

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

# Convergência em Espaços Topológicos: Redes e Filtros

Nacib André Gurgel e Albuquerque

JOÃO PESSOA – PB  
JUNHO DE 2011

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Curso de Bacharelado em Matemática

# Convergência em Espaços Topológicos: Redes e Filtros

por

Nacib André Gurgel Albuquerque

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

João Pessoa – PB  
Junho de 2011

Catálogo na publicação  
Universidade Federal da Paraíba  
Biblioteca Setorial do CCEN

A345c Albuquerque, Nacib André Gurgel e.  
Convergência em espaços topológicos: redes e filtros /  
Nacib André Gurgel e Albuquerque. – João Pessoa, 2011.  
45f. : il. -

Monografia (Graduação) – UFPB/CCEN.  
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.  
Inclui referências.

1. Topologia. 2. Redes e filtros – Topologia. 3. Espaços  
topológicos. 4. Matemática – Tecnologia. I. Título.

BS/CCEN

CDU: 515.1(043.2)

# Convergência em Espaços Topológicos: Redes e Filtros

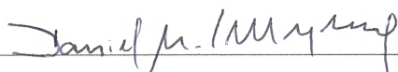
por

Nacib André Gurgel e Albuquerque

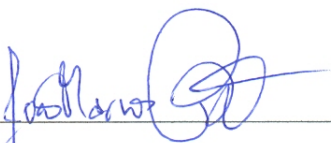
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovado em 30 de junho de 2011.

Banca Examinadora:



Prof. Dr Daniel Marinho Pellegrino – UFPB



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB



Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB

# Agradecimentos

A Deus. Aos meus pais, por estarem incondicionalmente ao meu lado. À Karenina, por jusqu'à deux étoiles, et au-delà. Ao professor Daniel, por toda a valiosa ajuda e pelas palavras de sabedoria. Ao professor João Marcos, pelas oportunidades concedidas. Ao professor Fágner, por participar da banca, e a todos os outros professores do departamento, pelo incentivo durante essa epata. Em especial aos professores, Andrade, Eduardo, Everaldo, Uberlândio e à professora Flávia. Aos meus colegas, pelos momentos compartilhados.

“...

*Somos muitos Severinos  
iguais em tudo na vida:  
na mesma cabeça grande  
que a custo é que se equilibra,  
no mesmo ventre crescido  
sobre as mesmas pernas finas,  
e iguais também por que o sangue  
que usamos tem pouca tinta.*

*E se somos Severinos  
iguais em tudo na vida,  
morremos de morte igual,  
mesma morte severina:  
que é a morte de que se morre  
de velhice antes dos trinta,  
de emboscada antes dos vinte,  
de fome um pouco por dia  
(de fraqueza e de doença  
é que a morte severina  
ataca em qualquer idade,  
e até gente não nascida).  
Somos muitos Severinos  
iguais em tudo e na sina:  
a de abrandar estas pedras  
suando-se muito em cima,  
a de tentar despertar  
terra sempre mais extinta,  
a de querer arrancar  
algum roçado da cinza.  
...”*

Morte e Vida Severina,  
João Cabral de Melo Neto

# Resumo

Os métodos de convergência da topologia geral estão intrinsecamente relacionados aos conceitos de continuidade e à descrição do próprio espaço topológico, e são esses alguns dos motivos a que se deve sua destacada relevância. Debateremos principalmente sobre redes e filtros. Por fim, demonstraremos os teoremas de Tychonoff e Banach–Alaoglu–Bourbaki que, além do próprio resultado, revelam o mérito desses conceitos.

**Palavras-chave:** topologia, redes, filtros.

# Abstract

The convergence methods of general topology are intrinsically related to continuity concepts and the description of topological space itself, and these are some of the reasons for its outstanding relevance. We will discuss mainly about nets and filters. At long last, we will prove Tychonoff and Banach–Alaoglu–Bourbaki theorems that, besides result itself, reveal the merits of these concepts.

**Keywords:** topology, nets, filters.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>x</b>
<b>1 Estruturas Topológicas</b>	<b>1</b>
1.1 Conceitos Básicos . . . . .	1
1.2 Vizinhanças e Bases (Construindo Topologias) . . . . .	3
1.3 Continuidade . . . . .	7
1.4 Homeomorfismos . . . . .	11
1.5 Produtos Cartesianos e Espaços Produtos . . . . .	12
1.6 Axiomas de Separabilidade . . . . .	17
1.7 Espaços Compactos . . . . .	18
1.8 Notas Históricas . . . . .	20
<b>2 Convergência</b>	<b>23</b>
2.1 Sequências . . . . .	23
2.2 Redes . . . . .	26
2.3 Filtros . . . . .	32
2.4 Notas Históricas . . . . .	35
<b>3 Aplicações de Redes e Filtros</b>	<b>36</b>
3.1 Caracterização de Compactos . . . . .	36
3.2 O Teorema de Tychonoff . . . . .	38
3.3 O Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki . . . . .	39

<b>A Biografias</b>	<b>41</b>
A.1 Felix Hausdorff . . . . .	41
A.2 Andrey Nikolayevich Tychonoff . . . . .	43
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>

# Introdução

Neste trabalho apresentamos alguns conceitos fundamentais da topologia geral, ferramenta básica para vários campos da matemática como análise e geometria, com ênfase a uma das formas clássicas de se estudar continuidade: os métodos de convergência. Iremos nos concentrar em dois instrumentos, redes e filtros, que se revelarão capazes para tal feito em espaços topológicos gerais. Por fim, demonstraremos alguns resultados de relevância que os utilizam, comprovando seu uso e abrangência.

No primeiro capítulo apresentamos noções elementares da topologia geral, que julgamos necessárias para chegarmos aos resultados pretendidos, bem como alguns exemplos e comentários interessantes que surgem no caminho. O capítulo 2 destina-se aos métodos de convergência, onde destacam-se a generalidade dos conceitos de redes e filtros, em contraposição à inadequação de seqüências aos espaços mais gerais. O último capítulo é reservado à apresentação de importantes resultados que fazem uso de redes e filtros, destacando-se sua importância e generalidade. Mais precisamente, caracterizaremos os espaços compactos e provaremos os relevantes teoremas de Tychonoff e Banach–Alaoglu–Bourbaki. No fim dos dois capítulos iniciais consta um breve relato histórico referente aos tópicos ali abordados.

Por fim apresentamos uma breve biografia de dois matemáticos que, dentre os vários outros de sua época, contribuíram de forma fundamental para o desenvolvimento da topologia: Hausdorff e Tychonoff.

# Capítulo 1

## Estruturas Topológicas

O conceito de espaço topológico se desenvolveu da necessidade de se estudar a continuidade de funções em espaços abstratos, generalizando aqueles conceitos conhecidos na reta real e nos espaços euclidianos. O aparecimento da topologia geral é visto como uma consequência da reconstrução dos fundamentos do cálculo durante o século XIX.

Neste capítulo faremos uma (breve) introdução às noções básicas da topologia geral. Definiremos o que é um espaço topológico, estudaremos maneiras de construir uma topologia em um conjunto qualquer, e consideraremos os conceitos elementares de conjuntos abertos e fechados. Introduziremos o conceito de continuidade que, conforme relata [En], se revela tão importante quanto o próprio conceito de espaço topológico, bem como veremos que esses conceitos são uma generalização natural dos correspondentes nos espaços euclidianos. Também consideraremos homeomorfismos, que identificam espaços topológicos, operações para obter novos espaços a partir de espaços antigos (como subespaços e produtos cartesianos), axiomas de enumerabilidade, e por fim, uma das classes mais importantes dos espaços topológicos: os compactos.

### 1.1 Conceitos Básicos

A definição atual e, nesse momento, padrão de espaço topológico levou um longo tempo para ser formulada. Mais especificamente, durante as primeiras décadas do século XX vários matemáticos – dentre eles Hausdorff, Fréchet e outros – propuseram diversas definições até que um consenso fosse então obtido alguns anos depois. Obviamente desejavam uma definição mais ampla possível,

desvinculada a certas estruturas presentes apenas em casos particulares – como é o caso da noção de distância – e de modo que fosse possível incluir todos os casos especiais e de imprescindível importância, como os espaços euclidianos finitos, infinitos e espaços de funções, bem como queriam que a definição fosse suficientemente estreita de modo que os teoremas “padrões” dos espaços familiares também fossem válidos em espaços topológicos gerais. Por estas razões temos a definição a seguir que, apesar de abstrata, melhor se justifica à medida que trabalhamos com os conceitos posteriores.

**Definição 1.1.** Uma *topologia* em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  com as seguintes propriedades:

- i.  $\emptyset$  e  $X$  são elementos de  $\tau$ ;
- ii. A união de qualquer subcoleção de  $\tau$  é um elemento de  $\tau$ ;
- iii. A interseção de qualquer subcoleção finita de  $\tau$  pertence à  $\tau$ .

O par  $(X, \tau)$  é denominado *espaço topológico*. Frequentemente, dizemos “o espaço topológico  $X$ ”, mencionando  $\tau$  apenas quando houver necessidade. Cada elemento da coleção  $\tau$  é dito *conjunto aberto* do espaço topológico  $X$ .

**Exemplo 1.1.** Qualquer que seja o conjunto  $X$ , a família dos subconjuntos de  $X$ , denotada por  $\mathcal{P}(X)$ , é uma topologia em  $X$ , chamada *topologia discreta*. Por outro lado,  $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$  também é uma topologia em  $X$ , chamada *topologia trivial ou caótica*. Vemos que qualquer que seja a topologia  $\tau$  em  $X$ , temos  $\tau_0 \subset \tau \subset \mathcal{P}(X)$ , com isso, podemos dizer que a topologia trivial é a “mais econômica” que um conjunto pode ter, a respeito da quantidade de abertos, enquanto que a topologia discreta seria a “menos econômica”. Outro caso é a *topologia do complemento enumerável*  $\tau_E$ , onde cada aberto  $U$  é tal que  $X \setminus U$  é enumerável ou  $U = \emptyset$ .

**Definição 1.2.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$ . Definimos o *interior* de  $A$ , denotado por  $\text{int}A$ , como a união de todos os abertos de  $X$  que estão contidos em  $A$ . Dizemos que  $B$  é *fechado* quando  $X \setminus B$  é aberto. O *fecho* de  $B$ , denotado por  $\overline{B}$  ou  $\text{Cl}B$ , é definido como a interseção de todos os fechados que contém  $B$ .

$$\text{int}X = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \quad \text{onde } \mathcal{A} = \{U \in \tau; U \subset X\}$$

$$\overline{B} = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} F \quad \text{onde } \mathcal{C} = \{F \in \mathcal{P}(X); X \setminus F \in \tau \text{ e } B \subset F\}$$

A respeito de um subconjunto qualquer do espaço topológico, concluiremos que: o interior é o maior aberto contido nele; o fecho é o menor fechado que o contém; é aberto se, e somente se for igual ao interior; e é fechado se, e somente se, for igual ao fecho. Além disso, um ponto pertence ao fecho de um conjunto se, e somente se, todo aberto que contém o ponto intersecta o conjunto.

A proposição a seguir nos revela que podemos descrever completamente uma topologia, de forma equivalente, por meio da definição de abertos ou fechados. Para demonstrá-la basta usar fatos básicos de teorias dos conjuntos e a definição de conjunto fechado.

**Proposição 1.1.** Seja  $\mathcal{F}$  a coleção de todos os conjuntos fechados em um espaço topológico  $X$ . Valem as seguintes afirmações:

- i.  $\emptyset$  e  $X$  são elementos de  $\mathcal{F}$ .
- ii. A interseção de qualquer subcoleção de  $\mathcal{F}$  é ainda um elemento de  $\mathcal{F}$ .
- iii. A união de qualquer subcoleção finita de  $\mathcal{F}$  pertence à  $\mathcal{F}$ .

**Exemplo 1.2.** Seja  $X$  um conjunto infinito. Podemos definir a *topologia cofinita* em  $X$ , onde os únicos fechados são  $X, \emptyset$  e os subconjuntos finitos de  $X$ .

## 1.2 Vizinhanças e Bases (Construindo Topologias)

Descrever inteiramente a coleção  $\tau$  de todos os abertos não é, em geral, a melhor maneira de descrever uma topologia. Na maioria dos casos, especifica-se uma menor coleção deles, ou descreve-se localmente como são os abertos, de modo que eles sejam “regulares” do ponto de vista de não parecerem tão distintos uns dos outros, o que é verdade, por exemplo, para os espaços euclidianos.

**Definição 1.3.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $x \in X$ . Uma *vizinhança* de  $x$  é um conjunto  $U \subset X$  que contém um aberto  $V$ , com  $x \in V$ . Equivalentemente,  $U$  é uma vizinhança de  $x$  se, e somente se,  $x \in \text{int}U$ . A coleção  $\mathcal{U}_x$  de todas as vizinhanças de  $x$  é denominada *sistema de vizinhanças* de  $x$ .

**Proposição 1.2.** O sistema de vizinhanças  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  em um espaço topológico não vazio  $X$  possui as seguintes propriedades:

- i. Se  $U \in \mathcal{U}_x$ , então  $x \in U$ .
- ii. Se  $U, V \in \mathcal{U}_x$ , então  $U \cap V \in \mathcal{U}_x$ .
- iii. Se  $U \in \mathcal{U}_x$  e  $U \subset V \subset X$ , então  $V \in \mathcal{U}_x$ .
- iv. Se  $U \in \mathcal{U}_x$ , então existe  $V \in \mathcal{U}_x$ ,  $V \subset U$ , tal que  $U \in \mathcal{U}_v$ , para cada  $v \in V$ .
- v.  $W \subset X$  é aberto se, e somente se,  $W$  contém uma vizinhança de cada um de seus pontos.

*Demonstração.* Os itens (i), (ii) e (iii) seguem da definição. Para o item (iv), consideramos  $V = \text{int}U$  e aplicamos o item (iii). No item (v), se  $W$  é aberto, o próprio  $W$  é uma vizinhança de cada um de seus pontos. Reciprocamente, se para cada  $w \in W$  existe uma vizinhança  $V_w$  de  $w$  contida em  $W$ , então  $W = \bigcup_{w \in W} \text{int}V_w$ , logo,  $W$  é aberto.  $\square$

O item (iii) nos diz que todo conjunto que contém uma vizinhança de  $x$  é também uma vizinhança de  $x$ . Com isso, não necessitamos de todas as vizinhanças para descrever um sistema de vizinhanças. A definição a seguir explicita isso

**Definição 1.4.** Uma *base* (ou *sistema fundamental*) de vizinhanças de  $x$  em um espaço topológico  $X$  é uma subcoleção  $\mathcal{B}_x$  do sistema de vizinhanças  $\mathcal{U}_x$ , com a propriedade que cada  $U \in \mathcal{U}_x$  contém algum  $V \in \mathcal{B}_x$ . Logo,  $\mathcal{U}_x$  é determinada por  $\mathcal{B}_x$  da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X ; V \subset U \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Os elementos de uma base de vizinhanças de  $x$  são denominados *vizinhanças básicas*.

**Proposição 1.3.** Seja  $X$  um espaço topológico e, para cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x$  uma base de vizinhanças de  $x$ . São válidas as seguintes afirmações:

- i. Cada vizinhança básica  $B \in \mathcal{B}_x$  contém  $x$ .
- ii. Se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}_x$ , tal que  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

- iii. Cada  $B \in \mathcal{B}_x$  contém algum  $B_0 \in \mathcal{B}_x$ , de modo que cada um dos pontos  $w \in B_0$  possui uma vizinhança básica  $W \in \mathcal{B}_w$  contida em  $B$ .
- iv.  $U$  é um aberto se, e somente se,  $U$  contém uma vizinhança básica de cada um de seus pontos.

