seguida o conceito de função segundo os diagramas de Veen e já podemos observar a mudança de representações abordada pelos autores.

Exemplos:

I.

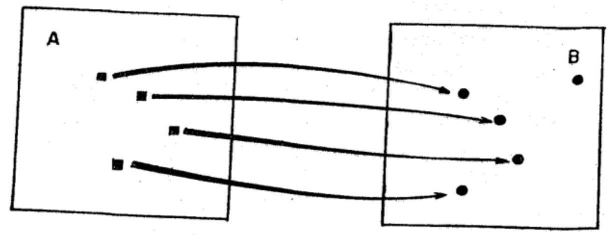


FIGURA 34

II.

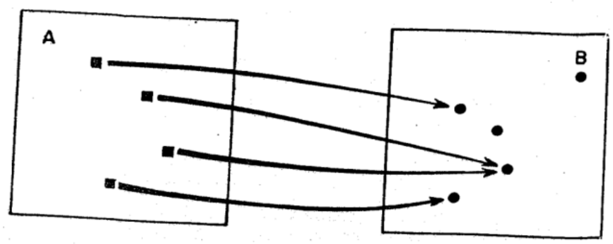


FIGURA 35

Figura 14 – Representação por diagrama de Venn no livro didático 3.

Em seguida, apresentamos as notações e observamos que, nesse contexto de matemática moderna, o conceito de função é vista como um subconjunto do produto cartesiano entre seu domínio e o contradomínio.

25. Notação

Quando existe uma aplicação f de A em B, indicamos.

1.º) Pelos Conjuntos:

a) $f: A \to B$ **b)** $A \xrightarrow{f} B$ **c)** $A \to f\ (A)$

2.º) Pelos elementos dos conjuntos:

a) $f: a \to b$, $a \in A$ e $b \in b$

b) $a \to f\ (a)$, $a \in A$

c) $a \xrightarrow{f} b$, $a \in A$, $b \in B$

d) $b = f\ (a)$. **Nesta última notação fica subentendido que estamos considerando os pares ordenados (a, f (a)) pertencentes ao produto cartesiano $A \times B$.**

Figura 15 – Notação abordada no livro didático 3.

Assim, são utilizados vários tipos de representações, no entanto todos ligados à teoria de conjuntos e é utilizada uma linguagem simbólica muito grande. Os autores tratam todas as propriedades muito bem detalhadas, passando por domínio e contra domínio, aplicação sobrejetora, injetora e bijetora, aplicação inversa, funções pares e ímpares e função monótona. Vejamos como a definição de funções pares e ímpares é apresentado:

31. Funções pares e ímpares

Uma função $y=f(x)$ é *par* quando

$$f(-x)=f(x) \quad , \quad \forall x \in X$$

e *ímpar* quando

$$f(-x)=-f(x).$$

Por exemplo: $f(x)=x^2$ é par; $f(x)=x^3$ é ímpar.

Figura 16 – Definição de funções pares e ímpares no livro didático 3.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo vertical e o de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

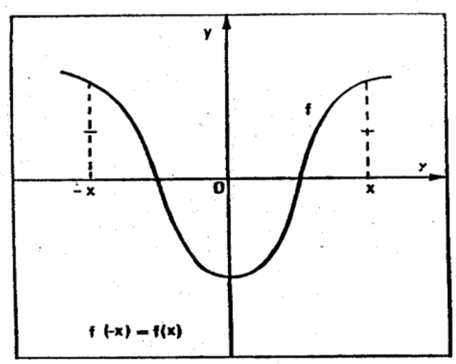


FIGURA 45

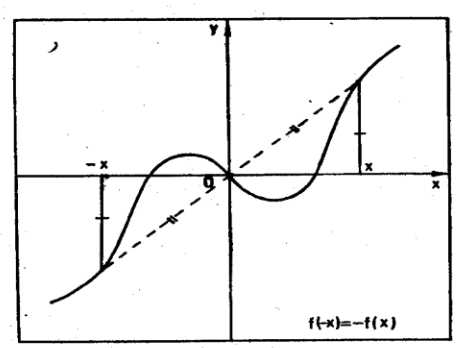


FIGURA 46

Figura 17 – Representação geométrica de funções pares e ímpares no livro didático 3.

