

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO
LINHA DE PESQUISA: PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

MARIA ALVES DE AZERÊDO

**AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE MULTIPLICAÇÃO:
UM INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA**

**JOÃO PESSOA - PB
2013**

MARIA ALVES DE AZERÊDO

**AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE MULTIPLICAÇÃO:
UM INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do grau de doutor.

Área de Concentração: Educação

Linha de Pesquisa: Processos de Ensino e aprendizagem

Orientação: Prof. Dra. Rogéria Gaudencio de Rêgo

JOÃO PESSOA
2013

A993r

Azerêdo, Maria Alves de.

As representações semióticas de multiplicação: um instrumento de mediação pedagógica / Maria Alves de Azerêdo.-- João Pessoa, 2013.

282f. : il.

Orientadora: Rogéria Gaudêncio de Rêgo

Tese (Doutorado) – UFPB/CE

1. Educação. 2. Ensino da matemática - anos iniciais. 3. Multiplicação. 4. Registros - representações semióticas. 5. Mediação pedagógica.

UFPB/BC

CDU: 37(043)

MARIA ALVES DE AZEREDO

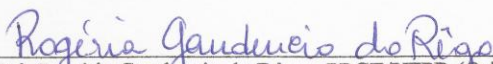
AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE MULTIPLICAÇÃO:
UM INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA

Linha de Pesquisa: Processos de Ensino e de Aprendizagem

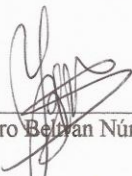
Data da defesa: 08 / Março / 2013

Resultado: Aprovada

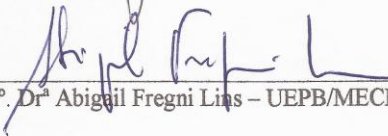
BANCA EXAMINADORA



Prof.^a. Dr.^a. Rogéria Gaudêncio do Rêgo - PPGE/UFPB (Orientadora)



Prof.^a. Dr.^a. Isaura Beltrán Núñez - PPGE/UFRN



Prof.^a. Dr.^a. Abigail Fregni Lins - UEPB/MECM



Prof.^a. Dr.^a. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba - UFPE/EDUMATEC

Prof.^a. Dr.^a. Adelaide Alves Dias - UFPB/PPGE



Prof.^a. Dr.^a. Ângela Maria Dias Fernandes - UFPB/PPGE

DEDICATÓRIA

A todos os professores que atuam nos anos iniciais de escolarização e são apaixonados pelo que fazem.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço ao Senhor da Vida por ter a oportunidade de fazer algo que eu sou apaixonada: estudar! Estudar para conhecer, contribuir e intervir. Contribuir com o desenvolvimento profissional de professores que atuam na educação básica para que alunos de classes populares tenham acesso ao conhecimento matemático. Obrigada por me ajudar a encontrar tranquilidade e paciência nessa longa caminhada de construção e busca de conhecimento. Por tantas idas e vindas, altos e baixos, e por esse trabalho final, acredito que fui abençoada.

Ao meu esposo e companheiro Ricardo, pelo apoio incondicional, em cada momento de precisão. Pela força e estímulo sempre bem-vindos ao longo desses quatro anos de estudos, leituras, pesquisa de campo e escrita da tese. Pela orientação, cuidado e atenção com todas as audiograções realizadas. Sem palavras...

Às minhas filhotas, Marina e Cecília, pelo carinho, amor e respeito a mim dedicados. Pela compreensão das minhas ausências em tantos momentos, principalmente nesses últimos meses. Pelo ‘presente’ e brincadeiras para relaxar, pela torcida descontraída e bem humorada em momentos sempre necessários. Vocês são meus amores e todo esse esforço foi por vocês, também.

À Prof^a Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo, orientadora, amiga e grande inspiradora na atividade de contribuir com a melhoria do Ensino de Matemática na Paraíba. Por suas orientações carregadas de muito respeito e consideração. Pela cobrança serena e tranquila, mas ao mesmo tempo, pontual e direta. Pela atenção, apoio e condução em tantos momentos de ‘crises’ e dúvidas. Pelas correções detalhadas do trabalho, inclusive do Português. Obrigada pela parceria acadêmica/amiga nesse meu processo de desenvolvimento profissional.

Aos professores Isauro Beltran Núñez, Abigail Fregni Lins e Adelaide Alves Dias pelas contribuições valiosíssimas na perspectiva de imprimir qualificação a este trabalho. O resultado aqui apresentado é fruto também de suas orientações.

Às professoras que participaram do grupo de discussão, pela disponibilidade, envolvimento, compromisso e alegria. Pelo desejo de aprender, de ensinar, de interagir, de partilhar. Meu profundo respeito a cada uma de vocês. Somos colegas, antes de tudo.

Aos alunos/crianças de todas as turmas envolvidas. Foi pensando no desenvolvimento e formação Matemática de vocês que esse trabalho foi realizado.

À minha amiga Monalisa, considerada em alguns momentos ‘co-orientadora para assuntos da tese’, pela escuta perspicaz e respeitosa em tantos momentos de ‘crise’, incertezas e escolhas, tendo sempre uma questão inquietante que me fazia pensar. Além de sua capacidade acadêmica, você é alguém que sei que posso contar sempre. Obrigada também pela ajuda na organização e sistematização dos dados dos alunos.

Às duas grandes amigas conquistadas no curso do doutorado: Marilene e Luciclea. Obrigada pela amizade, pelos encontros mensais ‘de almoço’, nos quais, mesmo nossas teses sendo o assunto principal, podíamos dividir problemas vivenciados, descontraí e rir da vida. Valeu pelo encontro.

Aos meus irmãos/irmãs que tanto me inspiram nesse processo de estudar, conhecer e crescer academicamente. Aprendi a gostar de estudar pela história de vida e de conquistas de cada um de vocês. Obrigada pela torcida!

Às minhas irmãs, Genilda, Gei, Vanice, Cele e Vaneide, pela sabatina proporcionada em Janeiro desse ano sobre meu trabalho. Tenho muito orgulho de ser irmã de cada uma de vocês!

Aos professores do PPGE, principalmente Adelaide Dias e Zé Neto, por suas discussões e opções teórico-metodológicas que me inspiram na perspectiva de uma educação crítica e para a liberdade.

Aos amigos da turma 29, do Doutorado, pela possibilidade de convivência, aprendizagem e crescimento com a diversidade de opiniões, posturas e aportes teórico-metodológicos.

Aos inúmeros amigos e amigas que torceram por mim em todo esse processo, enviando energias positivas para que eu chegasse até aqui. Obrigada por vocês estarem em minha vida.

“(...) Mas é preciso ter força
É preciso ter raça
É preciso ter gana sempre
Quem traz no corpo a marca
Maria, Maria
Mistura a dor e a alegria

Mas é preciso ter manha
É preciso ter graça
É preciso ter sonho sempre
Quem traz na pele essa marca
Possui a estranha mania
De ter fé na vida (...).

(Milton Nascimento)

RESUMO

O Ensino de Matemática nos anos iniciais da escolarização é o contexto no qual se insere a nossa pesquisa, tendo como objetivo geral analisar o ensino de multiplicação, buscando evidenciar o lugar/papel atribuído às representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem, relacionando-as ao conceito de mediação pedagógica. Nesse contexto, defendemos a tese que as representações semióticas de multiplicação constituem instrumentos de mediação pedagógica no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Para defendê-la, problematizamos os conceitos de ensino, de aprendizagem e mediação pedagógica, com a fundamentação da teoria Histórico-cultural, com as contribuições de Vigotski e Leontiev; o conceito de registros de representação semiótica, de Raymond Duval, como também nos baseamos em autores da Educação Matemática que vêm pesquisando o ensino da disciplina e o tema da multiplicação. A metodologia para a coleta de dados baseou-se na pesquisa qualitativa, a qual tem como indicação a investigação de fenômenos sociais e complexos que exigem maior descrição e discussão. O procedimento metodológico escolhido foi o grupo de discussão com professores de anos iniciais (Rubio e Varas, 1999) e para efetivá-lo, montamos um curso sobre o Ensino de Multiplicação de Números Naturais que funcionou ao mesmo tempo como lócus da pesquisa de campo e espaço de formação continuada para as 08 (oito) professoras participantes, o que o caracterizou também, como uma intervenção. Durante esse processo foram visitadas as turmas das professoras e coletadas informações sobre a compreensão dos alunos acerca da multiplicação. A análise de conteúdo foi o procedimento utilizado para organização, sistematização e análise de dados, tendo a análise temática como meio de identificação de ‘núcleos de sentido’. Os dados foram sistematizados em dois grandes eixos: a multiplicação, seu ensino e compreensão dos alunos; as representações semióticas de multiplicação utilizadas no ensino e produzidas pelas crianças. Os resultados apontaram que o ensino de multiplicação ainda está centrado na ideia de adição de parcelas iguais, com forte apelo ao uso do material concreto, não sendo explorado o cálculo mental, por meio dos fatos fundamentais. Sobre a compreensão dos alunos, observaram-se dificuldades em todos os significados da operação explorados, inclusive naqueles mais usados pelas professoras, sendo que nos problemas de multiplicação inversa e combinatória isto foi mais evidente. Evidenciamos variedade de representações semióticas de multiplicação no ensino, se considerarmos todas as turmas, podendo ser ainda acrescentado o uso de tabelas e gráficos. Em relação aos registros dos alunos, identificamos a ausência de um trabalho pedagógico sistemático, envolvendo a explicitação, o tratamento e a conversão, uma vez que as dificuldades das crianças nessas tarefas foram significativas. Concluimos que as representações semióticas de multiplicação podem constituir-se em instrumentos de mediação pedagógica à medida que o trabalho dos professores se encaminhe para tal finalidade, fomentando na sala de aula discussão e reflexão sobre diferentes registros semióticos e estratégias de solução de problemas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática nos Anos iniciais. Multiplicação. Registros de representações semióticas. Mediação pedagógica.

ABSTRACT

The Teaching of Mathematics in the early years of schooling is the context in which our research is inserted. The general objective is to analyze the teaching of multiplication aiming to demonstrate the place / role attributed to semiotic representations in the process of teaching and learning, relating them to the concept of pedagogical mediation. In this context, we advocate the thesis that semiotic representations of multiplication are instruments of mediation in the process of teaching and learning that content. To defend it, we discussed the concepts of teaching, learning and pedagogical mediation, supported on cultural-history theory, with contributions by Vygotsky and Leontiev, the concept of semiotic representation registers by Raymond Duval, and we also draw on authors in Mathematics Education who have been researching the teaching of the subject, particularly, multiplication. The methodology for data collection was based on qualitative research, which follows the investigation of complex social phenomena that require further description and discussion. The chosen methodological approach was a discussion group with teachers of early years (Rubio and Varas, 1999), by means of a course we outlined on Teaching Multiplication of Natural Numbers which served at the same time as the locus of field research and a space for academic qualification for the 08 (eight) participating teachers, which also featured as an intervention. During this process the teachers' classes were visited and information collected about students' understanding of multiplication. Content analysis was the procedure used for organizing, systematizing and analyzing data, and thematic analysis constituted a means of identifying 'units of meaning'. The data were systematized in two main areas: multiplication, its teaching and students' understanding; semiotic representations used in the teaching of multiplication and produced by the children. The results showed that the teaching of multiplication is still centered on the idea of adding equal portions, with strong appeal to the use of concrete material; mental calculation, through fundamental facts, is a neglected strategy. On students' understanding, we observed difficulties in all explored meanings of the operation, including those most commonly used by teachers; besides, in problems of reverse and combinatorial multiplication this was most evident. Considering all the classes, we demonstrate the variety of semiotic representations of multiplication in teaching, as well as tables and graphs. Regarding students' records, we identified the lack of a systematic pedagogical work, involving the clarification, treatment and conversion, since the children's difficulties in these tasks were significant. We conclude that the semiotic representations of multiplication can become pedagogical mediation tools as long as the teachers' work focuses on this purpose, so as to encourage discussion and reflection in the classroom on the different semiotic records and strategies for problem solving.

Keywords: Teaching Mathematics in the early years. Multiplication. Records of semiotic representations. Pedagogical mediation.

RESUMEN

La enseñanza de Matemáticas en los primeros años de la escolarización es el contexto en el que está inserida nuestra investigación, que tiene como objetivo general analizar la enseñanza de la multiplicación, buscando evidenciar el lugar/papel atribuido a las representaciones semióticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, relacionándolas al concepto de mediación pedagógica. En ese contexto, defendemos la tesis de que las representaciones semióticas de multiplicación constituyen instrumentos de mediación pedagógica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ese contenido. Para defenderla, problematizamos los conceptos de enseñanza, de aprendizaje y mediación pedagógica, con la fundamentación de la teoría Histórico-cultural, con las contribuciones de Vigotski y Leontiev; el concepto de registros de representación semiótica, de Raymond Duval y nos basamos también en los autores de la Educación Matemáticas que están investigando acerca de la enseñanza de la referida asignatura y el tema de la multiplicación. La metodología para la recogida de datos está basada en la investigación cualitativa, que tiene como indicación la investigación de fenómenos sociales complejos que exigen una mayor descripción y discusión. El procedimiento metodológico elegido fue el grupo de discusión con profesores de los primeros años (Rubio y Varas, 1999) y para tornarlo efectivo, elaboramos un curso acerca de la Enseñanza de la Multiplicación de Números Naturales que funcionó al mismo tiempo como *locus* de la investigación de campo y espacio de formación continuada para las 08 (ocho) profesoras participantes, lo que lo caracterizó también, como una intervención. Durante ese proceso fueron visitados los grupos de las profesoras y recogidas informaciones acerca de la comprensión de los alumnos sobre la multiplicación. El análisis del contenido fue el procedimiento utilizado para la organización, sistematización y análisis de datos, estando el análisis temático como medio de identificación de ‘núcleos de sentido’. Los datos fueron sistematizados en dos grandes ejes: la multiplicación, su enseñanza y comprensión de los alumnos; y las representaciones semióticas de multiplicación utilizadas en la enseñanza y producidas por niños. Los resultados demuestran que la enseñanza de la multiplicación aún está centrada en la idea de suma de parcelas iguales, con un fuerte apelo al uso del material concreto, no explorando el cálculo mental, por medio de los fatos fundamentales. Acerca de la comprensión de los alumnos se observó dificultades en todos los significados de la operación explorada, incluso en aquellos más utilizados por las profesoras, en los problemas de multiplicación inversa y combinatoria esto fue más evidente. Observamos una variedad de representaciones semióticas de multiplicación en la enseñanza, si consideramos todos los grupos, se puede aún añadir el uso de tablas y gráficos. En relación a los registros de los alumnos, identificamos la ausencia de un trabajo pedagógico sistemático, envolviendo la explicitación, el tratamiento y la conversión, una vez que las dificultades de los niños en esas tareas fueron significativas. Concluimos que las representaciones semióticas de multiplicación pueden constituirse en instrumentos de mediación pedagógica a medida que el trabajo de los profesores camine hacia esa finalidad, fomentando en la clase discusión y reflexión sobre distintos registros semióticos y estrategias de solución de problemas.

