UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS DE DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Leonardo Pedro dos Santos

Geometria Analítica com o Geogebra: adaptando o livro didático para ensinar através da Resolução de Problemas

Pitimbu - PB
2012

Leonardo Pedro dos Santos

Geometria Analítica com o Geogebra: adaptando o livro didático para ensinar através da Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Cibelle de Fátima Castro de Assis

Pitimbu - PB
2012

Geometria Analítica com o Geogebra: adaptando o livro didático para o aprender através da Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Cibelle de Fátima Castro de Assis

Aprovado em 18/12/12

COMISSÃO EXAMINADORA

Cibelle Castro Assis
Profª. Drª. Cibelle de Fátima Castro de Assis (Orientadora)

Clédia Inês Matos Veras
Profa. Ms. Clédia Inês Matos Veras

Antonio Sales da Silva
Prof.Ms. Antônio Sales da Silva

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S237g Santos, Leonardo Pedro.
Geometria Analítica com o GeoGebra : adaptando o livro didático Para ensinar através da resolução de problemas / Leonardo Pedro Santos. – João Pessoa, 2012.
48 p. : il.

Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba.
Orientadora: Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis.

1. Geometria Analítica. 2. GeoGebra. 3. Resolução de problemas I. Título.

BS/CCEN CDU 514.12(043.2)

Aos meus pais Santos e Sueli, aos meus irmãos José Luiz e José Maria, e à minha esposa Leclícia, por tudo que representam para mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o sábio de todos os sábios, pois me capacitou e me deu coragem para continuar e superar todos os obstáculos que enfrentei ao longo desse curso, mostrando que sempre foi possível vencer as dificuldades, e que para todo problema sempre existe uma solução, mesmo quando parece impossível aos meus olhos. Deus me concedeu a vitória.

Aos meus pais Santos e Sueli porque sempre me deram força incentivando-me, acreditando na minha capacidade. O que sou hoje como cidadão é um reflexo dos valores que meus pais passaram para mim, sempre com amor e dignidade tornando esse momento possível.

Aos meus irmãos José Luis dos Santos e José Maria dos Santos, que sempre demonstraram confiar e torcer por mim, e que me incentivaram, pois, ao observar a coragem, dedicação, e a capacidade de superação que eles sempre demonstraram ao superar as dificuldades da vida serviu de maneira significante como exemplo, para agir da mesma forma para não deixar as dificuldades do curso me vencer e continuar até o fim.

À minha esposa Leclícia que sempre esteve ao meu lado, e me deu força no momento que pensei em desistir.

À minha orientadora Cibelle de Fátima Castro de Assis por me orientar nesse trabalho, e pela sua grande dedicação.

À todos os professores e tutores do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Aberta do Brasil, e aos tutores presenciais do polo de Pitimbu, por me transmitirem conhecimento, e por todo esforço e dedicação ao possibilitar que eu tivesse uma formação superior de qualidade, e por serem os autores principais da minha formação.

Á todos os meus amigos por poder compartilhar experiências e conhecimentos, principalmente ao meu amigo Jordão Nascimento.

A esperança é cheia de confiança. É algo maravilhoso e belo, uma lâmpada iluminada em nosso coração. É o motor da vida. É uma luz na direção do futuro. (Conrad de Meester)

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de estudar as contribuições do software GeoGebra para o processo de resolução de problemas em Geometria Analítica no Ensino Médio. Como referencial teórico consultamos o livro Didática da resolução de problemas de Matemática (DANTE 2000) e o livro didático Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2010). Utilizamos também documentos de referência nacional para o Ensino Médio como as OCEM (2010). Iniciamos a pesquisa classificando os tipos de problemas de acordo Dante para o conteúdo distância entre pontos e coordenadas do ponto médio de um seguimento de reta. Escolhemos um problema do livro do Dante Matemática Contexto & Aplicações e adaptamos para o GeoGebra. Ao final do trabalho apresentamos uma Sequência Didática utilizando a heurística de Polya de modo que os alunos pudessem aplicar os seus conhecimentos prévios ao mesmo tempo em que utilizassem o GeoGebra para chegar a solução correta do problema desenvolvendo sua autonomia na medida em que constroem o seu conhecimento. Podemos concluir que essa metodologia é uma forma de estimular o desenvolvimento do conhecimento de forma eficaz e prazerosa para os professores e alunos pois possibilita que os alunos desenvolvam seu conhecimento de maneira dinâmica, resultando em sujeitos autônomos na construção do seu conhecimento, e cidadãos críticos e transformadores do ambiente em que vivem.

Palavras-chave: Geometria Analítica, livro didático, GeoGebra, Resolução de problemas

ABSTRACT

This work aims to study the contributions of GeoGebra software to the process of solving problems in Analytic Geometry in high school. As theoretical framework we consulted the book Didática da resolução de problemas de Matemática (DANTE 2000) and the textbook Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2010). We also used national reference to the high school as OCEM (2010). We started the search classifying the types of problems according to Dante about the content distance between points and coordinates of the midpoint of a straight tracking. We chose a problem from the book of Dante Matemática Contexto & Aplicações and adapt to GeoGebra. At the end of the work we present a Sequence Didactics using Polya's heuristic so that students could apply their prior knowledge while that used GeoGebra to reach the correct solution of the problem by developing their autonomy as they build their knowledge. We can conclude that this methodology is a way to stimulate the development of effective and enjoyable learning for teachers and students because it allows students to develop their knowledge in an effective and dynamic, autonomous individuals resulting in the construction of knowledge, and critical citizens transforming the environment in which they live.

Keywords: Analytic Geometry, textbook, GeoGebra, solving problems.

SUMÁRIO

APÊNDICE

1. MEMORIAL DO ACADÊMICO

1.1 Histórico de Formação Escolar

Eu, Leonardo Pedro dos Santos, nasci na cidade de Pitimbu, no Estado da Paraíba em 1986, O meu pai é agricultor e a minha mãe era doméstica. Ambos sempre enfatizaram a importância dos estudos para a vida de qualquer pessoa e sempre me incentivaram, não poupando esforço para que eu pudesse frequentar a escola, pois acreditaram sempre que através dos estudos eu conseguiria alcançar melhores condições de vida.

Diante de toda essa motivação, eu sempre me esforcei ao máximo para adquirir o máximo de conhecimentos possível, nunca poupei esforços, para mim cada conhecimento adquirido era apenas um pequeno degrau para conseguir os objetivos que eu tinha que alcançar, mas o motivo mais forte para que eu pudesse seguir sempre em frente foi a confiança que meus pais sempre depositaram em mim, eles sempre confiaram na minha capacidade, ao mesmo tempo em que me davam força, então eu não poderia decepcioná-los, e sempre me empenhei para conseguir os melhores resultados possíveis.

A minha vida escolar iniciou no ano de 1993, na Escola Municipal Antônio Lourenço de Barros, aos sete anos de idade. Eu estudei o ensino fundamental 1 completo nesse colégio , foi uma fase muito importante para a minha formação escolar, e apesar dos professores utilizarem métodos tradicionais de ensino naquela época, eu aproveitei o máximo que pode.

Em 1998 fui transferido para a Escola Estadual de 1º e 2º Grau Dr. João Gonçalves onde estudei da 5ª série ao 3º ano científico, hoje, Ensino Fundamental II e Ensino Médio, respectivamente.

Lembro-me que sempre fui um aluno estudioso e aplicado. Porém, a partir da 6ª série, hoje, 7º Ano, comecei a sentir um pouco mais de dificuldade na disciplina de Matemática, e comecei a ter aulas particulares, para melhorar o meu desempenho no colégio. Essas aulas surtiram muito efeito, pois de tanto estudar matemática comecei a gostar de estudar a disciplina, cada problema matemático que eu conseguia solucionar sem a ajuda de professores para explicar, para mim como mais um obstáculo vencido. Daí, além de estudar matemática no colégio, eu passei a estudar também em casa.

Pesquisando em meus livros, logo eu dispensei o meu professor particular, daí em diante sempre fui reconhecido pelos meus professores e por meus próprios colegas. Pelo meu excelente desempenho na disciplina de Matemática, um dos melhores reconhecimentos do meu esforço como estudante veio quando ao término do ensino médio eu fui condecorado como melhor aluno dos formandos 2004 dos alunos do colégio Dr. João Gonçalves depois de um discurso feito pela diretora do colégio na época perante todos os demais alunos concluintes e seus familiares.

As maiores dificuldades enfrentadas foram estrutura do colégio, pois o número de alunos por turma era muito elevado, eu me lembro bem que algumas turmas chegaram a sessenta alunos, os únicos materiais que eu observava que eram utilizados pelo professor eram os livros, o quadro, e o giz, mesmo dessa forma o esforço dos professores era visível, podendo ser percebido por qualquer aluno. Hoje eu posso perceber que tudo que aprendi foi de fundamental importância para a minha vida profissional, apesar de todas as dificuldades enfrentadas.