Note que ele aborda tanto a representação algébrica quanto a representação geométrica, possibilitando o aluno a ter uma idéia melhor do que se trata. Após apontar todas as propriedades, é exposta uma lista de exercícios sem nenhuma contextualização.

Quanto às funções elementares: linear, quadrática, exponencial e logarítmica, são dedicadas a elas aproximadamente 70 páginas do livro, o que nos indica que estão muito bem detalhadas.

SEGUNDA PARTE

FUNÇÕES ELEMENTARES

CAPÍTULO III

TERCEIRA PARTE

TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO VI

Figura 18 – Localização das funções elementares no índice no livro didático 3.

Os autores apontam várias propriedades de cada tipo de função, seguidas de exemplos e justificativas matemáticas. Nos exercícios que tocam as funções lineares, aparecem alguns exemplos típicos do nosso cotidiano, como o perímetro de um quadrado com relação ao comprimento do lado, os juros de um capital fixo, com relação ao tempo. Assim, já podemos notar a ênfase que é dada as propriedades de função e sua ligação com a teoria dos conjuntos.

Análise do Livro 4

O nosso quarto e último livro a ser analisado é o livro do Aristisdes Barreto, 1º volume. Nessa obra o conceito de função vem inserido também após o conteúdo que diz respeito à linguagem de conjuntos, como indicado na figura abaixo:

Figura 19 – Índice no livro didático 4.

Dessa forma, já podemos perceber que o conceito de função estará unido à teoria dos conjuntos, trazendo consigo uma linguagem simbólica que evidencia os conjuntos.

A definição dada à função é introduzida por um exemplo que envolve o nosso cotidiano e só depois apresentada formalmente aos alunos. O autor ainda usa o mesmo exemplo para mostrar um caso onde não encontramos função. Vejamos:

1.10 Função

Sejam A o seguinte conjunto de países:

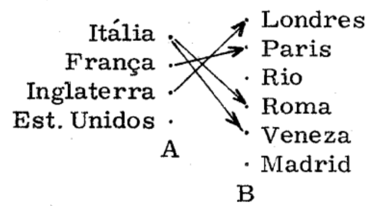
A = { Itália, França, Inglaterra, Estados Unidos } .

e B o seguinte conjunto de cidades:

B = { Londres, Paris, Rio, Roma, Veneza, Madrid }

Colecionemos, em seguida, os pares (a, b) ∈ A x B tais que a cidade <u>b</u> esteja geogràficamente localizada no país <u>a</u>:

(Itália, Roma), (Itália, Veneza),
(França, Paris),
(Inglaterra, Londres).



Êstes pares ordenados (a, b) ∈ A x B constituem uma re-

15

Figura 20 – Definição do conceito de função no livro didático 4.

lação R de A para B, a qual faz a cada país de A corresponder suas respectivas cidades em B.

Note que a relação R envolve pares diferentes com a mesma abscissa:

(Itália, Roma) e (Itália, Veneza).

Em outras palavras:

$(a, b), (a, b') \in R \not\Longrightarrow b = b'$

Quando numa relação R de A para B <u>não há</u> repetição de abscissas, ou seja,

$(a, b), (a, b') \in R \Longrightarrow b = b'$,

dizemos que R é uma relação funcional, uma função ou uma aplicação de A para B.

O caso acima é, portanto, um contra-exemplo de função.

Definição:
Uma função F de A para B é uma relação de A para B sem abscissas repetidas.
A é o conjunto de saída e B o conjunto de chegada de F.

Figura 20 – Continuação...

