



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

**GERALDO HERBETET DE LACERDA**

**O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO  
TIPO QUEBRA-CABEÇAS COM PALITOS DE FÓSFORO.**

**JOÃO PESSOA – PB**

**2011**

**GERALDO HERBETET DE LACERDA**

**O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO  
TIPO QUEBRA-CABEÇAS COM PALITOS DE FÓSFORO.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação-PPGE, do Centro de Educação da Universidade Federal da Paraíba - CE/UFPB, como requisito para a obtenção do título de mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Jusselino Filho.

Linha de Pesquisa: Processos de Ensino e Aprendizagem

**JOÃO PESSOA – PB**

**2011**

L131 Lacerda, Geraldo Herbert de

O ensino de geometria plana pela resolução de problemas do tipo quebra-cabeças com palitos de fósforo / Geraldo Herbert de Lacerda. - João Pessoa, 2011.

76 f.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Jusselino Filho

Dissertação (Mestrado em Educação) Centro de Educação /UFPB – João Pessoa/PB

1. Ensino de geometria 2. Modelo van Hiele. 3. Ensino de polígonos 4. Educação

IFPB/BC  
371.38:514.112

CDU

Maria de Lourdes Cardoso  
CRB/15-153

**GERALDO HERBETET DE LACERDA**

**O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO TIPO QUEBRA-CABEÇAS COM PALITOS DE FÓSFORO.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação – PPGE, do Centro de Educação da Universidade Federal da Paraíba - CE/UFPB, como requisito para a obtenção do título de mestre em Educação.

Aprovada em 06/05/2011

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Pedro Jusselino Filho – PPGE/UFPB  
Orientador

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo – PPGE/UFPB  
Co-orientadora

---

Prof. Dr. José Antônio Novaes da Silva – PPGCR/UFPB  
Examinador

**DEDICATÓRIA:**

*Este trabalho foi feito  
Por mãos e mentes diversas  
Teve o tempo a seu favor  
Apesar de controvérsias  
Ao Senhor Deus eu o dedico  
Pois sem Ele não há festas.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que sem o seu imenso apoio e auxílio tudo isso não seria possível.

Agradeço ao professor Dr. Pedro Jusselino Filho, pelo trabalho de orientação.

À Professora Co-orientadora Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo, pelo apoio e incentivo recebido; pelas valiosas contribuições nas suas sugestões no exame de qualificação e pela disponibilidade em participar da banca examinadora.

Ao Professor Dr. José Antônio Novaes da Silva por participar da Banca Examinadora para a Qualificação e agora na Defesa, fazendo críticas construtivas e, com isso, contribuindo para a concretização deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal da Paraíba, especialmente à professora Dra. Sônia de Almeida Pimenta e ao professor Dr. Charlinton José dos Santos Machado pelo apoio.

As Professoras da UFCG - Campus Cajazeiras, a Mestra Elvira Alves Teixeira e a Mestra Aissa Romina Silva do Nascimento, pelo incentivo durante todo esse trabalho.

Às professoras do IFPB, à Mestra Francineide Fernandes de Lucena e à Mestra Maria José Araújo, pelas diversas contribuições dadas neste trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Paraíba - IFPB - Campus Cajazeiras, pelo apoio e estímulo dos seus gestores para a conclusão deste trabalho.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação.

Aos meus pais, Francisco Furtado de Lacerda e Maria Suely Dias de Lacerda, meus irmãos e irmãs, sobrinhos e sobrinhas, cunhados e todos aqueles que compartilharam comigo.

A Deusany Júnior pelo cuidado ao fazer a revisão de Português.

E por último, mas não menos importante, quero agradecer à minha companheira Elisabete, que sempre me apoiou e me incentivou a nunca desistir e sempre seguir em frente.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 –</b>	Hierarquia de níveis de pensamento do Modelo van Hiele.....	32
<b>Figura 2 –</b>	Formação de triângulos com palitos de fósforo. <i>Desafio</i>	52
<b>Figura 3 –</b>	Construção de polígonos com palitos de fósforo. ....	53
<b>Figura 4 –</b>	Situação-problema envolvendo palitos. ( <i>Raciocínio lógico</i> )....	54
<b>Figura 5 –</b>	Explorando área a partir de figuras com palitos. ( <i>Divertir-se</i> ) ..	55
<b>Figura 6 –</b>	<i>Desafio</i> com palitos de fósforo explorando área .....	55
<b>Figura 7 –</b>	Construção de triângulos equiláteros. ( <i>Divertir-se</i> ) .....	57
<b>Figura 8 –</b>	Atividade integrada especial: formar triângulos. ( <i>Desafio</i> ) ....	57
<b>Figura 9 –</b>	Atividade integrada: formar triângulos equiláteros .....	59
<b>Figura 10 –</b>	Explorando a resolução de problemas .....	60
<b>Figura 11 –</b>	<i>Desafio</i> com palitos de fósforo para formar um paralelogramo	61
<b>Figura 12 –</b>	Problema 01 .....	62
<b>Figura 13 –</b>	Problema 02 .....	62
<b>Figura 14 –</b>	Problema 03 .....	63
<b>Figura 15 –</b>	Problema 04 .....	63
<b>Figura 16 –</b>	Problema 05 .....	64

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1 –</b>	Médias de Proficiência em Matemática .....	15
<b>Quadro 2 –</b>	Conteúdos de Geometria Plana da Coleção 1 .....	46
<b>Quadro 3 –</b>	Conteúdos de Geometria Plana da Coleção 2 .....	48

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

IFPB – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

IMUK – Internationale Mathematische Unterrichtskommission

LDB – Lei de Diretrizes e base da Educação Nacional

LMD – Listas Mínimas de Definição

MEC – Ministério da Educação

MMM – Movimento da Matemática Moderna

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PDE – Plano de Desenvolvimento da Educação

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

“O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e colocar em jogo as habilidades investidas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.”  
George Pólya.

## RESUMO

O presente trabalho de investigação compreende o resultado de um processo que teve início como uma reflexão pessoal acerca de um tipo específico de atividade didática que desenvolvemos em sala de aula, permitindo-nos ampliar nossa compreensão sobre o tema em tela e colaborar com elementos que podem ser explorados em processos de formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica. Tendo como foco o ensino de Geometria Plana e, mais especificamente, explorando conteúdos relativos ao estudo de polígonos, como a classificação, relação entre propriedades, determinação de perímetro e área, tomamos como principal referencial teórico o Modelo van Hiele, que compreende o estabelecimento de diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno, centrando-nos nos três primeiros (Níveis 0, 1 e 2), conectando a ação com materiais manipulativos para o ensino de Geometria à Resolução de Problemas. Como fonte de reflexão para análise, tomamos como base a proposição de um tipo particular de quebras-cabeças, com palitos de fósforo, em livros didáticos de Matemática direcionados a alunos do 6º ao 9º Anos do Ensino Fundamental. Compreendemos que o domínio de propostas teóricas como a aqui destacada para o ensino de Geometria, permite ao professor realizar um melhor planejamento de suas ações para a sala de aula, assim como explorar de forma mais adequada as potencialidades e limitações de instrumentos diversos, a exemplo do livro didático, que fazem parte do cotidiano escolar. Concluímos que mesmo atividades que podem, à primeira vista, parecer limitadas ou tradicionais, podem ser melhoradas considerando-se referências de pesquisas realizadas em um determinado campo de investigação, tomando-as como ponto de partida para a modificação da realidade formativa atual de nosso aluno.

**PALAVRAS-CHAVE:** ensino de geometria; Modelo van Hiele; ensino de polígonos.

## **ABSTRACT**

This research comprises the result of a process that had beginning as a personal reflection about a specific type of teaching activity that we had developed in the classroom, allowing us to expand our understanding of this topic and work with elements that can be explored in the process of initial and continuing training of teachers of Mathematics. Focusing on the teaching of plane geometry and more specifically exploring relative contents to the study of polygons such as classification, relation between properties, determination of perimeter and area, we take the van Hiele model as the main theoretical reference, which includes establishing different levels of development in student's geometric thoughts, focusing on the first three (Levels 0, 1 and 2), connecting the action with manipulative materials for teaching geometry and solve problems. As a source of reflection for analysis, we take as the basic proposition a particular type of puzzles with matchsticks in Mathematics textbooks aimed at students from 6 to 9 Years of Elementary Education. We understand that the field of theoretical proposals as highlighted here for the teaching of geometry allows a teacher to do a better plan their actions to the classroom as well as more adequately explore the potential and limitations of various instruments, such textbooks, which are part of everyday school life. We concluded that even activities that may at first seem limited or traditional, can be improved considering references to research in a particular field of research, using them as a starting point for modifying the current reality of our formative student.

**KEY-WORDS:** teaching of Geometry; van Hiele Model; teaching of polygons.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>14</b>
<b>UMA BREVE APRESENTAÇÃO DE NOSSO TEMA DE PESQUISA.</b> .....	<b>14</b>
1.1 NOSSO TEMA E OBJETIVOS.....	14
1.2 NOSSA METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO .....	17
1.3 A ESTRUTURA DE NOSSO TRABALHO .....	18
<b>CAPÍTULO 2 REFERENCIAL TEÓRICO ADOTADO</b> .....	<b>19</b>
2.1 BREVE HISTÓRICO ACERCA DO ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL .....	19
2.1.1 <i>O período que vai da criação do Colégio Pedro II até a         implantação da Reforma Francisco Campos (1931)</i> .....	19
2.1.2 <i>Do Movimento da Matemática Moderna aos PCNs de         Matemática.</i> .....	23
2.2 A TEORIA PROPOSTA PELO CASAL VAN HIELE. ....	28
2.2.1 <i>Os níveis de pensamento geométrico dos Van Hiele</i> .....	28
2.2.2 <i>Características dos níveis da teoria dos van Hiele</i> .....	33
2.3 O MODELO VAN HIELE E O ENSINO DE GEOMETRIA BASEADO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	34
2.3.1 <i>A resolução de problemas como estratégia de ensino.</i> .....	34
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>40</b>
<b>APRESENTAÇÃO, DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS DA PESQUISA</b> ..	<b>40</b>
3.1 APRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA ETAPA DE NOSSO ESTUDO .....	40
3.1.1 <i>Apresentação e discussão dos resultados da pesquisa.</i> .....	42
3.2 ANÁLISE DE CONTEÚDOS DE GEOMETRIA PLANA NOS LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADOS PARA PESQUISA. ....	45
3.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O TRABALHO DIDÁTICO ENVOLVENDO QUEBRA-CABEÇAS COM PALITOS DE FÓSFORO .....	65
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>74</b>

## CAPÍTULO 1 - UMA BREVE APRESENTAÇÃO DE NOSSO TEMA DE PESQUISA.

*“A razão principal de se estudar Matemática é para aprender como se resolvem problemas.”*  
Lester Jr.

### 1.1 NOSSO TEMA E OBJETIVOS.

Desde que começaram a ocorrer grandes projetos de reestruturação de ensino na área de Matemática, a exemplo da reforma americana realizada na década de 1980 e explicitada na “Agenda para Ação” (Brasil, 1998 – PCN Matemática 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries), que a Resolução de Problemas vem sendo posta como um dos principais objetivos da formação matemática de nossos estudantes.

Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas desde então, inclusive no Brasil, mas seus resultados ainda encontram-se distantes das salas de aula. É fácil constatar no dia-a-dia de nossas escolas e pelos resultados obtidos por nossos alunos da Educação Básica em avaliações nacionais de Matemática - a exemplo da Prova Brasil e ENEM, todos executados com ênfase na Resolução de Problemas - que o ensino dessa disciplina, qualquer que seja o nível de escolaridade que considerarmos, não atende às demandas mínimas de formação.

As avaliações são baseadas em Matrizes de Referências elaboradas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), do Ministério da Educação (MEC) e “traduzem a associação entre os conteúdos praticados nas escolas brasileiras do ensino fundamental e médio, as competências cognitivas e as habilidades utilizadas pelos alunos no processo da construção do conhecimento”, (<http://www.inep.gov.br/basica/saeb/matrizes.htm>). Como está explicitado no sítio daquele Instituto, responsável pela aplicação de testes do sistema SAEB,

[a]o contrário da simples reprodução de procedimentos e do acúmulo de informações, a matriz de referência que norteia as provas de Matemática do Saeb e da Prova Brasil está estruturada sobre o FOCO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. A resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos, além de estimular formas de raciocínio como intuição, indução, dedução e

estimativa. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

O documento “SAEB – 2005 - PRIMEIROS RESULTADOS: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada”, disponível no sítio do INEP, traz os resultados de uma série histórica do SAEB, compreendida entre os anos de 1995 a 2005, nas áreas de Linguagem e Matemática. No Quadro 1, estão presentes os dados das médias de Proficiência em Matemática, dos alunos avaliados no período.

Quadro 1– Médias de Proficiência em Matemática.

Série	1995	1997	1999	2001	2003	2005
4ª Série do E.F.	190,6	190,8	181,0	176,3	177,1	182,4
8ª Série do E.F.	253,2	250,0	246,4	243,4	245,0	239,5
3ª Série do E.M.	281,9	288,7	280,3	276,7	278,7	271,3

Fonte: INEP/MEC

De acordo com as informações disponibilizadas no sítio do INEP, a escala de proficiência utilizada no sistema de avaliações, varia entre 0 e 500, sendo ela interpretada de forma específica, de acordo com a disciplina considerada. Observa-se, com base nos dados do Quadro 1, que o desempenho dos estudantes tem diminuído ao longo da série temporal considerada, nas três séries avaliadas (4ª e 8ª do Ensino Fundamental e 3ª do Ensino Médio, correspondentes hoje ao 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e ao 3º Ano do Ensino Médio, respectivamente).

Em Matemática, a média **239,38** (média nacional para a 8ª série da rede urbana) indica que o estudante consegue, entre outras ações, localizar dados em tabelas mais complexas, identificar gráfico de colunas correspondentes a números positivos e negativos, converter medidas de peso e calcular o perímetro e área de figuras. Alunos com essa média também têm desenvolvidas as capacidades descritas em níveis mais baixos da escala do Saeb, como a de calcular resultados de subtrações complexas, ler horas em relógios de ponteiros e digital, estimar medida de comprimento usando unidades não-convencionais e reconhecer a decomposição em dezenas e unidades de números naturais.

(BRASIL, [http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news07\\_01.htm](http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news07_01.htm)).

Como podemos observar, pelos dados presentes no Quadro 1, em 2005 os alunos obtiveram resultados abaixo dos obtidos no ano de 1995, o que indica que há muito a ser melhorado, quanto à capacidade de nossos estudantes resolverem problemas matemáticos.

Para Van de Walle (2009, p. 57), a resolução de problemas é “um veículo poderoso e eficaz para a aprendizagem”, defendendo o ensino de Matemática pela Resolução de Problemas, e concordando com a defesa feita nos Parâmetros Nacionais Curriculares de Matemática (6º a 9º Anos), que “indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática”. Tais elementos serão tratados com mais detalhes no Capítulo seguinte.

A prática da Resolução de Problemas é defendida como estratégia de ensino para todos os conteúdos de Matemática, nos diferentes níveis de escolaridade da Educação Básica, mas dedicamos nossa atenção à Geometria, pelas razões que serão explicitadas no Capítulo 2 de nosso trabalho. Em particular, optamos por discutir elementos relacionados ao ensino de conteúdos da Geometria Plana, analisando-os na perspectiva da proposta apresentada em coleções de livros didáticos dirigidas à Matemática do Ensino Fundamental: *Tudo é Matemática: Luiz Roberto Dante (Editora Ática, 2008)* e *Matemática – Projeto Araribá (Editora Moderna, 2008)*, tendo como referência teórica central, o Modelo dos Van Hiele e autores que discutem a Resolução de Problemas. As duas coleções foram adotadas pela maioria das escolas públicas da 9ª Gerência Regional de Educação do Estado da Paraíba, com sede em Cajazeiras, no triênio 2008-2010, e foram avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD do Ministério da Educação – MEC em 2008.