1.2 Histórico de Formação Universitária

A minha vida acadêmica começou no ano de 2008, "um pouco tarde", pois assim que terminei o ensino médio me alistei no quartel em João pessoa e fiquei lá quase um ano, depois comecei a trabalhar em empresas privadas, depois de certo tempo ouvi falar em uma universidade a distância, e que seria instalado um polo no município onde moro, e logo percebi que era uma oportunidade de ingressar em uma formação superior, resolvi me inscrever no vestibular, para licenciatura em matemática, pois a universidade só oferecia três cursos diferente para os alunos do polo de Pitimbu: Licenciatura em Pedagogia, Licenciatura em Matemática, e Licenciatura em, Letras. Eu fiz o vestibular e consegui uma boa colocação. Depois de quatro anos sem estudar eu senti muita dificuldade principalmente por não estar adaptada ao modo de ensino a distância, além da falta de estrutura inicial, pois a situação do polo era precária, não oferecia condições, para que pudéssemos estudar de maneira confortável. Quando a situação do polo se regularizou, eu ainda enfrentei uma grande dificuldade de locomoção, pois eu moro em um distrito de Pitimbu que fica a uma distância de seis quilômetros mais ou menos. devido às dificuldades, eu fiquei perdi algumas cadeiras, mas nunca pensei em desistir, sempre pedi forças a Deus para seguir em frente. Esse curso permitiu que eu pudesse trabalhar e estudar organizando o meu próprio horário.

O que torna gratificante para mim depois todo esse esforço é o fato de poder contribuir com os conhecimentos para a formação de cidadãos mais responsável. È importante perceber que os conhecimentos adquiridos ao longo do curso são de fundamental importância para que isso seja possível. O mais interessante é que eu pude aprender diante de todas as dificuldades enfrentadas, e transformá-las em algo positivo.

Ao longo dessa jornada eu pude contar com o apoio de todos professores e tutores, o que foi de fundamental importância para a construção do meu conhecimento tornando esse processo mais completo.

1.3 Experiência como professor de matemática

O gosto pela Matemática vem dos longos anos de estudo. A partir de um certo momento da minha vida escolar, comecei a me identificar mais com a Matemática e daí em diante sempre fui o primeiro da turma, e por saber as dificuldades que muitos alunos têm com a Matemática, comecei ajudando os meus irmãos mais novos e alguns amigos e aos poucos passei a ensinar aulas de reforço.

Quando estava no terceiro período desse curso de Licenciatura surgiu a oportunidade de ensinar em uma turma de ensino fundamental da rede municipal da cidade onde moro através de um contrato temporário. Por causa da falta de profissional da área, comecei lecionando na E. M. E. F. Maria Tavares Freire. Logo no início, senti um pouco de dificuldade, por causa das condições adversas, como falta de estrutura do colégio, mas ao longo do tempo fui adquirindo experiência e o meu gosto foi aumentando gradativamente pelo meu trabalho, ao observar o reconhecimento do meu trabalho pelos alunos e colegas ensinei nesse colégio um ano e meio. Logo depois consegui outro contrato pela rede estadual na E. E. E. F. M. Dr. João Gonçalves, onde lecionei por um ano em turmas de nível médio, que foi uma grande e prazerosa experiência onde tive a oportunidade de realizar o meu estágio.

1.4 Experiência no Estágio Supervisionado

O meu Estágio Supervisionado teve fundamental importância para mim, pois, eu pude vivenciar na prática a realidade do ambiente escolar, de que forma eu posso aplicar meus conhecimentos no desempenho da atividade docente.

Eu tive a oportunidade de estagiar no colégio em que eu era o professor regente pelo fato de já estar lecionando em turmas de Ensino Fundamental, pois, a partir de quando estava cursando o terceiro período desse curso, comecei a lecionar na rede municipal onde moro e fiz as atividades de Estágio III nesse colégio. Na oportunidade, eu pude seguir as instruções dos meus professores das disciplinas de Estágio III livremente e observei ao longo do tempo os efeitos positivos que essas orientações surtiram no exercício da minha prática docente.

Quando fiz o último estágio eu já e estava em turmas de Ensino Médio também no município onde moro, mas pela rede estadual de ensino, e trabalhei na intervenção com 3º Ano o conteúdo de Geometria Analítica, estudo de retas através do GeoGebra um excelente software para trabalhar geometria analítica, logo eu pude perceber que os alunos começaram a se interessar mais nas aulas, ficaram concentrados e os bons resultados logo puderam ser observados. Os alunos tiveram desempenho positivo, e consequentemente o meu trabalho foi mais reconhecido pelos próprios alunos, e também pelos colegas de trabalho. Por esses motivos, decidi que esse seria o tema do meu TCC.

2. INTRODUÇÃO

2.1 Apresentação do tema

No Ensino Médio, os conteúdos da Matemática podem ser estudados em três temas ou eixos estruturadores, segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL, 2002): *Álgebra: números e funções*; *Geometria e medidas* e *Análise de dados*.

Na Geometria e medidas temos os subtemas: Goemetria Plana, Geometria espacial, Métrica e Geometria Analítica. Cada tema é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002), os conteúdos específicos para a Geometria Analítica dizem respeito à representação no plano cartesiano e equações bem como interseção e posições relativas de figuras. As habilidades seriam:

• Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.

• Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.

• Associar situações e problemas geométricas a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.

• Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Segundo os PCN+ (2002, p.124), a Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Então, mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe.

Segundo as Orientações Curriculares do Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006) o trabalho com a Geometria Analítica permite a articulação entre a geometria e a álgebra e, para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento das figuras geométricas via equações, e o entendimento das equações via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundamentadas em raciocínio lógico deve ser abandonada pelo professor, e as memorizações excessivas devem ser evitadas. É importante também que o professor trabalhe os conteúdos de maneira que o aluno possa fazer generalizações e entender o significado de tudo que for estudado.

Sobre o processo de ensino e aprendizagem, é necessário deixar de lado aquele que identifica ensino como transmissão de conhecimento, pois demanda alunos bastante atentos e motivados, o que não é o caso de grande parte de nossos alunos.

A proposta de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (2000) é que a escola e grupo de professores proponham um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento de competências e habilidades.

Explorar conteúdos relativos aos números, álgebra, medidas, geometria, e noções de estatística e probabilidade envolve diferentes formas de pensar em Matemática, mas para evitar quantidade excessiva de informações, é preciso fazer um recorte usando alguns critérios orientadores desse processo de seleção de temas.

Um primeiro critério básico geral é que os conteúdos ou temas devem permitir ao aluno desenvolver competências descritas no item anterior, avançando a partir do ponto em que se encontra. Para isso, os temas selecionados devem ter relevância científica e cultural. Isso significa que, além das justificativas relativas a aplicações e a linguagem, sua importância está no seu potencial explicativo que permite ao aluno desenvolver sentidos estéticos e éticos em relação aos fatos em questão desse mundo.

Os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significado para a aprendizagem, possibilitar ao aluno o estabelecimento de relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção às competências da área e, até mesmo, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível. (BRASIL, 2006).

2.2 Problemática e Justificativa

O principal motivo que nos levou a escolher o estudo da Geometria Analítica, especificamente *distância entre pontos* e *coordenadas do ponto médio,* para ser abordado nesta pesquisa, foi a sua aplicabilidade na vida real e as diversas potencialidades que esse tema oferece a professores e alunos, se trabalhado de forma organizada.

Acreditamos que o software GeoGebra possa servir como instrumento auxiliador no ensino e na aprendizagem e que traz vantagens para o ensino da Geometria Analítica, pois permite que o aluno possa visualizar as atividades realizadas e manipulando o software, com a orientação do professor, os alunos conseguem aprender o conteúdo de forma dinâmica e eficaz.

No entanto, o professor deve se preparar para esta tarefa, pois é preciso que o mesmo conheça os limites e potencialidades que o software GeoGebra pode apresentar, o que pode auxiliar o desenvolvimento da autonomia do aluno e da sua prática docente, o que resulta em sujeitos autônomos e transformadores do ambiente em que vivem.

As informações trazidas nos livros didáticos auxiliam de forma significativa os professores no exercício de sua prática docente, mas não trazem explicitamente orientações para que se elabore uma sequência didática que possa ser facilmente trabalhada com o auxílio do GeoGebra. É preciso então que o professor crie, faça adaptações de problemas e exercícios a partir dessa fonte de referência.

Mas como adaptar os exercícios de Geometria Analítica criados a partir dos problemas propostos nos livros didáticos explorando os recursos que o GeoGebra oferece, de modo a favorecer a aprendizagem dos alunos por meio da resolução de problemas?

O professor, na condição de mediador entre o conhecimento e o aluno, pode adaptar os conteúdos formulando problemas com base nos livros didáticos que possam ser resolvidos através do software GeoGebra, em que os alunos possam visualizar as figuras e manipular, tornando a aula prática, dinâmica e eficaz pois é bem mais rápido e dinâmico construir uma figura no GeoGebra de que no caderno. É importante que o aluno desenvolva o senso crítico e o caráter investigativo e, através disso, possa ser um sujeito autônomo no desenvolvimento do seu próprio conhecimento. A partir desta problemática delineamos os seguintes objetivos da pesquisa:

2.3 Objetivos

2.3.1 Objetivo Geral:

O objetivo geral deste estudo é apresentar contribuições do software GeoGebra para o processo de aprendizagem por meio da resolução de problemas em Geometria Analítica.

2.3.2 Objetivos Específicos:

- Categorizar os diferentes tipos de problemas para os conteúdos: “Distância entre dois pontos” e “Ponto médio de um segmento” apresentado nos livros didáticos para o Ensino Médio;
-
- Construir uma aplicação no GeoGebra que trate de um problema de Geometria Analítica a partir do livro didático;
- Avaliar as contribuições do GeoGebra para o processo de resolução do problema;
- Apresentar uma proposta de ensino através da Resolução de Problemas para o conteúdo “Distância entre dois pontos” e “Ponto médio de um segmento” utilizando as aplicações construídas com o software GeoGebra.

2.4 Considerações metodológicas

De acordo com o objetivo desta pesquisa, esta se caracteriza por seu caráter **exploratório**. Quanto a coleta de dados, esta pesquisa será uma pesquisa **Bibliográfica**.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009, p.70) uma pesquisa Exploratória ou diagnóstica é aquela que se caracteriza “pela realização de experimentos que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema”.