Perceba que a definição formal é toda escrita por extenso sem usar linguagem simbólica. A notação só é apresentada posteriormente, dada por

Se $(x, y) \in F$ dizemos que $\underline{y}$ é a imagem de $\underline{x}$ ou que $\underline{y}$ é o valor de F em $\underline{x}$, sendo comum indicá-lo por $F(x)$:

$$(x, y) \in F \Rightarrow y = F(x).$$

Figura 21 – Definição formal no livro didático 4.

O autor ainda apresenta o conceito de função usando a representação aritmética, ou por meio de tabelas e ele justifica essa representação por ser mais cômoda em alguns casos.

1.11 Funções dadas por meio de tabelas

Em muitos casos, é cômodo apresentar uma função F de A para B por meio de uma tabela, como a seguinte:

A	B $\rightarrow$ F
.	.
.	.
.	.
x	F(x)
.	.
.	.
.	.

Na coluna da esquerda põe-se o conjunto de saída ou, se se quiser, apenas o domínio.

Figura 22 – Representação por tabelas no livro didático 4.

Por fim, é apresentada uma definição de função como meio alternativo e nesse caso já são usados alguns símbolos.

1.13 Definição Alternativa de Função

Uma função $F : A \longrightarrow B$ é simplesmente uma correspondência que a cada elemento $\underline{x}$ do domínio A associa um único elemento $F(x)$ de B.

Figura 23 – Definição alternativa de função no livro didático 4.

Assim, a respeito do conceito de função, podemos concluir que ele é exposto em diversas representações e vem seguido de exemplos que envolvem o nosso dia a dia. O autor aborda a representação aritmética, algébrica, e faz uso do diagrama de Veen, no entanto deixa de citar a geométrica.

Com relação às propriedades do conceito de função, elas são vistas de forma detalhada precedidas de alguns exercícios. Os exercícios de todo capítulo, encontram-se divididos por sessão, sendo a maioria deles contextualizados. Neste volume as funções exponenciais e logarítmicas não são vistas, sendo apresentadas apenas as funções lineares e quadráticas e as funções trigonométricas.

Dessa forma, podemos verificar na análise individual de cada livro didático que nos dois primeiros, o conceito de função é visto de forma breve introduzindo o cálculo infinitesimal, assim o que não viam como essencial e auxílio para o cálculo era descartado. Já nos dois últimos livros, o conceito de função é apresentado estruturado na teoria dos conjuntos.

No entanto essas mudanças de abordagem do conceito de função refletiram na aprendizagem dos alunos, gerando algumas dificuldades, e serão essas dificuldades que tentaremos apresentar no nosso próximo capítulo.

5 - DIFICULDADES, CRÍTICAS E SUGESTÕES DE ENSINO

Nesse capítulo apontaremos algumas dificuldades encontradas pelos alunos, e nos basearemos na dissertação de mestrado de Marcos José Ardenghi (2008), aluno da PUC-SP. Em seu trabalho, Ardenghi relacionou quarenta e seis pesquisas, algumas delas tratando sobre as dificuldades dos alunos a respeito do conceito de função. A partir das dificuldades, tendo em vista a enorme relação entre elas e o modo de apresentação da matemática moderna, faremos algumas críticas e sugestões na tentativa de reverter algumas situações.

Dentre as quarenta e seis pesquisas realizadas por Ardenghi (2008), vamos destacar quatro: A dissertação de mestrado de Maria Helena Monteiro Mendes (1994) que tem como título "O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau"; a dissertação de mestrado de Osmar Schwarz (1995) como o título "Sobre concepções de função dos alunos ao término do 2º grau"; a dissertação de mestrado de Nanci de Oliveira (1997), com o título "A aquisição do conceito de função: perfil das imagens produzidas pelos alunos"; e por fim, a tese de doutorado de Edna Maura Zuffi (2001) intitulada por "O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados.

No que diz respeito às dificuldades dos alunos observadas por estes autores em pesquisas realizadas podemos citar as principais como sendo: o uso da abordagem lógica e uma linguagem muito simbólica, a não distinção entre o conceito de função e suas propriedades, a estruturação formal e abstrata, a falta de clareza nas definições e a separação da matemática ensinada com o cotidiano do aluno.