*Demonstração.* O item (i) segue da definição de vizinhança; (ii) segue do fato de a interseção finita de vizinhanças ser, ainda, uma vizinhança, e portanto, contém alguma vizinhança básica; e (iv) é provado de maneira análoga ao item correspondente da proposição anterior. Em (iii), para cada  $B \in \mathcal{B}_x$ , tomemos  $B_1 = \text{int}B \in \mathcal{U}_x$ . A definição de base de vizinhanças garantirá a existência da vizinhança básica  $B_0 \in \mathcal{B}_x$ , contida em  $B_1$ . Além disso,  $B_1$  é uma vizinhança de cada um de seus pontos, por ser aberto. Em particular, para cada  $w \in B_0$ ,  $B_1 \in \mathcal{U}_w$ , donde existirá  $W \in \mathcal{B}_w$  contida em  $B_1 \subset B$ .  $\square$

**Teorema 1.4. (Critério de Hausdorff).** *Para cada  $x \in X$ , sejam  $\mathcal{B}_x^1, \mathcal{B}_x^2$  bases de vizinhanças de  $x$  para as topologias  $\tau_1, \tau_2$  em  $X$ , respectivamente. Então  $\tau_1 \subset \tau_2$  se, e somente se, para cada  $x \in X$ , dado  $B^1 \in \mathcal{B}_x^1$ , existe  $B^2 \in \mathcal{B}_x^2$ , contido em  $B^1$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\tau_1 \subset \tau_2$ . Sejam  $x \in X$  e  $B^1 \in \mathcal{B}_x^1$ . Assim,  $B^1$  é vizinhança de  $x$  em  $(X, \tau_1)$ , e então contém algum aberto  $B \in \tau_1$ , com  $x \in B$ . Como  $\tau_1 \subset \tau_2$ ,  $B$  é vizinhança de  $x$  em  $(X, \tau_2)$ , logo existe  $B^2 \in \mathcal{B}_x^2$ , tal que  $B^2 \subset B \subset B^1$ . Reciprocamente, se  $U \in \tau_1$ , então  $U$  conterà uma vizinhança básica  $B^1 \in \mathcal{B}_x^1$ , de cada um de seus pontos  $x \in U$ . Então, por hipótese,  $U$  conterà uma vizinhança básica  $B^2 \in \mathcal{B}_x^2$ , de cada um de seus pontos, portanto  $U$  será um aberto da topologia  $\tau_2$ .  $\square$

**Definição 1.5.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Uma coleção  $\mathcal{B} \subset \tau$  é uma *base* para a topologia  $\tau$  se, para qualquer aberto  $U \in \tau$ , existe uma subcoleção  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$  tal que

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

com  $\Lambda$  um conjunto de índices tais que  $\mathcal{C} = \{V_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ . Em outras palavras, todo aberto de  $X$  pode ser representado como união de abertos da base, denominados *abertos básicos*. Nesse caso a topologia é dita *topologia gerada por  $\mathcal{B}$* , representada por  $\tau_{\mathcal{B}}$  quando houver necessidade.

A partir dessa definição, conclui-se, sem maiores dificuldades que

**Proposição 1.5.** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma coleção  $\mathcal{B}$  de abertos de  $X$  constitui uma base em  $X$  se, e somente se, para cada aberto  $A \subset X$  e cada ponto  $x \in A$ , existe um aberto básico  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_x \subset A$ .

**Proposição 1.6.** Se  $\mathcal{B}$  é base para uma topologia  $\tau_{\mathcal{B}}$ , então

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B ; \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \right\}$$

ou seja,  $\tau_{\mathcal{B}}$  é a família de todos os subconjuntos de  $X$  que são uniões de subcoleções de  $\mathcal{B}$ .

Um exemplo de simples verificação é que em todo espaço métrico  $M$  a coleção de todas as bolas, centradas em pontos de  $M$ , é uma base.

**Teorema 1.7.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma coleção  $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$  é base para uma topologia  $\tau$  em  $X$  se, e somente se, possui as seguintes propriedades:*

*i.  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ , para alguma coleção  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ ,*

*ii. Para cada  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  e cada  $x \in B_1 \cap B_2$ , existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$  possua as propriedades (i) e (ii). Então, como é de se esperar, pela Proposição 1.6, definamos  $\tau_{\mathcal{B}}$  como a família de todos os subconjuntos de  $X$  que são uniões de subcoleções de  $\mathcal{B}$ . Provemos que  $\tau_{\mathcal{B}}$  é uma topologia. De fato,  $X \in \tau_{\mathcal{B}}$  segue de (i), e  $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$ , por ser união dos elementos da subcoleção vazia de  $\mathcal{B}$ . A união de elementos de  $\tau_{\mathcal{B}}$  ainda é um elemento de  $\tau_{\mathcal{B}}$ . Se  $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  e  $V = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ , com  $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ , são elementos de  $\tau_{\mathcal{B}}$ , então  $U \cap V = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \cap \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ C \in \mathcal{C}}} A \cap C$ . A propriedade (ii) significa que cada conjunto  $A \cap C$ , quando não vazio, é reunião de elementos de abertos básicos. Logo,  $U \cap V$  é reunião de conjuntos pertencentes a  $\mathcal{B}$ . Portanto,  $\tau_{\mathcal{B}}$  é uma topologia cuja base é  $\mathcal{B}$ . Reciprocamente, se  $\mathcal{B}$  é base para uma topologia em  $X$ , então é uma coleção de abertos de  $X$  como na Definição 1.5, que possui a propriedade (i), por  $X$  ser um aberto, e a propriedade (ii), pois a interseção de dois abertos básicos é ainda um aberto, logo é reunião de abertos básicos.  $\square$

**Teorema 1.8.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma coleção de abertos em  $X$ . Então  $\mathcal{B}$  é uma base para  $X$  se, e somente se, para cada  $x \in X$ , a coleção  $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} ; x \in B\}$  é uma base de vizinhanças em  $x$ .*

*Demonstração.* Fixado  $x \in X$ , é evidente que a coleção  $\mathcal{B}_x$  é não vazia, pois  $X$  é reunião de abertos básicos de  $\mathcal{B}$ , e os elementos de  $\mathcal{B}_x$  são vizinhanças de  $x$ . Se  $U$  é uma vizinhança de  $x$ , então  $U$  contém algum aberto  $V$ , reunião de abertos básicos  $B \in \mathcal{B}$ , que contém  $x$ . Logo, algum desses abertos básicos  $B$  contém  $x$  e está contido em  $U$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{B}$  é uma coleção de abertos em  $X$  e, para cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} ; x \in B\}$  é base de vizinhanças de  $x$ . Então  $\cup_{x \in X} \mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ , ou seja,  $\mathcal{B}$  contém todas as vizinhanças básicas de todos os elementos de  $X$ . Seja  $U$  um aberto de  $X$ . Para cada  $z \in U$ , existe uma vizinhança básica  $B_z \in \mathcal{B}_z$  contida em  $U$ . Portanto,  $U = \cup_{z \in U} B_z$ , isto é,  $U$  é reunião de elementos de  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Definição 1.6.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma *sub-base*  $\mathcal{C}$  para uma topologia em  $X$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$ , cuja união é igual a  $X$ . Definimos a topologia gerada por uma sub-base  $\mathcal{C}$  é como a coleção

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B ; \mathcal{S} \subset \mathcal{F} \right\} \quad \text{com} \quad \mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i ; S_i \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ou seja, é a topologia cuja base  $\mathcal{F}$  é família de todas as interseções finitas de elementos de  $\mathcal{C}$ .

Resulta do teorema 1.7 que  $\mathcal{F}$  é, de fato, uma base para um topologia em  $X$ . Portanto,  $\tau$  é bem definida.

## 1.3 Continuidade

A importância do conceito de continuidade dispensa comentários. Definiremos esse conceito, constatando-se que a noção de distância pode ser suprimida, assim como algumas propriedades elementares, generalizações diretas dos conceitos vistos em cursos de cálculo e análise.

**Definição 1.7.** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$ . Dizemos que  $f$  é *contínua* em  $a \in X$  quando para cada vizinhança  $V$  de  $f(a)$  em  $Y$ , existir uma vizinhança  $U$  de  $a$  em  $X$ , tal que  $f(U) \subset V$ . Quando  $f$  for contínua em cada ponto  $x \in X$ , diremos que  $f$  é contínua em  $X$ .

Ressaltamos que a definição anterior é equivalente ao trocarmos “vizinhança” por “vizinhança básica”, bem como por “abertos”. O teorema a seguir nos fornece caracterizações úteis de funções contínuas.

**Teorema 1.9.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$ . São equivalentes:*

- i.  $f$  é contínua,*
- ii.  $f^{-1}(A)$  é aberto em  $X$ , para cada aberto  $A$  em  $Y$ ,*
- iii.  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ , para cada fechado  $F$  em  $Y$ ,*
- iv.  $f(\text{Cl}_X(Z)) \subset \text{Cl}_Y(f(Z))$ , para todo subconjunto  $Z \subset X$ .*

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $A$  é um aberto em  $Y$ , então  $A$  é uma vizinhança de  $f(x)$ , para cada  $x \in f^{-1}(A)$ , e a continuidade de  $f$  nos garante a existência de uma vizinhança  $V$  de  $x$ , tal que  $f(V) \subset A$ , ou seja,  $V \subset f^{-1}(A)$ . Mas isso significa que  $f^{-1}(A)$  contém uma vizinhança de cada um de seus pontos, logo é um aberto de  $X$ . (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Se  $F$  é um fechado em  $Y$ , então  $f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F)$  é aberto em  $X$ , e portanto  $f^{-1}(F)$  é um fechado em  $X$ . (iii)  $\Rightarrow$  (iv) Seja  $C$  um fechado em  $Y$  que contém  $f(Z)$ . Então  $f^{-1}(C)$  é um fechado em  $X$  que contém  $Z$ , ou seja,  $\text{Cl}_X(Z) \subset f^{-1}(C)$ . Mas  $f(\text{Cl}_X(Z)) \subset C$ , para todo fechado  $C$  em  $Y$ , implica  $f(\text{Cl}_X(Z)) \subset \text{Cl}_Y(f(Z))$ . Finalmente, suponhamos que a condição (iv) seja satisfeita, e consideremos uma vizinhança aberta  $V$  de  $f(x)$ , com  $x \in X$  arbitrário. Sejam  $Z = X \setminus f^{-1}(V)$  e  $U = X \setminus \text{Cl}_X(Z)$ . Da hipótese  $f(\text{Cl}_X(Z)) \subset \text{Cl}_Y(f(Z))$ , segue  $x \in U$ . De fato, se fosse  $x \notin U$ , então teríamos  $x \in \text{Cl}_X(Z)$  e portanto  $f(x) \in f(\text{Cl}_X(Z)) \subset \text{Cl}_Y(f(Z))$ . Além disso,  $f(Z) = f(X \setminus f^{-1}(V)) = f(f^{-1}(Y \setminus V)) \subset Y \setminus V$ , e por  $V$  ser aberto,  $\text{Cl}_Y(f(Z)) \subset Y \setminus V$ . No entanto,  $f(x) \notin \text{Cl}_Y(f(Z))$ , pois  $f(x) \in V$ . Por último, verifica-se  $f(U) = f(X \setminus \text{Cl}_X(Z)) \subset f(X \setminus Z) = f(f^{-1}(V)) \subset V$ , portanto,  $f$  é contínua.  $\square$

Salientamos que no caso da topologia em  $Y$  ser gerada por uma base  $\mathcal{B}$ , para provar a continuidade de  $f$  é suficiente mostrar que a imagem inversa de cada aberto básico  $B \in \mathcal{B}$  é um aberto em  $X$ . Se a topologia em  $Y$  for gerada por uma sub-base  $\mathcal{S}$ , então é suficiente provar que a imagem inversa de cada elemento  $S \in \mathcal{S}$  é um aberto em  $X$  para provar a continuidade de  $f$ .

O conceito de continuidade comprova a suspeita de que as topologias trivial e discreta não são, em geral, interessantes para trabalhar, pois em um espaço topológico  $X$  munido com uma dessas topologias, para todo espaço topológico  $Y$ , qualquer função  $f : X \rightarrow Y$  é contínua.

**Definição 1.8.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Podemos construir uma topologia em  $A$ , definida por  $\tau_A := \{\mathcal{U} \cap A; \mathcal{U} \in \tau\}$ , denominada *topologia subespaço* ou *topologia relativa*, onde  $A$  é dito *subespaço* de  $X$  (também denotado por  $A \leq X$ ). Ao mencionarmos  $A \subset X$  é um subespaço, queremos dizer que  $A$  é um espaço topológico, com a topologia subespaço.

Segue diretamente dessa definição que

**Proposição 1.10.** Se  $Y$  é um subespaço de  $X$  e  $Z$  é um subespaço de  $Y$ , então as duas topologias relativas de  $Z$ , vista como subespaço de  $Y$  e subespaço de  $X$ , coincidem.

Em geral, as noções topológicas são relacionadas a um subespaço via interseções, como revela a proposição seguinte.

**Proposição 1.11.** Se  $A$  é um subespaço do espaço topológico  $X$ , então

- i.  $V \subset A$  é aberto em  $A$  se, e somente se,  $V = U \cap A$ , para algum  $U$  aberto em  $X$ ,
- ii.  $F \subset A$  é fechado em  $A$  se, e somente se,  $F = C \cap A$ , para algum  $C$  fechado em  $X$ ,
- iii. Para cada  $Z \subset A$ ,  $\text{Cl}_A Z = A \cap \text{Cl}_X Z$ ,
- iv. Para cada  $x \in A$ ,  $V$  é uma vizinhança de  $x$  em  $A$  se, e somente se,  $V = U \cap A$ , para alguma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $X$ ,
- v. Para cada  $x \in A$ , e cada  $\mathcal{B}_x$  base de vizinhanças para  $x$  em  $X$ ,  $\mathcal{B}_x^A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}_x\}$  é uma base de vizinhanças para  $x$  em  $A$ ,
- vi. Se  $\mathcal{B}$  é uma base para  $X$ , então  $\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$  é uma base para  $A$ .

*Demonstração.* O item (i) segue da definição de topologia relativa. (ii) Se  $F$  é fechado em  $A$ , então  $F = A \setminus (U \cap A) = A \cap (X \setminus U)$ , com  $U$  aberto em  $X$ . Reciprocamente, se  $C$  é fechado em  $X$ , então  $A \setminus (C \cap A) = A \cap (X \setminus C)$  é aberto em  $A$ . (iii) segue das igualdades

$$\text{Cl}_A Z = \bigcap_{\substack{Z \subset F \\ A \setminus F \in \tau_A}} F = \bigcap_{\substack{Z \subset C \\ X \setminus C \in \tau}} (C \cap A) = A \cap \left( \bigcap_{\substack{Z \subset C \\ X \setminus C \in \tau}} C \right) = \text{Cl}_X Z$$

(iv): Seja  $V$  uma vizinhança de  $x$  em  $A$ . Então existe um aberto  $U$  em  $X$ , tal que  $x \in U \cap A \subset V$ . Logo,  $V = [U \cup (V \setminus U)] \cap A$ , com  $U \cup (V \setminus U)$  uma vizinhança de  $x$  em  $X$ . Reciprocamente, se  $V = U \cap A$ , com  $U$  uma vizinhança em  $X$  de  $x \in A$ , então existe um aberto  $W$  em  $X$  tal que  $x \in W \subset U$ . Logo  $x \in W \cap A \subset U \cap A = V$ , isto é,  $V$  é uma vizinhança de  $x$  em  $A$ . Os itens (v) e (vi) seguem da definição de base de vizinhanças e do item anterior, e da definição de base, respectivamente.  $\square$

**Corolário 1.12.** Se  $Z \subset Y \subset X$ , então  $\text{Cl}_Y Z \subset \text{Cl}_X Z$ . Em particular, se  $Z$  for fechado em  $X$ , então  $Z$  é fechado em  $Y$ .