Uma pesquisa Bibliográfica é aquela que abrange a leitura, análise e interpretação de livros, periódicos, documentos mimeografados ou xerocopiados, mapas, imagens, manuscritos, etc. Todo material recolhido deve ser submetido a uma triagem, a partir da qual é possível estabelecer um plano de leitura. Trata-se de uma leitura atenta e sistemática que se faz acompanhar de anotações e fichamentos que, eventualmente, poderão servir à fundamentação teórica do estudo. (FIORENTINI E LORENZATO, 2009, p.104)

Metodologicamente, esta pesquisa está organizada em etapas da seguinte forma:

- *Etapa 1:* Consulta ao referencial teórico sobre os tipos de problemas em Matemática;

- *Etapa 2:* Consulta a problemas de matemática propostosem livros didáticos do 3º Ano do Ensino Médio em relação aos conteúdos "Distância entre dois pontos" e "Ponto médio de um segmento" e categorização dos mesmos.
- *Etapa 3*: Construção no GeoGebra de uma aplicação para um tipo de problema conforme as categorias de problemas;
- *Etapa 4:* Avaliação das contribuições do GeoGebra para a resolução do problema proposto;
- *Etapa 5:* Elaboração de uma Sequência Didática para os conteúdos "Distância entre dois pontos" e "Ponto médio de um segmento" através da Resolução de Problemas utilizando uma aplicação do GeoGebra.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 A metodologia da Resolução de Problemas no ensino de Matemática

3.1.1 Concepções da metodologia da Resolução de Problemas

O homem sempre teve que encontrar soluções para seus problemas cotidianos e explicações para determinados fenômenos que percebia. Mas, para entender a sua maior parte, era necessário algum conhecimento matemático mesmo que intuitivamente. De modo geral podemos afirmar que a resolução de problemas esteve na base da criação do processo de contagem e do conceito de número. Ao longo do tempo a matemática evoluiu juntamente com a necessidade da sociedade, mas, para isso, passou por vários processos. (PAIVA, 2010)

Na década de 1950 muitos educadores passaram a defender o ensino através da resolução de problemas, a partir desse momento surgiram cada vez mais estudos que enfatizavam a importância da resolução de problemas para o ensino e aprendizagem de Matemática visando ao estabelecimento de um processo de ensino e aprendizagem mais consistente. (PAIVA, 2010).

Durante muito tempo o ensino de matemática consistia na acumulação de conhecimento, em que o aluno tinha apenas que decorar fórmulas e procedimento que eram introduzidos de maneira contínua, progressiva e cumulativa, em que o aluno tinha que repetir o mesmo procedimento até decorar, levando o mesmo a aprender de forma mecânica, onde o professor trabalhava os conteúdos, propondo alguns exercícios de aplicação direta de procedimentos e definições que denominava de problema de aplicação, sem que fossem levados em consideração os métodos utilizados pelos alunos.

O professor deve utilizar a resolução de problemas de forma que possa desafiar o aluno a buscar soluções e desenvolver o seu próprio conhecimento.

Diferente da prática pedagógica adotada pelo sistema tradicional de ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) ressaltam a importância de colocar o aluno como ator principal do processo educacional, cabendo ao professor o papel de mediador entre o conhecimento e o aluno, apresentando-lhe situações problema. Deve-se estimular o aluno a explorar situações em que ele possa ler, entender, raciocinar, elaborar um plano de ação e executar esse plano. É interessante que o professor apresente aos alunos problemas diversificados para que os mesmos possam desenvolver seu conhecimento.

Um dos principais objetivos da resolução de problemas é fazer o aluno pensar produtivamente, e para isso nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o desafiem e o motivem a querer resolvê-las. Essa é uma das razões pela qual a resolução de problemas tem sido recomendada no mundo todo. Logo, podemos concluir que o ensino de matemática através da resolução de problemas é uma metodologia bastante interessante.

O processo de ensino e aprendizagem por meio da resolução de problemas atualmente é um dos caminhos metodológicos mais considerados e incentivados pelos pesquisadores da área, os quais defendem que esse modelo ajudaria a desenvolver a estrutura cognitiva do aluno, exercitar sua criatividade e torná-lo capaz de aprender significativamente, podendo assim aplicar o conhecimento adquirido em diferentes contextos da própria Matemática e em outras áreas do conhecimento, além das situações da vida cotidiana.

Assim, os objetivos principais da utilização metodologia da resolução de problemas, como principal abordagem para o ensino de Matemática são os de levar os alunos a pesquisar e compreender conteúdos matemáticos, formular situações problema e identificar problemas no dia a dia, além de desenvolver e aplicar estratégias para resolver uma grande variedade de problema. (PAIVA, 2010).

Percebendo que cada pessoa tem sua maneira de resolver problemas, de acordo com o tipo, o grau de dificuldade, e do conhecimento matemático de quem está resolvendo o problema, o matemático George Polya procurou organizar o processo de resolução de problemas em quatro etapas, que ficou sendo conhecida como heurística de Polia. Consultamos o texto de Paiva (2010) para apresentar as etapas que são:

a) *Entenda o problema:* Primeiro, tem que *entender* o problema. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes para determinar a incógnita? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias? Faça uma figura. Outra se necessário. Introduza notação adequada. Separe as condições em partes.

b) *Construa uma estratégia de resolução*. Ache conexões entre os dados e a incógnita. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares, se uma conexão não for achada em tempo razoável. Use isso para "bolar" um plano ou estratégia de resolução do problema. Você já encontrou este problema ou algum parecido? Conhece um problema semelhante? Conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar? Olhe para a incógnita! E tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante Aqui está um problema relacionado com o seu e que você já sabe resolver. Consegue aproveitá-lo? Pode usar seu resultado? Ou seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos? Você consegue enunciar o problema de outra maneira? Se você não consegue resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido. Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? Um caso mais geral e mais acessível? Você consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condições do problema e observe o que ocorre com a incógnita, como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa desde os dados? Consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os dados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos? Você está levando em conta todos os dados? E todas as condições?

c) *Execute a estratégia*. Frequentemente, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular para essa etapa prematuramente, e acabam dando-se mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução. Ao executar a estratégia, verifique cada passo. Você consegue mostrar claramente que cada um deles está correto?

d) *Revise*. Examine a solução obtida. Verifique o resultado e o argumento. Pode obter a solução de um outro modo? Qual a essência do problema e do método de resolução empregado? Em particular, você consegue usar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

3.1.2 Tipos de Problemas

Uma definição clássica de problema é aquela considera a problema como uma situação em que um indivíduo ou um grupo precisa resolver, para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a solução. (LESTER, apud ONUCHIC 1999). Já um problema matemático para Dante (1989, p.10) "(...) é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la".

Cabe ao professor não se deixar levar nem passar para os alunos mitos sobre a resolução de problemas de matemática na sala de aula como, por exemplo, (ECHEVERRIA,1998.p.46 apud PAIVA, 2010):

- Os problemas matemáticos têm somente uma resposta;
- Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático;
- O correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor;
- Os estudantes normais devem ser capazes de resolver qualquer problema matemático em cinco minutos ou menos.

É importante perceber que esses mitos existem na concepção errada de pessoas leigas com relação à resolução de problemas. É preciso que esses mitos sejam superados e novas e corretas concepções possam ser discutidas e postas em prática.

É errado afirmar que os problemas matemáticos têm somente uma resposta, pois existem diferentes respostas corretas para um determinado problema matemático e existem diversos caminhos que levam a uma solução correta de problemas matemáticos. O aluno deve ter autonomia para solucionar os problemas traçando estratégias e raciocinando para conseguir chegar à solução. E apenas seguir os procedimentos demonstrados pelo professor na aula anterior retira essa autonomia que o aluno deve ter de construir o seu próprio conhecimento, levando-o a aprender de forma mecânica.

Traçar uma estratégia e solucionar um problema leva tempo, logo podemos perceber que não temos como estipular um tempo para que um aluno possa solucionar um problema matemático.

Segundo os PCN de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance.

Dante (1998) afirma que embora tão valorizada a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis a serem trabalhados na sala de sula. É muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais algoritmos. Isso se deve à maneira com que um problema matemático seja trabalhado e apresentado no livro didático, segundo o Professor Adriano Rodrigues (2010).

Existem diversas propostas de classificação de problemas, que variam bastante de autor para autor dependendo da abordagem que adotam ou da compreensão que têm sobre o tema. (PAIVA, 2010)

Segundo Dante (1989), a classificação dos problemas matemáticos pode ser representada por: exercícios de reconhecimento; exercícios de algoritmos; problemas-padrão; problemas-processo ou heurísticos; problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça. Já para a equipe do CENPEC (1998), essa classificação é representada por: problemas-convencionais; problemas não convencionais e problemas de lógica. A seguir exemplificamos os tipos de problemas segundo a classificação de Dante (1998).

- **Exercícios de reconhecimento**

Tem como objetivo fazer com que os alunos reconheçam, identifiquem, e lembrem alguns conceitos de definição. Exemplo:Dados os números 2, 5, 10, 103, 156, e 207, quais são pares?

- **Exercícios de algoritmo**

São aqueles que podem ser resolvidos passo a passo, geralmente no nível elementar. São exercícios que pedem a execução dos algoritmos. Seu objetivo é treinar habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores. Exemplo: Calcule o valor de [(3.4)+2]/7.