Ainda com foco na Resolução de Problemas voltados para a exploração do campo da Geometria Plana, apresentamos e analisamos um conjunto de quebra-cabeças, tendo como fonte de respaldo o mesmo referencial teórico. Nosso objetivo central, com essas duas ações, é ampliar a compreensão acerca do tema em tela, e trazer elementos que possam contribuir para que atividades de mesma natureza alcancem nossas salas de aula e contribuam para a melhoria do ensino de Matemática.

Como objetivos específicos de nossa investigação, propomo-nos a:

- Identificar estratégias de resolução de problemas sugeridas nas coleções analisadas, relacionando-as com os níveis propostos no Modelo Van Hiele, em relação ao conteúdo de Geometria Plana;
- Apresentar e identificar potencialidades e limitações do uso de quebra-cabeças específicos (com palitos de fósforo) no ensino de Geometria Plana no Ensino Fundamental.

Nosso interesse em pesquisar atividades baseadas na Resolução de Problemas partiu da experiência que acumulamos como docentes da disciplina de Matemática, especificamente ao abordar o conteúdo de Geometria Plana, quando constatamos que os alunos apresentavam muitas dificuldades quando o tema era abordado de maneira apenas teórico/expositiva.

## 1.2 NOSSA METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO.

Para realizarmos nossa investigação, em razão dos objetivos que delimitamos e do referencial adotado, optamos por uma pesquisa de âmbito qualitativo, de acordo com as características básicas que configuram esse tipo de estudo, presentes na descrição apresentada por Bogdan e Biklen (1982).

- (1) A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.
  - (2) Os dados coletados são predominantemente descritivos.
  - (3) A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.
  - (4) O “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.
  - (5) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.
- (BOGDAN e BIKLEN, 1982, *apud* LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D., 1986, p. 11-13)

Para a análise dos livros didáticos adotamos como procedimento central a análise de conteúdos, considerando como focos: a Resolução de Problemas e o Ensino de Geometria Plana. Para a reflexão acerca dos quebra-cabeças apresentados, optamos por elementos de um estudo próximo do exploratório, apontando as potencialidades de um conjunto de desafios, que podem ser

trabalhados nas aulas de Matemática dirigidas a alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

### 1.3 A ESTRUTURA DE NOSSO TRABALHO.

O presente texto está dividido em três Capítulos, o primeiro deles faz referência ao nosso tema de investigação, situando os objetivos gerais e específicos e a metodologia adotada para a realização do mesmo; O segundo capítulo é dedicado a uma explanação acerca do Referencial Teórico que adotamos. Nele trazemos um breve recorte histórico acerca do Ensino da Geometria no Brasil, começando pelo ensino da Geometria ministrado pelos militares, no início do século passado, passando pela proposta de ensino de Geometria presente no Movimento da Matemática Moderna (MMM), até aquela apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no final dos anos 1990, e apresentamos o Modelo proposto pelo casal van Hiele.

Nele tratamos, ainda, da proposta de ensino baseada na Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, discutindo-a a partir da indicação do uso de quebra-cabeças com palitos de fósforo, que podem ser usados para trabalhar conteúdos de Geometria Plana e desenvolver os níveis do pensamento geométrico, como formulados pelos van Hiele.

O terceiro Capítulo é formado pelo corpo de nossa investigação, quando apresentamos os resultados de nossa análise dos livros didáticos selecionados e realizamos uma discussão sobre as potencialidades dos quebra-cabeças com palitos de fósforo para o trabalho com Geometria Plana no Ensino Fundamental, encerrando o texto com nossas Considerações Finais.

## **CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO ADOTADO.**

*Afinal de contas, o que é Matemática senão a solução de quebra-cabeças? E o que é Ciência senão um esforço sistemático para obter respostas cada vez melhores para os quebra-cabeças impostos pela natureza?*  
(Martin Gardner, 1967, p. 14.)

### **2.1 BREVE HISTÓRICO ACERCA DO ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL.**

#### **2.1.1 O período que vai da criação do Colégio Pedro II até a implantação da Reforma Francisco Campos (1931).**

O interesse pela história da educação e das práticas escolares brasileiras nos remete, de imediato, aos duzentos anos de existência dos colégios jesuítas, organizados pouco tempo depois da descoberta do país pelos portugueses, e que tinham como objetivo maior a formação religiosa dos povos da nova colônia portuguesa.

O ensino de matemática no Brasil, especificamente, surgiu com a necessidade de instrução dos militares portugueses aqui instalados, desde 1500, para a construção de fortificações e organização da artilharia, em razão de necessidades militares de proteção dos bens da Coroa Portuguesa. O militar português José Fernandes Pinto Alpoim, escreveu as primeiras obras do gênero, que envolviam conhecimentos elementares de Aritmética e de Geometria (VALENTE, 2008).

De acordo com Valente (2008), a contribuição de Alpoim pode ainda ser assinalada pelos extensos tratados de Aritmética, Álgebra, Geometria e Astronomia escritos por ele, e que representaram etapas importantes de difusão do conhecimento matemático, ao longo da história, pois os textos possuíam muitas qualidades pedagógicas (TATON, apud VALENTE, 1999).

Com a Independência do Brasil, em 1822, a elite brasileira investiu na criação de suas primeiras universidades, com a criação de Cursos Jurídicos. Apoiadas pelos militares, um dos pontos defendidos era a necessidade de incluir, entre outros conteúdos, exames de Geometria para o ingresso de estudantes nesses cursos (VALENTE, 2008).

A partir da introdução da Geometria como um dos exames para ingresso nos cursos jurídicos, os conteúdos matemáticos ganharam *status*. “Inicialmente considerados como conteúdos de caráter técnico-instrumental, servindo prioritariamente ao comércio e à formação militar, os conteúdos matemáticos, por meio da geometria, ascendem à categoria de saber de cultura geral” (VALENTE, 2008, p.15).

Segundo Valente (1999), por volta de 1830 começaram a surgir as primeiras obras didáticas matemáticas nacionais, escritas pelo Marquês de Paranaguá, Francisco Vilela Barbosa, Francisco de Paula Leal e Cristiano Benedito Ottoni, esse último considerado fundamental para a estruturação da matemática escolar no Brasil, durante quase meio século. Tais obras representaram uma espécie de atualização, no Brasil, daquilo que estava sendo produzido na França.

Uma nova leva de livros didáticos surgiu em uma etapa seguinte, visando a substituição do curso organizado por Ottoni. A partir de então, foram disseminados muitos textos matemáticos, escritos sob a influência da escola positivista, que defendia uma forma particular de organização e escrita para a matemática escolar, demonstrando preocupação com a forma didática de apresentação da mesma.

Com a criação do Colégio Pedro II, em 1837, o país envidou esforços na direção de introduzir um referencial de cultura para a formação geral do brasileiro culto, o bacharelado, passando a ser esse grau de escolaridade exigido para ingresso nos cursos superiores, que os qualificava como *doutores*. Os exames das disciplinas, dentre eles o de Geometria, eram parcelados e o ingresso nas faculdades se dava por acúmulo de aprovações em cada um deles.

Outro ponto que podemos destacar como fator importante nessa discussão seria a respeito dos grandes movimentos acontecidos dentro da Matemática e que resultaram na construção de algumas reformas que ocorreram no ensino brasileiro e em especial no ensino de Matemática.

A Reforma Francisco Campos representou uma das mais importantes tentativas de organização do sistema educacional brasileiro. Através de seu conjunto de decretos ficaram sistematizados diferentes graus e etapas de ensino, dentre eles, o Ensino Secundário, nível intermediário entre o antigo primário, e o Ensino Superior.

A reforma, comandada pelo então Ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos, era baseada em ideais escolanovistas e teve como característica mais

marcante o autoritarismo, em razão de sua imposição em âmbito nacional, em termos de legislação. O país vivia, naquele momento, o desfecho do golpe de estado comandado por Getúlio Vargas.

Na definição dos programas de Matemática e suas instruções pedagógicas, a Reforma Francisco Campos apropriou-se das inovações que vinham sendo implementadas desde 1929 no Colégio Pedro II, tendo como protagonista o professor Euclides Roxo. Graças aos esforços de Euclides Roxo na Reforma Francisco Campos fundem-se as disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria, que possuíam programas, livros didáticos e professores específicos, em uma disciplina única que passava a ser denominada de Matemática.

Ainda na primeira metade do século XX, destacavam as divergências sobre as possíveis mudanças na educação que atingiriam diretamente o ensino da Matemática. Aqui, ressaltamos os nomes de dois professores na defesa de um ensino que objetivava, segundo eles, beneficiar a sociedade como um todo: Júlio César de Mello e Souza e Euclides Roxo (VALENTE, 2004).

Júlio César de Mello e Souza (1895-1974) foi professor do Colégio Pedro II e um crítico severo da maneira como era trabalhada a Matemática na primeira metade do século XX. Para contrapor o ensino de sua época recorreu à História da Matemática como recurso didático, explorou as atividades lúdicas e defendeu um ensino baseado na Resolução de Problemas. Passou a ser mais conhecido, posteriormente, pelo nome de Malba Tahan, pseudônimo que usava ao escrever livros paradidáticos contendo inúmeros desafios e curiosidades matemáticas, com o objetivo de divulgar e popularizar os conhecimentos dessa ciência.

A ideia de fusão da Álgebra, Aritmética e Geometria, em apenas uma disciplina estava integralmente inserida nos ideias de reforma defendida pelo *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK). Para os reformadores, como Euclides Roxo, “[...] o ensino de Matemática se encontrava fragmentado pelos três ramos e sua unificação era fundamental para reestruturação da educação matemática no curso secundário” (ROCHA, 2001, p. 32).

As principais influências sofridas por Euclides Roxo originaram-se do matemático alemão Christian Felix Klein (1849-1925), em relação às ideias por ele defendidas, e de Ernst Breslich, na elaboração de textos de acordo com as novas diretrizes. Euclides Roxo aproveitou a posição que ocupava na esfera administrativa educacional do país, a qual lhe proporcionava condições de por em prática suas

ideias, e implementou integralmente, sem discussões prévias, as inovações defendidas por Felix Klein, que havia tentado o mesmo na Alemanha (SCHUBRING, 1999, pág. 473).

Euclides Roxo, na época diretor do Colégio Pedro II, aproveitando-se da importância de seu cargo, conseguiu estender a todo o país as inovações que vinha implantando gradualmente naquele colégio e defendendo-as por meio de artigos publicados na imprensa. As ideias de Euclides Roxo diziam respeito basicamente à fusão dos diferentes ramos da Matemática, mas ele defendia também a reestruturação de todo o currículo do ensino secundário em torno do conceito de função, e à introdução de noções de cálculo diferencial e integral para todos os alunos daquele nível de escolaridade.

As inovações propostas para o ensino de Matemática foram alvo de críticas, principalmente por parte de Joaquim de Almeida Lisboa, que as via como uma queda no nível do ensino dessa disciplina. Segundo ele, se o ensino dos conteúdos matemáticos já não era bom, com a aplicação dessas novas orientações ele deixaria de existir.

Com a criação da nova disciplina, que ocuparia os quatro primeiros anos do curso secundário e o sexto ano, como curso complementar, o conteúdo programático incluiria, desde o ano inicial, itens correspondentes à Geometria, Álgebra e Aritmética. Com a intenção de implementar as mudanças de forma gradual no Colégio Pedro II, em 1929, Euclides Roxo apresentou apenas o novo programa para o primeiro ano, partindo de um planejamento elaborado por ele mesmo, dando prosseguimento às novas orientações para o segundo ano, em 1930, e assim sucessivamente. Segundo Rocha (2001, p.37) citado por Alvarez (2004, p. 6) é importante salientar que:

Já em 1930, houve alterações no programa da primeira série em relação ao de 1929. Isso reforça a intenção da mudança gradativa e, mais do que isso, o propósito de ir se fazendo ajustes à medida em que os programas iam sendo colocados em prática, possibilitando, inclusive, críticas e sugestões por parte dos professores envolvidos. Observa-se que os conteúdos continuaram praticamente os mesmos, havendo apenas uma troca em sua sequência na matéria, e que os itens ficaram menos detalhados.

Contudo, as grandes modificações do ensino de Matemática não estavam resumidas na organização de seu conteúdo programático. As mudanças estavam baseadas também em novas orientações pedagógicas, na forma de instruções, que explicavam como os conteúdos deveriam ser ensinados. Tanto em 1929 como em 1930, foram apresentadas instruções para execução dos programas propostos.

A reforma Francisco Campos e, mais tarde, a reforma conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM), nas décadas de 1960 e 1970, modificaram a disciplina Matemática, de forma tão profunda, que ainda hoje sentimos os efeitos dessas mudanças.

### **2.1.2 Do Movimento da Matemática Moderna aos PCNs de Matemática.**

Com o Movimento da Matemática Moderna implementado em praticamente todo o mundo nos anos de 1960, o ensino de Matemática passou a se basear na formalidade e no rigor dos fundamentos da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra. A Geometria, segundo essa nova orientação, deixava de ter um caráter intuitivo e prático e passava a ser trabalhada em um nível elevado de abstração, em uma linguagem repleta de simbolismo e regras, com ênfase na Geometria das Transformações, de cunho algébrico.

Antevendo os problemas que daí viriam, os autores de livros didáticos de Matemática, começaram a apresentar uma organização na qual os capítulos dedicados ao ensino de Geometria eram condensados no final de cada volume e, conseqüentemente, trabalhados apenas no final do ano letivo, quando havia tempo na programação escolar para isso. Como afirma Van de Walle (2009, p. 438),

Muitos professores não se sentiam à vontade com a geometria, associando-a com o ensino médio (EM), provas e demonstrações. A geometria também não era considerada importante porque era muito pouco visada nos testes padronizados americanos.

O propósito do Movimento da Matemática Moderna era dar um novo sentido à Matemática, que durante muito tempo fundamentou-se na estrutura formal da geometria euclidiana, baseada na demonstração de teoremas. Porém, o Movimento

não investiu em uma formação docente que possibilitasse substituir a estrutura de ensino vigente, em particular no caso da Geometria, e esse foi o ramo da Matemática que mais se prejudicou. Para Kaleff (1994, p. 20), o MMM:

[...] levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial. Desta forma, a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com conseqüências que se fazem sentir até hoje.

Durante séculos o ensino de Geometria havia se mantido segundo uma abordagem estática, por influência da obra de Euclides, e com o MMM sofreu mudanças significativas, que perduram até os dias atuais. Hoje compreende-se que o processo de ensino e aprendizagem da Geometria deve partir da intuição e progressivamente aproximar-se da dedução, direção já defendida na Reforma Francisco Campos. Segundo Pavanello (1996, p. 4), a Reforma,

Em relação ao ensino da geometria, propõe que ele se inicie pelas explorações intuitivas, a partir das quais se estabelecerão os conhecimentos indispensáveis à construção de uma sistematização, que deverá atingir a exposição formal.

De acordo com Huete e Bravo (2006, p. 23), como se concebe hoje, a forma de construção do conhecimento geométrico “relega, em parte, qualquer tentativa de se apropriar de modo mecânico de procedimentos e algoritmos para a resolução de problemas reais”.

A constatação do abandono da Geometria e o alerta em relação aos demais prejuízos que tal fato traria à formação matemática dos alunos, foram apresentados em pesquisas como a publicada por Morris Klein, professor do Instituto Courant de Ciências Matemáticas da Universidade de Nova York, no livro “O fracasso da Matemática Moderna”. A obra foi publicada em língua inglesa no ano de 1973 e no ano de 1976 foi traduzido para diversos idiomas, inclusive o português, sendo publicada no Brasil em 1976.