*Demonstração.* O item (iii) do teorema anterior nos garante que  $\text{Cl}_Y Z = Y \cap \text{Cl}_X Z \subset \text{Cl}_X Z$ . Se  $Z$  é fechado em  $X$ , então  $Z \subset \text{Cl}_Y Z \subset \text{Cl}_X Z = Z$ . Portanto,  $Z$  é fechado em  $Y$ .  $\square$

**Teorema 1.13. (Construindo funções contínuas)** Sejam  $X, Y, Z$  espaços topológicos.

- a. (Função constante) Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função que aplica todos os elementos de  $X$  em um único ponto  $y_0 \in Y$ , então  $f$  é contínua.
- b. (Inclusão) Se  $A$  é um subespaço de  $X$ , então a aplicação inclusão  $j : A \rightarrow X$  é contínua.
- c. (Composição) Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são contínuas, então  $g \circ f$  é contínua.
- d. (Restrição do Domínio) Se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua, e  $A$  é um subespaço de  $X$ , então a função restrita ao conjunto  $A$ ,  $f|_A : A \rightarrow Y$ , é contínua.
- e. (Restrição ou Expansão do Contradomínio) Seja  $f : X \rightarrow Y$  contínua. Se  $Z$  é um subespaço de  $Y$  contendo a imagem  $f(X)$ , então a função  $g : X \rightarrow Z$ , obtida por uma restrição do contradomínio de  $f$ , é contínua. Se  $Z$  é um espaço que possui  $Y$  como subespaço, então a função  $h : X \rightarrow Z$ , obtida por uma extensão do contradomínio de  $f$ , é contínua.
- f. (Formulação Local da Continuidade) A função  $f : X \rightarrow Y$  será contínua se  $X$  for escrito como união de conjuntos abertos  $U_\lambda$ , tal que  $f|_{U_\lambda}$  é contínua, para cada  $\lambda \in \Lambda$ .

*Demonstração.* (a) Para cada aberto  $U$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(U) = X$ , se  $y_0 \in U$ , ou  $f^{-1}(U) = \emptyset$ , se  $y_0 \notin U$ . (b) Para cada subconjunto  $W \subset X$ , temos  $j^{-1}(W) = W \cap A$ . (c) Basta lembrar que  $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ , para todo  $V \subset Z$ . (d) A função restrição  $f|_A$  é a composição da

inclusão  $j : A \rightarrow X$  com  $f : X \rightarrow Y$ , ambas contínuas. (e) Sejam  $f(X) \subset Z \subset Y$  e  $W$  aberto em  $Z$ , isto é,  $W = U \cap Z$ , com  $U$  aberto em  $Y$ . Como  $Z$  contém o conjunto imagem  $f(X)$ , obtemos  $g^{-1}(W) = f^{-1}(U)$ . Logo,  $g^{-1}(W)$  é aberto em  $X$ . Para provar que a função  $h : X \rightarrow Z$ , com  $Z$  contendo  $Y$  como subespaço, é contínua, basta notar que  $h$  é composição de  $f$  com a inclusão  $j : Y \rightarrow Z$ . (f) Por hipótese, podemos escrever  $X$  como união de abertos  $U_\lambda$ , tais que  $f|_{U_\lambda}$  é contínua. Seja  $V$  aberto em  $Y$ . Então,  $(f|_{U_\lambda})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\lambda$  é um aberto em  $U_\lambda$ , pela continuidade de  $f|_{U_\lambda}$ , logo um aberto em  $X$ . Mas

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V) \cap U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (f|_{U_\lambda})^{-1}(V)$$

ou seja,  $f^{-1}(V)$  é união de abertos de  $X$ . □

**Teorema 1.14.** Se  $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ , com  $F_i$  fechados em  $X$ ,  $f : X \rightarrow Y$  tal que as restrições  $f_i = f|_{F_i}$  são contínuas, então  $f$  é contínua.

*Demonstração.* Com efeito, dado  $C \subset Y$  fechado, temos  $f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C)$ . Da continuidade de cada  $f_i$ , segue que  $f_i^{-1}(C)$  é fechado em  $F_i$ , e portanto fechado em  $X$ . Assim,  $f^{-1}(C)$  é fechado em  $X$ , e a continuidade de  $f$  é garantida pelo item (iii) do teorema 1.9. □

## 1.4 Homeomorfismos

**Definição 1.9.** Um *homeomorfismo*  $f : X \rightarrow Y$ , de um espaço topológico  $X$  sobre um espaço topológico  $Y$  é uma aplicação contínua e biunívoca de  $X$  sobre  $Y$ , cuja inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também é contínua. Nesse caso, dizemos que  $X$  é *homeomorfo* a  $Y$ .

Espaços topológicos homeomorfos são iguais do ponto de vista topológico. Evidentemente, “ $X$  é homeomorfo a  $Y$ ” define uma relação de equivalência em qualquer conjunto de espaços topológicos (por mais abstrato que seja esse conjunto).

Provar que dois espaços são homeomorfos é um dos problemas básicos em topologia, consistindo basicamente em construir um homeomorfismo entre os espaços, ou equivalentemente, uma função contínua cuja inversa também seja contínua. E como vimos na seção anterior, existem técnicas para construir funções contínuas. Entretanto, provar que dois espaços *não* são homeomorfos

é outro problema bastante diferente, e uma das técnicas para resolvê-lo consiste em encontrar uma propriedade topológica presente em um dos espaços mas não no outro. Uma *propriedade topológica* é uma propriedade invariante por homeomorfismos, ou seja, é uma característica dos espaços topológicos que, se é possuída pelo espaço  $X$ , então todos os espaços homeomorfos a  $X$  também a possuem.

**Definição 1.10.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se *aberta (fechada)* quando a imagem  $f(A)$ , de cada aberto (fechado)  $A \subset X$ , é um aberto (fechado) em  $Y$ .

**Teorema 1.15.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  biunívoca. São equivalentes:*

- i.  $f$  é um homeomorfismo,*
- ii.  $f$  e  $f^{-1}$  são aplicações abertas,*
- iii.  $f$  e  $f^{-1}$  são aplicações fechadas.*

*Demonstração.* Inicialmente lembremos que para uma aplicação biunívoca qualquer  $\varphi : X \rightarrow Y$ , valem  $\varphi(W) = (\varphi^{-1})^{-1}(W)$ ,  $W = \varphi(\varphi^{-1}(W)) = \varphi^{-1}(\varphi(W))$ , para cada  $W \subset X$ . Esses fatos aliados às equivalências entre os três primeiros itens do teorema 1.9, garantem que  $\varphi$  é contínua  $\Leftrightarrow \varphi^{-1}$  é aberta  $\Leftrightarrow \varphi^{-1}$  é fechada. Portanto, seguem-se as equivalências (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii).  $\square$

## 1.5 Produtos Cartesianos e Espaços Produtos

Prosseguindo com o propósito de construir novos espaços a partir de outros, consideraremos agora o produto cartesiano de uma família qualquer de espaços topológicos. A topologia do produto cartesiano é definida de uma maneira natural e usual. A noção de produtos cartesianos quaisquer é fundamental e a chave para o entendimento da definição repousa no fato que poderemos naturalmente considerar o produto cartesiano como uma coleção de funções definidas no conjunto de índices.

Sejam  $\Lambda$  um conjunto de índices e  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de conjuntos não vazios. Consideraremos o conjunto  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ , *produto cartesiano* dos  $X_\lambda$ . Os elementos de  $X$  são, por definição, todas as funções  $x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ , sujeitas à condição de que, para qualquer  $\lambda \in \Lambda$ ,  $x(\lambda) \equiv x_\lambda \in X_\lambda$ .

Em outras palavras, um elemento  $x \in X$  pode ser interpretado como uma “ $\Lambda$ -upla”  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  tal que  $x_\lambda \in X_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Os valores  $x(\lambda) \equiv x_\lambda$  são denominados “coordenadas” de  $x$ .

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left\{ x : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda ; x(\lambda) = x_\lambda \in X_\lambda , \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

Ocasionalmente denotaremos o produto simplesmente por  $\prod X_\lambda$ , e cada elemento por  $(x_\lambda)$ . Se todos os conjuntos  $X_\lambda$  são iguais a  $X$ , então o produto cartesiano  $\prod X_\lambda$  reduz-se ao conjunto  $X^\Lambda \equiv \mathfrak{F}(\Lambda; X)$  de todas as funções  $x : \Lambda \longrightarrow X$ , ou  $\Lambda$ -uplas de elementos de  $X$ . No produto cartesiano  $\prod X_\lambda$ , para cada  $\lambda$  fixo, destacam-se as  $\lambda$ -ésimas projeções  $\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ , que associam cada elemento  $x = (x_\lambda)$  do produto à sua  $\lambda$ -ésima coordenada,  $\pi_\lambda(x) = x(\lambda) \equiv x_\lambda$ .

**Definição 1.11.** Seja  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de espaços topológicos, onde,  $\tau_\lambda$  representa a topologia em  $X_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Tomemos como base para uma topologia no espaço produto  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  a coleção de todos os conjuntos da forma  $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ , com  $U_\lambda \in \tau_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . A topologia gerada por essa base denomina-se *topologia da caixa* (“*box topology*”).

A coleção descrita na definição anterior é, de fato, uma base, pois satisfaz a primeira condição do teorema 1.7, já que o próprio espaço produto  $\prod X_\lambda$  é um elemento da base; e a segunda condição do mesmo teorema, por a interseção de dois elementos da base ainda pertencer à base:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap V_\lambda)$$

**Definição 1.12.** Seja  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de espaços topológicos. Considere a coleção  $\mathcal{S}_\lambda = \{\pi_\lambda^{-1}(U) ; U \in \tau_\lambda\}$ , e  $\mathcal{S}$  a união de todas essas coleções,  $\mathcal{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda$ . A topologia gerada pela sub-base  $\mathcal{S}$  chama-se *topologia produto* ou *topologia de Tychonoff* no espaço produto  $\prod X_\lambda$ .

Para compararmos essas topologias, consideremos  $\mathcal{B}$  a base que  $\mathcal{S}$  gera, consistindo em todas as interseções finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ . Ao intersectarmos elementos da mesma coleção  $\mathcal{S}_\lambda$ , não obtemos algo diferente do que tínhamos, pois  $\pi_\lambda^{-1}(U) \cap \pi_\lambda^{-1}(V) = \pi_\lambda^{-1}(U \cap V)$ , isto é, a intersecção de dois elementos de  $\mathcal{S}_\lambda$ , bem como uma quantidade finita deles, é ainda um elemento de  $\mathcal{S}_\lambda$ . Obtemos algo novo apenas quando interceptamos elementos de diferentes conjuntos  $\mathcal{S}_\lambda$ . Um típico elemento básico de  $\mathcal{B}$  é descrito da seguinte forma: sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distintos índices de  $\Lambda$ ,

e  $U_{\lambda_i} \in \tau_{\lambda_i}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Então  $B = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$  é um típico elemento básico. Vejamos que um ponto  $x = (x_\lambda)$  pertence a  $B$  se, e somente se, sua  $\lambda_i$ -ésima coordenada está em  $U_{\lambda_i}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Não há restrição quanto às outras  $\lambda$ -ésimas coordenadas de  $x$ , se  $\lambda$  é distinto dos  $\lambda_i$ . Portanto, podemos escrever  $B = \prod U_\lambda$ , onde  $U_\lambda = X_\lambda$ , se  $\lambda \neq \lambda_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

Em suma,

**Teorema 1.16.** (*Comparação da topologia da caixa e a topologia produto*) *A topologia da caixa em  $\prod X_\lambda$  possui como base todos os conjuntos da forma  $\prod U_\lambda$ , onde  $U_\lambda$  é aberto em  $X_\lambda$ , para cada  $\lambda$ , enquanto que a topologia produto em  $\prod X_\lambda$  possui como base todos os conjuntos da forma  $\prod U_\lambda$ , onde  $U_\lambda$  é aberto em  $X_\lambda$ , para cada  $\lambda$ , e  $U_\lambda = X_\lambda$ , a menos que uma quantidade finita de índices  $\lambda$ .*

Dois fatos são imediatos. Primeiro, no caso de produtos finitos  $\prod_{i=1}^n X_i$  as duas topologias são precisamente iguais. Segundo, a topologia da caixa  $\tau_C$  é mais fina que a topologia produto  $\tau_P$ , isto é,  $\tau_P \subset \tau_C$ .

No momento ainda não é claro a preferência pela topologia produto. Adiantamos que isso se deve ao fato de importantes teoremas para produtos finitos serem válidos para produtos arbitrários, ao considerarmos a topologia produto, mas não se utilizarmos a topologia da caixa. Portanto, convencionaremos que, salvo em menção explícita, ao considerarmos o produto  $\prod X_\lambda$ , assumiremos que a topologia produto é a topologia em questão.

A seguir, listamos alguns resultados que são válidos para o produto  $\prod X_\lambda$ , para qualquer uma das duas topologias citadas. Seremos breves nas demonstrações.

**Proposição 1.17.** Suponha que cada espaço  $X_\lambda$  seja construído a partir de uma base  $\mathcal{B}_\lambda$ . Então a coleção de todos os conjuntos da forma  $\prod B_\lambda$ , com  $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$  para cada  $\lambda$ , é uma base para a topologia da caixa em  $\prod X_\lambda$ . A coleção de todos os conjuntos da mesma forma, onde  $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$  para finitos índices  $\lambda$ , e  $B_\lambda = X_\lambda$  para os índices restantes, é base para a topologia produto.

*Demonstração.* Basta verificar que as coleções gozam das propriedades do teorema 1.7. □

**Proposição 1.18.** Seja  $A_\lambda$  subespaço de  $X_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Então  $\prod A_\lambda$  é um subespaço de  $\prod X_\lambda$ , se em ambos os produtos é considerada a topologia da caixa ou do produto.

*Demonstração.* Prova-se, sem maiores óbices, que a base de  $\mathcal{A} = \prod A_\lambda$  vista como subespaço de  $\mathcal{X} = \prod X_\lambda$  é a mesma da base da topologia produto ou da caixa considerada em  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{X}$ .  $\square$

**Teorema 1.19.** *Sejam  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de espaços topológicos, e  $A_\lambda \subset X_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Se  $\prod X_\lambda$  é dado pela topologia da caixa ou produto, então  $\prod \overline{A_\lambda} = \overline{\prod A_\lambda}$ .*

*Demonstração.* Fixado  $x = (x_\lambda) \in \prod \overline{A_\lambda}$ , cada aberto  $\prod U_\lambda$ , na topologia considerada, que contém  $x$  intersecta  $\prod A_\lambda$ . Logo,  $x \in \overline{\prod A_\lambda}$ . Reciprocamente, se  $x = (x_\lambda) \in \overline{\prod A_\lambda}$ , então prova-se que  $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ , qualquer que seja  $\alpha \in \Lambda$ . De fato, se  $U_\alpha$  é aberto em  $X_\alpha$  que contém  $x_\alpha$ , então  $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$  é aberto em  $\prod X_\lambda$ , em ambas as topologias, que contém  $x = (x_\lambda)$ , logo existe  $y = (y_\lambda) \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \prod A_\lambda$ . Com isso,  $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$ , isto é,  $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ .  $\square$

**Exemplo 1.3.** Seja  $X$  um conjunto arbitrário e  $Y = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é uma função}\}$ . De acordo com a definição de produto cartesiano, podemos interpretar  $Y$  como o produto  $\mathbb{R}^X = \prod_{\alpha \in X} X_\alpha$ , onde  $X_\alpha = \mathbb{R}$ , para todo  $\alpha \in X$ . A proposição 1.17 nos diz que um elemento básico típico da topologia produto de  $Y$  é da forma  $B = \cap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ , onde cada  $U_{\alpha_i}$  é um aberto básico da topologia (natural) de  $\mathbb{R}$ , ou seja, cada  $U_{\alpha_i}$  é um intervalo de raio  $\delta_i$  e centro  $b_i$ . Portanto,

$$B = \{f \in Y ; |f(\alpha_i) - b_i| < \delta_i, \text{ para } i = 1, \dots, n\} \quad (*)$$

O teorema 1.8 nos garante que, para cada  $f \in Y$ , a família  $\mathcal{B}_f$ , de todos os conjuntos  $B$  que contém  $f$  como em (\*) para alguns  $\alpha_i, b_i, \delta_i$ , é uma base de vizinhanças de  $f$ . Consideremos a coleção  $\mathcal{C}_f$  formada por todos os conjuntos

$$V_{(f, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \varepsilon)} = \{g \in Y ; |g(\alpha_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i \in X$  e  $\varepsilon > 0$ . Então  $\mathcal{C}_f \subset \mathcal{B}_f$ , isto é, os elementos de  $\mathcal{C}_f$  são vizinhanças de  $f$ . Além disso, para cada vizinhança básica  $B \in \mathcal{B}_f$ , é possível obter  $C \in \mathcal{C}_f$  contida em  $B$ . Com isso, segue da definição 1.4 que  $\mathcal{C}_f$  é base de vizinhanças de  $f$ . Resumindo, uma base de vizinhanças de  $f$  é a coleção de todos os conjuntos da forma

$$V_{(f, \mathcal{F}, \varepsilon)} = \{g \in Y ; |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ com } x \in \mathcal{F}\}$$

onde  $\mathcal{F}$  é um subconjunto finito de  $X$  e  $\varepsilon$  é um real positivo.