Palabras-clave: Enseñanza de Matemáticas en los primeros años. Multiplicación. Registros de representaciones semióticas. Mediación pedagógica.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Médias Referentes às Avaliações da 4ª Série/5ºAno – Prova Brasil/SAEB	24
Tabela 2 - Quantidade de alunos participantes do Diagnóstico.....	159
Tabela 3 – Índices de Acertos nas Turmas de 2º ano, distribuídos por Significados dos Problemas	161
Tabela 4 – Índice de acertos de turmas do 3º ao 5º ano em Problemas multiplicativos.....	171
Tabela 5 – Índice de acertos com problema de Multiplicação Comparativa.....	174
Tabela 6 – Índice de acertos com problema de Proporção Simples - N° menor e maior	176
Tabela 7 – Índice de acertos com problema de Proporção – não direta e muitos-a-muitos ...	178
Tabela 8 – Índice de acertos com problema de Multiplicação Inversa (divisão)	179
Tabela 9 – Índice de acertos com o Problema de Configuração Retangular	181
Tabela 10 - Acertos com o Problema de Combinatória.....	183
Tabela 11 – Índice de acertos e erros por tipos de registros - Problema de comparação	214
Tabela 12- Índice de acertos e erros por tipos de registros – Problema com proporção simples com n° menor	217
Tabela 13 – Índice de acertos e erros por tipo de registro - Proporção simples (n° maior)....	221
Tabela 14 - Índice de acertos e erros por tipo de registro - Proporção simples (muitos-a-muitos).....	224
Tabela 15- Índice de acertos e erros por tipo de registros - multiplicação inversa	228
Tabela 16- Resultados dos alunos na questão de tratamento de cálculo escrito.....	237
Tabela 17 – Índice de acertos em situações de conversões	239

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Quatro Significantes para um Significado	106
Figura 2- Diagnóstico Aplicado aos Alunos do 2º ano	160
Figura 3 - Registro da Aluna 5, 2º ano 3 – Problema 1	162
Figura 4 - Registro do Aluno 6, 2º ano 1 – Problema 1	162
Figura 5 - Registro do aluno 8, 2º ano 1 – Problema 1.....	163
Figura 6 - Registros do Aluno 8, 2º ano 2 e a aluna 16, 2º ano 1 – Problema 1.....	163
Figura 7 - Registros do aluno 8 e da aluna 4, 2º ano 3 – Problema 1.....	163
Figura 8 - Registros do aluno 12, 2º ano 3 e aluna 17, 2º ano 1 – Problema 1.....	164
Figura 9 - Registro da aluna 1, turma 1, 2º ano – Problema 1.....	164
Figura 10 - Registros do aluno 8, 2º ano 2 e do aluno 11, 2º ano 1 – Problema 1	165
Figura 11 – Registros do aluno 15, 2º ano 1 e do aluno 9, 2º ano 3 – Problema 1.....	166
Figura 12 – Registros dos alunos 3 e 13, 2º ano 2 – Problema 1	166
Figura 13 - Desenho do Problema 2	168
Figura 14 Registros dos alunos 3, 6 e 16, 2º ano 1 – Problema 3	169
Figura 15 - Registros do Aluno 16, 2º ano 1 e do Aluno 15, 2º ano 2 – Problema 4.....	170
Figura 16 - Registros do Aluno 11, 2º ano 3 e do Aluno 2, 2º ano 2 – Problema 4.....	170
Figura 17 - Problema 2 do Diagnóstico - Proporção não direta	177
Figura 18 - Problema 8 do Diagnóstico – Proporção muitos-a-muitos	178
Figura 19 - Problema 5 do Diagnóstico – Configuração Retangular	180
Figura 20 - Problema 6 do Diagnóstico – Combinatória.....	182
Figura 21 - Análise de Estratégia de Solução - Professora 3P1	188
Figura 22 - Análise de Estratégia de Solução - Professoras 2P2 e 2P3.....	188
Figura 23 - Análise de Estratégia de Solução - Professoras 2P2 e 3P2.....	189
Figura 24 - Análise de Estratégia de Solução - Professoras 2P2 e 3P2.....	190
Figura 25 - Registro de Solução ao Problema 2, Tarefa 1 - Professora 3P2	204
Figura 26 - Registro de Solução Professoras 2ºP3, 3ºP1 e 2ºP1, respectivamente.....	205
Figura 27 - Problema 3 da Tarefa 1 aplicada às Professoras.....	207
Figura 28 - Registro das Professoras 3P1, 2P1 e 2P3 respectivamente ao problema 3.....	208
Figura 29 - Registro da Professora 3ºP1 - Problema 3	209
Figura 30 - Registros do aluno 13 do 5º ano 1 e do aluno 9, 4º ano – Problema 3	215
Figura 31 - Registros do Aluno 4, 4º ano e Aluno 5, 3º ano 2 – Problema 3	215
Figura 32 - Registros do Aluno 12, 4º ano e Aluno 4, 5º ano 2 – Problema 3	216

Figura 33 - Registros do Aluno 15, 3º ano 2; Aluno 1, 4º ano; Aluno 10, 4º ano – Problema 3	216
Figura 34 - Registros do Aluno 11, 3º ano 1; Aluno 9, 5º ano 2; Aluno 3, 5º ano 1	216
Figura 35 - Registros do aluno 8, 4º ano; aluno 7, 5º ano 2; aluno 10, 5º ano 2; aluno 13, 3º ano 1 – Problema 4.....	218
Figura 36 - Registros do aluno 6, 3º ano 1 e aluno 4, 5º ano 1 – Problema 4	218
Figura 37 - Registro do aluno 11, 3º ano 2 – Problema 4.....	218
Figura 38 - Registros dos alunos 6 e 10, 4º ano – Problema 4	219
Figura 39 - Registros do aluno 5, 5º ano 2 e do aluno 19, 5º ano 1 – Problema 4	219
Figura 40 - Registros do aluno 16, 5º ano 1; aluno 3, 5º ano 2 e aluno 11, 4º ano – Problema 4	220
Figura 41 - Registros do aluno 4, 5º ano 2; aluno 10, 5º ano 1 e aluno 5, 5º ano 1 – Problema 4	220
Figura 42 - Registros do aluno 3, 4º ano; aluno 16, 5º ano 2; aluno 14, 4º ano e aluno 5, 3º 2 – Problema 7.....	222
Figura 43 - Registros do aluno 14, 5º ano 2; aluno 4, 5º ano 2; aluno 10, 4º ano – Problema 7	222
Figura 44 - Registros do aluno 17, 3º ano 2 e aluno 10, 3º ano 1 – Problema 7	223
Figura 45 - Registros do aluno 21, 3º ano 2; aluno 11, 3º ano 2; aluno 1, 5º ano 1 e aluno 11, 4º ano (respectivamente) - Problema 7	223
Figura 46 - Registros do aluno 7, 5º ano 1; aluno 7, 4º ano; aluno 13, 5º ano 1 – Problema 7	223
Figura 47 - Registros com desenhos dos aluno15, 4º ano; aluno 4, 4º ano; aluno 4, 5º ano 2 – Problema 8.....	226
Figura 48 - Registros dos alunos 18, 5º ano 1; aluno 7, 5º ano 1 e aluno 10, 5º ano 2 – Problema 8.....	226
Figura 49 - Registros do aluno 10, 4º ano; aluno 13, 5º ano 2; aluno 8, 3º ano 1 – Problema 8	226
Figura 50 - Registros do aluno 15, 3º ano e aluno 7, 4º ano – Problema 8	227
Figura 51 - Registros do aluno 13, 3º ano 1; aluno 10, 3º ano 2; aluno 13, 5º ano 1	227
Figura 52 - Registros do aluno 13, 3º ano 1; aluno 22, 3º ano 2; aluno 10, 5º ano 2; aluno 16, 3º ano 2 – Problema 1	229
Figura 53 - Registros do aluno 1, 4º ano; aluno 1, 3º ano 2; aluno 15, 5º ano 1;	229
Figura 54 - Registros do aluno 14, 4º ano e aluno 13, 3º ano 2 – Problema 1	230

Figura 55 - Registro do aluno 3, 5º ano 1 – Problema 1.....	230
Figura 56 - Registros do aluno 13 e do aluno 7, ambos do 4º ano – Problema 1.....	231
Figura 57 - Registros com a operação divisão do aluno 2, 5º ano 1; aluno 10, 5º ano 1, aluno 12, 5º ano 2; aluno 9, 5º ano 2 – Problema 1	231
Figura 58 - Registro com a tabela de multiplicação do aluno 20, 5º ano 1 – Problema 1.....	232
Figura 59- Problema 3 do instrumento 2 aplicado aos alunos do 3º ao 5º ano.....	240
Figura 60 - Resposta do Aluno 4º ano ao Problema 3.....	241
Figura 61 - Problema 7 do Instrumento 2 aplicado aos alunos do 3º ao 5º ano	242
Figura 62 - Problema 8 do Instrumento 2 aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.....	243

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Distribuição das professoras por escolas e ano de atuação	121
Quadro 2 - Apresentação das professoras.....	124
Quadro 3 - Dificuldades dos alunos em relação à Matemática	126
Quadro 4 - Resumo das sequências de trabalho com a multiplicação.....	133
Quadro 5 - Estratégias Utilizadas pelas Professoras no Ensino de Multiplicação	197
Quadro 6- Problemas elaborados pelas professoras para a sentença 307×15	210
Quadro 7 - Problemas elaborados pelas professoras para a sentença 4×120	211
Quadro 8 - Problemas elaborados pelos alunos para a sentença 3×6	245

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	20
1.1 O contexto de investigação	23
1.2 O problema investigado e os conceitos envolvidos	25
2. A MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS E O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO	30
2.1 A Matemática e seu Ensino: desafios contemporâneos	30
2.2 O Ensino de Matemática nos Anos Iniciais	34
2.3 Situando o conceito de multiplicação – história e perspectivas curriculares.....	39
2.4 Os significados da multiplicação	43
2.5 A adição e a multiplicação – continuidade e descontinuidade: para além da ideia de adição de parcelas iguais.....	48
2.6.1 Discutindo os Procedimentos de Cálculo.....	56
3. A CONTRIBUIÇÃO DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL NA MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA	62
3.1 Contribuições da Teoria Histórico-Cultural para o Ensino de Matemática – Vigotski ..	62
3.1.1 O pensamento, a linguagem e o desenvolvimento de conceitos	67
3.1.2 Os conceitos espontâneos e científicos	71
3.2 O Pensamento de Leontiev - a atividade, a consciência e a linguagem.....	76
3.3 A Mediação Pedagógica e o Ensino de Matemática	85
4. AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO	89
4.1 A Linguagem e a Matemática	89
4.2 O Significado e o Sentido na Matemática e em seu Ensino	94
4.3 De Vigotski a Duval: As Representações Semióticas na Mediação Pedagógica	98
4.4 Raymond Duval e a Contribuição das Representações Semióticas	100
4.4.1 Os diferentes tipos de representações.....	101
4.4.2 As Representações Semióticas – funções e atividades cognitivas	104
4.4.3 O Tratamento de Representações Semióticas	107

4.4.4 A Conversão de Representações Semióticas.....	109
5. OS CAMINHOS DA PESQUISA DE CAMPO	117
5.1 A Constituição do Grupo de Discussão	120
5.2 O Desenvolvimento do Curso.....	121
5.3 As Professoras Participantes	123
6. O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS	127
6.1 Contextualização - dificuldades e potencialidades vivenciadas	127
6.2 O Ensino de Multiplicação	132
6.2.1 A sequência	133
6.2.1 Os Significados	135
6.2.3 Materiais utilizados	137
6.2.4 Resolução de problemas.....	138
6.2.5 Jogos e brincadeiras	139
6.2.6 Os tipos de cálculo	140
6.3 Os Significados de Multiplicação a partir da Elaboração de Problemas	140
6.4 Os diferentes tipos de cálculo e a multiplicação - o cálculo mental, o cálculo escrito e com a calculadora	144
6.4.1 Discutindo um pouco mais sobre tabuada.....	150
6.4.2 A tabuada x a calculadora	154
6.5 Os Alunos e a Compreensão sobre a Multiplicação	158
6.5.1 Os saberes dos alunos do 2º ano.....	160
6.5.2 A compreensão de multiplicação pelas crianças de 3º, 4º e 5º anos	171
7. AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO	186
7.1 As professoras e as representações semióticas dos estudantes	187
7.2 As Professoras e as Representações Semióticas no Ensino de Multiplicação	195
7.2.1 Representações Semióticas	195
7.2.2 A Utilização Pedagógica das Representações das Crianças.....	200

7.2.3 Ampliando o conhecimento sobre as representações semióticas de multiplicação	202
7.3 Os Registros de Representações dos Estudantes sobre a Multiplicação.....	212
7.4 Ampliando a Investigação - Transformações de Representações Semióticas de Multiplicação	233
7.4.1 O tratamento e a conversão de representações semióticas	236
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	246
REFERÊNCIAS	253
APÊNDICE A – Questionário Inicial.....	264
APÊNDICE B – Refletindo sobre o Ensino de Matemática	266
APÊNDICE C – Relato de Experiência	267
APÊNDICE D – Elaboração de Problemas	268
APÊNDICE E – Refletindo sobre a Resolução de Problemas	269
APÊNDICE F – Diagnóstico aplicado nas turmas de 2º ano	270
APÊNDICE G – Diagnóstico Aplicado às turmas de 3º ao 5º anos	271
APÊNDICE H – Tarefa 1 – Professores.....	273
APÊNDICE I – Tarefa 2 (Professores)	274
APÊNDICE J – Instrumento 2 - Tratamento e conversão (alunos do 3º ao 5º anos)	275
ANEXO A – Transcrição do Relato de Experiência – Ensino de Multiplicação	277

1. INTRODUÇÃO

Pensar o processo educacional à luz das referências críticas implica em situá-lo em um contexto mais amplo, no qual suas finalidades incluem a apropriação de saberes acumulados pela humanidade com vistas para o alcance de transformações sociais. A sistemática da apropriação de conhecimentos no contexto escolar exige a (re)significação de princípios, conceitos, procedimentos, valores e desenvolvimento de capacidades que se constituem em meios e instrumentalização para que as pessoas possam compreender e atuar na realidade histórico-social marcada por desigualdades e contradições. Nessa perspectiva, a escola, espaço específico de apropriação de conhecimento e formação humana, se constitui em lugar privilegiado de construção de um projeto maior, a construção de uma sociedade mais justa, mais ética e, portanto, mais humana.

A educação escolar possui uma ação intencional de socializar o saber produzido historicamente e, para isso, atua em duas frentes: de um lado, na identificação dos elementos culturais/conhecimentos relevantes para o processo de humanização, e de outro lado, na definição de formas mais adequadas de se atingir esse objetivo. Ou seja, o conteúdo a ser ensinado e a forma de ensiná-los são partes do objeto da educação escolar, ou da própria Pedagogia. Assim, a discussão sobre o conteúdo e a forma fará parte dessa investigação na especificidade do ensino e aprendizagem do conteúdo de Matemática, principalmente com multiplicação de números naturais.

O contexto de partida, portanto, é o ensino de Matemática dos anos iniciais, justificado pela nossa experiência enquanto profissional desse nível de escolaridade, atuando como professora ou como pedagoga. Como professora em escolas particulares e públicas (1987 – 1999); como pedagoga¹ na educação infantil, na Creche-Escola da UFPB, ainda campus Campina Grande/PB (1996 – 1999); como Pedagoga na Secretaria de Educação do Município de João Pessoa (1999– 2004); assessora pedagógica do Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica LEPAC/UFPB (1999 – 2004), formadora de professores que atuam nesses segmentos, em projetos de formação continuada há mais de 15 (quinze) anos, e como professora do curso de Pedagogia na Universidade Federal da Paraíba – UFPB, desde 2004, lecionando as disciplinas de Didática, Ensino de Matemática na Educação Infantil e Ensino Fundamental e Estágio Supervisionado.