Nele, Klein defende que os problemas do ensino de Matemática não se resolvem com a reestruturação de currículos ou de materiais didáticos, mas com a

melhoria da formação de professores. O pesquisador alertava, à época, que um grande problema era que os formadores de professores não estavam “interessados em treinar professores de colégios”, pois “consideram que esse tipo de atividade degrada e enfraquece a qualidade de seus departamentos” (KLEIN, 1976, p. 202).

Klein denunciava que o fato da formação universitária estar voltada para a pesquisa, em geral em um nível muito distante da realidade escolar, fazia com que os formadores de professores não desejassem se afastar dos programas voltados para essa dimensão. Para ele, tais formadores não estavam preparados para isso e, na realidade, nem queriam fazê-lo. Tal constatação, feita no final da década de 1970, nos Estados Unidos, parece ecoar ainda hoje em outros países que adotaram, para seus cursos superiores, a mesma opção.

De acordo com Pavanello (1996, p. 7):

O ensino da geometria na abordagem tradicional já enfrentava grandes problemas em relação ao conhecimento do professor, aos métodos utilizados, à dificuldade em se estabelecer uma ponte entre a geometria prática indicada para a escola elementar e a abordagem axiomática introduzida no secundário.

A formação dos professores seria insuficiente para lidar com a abordagem das transformações, proposta pelo MMM, e com base na linguagem algébrica, o que levou muitos deles a deixar de ensinar Geometria sob qualquer enfoque. Pavanello destaca, ainda, que era procedente a preocupação dos professores, na década de 1980, com o abandono da Geometria e com sua necessidade de aprender esse conteúdo.

Para ela, a substituição da Geometria pela Álgebra, com ênfase nessa última, traria prejuízos à formação dos alunos, pelo fato de “privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos do pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos” (1996, p. 10). A pesquisadora lembra, citando Atiyah, matemático britânico de origem libanesa e um dos grandes nomes da Geometria do século XX, a importância de serem cultivados tanto o pensamento visual, presente na Geometria, quanto o sequencial, dominante na Álgebra, porque os dois são fundamentais para a resolução de problemas matemáticos.

A busca de resgate para o ensino da Geometria recebeu, no Brasil, o reforço dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para a Educação Básica, no final da década de 1990. Baseados em resultados de pesquisas na área de Educação Matemática realizados no Brasil e no resto do mundo, os PCN influenciaram as modificações positivas.

Com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), a Geometria, principalmente no Ensino Fundamental, recebeu atenção especial, compondo o campo denominado ESPAÇO e FORMA, no documento. Tendo como referência os Parâmetros Curriculares; as diretrizes das avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB); e do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), organizados pelo INEP/MEC, começaram a surgir modificações nos livros didáticos dirigidos à Educação Básica.

Ao tratar da “[...] trajetória das reformas e do quadro atual do ensino de Matemática”, os PCN (1998, p. 23) justificam a carência de inovações, alegando que:

[...]Tanto as propostas curriculares como os inúmeros trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa ligados a universidades e a outras instituições brasileiras são ainda bastante desconhecidos de parte considerável dos professores que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que ideias ricas e inovadoras não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente ou recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis (BRASIL, 1998, p. 24).

O estudo da Geometria é enfatizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como sendo um “campo fértil para trabalhar com situações problema” (BRASIL, 1998, p. 51), assunto costumeiramente de interesse natural dos alunos. De acordo com os PCN, a atividade com elementos geométricos favorece a “aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc” (BRASIL, 1998, p. 51). A Geometria se destaca, dentro do contexto histórico e social contemporâneo, pois esse campo de conhecimento matemático está muito presente no cotidiano e em outros ramos do conhecimento, o que facilita o trabalho com conteúdos ligados ao Espaço e a Forma, associando-os a outras disciplinas e ao dia a dia dos estudantes.

Ao analisarmos as atuais tendências didático-pedagógicas para o ensino de Geometria no Brasil, constata-se o predomínio da Geometria Experimental e da Geometria em Ambientes Computacionais. A primeira tendência caracteriza-se pelo uso de atividades de experimentação em sala de aula, por meio da manipulação de objetos concretos e de representações de elementos geométricos. De acordo com Andrade e Nacarato (2009, p. 02), ela se dá:

“[...] através de modelos; resolução de problemas; construção de conceitos pelos alunos através da produção e negociação de significados ou por meio de atividades diretivas, ou seja, construções geométricas e formas de representações do mundo, mediadas pela experimentação.”

A segunda tendência tem como principal foco o uso de ambientes computacionais e de programas e aplicativos diretamente voltados para a Geometria, a exemplo do Geogebra, do Cabri Géomètre, e outros. O Cabri Géomètre é um software que possui muitas qualidades técnicas, mas apresenta limitações para o trabalho em sala de aula, em particular de escolas da rede pública, pois só está disponível em versão para o ambiente Windows e só pode ser utilizado, como este último, com o pagamento de uma licença. O GeoGebra é uma alternativa gratuita, que pode ser adotada pelos docentes e que possui também recursos que possibilitam trabalhar com muitos elementos do conteúdo relativo ao campo do Espaço e Forma.

Nosso trabalho, em particular, está voltado para o desenvolvimento de atividades que seguem a primeira tendência apresentada, ou seja, priorizam a ação dos estudantes com material concreto. Para tal, selecionamos quebra-cabeças que podem ser propostos e resolvidos usando-se palitos de fósforo e que envolvem elementos da Geometria plana, como veremos no Capítulo 3 do presente trabalho.

No processo, buscamos orientar na direção de promover a reflexão acerca das ações realizadas, visando o desenvolvimento de conceitos e habilidades em um crescendo, como indicam as atuais tendências para o ensino de Geometria, indo de níveis menos elaborados de pensamento matemático aos mais complexos e formais. Para tal, adotamos como referência teórica central, o modelo proposto pelos van Hiele, apresentado a seguir.

## 2.2 A TEORIA PROPOSTA PELO CASAL VAN HIELE.

### 2.2.1 Os Níveis de pensamento geométrico dos van Hiele.

A Teoria ou Modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico, proposto pelo casal de educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele, ficou conhecido mundialmente como Modelo van Hiele. Ele foi proposto em 1959 mas apenas nos últimos anos sua teoria “se tornou o fator mais influente no currículo de geometria norte-americano e de diversos países” (VAN DE WALLE, 2009, p. 440).

O modelo é constituído de cinco níveis distintos de compreensão, que descrevem as características do processo de pensamento geométrico (visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor), e de cinco fases sequenciais de ensino (questionamento ou informação, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração), que favorecem a aquisição de um nível específico de pensamento de um determinado conteúdo geométrico. A teoria pode ser concebida como um guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos alunos em Geometria.

O casal van Hiele percebeu que os problemas apresentados para as crianças demandavam um vocabulário específico ou conhecimentos de propriedades que estavam, em geral, além do nível de pensamento delas. Segundo van-Hiele (1986, p. 39) apud Moraco (2006, p. 35).

Quando eu comecei minha carreira como professor de Matemática, eu logo percebi como era difícil essa profissão. Havia partes do conteúdo que eu podia explicar e explicar, e ainda assim os alunos não entendiam. Eu poderia ver que eles realmente tentavam, mas não obtinham sucesso. Especialmente, no começo da Geometria, quando coisas simples tinham que ser provadas, eu podia ver que eles faziam o máximo, mas o assunto parecia ser muito difícil.

Ou seja,

As ideias de Van Hiele (1986) sobre Geometria tiveram início com as próprias dificuldades que o autor enfrentou enquanto estudante dessa disciplina. Na época, o ensino de Geometria era basicamente formado pelos axiomas e demonstrações de teoremas que, uma vez não sendo entendidos, acabavam sendo decorados pela maioria dos estudantes (Viana, 2000, p. 37 apud MORACO, 2006, p. 35).

De acordo com Van de Walle, “nem todas as pessoas pensam sobre as ideias geométricas de mesma forma. Certamente, nós não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos”. A pesquisa do casal van Hiele “tem fornecido *insights* quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas” (VAN DE WALLE, 2009, p. 439).

O Modelo van Hiele apresenta aspectos interessantes em relação aos níveis de pensamento geométrico, sendo um deles sua hierarquia. De acordo com os dois pesquisadores, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico seguindo cinco níveis: visualização; análise; dedução informal; dedução formal e rigor. No modelo proposto, um mesmo elemento geométrico seria entendido de modo diferente, em cada um dos níveis de desenvolvimento.

Van de Walle (2009, p. 440-444) descreve os processos de pensamentos usados em contextos geométricos, para cada um dos cinco níveis, como apresentados em seguida. Vale aqui ressaltar que, dependendo da tradução feita do trabalho dos van Hiele, em alguns casos os níveis são enumerados de 0 a 4 e, em outros, de 1 a 5, mas mantendo a correspondência em termos de definição. Em nosso caso, adotamos a indicação de 0 a 4.

**Nível 0: visualização** – Neste nível, os alunos lidam com as figuras geométricas apenas com base em suas características que são perceptíveis diretamente pelos sentidos, por seu “visual”, sendo este entendido como o conjunto de características gerais das figuras, ou seja, para os alunos que se encontram no Nível 0, “é a aparência da forma que a define” (VAN DE WHALE, 2009, p. 440). Deste modo, as figuras geométricas são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física global e não por suas partes ou propriedades específicas.

Os objetos de pensamento do nível 0 são “as formas” e “o que elas parecem”. Nesse nível, os alunos reconhecem e nomeiam as figuras, baseados em suas características visuais. Por isso, “o fato de a aparência ser o fator dominante nesse nível faz com que as aparências possam prevalecer sobre as propriedades de uma forma”, (...), “os produtos de pensamento no Nível 0 são classes ou agrupamentos de formas que são “parecidas” (VAN DE WHALE, 2009, p. 440).

A orientação para a ação didática visando o desenvolvimento desse nível de compreensão do pensamento geométrico pelos alunos está no trabalho com formas

que eles possam observar, construir, juntar, separar, decompor, compor ou manipular de algum modo. O objetivo é fazer com que eles percebam como e em que as formas são diferentes ou semelhantes, organizando-as em classes, concebidas tanto concreta quanto mentalmente, e nomeando algumas dessas classes especiais (em triângulos, quadrados, retângulos, etc).

Como destaca Van de Walle (2009, p. 440), o fato de lidar com as figuras em sua totalidade, predominantemente pela forma, não significa dizer que suas propriedades não sejam consideradas nesse Nível, mas fariam parte dele “apenas de uma maneira **informal e observacional**” (grifos do autor).

**Nível 1: análise** – neste nível os alunos começam a analisar as propriedades dos elementos geométricos, o conjunto de figuras de uma dada classe e não mais vendo as figuras isoladamente. Os objetos de pensamento no nível 1 são as classes de formas, mais do que as formas individuais. Para os alunos desse nível, “os aspectos irrelevantes (Por exemplo, tamanho ou orientação) desaparecem em segundo plano. Nesse nível, os alunos começam a apreciar que uma coleção de formas é composta devido às suas propriedades”, (...) “[A]o definir uma forma, os pensadores no Nível 1 vão, provavelmente, listar as muitas propriedades de uma forma que conhecem. Os produtos de pensamento no Nível 1 são as propriedades das formas” (VAN DE WALLE, 2009, p. 441).

Van de Walle (2009) destaca que a diferença do pensamento entre os níveis 0 e 1, é que no segundo os alunos continuam a operar com objetos concretos e suas representações, mas agora percebem as figuras como representantes de uma classe e, portanto, dotadas de uma série de propriedades específicas. Sua compreensão acerca dessas propriedades é ampliada e refinada, mas já existia, ainda que de maneira informal, no nível anterior de desenvolvimento.

**Nível 2: dedução informal** – Os alunos que se encontram nesse nível conseguem estabelecer interrelações entre as propriedades de objetos geométricos, sem considerar um objeto específico, mas a classe geral à qual pertencem. Ou seja, “os objetos de pensamento no Nível 2 são as propriedades das formas” (VAN DE WALLE, 2009, p. 442).

Por exemplo, o aluno aprendeu a reconhecer quadrados e retângulos por sua forma geral, no Nível 0. No nível seguinte, identificou as propriedades que definem um quadrado e um retângulo, ou seja, que para ser um quadrado, um quadrilátero precisa ter os quatro lados e os quatro ângulos internos congruentes.

Para ser um retângulo, o quadrilátero precisa ter os quatro ângulos internos congruentes e lados opostos congruentes. Relacionando as propriedades dos quadrados e dos retângulos, um aluno, no Nível 2, é capaz de concluir que se a figura é um quadrado, então ela também é um retângulo, mas o oposto nem sempre é válido, ou seja, nem todo retângulo é um quadrado.

Como destaca Van de Walle, “a marca de qualidade das atividades do Nível 2 é a inclusão do raciocínio lógico informal”, com estrutura do tipo “se - então” (VAN DE WALLE, 2009, p. 442). De acordo com esse autor, o aluno deve ser incentivado, para desenvolver esse nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, a levantar hipóteses, a estabelecer conjecturas e fazer conexões.

**Nível 3: dedução** – nesse nível, os alunos compreendem a dedução como uma forma de estabelecer uma teoria geométrica, no contexto de um sistema axiomático. “Os objetos de pensamento no Nível 3 são relações entre as propriedades dos objetos geométricos ” (VAN DE WALLE, 2009, p. 443).

No Nível 3, os estudantes são capazes de examinar mais do que apenas as propriedades das formas. Seu pensamento anterior produziu conjecturas envolvendo as relações entre as propriedades. [...] O estudante neste Nível é capaz de trabalhar com *sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas* e estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição. [...]. *Os produtos de pensamento do Nível 3 são sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria.* O tipo de raciocínio que caracteriza um pensador no Nível 3 é o mesmo necessário em um curso típico de geometria do Ensino Médio (EM), onde os alunos constroem uma lista de axiomas e definições para criar teoremas. (VAN DE WALLE, 2009, p. 443).

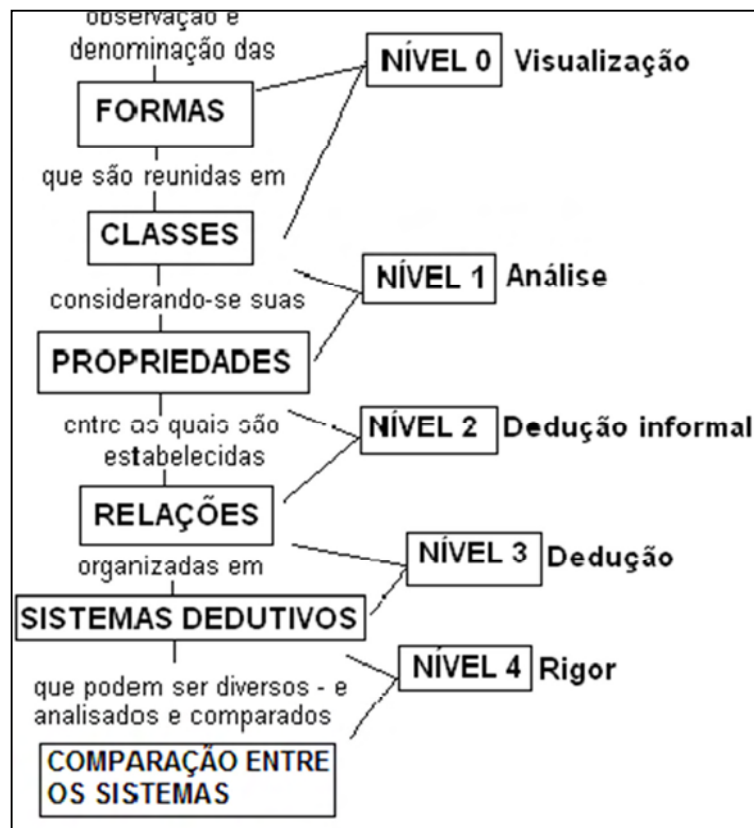
Como ressalta Van de Walle, se os alunos fazem um bom curso de Geometria, ao longo de sua escolaridade na Educação Básica, eles deverão descobrir resultados e construir modelos que serão posteriormente demonstrados formalmente por eles.