**Definição 1.13.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio,  $X_\lambda$  espaços topológicos e  $\varphi_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$  funções, para cada  $\lambda \in \Lambda$ . A *topologia fraca* induzida em  $X$  pela família de funções  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é a topologia cuja sub-base é a coleção  $\mathcal{S} = \{\varphi_\lambda^{-1}(V) ; V \in \tau_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ .

Com isso, a topologia fraca induzida em  $X$  é a menor topologia que torna todas as  $f_\lambda$  contínuas. Além disso, a topologia produto em  $\prod X_\lambda$  é a topologia fraca no espaço produto induzida pela coleção pelas família das projeções  $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

**Proposição 1.20.** Se  $X$  é munido da topologia fraca induzida pela coleção  $\{f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , então  $f : Y \rightarrow X$  é contínua se, e somente se,  $f_\lambda \circ f : Y \rightarrow X_\lambda$  é contínua para cada  $\lambda$ .

*Demonstração.* Se  $f$  é contínua, então cada  $f_\lambda \circ f$  é contínua, por ser composição de funções contínuas. Reciprocamente, suponhamos que cada  $f_\lambda \circ f$  é contínua. Para provar que  $f$  é contínua, basta mostrar que a imagem inversa por  $f$  de cada elemento da sub-base de  $X$  é um aberto. Mas isso segue de  $f^{-1}(f_\lambda^{-1}(Z)) = (f_\lambda \circ f)^{-1}(Z)$ , para cada  $Z \subset X_\lambda$ , e cada  $\lambda \in \Lambda$ .  $\square$

**Corolário 1.21.** Consideremos a topologia produto no espaço  $\prod X_\lambda$ . Uma aplicação de um espaço topológico  $X$  no espaço produto,  $f : X \rightarrow \prod X_\lambda$ , é contínua se, e somente se, cada  $\pi_\lambda \circ f$  é contínua.

Ao denotarmos  $f_\lambda := \pi_\lambda \circ f : X \rightarrow X_\lambda$ , obtemos  $f = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . Isso significa que podemos interpretar  $f$  como  $\Lambda$ -uplas de funções coordenadas  $f_\lambda$ . Com isso, esse resultado significa que a continuidade de uma função equivale à continuidade de suas funções coordenadas, ao considerarmos a topologia produto. Esse é o primeiro resultado que ilustra a diferença entre as topologia produto e a da caixa: a recíproca não é válida, em geral, ao considerarmos a topologia da caixa no espaço produto. O exemplo a seguir é a melhor forma para nos convenceremos disso.

**Exemplo 1.4.** Considere  $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  com a topologia da caixa, onde  $X_n = \mathbb{R}$  para cada  $n$ , e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ , dada por  $f(t) = (t, t, t, \dots)$ . Apesar de cada função coordenada  $f_n = id_{\mathbb{R}}$  ser contínua,  $f$  não o é. De fato, ao considerarmos o elemento básico  $B = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  de  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ , sua imagem inversa  $f^{-1}(B)$  não é aberto em  $\mathbb{R}$ , pois se o fosse, deveria conter algum intervalo  $(-\delta, \delta)$ , e portanto  $f((-\delta, \delta)) \subset B$ . Aplicando  $\pi_n$  em ambos os lados dessa igualdade, obtemos  $f_n((-\delta, \delta)) \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ , para todo natural  $n$ .

## 1.6 Axiomas de Separabilidade

A definição de espaço topológico é bastante geral e, conseqüentemente, admite estruturas “inúteis” para muitos propósitos, como é o caso da topologia caótica. Com isso, não são muitos os teoremas que podem ser provados para todos os espaços topológicos. As restrições impostas partem da necessidade de eliminar certas patologias. Mais especificamente, requiere-se que a topologia contenha abertos suficientes para que pontos sejam separáveis por meios de abertos.

**Definição 1.14.** Um espaço topológico é dito *espaço*  $T_0$ , quando dados dois pontos distintos arbitrários, existe um aberto que contém um e não contém o outro. Um *espaço*  $T_1$  é aquele em que, para quaisquer dois pontos distintos, existe uma vizinhança de cada um que não contém o outro. Um espaço é *Hausdorff* ou  $T_2$  quando pontos distintos possuem vizinhanças abertas disjuntas.

Na definição de espaço  $T_0$  podemos usar vizinhança. Evidentemente, todo espaço de Hausdorff ( $T_2$ ) é  $T_1$ , e todo espaço  $T_1$  é  $T_0$ . No entanto, as recíprocas não são válidas.  $X = \{a, b\}$  com  $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$  é  $T_0$  mas não é  $T_1$ . Para um conjunto  $Z$  infinito com a topologia cofinita, definida no exemplo 1.2, os conjuntos unitários são fechados, logo é  $T_1$  pela proposição a seguir, mas quaisquer dois abertos não vazios sempre se intersectam, portanto  $Z$  não pode ser Hausdorff.

**Proposição 1.22.** Se um espaço é  $T_1$ , então os pontos são fechados. Se os pontos são pontos fechados, então o espaço é Hausdorff.

*Demonstração.* Se  $X$  é  $T_1$ , então basta provar que  $z \in \overline{\{x\}} \Rightarrow z = x$ . Suponha que  $z \neq x$  e use a hipótese do espaço ser  $T_1$ . Reciprocamente, suponha que os pontos são fechados. Dados dois pontos distintos  $x$  e  $y$ , use os fatos  $x \notin \overline{\{y\}}$  e  $y \notin \overline{\{x\}}$ .  $\square$

**Definição 1.15.** Um espaço é dito *regular*, sempre que para cada fechado  $F$  e um ponto  $x \notin F$ , existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  que contém  $F$  e  $x$ , respectivamente. Um *espaço*  $T_3$  é um espaço  $T_1$  e regular.

Como nos espaços  $T_1$  todo ponto é fechado, os espaços que são  $T_1$  e regulares são Hausdorff.

$$T_0 \supset T_1 \supset T_2 := \text{Hausdorff} \supset T_3 := T_1 + \text{regular}$$

## 1.7 Espaços Compactos

Os espaços compactos são uma das classes mais importantes dos espaços topológicos, e seus conceitos não deixam de ser abstrações de certas propriedades importantes que os números reais possuem. Eles englobam todos os subespaços fechados e limitados no caso dos espaços euclidianos, tanto por a maioria dos teoremas da análise clássica serem provados para os fechados e limitados, como por mais tarde se revelar que várias propriedades interessantes dos espaço topológicos serem, de fato, inerentes a todos os espaços compactos.

**Definição 1.16.** Seja  $X$  um espaço topológico. Uma coleção  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  é dita *cobertura* de  $X$ , quando a união dos elementos de  $\mathcal{A}$  for igual a  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é uma *cobertura aberta (fechada)* de  $X$  quando todos os elementos da cobertura forem abertos (fechados). Um espaço denomina-se *compacto* quando toda cobertura aberta possui uma subcoleção finita que o cobre. Se  $Y$  é um subespaço de  $X$ , uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  *cobre*  $Y$ , quando a união dos seus elementos *contém*  $Y$ .

**Definição 1.17.** Diz-se que uma família  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  tem a *propriedade da interseção finita (PIF)* quando qualquer subfamília finita  $\{A_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$  tem interseção  $\bigcap_{i=1}^n A_{\lambda_i}$  não vazia.

Para que os conjuntos  $U_\lambda$  formem uma cobertura aberta de um espaço topológico, é necessário e suficiente que os seus complementares  $F_\lambda = X \setminus U_\lambda$  constituam uma família de fechados em  $X$ , cuja interseção  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  é vazia. Por passagem aos complementares, segue-se então que um espaço topológico é compacto se, e somente se, toda família de subconjuntos fechados, cuja interseção é vazia, contém uma subfamília finita cuja interseção é vazia. Portanto, acabamos de provar a

**Proposição 1.23.** Para que um espaço topológico  $X$  seja compacto, é necessário e suficiente que a seguinte condição se cumpra: “se uma família  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de conjuntos fechados em  $X$  possui a propriedade da interseção finita, então a interseção  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  é não-vazia”.

Intuitivamente, topologias com menos abertos possuem mais compactos. Se uma topologia possui uma quantidade finita de abertos, então todo conjunto é compacto. Por outro lado, na topologia discreta  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , um conjunto é compacto se, e somente se, for finito. A seguir, vejamos alguns fatos simples a respeito dos subespaços. Omitiremos as demonstrações, ou seus detalhes, daqueles mais evidentes.

**Proposição 1.24.** Um subespaço  $Y$  de  $X$  é compacto se, e somente se, toda cobertura de  $Y$ , por abertos de  $X$ , possui uma subcobertura finita.

*Demonstração.* Basta lembrar da definição de topologia relativa, onde cada aberto em  $Y$  é interseção de  $Y$  com um aberto em  $X$ .  $\square$

Esse resultado nos diz que a compacidade de um subespaço independe do “ambiente” em que estamos analisando-o, isto é, temos a liberdade de analisar a compacidade de  $Y$  no próprio espaço topológico  $Y$ , ou no espaço topológico  $X$ .

**Proposição 1.25.** Todo subespaço fechado de um compacto é compacto.

*Demonstração.* Se  $Y \leq X$  é fechado e  $\mathcal{A}$  é uma cobertura de  $Y$  por abertos de  $X$ , então  $\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ , que possui uma subcoleção finita  $\mathcal{C}$  que cobre  $X$ . Logo,  $\mathcal{C} \setminus \{X \setminus Y\}$  é cobertura de  $Y$  por abertos de  $X$ .  $\square$

**Lema 1.26.** Seja  $X$  um espaço de Hausdorff. Se  $K$  é um subespaço de  $X$  compacto e  $a \notin K$ , então existem abertos disjuntos que os separam, isto é, existem os abertos disjuntos  $U$  e  $V$  de  $X$  que contém  $a$  e  $K$ , respectivamente.

*Demonstração.* Por  $X$  ser Hausdorff, para cada  $x \in K$  existem abertos disjuntos  $U_x$  e  $V_x$  de  $X$  que contém  $a$  e  $x$  respectivamente. A coleção aberta  $\{V_x\}_{x \in K}$  cobre  $K$ , logo possui uma subcoleção finita  $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$  que ainda cobre  $K$ . Sejam  $U_{x_i}$  os abertos que contém  $a$  correspondentes aos  $V_{x_i}$ , isto é,  $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Portanto, os abertos  $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$  e  $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$  são disjuntos e contém  $a$  e  $K$ , respectivamente.  $\square$

**Proposição 1.27.** Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.

*Demonstração.* Seja  $K$  um subespaço compacto do espaço de Hausdorff  $X$ . Provaremos que  $K$  é fechado. Dado  $x \in X \setminus K$ , o lema anterior nos garante a existência de um aberto que contém  $x$  que não intersecta  $K$ . Consequentemente,  $x \notin \overline{K}$ . Portanto,  $\overline{K} \subset K$ .  $\square$

**Exemplo 1.5.** Em um espaço métrico os compactos são limitados e fechados. No  $\mathbb{R}^n$  vale a recíproca. Em qualquer conjunto  $X$  que possui ao menos dois pontos  $a$  e  $b$ , munido topologia  $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ , o conjunto  $\{a\}$  é compacto mas não fechado. A reta real  $\mathbb{R}$ , munida da topologia

do complemento enumerável descrita no exemplo 1.1 não é Hausdorff (ver comentário após o corolário 2.6 no capítulo 2), mas todo compacto é fechado. Nesse espaço um conjunto é fechado se, e somente se, for enumerável. Além disso, os únicos compactos são os conjuntos finitos. De fato, se  $A$  for um conjunto infinito, então existe o conjunto infinito e enumerável  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ , com elementos dois a dois distintos. Definamos, para cada natural  $n$ , o conjunto  $B_n = X \setminus \{a_i; i \geq n\}$ . Logo,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma cobertura aberta de  $A$  que não possui subcobertura finita, assim  $A$  não é compacto. Consequentemente, nenhum conjunto infinito pode ser compacto.

**Proposição 1.28.** A imagem de um compacto por uma aplicação contínua é um compacto.

*Demonstração.* Dado um conjunto compacto  $K \subset X$ , afirmamos que  $f(K)$  é compacto. Com efeito, seja  $V_\alpha$  uma cobertura aberta de  $f(K)$ , por abertos  $V_\alpha$  de  $Y$ . Logo, os conjuntos  $f^{-1}(V_\alpha)$  constituem uma cobertura aberta de  $K$ , pois  $f$  é contínua, da qual se pode extrair uma subcobertura finita  $K \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$ . Segue-se  $f(K) \subset \cup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$ , estabelecendo a compacidade de  $f(K)$ .  $\square$

**Corolário 1.29.** Toda aplicação contínua  $f : K \rightarrow Y$  de um espaço compacto  $K$  num espaço de Hausdorff  $Y$  é fechada.

*Demonstração.* Com efeito, cada subconjunto fechado  $F$  do compacto  $K$  é compacto. Pelo teorema anterior,  $f(F)$  é um compacto do espaço de Hausdorff  $Y$ , portanto  $f(F)$  é fechado em  $Y$ .  $\square$

**Corolário 1.30.** Toda aplicação  $f : K \rightarrow Y$ , contínua e biunívoca, de um espaço compacto  $K$  sobre espaço de Hausdorff  $Y$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* Pelo corolário,  $f$  é fechada e portanto  $f^{-1} : Y \rightarrow K$  é contínua, pelo item (iii) do teorema 1.9.  $\square$

## 1.8 Notas Históricas

Durante o século XX, o surgimento de vários fenômenos patológicos, como a descrição precisa de funções contínuas e não diferenciáveis em nenhum ponto (Bolzano, B. Riemann (1826–1866) e K. Weierstrass (1815–1907) em 1830, 1857 e 1861 respectivamente) confirmaram a necessidade de repousar o cálculo em fundações mais sólidas, tornando a análise independente da intuição

geométrica e dos argumentos mecânicos aos quais os criados do cálculo I. Newton (1642–1727) e G. Leibniz (1646–1716) referiam-se. A topologia geral, então, emerge como uma consequência disso.

Considera-se que os primeiros trabalhos relativos à topologia devem-se à Euler (1707 – 1783), que em 1736 publicou o artigo “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” (solução de um problema relacionado à geometria de posição). Ele não apenas provou a impossibilidade do *Problema das Sete Pontes de Königsberg*, como também generalizou o resultado para, na atual terminologia, a teoria dos grafos. Livrar os matemáticos das noções de distância seria um dos passos dados na direção da construção da topologia, e também deve-se a Euler esse feito. A famosa fórmula de Euler para poliedros independe de quaisquer noções métricas.

Uma das etapas decisivas seria a transição dos espaços euclidianos para os espaços abstratos. Nesse ponto Riemann (1826 – 1866) foi um dos precursores. Em 1854 introduziu uma tentativa de classificar as variedades 2-dimensionais e apontou a possibilidade de estudar variedades de dimensões superiores e espaços de funções.

Estruturas topológicas em espaços abstratos foram inicialmente introduzidas por Fréchet (1878 – 1973) em 1906, definindo os espaços por meio de sequências convergentes, e por Riesz (1880 – 1956) em 1907 e 1908, por meio de pontos de acumulação. A primeira definição satisfatória de espaços topológicos foi proposta por Hausdorff (1868 – 1942) em 1919, utilizando sistemas de vizinhanças, e desenvolvida a partir de ideias presentes nos artigos de Hilbert (1862 – 1943) de 1902 e Weyl (1885 – 1955) de 1913, que apresentavam uma descrição axiomática em termos de vizinhanças do plano e de uma superfície de Riemann.