No que diz respeito à abordagem lógica e a linguagem simbólica usada ao apresentar o conceito de função, temos que Ardenghi (2008), ao tratar da pesquisa feita por Zuffi (2001), afirma que "O interesse da pesquisadora pelo tema se manifestou quando da constatação das dificuldades apresentadas por seus alunos universitários ao lidarem com a simbologia e a lógica que compõem a linguagem matemática."

Na sua tese Zuffi (2001) faz a seguinte citação a respeito desse tratamento lógico abordado pelos professores:

> Assim, parece-nos que a investigação da expressão dos professores do 2º grau através de uma simbologia e de uma lógica própria da linguagem matemática,

> poderá contribuir muito para compreendermos também as dificuldades apresentadas pelos alunos na transmissão de seus "saberes matemáticos". (Zuffi (2001) apud Ardenghi (2008), p.47)

Segundo Schwarz (1995 apud Ardengui, (2008), p.38) em uma pesquisa realizada com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma Escola Pública de São Paulo, a maioria dos alunos aparentam não dominar a simbologia utilizada na representação algébrica de função.

Em algumas pesquisas notamos ainda que, pela quantidade de propriedades envolvendo o conteúdo de funções, os alunos acabam por confundi-las, como nos assegura Schawarz (1995 apud Ardengui, (2008), p.38): "Foi constatado que os alunos confundiam domínio com contradomínio".

Ardenghi (2008), quando trata da pesquisa realizada por Mendes (1994), afirma que "quanto à restrição de unicidade do input para um dado output, a autora pode encontrar estudantes que demonstraram confundir a univalência do conceito de função com a univalência da definição de função injetora."

Dessa forma podemos ver como o uso de uma linguagem lógica dedutiva, envolvendo muitas propriedades dos conceitos matemáticos, pode confundir os estudantes. Segundo Kline (1976, p.60) o desenvolvimento de toda a história da matemática talvez tivesse ocorrido de acordo com uma abordagem lógica dedutiva, mas não precisamos pedir aos estudantes que repitam os mesmos passos. Kline também critica o uso excessivo da simbologia na linguagem matemática, quando afirma que "espojar-se em símbolos é tornar a leitura e a compreensão mais difíceis. (Kline, 1976, p.94).

No que tange as dificuldades com as estruturas formais e abstratas temos segundo a pesquisa encontrada em Schwarz (1995, apud Ardenghi 2008, p.38) um dos obstáculos que se apresentam no conceito de função é de que "os matemáticos decidiram por uma definição estrutural de função que lhes permitia operar com espaços de funções e operar com conceitos modernos". Essa definição estrutural se dá pela definição do conceito de função baseada na teoria dos conjuntos. Oliveira (1997, apud Ardenghi 2008, p.40) cita como um dos obstáculos didáticos o uso exagerado de diagrama de flechas. E essa também é uma característica da teoria dos conjuntos.

Sobre a abordagem da teoria dos conjuntos Kline (1976, p.119) afirma que

> ... a teoria de conjuntos – embora logicamente o fundamento de uma abordagem sofisticada e rigorosa da matemática – não é de utilidade alguma na compreensão e aprendizagem para trabalhar com matemática elementar. Na verdade, a teoria de conjuntos pode ser desorientadora até mesmo no contexto em que afirma ser muito útil, a saber, na aprendizagem sobre os números.

Ainda segundo Kline (1976, p.120), “A teoria de conjuntos é para a matemática elementar um formalismo oco que dificulta idéias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente.” Ao tratar especificamente do conceito de função Kline (1976) ainda afirma que

> A definição geral de uma função será inútil enquanto o objetivo imediato for aprender essa questão de $y = 3x$, $y = 3x + 7$ ou $y = x^2$ etc. De fato, a definição geral sobrecarregada o estudante com um mistério que lhe obscurece todo o pensamento subseqüente.