¹ Nosso primeiro vínculo com a UFPB, profissionalmente foi como servidora técnico-administrativo.

O ensino da Matemática, especificamente, começou a ser nosso objeto de investigação quando ingressamos no Curso de Especialização em Educação Básica, no Campus II², Campina Grande/PB e o concluímos com uma monografia sobre o processo de construção do conceito de número pela criança pequena, tendo por referência as ideias piagetianas. Nesse trabalho, a conquista acadêmica significou a aproximação com a epistemologia de Piaget, seu processo de pesquisa detalhado e denso, a partir de entrevistas clínicas com crianças sobre a construção do conceito numérico. Nesse período, um encantamento se deu por reconhecer a criança como um ser que pensa, que levanta hipóteses, que possui uma lógica diferente do adulto e que, portanto, é também sujeito no processo de conhecer.

Em 2002, de volta ao Campus I - João Pessoa, integramos a equipe do LEPAC, juntamente com a Prof^a Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo, acompanhando estagiários e bolsistas nas atividades desenvolvidas por esse Laboratório de Matemática, junto às escolas públicas de João Pessoa/PB e região. Nesse período, ingressamos no curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPB/CE (2002-2004), o qual proporcionou uma dissertação cujo principal objetivo foi analisar a mediação pedagógica na resolução de problemas matemáticos em turmas de 4^a série (hoje, 5^o ano). Ao voltar para o material produzido à época, identificamos seus limites no sentido do aprofundamento sobre o conceito de mediação, em razão da própria natureza do Mestrado, o que nos leva agora, no Doutorado, a refletirmos sobre aspectos e questões ampliadoras, teóricas e metodológicas que possam contribuir de maneira significativa para o ensino de Matemática com a perspectiva da mediação pedagógica.

Inicialmente, quando da inserção na turma 29 do Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade Federal da Paraíba, nosso projeto de tese se direcionava para a temática da formação de professores de Matemática nos anos iniciais, tomando por referência os saberes docentes. Devido à sua amplitude, decidimos, juntamente com a orientadora, aprofundar o conceito de mediação pedagógica no ensino de Matemática, especificando melhor o objeto de investigação, uma vez que esse tema já tinha sido objeto da Dissertação e sendo um componente a ser considerado no processo de formação docente,

Nesse processo de leitura e aprofundamento teórico sobre o conceito de mediação, aproximamo-nos mais uma vez da discussão proposta por Vigotski, sobre o desenvolvimento e aprendizagem, buscando identificar em seu constructo teórico a relação desses conceitos com o processo de ensino de Matemática. Foi nessa busca que compreendemos que a

² Na época, Campus II da UFPB.

linguagem, com seus diferentes sistemas semióticos tem uma função mediadora do desenvolvimento humano. A partir dessa compreensão, buscando estabelecer uma relação com o ensino de Matemática, me aproximamo-nos das discussões teóricas de Duval, um estudioso da área de Educação Matemática que assume a importância e necessidade de um trabalho sistemático na escola com as representações semióticas no ensino dessa disciplina.

A partir de então chegamos ao argumento que as representações semióticas em Matemática podem constituir elementos de mediação pedagógica no seu processo de ensino e aprendizagem. No entanto, esse argumento ainda estava amplo, necessitando de um recorte mais específico no campo do ensino dessa disciplina. Assim, selecionamos investigar as representações semióticas da operação de multiplicação, em razão de sua importância não apenas no campo das operações básicas, mas também, por envolver um conceito central para a elaboração de outros conceitos matemáticos igualmente importantes. Portanto, um novo argumento de tese ficou assim construído: as representações semióticas de multiplicação constituem elementos de mediação pedagógica, sendo instrumento de aprendizagem e de ensino, à medida que fornecem dados ao professor para proporcionar o desenvolvimento conceitual de seus alunos.

Nessa perspectiva, nos é exigido explorar os conceitos de mediação pedagógica, ensino e aprendizagem, multiplicação e representações semióticas. Para essa discussão, assumimos a perspectiva da Psicologia Sócio-Histórica como um aporte teórico que contribui para o pensar sobre os processos educativos cujo objetivo maior seja o desenvolvimento mental das crianças. Nesse processo, dialogaremos com autores estudiosos da Educação Matemática, principalmente Raymond Duval, que analisa o papel das representações semióticas no processo de apreensão dos objetos matemáticos.

Destacamos ainda que muitos estudos e pesquisas baseadas na Teoria de Duval são voltados para os anos finais do ensino fundamental, o ensino médio e o ensino superior, inclusive Duval (2011b; 2012a; 2012b), tendo-se menos estudos voltados para os anos iniciais de escolarização. Dentre aqueles voltados para esse segmento, destacamos o de Damm (2003) e o de Brandt (2009) relacionando esse tema ao sistema de numeração.

Outro aspecto diferencial em nossa pesquisa é a preocupação em evidenciar os registros de representações semióticas utilizados pelo professor no processo de ensinar a operação de multiplicação.

1.1 O contexto de investigação

A Matemática ao longo de sua história tem sido um conhecimento privilegiado, de acesso restrito a uma minoria, embora seja cada vez mais necessária para diversas áreas de atuação humana. A compreensão sobre a Matemática, assim como outras ciências, não é consensual, havendo diferentes enfoques e perspectivas, inclusive da sua finalidade na formação humana. Ao longo de seu desenvolvimento vem sendo observada uma dualidade interna na qual se tem uma Matemática pura, abstrata e com teor eminentemente formal-acadêmico e uma Matemática construída a partir de problemas, aplicada a diferentes contextos, vivida por diferentes grupos socioculturais. Torna-se necessário compreender que, embora esta dualidade permeie o conhecimento matemático desde a Antiguidade, cada Matemática cumpre sua função. A primeira, a de ampliar o leque de áreas e conceitos, por meio da pesquisa interna à própria área ou na articulação com outras ciências; a outra, de ser aplicável em diferentes contextos e áreas de atuação humana, dentre elas, a de contribuir com a formação básica de indivíduos em contextos educativos.

Pensando no aspecto da formação de conhecimentos matemáticos básicos, Devlin (2004) relaciona nove capacidades ou atributos mentais essenciais: o senso numérico, que corresponde à percepção de quantidades pequenas (1, 2, muitos), não exigindo o conceito de número como entidade abstrata; a capacidade numérica, que possibilita a contagem arbitrária de grandes conjuntos; a capacidade algorítmica, que nos faz aprender sequências de operações com números; a capacidade de lidar com abstrações; o senso de causa e efeito; a capacidade de elaborar e seguir uma sequência causal de fatos ou eventos; a capacidade de raciocínio lógico; a capacidade de raciocínio relacional e a capacidade de raciocínio espacial. Para este autor, a capacidade que nos permite lidar com números e a aritmética repousa principalmente nas três primeiras capacidades mentais citadas.

Quando nos referimos à Matemática realizada/apropriada/discutida nos espaços escolares, sua finalidade é também ser ferramenta dos estudantes, potencializando sua inserção e atuação socioculturais, possibilitando a compreensão melhor do mundo, contribuindo dessa forma, com o processo de constituição de cidadania. Na discussão sobre o papel da Matemática na formação humana, D'Ambrosio coloca um vínculo direto coma constituição da cidadania ao afirmar: “Minha utopia, como educador, é que as novas gerações serão capazes de atingir cidadania e criatividade... Minha utopia, como matemático, é que a matemática é essencial para atingir a minha utopia de educador” (D'AMBROSIO, p. 97).

Pensando na Matemática como essencial para a construção da cidadania, buscamos contribuir com o ensino dessa disciplina nos anos iniciais da educação básica por meio dessa pesquisa. Para tanto, vamos situar como o ensino de Matemática vem se efetivando por meio dos seguintes aspectos: os índices de aprendizagem obtidos pelos alunos, a formação pedagógica dos professores que ensinam Matemática e as pesquisas e estudos em Matemática, voltados a este nível de ensino.

Nos resultados coletados em avaliações nacionais da Prova Brasil, considerando os limites e desafios que possui um sistema de avaliação em larga escala, em um país continental e desigual como o nosso, ainda nos deparamos com índices bastante alarmantes do ponto de vista da apropriação de capacidades básicas em Matemática. No Relatório *SAEB/Prova Brasil 2011- Primeiros Resultados* (BRASIL, 2011) o índice referente ao desempenho dos estudantes na 4ª série (5º ano) na área de Matemática, considerando a média do país, está localizado no nível 4, em uma escala que vai do 0 (zero) a 12 (doze), envolvendo todo o ensino fundamental. Esse dado, embora aquém das orientações dos manuais curriculares e das exigências das demandas atuais, significa um pequeno crescimento, se considerarmos os índices obtidos nas avaliações anteriores.

No que se refere às capacidades necessárias para o Ensino Fundamental I, dos anos iniciais, teríamos do nível 0 até o nível 7, assim distribuídos, estando indicados os intervalos de variação e, entre parênteses, o nível correspondente: 0 a 125 (0); 125 a 150 (1); 150 a 175 (2); 175 a 200 (3); 200 a 225 (4); 225 a 250 (5); 250 a 275 (6); 275 a 300 (7).

Os dados referentes aos índices alcançados pelos alunos de escolas públicas nas avaliações da Prova Brasil estão descritos na Tabela 1, distribuídos ao longo das quatro edições avaliativas, comparando-se dados nacional, regional, estadual e municipal.

Tabela 1 - Médias Referentes às Avaliações da 4ª Série/5ºAno – Prova Brasil/SAEB

Níveis	SAEB - 2005	Prova Brasil/SAEB 2007	Prova Brasil/SAEB 2009	Prova Brasil/SAEB 2011
Nacional (Brasil)	177,08	189,14	199,52	204,58
Regional (NE)	156,42	174,35	182,04	186,83
Estadual (Paraíba)	162,45	178,53	186,50	188,46
Municipal (João Pessoa)	175,60	186,40	197,02	199,82

Fonte: <http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/planilhas-para-download>

Nos resultados obtidos, vê-se uma evolução ao longo dos anos em todos os níveis. No entanto, há muito ainda para alcançar. Embora o município de João Pessoa possua condições

melhores, tanto de estrutura da rede escolar quanto de formação de professores, ele se apresenta em situação à frente em relação aos dados do Estado da Paraíba e da Região Nordeste, porém, ainda no mesmo nível 3. Esses resultados são preocupantes, uma vez que indicam que nossas crianças, em média, não aprendem a maior parte do que deveria ser aprendido para aquele período específico.

A Prova Brasil considera para cada nível uma quantidade específica de capacidades. No nível 3, o que corresponde a média dos resultados observada em 2011 (exceto a média nacional), as crianças devem ser capazes de calcular o resultado de uma adição com números de três algarismos; localizar informação em mapas desenhados em malha quadriculada; reconhecer a escrita por extenso de números naturais e a sua composição e decomposição em dezenas e unidades, considerando o seu valor posicional na base decimal; resolver problemas relacionando diferentes unidades de uma mesma medida para cálculo de intervalos (dias, semanas, horas e minutos) (BRASIL, 2011).

No que se refere à formação dos professores dos anos iniciais na área de Matemática, constatamos fragilidades tanto na compreensão dos conteúdos necessários para a fase, quanto aos aspectos referentes às possibilidades didáticas (CURI, 2005).

Por outro lado, conforme Curi (2006), “a produção de livros e materiais didáticos destinados à formação matemática dos professores polivalentes sempre foi muito restrita”, sendo muito recente publicações com essa finalidade. Na mesma direção, Fiorentini *et al.* (2003), citado por Curi (2006, p. 61), alerta para “a existência de um pequeno número de trabalhos acadêmicos (mestrado e doutorado) no âmbito da Educação Matemática que investiga a formação (...) do professor polivalente para ensinar essa ciência”.

1.2 O problema investigado e os conceitos envolvidos

O trabalho com a Matemática no ensino fundamental I implica a apropriação de noções e conceitos basilares para o processo escolar da criança, como o conceito de número, do sistema de numeração, das operações aritméticas, de medida, de espaço e forma, entre outros. No entanto, as crianças possuem um nível de abstração diferente dos adultos, sendo necessário que o ensino considere seu modo peculiar de compreender e de pensar o mundo.

Ainda encontramos entre os professores concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática excludentes e discriminadoras, centradas em procedimentos mecânicos e conceitos descontextualizados, vendo-a como uma área de conhecimento somente acessível a pessoas particularmente “inteligentes”, sedimentando a ideia de que nem todos têm a

capacidade para apreendê-la (AZERÊDO, 2003). Uma visão de Matemática como uma ciência distante e sem sentido.

Considerando especificamente o trabalho com as operações, temos observado um ensino que não assume a resolução de problemas como uma ferramenta metodológica e de estímulo ao pensamento, no qual a aprendizagem dos procedimentos algoritmos tem maior importância. Nesse processo, resolver problema é aplicar uma operação estudada, de preferência pelos procedimentos formais, também ensinados.

Em trabalho realizado, (AZEREDO, 2006), discutimos que se entendemos que as crianças são ativas no processo de aprender, é preciso considerar suas estratégias de resolução de problemas como um conhecimento também matemático, embora em muitas delas não sejam utilizados procedimentos formais.

Nos últimos anos, além da defesa do ensino da Matemática numa perspectiva da cidadania, que contribua para um pensar crítico e criativo, evidenciando aspectos históricos do conteúdo e desmistificando interesses e valores, tem-se discutido o ‘fazer matemático’ pelos alunos como um dos pilares desse processo, o qual deve favorecer à compreensão e o estabelecimento de relações entre diferentes conteúdos. “Exercícios repetitivos de conteúdos isolados e compartimentados da matemática não são fazer matemática’ e isolados e nunca resultarão em compreensão” (VAN de WALLE, 2009a, p. 32). É estimulando esse ‘fazer matemático’ dos alunos que encontraremos uma possibilidade de intervenção e de mediação pedagógica, uma vez que as crianças dirão o que pensam e como estão entendendo determinado conteúdo por meio de suas estratégias.

A teoria sócio-histórica oferece os fundamentos teóricos para nossa compreensão sobre a mediação pedagógica, a partir de conceitos como instrumento, atividade humana, pensamento e linguagem, aprendizagem e desenvolvimento, formação de conceitos, dentre outros. Vigotski compreende que a linguagem desempenha o papel da mediação no desenvolvimento do pensamento humano e Leontiev propõe que a própria atividade humana é mediação, estando nela a linguagem e a consciência.

Complementando o conceito de mediação, apontado pela teoria sócio-histórica, dialogaremos com Oliveira, Almeida e Arnoni (2007) que acrescentam alguns elementos à contribuição da Teoria Histórico-Cultural, ajudando-nos a pensá-la como um processo potencializador do desenvolvimento dos estudantes, por meio da apropriação de conhecimento fundamentais que a humanidade produziu. Só que esse processo é tensionado e também conflituoso.

Trazendo essa discussão para o ensino de Matemática, dialogaremos com as contribuições teóricas de Raymond Duval, sobre os registros de representação semiótica enquanto possibilidade de compreendermos a construção do pensamento matemático.