- **Problema – Padrão**

Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia. São os tradicionais problemas de final de livros didáticos. A solução do problema já está contida no próprio enunciado e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática identificando as operações ou os algoritmos necessários para resolvê-lo. O problema padrão simples é o que para solucioná-lo utilizamos apenas um algoritmo, já para solucionar o problema padrão composto utilizamos mais de um algoritmo.

a) Problema - Padrão simples.

Exemplo: Numa sala há 17 meninos e 22 meninas. Quantos alunos há nessa classe?

b) Problema padrão composto

Exemplo: Luís tem 7 anos a mais que o triplo da idade de Felipe. Os dois juntos têm 55 anos. Qual é a idade de cada um?

- **Problemas processos ou heurísticos**

São problemas cuja solução envolve operações que não são contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos para a aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo a uma solução, por isso torna-se mais interessante do que os problemas padrão. Exemplo: Numa reunião de equipes há 6 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros quantos apertos de mão teremos ao todo?

- **Problemas de aplicação**

São aqueles que retratam problemas do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos. São também chamados de situação-problema. Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando dados em tabelas, traçando gráficos etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimento, e princípios de outras áreas que não a matemática se relacione a algo que desperte interesse nos estudantes.

Exemplo: Para fazer seu relatório, um diretor de escola precisa saber qual é o gasto mensal por aluno que ele tem com a merenda escolar. Vamos ajudá-lo a fazer os cálculos?

a) Quantos alunos comem merenda por dia? E por mês?
b) Quantos quilos de arroz, macarrão, tomate, cebola, sal etc. a escola recebe por mês?
c) Qual o preço atual, por quilo, de cada um desses alimentos?
d) Qual é o salário mensal da merendeira?
e) Quanto se gasta de gás?

- **Problemas de quebra-cabeças**.

São aqueles que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque que é a chave da solução.

Exemplo: Com 24 palitos de fósforos formei 9 quadradrinhos. Como posso fazer para tirar apenas 4 palitos e deixar apenas 5 quadrinhos?

Ao solucionarem diferentes tipos de peoblemas matemáticos relacionados ao cotidiano, começando nas séries iniciais do Ensino Fundamental, o aluno desenvolverá o raciocínio lógico e consequentemente ao términio do ensino básico, saberá utilizar esses donhecimentos em divérsas áreas, no exercício de uma profissão e na sua vida.

3.2 Estudo do Ponto na Geometria Analítica

Neste trabalho fizemos, um recorte conceitual na Matemática ao considerar na Geometria Analítica o estudo do Ponto, no que diz respeito à distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento. Este conteúdo é abordado no terceiro ano do Ensino Médio e inserido no bloco de Geometria e Medidas. A seguir, breves considerações sobre a abordagem trazidas desse conteúdo no livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, 1ª edição para o Ensino Médio do autor Luís Roberto Dante, publicado em 2012

3.2.1 A abordagem do livro Matemática Contexto & Aplicações (Dante, 2012)

Para Dante (2012), a Geometria Analítica está associada à idéia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. No livro aqui examinado, a introdução da Geometria Analítica acontece por meio de um exemplo simples dos princípios de representação de pontos no plano cartesiano abordado no cotidiano dos alunos. O autor destaca fatos históricos, em que traz contribuições dos matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat para o estudo da Geometria Analítica.

Visando despertar a curiosidade do aluno em aprofundar o seu conhecimento sobre o assunto estudado, o autor apresenta alguns exemplos de aplicação e alguns exercícios, para que os alunos possam fixar e exercitar o estudo de ponto e reta no plano cartesiano.

Dante (2012, p.51) define distância entre dois pontos como: “Dados dois pontos, **A** e **B** a distância entre eles, que será indicada por d(A, B)**,** é

a medida do segmento de extremidades **A** e **B”.** Em seguida apresenta os seguintes exemplos no plano cartesiano:

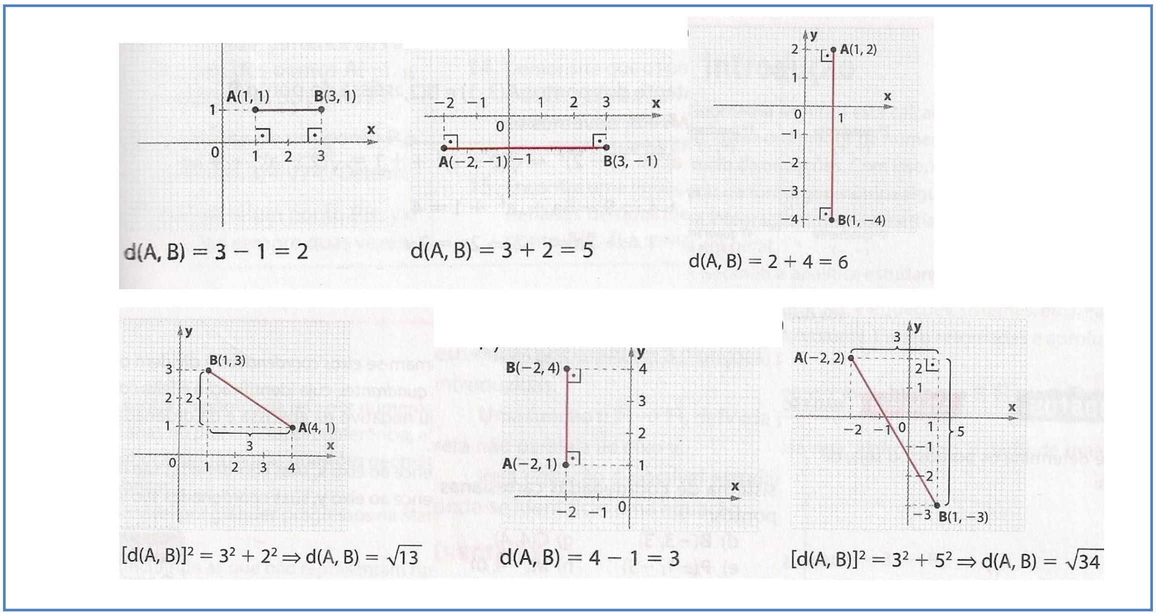


Figura 1 - Distância entre pontos A e B

No tópico seguinte, apresenta a fórmula da distância entre dois pontos *A*(x_1, y_1) e *B*(x_2, y_2), e usa a teorema de Pitágoras, como mostra a figura a seguir:

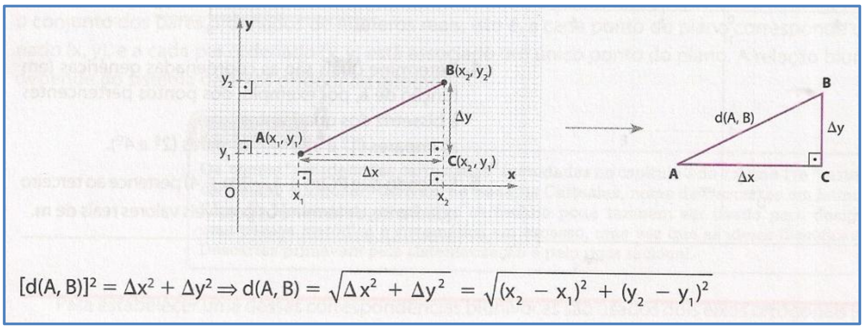


Figura 2 – Fórmula para distância entre A e B

E, logo em seguida, apresenta alguns exercícios para que os alunos possam trabalhar o conteúdo distância entre pontos.

No outro tópico, Dante(2012, p. 54) inicia o estudo do ponto médio da seguinte forma: “Dado um segmento $\overline{AB}$ tal que $A(x_1, y_1)$ **e** $B(x_2 y_2)$ são pontos distintos,vamos determinar as coordenadas de **M**, ponto médio de $\overline{AB}$. Considere:

- Um segmento com extremidades $A(x_1, y_1)$ **e** $B(x_2 y_2)$
- O ponto M(x,y), ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

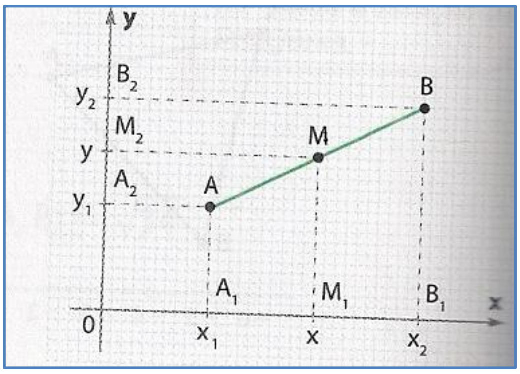


Figura 3 – Representação do ponto M

Aplicando o teorema de Tales temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1B_1}{M_1B_1} \Rightarrow 1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_2B_2}{M_2B_2} \Rightarrow 1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow 2y = y_2 + y_1 \Rightarrow y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Então podemos concluir que dado um segmento de extremidades $A(x_1, y_1)$ **e** $B(x_2 y_2)$

- Abscissa x_1 do ponto médio do segmento é a média aritmética das abscissas das extremidades: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$
- A ordenada y_1 do ponto médio do segmento é a média aritmética das ordenadas das extremidades: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

E, logo em seguida, apresenta alguns exercícios para que os alunos possam exercitar o conteúdo *coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.*

3.3 A integração dos Softwares no ensino de Matemática

3.3.1 Os softwares no ensino de Matemática

A utilização dos softwares no ensino de Matemática pode estimular no estudante o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio e modos diferentes de solucionar problemas, enfatizando a compreensão na medida em que são facilitados os procedimentos de cálculos, de produção de gráficos, entre outros. Dependendo da natureza do software, sua exploração possibilitará estimular a criatividade de investigação e ampliar a autonomia do estudante, além de aproximá-lo de situações de aplicabilidade de conceitos matemáticos envolvendo dados reais segundo Rego (2010).