Segundo Ardenghi (2008), outra constatação na dissertação de Schwarz (1995) foi que “os alunos não estão habituados a passar do quadro geométrico para o algébrico”, o que nos mostra a dificuldade dos alunos em converter de um registro de representação para o outro. Na dissertação de Oliveira (1997), observou que a autora indicava que “os alunos apresentam mais facilidade em trabalhar com a representação gráfica do que com a representação algébrica”.

Na dissertação de Oliveira (1997), o professor Ardenghi (2008) observou que na Proposta Curricular de Matemática para Ensino Fundamental e Médio do Estado de São Paulo, os aspectos de variação e correspondência não estão claros e ainda na mesma dissertação argumentam que uma das dificuldades dos alunos é lidar com grandezas variáveis. Essa ideia de função é usual na década de 20 a 50, no período pré matemática moderna e essas dificuldades podem acontecer pela forma como o assunto é abordado. A respeito do currículo tradicional, Kline (1976, p.22) afirma que “o método tradicional de ensinar resulta francamente num único tipo de aprendizagem: memorização. A afirmação de que tal apresentação ensina a pensar é sobremodo carregada.”

Outro problema que envolve os estudantes quando se trata de estudar matemática é a falta de motivação. Segundo Mendes (1994, apud Ardenghi, 2008, p.35), “o problema maior seria o desestímulo dos alunos para estudar.” Kline (1976 p.23) argumenta que

> ... o currículo tradicional sofre do defeito mais grave que se pode lançar sobre qualquer currículo: falta de motivação. A própria matemática – para empregarmos as palavras do famoso matemático do século vinte, Hermann

> Weyl, - tem a qualidade não humana da luz estrelar, brilhante e nítida, porém fria. É também abstrata.

Por fim, podemos citar Schwarz (1995, apud Ardenghi, 2008, p.37) que afirma que um dos obstáculos que se apresentam no desenvolvimento da concepção de função é o relativo "à crença de que a matemática nada tem a ver com problemas práticos". Isso ocorre em muitos casos pelo fato de que os professores, em sua maioria de concepção moderna, lidam com a matemática de forma independente do mundo em que o estudante está inserido, fazendo uma separação de Matemática e Ciência e lidando com Matemática como se ela existisse por si só. Kline (1976, p.98) afirma que "os conceitos, operações, teoremas significativos e até mesmo os métodos de prova foram sugeridos por situações verdadeiras e fenômenos", o que nos mostra a intima relação que a história da matemática tem com o mundo real. Ele ainda cita que "naturalmente a matemática não é um corpo de conhecimento auto-suficiente isolado. Ela existe primeiramente para ajudar o homem a compreender e dominar o mundo físico". Criticando essa idéia que a matemática é auto-suficiente, Kline ataca os professores modernos argumentando que

> ... os modernistas, ao que parece, também desejam manter pura sua matéria. Não desejam maculá-la; querem remover os resíduos de terra dos quais surgiu a matemática. Mas ao lavarem o minério conservam o ferro e perdem o ouro. (Kline, 1976, p.101)

Dessa forma, podemos perceber que muitas são as dificuldades encontradas pelos alunos em diversos sentidos quando se trata de ensinar função. A dissertação de Oliveira (1997) sintetiza todos esses casos. Vejamos o que ele afirma serem as maiores dificuldades:

> A transposição dos problemas (linguagem escrita) para a expressão (linguagem algébrica); transferir para a realidade; o domínio da função; representação gráfica. Análise dos gráficos. Associar grandeza variável; a abstração, com rigores matemáticos, dos conceitos; a simbologia; a lei de correspondência; a definição abstrata; as diversas representações de uma função (Oliveira, 1997, apud Ardenghi, 2008, p.40).