A definição de espaços topológicos aqui apresentada e geralmente adotada, nesse momento, foi primeiramente formulada por Kuratowski (1896 – 1980) no ano de 1922, em termos do operador fecho. As noções de conjuntos abertos, fechados, fecho e interior foram introduzidas e estudadas por Cantor (1845 – 1918) nos espaços euclidianos, e Hausdorff as generalizou para os espaços topológicos.

A topologia de Tychonoff (topologia da caixa) foi introduzida por Tychonoff (1906 – 1993) em seu artigo “*Über die Topologische Erweiterung von Räumen*” (Sobre Expansão Topológica) de 1930. A topologia da caixa (box topology) foi considerada por Tietze (1880 – 1964) no artigo

“*Über Analysis Situs*” (Sobre Análise Situs) de 1923.

A origem da noção de compacidade está relacionada com o teorema de Borel (1871 – 1956), provado em 1894, declarando que toda cobertura aberta enumerável de um intervalo fechado possui uma subcobertura finita, juntamente com a observação de Lebesgue (1875 – 1941) afirmando que valia o mesmo para qualquer cobertura aberta. Mais tarde, em 1903, Borel generalizou o resultado, na configuração de Lebesgue, para todos os subespaços limitados e fechados do espaço euclidiano.

Fréchet foi o primeiro a usar o termo *compacto*, atribuindo-o a espaços métricos nos quais toda sequência possui uma subsequência convergente, ou equivalentemente, que todo conjunto infinito possui um ponto de acumulação. Riesz identificou que a compacidade podia ser descrita usando a propriedade da intersecção finita. Hausdorff foi o primeiro a notar que a definição atual, nos termos de Borel, é equivalente àquela dada em espaços métricos, e coube a Aleksandrov (1896 – 1982) e Urysohn (1898 – 1924) pôr em prática esta definição aos espaços topológicos gerais.

# Capítulo 2

## Convergência

A noção de convergência é parte intrínseca da análise, e com isso está estreitamente relacionada a um dos objetos fundamentais da topologia: o conceito de continuidade. Nos espaços métricos os conceitos de convergência se dão por meio de sequências, que descrevem completamente as noções de continuidade, bem como a topologia do espaço. No entanto, isso não se aplica a todos os espaços topológicos. Da necessidade de descrever e caracterizar os principais objetos da topologia, surgem métodos de convergência mais eficazes: redes e filtros.

Esse capítulo será devotado ao estudo desses métodos de convergência. Revelar-se-ão os motivos da in adequação das sequências, assim como o fato de que a topologia pode ser inteiramente descrita por esses outros instrumentos, além de se constatar que esses são uma generalização natural dos conceitos anteriores.

Faremos uso desses novos conceitos e resultados, em sua plenitude força e poder, para provar de modo prático e elegante alguns importantes resultados no capítulo a seguir.

### 2.1 Sequências

A definição de convergência via sequência em espaços topológicos é uma generalização natural daquela em espaços métricos. Em breve veremos um espaço topológico cujas sequências não servem para sua descrição. Talvez tal razão para isso seja por que apenas poucas propriedades nos naturais são usadas para provar os teoremas de sequências reais, como relata [K]. A enumerabilidade é uma dessas propriedades, pois em instantes concluiremos que a convergência sequencial é capaz de

descrever bem a topologia apenas nos espaços que não possuem uma quantidade de vizinhanças (básicas) em número maior que os termos da sequência.

**Definição 2.1.** Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço topológico  $X$  converge para  $a \in X$ , quando para cada vizinhança  $U$  de  $a$ , existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implique  $x_n \in U$ .

Claramente, na definição anterior podemos substituir “vizinhança” por “vizinhança básica”, “aberto” ou “aberto básico” de acordo com o ambiente.

**Exemplo 2.1.** Em  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  a uma sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f$  se, e somente se  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f(x)$ , para cada  $x$  real. De fato, fixado  $a \in \mathbb{R}$  e dado  $\varepsilon > 0$ , consideremos a vizinhança básica de  $f$ ,  $V_{(f, \{a\}, \varepsilon)} = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ; |g(a) - f(a)| < \varepsilon\}$ , como descrito no exemplo 1.3. Como  $f_n \rightarrow f$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $n > n_0 \Rightarrow f_n \in V_{(f, \{a\}, \varepsilon)} \Rightarrow |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ , ou seja,  $f_n(a) \rightarrow f(a)$ . Reciprocamente, suponhamos que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Seja  $V_{(f, \mathcal{F}, \varepsilon)}$  uma vizinhança básica de  $f$ . Como  $\mathcal{F}$  é finito, temos  $\mathcal{F} = \{a_1, \dots, a_r\}$ . Podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo que  $|f_n(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Portanto,  $n > n_0 \Rightarrow f_n \in V_{(f, \mathcal{F}, \varepsilon)}$ , isto é,  $f_n \rightarrow f$ .

**Definição 2.2.** Um espaço topológico satisfaz o *primeiro axioma da enumerabilidade* quando cada ponto possui uma base enumerável de vizinhanças, e satisfaz o *segundo axioma da enumerabilidade*, se a topologia possui uma base enumerável.

Todo espaço que satisfaz o segundo axioma, satisfaz o primeiro. Não obstante, a recíproca não é válida. A reta real com a topologia discreta, satisfaz o primeiro axioma, mas não o segundo. Se um ponto  $x$ , num espaço topológico  $X$ , possui uma base enumerável de vizinhanças  $\mathcal{B}_x = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , então sempre podemos admitir  $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ , pois se  $\mathcal{B}_x$  não goza dessa propriedade, substituímos cada  $U_n$  por  $V_n = \bigcap_{i=1}^n U_i$ , e então  $\mathcal{B}'_x = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  será uma base enumerável de vizinhanças de  $x$  com a propriedade desejada.

**Teorema 2.1.** Se  $X$  satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade e  $A \subset X$ , então  $a \in \overline{A}$  se, e somente se, existe uma sequência  $(x_n)$  em  $A$  que converge para  $a$ .

*Demonstração.* Sejam  $a \in \overline{A}$  e  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma base enumerável de vizinhanças de  $a$  tal que  $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ . Como cada  $U_n$  é vizinhança de  $a$ , e este pertence ao fecho de  $A$ , podemos escolher

$x_n \in U_n \cap A$ . Portanto, obtemos uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $A$  que converge para  $a$ . A recíproca é simples de se verificar, é válida em quaisquer espaços topológicos, e não necessita da hipótese do espaço topológico satisfazer o primeiro axioma da enumerabilidade.  $\square$

**Corolário 2.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, com  $X$  satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade. Então

- i.  $U \subset X$  é aberto se, e somente se, sempre que uma sequência  $(x_n)$  que converge para um ponto  $x \in U$ , todos os  $x_n$  pertencem a  $U$ , para  $n$  suficientemente grande.
- ii.  $F \subset X$  é fechado se, e somente se, todo ponto  $x$  que for limite de uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $F$ , é um ponto de  $F$ ,
- iii.  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se, e somente se, para cada  $x \in X$  e qualquer sequência  $x_n$  que converge para  $x$  (em  $X$ ), a sequência  $f(x_n)$  converge para  $f(x)$  (em  $Y$ ).

*Demonstração.* Nos três itens provaremos apenas uma das equivalências, pois a omitida segue apenas das definições e, como no caso do teorema anterior, não necessita do primeiro axioma da enumerabilidade. (i) Suponhamos que cada ponto  $x \in U$  possui a propriedade de que qualquer sequência que converge para  $x$  possui todos os elementos em  $U$ , com índices suficientemente grandes. Se algum ponto  $x \in U$  não fosse interior, então  $U$  não conteria nenhuma vizinhança básica  $V_n$  da base enumerável de vizinhanças de  $x$ , e poderíamos tomar  $x_n \in V \cap (X \setminus U)$ . Com isso,  $x_n \rightarrow x$ , mas nenhum dos  $x_n$  pertence a  $U$ , contrariando a propriedade que  $U$  possui por hipótese. (ii) Se todo ponto  $x$  que for limite de uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $F$  é um ponto de  $F$ , provaremos que  $\overline{F} \subset F$ , ou seja, que  $F$  é fechado. Mas o teorema anterior nos garante que, para cada  $x \in \overline{F}$ , existe uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $F$  convergindo para  $x$ . Logo,  $x \in F$ . (iii) Digamos que para cada  $x \in X$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  sempre que  $x_n \rightarrow x$ . Se existisse uma vizinhança  $V$  de  $f(x)$  tal que  $f(U) \not\subset V$ , para toda vizinhança  $U$  de  $x$ , então poderíamos tomar  $x_n$  em cada vizinhança básica  $U_n$ , da base enumerável de vizinhanças de  $x$ , de modo que  $f(x_n) \notin V$ . Com isso, a sequência  $(x_n)$  converge para  $x$ , entretando  $f(x_n)$  não converge para  $x$ .  $\square$

Esses resultados nos revelam a adequabilidade da convergência por meio de sequências em descrever a topologia dos espaços que satisfazem o primeiro axioma da enumerabilidade. No entanto,

mais uma vez enfaticamente assinalamos que não são suficientemente fortes para caracterizar todas as noções em espaços mais gerais, embora façam sentido. O exemplo a seguir ilustra esse fato. Mais precisamente, existe um espaço onde o teorema anterior não é válido.

**Exemplo 2.2.**  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  com a topologia produto não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Na realidade, nenhuma função  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  possui uma base enumerável de vizinhanças. Recordemos que cada vizinhança de  $f$  é da forma  $V_{(f,F,\varepsilon)}$ , onde  $F \subset \mathbb{R}$  é finito e  $\varepsilon > 0$ , como descrito no exemplo 1.3. Se existisse tal base vizinhanças  $\mathcal{B}_f = \{V_n\}$  da função  $f$ , o conjunto  $\cup F_n$  seria enumerável, onde cada  $F_n$  é o conjunto finito de pontos que aparece na descrição de cada  $V_n$ . Logo, existe um número real  $t_0 \notin \cup F_n$ . Consideremos a vizinhança básica  $V_0 = V_{(f,\{t_0\},1)}$  de  $f$ . Dado qualquer  $V_n$ , não existe restrição alguma sobre o valor que uma função  $\varphi \in V_n$  deve assumir no ponto  $t_0$ . Em particular, para cada  $n$ , existem funções  $\varphi \in V_n$  tais que  $|\varphi(t_0) - f(t_0)| \geq 1$ . Com isso, nenhum  $V_n$  pode estar contido em  $V_0$  e portanto  $\mathcal{B}_f$  não é uma base enumerável de vizinhanças de  $f$ .

Agora consideremos

$$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ; f(x) = 0 \text{ se } x \in F, f(x) = 1 \text{ se } x \notin F, \text{ com } F \subset \mathbb{R} \text{ finito} \}$$

e  $g = 0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  a função identicamente nula. Se  $U_g$  é uma vizinhança básica de  $g$ , temos  $U_g = \{h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ; |h(y)| < \varepsilon, y \in F\}$ , para algum subconjunto  $F \subset \mathbb{R}$  finito e algum  $\varepsilon > 0$ . Seja  $h_{U_g} \in U_g$  tal que  $h_{U_g}(x) = 0$  se  $x \in F$ , ou  $h_{U_g}(x) = 1$  se  $x \notin F$ . Logo,  $h_{U_g} \in U_g \cap A$  e portanto,  $g \in \bar{A}$ . Por outro lado, nenhuma sequência de funções  $f_n \in A$  pode convergir para  $g$ . Com efeito, do fato de cada  $A_n = \{x \in \mathbb{R} ; f_n(x) = 0\}$  ser finito, segue-se que  $Z = \cup A_n = \{x \in \mathbb{R} ; f_n(x) = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$  é enumerável. Logo, existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f_n(x_0) = 1$ . Por conseguinte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 1$ , enquanto  $g(x_0) = 0$ . Do exemplo 2.1 concluiríamos que se fosse  $f_n \rightarrow g$ , então  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = g(x_0) = 0$ . Portanto,  $g$  pertence ao fecho de  $A$ , mas não existe sequência de pontos de  $A$  que convirga para  $g$ .

## 2.2 Redes

Ao analisarmos a convergência sequencial concluímos que, além de usarmos a função que associa a cada natural um ponto do espaço, o uso da relação de ordem presente nos números naturais é

fundamental para o conceito de convergência sequencial. Com isso, o sucesso da generalização da noção de sequência em espaços topológicos retém a ideia de ordenar uma coleção de pontos do espaço, através de uma função de um conjunto com uma certa ordem. A linearidade da ordem dos naturais é substituída por uma condição que dá uma “orientação” ao conjunto ordenado. Surge, então, a noção de redes que generaliza o conceito de sequências utilizando a noção de conjunto “orientado” ao invés dos naturais.

**Definição 2.3.** Um conjunto  $\Lambda$  é dito *dirigido* quando existe uma relação  $\preceq$  em  $\Lambda$  satisfazendo as seguintes condições:

- i. Para todo  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\lambda \preceq \lambda$ , (**reflexividade**)
- ii. Se  $\lambda_1 \preceq \lambda_2$  e  $\lambda_2 \prec \lambda_3$ , então  $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ , (**transitividade**)
- iii. Para quaisquer  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ , existe  $\lambda_3 \in \Lambda$  tal que  $\lambda_1 \preceq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ .

Dizemos que a relação  $\preceq$  é uma *direção* para o conjunto  $\Lambda$ , ou  $\preceq$  *dirige* o conjunto  $\Lambda$ . O par  $(X, \prec)$  é denominado *conjunto dirigido*.

**Definição 2.4.** Uma *rede* em um conjunto  $X$  é uma função  $P : \Lambda \rightarrow X$ , onde  $\Lambda$  é um conjunto dirigido. Usualmente denotaremos o ponto  $P(\lambda)$  por  $x_\lambda$ , e diremos “a rede”  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . Uma *subrede* de uma rede  $P : \Lambda \rightarrow X$  é a composição  $P \circ \varphi : M \rightarrow X$ , onde  $\varphi : M \rightarrow \Lambda$  é uma aplicação entre os conjuntos dirigidos  $M$  e  $\Lambda$ , que satisfaz:

- i.  $\mu_1 \preceq \mu_2 \Rightarrow \varphi(\mu_1) \preceq \varphi(\mu_2)$ , ( $\varphi$  é **crecente**)
- ii. Para cada  $\lambda \in \Lambda$ , existe  $\mu \in M$  tal que  $\lambda \preceq \varphi(\mu)$ . ( $\varphi(M)$  é **cofinal** em  $\Lambda$ )

Para cada  $\mu \in M$ , denotaremos o ponto  $P(\varphi(\mu))$  por  $x_{\lambda_\mu}$  e escreveremos “a subrede”  $(x_{\lambda_\mu})_{\mu \in M}$ .

**Exemplo 2.3.** O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais munido da ordem natural é um conjunto dirigido. Portanto, toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de pontos  $x_n$  em um conjunto arbitrário  $X$ , é um rede e toda subsequência é uma subrede. Entretanto, não há garantias de que uma subrede de  $(x_n)$  seja uma subsequência, pois a subrede pode ter mais índices que a própria rede!

Como veremos na definição a seguir, a convergência em redes é uma generalização natural da convergência em sequências.

**Definição 2.5.** A rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  no espaço topológico  $X$  *converge* para  $x \in X$  (escreveremos  $x_\lambda \rightarrow x$ ), se para cada vizinhança  $U$  de  $x$ , existir algum  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $\lambda \succeq \lambda_0$  implique  $x_\lambda \in U$ . Dizemos que a rede está em um conjunto  $A$  quando cada um de seus ponto for elemento de  $A$ . Se existir  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $x_\lambda \in A$ , para todo  $\lambda \succeq \lambda_0$ , diremos que  $(x_\lambda)$  está *residualmente* em  $A$ . Quando para cada  $\lambda_0$ , existe  $\lambda \succeq \lambda_0$  tal que  $x_\lambda \in A$ , diremos que a rede está *frequentemente* em  $A$ . Quando  $(x_\lambda)$  estiver frequentemente em cada vizinhança do ponto  $x$ , dizemos que  $x$  é *ponto de acumulação* da rede.