**Nível 4: rigor** – nesse nível o aluno é capaz de trabalhar simultaneamente com vários sistemas de axiomas, sendo capaz de estabelecer comparações entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas, identificando semelhanças e diferenças entre os sistemas axiomáticos de cada uma delas.

Deste modo, “os objetos de pensamento no Nível 4 são sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria”, (...), “no nível mais elevado da hierarquia da Teoria

dos van Hiele, os objetos de atenção são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema” (VAN DE WALLE, 2009, p. 443).

Esse último nível de desenvolvimento só é, em geral, alcançado pelos especialistas em Matemática que estudam em cursos avançados de nível superior, ou que tenham se dedicado a estudar Geometria como campo de pesquisa e investigação científica. Na figura abaixo resumimos as principais características do Modelo van Hiele, apontando os níveis e relações entre eles, em uma estrutura hierárquica.



**Figura 1** – Hierarquia de níveis de pensamento do Modelo van Hiele – produzido a partir da adaptação de figura proposta por Van de Walle (2009, p. 443)

Os diferentes níveis do Modelo de van Hiele articulam-se considerando as características que descreveremos em seguida.

### 2.2.2 Características dos Níveis da teoria dos van Hiele.

Uma característica central de articulação entre os diferentes Níveis da teoria dos van Hiele é que os resultados produzidos pelo pensamento em um nível passam a ser os objetos de pensamento do nível seguinte. Ou seja, no momento em que as formas são organizadas em classes, segundo características específicas, essas classes passam a ser os objetos sobre os quais estará centrado o pensamento do aluno no próximo nível.

Deste modo, “os objetos devem ser criados em um nível de modo que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do nível seguinte” (VAN DE WALLE, 2009, p. 443). Além dessa característica do Modelo, outras quatro características relacionadas aos níveis de pensamento de van Hiele merecem atenção especial, como destaca Van de Walle (2009, p. 444).

1. *Há uma sequência de níveis:* para alcançar os Níveis hierárquicos mais avançados, o aluno deve passar por todos os Níveis anteriores, partindo do Nível 0. Ao atingir um determinado Nível, o aluno deverá ter se apropriado do pensamento geométrico que o caracteriza, transformando seus produtos em objetos que servirão de base para o desenvolvimento do pensamento no Nível seguinte.

2. *O acesso a um determinado Nível, não depende da idade* – de acordo com os estágios de desenvolvimento propostos por Piaget, mas do domínio apropriado de pensamentos que caracterizam cada Nível. Dois estudantes, estudando em diferentes Anos da Educação Básica, e com idades igualmente diferentes, podem estar em um mesmo Nível do Modelo van Hiele. Do mesmo modo, muitos estudantes jamais passam do Nível 0 e raras são as pessoas que se locomovem confortavelmente nos níveis 3 e 4 do Modelo.

3. *O fator mais decisivo será a quantidade e a qualidade das experiências geométricas* que são planejadas e realizadas com os estudantes. “Atividades que permitam às crianças explorar o conteúdo do nível seguinte, enquanto ampliam suas experiências em seu nível corrente, têm a melhor chance de desenvolver o nível de pensamento geométrico dessas crianças” (VAN DE WALLE, 2009, p. 444).

4. *É fundamental que tanto o ensino quanto a linguagem utilizada sejam adequadas ao Nível do estudante.* Caso isso não ocorra, não haverá comunicação e os estudantes,

obrigados a lidar com objetos de pensamento que não foram ainda construídos no nível anterior, podem ser forçados a uma aprendizagem mecânica [marcada pela repetição e memorização sem compreensão] e alcançar apenas um êxito temporário e superficial. Um aluno pode, por exemplo, afirmar que todos os quadrados são retângulos sem ter construído essa relação. Bem como pode memorizar uma prova geométrica, mas falhar ao criar os passos ou compreender os fundamentos envolvidos. (VAN DE WALLE, 2009, p. 444).

Desse modo, seguindo-se o Modelo proposto pelos van Hiele, os professores devem planejar seu trabalho no campo do Espaço e Forma pensando não apenas na organização hierárquica de pensamento, nos diferentes níveis, mas também na necessidade de articulação entre eles. Atividades com objetivos específicos para o desenvolvimento de cada Nível do Modelo devem ser pensadas e realizadas em sala de aula, de acordo com as características aqui explanadas.

## 2.3 O MODELO VAN HIELE E O ENSINO DE GEOMETRIA BASEADO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

### 2.3.1 A Resolução de problemas como estratégia de ensino.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (5ª a 8ª Séries do Ensino Fundamental), a resolução de problemas, se trabalhada na direção apontada pela Educação Matemática, “possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance” (PCN, 1997, p. 40). Ou seja, a resolução de problemas oportuniza aos alunos ampliarem o que sabem acerca dos conceitos e dos procedimentos matemáticos, assim como ampliarem “a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança” (PCN, 1997, p. 40).

A resolução de problemas vem sendo defendida há algumas décadas como devendo ser esse o foco do trabalho com a Matemática em sala de aula. Ou seja, há muito se defende que a resolução de problemas deve ser vista como a principal

estratégia de ensino da disciplina. A defesa apresentada nos PCN nessa direção é clara, assim como nas indicações de diversos pesquisadores.

A maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da resolução de problemas. Isto é, tarefas ou problemas podem e devem ser propostos de modo a envolver os alunos no pensar e desenvolver a matemática importante que eles precisam aprender. (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

As tarefas ou atividades de resolução de problemas estão diretamente associadas à atividade matemática. Para Marincek (2001) apud Nunes (2010), “É buscando respostas para problemas ainda não solucionados que os matemáticos avançam em direção a novas descobertas”.

Para Van de Walle (2009), não há dúvida de que ensinar Matemática através da resolução de problemas não é tarefa fácil. O autor afirma, ainda, que o professor deve estar bem preparado para trabalhar usando esse caminho, no sentido de que as tarefas devem ser selecionadas e planejadas a cada dia, levando em consideração aquilo que os estudantes já aprenderam e as demandas do currículo. Van de Walle (2009, p. 59) apresenta, ainda, algumas razões que justificam trabalhar seguindo esse caminho:

*A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas. Ao resolverem problemas, os alunos necessariamente estão refletindo sobre as ideias inerentes aos problemas.*

*A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido. Toda vez que você apresenta uma tarefa baseada em resolução de problemas e aguarda uma solução, você está dizendo aos estudantes “Eu acredito que vocês podem fazer isso”.*

*A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados.*

*Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina. A maioria dos alunos que permitimos resolver problemas de modo que lhes faça sentido considera o processo recompensador ou gratificante.*

*A resolução de problema desenvolve o “potencial matemático”. Os alunos que resolvem problemas em sala de aula serão envolvidos em todos os cinco dos Padrões de Processos descritos pelo documento *Princípios e Padrões* do NCTM: resolver problemas,*

raciocinar, comunicar, conectar e representar. Esses são os processos do fazer matemática.

Para finalizar, o autor ressalta: *trabalhar com resolução de problema é divertido!* Uma vez que os professores aprendem a trabalhar explorando a resolução de problemas em sala de aula, jamais voltam a ensinar fazendo uso da exposição de definições e regras a serem memorizadas.

Para o mesmo autor, ao selecionar um problema para o trabalho com um determinado conteúdo, o professor deve estar atento a alguns aspectos: 1. deve ser considerado o nível atual de desenvolvimento dos alunos, ou seja, aquilo que eles já sabem. O problema não pode constituir-se como um desafio impossível, mas, ao mesmo tempo, não pode deixar de ser interessante e novo, sob algum aspecto; 2. Não se pode perder de vista o conteúdo que se deseja ensinar. Os contextos ajudam a motivar, mas não devem ser o foco da atenção dos alunos; 3. Não se deve deixar que a resposta final seja a meta da atividade, mas fazer com que os alunos valorizem a compreensão do processo utilizado para solucionar um problema, bem como adquiram a cultura de verificar a adequação e significado do resultado obtido. Ou seja, a justificativa para suas ações deve fazer parte da resolução.

Ensinar pela resolução de problemas é adotar uma metodologia de ensino que está mais centrada no aluno do que no professor. Para Van de Walle (2009, p. 58),

O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem – seus conhecimentos prévios. É um processo que requer confiança nas crianças – uma convicção de que todas elas podem criar ideias significativas sobre matemática.

Mas isso não ocorre no ensino tradicional, no qual o professor apresenta o conteúdo, dita definições, mostra fórmulas e resolve exercícios como modelo, propondo questões semelhantes aos alunos como forma destes fixarem o conteúdo. Na ótica dessa forma de ensino, o bom aluno é aquele que é capaz de reproduzir, com fidelidade, o modelo apresentado pelo professor. Como afirma Van de Walle (2009, p. 58), “é do modo do professor ou de nenhum modo”.

O mesmo autor afirma que, ao ensinar pela resolução de problemas, o professor deve ser responsável por criar uma atmosfera para o bom funcionamento

da aula. Para isso, é importante pensar na aula como sendo constituída de três fases: *antes, durante e depois*, cada uma delas com uma programação específica e com ações próprias a serem realizadas pelo professor.

- *A fase antes de uma lição:* Nesta fase o professor deve preparar os alunos mentalmente para trabalhar no problema e pensar sobre os tipos de ideias que mais lhes serão úteis. O professor deve esclarecer aos alunos quais são as suas expectativas antes de eles começarem a trabalhar no problema. Por fim, o professor deve verificar se os alunos compreenderam o problema de modo que não precise explicá-lo depois individualmente.
- *A fase durante uma lição:* Nesta fase deve-se dar oportunidade aos alunos para trabalharem sem a ajuda direta do professor. O professor deve dar a eles a chance de usar as suas próprias ideias e não simplesmente seguir comandos dados por ele. Deve acreditar na capacidade dos alunos e saber ouvi-los, descobrir como diferentes alunos ou grupos estão pensando, de que forma estão usando seu conhecimento e como eles estão abordando o problema.
- *A fase depois de uma lição:* Neste momento da aula o professor deve propor à turma uma discussão acerca do que foi feito, quando os alunos poderão indicar como fizeram, justificando suas ações e pensamentos. Nesse debate os alunos poderão ampliar seus conhecimentos matemáticos, mas, além disso, poderão aprender a ouvir os outros e a decidir que abordagens e soluções fazem mais sentido e por qual razão.

Ou seja, o trabalho não para quando o problema está resolvido, é nesse momento que o professor deve encorajar o aluno a refletir sobre as resoluções que propõem para as questões, os métodos que utilizam para resolvê-las e os avanços que alcançaram.

De acordo com Hiebert et al (apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57):

Um *problema* é definido aqui como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método correto específico de solução.

Na literatura, encontramos várias concepções para o termo *problema*, que será aqui entendido por nós na forma exposta por Hiebert e apresentada por Van de

Walle. Dante (1991) traz uma definição semelhante para problema, afirmando que ele consistiria de toda e qualquer situação que possa levar o aluno a pensar. Referindo-se especificamente aos problemas matemáticos, afirma que estes exigem conhecimentos matemáticos para sua solução. Na mesma obra, este autor faz uma classificação dos diferentes tipos de problemas, distinguindo-os em: exercícios de reconhecimento; exercícios de algoritmos; problemas-padrão; problemas-processo ou heurísticos; problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeças.

Em nosso trabalho estamos interessados especificamente em discutir problemas do último tipo, que são por ele definidos como aqueles que desafiam o aluno e que, em geral, demandam algum tipo especial de pensamento não-convencional. Como campo de reflexão, trataremos dos conteúdos do Espaço e Forma, entendendo a importância do ensino de Geometria para a formação do aluno, pelo já exposto.

Além disso, concordamos com os PCNs quando estes defendem que

[O]s conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p. 55).

Entendemos desse modo, que o estudo da Geometria é essencial para a formação plena do aluno da Educação Básica, e nossa proposta, no presente trabalho, é que ele seja estruturado adotando como procedimento metodológico central a Resolução de Problemas, dentre os quais selecionamos um tipo particular (os quebra-cabeças), elaborados e explorados segundo a hierarquia de Níveis de desenvolvimento proposto no Modelo van Hiele. Como conteúdo, selecionamos elementos relativos à Geometria Plana.

Segundo o educador matemático holandês Pierre van Hiele, citado por Kaleff (1997, p. 17),

a criança inicia a formação das ideias geométricas por meio da visualização e do reconhecimento das formas o que justifica a utilização dos quebra-cabeças na escola, pois a principal finalidade didática do seu uso é no momento da iniciação ao desenvolvimento do pensamento geométrico. As formas geométricas que compõem

um jogo deste tipo dão ao professor muitas possibilidades de exploração de conceitos da matemática elementar.

Entendemos que em razão das particularidades do Modelo van Hiele, e do nível de escolaridade que selecionamos para nossa investigação, não será possível irmos além dos três primeiros Níveis propostos e já apresentados e discutidos no presente texto. Desta forma, discutiremos os quebra-cabeças, considerando sua adequação, potencialidades e limitações para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos dos Anos finais do Ensino Fundamental, nos Níveis 0, 1 e, no máximo, 2.

## **CAPÍTULO 3 – APRESENTAÇÃO, DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS DA PESQUISA.**

*“Precisamos preparar o homem para indagar e resolver por si os seus problemas.”  
Anísio Teixeira.*

### **3.1 APRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA ETAPA DE NOSSO ESTUDO.**

Antes de avançarmos na apresentação e análise de nossa proposta propriamente dita, trazemos no texto os resultados da avaliação que realizamos das duas coleções de livros didáticos dirigidos às séries finais do ensino fundamental e que são mais utilizadas nas escolas que formam a 9ª Gerência Regional de Educação da Paraíba, da qual faz parte a cidade de Cajazeiras, onde atuo profissionalmente. Nosso objetivo era identificar se o(s) autor(es) abordam o conteúdo de Geometria dentro da perspectiva que defendemos em nosso Capítulo teórico, atendendo o que indica o referencial que adotamos.

A 9ª Gerência Regional de Educação da Paraíba é constituída pelos municípios de Bernardino Batista; Bom Jesus; Bonito de Santa Fé; Cachoeira dos Índios; Cajazeiras; Carrapateira; Joca Claudino; Monte Horebe; Poço Dantas; Poço de José de Moura; Santa Helena; São João do Rio do Peixe; São José de Piranhas; Triunfo e Uiraúna. Apenas Cajazeiras, Santa Helena e as quatro últimas cidades da relação possuem mais de uma escola estadual. A cidade de Cajazeiras conta com sete escolas estaduais; Santa Helena, São João do Rio do Peixe e Triunfo contam com duas em cada cidade e as demais (São José de Piranhas e Uiraúna) com três escolas estaduais.

Nosso interesse por esse material didático específico se dá pelo fato de compreendermos que o livro é um instrumento que faz parte do acervo de nossos professores, como uma das principais referências para o desenvolvimento de seu trabalho em sala de aula, em particular com o acesso que têm hoje os alunos a esse recurso, que dele dispõem com o apoio de programas federais.

O livro didático é um fator significativo que influencia o ensino em sala de aula, principalmente no Ensino Fundamental. Para melhor escolher o livro didático

que será utilizado em sala de aula, é bom ter uma visão objetiva de todos esses livros e o papel que eles podem representar para o ensino. Segundo Mello (1999, p. 4), “o MEC desempenha o papel de avaliador/controlador da qualidade do livro didático no nosso país, induzindo a melhoria de qualidade sem impor ao professor um único tipo de livro”. Para isso, uma comissão de professores especialistas avalia os livros que são oferecidos para escolha pelos professores nas escolas, de acordo com critérios previamente estabelecidos e de conhecimento público.

Vale salientar que a publicação de livros didáticos ainda visa atender perspectivas de mercado. De acordo com Van de Walle, “se as melhores ideias de educadores matemáticos fossem incorporadas em um livro didático hoje, este não venderia. Esses excelentes livros expostos em livrarias não seriam de nenhum valor aos alunos e custariam milhões de reais aos editores.” (VAN DE WALLE, 2009, p. 91).