O objetivo de um software educativo, segundo Assis e Bezerra (2010), é favorecer os processos de ensino e aprendizagem e sua principal característica é o seu caráter didático. Os softwares servem para auxiliar o professor a utilizar o computador como ferramenta pedagógica, servir de fonte de informação, auxiliar o processo de construção de conhecimentos e desenvolver a autonomia da reflexão e da construção do conhecimento.

Os softwares de Geometria Dinâmica caracterizam-se por possibilitar a construção e manipulação de objetos geométricos na tela do computador. Além disso, o que diferencia o software de geometria dinâmica dos demais é a possibilidade de "arrastar" a figura construída utilizando o mouse. Esse procedimento permite a transformação da figura em tempo real (SILVA& PENTEADO, 2009, p.4).

Um software de Geometria Dinâmica proporciona a visualização do que está sendo trabalhado e enfatiza um aspecto fundamental na proposta da disciplina de Matemática, que é a experimentação, promovendo assim, uma melhor percepção por parte do aluno, ajudando-o a descobrir formas mais simples e outras formas de encontrar a solução de problemas. Além disso, permite grande agilidade na investigação, pois as figuras que demorariam muito tempo para serem construídas no papel ou no próprio quadro são construídas rapidamente na tela do computador, fazendo com que os professores e alunos economizem tempo tornando a aula mais proveitosa segundo Assis e Bezerra (2010).

3.3.2 Características do software GeoGebra

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmico, gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos estatística e cálculo numa única aplicação.

O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de MarkusHohenwarter e a sua popularidade tem crescido, desde então o GeoGebra é usado em mais de 190 países, traduzido em 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais 62 institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

O objetivo principal do GeoGebra é dinamizar o estudo da geometria e da álgebra (o que eventualmente levará à exploração também de recursos aritméticos) de modo a facilitar a investigação e o aprendizado de diversos conceitos matemáticos. Graças a tais características que possui, o aplicativo pode ser utilizado como recurso pedagógico, em diferentes níveis e modalidades de ensino da matemática

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Algumas características do GeoGebra são consideradas importantes, segundo Pateta (2009): Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;

- Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo; Software gratuito e de código aberto.

A figura a seguir apresenta a interface do GeoGebra. Ao acessar o programa, temos uma janela como a seguinte:

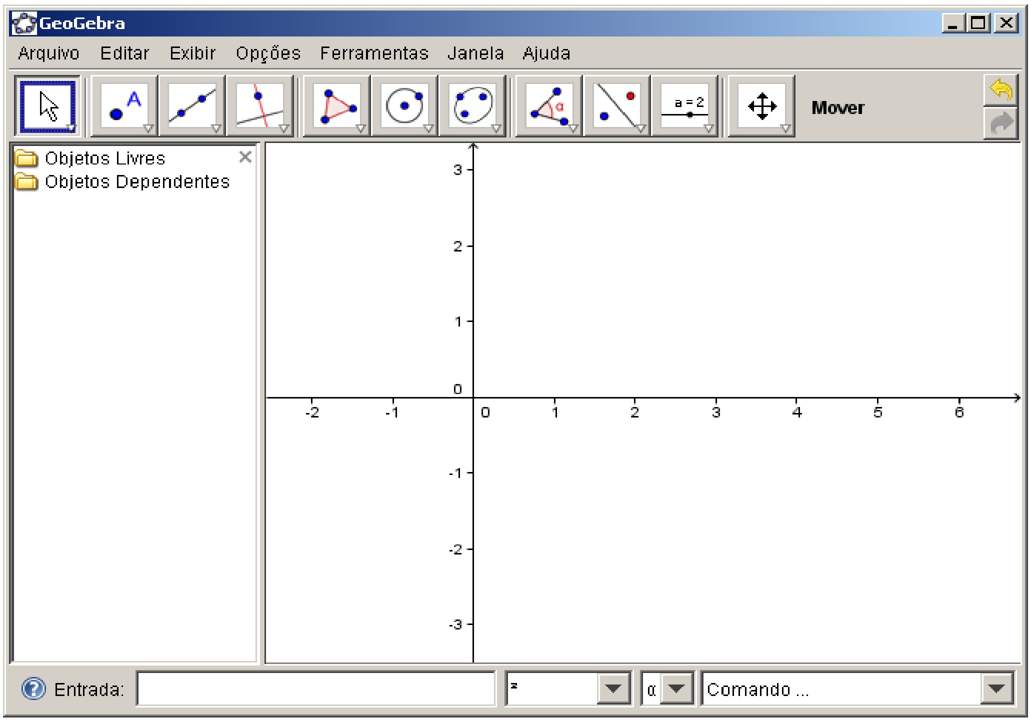


Figura 4 – Janela Inicial do GeoGebra

Observamos que a janela inicial está dividida em duas: à esquerda, a parte algébrica (que pode ser fechada, se necessário); à direita, a parte geométrica. Neste mesmo item, podemos ativar/desativar os eixos, a malha e o protocolo de construção.

Cada ícone desta barra tem várias opções relacionadas com as funções descritas no desenho do ícone. Estas opções são acessadas clicando na seta do canto inferior direito de cada ícone. A exploração das ferramentas é fundamental para execução dos exercícios. Para ativar cada função na parte geométrica é necessário primeiro clicar no ícone e depois na janela geométrica, conforme instruções do menu de conversação que está localizado ao lado da barra de ferramentas.

Ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, outras janelas se abrem apresentando a correspondente expressão algébrica e, por vezes, outra janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico. As alterações no gráfico imediatamente são visíveis na janela algébrica e na planilha de pontos. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem a professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses.

Por ser livre, o software GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

---

[1]Essas informações foram extraídas do site:
http://pt.wikibooks.org/wiki/Aplica%C3%A7%C3%B5es_do_GeoGebra_ao_ensino_de_Matem%C3%A1tica/Imprimir

4. RESULTADO DA PESQUISA

4.1 Tipos de problemas no livro *Matemática Contexto & Aplicações*

A seguir apresentamos uma categorização para os problemas envolvendo os conteúdos “Distância entre dois pontos” e “Ponto médio de um segmento” apresentados no livro didático *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, 1ª edição para o Ensino Médio do autor Luís Roberto Dante publicado em 2012. Utilizamos o livro Didático da Resolução de Problemas de autoria de Dante (2000) para apresentar a categorização.

- **Exercícios de reconhecimento.** O exemplo a seguir foi retirado do livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, páginas 53 e 55:

Exemplo:

1- Calcule a distância entre os pontos dados:

a) A (3,7) e B (1,4)

b) E(3,-1) e B (3,5)

c) H(-2,5) e O (0,0)

2- Determine o ponto médio do segmento de extremidades:

   a) A(1,-7) e B(3,-5)

   b) A(-1,5) e B(5,-2)

   c) A(-4,-2) e B(-2,-4)

Ambos os exercícios citados acima são de reconhecimento, pois fazem com que o aluno reconheça o conceito de distância entre pontos e coordenadas do ponto médio, ao tentarem solucioná-los.

- **Exercícios de algoritmo.** O exemplo a seguir foi retirado do livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, páginas 55:

Exemplo:

1 - Num triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base são segmentos coincidentes. Calcule a medida da altura relativa à base BC de um triângulo isósceles de vértices A(5, 8), B(2, 2) e C(8, 2).

Esse é um exercício de algoritmo, pois pose ser resolvido passo a passo, pede a execução de algoritmo no cálculo da distância entre pontos.

- **Problema-padrão simples**.O exemplo a seguir foi retirado do livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume3, páginas 51e 53:

Exemplo:

1- Marque num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais os pontos

a) A(1,-2)

b) B(0,3)

c) C(3,-2)

2- A distância do ponto A (a, 1) ao ponto B(0, 2) é igual a 3. Calcule o valor da abscissa a.

Esses problemas são padrão simples, pois ao resolvê-lo o aluno tem a oportunidade de fixar os fatos básicos da distância entre pontos e coordenadas do ponto médio, além de reforçar o vínculo existente entre os conteúdos e a geometria utilizando apenas um algoritmo.

- **Problema de algorítimo.** Os exemplos a seguir foram retirados do livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, páginas 52 e 55:

Exemplo:

1- Dado um ponto P(a,2) equidistante dos pontos A(3,1) e B(2,4).Vamos calcular a abscissa do ponto P.

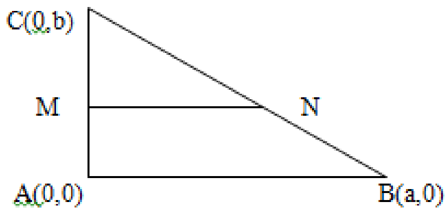
2- Num triângulo retângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base são segmentos coincidentes. Calcule a medida da altura relativa a base BC de um triângulo isósceles de vértices A(5, 8), B(2, 2) e C(8, 2).

Esses problemas são do tipo padrão composto, pois ao resolvê-lo o aluno tem a oportunidade de fixar os fatos básicos da distância entre pontos e coordenadas do ponto médio e para isso precisa utilizar mais de um algoritmo.

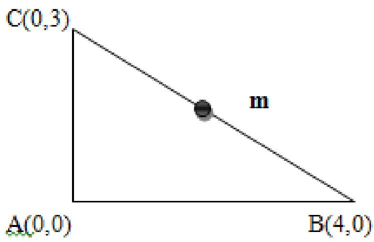
- **Problemas processos ou heurísticos.** Os exemplos a seguir foram retirados do livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, página 56.