Em relação ao ensino da operação de multiplicação, partimos de nossa experiência como formadora, na qual temos percebido certa polarização entre o ensino de procedimentos algorítmicos e de resolução de problemas, como se fossem mutuamente excludentes. É comum nos depararmos com questões do tipo: *ainda se pode ensinar a tabuada? É para exigir sua memorização? A partir de qual idade?* Em nossas formações defendemos que a aprendizagem de qualquer operação deve comportar a compreensão de seu conceito, a resolução de problemas e a compreensão dos procedimentos algorítmicos que a envolve.

Nesse contexto, buscaremos responder a questão: qual o papel das representações semióticas no ensino e aprendizagem de multiplicação nos anos iniciais de escolarização? Para nós, a resposta caminha no sentido de que as representações semióticas podem constituir importante elemento da mediação pedagógica no ensino de Matemática. Entretanto, queremos respondê-la a partir do ensino de multiplicação vivenciado em escolas municipais de nossa cidade, investigando como os professores compreendem o ensino de multiplicação e qual o papel das representações semióticas nesse processo.

Vislumbrando responder nossa questão de pesquisa, levantamos mais algumas que nortearão o processo investigativo: como os professores compreendem o papel das representações semióticas no ensino de Matemática? Qual o lugar atribuído às representações semióticas no ensino de multiplicação? Como os professores compreendem a multiplicação? Como os professores ensinam a multiplicação? Quais os significados mais explorados? Quais as suas dificuldades relativas ao ensino e ao domínio conceitual? Quais as representações semióticas mais trabalhadas/consideradas? Como os alunos compreendem a multiplicação? Como representam os diferentes significados de multiplicação?

O objetivo principal de nossa investigação é, portanto, analisar o ensino de multiplicação nos anos iniciais, buscando evidenciar o lugar/papel atribuído às representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem. Para alcançar esse objetivo buscamos identificar a compreensão dos professores dos anos iniciais sobre o ensino de multiplicação, seus significados e representações; elencar as representações semióticas utilizadas no ensino de multiplicação, evidenciando o papel a elas atribuído; realizar um diagnóstico sobre a compreensão de alunos dos anos iniciais sobre a multiplicação; levantar indícios de mudanças na reflexão dos professores sobre o ensino de multiplicação e o papel das representações semióticas, a partir da vivência de grupo num processo de formação profissional.

Desta forma, assumimos que o processo de investigação com os professores se constituiu em espaço de formação e pesquisa, oportunizando contribuição direta para a realização da pesquisa, uma vez que permitiu a obtenção de dados para análise e ao mesmo tempo, contribuiu para a formação continuada dos professores participantes. Embora nosso objeto de estudo não seja a formação docente, assumimos a preocupação em potencializar o espaço institucional de pesquisa para promover desenvolvimento profissional, buscando ir além da identificação de elementos para a explicação do fenômeno, o que é imprescindível, mas também intervindo no processo de formação dos professores dos anos iniciais envolvidos.

Corroboramos a ideia de que contribuir com a formação de professores que ensinam Matemática implica em problematizar as crenças e representações que têm dessa área de conhecimento. Compreendemos que há uma relação dialética entre concepções e práticas docentes e não necessariamente uma relação unidirecional, na qual somente as representações influenciam práticas, mas ambas interagem e se interpõem. Como o processo de formação docente é bastante complexo, acreditamos que quanto mais explicitarmos as concepções e representações que temos do objeto a ser ensinado, possivelmente ele será melhor compreendido e problematizado em sala de aula.

Os Capítulos estão assim organizados: o seguinte versará sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais e o ensino de multiplicação de números naturais, evidenciando desafios e demandas para professores e pesquisadores da área. O terceiro Capítulo traz as discussões sobre as contribuições da teoria histórico-cultural para a compreensão do desenvolvimento humano a partir dos processos de ensino, possibilitando a compreensão da mediação pedagógica no ensino de multiplicação.

No 4º Capítulo discutimos a relação entre a Matemática e a linguagem, evidenciando a contribuição de Duval com os registros de representações semióticas para o ensino de multiplicação nos anos iniciais.

No Capítulo 5, apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa de campo, descrevendo o processo de levantamento de dados por meio de um curso destinado a professores de anos iniciais. Além do detalhamento do referido curso, apresentamos um perfil dos sujeitos/participantes quanto aos dados de identificação profissional e sua relação com o ensino de Matemática.

Os Capítulos 6 e 7 trazem a descrição e a análise de dados coletados em dois grandes eixos: o primeiro evidencia o ensino de multiplicação – a compreensão da operação por professores e a compreensão do processo de ensino; as dificuldades vivenciadas no processo;

a resolução de problemas, os tipos de cálculo e a compreensão das crianças sobre multiplicação; o segundo eixo traz como norte as representações semióticas de multiplicação sob o ponto de vista dos professores e dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Nas considerações finais, buscamos responder as questões norteadoras de nossa pesquisa, discutindo nosso argumento de tese, a partir dos dados que a realidade nos apresentou e do referencial teórico de base.

2. A MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS E O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO

A Matemática não é algo que diz respeito a números, mas sim à vida. Ela é algo que nasce do mundo em que vivemos. Lida com ideias. E, longe de ser aborrecida e estéril, como muitas vezes é retratada, ela é cheia de criatividade (DEVLIN, 2004, p. 98).

Neste Capítulo contextualizamos o ensino de multiplicação, percorrendo a trilha do ensino de Matemática nos anos iniciais - seus desafios e possibilidades até a compreensão das demandas atuais para o ensino de multiplicação, história, significados e perspectivas curriculares e metodológicas.

2.1 A Matemática e seu Ensino: desafios contemporâneos

Popularmente, a Matemática é conhecida como a ciência dos números e dos cálculos numéricos, sendo a aritmética sua principal fonte. Essa concepção tem raízes históricas e não contempla os inúmeros ramos existentes, muitos dos quais não possuem a aritmética como base de sua constituição.

Segundo Devlin (2004), uma definição mais apropriada para a Matemática, na atualidade, é que ela se constitui em uma ciência que estuda os diferentes padrões. Padrões de números e de cálculos numéricos, padrões de forma, padrões de raciocínio, padrões de movimento, padrões do acaso, padrões de proximidade e de posição. Tais padrões podem ser “reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, utilitários ou recreativos” (DEVLIN, 2004, p. 26).

A variedade de padrões estudados nos informa sobre a variedade de áreas investigadas por matemáticos: aritmética, geometria, lógica, probabilidade, topologia, cálculo infinitesimal, entre outras. Conforme o autor, todos esses padrões são altamente abstratos e, portanto, para sua descrição e estudo exigem a utilização de uma notação escrita que é fortemente abstrata. Tais notações compõem sistemas simbólicos que representam os diferentes objetos da Matemática, constituindo-se em outra linguagem, que em paralelo à língua materna, contribuem para “expressar relações e operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.” (DUVAL, 2009, p. 13).

Ao ensinar Matemática “deve-se ter presente que, de um lado, estão os conceitos e as propriedades dos objetos matemáticos, e, de outro lado, as representações que são utilizadas

em Matemática” (PANIZZA, 2006, p. 20). Duval (2009) assinala que para entender melhor a relação entre os objetos matemáticos e suas representações, duas condições são necessárias: que o objeto não seja confundido com sua representação e que o objeto seja reconhecido em cada representação. Para que o estudante dessa área alcance tais condições, é necessário que “o professor se aprofunde em sua própria capacidade de diferenciar os objetos matemáticos de suas representações e que compreenda as condições sob as quais uma representação funciona como tal” (PANIZZA, 2006, p. 21). Essa reflexão reforça a necessidade de formação dos professores que ensinam Matemática, principalmente aqueles responsáveis pelos anos iniciais de escolarização, nos quais acontecerão os primeiros contatos com esses objetos, constituídos de conceitos e representações externas.

Pelas suas características específicas, a Matemática ocupa diferentes espaços no currículo da Educação Básica, uma vez que possui características de linguagem e de ciência. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), a Matemática faz parte da área de ciências, devido à sustentação oferecida à Biologia, à Física e à Química. Discussões sobre a forte evidência da linguagem matemática em sua constituição levantaram a possibilidade de incluí-la na área de Linguagens.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, a Matemática é considerada como uma área específica, devido à sua especificidade ficar esmaecida quando é agregada a outras disciplinas, seja do campo das linguagens, seja do campo das ciências. Outra justificativa é que a Matemática sendo uma área facilitaria a “incorporação crítica de inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações” (SÃO PAULO, 2008, p. 39). O Referencial Curricular do Rio Grande do Sul (2009) também corrobora esse argumento. Já a Proposta curricular da Paraíba ratifica seu lugar na área de Ciências.

Ao longo de sua história, a Matemática tem se constituído em uma área de conhecimento acessível somente a uma minoria privilegiada, embora os estabelecimentos escolares destinem uma carga horária obrigatória, distribuída em todos os anos do ensino fundamental e médio que é superior àquela destinada às demais disciplinas do currículo. Mesmo frequentando a educação básica, ou seja, concluindo o ensino médio, muitos jovens e adultos apresentam dificuldades com conhecimentos básicos dessa disciplina.

Compreendemos que o conhecimento matemático não está confinado apenas entre os muros da escola, o que nos exige identificar, descrever e estudar também os saberes informais e cotidianos que são utilizados para a realização de inúmeras tarefas em contextos variados. Desta forma, é necessário estabelecer uma relação entre estes dois saberes, identificando os

limites e vantagens de cada um deles, mas, sobretudo, buscando a perspectiva da ampliação do conhecimento matemático.

A não apropriação do conhecimento matemático sistematizado, na escola, explicitado nos índices de fracasso em sua aprendizagem, caracteriza-se pela negação a uma parcela significativa de crianças, jovens e adultos, da possibilidade de elaboração de conceitos e procedimentos matemáticos para a compreensão, atuação e inserção social, configurando-se em um processo de exclusão. Esse fato é acentuado quando o ensino de Matemática está permeado de crenças e posturas, as quais desconsideram os saberes espontâneos dos estudantes, baseiam-se em atividades mecânicas e repetitivas, vazias de significado, fruto de uma cultura escolar autoritária que vem repassando a ideia que a Matemática é uma ciência difícil, abstrata e, por isso, somente acessível aos poucos inteligentes, com ‘capacidade maior’ para compreendê-la (BRASIL, 1997; NUNES e BRYANT, 1997; D’AMBROSIO, 1996).

Por outro lado, essa exclusão também é produzida quando são considerados e valorizados, prioritariamente, os conceitos espontâneos dos estudantes, não lhes sendo proporcionada a ampliação de conhecimento, numa perspectiva do saber científico ou sistematizado.

Argumentando sobre a necessidade de repensar o ensino dessa disciplina de maneira que seu acesso e apropriação sejam efetivados a partir dos anos primeiros de escolarização, estudiosos da Educação Matemática, desde a década de 1980, propõem discussões sobre temáticas como a relação entre a Matemática e a cidadania, a possibilidade do ‘fazer Matemática’ como pressuposto para o processo de ensino e aprendizagem e a perspectiva metodológica da resolução de problemas como eixo norteador do trabalho com essa disciplina no espaço escolar.

Pensar a aprendizagem da Matemática enquanto pressuposto de cidadania significa compreendê-la como instrumento potencializador de habilidades necessárias para a compreensão de fenômenos sociais, econômicos e culturais. Atualmente, cidadania também implica acesso e apropriação ao conhecimento, enquanto instrumento de leitura, compreensão, interpretação e atuação no mundo, portanto, conhecimento conectado às demandas da vida e não restrito ao espaço da instituição escolar. Buscaremos nesse trabalho ressaltar a relação entre a matemática e a cidadania, ao defender sua importância na formação dos sujeitos enquanto instrumento de conhecimento e de compreensão do mundo.

Se já há um consenso da necessária relação entre conhecimentos e contexto sociocultural no ensino das disciplinas de áreas sociais (Geografia, História, Literatura, Artes), na Matemática, pensar/realizar sua potencialidade para uma compreensão crítica do

mundo, ainda soa como novidade. Isso ocorre porque a visão predominante da Matemática ainda é de uma ciência pronta, dada e a-histórica fruto de uma concepção baseada no formalismo.

O argumento do ‘fazer Matemática’, defendido pelos estudiosos da Educação Matemática, exige uma nova compreensão sobre ensinar esta disciplina. Se antes o ensino se pautava, prioritariamente, na ideia de transmitir conteúdos matemáticos já elaborados por outros, hoje, além desse objetivo, tem-se o de ressignificar conceitos, construir procedimentos, sistematizar conhecimentos, entendendo que os alunos ‘fazem matemática’ quando participam ativamente de seu processo de aprendizagem, à medida que levantam hipóteses, elaboram estratégias, questionam, interagem com os colegas, deixando de ser meramente receptores.

Nessa direção, a resolução de problemas ganha significado e importância para além da mera aplicação de conteúdos aprendidos, passando a ser vista como um enfoque metodológico para ensinar e aprender Matemática. Para Pozo (1998), ela tem se configurado como um elemento aglutinador dos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais, não sendo apenas um procedimento de aplicação final de conteúdos já trabalhados.

Conforme Charnay (1996, p. 37), “fazer Matemática é resolver problemas”, configurando-se este como um dos objetivos principais do ensino de Matemática, que deve ser carregada de significado e sentido para o aluno. Para seu alcance, os professores devem ressignificar suas concepções sobre o ensino desta disciplina, uma vez que a resolução de problemas como metodologia vai além das perspectivas que veem nos problemas meros mecanismos de aplicação de conceitos e de domínio de competências eminentemente práticas.

Pensar o problema como mecanismo aliado ao fazer matemático corresponde a pensá-lo como fonte, local e critério da elaboração do saber, com o qual se tem a ação, a formulação, a validação e a institucionalização (CHARNAY, 1996), sendo este último referente ao processo de sistematização por meio dos procedimentos algorítmicos formais. Duval (2011) acrescenta que fazer Matemática implica priorizar as representações semióticas e que mesmo quando se está resolvendo problemas, é necessário verificar as transformações realizadas com as representações semióticas envolvidas. Essa ideia será desenvolvida no Capítulo 4.

Na nossa concepção esse processo exige do professor muito mais que a explicação do conteúdo e seu uso em situações de aplicação. Ele tem o papel de, a partir do conhecimento da turma, planejar situações adequadas, referenciando-se em objetivos a serem alcançados, organizando o ambiente da sala de aula para promover intercâmbios durante e após o processo de resolução, sendo o responsável pela sistematização do conteúdo explorado.

O ensino e a aprendizagem de Matemática, principalmente da multiplicação, podem ser potencializados por meio de uma proposta didática que traga para o centro a variedade de representações semióticas, evidenciando conceitos e procedimentos, identificando lacunas e incompreensões, contribuindo para um conhecimento cada vez mais vasto do campo multiplicativo.

2.2 O Ensino de Matemática nos Anos Iniciais

Discutir o ensino de Matemática nos anos iniciais da escolarização exige problematizar sobre a formação dos professores que ali atuam, uma vez que não há uma formação voltada, especificamente, para essa área do conhecimento, assim como para qualquer outra, como a Língua Portuguesa, História, Geografia, Ciências Naturais e Artes. A formação do professor na Educação Infantil e 1ª fase do ensino fundamental tem sido uma formação generalista, assentada nos fundamentos da educação e nas metodologias de ensino, não sendo preocupação, o aprofundamento dos conhecimentos das disciplinas que vão ser ensinadas (CURI, 2005).