Editores costumam fazer uma extensa pesquisa de mercado para determinar o que vende mais e o que professores esperam de um livro didático. Em geral, há uma distância significativa entre o que os autores pensam que seria bom e o que o editor determina que venderá. O compromisso entre o autor e o mercado se torna então uma questão que define a qualidade do que irá ser adotado em nossas escolas. Com algumas exceções, a maioria dos livros didáticos adota uma perspectiva tradicional de apresentação e exploração de conteúdos, baseada na sequência tradicional de apresentação de definições, exemplos e proposição de exercícios de aplicação. Van de Walle (2009) acrescenta que a maior parte do mercado consumidor espera que o livro didático ensine e não que apenas proponha atividades ou problemas.

Para identificar a coleção a ser submetida à análise, fizemos um levantamento junto à Direção da 9ª Gerência Regional de Educação e coletamos informações sobre as indicações e os quantitativos de cada coleção na rede pública de ensino. Para a coleta de dados, foi feito inicialmente um primeiro contato com a Direção, para uma prévia explicação dos objetivos da pesquisa.

Os primeiros dados foram coletados mediante quadro com a relação das escolas e, imediatamente após, colhemos informações a respeito da utilização de livros didáticos de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental adotados no triênio 2008 – 2010, pelas 28 escolas públicas situadas nos 15 municípios que compõem a referida Gerência de Educação.

As duas coleções mais adotadas nas escolas dos municípios agrupados naquela Gerência foram: Matemática Projeto Araribá (Editora Moderna, 2008) e Tudo é matemática (Editora Ática, 2008), ambas analisadas e aprovadas pelo PNLD/2008. Para a seleção dessas coleções, levamos em consideração que, das 28 escolas que compõem a 9ª Gerência Regional de Educação, 18 delas (64,28%) adotaram a coleção Matemática Projeto Araribá, 5 escolas (17,85%) adotaram a coleção Tudo é Matemática de Luiz Roberto Dante. As demais coleções citadas foram adotadas por, no máximo, duas escolas cada.

De posse dos livros didáticos das coleções selecionadas para nosso estudo, realizamos uma atenta leitura para verificação dos conteúdos objeto de nossa pesquisa, observando a proposição de tarefas ou atividades construídas por desafios do tipo quebra-cabeça e, em particular de quebra-cabeças propostos com o uso de palitos de fósforo.

Investigamos, de modo geral, aspectos relacionados à resolução de problemas como principal estratégia de ensino nos conteúdos de Geometria trabalhados nessas coleções, verificando se há também, a presença de quebra-cabeças com palitos de fósforo como fonte de problemas propostos para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de elementos da Geometria Plana.

### **3.1.1 Apresentação e discussão dos resultados da pesquisa.**

Neste item serão apresentados e discutidos os resultados obtidos na pesquisa visando atender aos objetivos geral e específicos de nosso trabalho. Daqui em diante denominaremos a coleção *Matemática – Projeto Araribá (Editora Moderna, 2008)*, de Coleção 1, e a coleção *Tudo é Matemática (de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2008)*, de Coleção 2.

A Coleção 1 é formada de quatro livros e cada livro contém 8 unidades. As unidades subdividem-se em capítulos, nos quais as explicações teóricas e atividades são intercaladas pelas seções *Trabalhando com a informação* e *Atividades integradas*, que retomam conteúdos já estudados na obra. As unidades se iniciam com as seções *Para começar...* e *O que você já sabe?* e terminam com as seções *Estudando a resolução de problemas, compreendendo um texto; Trabalho*

*em equipe* e *Organize suas ideias*. Cada livro contém duas unidades que contemplam os assuntos objeto de estudo de nossa pesquisa, que é Geometria Plana, onde centramos nossa análise.

De acordo com a síntese avaliativa do Guia PNLD 2008 (BRASIL, 2008, p. 102), relativa à Coleção 1, ela

propõe um bom trabalho com o tratamento da informação. Diferentes significados de conceitos são explorados com contextualizações, em geral, bem sucedidas. No entanto, há em alguns campos excesso de conteúdos, com algumas atividades dispensáveis para esse nível de ensino. As atividades introdutórias dos capítulos permitem o resgate de conhecimentos anteriores dos alunos, e as atividades finais contribuem para o desenvolvimento da autonomia. A problematização e o estímulo à interação entre os alunos, elementos centrais na proposta da coleção, contribuem para a construção dos conhecimentos. No entanto, é feita uma sistematização precoce de certos conceitos, o que pode dificultar a elaboração de significados por parte dos alunos.

Em relação à abordagem de conteúdos, os avaliadores do Guia PNLD 2008 (p. 105) afirmam, em relação ao campo do Espaço e Forma, que na nessa Coleção

é evidente a busca de contextos que possibilitem a atribuição de significados aos conceitos geométricos. As construções com instrumentos de desenho são outro ponto positivo da coleção, embora estas sejam apresentadas como uma seqüência de etapas a serem seguidas, sem que se explorem as propriedades a elas associadas.

Em relação à resolução de problemas, a Coleção 1 apresenta situações que envolvem a utilização de diferentes estratégias na resolução de problemas e a proposição da formulação de problemas pelo aluno. Ainda de acordo com o Guia PNLD, cada tópico da Coleção tem início com uma proposição de um problema contextualizado, mas há “poucas oportunidades para que os alunos se dediquem a novas descobertas, pois a solução do problema é dada em seguida” (BRASIL, GUIA PNLD, 2008, p. 106).

São propostas situações em que o aluno é instigado a desenvolver e a registrar estratégias próprias de solução, tanto para problemas abertos como para desafios, mas não há indicação de que ele compare diferentes formas de resolução o que, se não for feito pelo professor, empobrece a atividade.

A Coleção 2 também é formada por quatro livros, estando cada um deles está dividido em Capítulos que começam com uma *Introdução* e contêm algumas das seções: *Trocando ideias*; *Você sabia que*; *Desafio*; *Raciocínio lógico*; *Curiosidade matemática*; *Brasil em números*; *Revisão cumulativa*. Na parte final de cada livro, há um Glossário; as respostas dos problemas; indicação de leituras complementares e referências bibliográficas adotadas pelo autor. Em toda a coleção há 40 (quarenta) Capítulos sendo que 10 (dez) deles, ou seja, 25% contêm conteúdos de Geometria, foco de nossa pesquisa.

A Coleção 2, de acordo com a síntese avaliativa do Guia do PNLD, “caracteriza-se por tratar de forma cuidadosa os tópicos atualmente presentes na matemática escolar e, também, por incluir assuntos menos freqüentes e inovadores” (BRASIL, 2008, p. 62). Ainda de acordo com os avaliadores da Coleção, considerando a metodologia adotada pelo autor,

os conteúdos são introduzidos com base na resolução de problemas. As explicações e perguntas dirigidas aos alunos procuram levá-los a atribuir significados aos conceitos e procedimentos e torná-los capazes de resolver novos problemas. Com freqüência, os assuntos são revisitados com aprofundamentos e ampliações. A articulação dos conhecimentos novos com os já abordados é um ponto positivo da obra, e é feita, em especial, por meio de muitas atividades de revisão. A apresentação dos conteúdos baseia-se em situações contextualizadas e interessantes. Muitas delas são relacionadas à realidade social, o que pode contribuir para ampliar a formação do aluno. (BRASIL, 2008, p. 62).

Ainda de acordo com o Guia, a Coleção trata adequadamente dos conteúdos de todos os campos da Matemática, mas referindo-se especificamente ao campo do Espaço e Forma, ressalta que a coleção destaca-se por trazer, além dos tópicos que são estudados normalmente nesse nível de escolaridade, outros bastante interessantes para a ampliação do aluno nesse campo, a exemplo das “transformações geométricas no plano, o princípio de Cavalieri, a razão áurea, entre outros” (BRASIL, 2008, p. 65).

O estudo da geometria é bastante abrangente, e alguns tópicos relevantes, como a representação plana de figuras espaciais, são muito bem discutidos no volume do 8º ano. As propriedades das figuras geométricas são tratadas, inicialmente, de forma intuitiva e com recurso à visualização, à construção com instrumentos e à

medição. Algumas dessas propriedades são comprovadas por demonstração lógica, porém, a articulação entre o empírico e o abstrato nem sempre é feita de forma apropriada, como no caso do Teorema de Tales e no campo das grandezas geométricas, quando se estudam as fórmulas para cálculo do volume de sólidos geométricos. (BRASIL, 2008, p. 65).

Como afirmamos inicialmente, a abordagem metodológica predominante na Coleção é a Resolução de Problemas, propondo o autor que sejam seguidos os passos da Heurística de Polya no processo (entender o problema; elaborar um plano de resolução; executar o plano; avaliar a adequação da solução). As atividades que o autor propõe, não apenas para o campo do Espaço e Forma, em geral visam a experimentação e a reflexão por parte do aluno, envolvendo-o no processo de elaboração de seu próprio conhecimento, o que possibilita que ele se aproprie do conteúdo matemático de forma gradual. Outro aspecto relevante da Coleção é o fato do autor propor, em várias situações, que os alunos discutam suas experiências e procedimentos matemáticos com os colegas.

### 3.2 ANÁLISE DE CONTEÚDOS DE GEOMETRIA PLANA NOS LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADOS PARA PESQUISA.

Investigamos nas duas coleções selecionadas se há a proposição de *atividades* ou *problemas* relativos a conteúdos de Geometria Plana envolvendo quebra-cabeças e, em particular, quebra-cabeças com palitos de fósforo como um recurso do ensino-aprendizagem, seja na apresentação do conteúdo ou na forma de aplicação deste.

Seguindo os objetivos específicos de nossa pesquisa que são:

- Identificar estratégias de resolução de problemas sugeridas nas coleções analisadas, relacionando-as com os níveis propostos no Modelo Van Hiele, em relação ao conteúdo de Geometria Plana;
- Apresentar e identificar potencialidades e limitações do uso de quebra-cabeças específicos (com palitos de fósforo) no ensino de Geometria Plana no Ensino Fundamental.

Analisamos, nas coleções escolhidas, somente os capítulos dedicados aos conteúdos que visam o trabalho com polígonos, triângulos e quadriláteros. Desta

forma, tornamos a pesquisa viável e não fugimos do foco principal que é a Geometria Plana. Diante disso, tratemos o resultado de nossa investigação e reflexão sobre os livros didáticos já mencionados, convergindo a nossa análise para os conteúdos referentes às unidades e capítulos que continham o conteúdo destacado.

No Quadro 2, apresentamos os Livros, Unidades e conteúdos que foram por nós avaliados na Coleção 1.

Quadro 2 – Conteúdos de Geometria Plana da Coleção 1.

<b>Série</b>	<b>Unidade</b>	<b>Conteúdo trabalhado</b>
6º Ano	Unidade 7: Ângulo, polígonos e círculo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polígonos;</li> <li>• Classificação de triângulos;</li> <li>• Quadriláteros;</li> </ul>
7º Ano	<p>Unidade 7: Distâncias, quadriláteros e triângulos.</p> <p>Unidade 3: Ângulos.</p> <p>Unidade 8: Áreas, ampliações e reduções de figuras.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadriláteros;</li> <li>• Paralelogramos;</li> <li>• Trapézios;</li> <li>• Triângulos;</li> <li>• Construção de triângulos.</li> <li>• Ângulos;</li> <li>• Ângulos consecutivos e ângulos opostos pelo vértice.</li> <li>• Decomposição e composição de figuras planas;</li> <li>• Área;</li> <li>• Cálculo de área de figuras planas;</li> </ul>
8º Ano	Unidade 2: Segmentos de reta e ângulos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Noções básicas de geometria;</li> <li>• Ângulos;</li> <li>• Bissetriz de um ângulo;</li> </ul>

	<p>Unidade 3: Ângulos e polígonos.</p> <p>Unidade 4: Triângulos.</p> <p>Unidade 7: Quadriláteros e circunferências.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posição relativa de dois ângulos;</li> <li>• Posições de retas no plano;</li> <li>• Paralelas e transversais;</li> <li>• Polígonos;</li> <li>• Polígonos e soma das medidas de ângulos;</li> <li>• Ângulos nos polígonos regulares.</li> <li>• Triângulos;</li> <li>• Pontos notáveis em um triângulo;</li> <li>• Transformações geométricas de figuras no plano;</li> <li>• Casos de congruência de triângulos;</li> <li>• Triângulos isósceles e equiláteros;</li> <li>• Quadriláteros;</li> <li>• Quadriláteros notáveis;</li> <li>• Propriedades dos paralelogramos e dos trapézios;</li> <li>• Triângulos e quadriláteros circunscritos.</li> </ul>
9º Ano	<p>Unidade 3: Semelhança</p> <p>Unidade 7: Polígonos</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema de Tales;</li> <li>• Semelhança de figuras;</li> <li>• Semelhança de triângulos;</li> <li>• Casos de semelhança de triângulos;</li> <li>• Área de triângulos e de quadriláteros;</li> <li>• Polígonos convexos;</li> <li>• Polígonos regulares;</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relações métricas em um polígono regular.</li> </ul>
--	--	---

No Quadro 3, destacamos os Livros, Capítulos e conteúdos que foram por nós avaliados na Coleção 2, considerando os recortes considerados em nosso Tema.

Quadro 3 - Conteúdos de Geometria Plana da Coleção 2.

<b>Série</b>	<b>Capítulo</b>	<b>Conteúdo trabalhado</b>
6º Ano	<p>Capítulo 4: Geometria: sólidos geométricos, regiões planas e contornos.</p> <p>Capítulo 8: Geometria: ângulos, polígonos e circunferências.</p> <p>Capítulo 10: Perímetros, áreas e volumes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introdução;</li> <li>• Regiões planas;</li> <li>• Contornos de regiões planas (linhas fechadas);</li> <li>• Simetria.</li> <li>• Introdução;</li> <li>• As primeiras figuras;</li> <li>• Ângulos;</li> <li>• Polígonos;</li> <li>• Introdução;</li> <li>• Perímetro de um contorno;</li> <li>• Área de uma superfície;</li> <li>• Área de uma região retangular;</li> <li>• Área de uma região quadrada;</li> <li>• Área de uma região triangular;</li> <li>• Área de uma região limitada por um trapézio;</li> <li>• Área de uma região limitada por</li> </ul>

		<p>um losango;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Atividades envolvendo perímetro e área.</li> </ul>
7º Ano	<p>Capítulo 4: Geometria: sólidos geométricos, regiões planas e contornos.</p> <p>Capítulo 7: Ângulos e polígonos regulares.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introdução;</li> <li>• Regiões poligonais convexas e não-convexas;</li> <li>• Simetria.</li> <li>• Introdução;</li> <li>• Ângulos: revendo o que aprendemos;</li> <li>• Ângulos complementares e ângulos suplementares.</li> <li>• Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal;</li> <li>• Ângulos em um polígono;</li> <li>• Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;</li> <li>• Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo;</li> <li>• Ângulos de um paralelogramo;</li> <li>• Polígonos regulares.</li> </ul>
8º Ano	Capítulo 7: Ângulos e triângulos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introdução;</li> <li>• Ângulos opostos pelo vértice;</li> <li>• Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal;</li> <li>• Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;</li> <li>• Polígonos;</li> </ul>



	áreas e volumes.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introdução;</li> <li>• Retomando o cálculo de perímetro;</li> <li>• Retomando o cálculo de área.</li> </ul>
--	------------------	--

Procuramos identificar, em cada coleção, a proposição de atividades relacionadas aos objetivos que descrevemos e que fossem elaboradas a partir de quebra-cabeças com palitos de fósforo, pois defendemos que o uso de quebra-cabeças pode se constituir como um recurso produtivo, quer na aprendizagem de noções relativas ao conteúdo, colaborando para o desenvolvimento do pensamento geométrico no Nível 0; ou como meio de ampliar esse desenvolvimento na direção dos Níveis 1 e 2 do Modelo van Hiele.