A definição de ponto de acumulação de uma rede generaliza o conceito de *valor de aderência* de uma sequência. Uma rede não pode estar residualmente em dois conjuntos disjuntos. Se uma rede  $(x_\lambda)$  converge para  $x$ , então  $x$  é um ponto de acumulação da rede.

**Proposição 2.3.** Se a rede  $(x_\lambda)$  converge para  $a$ , então cada subrede também converge para  $a$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $x_\lambda \rightarrow a$ . Dada uma subrede  $(x_{\lambda_\mu})$  e uma vizinhança  $U$  de  $a$ , segue da convergência da rede e da propriedade cofinal que existem  $\lambda_0 \in \Lambda$ , tal que  $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in U$ , e  $\mu_0 \in M$  tal que  $\varphi(\mu_0) \succeq \lambda_0$ . Portanto,  $\mu \succeq \mu_0 \Rightarrow \varphi(\mu) \succeq \varphi(\mu_0) \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_\mu} \in U$ .  $\square$

**Proposição 2.4.** Se  $x_\lambda = a$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ , então  $x_\lambda \rightarrow a$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}_x$  uma base de vizinhanças de  $x \in X$ . A relação  $U \preceq V \Leftrightarrow V \subset U$  dirige o conjunto  $\Lambda = \mathcal{B}_x$ . Portanto, ao tomarmos  $x_U \in U$  em cada  $U \in \Lambda$ , obtemos uma rede  $(x_U)$  em  $X$  que converge para  $x$ . De fato, dada uma vizinhança  $V$  de  $x$ , existe uma vizinhança básica  $U_0 \in \Lambda$  de  $x$ . Então  $\lambda \succeq \lambda_0$  implica  $U \subset U_0$ , e portanto  $x_U \in U \subset V$ .

**Exemplo 2.5.** A coleção  $\mathcal{P}$  de todas as partições finitas do intervalo fechado  $I = [a, b]$ , munida da relação  $P \preceq Q \Leftrightarrow Q$  refina  $P$ , é um conjunto dirigido. Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Podemos definir uma rede  $S_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $S_i(P)$  a soma inferior de Riemann de  $f$  relativa à partição  $P$ . De modo análogo, definimos a rede  $S_s : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $S_s(P)$  a soma superior de Riemann de  $f$  relativa à partição  $P$ . Se ambas as redes  $(S_i(P))_{P \in \mathcal{P}}$  e  $(S_s(P))_{P \in \mathcal{P}}$  convergem para o número real  $c$ , então  $f$  é integrável à Riemann e  $\int_a^b f = c$ . Esse exemplo possui uma importância histórica (ver notas históricas no final do capítulo).

**Exemplo 2.6.** Seja  $M$  um espaço métrico e  $a \in M$  fixado. Então  $\Lambda = M \setminus \{a\}$ , munido da relação  $x \preceq y \Leftrightarrow d(y, a) \leq d(x, a)$ , é um conjunto dirigido. Logo, a função  $f : M \rightarrow N$ , com

$N$  espaço métrico, restrita a  $\Lambda$  é uma rede  $(x_\lambda)$ . Afirmamos que essa rede converge para  $b \in N$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  no sentido de espaços métricos. De fato, se  $x_\lambda \rightarrow b$ , dada uma vizinhança  $U$  de  $b$ , existe  $x_0 \in M \setminus \{a\}$  tal que  $x \succeq x_0 \Rightarrow f(x) \in U$ , ou seja,  $x \in M \setminus \{a\}$  e  $d(x, a) < \delta = d(x_0, a) \Rightarrow f(x) \in U$ . Reciprocamente, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , dada uma vizinhança  $U$  de  $b$ , existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $a$  tal que  $f(V) \subset U$ . Tome  $x_0 \in B = B(a, r) \subset V$ . Por conseguinte,  $x \preceq x_0 \Rightarrow d(x, a) \leq d(x_0, a) < r \Rightarrow x_0 \in B \Rightarrow f(x) \in U$ . Portanto, a rede  $f|_{M \setminus \{a\}}$  converge para  $b$ .

**Teorema 2.5.** *Um espaço topológico é um espaço de Hausdorff se, e somente se, toda rede nesse espaço converge para, no máximo, um ponto.*

*Demonstração.* Se  $X$  é um espaço e Hausdorff, então pontos distintos  $x$  e  $y$  possuem abertos disjuntos que os contêm. Como uma rede convergente não pode estar residualmente em abertos disjuntos, segue que uma rede não pode convergir para dois pontos distintos. Reciprocamente, suponha que  $X$  não é Hausdorff. Então existem dois pontos distintos  $x$  e  $y$  tais que  $V \cap W \neq \emptyset$ , quaisquer que sejam as vizinhanças  $V, W$  de  $x, y$  respectivamente. Consideremos os sistemas de vizinhanças  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  e  $\mathcal{V}_y$  de  $y$ , e a direção, em  $\mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y$ , dada por  $(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2) \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$  e  $V_2 \subset V_1$ . Definamos a rede  $P : \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y \rightarrow X$  por  $P(U, V) = x_{U, V}$ , com  $x_{U, V}$  escolhido em  $U \cap V$ . Provaremos que essa rede converge para  $x$  e  $y$ , concomitantemente. Dadas as vizinhanças arbitrárias  $U_0$  de  $x$  e  $V_0$  de  $y$ , para  $(U, V) \succeq (U_0, V_0)$ , teremos  $x_{U, V} \in U \cap V \subset U_0 \cap V_0$ , ou seja,  $x_{U, V} \rightarrow x$  e  $x_{U, V} \rightarrow y$ .  $\square$

**Corolário 2.6.** Em um espaço de Hausdorff, toda sequência converge para, no máximo, um ponto.

A recíproca do corolário anterior não é verdadeira. Para tanto, considere  $X = \mathbb{R}$  com a topologia do complemento enumerável, definida no exemplo 1.1. Quaisquer dois abertos não vazios se intersectam, portanto,  $X$  não é Hausdorff. Além disso, qualquer sequência convergente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , com  $x_n \rightarrow a$  é constante a partir de um certo índice. Provado isso, toda sequência converge para um só ponto. De fato, caso aquilo não ocorresse, obteríamos índices distintos  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  tais que  $x_{n_k} \neq a$ , para todo  $k$ , e então  $U = X \setminus \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  seria uma vizinhança de  $a$ , mas não existiria natural  $n_0$  com  $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$ .

**Teorema 2.7.** *Uma rede em  $X$  possui um ponto de acumulação a se, e somente se, possui uma subrede convergindo para a.*

*Demonstração.* Seja  $a$  um ponto de acumulação de  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , também denotada por  $P : \Lambda \rightarrow X$ . Consideremos o conjunto  $M = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times \tau ; U \text{ é vizinhança de } a \text{ e } x_\lambda \in U\}$  e a direção  $(\lambda_1, U_1) \preceq (\lambda_2, U_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \preceq \lambda_2 \text{ e } U_2 \subset U_1$ . Definamos  $\varphi : M \rightarrow \Lambda$  por  $\varphi(\lambda, U) = \lambda$ . Claramente  $\varphi$  é crescente e cofinal, logo define uma subrede de  $(x_\lambda)$ . Dada uma vizinhança  $U_0$  de  $a$ , existe  $\lambda_0$  tal que  $x_{\lambda_0} \in U_0$ . Então  $(\lambda_0, U_0) \in M$  e  $(\lambda, U) \succeq (\lambda_0, U_0) \Rightarrow x_\lambda \in U \subset U_0$ . Portanto, a subrede  $P \circ \varphi : M \rightarrow X$  converge para  $a$ . Reciprocamente, suponhamos que exista a aplicação  $\varphi : M \rightarrow \Lambda$  crescente e cofinal, originando uma subrede  $P \circ \varphi : M \rightarrow X$  que converge para  $a$ . Com isso, dada uma vizinhança  $U$  de  $a$ , existe  $\mu_U \in M$  tal que  $\mu \succeq \mu_U$  implica  $P(\varphi(\mu)) \in U$ . Fixado  $\lambda_0 \in \Lambda$ , por  $\varphi(M)$  ser cofinal em  $\Lambda$ , existe  $\mu_0$  tal que  $\varphi(\mu_0) \succeq \lambda_0$ . Tomemos  $\mu \in M$  de modo que  $\mu_0 \preceq \mu$  e  $\mu_U \preceq \mu$ . Assim,  $\lambda = \varphi(\mu) \succeq \varphi(\mu_0) \succeq \lambda_0$  e  $x_\lambda \in U$ . Portanto, para qualquer vizinhança  $U$  de  $a$  e qualquer  $\lambda_0 \in \Lambda$ , existe  $\lambda \succeq \lambda_0$  tal que  $x_\lambda \in U$ . Mais precisamente,  $a$  é ponto de acumulação de  $(x_\lambda)$ .  $\square$

**Corolário 2.8.** Um ponto de acumulação de uma subrede é ponto de acumulação da rede.

*Demonstração.* Basta verificar que uma subrede de uma subrede de  $(x_\lambda)$  é subrede de  $(x_\lambda)$ , e usar o teorema anterior.  $\square$

O resultado a seguir nos revela que o conceito de redes é, comparado ao de sequências, uma melhor abordagem sobre questões de convergência em espaços topológicos.

**Teorema 2.9.** *Seja  $A \subset X$ . Então  $a \in \overline{A}$  se, e somente se, existe uma rede  $(x_\lambda)$  em  $A$  convergindo para  $a$ .*

*Demonstração.* Seja  $a \in \overline{A}$ . Para cada vizinhança  $U$  de  $a$ , tomemos  $x_U \in U \cap A$ . A rede  $(x_U)$ , com a direção descrita no exemplo 2.4, converge para  $a$ . Reciprocamente, se a rede  $(x_\lambda)$  está em  $A$  e converge para  $a$ , então cada vizinhança de  $a$  intercepta  $A$  e portanto  $a \in \overline{A}$ .  $\square$

**Corolário 2.10.** Um subconjunto  $F \subset X$  é fechado se, e somente se, sempre que uma rede  $(x_\lambda)$  de pontos de  $F$  converge para um ponto  $x$ , então  $x \in F$ .

*Demonstração.* Suponha que  $F$  é fechado e seja  $(x_\lambda)$  uma rede em  $F$  com  $x_\lambda \rightarrow x$ . Do teorema anterior, segue-se  $x \in \overline{F} = F$ . Reciprocamente, suponhamos que vale a condição:  $(x_\lambda)$  em  $F$  e  $x_\lambda \rightarrow x \Rightarrow x \in F$ . Dado  $x \in \overline{F}$ , existe  $(x_\lambda)$  em  $F$  convergindo para  $x$ . Logo, a condição nos garante que  $x$  é ponto de  $F$  e portanto  $\overline{F} \subset F$ .  $\square$

**Proposição 2.11.** A aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é contínua em  $a \in X$  se, e somente se, para qualquer rede  $(x_\lambda)$  que converge para  $a$ , a rede  $(f(x_\lambda))$  convergir para  $f(a)$ .

*Demonstração.* Se  $f$  é contínua em  $a$ , então dada um vizinhança  $V$  de  $f(a)$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $a$  com  $f(U) \subset V$ . Logo, para algum  $\lambda_0$ ,  $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in U \Rightarrow f(x_\lambda) \in V$ . Reciprocamente, se  $f$  não for contínua em  $a$ , então existirá uma vizinhança  $V$  de  $f(a)$  tal que  $x_U \in U$  mas  $f(x_U) \notin V$ , para cada vizinhança  $U$  de  $a$ . Portanto, a rede  $(x_U)$  converge para  $a$ , enquanto que  $(f(x_U))$  não converge para  $f(a)$ .  $\square$

**Teorema 2.12.** Uma rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  no espaço produto  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  converge para o ponto  $a = (a_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$  se, e somente se, cada rede coordenada  $\pi_\alpha(x_\lambda)$  converge para  $\pi_\alpha(a) \equiv a_\alpha$  em  $X_\alpha$ .

*Demonstração.* Se  $x_\lambda \rightarrow a$  em  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ , então, como cada  $\alpha$ -ésima projeção  $\pi_\alpha$  é contínua,  $\pi_\alpha(x_\lambda) \rightarrow a_\alpha \equiv \pi_\alpha(a)$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\pi_\alpha(x_\lambda) \rightarrow \pi_\alpha(a) \equiv a_\alpha$ , para cada  $\alpha \in A$ . Seja  $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$  uma vizinhança básica de  $a$  no espaço produto (note que cada  $U_{\alpha_i}$  é um aberto de  $X_{\alpha_i}$  que contém  $a_{\alpha_i} \equiv \pi_{\alpha_i}(a)$ ). Como  $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda) \rightarrow \pi_{\alpha_i}(a) \equiv a_{\alpha_i}$ , existe  $\lambda_i$  tal que  $\lambda \succeq \lambda_i \Rightarrow \pi_{\alpha_i}(x_\lambda) \in U_{\alpha_i}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Escolhendo  $\lambda_0 \succeq \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , obtemos  $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda) \in U_{\alpha_i}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , sempre que  $\lambda \succeq \lambda_0$ . Portanto,  $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ .

Consequentemente,  $x_\lambda \rightarrow a$  no espaço produto  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ .  $\square$

No caso em que todos os fatores  $X_\alpha = X$ , já vimos que o espaço produto  $\prod X_\alpha$  nada mais é que o conjunto  $X^A \equiv \mathfrak{F}(A; X)$  de todas as funções  $f : A \rightarrow X$ , que podem ser vistas como  $A$ -uplas  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  de pontos  $f(\alpha) \in X$ . O teorema anterior nos diz que esse espaço, com a topologia produto (ou de Tychonoff) possui a seguinte propriedade: uma rede  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  converge para  $f$  se, e somente se,  $\pi_\alpha(f_\lambda) = f_\lambda(\alpha) \rightarrow f(\alpha) = \pi_\alpha(f)$ , para cada  $\alpha \in A$ .

**Definição 2.6.** Uma rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  em um espaço  $X$  denomina-se *ultraredes* (ou *rede universal*), quando para todo subconjunto  $A \subset X$ ,  $(x_\lambda)$  está residualmente em  $A$  ou em  $X \setminus A$ .

Evidentemente, qualquer rede constante é uma ultrarede, chamada *rede universal trivial*.

**Proposição 2.13.** Se  $a$  é um ponto de acumulação da ultrarede  $(x_\lambda)$ , então  $x_\lambda \rightarrow a$ .

*Demonstração.* Dada uma vizinhança  $U$  de  $a$ , existe  $\lambda_1 \in \Lambda$ , tal que  $\lambda \succeq \lambda_0$  implica apenas uma das situações:  $x_\lambda \in U$  ou  $x_\lambda \in X \setminus U$ . Segue-se de  $a$  ser ponto de acumulação da rede que existe  $\lambda_1 \succeq \lambda_0$  tal que  $x_{\lambda_1} \in U$ . Portanto, vale a primeira situação que significa  $x_\lambda \rightarrow a$ .  $\square$

**Proposição 2.14.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação qualquer entre espaços topológicos. Se  $(x_\lambda)$  é um ultrarede em  $X$ , então  $(f(x_\lambda))$  é uma ultrarede em  $Y$ . Em outras palavras, a imagem de uma ultrarede é um ultrarede.

*Demonstração.* Dado  $A \subset Y$ ,  $(x_\lambda)$  está residualmente em  $f^{-1}(A)$  ou em  $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ . Portanto,  $(f(x_\lambda))$  está residualmente em  $A$  ou em  $Y \setminus A$  e conseqüentemente, é uma ultrarede.  $\square$

## 2.3 Filtros

Vimos que uma boa noção de convergência pode ser obtida simplesmente usando as vizinhanças de um simples ponto como modelo para conjunto de índices para substituir os inteiros usados em seqüências. Agora introduziremos uma segunda forma de descrever convergências em um espaço topológico, considerando que as próprias vizinhanças convergem para o ponto do sistema no qual fazem parte.