Em pesquisa realizada sobre a formação Matemática dos professores polivalentes, no Brasil, Curi (2005) percorre a trajetória histórica desde o Império até os dias de hoje, evidenciando o lugar do ensino de Matemática nesse processo. A autora identifica três períodos: da criação do Curso Normal à sua extinção, em 1971; da LDBEN 5691/71 até a nova LDB e o período pós-LDB 9394/96 até os dias atuais.

O Curso Normal foi instalado no Brasil no ano de 1835 com o objetivo de formar professores para atuar nas escolas das Primeiras Letras, cujo foco era a formação moral e dos bons costumes. Os conhecimentos matemáticos ali estudados versavam inicialmente sobre Aritmética e Sistema Métrico. Em 1875, os conhecimentos do sistema métrico foram incluídos em Aritmética, acrescentando-se a área de Geometria. Com a influência do Positivismo, no final do Séc. XIX foram incluídas no currículo disciplinas de Álgebra, Trigonometria e Escrituração Mercantil (CURI, 2005).

Os livros utilizados como base para a formação traziam quantidades extensas de exercícios e problemas voltados para as operações aritméticas com números naturais e racionais (valorizando-se a forma fracionária), proporção e regra de três. De acordo com Curi (2005), nas edições dos livros utilizados, em seus prefácios e apresentações, já eram encontrados relatos de dificuldades e problemas relativos ao ensino de Aritmética. Somente a partir do Séc. XX, sob a influência da Psicologia da Educação, são encontradas publicações

que ressaltam a necessidade de se pensar em metodologias de ensino, chegando-se no foco de ‘como ensinar’. A partir do movimento da Escola Nova o ‘como ensinar’ foi ganhando espaço em detrimento de ‘o que ensinar’ e observou-se uma ênfase nas metodologias em detrimento dos conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos. No ano de 1931, temos pela 1ª vez a disciplina Matemática no Curso Normal, abrangendo as áreas da Aritmética e Geometria.

O segundo período proposto por Curi (2005), tem início com a Lei Nacional da Educação nº 5691/71, quando o Curso Normal foi extinto e substituído pelo Curso de Habilitação Específica para o Magistério. Sua normatização apontava para as disciplinas comuns no 1º ano, semelhantes às de todos os cursos do 2º grau, e as disciplinas específicas da habilitação eram ofertadas nos 2º e 3º anos. Dentre elas, tínhamos: Fundamentos da Educação; Estrutura e Funcionamento do Ensino de 1º Grau; Didática e Prática de Ensino; podendo-se optar por um aprofundamento nos 1º e 2º anos ou 3º e 4º anos do curso primário.

A Lei Nacional também preconizou que os cursos de Pedagogia favorecessem a formação de professores polivalentes, por meio da Habilitação Magistério, embora essa decisão não tenha atribuído à formação superior como critério primeiro de formação para os docentes desse nível de ensino.

A precariedade na formação dos professores polivalentes foi agravada tanto pela diminuição do tempo de formação, de três para dois anos (especificamente, nos 2º e 3º anos do 2º Grau), quanto pelo não aprofundamento das disciplinas das diferentes áreas de ensino e suas metodologias, com o estágio servindo muito mais para o preenchimento de fichas que para a reflexão e compreensão da prática pedagógica. Somente no último ano o aluno estudava disciplinas voltadas para Didática da Língua Portuguesa e Didática da Matemática (CURI, 2005).

A partir desse cenário, conforme a autora citada, o Ministério da Educação e Cultura cria na década de 1980, os Centros Específicos de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM), buscando redimensionar a formação de professores em Nível Médio, em cada estado brasileiro. Os Centros foram criados com o objetivo de formar o professor de anos iniciais (polivalentes) e se tornarem em espaços de aperfeiçoamento do Magistério.

Especificamente em São Paulo, a Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), da Secretaria Estadual de Educação, produziu documentos com orientações sobre o ensino de Matemática (Atividades – 1ª série; Atividades – 2ª Série, Atividades – 3ª série e Atividades - 4ª série) e em 1985, foi elaborada a Proposta Curricular de Matemática para o Ensino de 1º Grau. Esses documentos tiveram uma influência direta na organização curricular dos CEFAM em diferentes estados.

Para Curi (2005), duas publicações foram marcantes na formação de professores dos anos iniciais durante a década de 1980: Didática Especial, de Nelson Piletti, cujo capítulo sobre o ensino de Matemática foi escrito por Célia Carolino Pires (estudiosa em Educação Matemática); e Didática da Resolução de Problemas, de Luis Roberto Dante (estudioso da Educação Matemática e autor de livros didáticos).

A nova LDB 9394/96 indicou em seu Art. 62 que a formação de docentes para atuar em toda educação básica fosse de nível superior, no entanto, no mesmo artigo, admite que para lecionar na educação infantil e anos iniciais, seja aceita a formação em nível médio, na modalidade Normal. Entendemos que esse recuo se deu por termos no país uma demanda muito alta para formação superior ao mesmo tempo em que ainda se tem baixo índice de acesso a esse nível de ensino, ou seja, não haveria como garantir o cumprimento da exigência, por não haver oferta de ensino superior em determinadas localidades.

Curi (2005) analisou ementas de disciplinas que objetivam a formação Matemática dos futuros professores em 36 cursos de Pedagogia e em 06 cursos do Normal Superior no país. Os resultados de sua análise apontaram para a ênfase nos conhecimentos didáticos dos conteúdos matemáticos, tendo-se uma carga horária mínima para o conhecimento dos objetos matemáticos e sua organização curricular, indicando uma compreensão que este professor “não precisa saber matemática, basta saber como ensiná-la” (CURI, 2005, p. 70).

Para Nacarato, Mengali e Passos (2009), a formação Matemática do professor que atua na Educação Infantil e Anos Iniciais constitui um fenômeno intrigante, uma vez que as demandas são cada vez maiores - de compreensão específica do conteúdo e compreensão teórico-metodológica dos processos de ensino e de aprendizagem – enquanto o processo formativo vem sendo reduzido e limitado.

Além disso, Carvalho (1991) em um levantamento do perfil dos estudantes de um curso de magistério, evidencia em sua maioria, o ‘não gostar’ de Matemática, devido aos fracassos vivenciados na trajetória escolar, constituindo-se em um forte componente da escolha por ensinar nos anos iniciais. Comparando o perfil dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais e nos anos finais da educação básica, Curi (2005) identifica uma diferença marcante: a escolha dos professores especialistas acontece com base na área de conhecimento em que se deseja atuar, ou seja, escolhe-se ensinar Matemática, Geografia, Física, o que não ocorre com professores dos anos iniciais, que chegam a ensinar disciplinas com as quais têm pouca ou nenhuma afinidade, como é o caso da Matemática.

Questionando a carga horária disponível e a perspectiva eminentemente metodológica, nos cursos de nível superior de professores polivalentes, Curi (2005) ressalta a complexidade

desse processo formativo, uma vez que interferem as crenças e conhecimentos sobre a Matemática e seu ensino, já construídos ao longo da escolarização (período pré-profissional), que precisam ser exploradas e desmistificadas. Além disso, a formação precisa considerar os conhecimentos dos objetos matemáticos e suas representações, bem como os conhecimentos sobre os processos de ensinar e aprender (concepções e metodologias específicas) no contexto da atualidade.

Em outra direção, Spinillo e Magina (2004) problematizam alguns mitos que influenciam a prática pedagógica dos professores dos anos iniciais dentre eles a visão superestimada do uso de material concreto, a visão da tabuada como um instrumento de ‘pura’ memorização e a ideia que cada problema tem sua operação.

A valorização do material concreto se baseia na crença de que o manuseio de quantidades físicas é necessária e suficiente para que os referentes sejam manipulados mentalmente. Ou ainda, que o material concreto ajuda a criança a representar os objetos matemáticos estudados, principalmente nos enunciados de problemas, facilitando assim o alcance do resultado.

Entretanto, o material concreto não se constitui nem o único nem o mais importante recurso para a promoção da compreensão de conceitos matemáticos. Os referentes necessários para a compreensão de quantidades e de situações-problema podem ser obtidos também por marcas gráficas ou icônicas. “Portanto, não é apenas a presença de objetos que facilita a compreensão, mas a presença de referentes que auxiliam a criança a extrair significado da linguagem Matemática formal” (SPINILLO e MAGINA, 2004, p. 10). Para Spinillo e Magina (2004), as representações gráficas usadas pelas crianças (desenhos, tracinhos, bolinhas), além de conferirem referentes às quantidades, permitem a manipulação dos dados graficamente, sendo mais flexíveis que a manipulação de objetos.

O mito que vê a tabuada como instrumento que essencialmente favorece a memorização, desconsidera as possibilidades de tratamento e descobertas Matemáticas a partir da reflexão sobre os resultados obtidos com os pares numéricos e as operações aritméticas. A compreensão da relação entre adição e multiplicação, da relação inversa entre adição e subtração e multiplicação e divisão, bem como o entendimento de propriedades das operações (comutatividade, associação e distribuição) podem ser descobertas e compreendidas a partir de um trabalho sistemático dos fatos fundamentais das operações.

Por fim, o mito da relação única entre um problema e uma determinada operação aritmética revela uma visão mecânica do ensino dessa disciplina, na qual se ensina primeiro a fazer o cálculo para, em seguida, aplicá-lo a determinados problemas. Para desmistificar essa

ideia, tem-se de “propor situações que estimulem o raciocínio e não a mera aplicação da operação; situações em que o emprego de uma operação seja produto de uma reflexão sobre o significado do problema, sobre os valores nele envolvidos” (SPINILLO e MAGINA, 2004, p. 24).

Para responder às demandas postas ao ensino de Matemática com significação para professores e alunos, Nacarato, Mengali e Passos (2009) apontam o diálogo e a comunicação como fatores essenciais para a efetivação de um ambiente para ensinar e aprender Matemática. “É o ambiente de dar voz e ouvidos aos alunos, analisar o que eles têm a dizer e estabelecer uma comunicação pautada no respeito e no (com) compartilhamento de ideias e saberes” (p. 42). Nesse processo de comunicação, interação e negociação de significados o aluno é chamado a estar em constante atividade intelectual, participando e interagindo com o professor e/ou com os colegas. Não só a oralidade precisa ser ressaltada, mas os diferentes registros, os desenhos, algoritmos e textos escritos em língua materna.

A compreensão do uso de variados registros pelas crianças no percurso de aprendizagem Matemática implica, conforme Nacarato, Mengali e Passos (2009), em alguns momentos – o da produção, o da socialização e o da reflexão no grupo desses diferentes registros. O momento posterior à produção, o da socialização e reflexão coletiva a partir das diferentes estratégias apresentadas, exige do professor compreensão profunda do conhecimento matemático, bem como compreensão teórico-metodológica do encaminhamento didático que está sendo feito, aspectos nem sempre estudados e investigados nos processos formativos (inicial e contínuo). É em um ambiente com diálogo e comunicação por diferentes registros que o aluno será estimulado a expor seus significados iniciais e reelaborá-los no coletivo da sala de aula.

Em trabalhos publicados anteriormente, Rêgo e Azerêdo (2006) e Azerêdo (2008), discutiram sobre a necessidade de reconhecimento e valorização das estratégias pessoais utilizadas pelas crianças na resolução de problemas aritméticos, bem como de uma postura investigativa, por parte do professor, buscando identificar as representações que as crianças possuem acerca das operações.

Uma das questões orientadoras desses artigos foi: *como posso tomar como ponto de partida o que os alunos sabem se não valorizo as representações explicitadas em registros alternativos como bolinhas, tracinhas e outros?* Evidenciou-se que diferentes fatores podem influenciar na provável postura dos professores de ‘não-valorização’ dessas estratégias: o fator estrutural da própria Matemática, acerca do qual se defende a facilidade e a objetividade nos cálculos, tomando como referência o sistema de numeração decimal; o fator histórico que

se orienta a partir de procedimentos utilizados por gerações passadas (o que também pode implicar a possibilidade de mudança) e o fator social que é representado pela pressão sobre a escola para que capacite os alunos nos procedimentos tradicionais de cálculo, como se este fosse seu principal objetivo

Ensinar constitui um amplo conjunto de ações como comunicar, informar, transmitir, dialogar, apresentar, representar, entre outras, conceitos e princípios, informações, procedimentos e atitudes. Considerando alguns desses elementos, discutiremos sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais, em particular o ensino de multiplicação, tomando por referência o conceito de mediação pedagógica e suas relações com as representações semióticas desta operação (esses conceitos serão discutidos, respectivamente nos Capítulos 3 e 4).

A multiplicação foi escolhida como conteúdo de investigação pela sua importância na formação escolar dos alunos. Embora seja conhecida como uma operação que sintetiza a adição de parcelas iguais, a multiplicação aglutina conceitos de proporção, combinatória, área, sendo base para a ampliação do pensamento matemático ao envolver a compreensão de relação entre variáveis, quantidades contínuas e discretas, bem como a operação de divisão. Essa variedade de conceitos precisa ser explorada nas aulas com esse conteúdo, o que exige aprofundamento teórico-metodológico pelos professores.

2.3 Situando o conceito de multiplicação – história e perspectivas curriculares

O conceito de multiplicação, ao longo da história, sofreu modificações mediante a compreensão que se teve da unidade. Conforme Isoda e Olfos (2011), no Livro VII dos Elementos, Euclides define a operação $M \times N$, onde M e N são números que representam M vezes e N vezes a unidade. Nesse conceito, “a unidade é definida com aquilo em virtude do qual cada uma das coisas que há, se chama uma”. A característica de um não é outra senão a de “ser a medida de alguma multiplicidade, e o número, de ser uma multiplicidade da medida”, o que leva a compreensão metafísica de que o um não seja um número, uma vez que “a unidade de medidas não é a pluralidade de medidas” (ISODA e OLFOS, 2011, p. 50, tradução nossa).

Ainda conforme esses autores, em 1637, com Descartes, a unidade não foi mais vista como o 1 indivisível, mas uma medida arbitrária dada a qualquer real positivo, sendo essa definição aquela difundida por Freudenthal em 1983 para o ensino de multiplicação. Essa

definição vem sendo usada, especificamente, em propostas pedagógicas, como é o caso da Orientação Curricular Japonesa que explicita a seguinte definição de multiplicação:

o valor da medida que equivale ao valor da unidade. Se a medida e o valor da unidade são números naturais, o produto é a soma repetida de quantidade que corresponde a unidade, porém, quando não é, a mesma definição serve para multiplicar decimais, frações e medidas quaisquer (ISODA e OLFOS, 2011, p. 50, tradução nossa).

Nas Orientações Curriculares no Brasil não encontramos nenhuma definição acerca das operações, mas uma categorização de significados, conforme discutiremos mais adiante.

No que se refere aos procedimentos de cálculo envolvendo a multiplicação, na história da Matemática são encontrados variados registros, como por exemplo: a multiplicação egípcia, a multiplicação russa, o método das gelosias, entre outros, nos indicando criatividade na construção de processos algorítmicos por matemáticos³, muito antes da proposição da técnica Fibonacci, utilizada atualmente nas escolas (CHAMORRO, 2011; SILVA, 2003).

Comparando o ensino da multiplicação em países asiáticos e iberoamericanos, Isoda e Olfos (2011) analisam a organização do currículo para os anos iniciais da escolarização, apontando duas perspectivas como tendências internacionais sobre o ensino de multiplicação: a perspectiva da contextualização e a presença do princípio de extensão. Na contextualização, tem-se a ênfase na resolução de problemas e na comunicação, pautando-se em conceitos como contexto, destrezas básicas, aritmética concreta, memorização e modelo de contextos.