Se a intenção do professor do Ensino Fundamental é preparar o aluno para o currículo da geometria dedutiva do Ensino Médio, então é importante que o pensamento geométrico do aluno tenha se desenvolvido até o Nível 2 ao final do 9º ano.

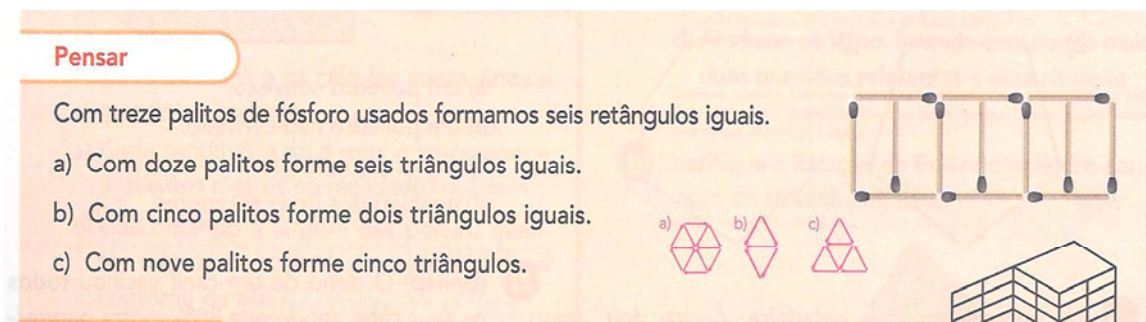
As próximas ilustrações contêm descrições dos tipos de tarefas que são apropriadas a cada um dos três primeiros níveis de pensamento de van Hiele. Cabe ao professor aplicar essas atividades aos alunos e usá-las para orientar sua interação com os mesmos.

As atividades com palitos de fósforo ilustradas nas Figuras 2 e 3, extraídas da coleção 2 – *Tudo é Matemática: Dante(2008)* – são um exemplo de tarefas que, para serem aplicadas ao Nível 0, o professor deve levar em consideração que o agrupamento de retângulos e das outras formas construídas nos itens *a*, *b* e *c* do *Desafio* da Figura 2 (quebra-cabeça localizado no livro do 7º ano da Coleção 2, p. 98, logo após o conteúdo de geometria) e nos itens *a*, *b*, *c*, *d* e *e* da Figura 3 (da mesma coleção, encontrada no livro do 8º ano na página 22), constituem o foco primário desse nível. É nesse nível que os alunos precisam de oportunidades para compor, decompor e construir formas. Essas atividades devem ser construídas em torno de propriedades de modo que os alunos desenvolvam uma compreensão das propriedades geométricas e comecem a usá-las naturalmente.

Estas mesmas atividades, quando aplicadas ao Nível 1, exigem que o professor enfoque mais as propriedades das figuras que forem sendo formadas nos itens *a*, *b* e *c* do *Desafio* da Figura 2 e nos itens *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, da Figura 3, do que na

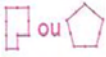

simples identificação das formas. O professor também pode encontrar maneiras de organizar todos os possíveis retângulos em grupos e, a partir desses grupos, definir os tipos de retângulos. Caso o professor queira auxiliar os alunos a irem do Nível 1 ao Nível 2 deve, segundo Van de Walle (2009, p. 445) desafiá-los com questões do tipo “Por quê?” e aquelas que envolvem algum raciocínio. Por exemplo, “Se os lados de uma forma de quatro lados são todos congruentes, você sempre terá um quadrado?” e “Você consegue encontrar um contraexemplo?”


A capacidade de o aluno no Nível 1 reconhecer polígonos, classificando-os pelo número de lados; identificando polígonos regulares pelas suas propriedades e classificando triângulos quanto aos lados e aos ângulos faz com que o professor consiga orientar o aluno a avançar na direção do nível seguinte.





**Figura 2** – Formação de triângulos com palitos de fósforo. Desafio (Pensar).  
Fonte: DANTE, 2008. 7º ANO, p. 98


8 Desenhe em seu caderno como ficariam as figuras, construídas com palitos.

a) Polígono formado por 10 palitos que não seja nem triângulo nem retângulo. Por exemplo:  ou 

b) Triângulo formado por 10 palitos. Por exemplo: 

c) Quadrado formado por 12 palitos. 

d) Retângulo formado por 10 palitos. Por exemplo: 

e) Paralelogramo que não seja retângulo, com 8 palitos. 

**Figura 3** – Construção de polígonos com palitos de fósforo. (Questão 8).  
Fonte: DANTE, 2008. 8º ANO, p. 22

Ainda com relação aos quebra-cabeças ilustrados nas Figuras 2 e 3, para que seja desenvolvido o Nível 2 do pensamento de van Hiele, o professor deve explorar a percepção da necessidade de uma definição precisa e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Para Van de Walle (2009, p. 445), as atividades em Geometria apropriadas ao Nível 2 devem:

- Encorajar a elaboração e testagem de hipóteses ou conjecturas. “Você acha que isso funciona o tempo todo?”, “Isso é verdadeiro para todos os triângulos ou apenas para os equiláteros?”.
- Examinar as propriedades das formas para determinar as condições necessárias e suficientes para diferentes formas ou conceitos. “Que propriedades das diagonais você considera garantir a obtenção de um quadrado?”.
- Usar a linguagem da dedução informal: todos, alguns, nenhum, se...então e se?, etc.
- Encorajar os alunos a tentar estabelecer provas informais.

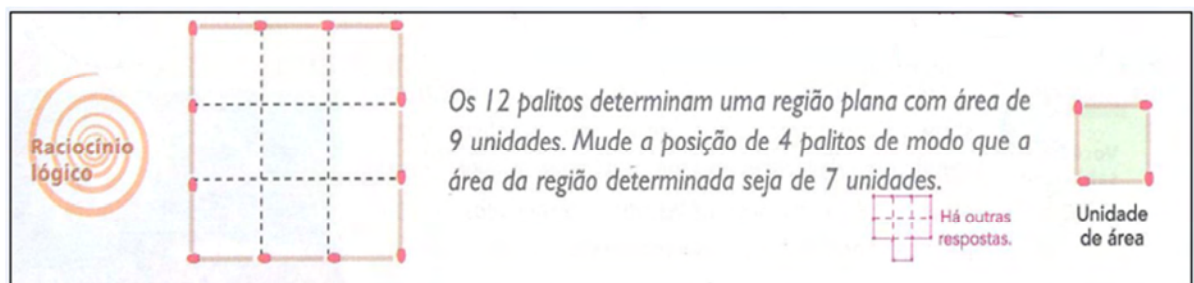
Nesse nível pode ser solicitado ao aluno que ele explique às provas informais que outros alunos sugeriram.

As três atividades ilustradas nas Figuras 4, 5 e 6 que se seguem, aparecem nos livros didáticos das coleções analisadas em nosso trabalho. Mais especificamente na Coleção 1 (Figura 6) e na Coleção 2 (Figuras 4 e 5). A proposta dos autores com relação a essas atividades envolvendo a resolução de problemas é que são tarefas que o professor de posse dos conhecimentos prévios dos alunos, possa desenvolver os conteúdos com melhor aproveitamento por parte deles. A partir de quebra-cabeças como esses, o aluno, segundo Dante (2008, p. 16: Manual Pedagógico do Professor) “é levado a desempenhar um papel ativo na construção de seu conhecimento. Envolvendo ainda a compreensão e a aceitação de regras; promovendo o desenvolvimento socioafetivo e cognitivo”.

Ainda segundo Dante (2008, p. 16: Manual Pedagógico do Professor), “durante um jogo, os alunos estão motivados a pensar e a usar constantemente conhecimentos prévios”

Para os autores do Projeto Araribá (2008, p. 6: Manual do Professor), “o uso de quebra-cabeças instiga o aluno a desenvolver e a registrar estratégias próprias de solução, tanto para problemas abertos como para desafios”.

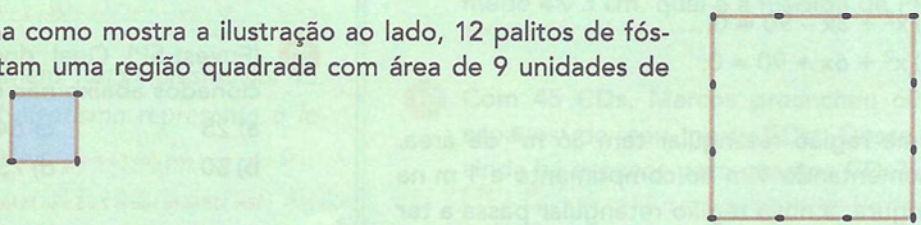
Analisando essas tarefas em relação ao Modelo van Hiele, percebemos que todas elas se encaixam no Nível 2 ou de dedução informal do pensamento geométrico, pois, nesse nível, segundo Van de Walle (2009, p. 442), os alunos já são “capazes de pensar sobre as propriedades de objetos geométricos sem as restrições de um objeto particular”.




**Figura 4** – Situação-problema envolvendo palitos. (Seção *Raciocínio lógico*)  
Fonte: DANTE, 2008. 9º ANO, p. 10

**Divertir-se**

Colocados da forma como mostra a ilustração ao lado, 12 palitos de fósforo usados delimitam uma região quadrada com área de 9 unidades de área iguais a esta:




Use todos os 12 palitos e delimite figuras planas que tenham as seguintes áreas: 8, 7, 6 e 5 unidades de área iguais a esta:



**Figura 5** – Explorando área a partir de figuras com palitos. (Seção *Divertir-se*)  
 Fonte: DANTE, 2008. 9º ANO, p. 78

**Desafio**

O quadrado abaixo será completado com palitos conforme mostra a ilustração. O quadrado tem lado cuja medida vale 6 palitos.



- Quantos palitos faltam para completar esse quadrado?
- Considerando o quadrado com lado de medida igual a 1 palito, qual é a área desse quadrado?

**Figura 6** – *Desafio* com palitos de fósforo explorando área.  
 Fonte: ARARIBÁ, 2006. 9º ANO, p. 226

Desse modo, as atividades propostas pelos autores dos livros didáticos analisados e ilustradas nas figuras anteriores, podem e devem ser adaptadas ao grau de dificuldade do aluno e à sua realidade. Em relação à teoria de van Hiele, cada quebra-cabeça tem a sua linguagem específica e o professor é quem deve estimular no aluno a compreensão e posterior utilização dessa linguagem.

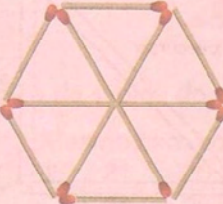
Os quebra-cabeças ilustrados nas Figuras 7, 8 e 9 representam problemas de caráter geométrico que, pelas suas características, podem ser enquadrados no modelo do pensamento geométrico de van Hiele e dispõem de uma originalidade especial frente a outras atividades matemáticas que usualmente são sugeridas aos estudantes. Justificam-se essas observações pelo fato de que ensinar Geometria Plana pela resolução de problemas exige um modo de raciocínio que tende a uma referência axiomática na qual se desenvolve o registro de uma linguagem que caminha na direção da natural para a formal.

A solução para esses problemas vai exigir do estudante dois tipos de conhecimentos: conceitual e procedural, segundo Hiebert e Carpenter (1992, p. 78 apud VAN DE WALLE, 2009, p. 48). O conhecimento conceitual “consiste em ricas relações ou redes de ideias ou é aquele que é compreendido”, enquanto o conhecimento procedural

é o conhecimento das regras e dos procedimentos utilizados para executar tarefas matemáticas rotineiras e também do simbolismo usado para representar ideias matemáticas que inclui saber os procedimentos passo a passo para executar uma tarefa (VAN DE WALLE, 2009, p. 48),


Os alunos podem e devem aprender os dois tipos de conhecimento em relação aos objetos de pensamento matemático, o que pode ser facilitado pelo emprego adequado da resolução de problemas. Desse modo, dependendo do Nível em que se encontra o aluno, um mesmo problema pode ser usado com objetivos diferentes. Situação semelhante ocorre com a possibilidade de exploração de um mesmo desafio, considerando níveis distintos de desenvolvimento do aluno, como exemplificado em seguida.

**Divertir-se**



Monte com palitos de fósforo a figura ao lado. Retire três palitos de modo que fiquem três triângulos eqüiláteros.

Fonte: *100 jogos geométricos*. Pierre Berloquin. Portugal, Gradiva, 1991. (Coleção O Prazer da Matemática.)



**Figura 7** – Construção de triângulos eqüiláteros. (Seção *Divertir-se*).  
Fonte: DANTE, 2008. 9º ANO, p. 183

*Desafio*

Como podemos retirar 4 palitos da montagem abaixo e obter exatamente 3 triângulos eqüiláteros?



**Figura 8** – Atividade integrada especial: formar triângulos. (Seção *Desafio*)  
Fonte: ARARIBÁ, 2008. 6º ANO, p. 267

É fácil ver que as Figuras 7 e 8 representam o mesmo quebra-cabeça com palitos de fósforo, presentes nas duas coleções didáticas analisadas. Porém, eles são propostos em anos de escolaridade distintos e, desse modo, os autores pressupõem que o aluno que os resolverá, se tiver desenvolvido seu pensamento geométrico adequadamente, pode estar situado em níveis distintos do pensamento de van Hiele.

Na Figura 7, extraída do Livro do 9º Ano da coleção *Tudo é Matemática – Luiz Roberto Dante*, temos um hexágono formado com 12 palitos de fósforo, propondo o autor que o aluno retire 3 palitos, de modo que fiquem 3 triângulos equiláteros. O estudante que cursa o 9º Ano do Ensino Fundamental, segundo o Modelo van Hiele, já deverá ter atingido o Nível 2 do pensamento geométrico, e o quebra-cabeça do modo como aparece na atividade, precisaria ser melhor explorado, para não exigir dele apenas habilidades que se encaixem no Nível 1 do Modelo van Hiele.

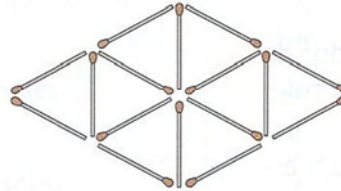
A Figura 8, extraída do Livro do 6º Ano da coleção *Projeto Araribá*, corresponde ao mesmo desafio, proposto com outras palavras e, considerando que o estudante que cursa o 6º Ano do Ensino Fundamental se enquadra no Nível 1 da teoria de van Hiele, podemos considerar que o quebra-cabeça sugerido é adequado para explorar o conteúdo de Geometria Plana estudado.

Caso queira avançar do Nível 1 para o Nível 2, o professor, utilizando-se desse mesmo quebra-cabeça, pode começar o problema com o seguinte enunciado: “Mostre de quantas maneiras diferentes podemos formar três triângulos equiláteros mexendo, tirando ou acrescentando palitos de fósforo ao hexágono da Figura 8”.

A Figura 9, retirada do Livro do 8º ano da Coleção 1 – *Projeto Araribá*, também é um exemplo de quebra-cabeça com palitos de fósforo onde os autores procuram explorar o conteúdo de Geometria Plana através da resolução do problema, sendo uma proposta de atividade adequada ao desenvolvimento dos Níveis 1 e 2 do pensamento de van Hiele, dependendo de como será explorado pelo professor.

**12** Utilize palitos ou lápis para resolver o problema.

Retire quatro palitos e crie uma nova figura em que apareçam quatro triângulos eqüiláteros.



**Figura 9** – Atividade integrada: formar triângulos eqüiláteros (Questão 12)

Fonte: ARARIBÁ, 2006. 8º ANO, p. 101

Os desafios propostos em seguida, ilustrados nas Figuras 10 a 16, quando apresentados aos alunos que estão no Nível 0 do pensamento geométrico de van Hiele, serão caracterizados a partir de suas aparências pois, para esses alunos, segundo Van de Walle (2009, p. 440), “é a **aparência** da forma que a define” (grifo do autor). Os alunos nesse nível podem até realizar medidas ou mesmo escrever sobre algumas propriedades das formas geométricas, mas não conseguem abstrair essas propriedades. Para Van de Walle (2009, p. 440), “o fato de a aparência ser o fator dominante nesse nível faz com que as aparências possam prevalecer sobre as propriedades de uma forma”.