Exemplo:

1- Na figura, **M** é o ponto médio do lado AC, e **N** é o p**o**nto médio do lado BC. Demonstre, analiticamente, que o comprimento do seguimento MN é igual à metade do segmento do lado AB .



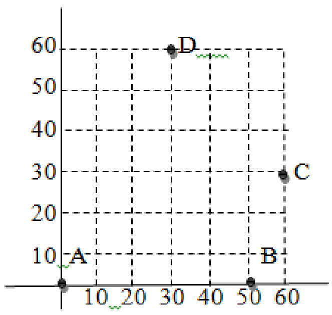
2- A figura mostra um triângulo ABC. Seja **M** o ponto médio da hipotenusa BC. Prove analiticamente que o ponto **M** é equidistante dos três vértices do triângulo.



Ambos os problemas citados acima são heurísticos, pois suas soluções envolvem processos que não estão contidos no enunciado e não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno tempo para pensar e arquitetar um plano de ação e uma estratégia que possa levá-lo à solução.

- **Problemas de aplicação.** O exemplo a seguir foi retirado do livro *Matemática Contexto & Aplicações*, volume 3, página 68.

Exemplo: (Ibmec - SP) Os pontos A, B, C e D do plano abaixo representam 4 cidades.Uma emissora de televisão quer construir uma estação numa localização tal que: A distância entre a estação e a cidade localizada em A seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em B. A distância entre a estação e a cidade localizada em C seja igual a distância entre a estação e a cidade localizada em D.



Considerando as coordenadas do plano dado, a localização da estação deverá ser no ponto: a. (10, 10); b.(10, 20); c. (25,10); d. (20, 20); e.(25, 25).

Esse exemplo é de aplicação porque retrata uma situação real do dia a dia e exige uso da matemática para ser resolvido.

- **Problemas de quebra-cabeças**.

Não foi encontrado no livro pesquisado.

4.2 Aplicações e contribuição do GeoGebra para a resolução de problemas

Neste momento apresentamos um problema de Geometria Analítica que foi adaptado do problema 22 da página 56, do livro do Dante *Matemática Contexto e Aplicações*, e classificado anteriormente por nós como sendo do tipo processo ou heurístico.

A necessidade de adaptação decorre do fato de que não concordamos com o uso do software como uma máquina de calcular simplesmente. Fato que pode estar relacionado ao problema escolhido no livro didático e dessa forma as potencialidades do software se igualaria às do papel e lápis. Ou seja, é através da proposição de questionamentos que a atividade apoiada no software pode provocar a investigação e a experimentação, explorando características da Geometria Dinâmica como o “arrastar”para fazer a diferença em seu uso.

A seguir, retomamos o problema como aparece no livro e na sequência a versão adaptada do problema. O problema envolve os conteúdos *ponto médio de um segmento de reta* e *distância entre dois pontos* e pede uma prova analítica. É necessário ainda que o aluno reconheça no enunciado que se trata de um triângulo retângulo. Como reflexão, o autor sugere que o aluno acredite que este resultado vale para todo triângulo retângulo.

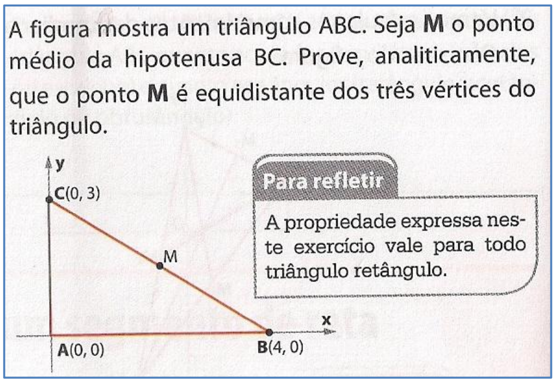

A figura mostra um triângulo ABC. Seja **M** o ponto médio da hipotenusa BC. Prove, analiticamente, que o ponto **M** é equidistante dos três vértices do triângulo.

Figura 5 – Problema adaptado (DANTE, p.56, 2011)

No problema adaptado estamos considerando que o aluno tenha algum conhecimento das ferramentas do GeoGebra como também do algoritmo para o cálculo do ponto médio e para distância entre dois pontos.

Propomos inicialmente a construção do triângulo retângulo pelo aluno e a descoberta dessa característica.

1. **Desenhe no GeoGebra um triângulo de vértices A = (0,0), B = (4,0) e C = (0,3).**
    a. Qual a principal característica deste triângulo?
    b. Quais as medidas da hipotenusa e dos catetos do triângulo desenhado?
    c. Confirme sua resposta através de uma ação interativa com o GeoGebra resulte na exibição essas medidas.

A figura a seguir exibe uma possibilidade de construção para o item 1.

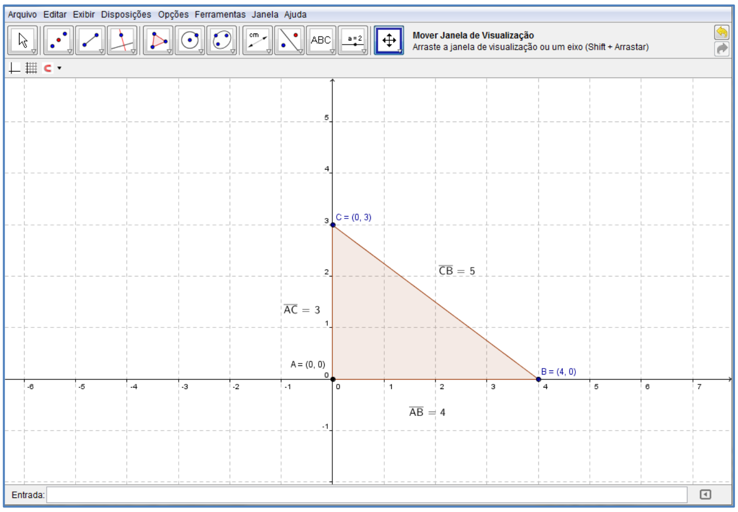
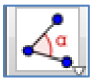
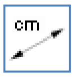


Figura 6 – Construção do triângulo retângulo

Ao tentar responder a alternativa a), o aluno vai marcar os pontos A = (0, 0), B = (4, 0) e C = (0, 3) no Geogebra e vai observar que os pontos formam os vértices de um triângulo e ao traçar segmentos de retas entre esses pontos vai perceber que duas dessas retas são perpendicular entre si, e logo vai perceber que a figura formada é um triângulo retângulo. O aluno também pode utilizar a ferramenta  chamada *Ângulo* para ter certeza de que dois catetos formam um ângulo de 90^{o}.

Na alternativa b), o aluno deverá responder analiticamente usando seus conhecimentos prévios sobre o assunto. Para responder a alternativa c)o aluno vai utilizar a ferramenta  chamada de *Distância*. Em seguida iráverificar se a sua resposta coincide com **as** distânciasentre os pontos A e B, B e C e A e C calculadas pelo software.

Na sequência, sugerimos que o aluno descubra o significado da palavra *equidistante* usando as ferramentas do GeoGebra para agilizar esta descoberta. O ponto médio agora foi chamado de D e não de M, pois o GeoGebra automaticamente nomeia em sequencia alfabética os objetos construídos.

2. **Encontre,usando o GeoGebra, o ponto médio D da hipotenusa $\overline{BC}$.**
    a. Quais seriam as coordenadas do ponto D?
    b. Dê um comando para o GeoGebra exiba as coordenadas do ponto D.
    c. Como saber se o GoeGebra exibe a resposta correta?

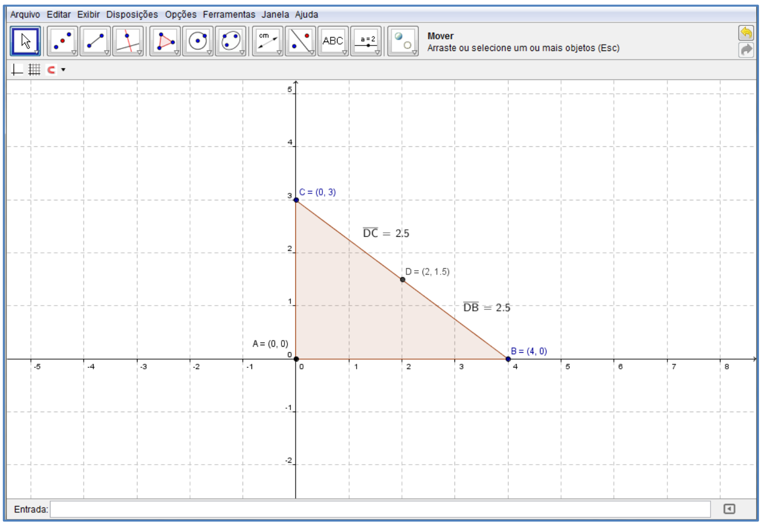
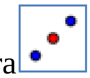
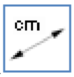


Figura 7 – Encontrando o ponto médio D

Para resolver este quesito, o aluno irá utilizar a ferramenta do GeoGrbra  chamada de *Ponto médio ou centro*e encontrará o ponto D, e o GeoGebra exibirá as coordenadas do ponto D. Para saber se o geogebra deu as coordenadas corretas, o aluno pode verificar analiticamente.

3. **Verifique no GeoGebra que D é *equidistante* dos três vértices do triângulo analisando as distâncias:**
   a. D para C;
   b. D para B;
   c. D para A.
   d. O que dizer dessas medidas?
   e. Qual o significado da palavra *equidistante*?