Assim, notamos que prevalecem nas dificuldades dos alunos características muitas claras do Movimento da Matemática Moderna, onde a maioria apóia-se nas idéias desse movimento. Na verdade não podemos dizer hoje qual o currículo é melhor, pois ambos apresentam falhas, mas cabe a nós verificarmos qual deles apresenta obstáculo maior para aprendizagem do aluno.

Diante de todas essas dificuldades, alguns pesquisadores apresentam sugestões para lidar com essas situações. Dentro das pesquisas que selecionamos na dissertação de Ardenghi, encontramos algumas dessas sugestões. Segundo Mendes (1994, apud Ardenghi, 2008, p.63) é necessário "que os professores conheçam a evolução histórica do conceito de função, para entender que há obstáculos na aprendizagem desse conceito e tentar superá-los".

Outra sugestão nos foi dada por Schwarz (1995) que afirma ser necessário uma

> Revisão no processo de ensino do conceito de função, no qual se deve partir da realidade e do conhecimento do aluno, dando tempo e espaço necessários, para que eles vivenciem as etapas de interiorização e condensação do conteúdo, até chegar ao conceito estrutural. (Schwarz, 1995 apud Ardenghi, 2008, p.63)

Podemos citar ainda mais duas sugestões apresentadas no trabalho de Ardenghi. Oliveira (1997) sugere o seguinte:

> Trabalhar em duplas, acrescentar na apresentação do conceito a passagem da linguagem escrita para tabelas e gráficos e vice-versa; propor situações problemas nas quais haja necessidade de distinguir domínio de contradomínio; propor gráficos e tabelas que representem funções; propor a mudança de quadros do algébrico para o geométrico e vice-versa. Oliveira (1997, apud Ardenghi, 2008, p.63).

Por fim podemos apresentar a sugestão dada por Zuffi (2001), afirmando que

> O professor deve usar uma linguagem mais acessível aos alunos, para que esses compreendam o conceito de função, principalmente no início da apresentação, oferecendo condições aos alunos de compreenderem os símbolos usados na representação da função. (Zuffi, 2001, apud Ardenghi, 2008, p.64).

Diante das sugestões acima, verificamos que todas tocam no que diz respeito a metodologia usada pelos professores. Algumas são feitas para tentar contornar os efeitos causados pelo ideário da matemática moderna, o que é o caso das citações de Schwarz (1995) e Oliveira (1997). E assim, podemos afirmar que mesmo existindo tantas dificuldades no ensino aprendizado do conceito de funções, as soluções muitas vezes estão acessíveis às nossas possibilidades, dependendo, em muitos casos, apenas de boa vontade.

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho nosso objetivo foi apresentar o conceito de função em dois contextos diferentes, o período compreendido no início do século XX, aproximadamente da década de 20 a 50, onde perduraram idéias da matemática pré-moderna e o período seguinte, década de 1960 a 1970, em que a matemática moderna estava em seu auge, e após essa apresentação fazer uma comparação entres esses dois momentos do ensino do conceito de função.

Para que tal feito acontecesse, procuramos inicialmente apresentar ao leitor como se deu o surgimento desse conceito, o que se deu de forma gradativa e de que forma ele foi recepcionado no ensino secundário do Brasil. Em seguida, situamos o leitor no ambiente da matemática moderna, no mundo e no Brasil. Logo após, fizemos uma análise de quatro coleções de livros didáticos, divididos dois a dois por linhas de pensamento. A partir dessa análise, procuramos identificar através de alguns trabalhos de pesquisa, as dificuldades encontradas pelos alunos ao estudarem o conceito de função e apesar de serem trabalhos recentes, com menos de duas décadas, notamos a ênfase que é dada ao ideário da matemática moderna ainda nos dias atuais e como são grandes os obstáculos impostos por ela aos alunos.

Esperamos que o nosso trabalho tenha situado o leitor nesses dois momentos em que a matemática esteve inserida, fazendo-o observar a importância que ambos tiveram para o ensino da mesma, em particular do conceito de função e como as ideias de alguns estudiosos da época ainda perduram vivos e intocáveis nos dias atuais.