Para esses quebra-cabeças, o professor do Ensino Fundamental, pode explorar os níveis de van Hiele e suas características e, dependendo do ano ou do ciclo escolar, essas atividades poderão explicitar uma ampla variedade de ideias. Essas atividades ou tarefas aplicadas no Nível 0, levam o aluno a reconhecer e nomear figuras baseados em suas características globais e visuais. O professor pode organizar a turma em pequenos grupos e realizar medidas ou mesmo conversar sobre as propriedades das formas, apesar dessas propriedades não serem abstraídas das formas que eles manipulam.

Quando aplicados com o objetivo de desenvolver o Nível 1 de van Hiele, esses mesmos quebra-cabeças podem ser utilizados pelo professor para explorar as propriedades dessas figuras, que estavam implícitas no Nível 0, e propor que os

alunos construam uma lista com essas propriedades, apesar de que, nesse nível, os alunos não conseguem identificar que esses polígonos são subclasses de outra classe.

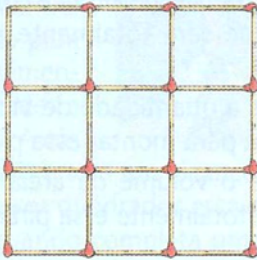
Para avançar ao Nível 2, da dedução informal, o professor pode explorar as argumentações lógicas sobre as propriedades e focar a inclusão do raciocínio lógico informal. Os alunos nesse nível são capazes de criar “Listas mínimas de definição” ou LMDs<sup>1</sup> para cada forma. Para Van de Walle (2009, p. 442), deve-se notar na atividade “Listas mínimas de definição” o seu componente lógico.

## Estudando a resolução de problemas

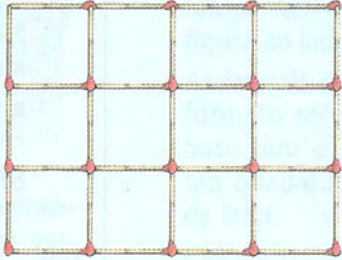
### PROBLEMAS

- Resolva os problemas abaixo em seu caderno.
- 1 Observe as figuras formadas por palitos:

a)



b)



Para cada figura, descubra uma maneira de tirar 6 palitos e obter somente 3 quadrados.

**Figura 10** – Problema 01: Explorando a resolução de problemas.  
Fonte: ARARIBÁ, 2006. 9º ANO, p. 286

<sup>1</sup> “Listas mínimas de definição” é um subconjunto das propriedades de uma forma que pode ser usado para “defini-la” e é, ao mesmo tempo, “mínima” [suficiente e necessária].

**Desafio**

Rafael fez um trapézio formado por 8 triângulos equiláteros, utilizando 16 palitos de fósforos.



Obtenha um paralelogramo formado por 8 triângulos equiláteros, movimentando apenas 2 palitos.

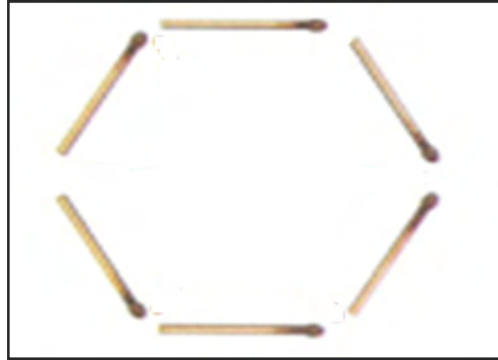


Se cada palito tem 4,5 cm de comprimento, qual será o perímetro do paralelogramo?



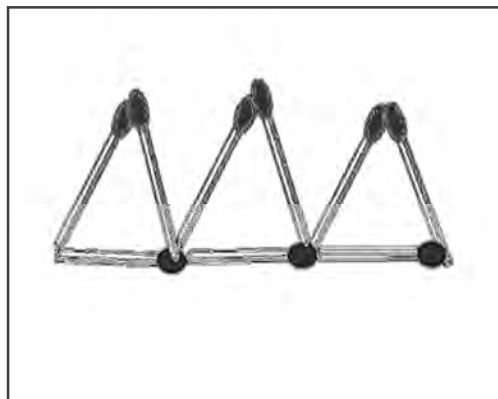
**Figura 11** – Problema 02: *Desafio* com palitos de fósforo para formar um paralelogramo.  
Fonte: ARARIBÁ, 2006. 8º ANO, p. 228

Mexa em dois palitos de fósforo e acrescenta 1 ao hexágono da Figura 12 para formar dois losangos.



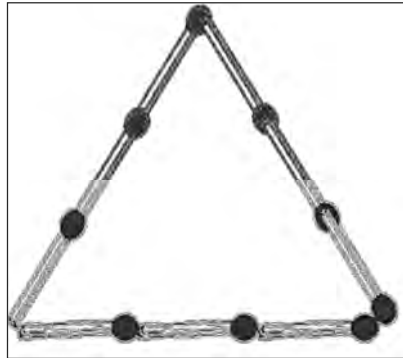
**Figura 12** – Problema 03: Desafio com palitos de fósforos para formar losango.  
Fonte: *Quebra-Cabeças, Truques e Jogos com Palitos de Fósforo*. Gilbert Obermair.  
Rio de Janeiro - RJ, Ediouro, 1981.

No quebra-cabeça da Figura 13, mexa em 5 palitos para formar 3 losangos.



**Figura 13** – Problema 04: Desafio com palitos de fósforos para formar losango.  
Fonte: *Quebra-Cabeças, Truques e Jogos com Palitos de Fósforo*. Gilbert Obermair.  
Rio de Janeiro - RJ, Ediouro, 1981.

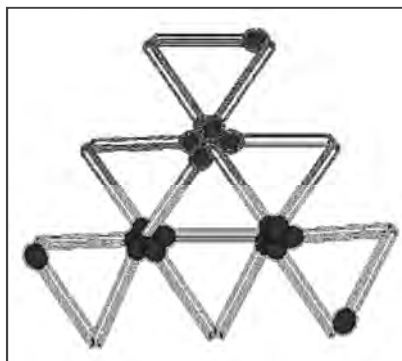
Considerando o triângulo equilátero da Figura 14, desloque 5 palitos de modo a obter 5 triângulos também equiláteros.



**Figura 14** – Problema 05: Desafio com palitos de fósforo para formar triângulos equiláteros.

Fonte: *Quebra-Cabeças, Truques e Jogos com Palitos de Fósforo*. Gilbert Obermair. Rio de Janeiro - RJ, Ediouro, 1981.

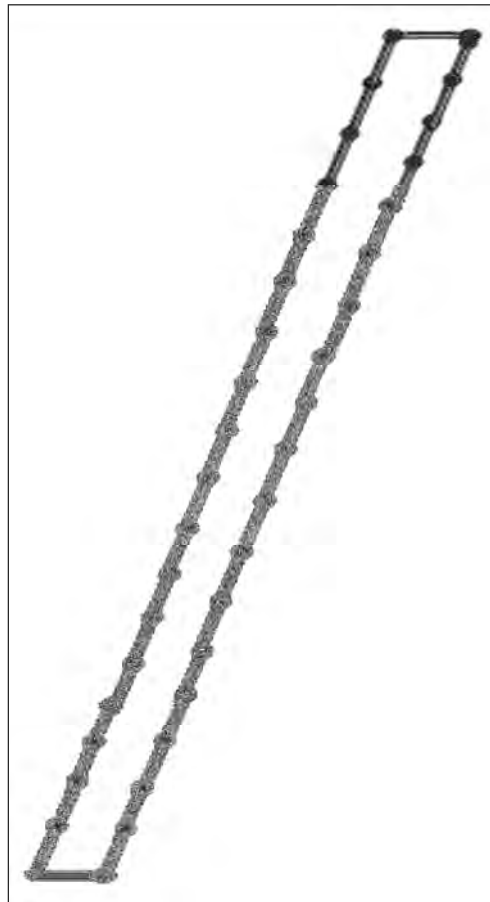
Com 18 palitos de fósforo foi construída a Figura 15, formada por 7 triângulos equiláteros congruentes, deslocar 6 palitos de modo a obter uma figura formada por 6 triângulos equiláteros congruentes.



**Figura 15** – Problema 05: Desafio com palitos de fósforo para formar triângulos equiláteros.

Fonte: SERATES, 2004. *Raciocínio Lógico matemático*. Jonofon Sérates. 11 ed. – Brasília, 2004. p. 299.

Um fazendeiro fez um cercado com 38 pedaços de cerca para prender suas ovelhas. Um dia, 2 cercas forma roubadas e o número de ovelhas havia aumentado muito. Ele foi obrigado a refazer o cercado para que a área ficasse: (a) uma vez e meia; (b) duas vezes e meia; (c) três vezes e meia; (d) quatro vezes e meia maior que o original. Qual o formato de um desses cercados?



**Figura 16** – Problema 06: Desafio com palitos de fósforo para formar polígonos.  
Fonte: *Quebra-Cabeças, Truques e Jogos com Palitos de Fósforo*. Gilbert Obermair.  
Rio de Janeiro - RJ, Ediouro, 1981.

Todos os desafios propostos com palitos de fósforo, e aqui destacados, podem ser utilizados pelo professor do Ensino Fundamental, de modo a desenvolver os diferentes níveis de pensamento geométrico do aluno, de acordo com o Modelo proposto pelos van Hiele, considerando o que o aluno já sabe e, portanto, em que nível se encontra, e os objetivos que o professor deseja que o aluno alcance, isto é, a que Nível ele pode chegar.

Para isso, os objetivos de ensino em relação ao conteúdo em tela devem ser bastante claros para o professor, considerando-se as diferentes características de cada Nível de pensamento geométrico, para que ele possa, de forma adequada, fazer as adaptações que considerar necessárias para alcançar suas metas de escolaridade com a turma.

### 3.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O TRABALHO DIDÁTICO ENVOLVENDO QUEBRA-CABEÇAS COM PALITOS DE FÓSFORO.

A resolução de problemas criados a partir de palitos de fósforos, além de exigir um raciocínio lógico matemático específico, a depender de sua natureza, exerce no aluno, de um modo geral, um grande fascínio. Na metodologia de ensino da Matemática, pode auxiliar o professor como componente motivacional, fazendo com que os alunos se interessem pelas aulas. Além disso, por ter uma estrutura não-trivial, os problemas-desafio como os aqui destacados, capacitam o aluno a elaborar novas estratégias de resolução de problemas, ajudando-o no desenvolvimento da agilidade mental e da criatividade.

Uma outra forma de explorar tais tipos de pensamento, é por meio de problemas mais abertos como, por exemplo, um que solicitasse do aluno, como objetivo principal, construir o maior número possível de formas geométricas usando uma determinada quantidade de palitos de fósforo do mesmo tamanho.

Como um palito de fósforo comum mede em média 4 cm de comprimento, podemos formar várias figuras planas, usando a superfície das carteiras ou mesas dos alunos como apoio. O professor pode dividir a turma em grupos de 4 alunos que, juntos trabalharão com uma caixa de palitos de fósforo e discutirão suas soluções, comparando-as, em um processo colaborativo de aprendizagem.

Um exemplo de atividade com essa estrutura, usando palitos de fósforo para desenvolver conceitos de Geometria Plana através da resolução de problemas é mostrado a seguir, adaptado de (VAN DE WALLE, 2009, p. 93). O desafio é descobrir quantos retângulos diferentes podem ser feitos com 22 palitos de fósforo, determinar e registrar, em um Quadro de Registro, o perímetro e a área de cada retângulo construído.

Os objetivos matemáticos para esta tarefa são:

- Comparar e contrastar as unidades usadas para medir perímetro e aquelas usadas para medir área e
- Ajudar a confrontar os conceitos de área e de perímetro.

É um quebra-cabeça com palitos de fósforo que pode ser usado pelo professor no Ensino Fundamental e que pode ter seu nível de exploração modificado, de acordo com o Ano de escolaridade no qual é proposto.

Antes de começar a tarefa, o professor pode dar algumas orientações gerais, como as que seguem:

- Encontrar um retângulo em que sejam usados *todos* os 22 palitos em seus lados;
- Registrar cada solução em papel quadriculado;
- Identificar e registrar o perímetro e a área de cada retângulo, no Quadro de Registros (que compreende um quadro constituído de colunas nas quais são registradas todas as informações pertinentes, como, a medida dos lados, perímetro e área;
- Depois de possibilitar o desenvolvimento da atividade, por meio da exploração de formas diversas, pedir a um aluno que venha à lousa e registre uma solução;
- Solicitar que os alunos registrem as dimensões do retângulo por ele encontrado como solução do desafio, no Quadro de Registro, considerando como unidade de comprimento o comprimento de um palito de fósforo. Por exemplo, “1 por 10” (o que significaria que o retângulo teria 1 palito como medida dos dois lados menores e 10 palitos como medida dos dois lados maiores, totalizando 22 palitos); ou ainda, “2 por 9”, com a mesma interpretação;
- Explorar com os alunos todas as soluções possíveis, discutindo-as do ponto de vista das semelhanças e diferenças;
- Perguntar: o que queremos dizer com perímetro? Como medimos o perímetro de uma figura plana? Depois de ajudar os alunos a definirem perímetro e a

descreverem como ele é medido, peça que determinem o perímetro dos retângulos registrados como solução, considerando como unidade de comprimento, o comprimento do palito. Peça a um aluno que vá ao quadro relacionar os perímetros dos diferentes retângulos encontrados como solução para o desafio proposto;

- Enfatizar que as unidades usadas para medir perímetro são unidimensionais, ou lineares, e que o perímetro corresponde à medida do contorno de uma figura plana;
- Solicitar que os alunos identifiquem, no Quadro de Registros, os perímetros correspondentes a cada retângulo determinado;
- Perguntar: o que queremos dizer com área? Como medimos a área de uma figura plana? Como dever(ão) ser a(s) unidade(s) que usaremos como referência para a determinação da área de uma figura plana? Depois de ajudar os alunos a definirem e descreverem como ela é medida, pedir-lhes que identifiquem e registrem as áreas dos retângulos por eles encontrados como resposta ao desafio. O professor deve ressaltar que as unidades de medida de área são bidimensionais e que servem para cobrir a região cuja dimensão queremos determinar. Considerando como unidade de área, a região quadrada compreendida com um palito de fósforo de lado, pedir-lhes que identifiquem e registrem as áreas dos retângulos por eles encontrados;
- Ao desafiar os alunos a construírem retângulos diferentes com os mesmos 22 palitos de fósforo, e registre o perímetro e a área de cada um deles, os alunos precisarão decidir o que significa “ser diferente”. Um retângulo “2 por 4” é diferente de um retângulo “4 por 2”? Embora sejam congruentes (propriedade intrínseca), eles podem querer considerar esses dois retângulos diferentes, considerando a orientação (propriedade intrínseca) como um elemento de diferença, o que pode ser feito nesta atividade.

Durante a realização da tarefa o professor deve:

- Verificar se todos os alunos compreenderam a tarefa proposta e o significado de área e de perímetro. Deve, também, procurar se há alguém confundindo esses termos;
- Verificar se eles estão registrando os retângulos adequadamente no papel quadriculado e suas dimensões na tabela do Quadro de Registro;

Depois da realização da tarefa o professor pode fazer algumas perguntas aos alunos, que o ajudará a identificar o nível de aprendizagem da turma:

- Pergunte aos alunos o que eles descobriram sobre perímetro e área. Pergunte: O perímetro permaneceu o mesmo em cada retângulo determinado? Isso é o que você esperava? Quando o perímetro é grande e quando ele é menor?
- Pergunte aos alunos como eles podem ter certeza de terem obtido todos os possíveis retângulos. Por exemplo, comece com o retângulo que tem por lado um palito, depois 2 palitos, e assim por diante. Depois de todos terem tido tempo para registrar as informações na tabela, peça que os alunos descrevam o que acontece ao perímetro quando o comprimento e a largura do retângulo mudam (Por exemplo: é possível que eles observem que “o perímetro fica menor quando o retângulo fica mais *gordo*”; que “o quadrado é o retângulo que possui o menor perímetro”, etc).