O aluno pode utilizar a ferramente do GeoGebra  chamada de *Distância* e obter a distância entre o ponto D e C; de modo análogo pode encontrar a distância entre o ponto D e B, e entre o ponto D e o A. Assim vai, perceber que as distâncias são iguais, o que significa que o ponto D é equidistante dos três vértices do triângulo.A figura a seguir exemplifica este momento da construção.

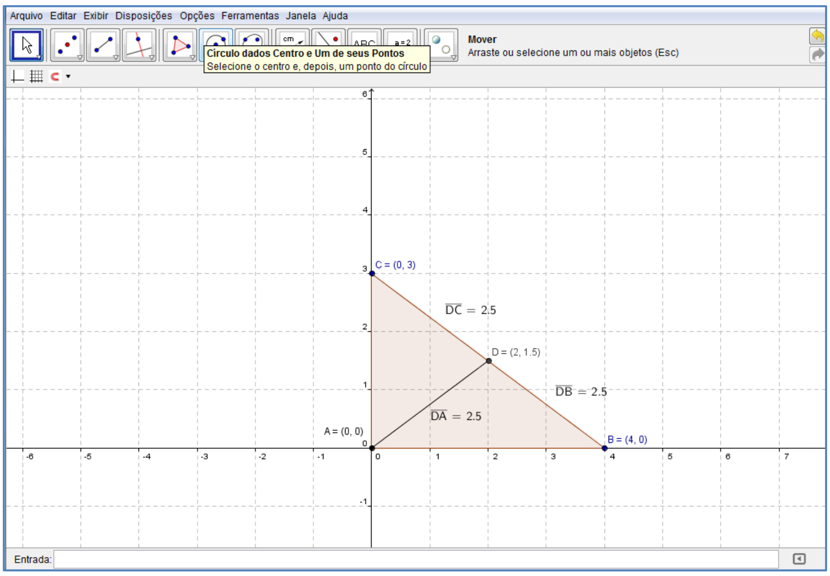


Figura 8 – Encontrando as medidas de $\overline{DC}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DA}$

Na questão 4 que segue, pedimos que o aluno utilize conhecimentos matemáticos prévios e as construções realizadas no GeoGebra para dar uma prova analítica do resultado.Neste momento, o aluno deverá apresentar cálculos semelhantes aos que apresentamos.

4. **Compare a sua resposta (encontrada por meio de cálculos) com a do GeoGebra.**

Como D = (x_D, y_D) é o ponto médio de $\overline{BC}$, onde B = (4,0) e C= (0,3), temos que $x_D = \frac{4+0}{2} = 2$e y_D $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$. Logo, D = (2, $\frac{3}{2}$).

Como D é equidistante de B e de C, pois é o ponto médio de $\overline{BC}$ basta mostrar que $\overline{DC} = \overline{AD}$ ou $\overline{DB} = \overline{AD}$.

De fato, d(D, C)= $\sqrt{(0-2)^2 + (3-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ =2,5

d(A, D)= $\sqrt{(2-0)^2 + (\frac{3}{2}-0)^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ 2,5

Logo D é equidistante dos três vértices do triângulo ABC.

Logo em seguida, o aluno vai observar a construção da figura no GeoGebra e comparar com a do caderno e observar que os resultados encontrados foram os mesmos.

Com a pergunta 5, a seguir, o aluno usará o GeoGebra para que, intuitivamente, perceba a possibilidade do resultado ser válido para qualquer triângulo retângulo. Para tanto, é necessário que ele construa um triângulo retângulo qualquer e depois, movimenando seus vértices, obtenhaoutros triângulos retângulos analisando as distâncias de D para B, de D para A e de D para C.

5. **Você acha que a propriedade expressa neste problema vale para todo triângulo retângulo?O GeoGebra pode ajudar na resposta desta pergunta?**

Podemos comprovar essa propriedade analiticamente. No entanto, o GeoGebra permite construir vários triângulos bem mais rápido do que ficar desenhando no caderno e de forma mais precisa.Nas figuras a seguir, temos exemplos de triângulos retângulos e as medidas $\overline{DC}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DA}$.

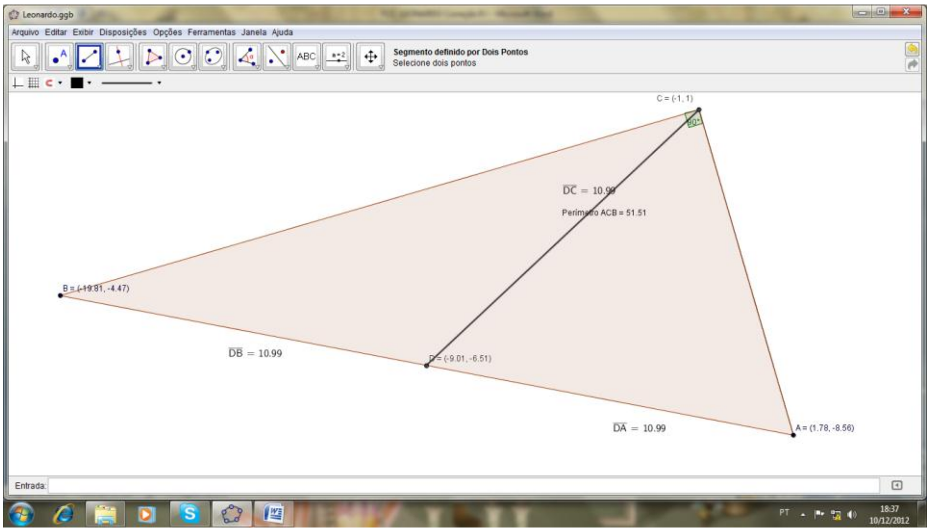


Figura 9 – Exemplo 1 de triângulo retângulo

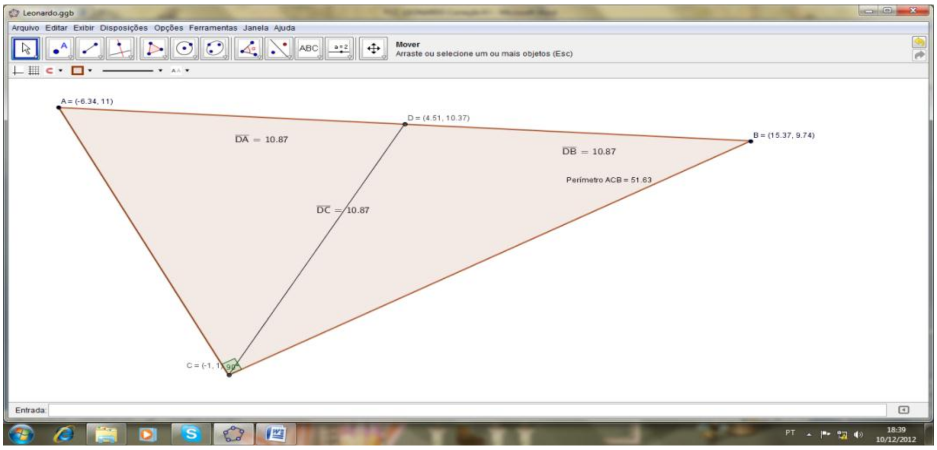


Figura 10 – Exemplo 2 de triângulo retângulo

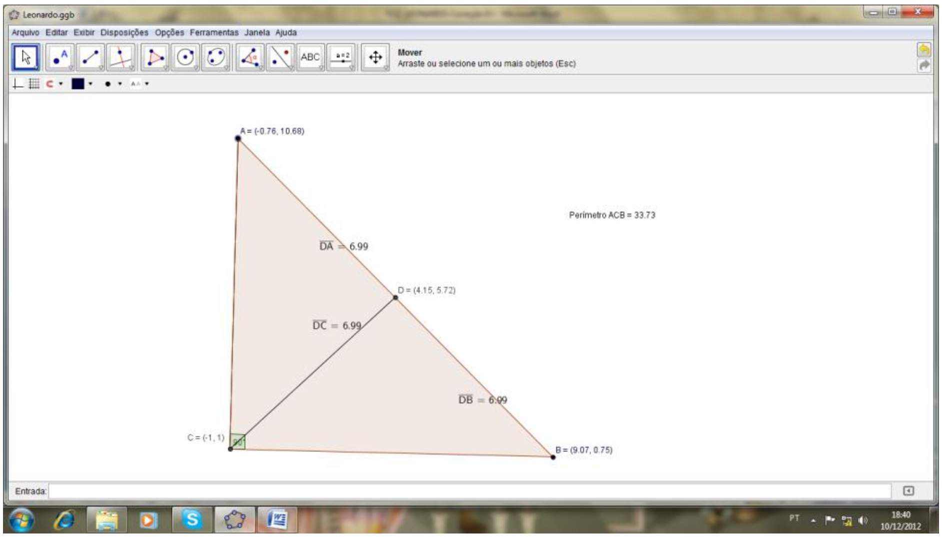


Figura 11- Exemplo 3 de triângulo retângulo

4.3 Sequência Didática: Ensinar por meio da Resolução de Problemas

Para o desenvolvimento desta sequência didática, é preciso que os alunos tenham se familiarizado com as principais ferramentas do GeoGebra, especialmente as que serão utilizadas na resolução do problema proposto. Também é necessário a apresentação da definição de distâncias entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta, bem como o conhecimento da fórmula da distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e a teorema de Pitágoras. Estamos supondo que esses conhecimentos já foram adquiridos pelos alunos.