**Definição 2.7.** Um *filtro*  $\mathcal{F}$  em um conjunto  $X$  é uma coleção não vazia de subconjuntos de  $X$  que possui as seguintes propriedades:

- i.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ,
- ii. Se  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , então  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ ,
- iii. Se  $F \in \mathcal{F}$  e  $F \subset G$ , então  $G \in \mathcal{F}$ .

Uma subcoleção  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  é uma *base* para o filtro  $\mathcal{F}$ , se para cada elemento  $F \in \mathcal{F}$ , existir um elemento básico  $F_0 \in \mathcal{F}_0$ , que esteja contido em  $F$ .

Claramente, o item (iii) da definição garante que o conjunto  $X$  é um elemento do filtro. Além disso, os itens (i) e (ii) restringem a cardinalidade dos filtros pois, segue-se de  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  e do item (ii), se  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , então pelo menos desses não é elemento do filtro. Pela mesma razão, não é possível que  $A \in \mathcal{F}$  e  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ , concomitantemente.

**Proposição 2.15.** Uma coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos não vazios de  $X$  é base para algum filtro de  $X$ , se para quaisquer  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ , existir  $C_3 \in \mathcal{C}$ , tal que  $C_3 \in C_1 \cap C_2$ .

*Demonstração.* Considere a coleção  $\mathcal{F} = \{F \subset X ; F \supset C, \text{ para algum } C \in \mathcal{C}\}$ . Obviamente o conjunto vazio não faz parte desta. Se  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , então existem  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ , com  $C_1 \subset F_1$  e  $C_2 \subset F_2$ , e conseqüentemente existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \in C_1 \cap C_2 \subset F_1 \cap F_2$ . Finalmente,  $\mathcal{F}$  trivialmente satisfaz o item (iii), portanto é um filtro cuja base é coleção  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Exemplo 2.7.** Fixado um ponto  $x$  no espaço topológico  $X$ , o sistema de vizinhanças  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  é um filtro, denominado *filtro de vizinhanças* de  $x$ . Além disso, qualquer base de vizinhanças de  $x$  é uma base para o filtro  $\mathcal{U}_x$ .

**Definição 2.8.** Um filtro  $\mathcal{F}$  em um espaço topológico  $X$  *converge* para  $x$  quando  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ . Denotaremos por  $\mathcal{F} \rightarrow x$ .

**Definição 2.9.** Um filtro  $\mathcal{F}$  é denominado *ultrafiltro* (ou *filtro maximal*), se não existe nenhum outro filtro que o contém estritamente. Simbolicamente,  $\mathcal{F}'$  filtro e  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$  implica  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ . Mais precisamente, um ultrafiltro  $\mathcal{F}$  é um elemento maximal na família dos filtros de  $X$  ordenado pela inclusão.

**Exemplo 2.8.** Considere  $X = \{a, b, c\}$  com a topologia  $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$ . O conjunto  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$  é um filtro em  $X$  e  $\mathcal{F}$  converge para  $a$ , visto que  $\mathcal{U}_a = \{\{a, b\}, X\} \subset \mathcal{F}$ . Por fim, verifica-se que  $\mathcal{F}$  é um ultrafiltro.

**Teorema 2.16.** Um filtro  $\mathcal{F}$  é ultrafiltro se, e somente se,  $A \in \mathcal{F}$  ou  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ , para cada  $A \subset X$ .

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro e  $A \subset X$ . Se existir  $F_0 \in \mathcal{F}$  que não intersecta  $A$ , então  $X \setminus A \supset F_0$  e portanto  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ . Caso contrário,  $F \cap A \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F}$ . Segue da proposição 2.15 que a coleção  $\mathcal{C} = \{F \cap A ; F \in \mathcal{F}\}$  é uma base para um filtro  $\mathcal{G}$ , visto que  $\mathcal{C}$  a intersecção

finita de elementos de  $\mathcal{C}$  é, ainda, um elemento de  $\mathcal{C}$ . Por conseguinte,  $\mathcal{G}$  contém  $\mathcal{F}$ , pois se  $F \in \mathcal{F}$ , então  $F \cap A \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$  e por  $F \cap A \subset F$ , obtemos  $F \in \mathcal{G}$ . Além disso  $A = X \cap A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{G}$ . Finalmente, segue de  $\mathcal{F}$  ser ultrafiltro que  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$  e portanto  $A \in \mathcal{F}$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{F}$  é um filtro com a propriedade de conter  $A$  ou  $X \setminus A$ , para todo subconjunto  $A \subset X$ . Se existisse um filtro  $\mathcal{G}$  contendo  $\mathcal{F}$  estritamente, existiria um conjunto não vazio  $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ . Mas a propriedade garantia que  $X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . No entanto, nenhum filtro pode conter um conjunto não vazio e seu complementar. Portanto,  $\mathcal{F}$  é ultrafiltro.  $\square$

**Teorema 2.17.** *Todo filtro está contido em algum ultrafiltro.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{F}$  um filtro,  $\mathcal{C}$  a família de todos os filtros que contém  $\mathcal{F}$  e a ordem parcial em  $\mathcal{C}$  dada por  $\mathcal{F}_1 \preceq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ . Claramente  $\mathcal{C}$  é não vazio pois  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ . Além disso, qualquer cadeia (subconjunto totalmente ordenado)  $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de  $\mathcal{C}$  possui  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda \in \mathcal{C}$  como cota superior. Portanto, o Lema de Zorn nos garante a existência de um elemento maximal em  $\mathcal{C}$  que, obviamente, é um ultrafiltro que contém  $\mathcal{F}$ .  $\square$

As semelhanças entre a convergência de rede e filtros destacam-se. Cada uma descreve a topologia de um espaço com igual facilidade. Existe mais que uma relação casual entre as ideias por trás das duas abordagens. Assim, não surpreende o fato de uma ligação formal possa ser construída entre as duas noções.

**Definição 2.10.** Seja  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  uma rede em  $X$ . O filtro gerado pela base  $\mathcal{C}$  consistindo em todos os conjuntos  $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda ; \lambda \succeq \lambda_0\}$ , com  $\lambda_0 \in \Lambda$ , denomina-se *filtro gerado por  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$* . Reciprocamente, se é  $\mathcal{F}$  um filtro em  $X$ , então  $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F) \in X \times \mathcal{F} ; x \in F \in \mathcal{F}\}$  munido da relação  $(x_1, F_1) \preceq (x_2, F_2) \Leftrightarrow F_2 \subset F_1$  é um conjunto dirigido, e a aplicação  $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  dada por  $P(x, F) = x$  é uma rede em  $X$ , chamada *rede gerada por  $\mathcal{F}$* .

**Proposição 2.18.** Um filtro  $\mathcal{F}$  converge para o ponto  $x$  se, e somente se, a rede gerada por  $\mathcal{F}$  converge para  $x$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , e seja  $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  a rede  $P(x, F) = x$  gerada por  $\mathcal{F}$ . Dada uma vizinhança  $U$  de  $x$ , segue-se de  $\mathcal{F} \rightarrow x$  que  $U \in \mathcal{F}$  e assim  $(x, U) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ . Logo,  $(z, F) \succeq (x, U) \Rightarrow P(z, F) = z \in F \subset U$ . Portanto, a rede  $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  converge para  $x$ .

Reciprocamente, suponhamos que a rede gerada por  $\mathcal{F}$  converge para  $x$ . Dada uma vizinhança  $U \in \mathcal{U}_x$ , existe  $(z_0, F_0) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ , com  $z_0 \in F_0 \in \mathcal{F}$ , tal que  $(z, F) \succeq (z_0, F_0) \Rightarrow P(z, F) = z \in U$ . Logo, para cada  $z \in F_0$ ,  $(z, F_0) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$  e  $(z, F_0) \succeq (z_0, F_0) \Rightarrow P(z, F_0) = z \in U$ , ou seja,  $F_0 \subset U$  e, por  $F_0$  ser um elemento do filtro,  $U \in \mathcal{F}$ . Concluimos então que  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ , portanto  $\mathcal{F}$  converge para  $x$ .  $\square$

**Proposição 2.19.** Uma rede converge para um ponto  $x$  se, e somente se, o filtro gerado pela rede converge para  $x$ .

*Demonstração.* Suponhamos que a rede  $(x_\lambda)$  converge para  $x$ , e sejam  $\mathcal{F}$  o filtro gerado por essa rede e  $U$  uma vizinhança de  $x$ . Existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in U$ . Com isso,  $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda ; \lambda \succeq \lambda_0\}$  é um elemento (da base) de  $\mathcal{F}$  e  $B_{\lambda_0} \subset \mathcal{F}$ , logo  $U \in \mathcal{F}$ . Consequentemente,  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ . Agora, suponhamos que o filtro gerado pela rede  $(x_\lambda)$  converge para  $x$ . Dada uma vizinhança  $U$  de  $x$ , obtemos que  $U \in \mathcal{F}$  e que existe um elemento  $B_{\lambda_0}$  da base do filtro contido em  $U$ . Mais precisamente,  $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in U$ .  $\square$

**Proposição 2.20.** A rede gerada por um ultrafiltro é uma ultrarede.

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro e  $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  a rede gerada por  $\mathcal{F}$ . Dado  $A \subset X$  não vazio, por  $\mathcal{F}$  ser ultrafiltro, segue-se  $A \in \mathcal{F}$  ou  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ . Se ocorrer  $A \in \mathcal{F}$ , tomemos  $a \in A$ , e então  $(x, F) \succeq (a, A) \Rightarrow P(x, F) = x \in F \subset A$ . Consequentemente, a rede  $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  está residualmente em  $A$ . O segundo caso é análogo e portanto concluimos que  $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  é uma ultrarede.  $\square$

## 2.4 Notas Históricas

Redes foram introduzidas por Moore (1862 – 1932) e Smith em 1922, motivados pelo problema exposto no exemplo 2.5, mas a descrição apropriada de convergência em espaços topológicos gerais em termos de redes foi dada por Kelley (1916 – 1999) em 1950. O conceito de convergência em termos de filtros foi inicialmente esboçado por Cartan (1904 – 2008) e desenvolvido por Bourbaki em 1940. A equivalência entre as duas teorias foi percebida por Bartle (1927 – 2003) em 1955.

# Capítulo 3

## Aplicações de Redes e Filtros

Como aplicação dos métodos de convergência aqui apresentados, neste capítulo provaremos alguns resultados que se destacam tanto por sua abrangência quanto por aplicabilidade em diversas áreas da matemática: uma caracterização dos espaços compactos (fundamentais em análise), o teorema de Tychonoff (um dos resultados mais impressionantes da topologia geral) e o teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki (que destaca-se na análise funcional).

### 3.1 Caracterização de Compactos

O teorema a seguir nos revela ligações entre a topologia e ramos mais “aplicados” da matemática. O conceito de compacidade pode ser usado por analistas existênciais (no sentido contrário ao construtivo) da seguinte maneira. Dada uma equação diferencial, é possível criar topologias em certos espaços de funções (dentre as quais estaria a possível solução), de modo que a convergência de uma rede apropriada ou sequência de funções para o limite  $f$  implique que  $f$  seja uma solução da equação diferencial original. Portanto o estudo dos espaços compactos (toda rede possui um subrede convergente), dos compactos enumeráveis (toda sequência possui uma subrede convergente) e dos sequencialmente compactos (toda sequência possui uma subsequência convergente) é pertinente ao estudo de existência de soluções de equações diferenciais.

**Teorema 3.1.** *Seja  $X$  um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i.  $X$  é compacto,*
- ii. Cada família  $\mathfrak{F}$  de subconjuntos fechados de  $X$  com a PIF tem interseção não-vazia,*
- iii. Cada rede em  $X$  tem um ponto de acumulação,*
- iv. Cada ultrarede em  $X$  converge,*
- v. Cada ultrafiltro em  $X$  converge.*

*Demonstração.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) é o teorema 1.23. (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Seja  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  uma rede em  $X$ . Consideremos a família dos fechados  $F_{\lambda_0} = \overline{\{x_\lambda; \lambda \succeq \lambda_0\}}$ , com  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Para cada subfamília finita  $\{F_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ , podemos tomar  $\alpha \in \Lambda$ , com  $\alpha \succeq \lambda_i, i = 1, \dots, n$ , e então  $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n F_{\lambda_i}$ . Por conseguinte, a família  $\{F_{\lambda_0}\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$  possui a PIF, e portanto existe  $a \in \bigcap_{\lambda_0 \in \Lambda} F_{\lambda_0}$ . Finalmente, dado qualquer aberto  $U$  que contém  $a$  e  $\gamma \in \Lambda$ , por  $a \in F_\gamma = \overline{\{x_\lambda; \lambda \succeq \gamma\}}$ , existe  $\lambda \succeq \gamma$  tal que  $x_\lambda \in U$ . Portanto,  $a$  é ponto de acumulação da rede. (iii)  $\Rightarrow$  (iv) Se  $(x_\lambda)$  é uma ultrarede em  $X$ , então é, em particular, uma rede que possui um ponto de acumulação, por hipótese. Segue da proposição 2.13 que essa ultrarede é convergente. (iv)  $\Rightarrow$  (v) Seja  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro em  $X$ . A rede gerada por  $\mathcal{F}$  é, pela proposição 2.20, uma ultrarede que converge por hipótese. Segue da proposição 2.18 que o filtro  $\mathcal{F}$  converge. Portanto, todo ultrafiltro é convergente. (v)  $\Rightarrow$  (i) Suponhamos por contradição que  $X$  não seja compacto. Então existe uma família  $\mathcal{A}$  de abertos que cobre  $X$ , mas que não possui uma subcoleção finita que seja subcobertura de  $X$ . Logo,  $X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ , para cada subcoleção finita  $\{A_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathcal{A}$ . Segue-se da proposição 2.15 que a família dos conjuntos  $X \setminus A$ , onde  $A$  é a união de uma subcoleção finita de  $\mathcal{A}$  forma uma base para um filtro  $\mathcal{F}$ . Como todo filtro está contido em algum ultrafiltro (teorema 2.17), existe um ultrafiltro  $\mathcal{G}$  que contém  $\mathcal{F}$ . Por hipótese, existe  $x \in X$  tal que  $\mathcal{G} \rightarrow x$ . Como os abertos de  $\mathcal{A}$  cobrem  $X$ , existe um aberto  $U \in \mathcal{A}$  que contém  $x$ . Por  $\mathcal{G}$  convergir para  $x$ ,  $\mathcal{G}$  contém todas as vizinhanças de  $x$ , em particular,  $U \in \mathcal{G}$ . Mas, por construção do filtro  $\mathcal{F}$ ,  $X \setminus U \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Absurdo pois sabemos que um filtro não pode conter um conjunto e seu complementar, concomitantemente.  $\square$

## 3.2 O Teorema de Tychonoff

O clássico teorema de Tychonoff é iquestionavelmente um dos mais importantes teoremas sobre compacidade. Provavelmente um dos mais importantes teoremas da topologia geral, como relata [K], pois desempenha um papel central no desenvolvimento de vários outros teoremas em topologia, bem como aplicações de topologias à outras áreas: o teorema de Ascoli sobre a compacidade de espaços de funções (e o teorema de Ascoli, por sua vez, pode ser usado para provar teoremas de existência para várias equações diferenciais), a construção da compactificação de Stone-Cech, a prova da compacidade de um espaço ideal maximal de uma álgebra de Banach, o desenvolvimento do teorema da representação de Gelfand, o teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki, dentre outros.

Salientamos que a demonstração que será apresentada aqui é decididamente simples, e esconde grandes resultados. Originalmente essa não foi a demonstração apresentada por Tychonoff, pois ele não tinha disponível o arsenal de resultados que temos a respeito de convergência. Talvez a melhor maneira de esclarecer toda a força que o teorema de Tychonoff possui, seja conhecer sua equivalência ao axioma da escolha.