Sobre o princípio da extensão do conceito, tem-se uma gradação desde a compreensão da multiplicação como quantidade de elementos que se repetem: as tabelas de multiplicar (2 ao 5; 6 ao 9; de 1 e 0; potências de 10); a multiplicação com multidígitos; a multiplicação com decimais, frações e negativos e medida.

Na análise comparativa entre os oito países estudados (Cingapura, Hong Kong, Coréia, Japão, México, Colômbia, Peru e Chile), foram observados quatro aspectos: a multiplicação no marco da extensão numérica, a introdução ao conceito, o descobrimento e a memorização de tabelas e aprendizagem da multiplicação com multidígito. Não foram considerados: a relação entre a multiplicação e a divisão; o uso da calculadora; o trabalho com múltiplos e operações combinadas e o cálculo mental.

Estabelecendo um paralelo entre os países latino-americanos e os asiáticos, constata-se que há uma maior ênfase nos contextos e significados nos currículos dos países latinos, ao

³ Esses procedimentos algoritmos encontrados na História do desenvolvimento da operação de multiplicação pode ser encontrado em Chamorro (2011), Silva (2003) e Toledo e Toledo (1998).

mesmo tempo em que é percebida certa ‘não-diretividade’ no que se refere à gradação e à sequência dos conceitos que permeiam esta operação. Uma das razões para tal fato é a opção feita para que a escola ou os próprios docentes assumam essa responsabilidade devido à diversidade cultural existente nos referidos países.

Quanto às propostas asiáticas, identifica-se amplitude do âmbito numérico e a formação do sistema de representação, com orientações desde as primeiras séries sobre o uso de termos específicos como multiplicando e produto, bem como as sentenças simbólicas. Em Cingapura, por exemplo, isso ocorre desde a 1ª série. Nestas propostas, há maior organização, coerência e conexão entre os currículos que nas propostas iberoamericanas, sendo o México o país que mais se aproxima e o Chile, o que mais se distancia.

Analisando especificamente o enfoque curricular japonês, mesmo considerando aspectos peculiares àquele país⁴, alguns procedimentos curriculares merecem ser destacados: a compreensão do sistema de numeração decimal, o cálculo mental e a utilização das propriedades da multiplicação como ferramentas para a ampliação da capacidade de cálculo (ISODA e OLFOS, 2011).

O ensino de multiplicação, na Espanha, é analisado por Chamorro (2011) que aponta quatro grandes problemas: o primeiro se refere ao abandono da memorização de resultados, atribuindo-se essa responsabilidade ao próprio aluno, tendo na escola um ensino ainda baseado em métodos que incentivam a simples repetição. O segundo problema é que o algoritmo de multiplicação universalmente ensinado e utilizado socialmente, o de Fibonacci, não é precisamente o mais adequado. Ele exige a retenção na memória de resultados das tabelas, a colocação dos resultados parciais, o que se constitui inconveniente, causando erros quando há zeros intercalados.

O terceiro problema destacado por Chamorro (2011) é que a compreensão do sentido da multiplicação não é trabalhada suficientemente, não se partindo das situações em que se utiliza a operação. E, por fim, não se tem visto o ensino simultâneo com técnicas operatórias e mecanismos de controle que lhes permitam avaliar se o resultado obtido faz sentido ou não. Desta forma, o contrato didático implícito é que a responsabilidade do aluno se encerra quando chega a um número como resultado da multiplicação, cabendo ao professor fazer a correção.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) compreendem a multiplicação como uma operação aritmética que precisa ser estudada juntamente com a

⁴ Uma cultura idiossincrática de organização minuciosa, com significativa valorização ao trabalho do professor, o apoio dos pais e o suporte governamental.

divisão, ampliando-se a compreensão de multiplicação enquanto adição de parcelas iguais. Ao serem explicitados os conteúdos matemáticos para as séries iniciais do Ensino Fundamental, os PCN de Matemática dão mais ênfase ao trabalho com adição e subtração que multiplicação e divisão, mesmo se referindo ao 2º ciclo que envolve os 4º e 5º anos. Para o 1º ciclo, têm-se os seguintes tópicos referentes ao trabalho pedagógico com a multiplicação:

Para o 1º ciclo:

- Análise, interpretação, resolução e formulação de situações-problema, compreendendo alguns dos significados das operações, em especial da adição e da subtração.
- Utilização de sinais convencionais (+, -, x, :, =) na escrita das operações.
- Construção dos fatos básicos das operações a partir de situações-problema, para constituição de um repertório a ser utilizado no cálculo.
- Organização dos fatos básicos das operações pela identificação de regularidades e propriedades.
- Cálculos de multiplicação e divisão por meio de estratégias pessoais (BRASIL, 1997, p. 71 – 72).

Para o 2º ciclo, no bloco das operações aritméticas, têm-se os seguintes tópicos que se relacionam com a multiplicação:

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais.
- Resolução das operações com números naturais, por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos.
- Ampliação do repertório básico das operações com números naturais para o desenvolvimento do cálculo mental e escrito.
- Desenvolvimento de estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental e da calculadora (BRASIL, 1997, p. 87).

Embora saibamos que os conteúdos do 2º ciclo englobam os do 1º ciclo, percebemos que só há uma referência direta à multiplicação nos conteúdos listados para o 1º ciclo, apesar dessa operação ser explorada com maior profundidade nos últimos anos do Ensino Fundamental I.

No Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica o conteúdo de multiplicação é avaliado no 5º ano do Ensino Fundamental, com base em dois descritores: o “D18 - Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais” (BRASIL, 2008, p. 136), o qual exige que os alunos tenham “a habilidade de multiplicar ou dividir números de quatro ou mais algarismos com números de um, dois ou três algarismos, com a presença de zeros, em cada ordem separadamente” (Idem, p. 136), referindo-se, especificamente, aos procedimentos

algorítmicos; e o “D20 – Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória” (BRASIL, 2008, p. 139). Nesse descritor, a ênfase é a compreensão dos significados da multiplicação ou divisão, exigindo, por sua vez, habilidade de cálculo.

Vê-se que nos dois descritores a multiplicação aparece associada à divisão pelo fato das duas constituírem um mesmo campo conceitual. Nesse trabalho, embora consideremos a relação intrínseca entre essas operações, manteremos o foco na multiplicação.

2.4 Os significados da multiplicação

Atualmente, vem sendo posto em destaque que as operações englobam diferentes significados, o que exige conhecimento dos professores sobre esse aspecto. No caso da multiplicação, variadas classificações foram realizadas por diversos autores (VERGNAUD 2009; NUNES e BRYANT, 1997; VALE e PIMENTEL, 2004; VAN de WALLE, 2009d e BRASIL, 1997), embora não tenhamos identificado diferenças relevantes entre elas.

Vergnaud (2009) apresenta os problemas multiplicativos a partir de dois grandes grupos de relações: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas.

Nos problemas com isomorfismo de medidas, ele argumenta que se tem uma relação quaternária, ou seja, aquela que liga quatro elementos entre si. Nos problemas desse grupo são identificadas quatro quantidades – duas são medidas de certo tipo e as outras duas, de outro tipo. Os problemas desse grupo conduzem uma solução pela multiplicação, pela divisão ou regra de três. Como nesse trabalho o foco é a multiplicação, exemplificaremos com situações voltadas ao nosso objeto.

Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?

Minha mãe quer comprar tecido a R\$ 24,80 o metro para fazer um vestido e um paletó. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar?

Vou comprar 12 garrafas de vinho a R\$ 19,50 por três garrafas. Quanto vou gastar? (VERGNAUD, 2009, p. 239 – 240).

Todos esses exemplos podem ser representados por um mesmo esquema que apresenta quatro quantidades:

Exemplo 1

pacotes	iogurtes
1	⇒ 4
3	⇒ x

Exemplo 2

metros	reais
1	⇒ 24,80
3,50	⇒ x

Exemplo 3

garrafas	reais
3	⇒ 19,50
12	⇒ x

Nos problemas de produto de medidas se tem “uma relação ternária, entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional” (VERGNAUD, 2009, p. 253). Como exemplo, temos:

3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?
 Uma sala retangular tem 4m de comprimento e 3m de largura. Qual é a sua área?

Para Vergnaud (2009) o esquema que melhor representa esse tipo de problema é a tabela cartesiana, uma vez que “de fato, é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura de produto de medidas” (p. 254).

Ao apresentar as classes de problemas de tipo multiplicativo, com a relação de isomorfismo de medidas, Vergnaud (2009) distingue três situações, nas quais o x representa a incógnita:

Multiplicação:

1	→	a
b	→	x

Divisão – busca do valor unitário

1	→	x
b	→	c

Divisão – busca de quantidade de unidades

1	→	a
x	→	c

A primeira situação traz a ideia de multiplicação propriamente dita, na qual se tem o valor da unidade, sendo necessário encontrar o valor de b, que corresponde a n unidades; a segunda situação tem-se o valor correspondente a n unidades, mas é preciso encontrar o valor de uma unidade, por isso é um problema de divisão que busca o valor unitário; a terceira representa uma situação na qual se sabe o valor da unidade e a quantidade correspondente a n unidades, mas a incógnita se refere a n, ou seja, o número de cotas.

Embora essa classificação possa ser interpretada como simples, o autor ressalta que as dificuldades apresentadas por crianças até o final da primeira fase do ensino básico são inúmeras, uma vez que cada uma dessas 3 classes se divide em numerosas subclasses se considerarmos: se os números são inteiros ou não, se são pequenos ou grandes, se o valor unitário é decimal; se envolvem números decimais; se os valores referência são inferiores a 1, entre outras.

Essas mesmas recomendações são feitas aos problemas do grupo de produtos de medidas, que podem conduzir a uma multiplicação ou a uma divisão, e variar quanto aos valores das quantidades que estarão presentes na relação (inteiros, decimais, números grandes, números inferiores a 1).

Nunes e Bryant (1998) fundamentam seus estudos a partir de três grupos de situações do campo multiplicativo: situações de correspondência um-para-muitos; situações de co-variação envolvendo relações entre variáveis e situações de distribuição e cortes sucessivos (metades) que já trazem a ideia de divisão. As situações de correspondência um-a-muitos envolvem uma relação constante entre dois conjuntos, sendo esta constante e invariável, constituindo-se base para o conceito de proporção. Por exemplo: *um carro tem 4 rodas. Quantas rodas há em 3 carros?* Quando dizemos que 3 carros possuem 12 rodas, mantemos a mesma relação constante de 1 para 4.

As situações de co-variação envolvem relações entre variáveis e seriam aquelas nas quais “os números envolvidos se referem a valores sobre variáveis e não a conjuntos. Os conjuntos são feitos de elementos descontínuos e as variáveis são contínuas” (NUNES e BRYANT, 1997, p. 146). Por exemplo: *um kg de feijão custa 4,00, quanto custam 3 kg?* Nos problemas de correspondência um-a-muitos se tem dois conjuntos – o de carros e o de rodas (descontínuos) - e a relação entre os dois é expressa pela proporção 1:4. No segundo grupo encontramos as variáveis quilograma, valor em reais e uma terceira que conecta as duas - o preço por quilo. Além disso, as situações do 2º grupo conduzem mais naturalmente a valores fracionários como $\frac{1}{2}$ quilo de feijão, enquanto seria absurdo nos referirmos a $\frac{1}{2}$ carro.

As situações de distribuição envolvem a ideia de divisão, devendo ser considerado o tamanho do todo, número de partes e tamanho das partes, que deve ser igual para todas elas. Por exemplo: *há 12 bolinhos (tamanho do todo) para serem distribuídos entre 3 crianças (nº de partes). Cada criança receberá 4 bolinhos (tamanho da parte ou quota).*

Em um trabalho mais recente, Nunes et al. (2005) se referem ao campo multiplicativo com dois grupos de situações: aquelas que conduzem à correspondência e aquelas que conduzem à distribuição.

Buscando ampliar a ideia de multiplicação para além da adição de parcelas iguais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apresentam quatro grupos de significados correspondentes à multiplicação integrados à operação de divisão.

A ideia comparativa:

- *Pedro tem R\$ 5,00 e Marina tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Marina?*
- *Geane tem 4 balas e Miriam tem 5 vezes mais do que ela. Quantas balas tem Miriam?*

Comparação entre razões envolvendo a ideia de proporcionalidade na multiplicação:

- *Carlos vai comprar três caixas de lápis. Cada caixa custa R\$ 8,00. Quanto ela vai pagar por três pacotes? (1 para 8; 3 para 24);*
- *Se duas mangas custam R\$ 1,50, quanto custam quatro mangas? (1,50 para 2; 3,00 para 4).*

Configuração retangular:

- *Numa sala de aula as carteiras estão dispostas em 7 fileiras e 8 colunas. Quantas carteiras há na sala?*
- *Qual é a área do retângulo cujos lados medem 5 cm por 8 cm?*

A ideia de combinatória:

- *Numa sorveteria, há sorvetes de 6 sabores diferentes que podem ser servidos com cobertura ou sem cobertura. De quantos modos diferentes pode-se pedir um sorvete, sem misturar sabores?*

Esse último tipo de problema, conforme Pessoa (2009), embora faça parte do raciocínio combinatório evidencia o significado de produto cartesiano. Entretanto, o raciocínio combinatório envolve outras ideias como: permutação, arranjo e combinação propriamente dita.

Vale e Pimentel (2004) apresenta três interpretações para a multiplicação: adição de parcelas iguais (que pode ser em grupos ou em arranjo retangular); o modelo de área, que mesmo sendo representado por meio de um arranjo retangular, difere daquele por expressar quantidade contínua; e o produto cartesiano, que traz a multiplicação com a ideia de combinatória.

A classificação feita por Van De Walle (2009d) identifica ‘quatro classes diferentes de estruturas multiplicativas’: grupos iguais (que envolve problemas com adição repetida e taxas); comparação multiplicativa; combinações ou produto cartesianos; e problemas de produto de medidas (comprimento X largura, correspondente à área). Entretanto, o autor

reitera que essas duas últimas classes de problemas são trabalhadas de maneira incipiente na maioria das orientações curriculares.

Em sua tese sobre o processo de formação de professores envolvendo o campo multiplicativo, Santos (2012) apresentou um quadro com quatro eixos: proporção simples (problemas de um-para-muitos ou muitos-para-muitos); proporção múltipla (problemas de um-para-muitos ou muitos-para-muitos); comparação (problemas com relação desconhecida ou referido desconhecido) e produto de medidas (problemas configuração retangular, área ou combinatória).

Dentre os diferentes conceitos que envolvem o conteúdo de multiplicação, dois deles merecem destaque por não encontrarmos uma discussão mais específica: a proporcionalidade e a combinatória.

A proporcionalidade, embora seja de muita importância no cotidiano e em contextos científicos, se constitui em um conceito difícil, sendo adquirido de forma tardia, por volta dos 14 e 15 anos (TOLEDO e TOLEDO, 1997; FERREIRA e GOMES, 2004). Porém, desde os primeiros anos a criança já utiliza relações proporcionais em seu contexto: ao interpretar desenhos, fotografias, imagens de objetos em escalas menores, são exemplos dessas relações (TOLEDO e TOLEDO, 1997).