- **Objetivos:**Aplicar o conceito de distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento no GeoGebra e perceber a relação de equidistância entre o ponto médio da hipotenusa e os vértices de um triângulo retângulo.
- **Conteúdo(s):** Ponto médio de um segmento de reta, distância entre pontos; propriedades do triângulo retângulo.
- **Indicação:**3º Ano do Ensino Médio
- **Tempo estimado:**Duas aulas de 50 minutos
- **Material necessário:**Um computador para cada aluno com o GeoGebra instalado e um roteiro com os problemas propostos. Data-show para projetar as construções realizadas pelo professor.
- **Desenvolvimento:**

Iniciaremos a aula apresentando o seguinte problema aos alunos:

*Problema:*A figura mostra um triângulo ABC. Seja **D**o ponto médio da hipotenusa BC. Prove analiticamente que o ponto **D** é equidistante dos três vértices do triângulo.

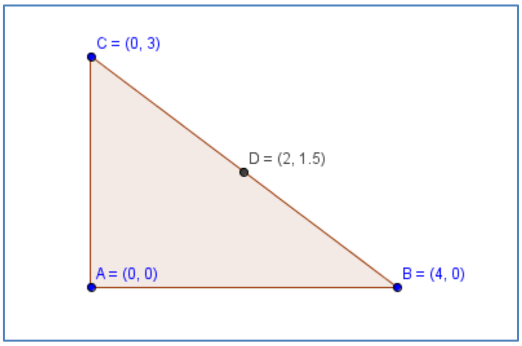


Figura 12 – Triângulo do Problema

Conduziremos a aula de acordo com o encaminhamento sugerido por Polya. Dessa forma, nas etapas a seguir, explicamos como ocorrerá em sala de aula cada uma delas na busca de resolver o problema usando o GeoGebra.

Compreensão do problema: Podemos iniciar a discussão em sala apresentando o problema e perguntando se eles sabem o que signifcam pontos equidistantes. Não daremos a resposta e caso não saibam, eles serão instigados a descobrir durante a atividade proposta no Geogebra.

Neste momento pedimos que os alunos construam no GeoGeebra os pontos **A = (0, 0), B = (4, 0) e C = (0, 3) e**m seguida, perguntamos se os pontos formam os vértices de um triângulo. Podemos ainda seguir com as perguntas abaixo:

a. Qual a principal característica deste triângulo?
b. Quais as medidas da hipotenusa e dos catetos do triângulo desenhado?

Por fim, podemos pedir que eles confirmem suas respostas pedindo que o GeoGebra indique essas medidas e verifiquem se o triângulo desenhado é o mesmo do problema.

Elaboração do Plano: Neste momento, podemos perguntar aos alunos o que é preciso saber sobre o ponto D e se, segundo, o enunciado ele tem alguma característica importante. Na verdade, D é o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$. A partir de então podemos construir com a turma caminhos para se chegar ao fato de que D é equidistante de A, B e C. Eles poderão apresentar repostas para as seguintes perguntas usando o GeoGebra:

a. Quais seriam as coordenadas do ponto D?
c. Peça que o GeoGebra exiba as coordenadas do ponto D.
d. Como saber se o GoeGebra deu a resposta correta?

Verifique no GeoGebra que D é *equidistante* dos três vértices do triângulo analisando as distâncias: D para C; D para B e D para A.O que dizer dessas medidas?Qual o significado da palavra *equidistante*?

Execução do Plano: Neste momento, pediremos que os alunos calculem analiticamente as distâncias. Eles usarão seus conhecimentos matemáticos para calcular distâncias entre pontos e encontrar as coordenadas do ponto médio D.

Verificação do Plano: Os alunos deverão comparar se as suas resposta com as respostas exibida pelo GeoGebra. Os alunos podem ainda obter a partir da construção diferentes triângulos retângulos e verificar para alguns casos que a propridade expressa no problema vale para todo triângulo retângulo.

- **Avaliação:** A avaliação será feita de forma contínua através da observação da estratégia de cada aluno, os caminhos traçados por diferentes alunos na busca da solução do problema e o envolvimento na atividade proposta. Deveremos perceber se eles utilizaram os procedimentos corretamente no GeoGebra e se responderam às perguntas através dos cálculos solicitados. Observando se foi possível intuir que a generalização da propriedade: um triângulo retângulo, o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices acontece.

- **Referências:**DANTE. Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. Vol.3. 1ª ed. São Paulo; Ática 2010, p 56.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia da Resolução de Problemas é fundamental para o ensino e aprendizagem de Matemática, pois possibilita que o aluno desenvolva o seu conhecimento a partir da busca pelas soluções dos problemas. Dessa maneira o aluno desenvolve sua capacidade cognitiva, podendo aplicar os conhecimentos adquiridos no seu dia a dia. O ensino por meio da Resolução de Problemas possibilita que o aluno tenha um aprendizado mais dinâmico tornando esse processo mais prazeroso.

O GeoGebra pode servir como um importante instrumento de auxílio no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois possibilita que o aluno crie figuras de maneira prática e ao mesmo tempo visualize na tela do computador sua construção. O aluno também pode manipular essa figura, observando quais mudanças podem ocorrer quando essa figura muda de posição. Outra importante vantagem que esse software pode trazer é a diminuição do tempo de construção das figuras e a perfeição nas medidas.

Para utilizar o livro didático junto com o GeoGebra, mesmo que sejam problemas interessantes, é necessário fazer algumas adaptações para que as potencialidades do software sejam bem exploradas no processo de ensino e aprendizagem.Percebemos com essa pesquisa que nem todo problema trazido no livro didático fica interessante no GeoGebra, às vezes é preciso fazer algumas adaptações, descentralizando o excesso de informações que pode estar contida em um só problema matemático, estimulando a heurística de Polya nos alunos para que eles solucionem o problema. A adaptação que fizemos do problema foi feita de maneira cuidadosa de forma que fosse possível despertar no aluno o senso investigativo, para que dessa maneira o mesmo possam desenvolver seu conhecimento de forma dinâmica e posa encontrar, através de diferentes caminhos a solução correta para o problema proposto.

O professor deve conhecer o software para que possa explorar toda a sua potencialidade, e ter cuidado para não apenas copiar o livro didático e sim tomá-lo como base para a elaboração da sua sequencia didática, adaptando os problemas para que os mesmos possam ser trabalhado no GeoGebra de forma que o aluno possa ser estimulado a desenvolver o seu conhecimento a partir de busca por soluções. O professor deve explorar os conhecimentos prévios de cada aluno e ter consciência de que é importante também que os alunos saibam utilizar o GeoGebra e cada ferramenta que precisará utilizar para solucionar as questões propostas.

A pesquisa nos estimulou a aplicar a sequência didática em uma sala, e fazer possíveis adaptações para que outros conteúdos possam ser explorados da mesma forma. Com a pesquisa percebemos que o GeoGebra é uma ferramenta muito eficaz no ensino da Matemática e, quando é trabalhado junto com a resolução de problemas de forma planejada, pode contribuir ainda mais para que o processo de ensino e aprendizagem se dê por completo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+; Brasília,MEC/SEB, 2002

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares Para o Ensino Médio; Volume 2: Matemática e Suas Tecnologias. Brasília,MEC/SEB, 2006

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de matemática.* 2. ed. São Paulo: Ática, 2000.

DANTE. Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. Vol.3. 1ª ed. São Paulo; Ática 2010

PAIVA, Jussara Patrícia Andrade Alves. *Tópicos Especiais em Matemática III.* In: Edmundo Marinho do Monte. (Org.). Licenciatura em Matemática a Distância. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2010, p. 119-159.

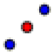
RÊGO, Rogéria Gaudencio. *Tópicos Especiais em Matemática IV.* In: Edmundo Marinho do Monte. (Org.). Licenciatura em Matemática a Distância. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2010, p. 249-286.

BARROSO. Juliane Matsubara Conexões com a Matemática. 1 ed. São Paulo: Editora Moderna.2011.

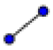
ASSIS, Cibelle de Fátima Castro de; BEZERRA, Maria da Conceição Alves. *Softwares educativos nas aulas de Geometria.* In: ANGELO, Cristiane Borges et al. Tecnologias para Ensinar Matemática. Reflexões e atividades para o Ensino Fundamental. João Pessoa, Editora Universitária UFPB, 2010, p. 85-120.

APÊNDICE

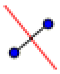
**Novo ponto**. Para criá-lo você precisa clicar primeiro no ícone, e depois na parte geométrica. O ponto será carregado na tela enquanto o botão do mouse não for solto, só depois disso é que o ponto será criado efetivamente. Durante o movimento, as coordenadas aparecem na parte algébrica, se ela estiver ativada.

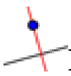
**Ponto médio ou centro.**Para utilizar esta ferramenta, clique em:

- dois pontos para encontrar o ponto médio;
- em um segmento para encontrar seu ponto médio;
- em uma secção cônica para obter seu centro.

**Segmento definido por dois pontos.** Dois pontos marcados determinam as extremidades de um segmento, observe que na janela algébrica aparece sua medida.

Distância. Essa ferramenta fornece, na janela algébrica a distância entre dois pontos; duas linhas ou entre um ponto e uma linha. As demais ferramentas que não estão relacionadas aqui são de fácil acesso e ao decorrer da utilização do programa entende-se rapidamente como manipulá-las, portanto partimos agora para as atividades.

**Mediatriz.** A partir de um segmento, clica-se nele e na ferramenta e ela vai criar uma perpendicular pelo ponto médio.

**Reta perpendicular.**Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma perpendicular à reta passando por tal ponto. Isso vale para segmento e semi-reta também.