Concluindo esta atividade o professor pode fazer alguns registros avaliativos, que lhe possibilitará identificar a necessidade de retomar ou trabalhar com mais detalhes determinada ideia ou procedimento:

- Eles estão confundindo perímetro e área?
- Quando os alunos formam retângulos novos, eles estão conscientes de que o perímetro não muda porque eles estão usando o mesmo número de palitos o tempo todo?
- Estão procurando por padrões de como a área se modifica, quando o perímetro permanece constante, antes do professor orientar para essa ideia?

Um mesmo desafio, proposto com um número diferente de palitos de fósforo, promoveria a determinação de soluções diferentes, que reforçariam os conceitos de perímetro e área nos alunos.

Essa atividade, além de possibilitar o trabalho com Geometria Plana, permite o estabelecimento de conexão entre o campo do Espaço e Forma com o de Números e Operações, não apenas por meio da contagem do número de unidades de medida dos lados das figuras ou de suas áreas, ou ainda do cálculo do produto das mediadas dos lados para a determinação das áreas dos retângulos.

A atividade pode proporcionar o estabelecimento de significado para o conceito de número primo ou de número composto, uma vez que isso é facilmente observável em função do número de soluções que são encontradas a depender da

quantidade de fósforos disponibilizados para a construção dos retângulos, mantendo-se fixas suas áreas.

Por exemplo, se dispusermos de determinada quantidade de palitos de fósforo e o objetivo é encontrar todos os retângulos que podem ser feitos com ele e que possuam exatamente 13 unidades quadradas de área, só podemos encontrar uma solução: o retângulo de lados iguais a 1 e 13 palitos (a menos de sua rotação, o retângulo  $13 \times 1$ , que corresponde ao mesmo retângulo, apenas em uma posição diferente – tendo o outro lado como base). O mesmo aconteceria se a área fosse qualquer outro número primo.

Se o desafio fosse encontrarmos todos os retângulos possíveis com, por exemplo, 12 unidades quadradas de área, as soluções encontradas (retângulos de lados:  $1 \times 12$ ;  $2 \times 6$ ;  $3 \times 4$  – e suas respectivas rotações) teriam como medidas para os lados, todos os divisores do número 12. O mesmo ocorreria se a área fosse dada por qualquer número composto.

Desse modo, além de identificar as potencialidades de uma determinada atividade, dentro de um conteúdo e de um campo de conhecimento matemático específico, devemos explorar as possibilidades de conexão com outros campos, enriquecendo a formação do aluno e ampliando a sua capacidade de fazer Matemática de modo significativo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma de nossas tarefas como docente é ajudar o aluno a construir relações e ideias, e não fazer com que eles apenas preencham “páginas de repostas” a problemas padrão que a eles são propostos. Deveríamos ser capazes de olhar para o livro didático que adotamos em sala de aula como um dentre muitos dos recursos pedagógicos disponíveis, considerando as potencialidades e limitações do que é proposto pelo autor.

Devemos refletir de que forma os livros didáticos e outros materiais didáticos possíveis, possibilitam a geração de instrumentos de avaliação que possam ser usados para diagnosticar ou para guiar os ritmos de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Que tipo de atividades baseadas em *resolução de problemas* os autores dos livros didáticos brasileiros estão efetivamente introduzindo nos conteúdos de suas coleções destinadas, principalmente, ao ensino de Geometria no Ensino Fundamental?

Por ser o livro didático um importante componente do cotidiano escolar em todos os níveis de ensino, acreditamos que a presença de bons problemas em seus conteúdos, utilizados de forma planejada pelo professor “atrairá” a atenção do aluno, podendo contribuir para uma melhor compreensão dos conteúdos (e das articulações entre eles).

Somente o livro didático, por mais qualidades que tenha, recheado de bons problemas, não garante condições de possibilitar um ensino ou uma aprendizagem de qualidade, sendo importante a participação de um professor bem preparado e determinado a realizar um bom trabalho. Como descreve Lopes (2000, p. 39): “Um bom livro, nas mãos de um professor despreparado, pode ser um desastre, assim como um livro de baixa qualidade, nas mãos de um professor competente, pode resultar numa ótima aprendizagem”.

E ainda, reafirmado por Machado (1997, p. 112 apud LOPES, 2000, p. 39): “[...] utilizado de modo adequado, o livro mais precário é melhor do que nenhum livro, enquanto o mais sofisticado dos livros pode tornar-se pernicioso, se utilizado de modo catequético”.

Van de Walle apresenta algumas sugestões que tornam o uso do livro didático, não como objeto de ensino, mas, sobretudo, uma fonte de ideias para elaborar lições em vez de prescrições para o que cada lição deve ser.

- Ensine as ideias ou conceitos importantes, não as páginas.
- Pense nas partes conceituais das lições como ideias ou inspirações para planejar mais atividades baseadas em resolução de problemas.
- Deixe o ritmo de suas lições para uma unidade ser determinada pelo desempenho e compreensão dos alunos em vez da norma artificial de duas páginas por dia.
- Use as ideias da edição do professor.
- Lembre-se de que não há lei que diga que toda página deve ser feita ou todo exercício completado. (VAN DE WALLE, 2009, p. 92)

Se as tarefas e atividades forem adaptadas de páginas que cobrem o objetivo que o professor está ensinando, ele deve estar razoavelmente seguro de que elas foram projetadas para funcionar bem para aquele objetivo, embora não seja fácil preparar boas tarefas para toda lição ou conteúdo.

A utilização de quebra-cabeça com palitos de fósforo pode ser considerada uma estratégia que, ao mesmo tempo em que possibilita a exploração de conteúdos matemáticos, também permite a exploração do raciocínio lógico dos procedimentos, da capacidade de resolver problemas, uma vez que tais quebra-cabeças compreendem uma atividade dinâmica que coloca os alunos em movimento e ação física, em decorrência, não só de sua estrutura manipulativa, mas principalmente, mental.

Ao utilizar quebra-cabeças em uma aula de Geometria Plana é possível que o professor se faça perguntas do tipo: por que trabalhar com quebra-cabeças como instrumento de exploração de conteúdos com os alunos quando se tem tanta matemática a ser aprendida e não como simples desafio? Como um quebra-cabeça com palitos de fósforo pode ser associado de forma adequada à metodologia de resolução de problemas? Como identificar as potencialidades e limitações de uma atividade, no caso, de um quebra-cabeça?

Não há uma resposta simples para nenhuma dessas questões, mas todas elas podem ser parcialmente respondidas a partir do momento em que o professor se dispõe a planejar sua atividade didática pensando na complexidade daquilo que ele ensina e na capacidade de aprendizagem que têm todos os seus alunos. Para a

penúltima questão, talvez a resposta mais adequada seja a de que o aluno, com essas atividades, pode fazer uso de habilidades importantes, como observar, experimentar, levantar hipóteses, testá-las, fazer generalizações e raciocinar logicamente. Com os quebra-cabeças eles aguçam suas habilidades em Geometria, em especial na capacidade de estabelecer padrões de forma e posição, além de aprenderem a pensar criticamente.

Para a última questão, a resposta está na capacidade de ousar experimentar coisas novas em sala de aula, desapegando-se da prática tradicional e baseada apenas em resultados que, na maior parte dos casos, resumem-se ao estabelecimento de medidas numéricas (notas) à capacidade de reprodução de informações (base memorística). Somente por meio da prática o professor aprenderá a explorar com qualidade não apenas as atividades presentes nos livros didáticos, por menos interessantes que elas inicialmente aparentem ser, mas a criar suas próprias atividades, com base no que observa das ações de seus alunos em sala de aula.

Através de quebra-cabeças da forma como aqui apresentados, os alunos desenvolvem elementos de sua formação geral e matemática que não estão explicitamente incluídos no currículo escolar, como, por exemplo, a melhoria de seu relacionamento pessoal com a Matemática. Componentes de natureza atitudinal, como a capacidade de acreditar em seu potencial para aprender, são concretizados em um ambiente de ensino que estimule nos alunos a ação, a reflexão sobre a ação e o estabelecimento de relações e generalizações.

A partir da proposição de desafios como os aqui destacados, o que pode ocorrer, por exemplo, em um campeonato de resolução de problemas envolvendo quebra-cabeças com palitos de fósforo, o professor pode investigar as ideias que os alunos possuem – seus conhecimentos prévios - e, ao mesmo tempo, estimular e avaliar aprendizagens específicas, competências e potencialidades dos alunos.

O professor pode também, segundo Rêgo (2006),

Usar como ponto de partida na aprendizagem, elementos da cultura do aluno, como por exemplo, os da cultura popular, objetos concretos como jogos, desafios e quebra-cabeças matemáticos, bem como representações semi formais como desenhos e gráficos, potencializa mais a aprendizagem, torna o aluno mais motivado devido os aspectos lúdicos envolvidos, torna-o apto a realizar abstrações através de reflexões sobre situações e imagens vivenciadas

desenvolve outras habilidades além daquelas tradicionais. (RÊGO, 2006, p. 112)

No processo educacional, o estudo da Geometria auxilia o aluno a organizar o seu pensamento através do reconhecimento e da análise das propriedades características de modelos geométricos que representam os objetos do mundo à sua volta. Refletindo sobre essa questão, a partir de nossa própria experiência enquanto professor dessa modalidade de ensino, percebemos certo desconforto ao falar sobre o ensino de Geometria, o que não acontece quando nos referimos ao ensino de números, por exemplo. Esse desconforto é, muitas vezes, pelo pouco tempo dedicado ao trabalho com a Geometria nas salas de aula do Ensino Fundamental. Na perspectiva de Lorenzato (2006), falta aos professores clareza sobre o que ensinar de Geometria e/ou acerca de que habilidades desenvolverem em relação a esse campo, em cada nível de ensino.

Os quebra-cabeças, do modo como tratados no presente trabalho, têm sido utilizados por nós em atividades desenvolvidas em oficinas de Matemática realizadas com alunos do Curso de Graduação em Matemática do IFCE e com alunos de escolas públicas do Estado da Paraíba. Os participantes se divertem, mas encaram a atividade como sendo muito séria, uma vez que a resolução de problemas dessa natureza exige concentração, imaginação e o uso de raciocínio não-convencional, preparando-os para novas experiências, seja na escola ou fora dela.

Podemos pensar, como resultado de nossa investigação, em várias outras pesquisas envolvendo o mesmo tema, a exemplo do acompanhamento do professor, em sala de aula, com o uso de atividades como as aqui analisadas, e dos alunos em ação. O mesmo poderia ser feito em relação a outros conteúdos e estratégias metodológicas, uma vez que ainda há muito caminho a ser percorrido até que a Educação Básica cumpra efetivamente, e com qualidade, com seus objetivos de formação de nossos estudantes.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Marcos Teodorico Pinheiro de. **Brincando com palitos e adivinhações**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. 2004. Dissertação de mestrado. Disponível em: [http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/tana\\_giannasi\\_alvarez.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/tana_giannasi_alvarez.pdf) . Acessado em 22/03/2011.

ANDRADE, José Antônio Araújo e NACARATO Adair Mendes. **Tendências didático-pedagógicas para o ensino da geometria**. Itatiba, SP: USF, 2009.

BRASIL. Guia de Livros Didáticos – 5ª a 8ª séries, PNLD/2008. Brasília: SEF/MEC, 2008.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio/ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 1998.

\_\_\_\_\_. PCN – Matemática – 5ª a 8ª séries. Brasília: SEF/MEC, 1997.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. **IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica**. Disponível em: <http://ideb.inep.gov.br/Site/> Acesso em 26/03/2011.

\_\_\_\_\_. SAEB. Disponível em: [http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news07\\_01.htm](http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news07_01.htm). Acessado em : 02/20/2011

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**: ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção Tudo é Matemática).

\_\_\_\_\_. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 6a Ed. São Paulo: Editora Ática, 1991.

GARDNER, M. **Divertimentos matemáticos**. Tradução de A. Nacer. 2. ed. São Paulo: IBRASA, 1967.

HUETE, J. C. Sánches e BRAVO, J. A. Fernández. **O ensino da matemática-fundamentos teóricos e bases epistemológicas**. Porto Alegre, Artmed, 2006.

KALEFF, Ana Maria M. R; REI, Dulce Monteiro & GARCIA, Simone dos Santos. **Quebra-cabeças geométricos e formas planas**. 2ª Ed. Niterói, EDUFF, 1997.

KLINE, Morris. **O fracasso da Matemática Moderna**. Ibrasa, 1976.

LOPES, J. de A. **Livro Didático de Matemática: Concepção, Seleção e Possibilidades frente a Descritores de Análise e Tendências em Educação Matemática**. Campinas:UNICAMP/FE (Tese de Doutorado), 2000.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006 (Coleção Formação de Professores).

LÜDKEN, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MELLO, Guiomar Namó. **O livro didático no sistema de ensino público no Brasil**. (1999). Disponível em: <http://www.namodemello.com.br/pdf/escritos/outros/livrodidat2.pdf>. Acessado em 22/03/2011.

MORACO, A.S.C.T. **UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS ADQUIRIDOS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Campus de Bauru, 2006. Disponível em: [www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/.../moraco\\_asct\\_me\\_bauru.pdf](http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/.../moraco_asct_me_bauru.pdf) Acessado em 09/03/2011.

NUNES, Célia Barros. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**. 2010, p. 75-87. Disponível em: [www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/.../nunes\\_cb\\_dr\\_rcla.pdf](http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/.../nunes_cb_dr_rcla.pdf) . Acesso em: 28/02/2011.

OBERMAIR, Gilbert. **Quebra-Cabeças, Truques e Jogos com Palitos de Fósforo**. Rio de Janeiro - RJ, Ediouro, 1981.

PAVANELLO, R. M. e ANDRADE, N. G. Formar Professores Para Ensinar Geometria: um desafio para as licenciaturas em Matemática. *Educação Matemática em Revista – SBEM*, ano 9, n. 11, p.78-87, 2002.

\_\_\_\_\_. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, ano 1, n.1, 1996.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**: tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. RJ: Interciência, 1995.

PROJETO ARARIBÁ: matemática/obra coletiva, 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2008.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; FOSSA, J. A. & PAIVA, J. P. A. A. **Padrões de Simetria: do cotidiano à sala de aula**. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2006.

ROCHA, J. L. da. **A Matemática do curso secundário na Reforma Francisco Campos**. 2001. Dissertação (mestrado em Matemática) – PUC – RJ.

SCHUBRING, G. **O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha:** um estudo de caso na transmissão de conceitos. *Zetetiké*, Campinas, v. 7, n. 11, 1999. Disponível em: [www.Inep.gov.br/pesquisa/bbe-online/obras.asp?autor=SCHUBRINB...](http://www.Inep.gov.br/pesquisa/bbe-online/obras.asp?autor=SCHUBRINB...) Acessado em: 25/02/2011.

SÉRATES, Jonofon. **Raciocínio lógico.** 11<sup>a</sup> ed. Brasília: Editora Jonofon, 2004

VALENTE, Wagner. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).** São Paulo: Annablume : FAPESP, 1999.

VALENTE, W.R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil.** Brasília, DF: UNB, 2004.

VALENTE, Wagner R. **QUEM SOMOS NÓS, PROFESSORES DE MATEMÁTICA?** Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 11-23, jan./abr. 2008 11  
Disponível em <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em 02/03/2010

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e Aplicação em Sala de Aula.** 6a edição. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Editora Artmed, 2009.