Durante todo o período de investigação desse trabalho, pudemos constatar que diversos autores não apontam qual período que a matemática foi mais bem sucedida, ou qual currículo foi melhor, ambos falharam em diversos aspectos e podemos perceber que os objetivos que se tinham quando se pensou no Movimento da Matemática Moderna não foram alcançados como era o desejado. Afinal de contas, sempre foi almejado pelos mentores desse movimento um melhor aprendizado para os alunos, com melhores conteúdos e metodologias modernas.

Podemos destacar a contribuição que este trabalho nos trouxe em termos de conhecimentos a respeito desses movimentos da matemática, vista a importância que têm para o ensino atualmente e a maneira como se fazem presentes nos livros didáticos e metodologias dos professores. Aproveitamos ainda para sugerir futuros trabalhos de investigação que tocam essa mesma temática, como seria o caso de fazer uma análise do comportamento dos professores com a chegada da matemática moderna, ou fazer uma comparação dos livros didáticos do período atual com os da década de 60 a 70 e analisar quais influências da matemática moderna ainda são resgatadas.

Desejamos que este trabalho possa contribuir para os professores e alunos, a fim de situá-los em alguns episódios importantes do ensino da matemática, momentos esses que se refletem claramente nos dias atuais. Acreditamos que o trabalho de pesquisa foi bastante enriquecedor para o nosso conhecimento.

REFERÊNCIAS

ARDENGHI, M.J. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005.** Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP USP, 2008.

BARRETO, A.C. **Matemática Funcional para o Curso Colegial 1º volume**. 2 ª Edição, Editora Veja S.A, 1970

BEZERRA, M. J. **Curso de Matemática, Curso completo para os cursos de segundo grau.** 33ª Edição, Editora Companhia nacional, 1976.

BRAGA, C. **Função: a alma do ensino da matemática.** São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

[1] BÚRIGO, E. Z. **Conjuntos Numéricos em duas coleções didáticas: Tradições e inovações de um autor "moderno".** UFRGS.

[3] CHAVES, M. I. A e CARVALHO, H. C. **Formalização do conceito de função no ensino médio: Uma sequência de ensino aprendizagem.** (2004).

KLINE, M. **O fracasso da Matemática Moderna**; tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo, IBRASA, 1976.

NETO S. D. P., ROCHA L. M. e BARBOSA B. M. **Curso Colegial Moderno, Matemática. 1ª Série**. 1ª Edição, Editora Instituto Brasileiro de Edições pedagógicas (IBEP), 1967.

OLIVEIRA, N. **O conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** Mestrado em Ensino da Matemática. PUC – SP, 1997.

LAVORENTE, C. R. **A matemática moderna nos livros de Osvaldo sangiorgi.** Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP USP, 2008.

VALENTE, W.R. et al. Educação Matemática e Política: a escolarização do conceito de função no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n.12 , p. 16-20, Jun. 2002.

VALENTE, W. R., Org. **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

VALENTE, W. R., Org. **Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno.** / São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues e LOPES, Antonio José (Bigode). O Tijolão, o Bezerrão: histórias de Jairo Bezerra, histórias da Educação Matemática. **Educação Matemática em Revista**, nº 13, ano 10, p. 4 – 12. Março de 2003.

[2] VALENTE, W. R. e LOPES, M. R. **Um Estudo do Processo de Introdução das Matrizes no Ensino Secundário a partir da Análise de Livros Didáticos dos Anos 1940-1970.**

ROXO, E. ; PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; NETTO, D. **Matemática, 2º ciclo, 3ª série.** 4ª Edição, Editora Paulo de Azevedo, Livraria Francisco Alves, 1955.

ZUFFI, E.M. et al. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 9/10, p. 10-16, abr. 2001.

http://www.diadematematica.com/Ubiratan_Arrais/ARTIGO_REGISTROS_DE_REPRESENTACAO_SEMIOTICA.htm#_ftnref1 (acessado em Novembro de 2011)