Em uma pesquisa sobre o letramento no Brasil, o 2º INAF⁵, dois aspectos foram investigados sobre o raciocínio proporcional: “1. a capacidade de identificar relações de proporcionalidade direta e inversa; 2. A habilidade de, conhecida a existência de uma relação de proporcionalidade entre duas quantidades, inferir o valor de uma delas, quando a outra é alterada” (FERREIRA e GOMES, 2004, p. 129). Ou seja, em um nível teríamos a capacidade de identificar tais relações, no outro, de encontrar/produzir um resultado com base nessas relações. Nessa pesquisa, as questões que envolviam o raciocínio proporcional estavam incluídas no nível maior de alfabetismo matemático.

Essa pesquisa evidenciou que, no geral, os sujeitos demonstraram maior capacidade de identificação de relações de proporcionalidade que a capacidade de realizar cálculos de valores dependentes dessas relações. Embora os entrevistados tivessem lápis e papel e calculadoras a sua disposição, essa capacidade não foi evidenciada, o que torna o dado mais preocupante, indicando a fragilidade no trabalho com cálculos e procedimentos algoritmos no contexto escolar.

⁵ Indicador de Alfabetismo Funcional - Instituto Paulo Montenegro.

Outro fator conclusivo a que chegam Ferreira e Gomes (2004), após analisar os dados da pesquisa é a correlação entre o domínio de habilidades do raciocínio proporcional, o nível maior de alfabetismo matemático e o grau de instrução dos sujeitos pesquisados. No entanto, não foi identificada uma relação recíproca e direta entre esses aspectos, uma vez que 42% dos sujeitos com o Ensino Médio completo, não foram classificados no nível mais alto de alfabetismo matemático. Pouco mais da metade dos entrevistados com maior nível de instrução conseguiram acertar a questão: *“Essa fita branca custa dois reais o metro. Quanto vai custar um pedaço de oitenta centímetros?”*.

Os problemas multiplicativos que exploram o raciocínio combinatório estão localizados em variadas classificações. Por exemplo, em Vergnaud (2009) tais problemas estão localizados no grupo de problemas de produto de medidas, em Nunes e Bryant (1997), os encontramos nos problemas de produto cartesiano, incluído no grupo de correspondência um-a-muitos e nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática temos a denominação de problemas de combinatória.

Pessoa (2009) identificou o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças do 2º ano do Ensino Fundamental até alunos do 3º ano do Ensino Médio por meio de um instrumento constituído de problemas ensinados no contexto escolar: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Embora cada um desses tipos tenha invariantes lógicos diferentes, “são todos problemas combinatórios porque possuem a característica de levantamento de possibilidades – por contagem direta ou indireta” (PESSOA, 2009, p. 73). Para os anos iniciais, os problemas mais explorados desse conjunto são aqueles denominados de produto cartesiano.

Neste trabalho, tomaremos a classificação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a elaboração dos instrumentos a serem aplicados juntamente aos professores e seus alunos, problematizando em determinados momentos contribuições dos autores citados.

2.5 A adição e a multiplicação – continuidade e descontinuidade: para além da ideia de adição de parcelas iguais

A demarcação entre adição e multiplicação foi explicitada por Freudenthal, segundo Isoda e Olfos (2011, p. 51 tradução nossa), quando se afirma que “o modelo aditivo é agregativo, incluindo a repetição no qual um número vai ao lado de outro como em somas sucessivas (...). No modelo aditivo todos são de uma mesma espécie e não constituem uma combinação”. Já no modelo multiplicativo, a característica maior é a interação, na qual se tem

um número em função de outro. Essa operação envolve situações muito diversas como de proporcionalidade, área, combinatória, permitindo que seja representada por uma variedade de registros gráficos.

Nunes e Bryant (1997) assinalam que a aprendizagem da multiplicação representa um avanço qualitativo no pensamento das crianças, uma vez que exige a compreensão de outros conceitos. Para eles, o raciocínio multiplicativo apresenta continuidade em relação à operação de adição, mas também descontinuidade, ao exigir a compreensão de novos sentidos numéricos por meio de novas situações.

Os referidos autores concordam com a ideia comum de que a adição deve ser ensinada antes de multiplicação, porque, além de ser uma operação mais fácil, é necessária para a aprendizagem desta, uma vez que a adição repetida é pressuposto para o cálculo da multiplicação, no entanto, há mais questões a serem consideradas. Além da capacidade de calcular quantidades é preciso que as crianças se apropriem de um novo conjunto de sentidos e invariáveis que permeiam a multiplicação e a divisão e que não aparecem no campo aditivo.

A base do raciocínio aditivo (adição e subtração) é formada por situações que possibilitam reunir ou separar objetos ou conjuntos de objetos, enquanto no caso do raciocínio multiplicativo, as situações exigirão estabelecer a correspondência um-para-muitos, as relações entre variáveis e a distribuição/divisão/divisões ao meio (NUNES e BRYANT, 1997).

Barreto e Anastacio (2010) asseveram que o foco somente na ideia de adição de parcelas iguais limita a compreensão da criança na sua aprendizagem sobre a multiplicação e seus diferentes significados (combinatória, disposição retangular e proporcionalidade), reduzindo os contextos de significação dessa operação. Tal limitação leva a criança a compreender que a multiplicação é uma operação cujo resultado é sempre maior que seus fatores, o que não se efetiva quando tratamos números racionais (frações ou decimais).

Nunes e Bryant (1997) analisam as diferenças entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo, nos três grupos de situações por eles classificados: de correspondência um-para-muitos, de co-variação e de distribuição.

Nas situações que exigem o estabelecimento da correspondência um-para-muitos, por exemplo: *se um carro possui 4 rodas, quantas rodas teremos em 3 carros?*, três diferenças básicas são apresentadas em relação ao raciocínio aditivo. A primeira corresponde à relação constante que identificamos nessa situação – 1 carro para 4 rodas – constituindo-se uma invariável que, além de não estar presente no raciocínio aditivo, é base para a ideia de proporção. A segunda diferença é que

as ações efetuadas para manter uma proporção invariável não são unir e separar, mas a replicação e seu inverso” (...). A replicação corresponde somar a cada conjunto a unidade correspondente de modo que a correspondência um-para-muitos seja mantida (p.144).

Por exemplo, se temos 2 carros, temos também 2 vezes o número de rodas; 3 carros, 3 vezes o número de rodas; 10 carros, 10 vezes o número de rodas e assim sucessivamente. O número de replicações feitas aos dois conjuntos denomina-se fator escalar. No exemplo anterior, o fator escalar corresponderia a 3.

A terceira diferença é que a proporção permanece constante quando se tem a replicação e mesmo que o número de carros e de rodas mude, a proporção se mantém, por exemplo, 5 carros e 20 rodas. Portanto, a proporção se refere à relação entre os dois conjuntos e não ao número de objetos entre os dois conjuntos. Resumindo, com esse tipo de situações, temos dois sentidos numéricos novos para as crianças: a proporção e o fator escalar.

Quando discutem situações que envolvem relações entre variáveis, também chamadas situações de co-variação, Nunes e Bryant (Idem) identificam outro sentido numérico – o fator ou função. No exemplo: *um quilo de feijão custa R\$ 4,00, quanto custa 3 quilos?*, as variáveis não se relacionam a conjuntos de elementos como o de carros e rodas, mas ao preço e ao peso que são quantidades intensivas, por isso, conduzem facilmente a valores fracionais.

Nas situações de correspondência um-a-muitos se tem fortemente a relação proporcional de 1 para 4 (carros e rodas) ou 1 para 2 (se nos referirmos a bicicleta e rodas), aqui “frequentemente é sensato falar de um fator, uma função ou uma terceira variável conectando duas variáveis” (p.146) – no exemplo citado, a terceira variável seria o preço por quilo.

As situações que envolvem a distribuição e cortes sucessivos (metades), evidenciando o conceito de divisão, também envolvem a relação parte-todo, presente no campo aditivo, porém com uma diferença. Enquanto na adição e subtração a distribuição pode ocorrer e o tamanho do todo será igual à soma das partes, no caso da multiplicação e divisão, a distribuição obrigatoriamente tem de ser equitativa. “As relações parte-todo estão também envolvidas em distribuição e divisão, mas há três elementos a serem considerados: o tamanho do todo, o número das partes e o tamanho das partes (ou quotas) que devem ser iguais” (NUNES e BRYANT, 1997, p. 148).

Consideremos o seguinte exemplo: *tem-se 8 doces para dividir entre 4 crianças. Quantos doces cada uma receberá?* Aqui três relações devem ser consideradas: o número

total de doces, o número de crianças e o número de doces por criança. Vê-se que há uma relação direta entre o total de doces e o número de crianças, porém, há uma relação inversa entre o número de crianças e a quantidade de doces por criança (NUNES e BRYANT, 1997, p. 148).

Além dessa análise minuciosa, Nunes et al. (2005) apresenta uma forte diferença entre essas duas operações, afirmando que o raciocínio aditivo parte do pressuposto de que o todo é igual a soma das partes, tendo o invariante conceitual a relação parte-todo enquanto no raciocínio multiplicativo, o invariante conceitual é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis.

Santos (2012) analisa a relação entre adição e multiplicação sob três aspectos: conceitual, cognitivo e didático. Do ponto de vista conceitual ele corrobora com a ideia de Nunes et al. (2005) de que há uma descontinuidade entre as duas operações, pois enquanto o raciocínio aditivo se baseia no axioma básico, o todo é igual à soma das partes, o raciocínio multiplicativo está baseado em uma relação fixa entre duas variáveis (grandezas ou quantidades).

Do ponto de vista cognitivo, tem-se uma quantidade considerável de situações que conduzem à multiplicação, exigindo variados tipos de raciocínios e possibilitando maior apropriação das ideias que perpassam esse conceito. Do ponto de vista didático, restringir a multiplicação a um tipo de adição traz duas implicações equivocadas: a primeira, que a multiplicação conduz sempre a um valor que é maior que as quantidades individuais envolvidas o que não procede, bastando considerar que $0,5 \times 2 = 1$ ou $0,5 \times 0,5 = 0,25$, ou seja, com os números racionais essa regra não se sustenta. A segunda implicação é que algumas situações ficam impossibilitadas de serem resolvidas por meio da adição repetida, conforme o exemplo: *Joana comprou 0,30 m de elástico. Sabendo que cada metro custa R\$ 0,70, quanto ela pagou pela compra?* Aqui, qual o número que indica as replicações? (SANTOS, 2012).

A partir destas análises, não se nega a relação existente entre o raciocínio multiplicativo e o raciocínio aditivo, mas ressalta-se a necessária compreensão de suas diferenças por professores dos anos iniciais para que sua ação docente possibilite ampliação conceitual que o raciocínio multiplicativo exige.

2.6 A Multiplicação e seu Ensino

O ensino da operação de multiplicação envolve dois grandes aspectos: a conceituação (propriedades, sentidos numéricos) e suas representações semióticas (procedimentos de

cálculo, tabelas, gráficos, algoritmos, assim como os problemas⁶, que também exigem a compreensão do sistema de numeração decimal e de relações, e propriedades numéricas). Em diferentes trabalhos acadêmicos esses dois eixos aparecem tensionados ou distanciados, visto a priorização dos procedimentos algorítmicos que a escola tem assumido em detrimento da compreensão da operação como um todo.

A multiplicação envolve ideias sobre relação, proporção, correspondência, distribuição, combinação, área, entre outros. Explorar e desenvolver a conceituação da multiplicação são objetivos assumidos por propostas curriculares, por meio do trabalho com os diferentes significados e de sua relação com a operação de divisão. Buscar alcançar esses objetivos, além de favorecer a ampliação do conceito, conduz os professores a perceberem que

problemas que parecem equivalentes aos olhos dos adultos, porque envolvem a mesma operação, podem não ser vistos assim pelas crianças. A não equivalência entre estes problemas reflete-se na utilização de estratégias diferentes para resolvê-los, e em alguns casos, na dificuldade para representar os procedimentos efetivamente colocados em prática através das contas convencionais (ZUNINO, 1995, p.115).

Muitas pesquisas acadêmicas têm sido feitas no sentido de investigar como as crianças desenvolvem a compreensão de alguns desses significados e como os representam (ZUNINO, 1995; NUNES e BRYANT, 1997; STAREPRAVO e MORO, 2005; PESSOA, 2009).

Nunes e Bryant (1997), ao discutirem sobre as potencialidades infantis no processo de apropriação dos conceitos básicos da Matemática, como a compreensão do número e das operações aritméticas, apresentam um consistente trabalho sobre os conceitos e noções inerentes à multiplicação, relacionando-a com a divisão, apontando perspectivas para a reflexão e prática sobre o trabalho da sala de aula de anos iniciais de escolarização.

Dentre as situações de correspondência um-para-muitos, observaram que há problemas mais complexos que outros, muitas vezes não estando tão explícita a relação de correspondência. Esta dificuldade se encontra em problemas que exigem um processo de combinação ou possibilidades, também conhecido como problema de produto cartesiano.

Os autores sugerem três possibilidades metodológicas para o ensino de multiplicação: explorar relações envolvidas na situação, mesmo sem quantificá-las; usar o material manipulativo de maneira parcial, o que exige que a criança expanda seu raciocínio para além

⁶ Inserimos nesse aspecto os problemas, devido às contribuições de Duval.

deste tipo de material; utilizar situações mais simples, como as de correspondência um-para-muitos e também propostas mais complexas como as que envolvem produto cartesiano.

Nos problemas que exigem da criança a reflexão sobre a relação entre as variáveis, há exigências de competências diversas, como o estabelecimento entre quantidades intensivas e números, a conservação de quantidades contínuas, a compreensão de conceitos como os sistemas de sinais que envolvem medida (tempo, comprimento, massa, capacidade, valor monetário) e outros, como temperatura, que extrapolam o campo da Matemática.

Investigando problemas com o conceito de área, Nunes e Bryant (1997) identificaram que aqueles que induzem a utilização da correspondência são mais fáceis que outros que se apresentam de maneira linear de multiplicação. Por exemplo, a questão: *se um retângulo, dividido em quadrados de 1 cm^2 possui 8 colunas e 5 fileiras, quantos quadrados cobrem o retângulo?* conduz a correspondência um-para-muitos; enquanto a questão: *se um retângulo possui 8 cm^2 de largura e 5 cm^2 de comprimento, qual sua área?*, conduz ao cálculo entre medidas, no caso seu produto. Além disso, foi demonstrado que o material disponibilizado para a resolução, teve influência nos resultados (as crianças que receberam tijolinhos retangulares foram mais bem sucedidas que as que receberam régua).

Isso significa que, quando propomos problemas para as crianças, precisamos considerar que sistemas de sinais estamos pedindo que elas usem. Sua capacidade de resolução não é fixa, mas pode ser melhorada ou limitada pelo ambiente representacional no qual elas estão resolvendo problemas (NUNES e BRYANT, 1997, p. 184).

Na investigação sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, Pessoa (2009) apresenta um rol de variáveis que interferem na resolução de problemas. Além dos significados envolvidos e do ambiente representacional, a autora aponta que os contextos que envolvem os problemas, as formas de apresentação, bem como as formas de proposição (se individualmente, em duplas, em trios, com materiais disponíveis ou não) interferem nas situações nas quais os problemas são respondidos e, portanto, interferem nas respostas e desempenhos das crianças.

Starepravo e Moro (2005) preocupados em compreender como as crianças pensam o conceito de multiplicação, uma vez que essa investigação é fundamental para o ensino, questionam o ensino das operações que focaliza a aprendizagem dos algoritmos em detrimento da solução de problemas. Para elas, essa dissociação justifica as crianças questionarem sobre a conta a ser realizada quando se deparam com um problema, uma vez

que o trabalho limita-se a exploração do algoritmo aliado ao problema que resolve utilizando-o.