**Teorema de Tychonoff.** *Seja  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  uma família de espaços topológicos e  $X = \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  o espaço produto com a topologia de Tychonoff. Um subconjunto não vazio  $Y = \prod_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$  do espaço produto  $X$  é compacto se, e somente se, cada  $A_\alpha$  é compacto.*

*Demonstração.* Sabemos que na topologia de Tychonoff todas as projeções são contínuas, e sendo  $Y = \prod A_\alpha$  compacto, cada  $A_\alpha = \pi_\alpha(Y)$  é compacto por ser imagem de compacto por função contínua. Reciprocamente, suponhamos que cada  $A_\alpha$  é compacto, seja  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  uma ultrarede em  $Y$ . Vale salientar que cada  $x_\lambda$  é um ponto de  $Y$ . Como a imagem de uma ultrarede ainda é uma ultrarede (proposição 2.14),  $(\pi_\alpha(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  é uma ultrarede no compacto  $A_\alpha$ , para cada  $\alpha \in \Gamma$ , logo  $(\pi_\alpha(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  converge para algum  $z_\alpha \in A_\alpha$ . Consideremos  $z : \Gamma \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ , tal que  $z(\alpha) = z_\alpha \in A_\alpha$ , para cada  $\alpha \in \Gamma$ . Isso significa que  $z = (z_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ , com  $z(\alpha) = z_\alpha = \pi_\alpha(z)$ , é um elemento de  $Y$ , e cada rede  $\pi_\alpha(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} \pi_\alpha(z) = z_\alpha$ . Consequentemente, o teorema 2.12 nos garante que a rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  converge para  $z$  em  $Y$ , e portanto  $Y$  é compacto devido ao resultado de caracterização de compactos.  $\square$

### 3.3 O Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki

A análise funcional nos informa que se  $E$  é um espaço de Banach de dimensão infinita, então a bola unitária fechada  $B_E = \{x \in E ; \|x\| \leq 1\}$  não é compacta. O teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki afirma que no dual topológico  $E'$ , com a topologia fraca estrela, a bola unitária fechada  $B_{E'} = \{\varphi \in E' ; \|\varphi\| \leq 1\}$  é compacta.

Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E'$  e  $E''$  o dual e o bidual topológico de  $E$ , respectivamente. Ao consideremos o mergulho canônico  $J_E : E \longrightarrow E''$ , que associa cada  $x \in E$  ao funcional linear  $J_E(x) : E' \longrightarrow \mathbb{K}$  dado por  $J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$ ,  $\forall \varphi \in E'$ , o subconjunto  $J_E(E) \subset E'$  revela-se bastante notável ao munirmos  $E'$  da topologia gerada por essa coleção, como nos informa resultado dessa seção.

**Definição 3.1.** A *topologia fraca-estrela* no dual  $E'$  do espaço vetorial normado  $E$ , denotada por  $\sigma(E', E)$ , é a topologia fraca induzida em  $E'$  pela família de funções  $J_E(E) = \{J_E(x)\}_{x \in E}$ , isto é, pelas aplicações  $\varphi \in E' \mapsto J_E(x)(\varphi) := \varphi(x) \in \mathbb{K}$ , onde  $x \in E$ .

**Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki.** <sup>1</sup>  $B_{E'}$  é compacta em  $(E', \sigma(E', E))$ .

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos que  $E'$ , munido com a topologia fraca estrela, é homeomorfo a um subespaço do espaço  $X = \mathfrak{F}(E; \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}\}$ , munido com a topologia produto. Consideremos  $\Psi : E' \longrightarrow X$  definida por  $\Psi(f) = f$ . Claramente  $\Psi$  é injetiva. Afirmamos que  $\Psi$  é contínua. De fato, para cada  $x \in E$ , seja  $\pi_x : X \longrightarrow \mathbb{K}$  a projeção na coordenada  $x$ , isto é,  $\pi_x(f) = f(x)$ . Então  $\pi_x \circ \Psi : E' \longrightarrow \mathbb{K}$  cumpre  $(\pi_x \circ \Psi)(f) = f(x) = J_E(x)(f)$ . Por conseguinte,  $\pi_x \circ \Psi = J_E(x)$  é contínua para cada  $x$ , visto que é um elemento da sub-base que gera a topologia em  $E'$ , e portanto a proposição 1.20 nos garante a continuidade de  $\Psi$ . A injetividade de  $\Psi$  nos permite considerar a “nova” aplicação biunívoca  $\Phi : E' \longrightarrow \Psi(E')$  definida por  $\Phi(f) = \Psi(f)$ , ou seja,  $\Phi$  é nada mais que a função  $\Psi$  com o contra-domínio restrita à imagem. Portanto, a continuidade de  $\Phi$  segue-se do item (d) da proposição 1.13. Na realidade, é um homeomorfismo pois, por  $E'$  estar munido com a topologia fraca estrela, novamente a proposição 1.20 garantirá a continuidade da aplicação inversa  $\Phi^{-1}$ , se provarmos que cada  $J_E(x) \circ \Phi^{-1} : \Psi(E') \longrightarrow \mathbb{K}$  é contínua. Salientamos que  $\Psi(E')$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^E$ . Agora

<sup>1</sup>A forma geral desse teorema foi provada pelo matemático canadense-americano Leonidas Alaoglu (1914 – 1981) em 1940.

vejamos que  $(J_E(x) \circ \Phi^{-1})(f) = f(x) = (\pi_x|_{\Psi(E')})(f)$ . Ora, estando  $\Psi(E')$  munido com a topologia produto, cada projeção  $\pi_x|_{\Psi(E')}$  é contínua e portanto segue-se a continuidade da aplicação inversa  $\Phi^{-1}$ .

Concluimos então que  $E'$  é homeomorfo ao subespaço  $\Psi(E')$  de  $X$ , e conseqüentemente a bola fechada unitária  $B_{E'}$  é homeomorfa à  $\Psi(B_{E'})$ . Para obtermos o resultado, basta provarmos que  $\Psi(B_{E'})$  é compacto. Lembremos que

$$\Psi(B_{E'}) = \{\varphi \in E' ; \|\varphi\| \leq 1\} = \{\varphi \in E' ; |\varphi(x)| \leq \|x\|, \forall x \in E\}$$

Portanto,  $\Psi(B_{E'}) \subset \prod_{x \in E} B_{\mathbb{K}}[0, \|x\|]$ . Segue-se do teorema de Tychonoff que  $\prod_{x \in E} B_{\mathbb{K}}[0, \|x\|]$  é compacto. Para obtermos a compacidade de  $B_{E'}$ , basta mostrarmos que  $\Psi(B_{E'})$  é fechado em  $X$ , como nos garante a proposição 1.25. Essa é, entretanto, uma tarefa fácil. Para tanto, consideremos  $(\Psi(\varphi_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  uma rede em  $\Psi(B_{E'})$  que converge (na topologia produto) para  $f \in X$ . Ressaltamos que cada  $\Psi(\varphi_\lambda) \in E' \subset X = \mathbb{K}^E$ . O teorema 2.12 nos garante que cada rede coordenada  $(\pi_x(\Psi(\varphi_\lambda)))_{\lambda \in \Lambda}$  converge para  $f(x)$ , isto é,  $\pi_x(\Psi(\varphi_\lambda)) \xrightarrow{\lambda} f(x)$ , para cada  $x \in E$ . Como  $\pi_x(\Psi(\varphi_\lambda)) = \pi_x(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(x)$ , temos  $\varphi_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda} f(x)$ , para cada  $x \in E$ . A linearidade da função  $f$  segue disso e dos seguinte fatos: todo espaço vetorial normado é Hausdorff, logo toda rede só converge para, no máximo um ponto, (teorema 2.5); as operações de um espaço vetorial normado são contínuas; e a equivalência entre a continuidade de uma aplicação em um ponto e a convergência por meio de redes (proposição 2.11). Além disso, como  $|\varphi_\lambda(x)| \leq \|x\|$  para cada  $\lambda$  e cada  $x$ , o módulo é contínuo, e a convergência de redes preserva a ordem, obtemos  $|f(x)| = |\lim_{\lambda} \varphi_\lambda(x)| \leq \|x\|$ . Com isso,  $f$  é contínua e cumpre  $\|f\| \leq 1$ , portanto  $f = \Psi(f) \in \Psi(B_{E'})$  prova que  $\Psi(B_{E'})$  é fechado.

□

# Apêndice A

## Biografias

Os relatos desse capítulo são uma tradução livre da seção de biografias de [McT]

### A.1 Felix Hausdorff



Figura A.1: Felix Hausdorff

Felix Hausdorff (1868 – 1942) nasceu em Breslau, Alemanha (atualmente Wrocław, Polônia), proveniente de uma família de judeus. Ainda garoto, sua família mudou-se para Leipzig onde ele cresceu. Durante a escola interessou-se por literatura e música, além de matemática. Inicialmente teve intenções de seguir carreira como compositor, mas pressionado pela família desistiu da ideia e dedicou-se à matemática.

Hausdorff estudou na Universidade de Leipzig sob a orientação de Heinrich Bruns (1848 – 1919) e Adolph Mayer (1839 – 1908), concluindo o doutorado em 1891

voltado à aplicações da matemática a astronomia. Sua tese *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung* foi submetida à habilitação<sup>1</sup> em 1895.

Entretanto Hausdorff continuava interessando em literatura e filosofia, e seu círculo de amizades consistia na sua maioria de artistas e escritores ao invés de cientistas. Chegou até a publicar seu

---

<sup>1</sup> A “habilitação” era uma qualificação necessária do programa da universidade alemã.

trabalho literário em alguns livros sob o pseudônimo de Paul Mongré. Em 1902 foi promovido à uma cadeira de professor em Leipzig e rejeitou uma oferta similar em Göttingen, indicando que preferia dedicar mais tempo aos círculos artísticos de Leipzig do que à sua carreira em matemática.

Em 1904 Hausdorff começou a trabalhar na área que lhe traria fama, topologia e teoria dos conjuntos. Ele introduziu o conceito de conjuntos parcialmente ordenados, e durante os anos de 1901 a 1909 provou uma série de resultados sobre conjuntos ordenados, além de introduzir alguns tipos especiais de cardinais na tentativa de resolver a hipótese do contínuum.

Após 1910 Hausdorff mantém contato com Study(1862 – 1930) em Bonn, que o motiva a se envolver mais com a pesquisa matemática e conseqüentemente com o crescimento de sua carreira. A amizade com Study foi um fator preponderante para direcionar Hausdorff aos problemas importantes e, por decorrência, à sua fama. Study também o enconraçou a ir até Bonn assumir um cargo de professor em Greifswalf no ano de 1913. Um ano depois, Hausdorff publicou seu famoso texto *Grundzüge der Mengenlehre*, no qual desenvolveu os trabalhos de Fréchet e criou uma teoria para os espaços métricos e topológicos. O *Grundzüge* foi revisado e republicado várias vezes durante os anos seguintes, sendo publicado na Rússia no ano de 1937, e traduzido para o inglês em 1957.

Hausdorff permaneceu em Bonn até 1935 como eminente matemático, até ser forçado a se retirar pelo regime nazista. Apesar dos indícios calamitosos do regime serem notáveis desde 1932, ele não realizou nenhuma tentativa de emigração enquanto era possível. Prosseguiu com suas pesquisas em topologia e teoria dos conjuntos, até que seus artigos deixassem de ser publicados na Alemanha, mesmo que tenha feito o juramento obrigatório à Hitler.

Em 1939 entrou em contato com Courant à procura de parceria e uma possível emigração. Mas nada disso aconteceu. Como judeu, sua situação tornava-se insustentável a cada dia que passava. Em 1941 foi agendada sua ida a um campo de concentração, mas a Universidade de Bonn concedeu-lhe permissão para ficar em casa. Em outubro de 1941 foram forçados a usar a “estrela amarela” e informados que seriam enviados à Colônia. Besse-Hagf escreveu-lhe estar ciente de que

*“...uma deportação preliminar para a Colônia. E o que se ouve sobre as acomodações e tratamentos dados aos judeus é completamente inconcebível.”*

Estando internado por motivos de saúde não foi deportado à Colônia. Juntamente com sua

mulher e a irmã dela, cometeram suicídio na noite de 26 de janeiro de 1942. No dia 25 ele escrevera uma carta à seu amigo Study pedindo desculpas pela “deserção” à luta.

Os trabalhos de Hausdorff contribuíram para a astronomia, filosofia, literatura e principalmente para a teoria dos conjuntos e topologia, com sua obra-prima *Grundzüge*. Por fim, mencionamos um famoso resultado que também deve-se a ele: o paradoxo de Hausdorff–Banach–Tarski.

## A.2 Andrey Nikolayevich Tychonoff

Como vários matemáticos russos, existem diferentes maneiras de transliterar para o alfabeto romano o nome *Andrei Nikolaevich Tikhonov*. Uma das mais comuns é *Andrey Nikolayevich Tychonoff*, a qual adotamos aqui desde o capítulo anterior.



Figura A.2: Andrey Tychonoff

Tychonoff (1906 – 1993) nasceu em Gzhatska, Smolensk, Russia. No ano de 1921 entrou na Universidade de Moscou e obteve um progresso memorável em seus estudos, visto que seu primeiro artigo foi publicado em 1925, enquanto ainda fazia o curso de graduação, relacionando os resultados de Aleksandrov (1896 – 1982) e Urysohn (1898 – 1924) sobre condições condições de metrizabilidade de um espaço topológico. Suas investigações topológicas continuaram, e em 1926 ele descobriu uma construção topológica definida em produtos de espaços topológicos, que hoje em dia carrega seu nome: a topologia de Tychonoff. Aleksandrov, recordando como falhou

em apreciar o significado das ideias de Tychonoff que lhe foram apresentadas, relembra:

*“Como é possível que uma topologia introduzida por meio de enormes vizinhanças, que diferem do próprio espaço apenas por um número finito de coordenadas, possa captar qualquer essência das características do produto topológico?”*

Certamente Tychonoff deu a definição correta e suas ideias, não-intuitivas até mesmo para um grande topologista como Aleksandrov, lhe permitiram provar um dos mais importantes resultados

topológicos: o produto de qualquer família de espaços compactos é compacto.

Poucos matemáticos adquiriram uma reputação internacional antes mesmo de iniciarem a carreira como pesquisadores, e Tychonoff foi um deles. Seus resultados sobre as topologias produtos foram obtidos antes mesmo da conclusão do seu doutorado. Com esse impressionante desempenho, tornou-se um aluno-pesquisador da Universidade de Moscou em 1927.

Imagina-se que possuindo uma compreensão tão clara das ideias topológicas, estivesse satisfeito em aplicar seus talentos àquela área. Entretanto, Tychonoff possuía também talentos em outras áreas da matemática também. Seus resultados abrangem vastos tópicos da matemática moderna, dentre eles topologia, análise funcional, teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais, geofísica, eletromagnética, física – matemática e matemática computacional.

Defendeu a habilitação de sua tese em 1936, e foi nomeado professor da Universidade de Moscou logo depois. Três anos mais tarde, foi eleito membro da Academia de Ciências Russa. Nas décadas seguintes trabalhou em diversas áreas, dentre elas a matemática computacional, e ganhou prêmios devidos à relevância e contribuição dos seus trabalhos.

O amplo interesse de Tychonoff o manteve em diversas cadeiras da Universidade de Moscou. Além disso, foi nomeado vice-diretor do Instituto de Matemática Aplicada da Academia de Ciências Russa, onde permaneceu por vários anos.

# Referências Bibliográficas

- [B] N. Bourbaki. *General Topology – Part. 1*. Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1966.
- [D] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [En] R. Engelking. *General Topology – Revised and Completed Ed.*. Berlin: Heldermann. Sigma series in pure mathematics, vol. 6, 1989.
- [K] J. L. Kelley. *General Topology*. Springer, New York, 1955.
- [ELL] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral*. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2009.
- [M] J. R. Munkres. *Topology – 2nd Ed.*. Prentice Hall, Massachusetts, 2000.
- [P] D. M. Pellegrino *Notas de Aula de Topologia Geral*. Paraíba, 2009.
- [W] S. Willard. *General Topology*. Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1970.
- [McT] The MacTutor History of Mathematics archive (acessado em junho de 2011).