As autoras discutem resultados de uma pesquisa utilizando situações com as ideias de multiplicação, divisão (partição), divisão (cota) e regra de 3, na qual o foco foi provocar a antecipação da resolução (levando a criança a estimar a resposta), proporcionar a produção de notações, bem como a interpretação desses registros.

Os resultados indicaram que as crianças observadas anteciparam com problemas de multiplicação, utilizando o cálculo mental, mas não de divisão, o que levou a conclusão de que os problemas de multiplicação permitiam mais uma solução anterior à utilização de registros que os problemas de divisão, que exigiam a inversão.

As antecipações de solução encontradas apontam, ainda, para a importância do uso da estimativa, na resolução de problemas. Quando os sujeitos fizeram antecipações por estimativas de conteúdo (...), em geral, estas antecipações serviam de controle para o resultado (STERAPRAVO e MORO, 2005, p. 120).

Desta forma, as antecipações permitiram também avaliação e correção nos resultados, principalmente quando a criança estimava um resultado e, ao resolver por escrito, não conseguia correspondência entre o que havia pensado anteriormente. Quanto aos registros notacionais, observou-se em sua maioria a utilização de procedimentos aditivos, sendo bem diferentes daqueles ensinados pela escola.

Por fim, quanto à interpretação dos registros, por um lado, as crianças interpretaram seus procedimentos, avaliando-os, quanto à inadequação ou o resultado obtido, voltando-se a novas tentativas e, por outro lado, também foi feita a interpretação na perspectiva de explicar o processo de solução, possibilitando às crianças a leitura de seus registros e reflexão sobre seus procedimentos.

Sterepravo e Moro (2005) concluem sua investigação afirmando que é no trabalho com resolução de problemas que se oferece às crianças um contexto de significação aos conceitos, sendo espaço primordial para a elaboração do saber matemático. Nesse espaço é imprescindível que os professores conheçam as produções dos alunos, identificando conceitos e noções sobre as operações, promovendo a socialização de tais procedimentos, favorecendo a evolução dos mesmos.

Inventar e construir procedimentos de cálculo dão sentido à atividade da criança de resolver problemas. A interpretação dos alunos frente aos registros utilizados (seus e de seus

colegas) favorece análise coletiva de estratégias, identificando vantagens e desvantagens presentes, bem como acertos e erros - momento de elaboração e socialização. Nesse processo, a institucionalização do algoritmo formal deve ser posterior ao levantamento de estratégias pessoais. Nessa direção, Zunino (1995) discute que as estratégias que as crianças colocam em ação no processo de resolução de problemas precisam ser discutidas e validadas com o grupo, refletindo-se sobre quais são mais adequadas ou mais úteis para cada situação. Além da representação, é necessária a interpretação dessas representações, incluindo também as representações convencionais.

Tem sido comum nas proposições didáticas com resolução de problemas, o estímulo para que as crianças se atentem a algumas palavras-chave que indicariam qual operação deva ser realizada para o alcance de sua solução. No entanto, as pesquisas realizadas tomando por base os significados das operações têm condenado tais posturas visto que determinados problemas não podem ser definidos a priori, se desta ou daquela operação, porque poderão ser solucionados por diferentes operações.

Em relação a essa temática, Van de Walle (2009d) apresenta três argumentos contra o uso de palavras-chave no ensino baseado na resolução de problemas:

1. As palavras-chave podem ser enganosas, chegando a sugerir uma operação incorreta. Como exemplo tem-se: *João pegou 21 figurinhas que ele não queria mais e deu todos a seu amigo Vítor. Agora João ficou com 65 figurinhas. Quantas figurinhas João tinha no início?* Qual a palavra-chave? ‘Deu’ e ‘ficou’ se referem a tirar e diminuir, porém a solução do problema não é alcançada pela subtração.
2. Muitos problemas não têm palavras-chave e uma criança que for induzida a sempre procurá-las ficará impotente diante deles. Por exemplo: *Dona Joana faz bolos de chocolate para a Lanchonete ‘Gostosuras’. Ela utiliza 4 ovos para fazer um bolo de chocolate. Se ela fizer 8 bolos, de quantos ovos precisará?*
3. “A estratégia da palavra-chave transmite uma mensagem terrivelmente errônea sobre o fazer Matemática” (VAN de WALLE, 2009d, p.185), encorajando os estudantes a ignorarem o significado e a estrutura do problema, “procurando uma saída mais fácil” (Idem, p.185).

Sobre os problemas gerados com a utilização das palavras-chave, Santos e Buriasco (2008) afirmam:

a adoção de palavras-chave como estratégia para a compreensão do enunciado e o estabelecimento de poucas conexões entre as informações

contidas em cada uma das frases das questões parecem levar a interpretações diferentes das consideradas corretas. Quando se exige compreensão além do reconhecimento de palavras-chave, os alunos encontram mais dificuldades (p. 18).

Assim, essa tendência assumida por muitos docentes, além de não capacitar as crianças para resolver problemas de uma maneira geral, conduzem a interpretações equivocadas e a erros frequentes, quando as situações apresentam enunciados complexos e diferentes dos modelos trabalhados.

Starepravo e Moro (2005) atribuem a necessidade da criança em saber qual a conta a ser utilizada no problema, ao fato da escola priorizar o ensino dos algoritmos, o que conduz o aluno a pensar que resolver problemas “seria adivinhar a conta a ser utilizada em cada caso” (p.108).

Nessa direção, o que deve ser enfatizado na resolução de problemas não é meramente sua solução, mas a sua análise e o processo de solução para que seja atribuído sentido e significado, uma vez que fazer Matemática implica raciocinar e dar sentido às situações. Nessa direção, as representações semióticas tem um papel fundamental, pois constituem o meio pelo qual o procedimento de resolução ocorre e se efetiva.

2.6.1 Discutindo os Procedimentos de Cálculo

Os estudos na área de Educação Matemática, nas últimas décadas, têm orientado o ensino das operações com o foco na resolução de problemas, no fazer matemático e na significação dos procedimentos realizados pelos estudantes, criticando fortemente as propostas que se baseavam na apropriação de procedimentos de cálculo de forma mecânica e sem a devida relação com situações contextuais. Nessa direção, Chamorro (2011), conclui:

A aprendizagem da multiplicação que dedica muitas horas a aprendizagem do algoritmo tradicional, que não propicia nem ensina métodos pessoais alternativos de cálculo, que ignora a existência do cálculo mental, e que dissocia resolução de problemas e cálculo, não pode formar alunos com a competência numérica necessária (CHAMORRO, 2011, pp. 247 – 248, tradução nossa).

No entanto, a própria Chamorro (2011) assinala que um dos problemas que afeta o ensino de multiplicação na Espanha tem sido o abandono do ensino do algoritmo, o que nos remete a uma inclinação metodológica para o outro extremo, o da ênfase no trabalho com

resolução de problemas e seus significados e a ausência de uma proposta significativa para a aprendizagem dos procedimentos algorítmicos.

A crítica à escola tradicional, aos seus procedimentos mecânicos e vazios de significado tem sido tão ferrenha, nas últimas décadas, que o trabalho com a tabuada – tabela com fatos fundamentais - vem sempre associado a essa tendência, conduzindo muitos professores a terem uma visão negativa frente a este instrumento e, portanto, a desconsiderarem sua importância no contexto escolar de hoje. Tem sido comum, em processos formativos dos quais participamos, professores dos anos iniciais nos questionarem sobre o uso ou não uso da tabuada na escola atual, uma vez que remete aos processos de ensino pautados na memorização, demonstrando a desvalorização do ensino dos fatos fundamentais da multiplicação.

Para nós, o domínio dos fatos fundamentais das operações se constitui em apropriação de ferramenta cognitiva necessária para os tratamentos de procedimentos algorítmicos diversos, servindo de base para operações com multidígitos que as crianças irão realizar, além dos que envolvem números decimais e menores que um.

Explorar os procedimentos algorítmicos de multiplicação com as crianças implica relacioná-los às ideias de dobro, triplo, quádruplo, valor posicional, divisão, inteiro e partes, propriedades distributiva e associativa, procedimentos de contagem e cálculo mental (BARRETO e ANASTACIO, 2010).

Os fatos fundamentais das operações de adição e multiplicação se referem às combinações onde os fatores ou termos das operações são menores que 10. Os fatos fundamentais da subtração e da divisão correspondem ao inverso dos fatos aditivos e multiplicativos. “O domínio de um fato fundamental significa que uma criança pode dar uma resposta rápida (em cerca de 3 segundos) sem recorrer a meios não-eficientes como a contagem” (VAN de WALLE, 2009e, p. 191).

De acordo com Van de Walle (2009e), todas as crianças são capazes de dominar os fatos fundamentais, desde que construa ferramentas mentais eficazes, inclusive crianças com dificuldades de aprendizagem. Sobre a aprendizagem dos fatos fundamentais, três abordagens são identificadas por ele: o método baseado num extenso programa de exercícios; a abordagem que sugere que se ensine uma “coleção de estratégias ou padrões de raciocínio para várias classes de fatos fundamentais” (VAN de WALLE, 2009e, p. 191) e a terceira, que traz a opção de concentrar esforços nos conceitos e relações numéricas de que tais estratégias dependem.

A proposta de oferecer às crianças listas extensas de exercícios, embora seja ainda muito usada nas escolas, tem demonstrado que não funciona, uma vez que se têm muitos jovens que não sabem os fatos fundamentais da multiplicação. Segundo Van de Walle (2009e), pesquisas de muitas décadas atrás, já confirmavam que “crianças desenvolvem uma variedade de processos de pensamentos diferentes para fatos fundamentais independente da quantidade de exercícios que eles tiveram que suportar” (p. 192). O autor, portanto, defende que as listas de exercícios possam ser usadas quando as crianças já tiverem ‘adquirido uma estratégia eficaz’. O equívoco está na sua utilização prematura.

A segunda perspectiva, que se baseia no ensino de estratégias já testadas e eficazes, já é encontrada em livros didáticos, sendo mais eficaz que as listas de exercício, porém, a crítica feita é que tais procedimentos são externos à criança, que pode simplesmente estar seguindo regras sem uma devida apropriação das relações numéricas ali presentes.

A terceira via de trabalho é conhecida como ‘invenção orientada’ e, como o nome já diz, está conectada “à coleção de relações numéricas dos estudantes” (VAN de WALLE, 2009e). Nessa direção, “o significativo é que os estudantes não estão necessariamente cientes de usar uma estratégia, mas em vez disso, eles estão pensando em combinações e relações numéricas que possuem e que tem significado para eles” (p. 192). No entanto, esse processo não ocorrerá independente do trabalho do professor. As discussões sobre as estratégias ‘inventadas’ precisam ser planejadas e orientadas a partir de tarefas e problemas que promoverão tais invenções, exigindo do professor um domínio significativo de estratégias possíveis para os problemas propostos.

A proposição de Van de Walle (2009e) sobre o trabalho com os fatos fundamentais das operações dirige-se à valorização de estratégias eficazes para o desenvolvimento do cálculo mental, ajudando na habilidade de raciocinar numericamente em todas as áreas relacionadas ao campo numérico. Se toda criança é capaz de dominar os fatos fundamentais, quando a escola não explora tais potencialidades, contribui para a negação de um rico instrumento formativo.

Em relação às dificuldades enfrentadas com a memorização dos fatos fundamentais de multiplicação, Devlin (2004) explica que se considerarmos que os resultados das tabuadas de 1, 10, 2 e 5 são mais fáceis de memorizar, “restam apenas trinta e seis multiplicações de um algarismo onde é necessário algum esforço para guardá-los na memória. (Cada 3, 4, 6, 7, 8 e 9 vezes cada 3, 4, 6, 7, 8 e 9)” (p. 80). Porém, se nos atentarmos para a propriedade comutativa, teremos apenas 18 multiplicações para reter na memória e mesmo assim, muitas crianças, jovens e adultos sentem dificuldades. Por que isso acontece?

A explicação apontada por Devlin (2004) é que a nossa mente é uma reconhecedora de padrões e funciona por associações. Assim, ao visualizarmos $7 \times 8 = 56$; $6 \times 9 = 54$ e $8 \times 8 = 64$, a nossa mente vê similaridades entre elas, que um computador não identifica, especialmente similaridades linguísticas ao serem ditadas em voz alta. “Nossa dificuldade em tentar manter essas três equações separadas, não indica uma fraqueza de memória, mas uma de suas maiores forças – sua capacidade de ver semelhanças” (p. 81).

Os PCN de Matemática problematizam os diferentes tipos de cálculo: o mental e o escrito, exato e aproximado, orientando que eles sejam trabalhados concomitantemente “para que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles e com isso aperfeiçoar seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos, aproximando-os aos das técnicas usuais” (BRASIL, 1997, p.76). O cálculo mental corresponde à execução de uma operação sem ajuda de instrumentos e de registros escritos e conforme os PCN Matemática, “apoia-se no fato de que existem diferentes maneiras de calcular e pode-se escolher a que melhor se adapta a uma determinada situação, em função dos números e das operações envolvidas” (p.76), podendo-se encontrar variadas maneiras pessoais e originais de resolução.

O cálculo aproximado, também conhecido como estimado, corresponde aos cálculos realizados sem a preocupação com a exatidão da resposta, no entanto ele se apoia

em aspectos conceituais referentes aos números e às operações (ordem de grandeza, valor posicional, proporcionalidade e equivalência), em procedimentos (como decompor, substituir, arredondar, compensar), na aplicação de estratégias de cálculo mental (BRASIL, 1997, p.77).

Conforme esse documento, uma das finalidades do ensino desse tipo de cálculo no contexto atual é proporcionar aos alunos o desenvolvimento e sistematização de seus procedimentos, tendo a estimativa como estratégia de verificação e controle de resultados. Assim, o aluno deve ser levado a desenvolver a capacidade de estimar um resultado aproximado de um determinado procedimento, verificando a sua pertinência ao concluir e alcançar a resposta.

O cálculo escrito, especificamente o algoritmo formal apoia-se “nas regras do sistema de numeração decimal e na existência de propriedades e regularidades presentes nas operações” (BRASIL, 1997, p. 78). No entanto, esse repertório conceitual não tem sido compreendido por muitos alunos que, ao se apropriarem dos procedimentos de cálculo ensinados na escola, o fazem de maneira mecânica e vazia de significado. Para favorecer a compreensão dos procedimentos algorítmicos os PCN sugerem explorar a escrita decomposta

nos números (adição); a compreensão da regra da invariância da diferença (subtração); a propriedade distributiva (multiplicação) e a obtenção de quocientes parciais para serem adicionados (divisão). Além disso, os PCN fazem referência ao uso de calculadoras como possibilidade de ampliação do repertório básico de cálculo de crianças e jovens.

Chamorro (2011) propõe dedicar-se mais tempo a teoria dos números que a aprendizagem de algoritmos, propriamente ditos, e recomenda o uso da propriedade distributiva e a automatização de resultados simples e múltiplos de 10 nesse processo. Ela sugere ainda o trabalho com outras estratégias de cálculo, como a multiplicação egípcia, a multiplicação *a la rusa* e também a partir de um diagrama, além do uso da calculadora e do cálculo mental. Segundo a autora, o cálculo formal não é um fim em si mesmo, senão um meio para resolver de maneira eficaz, situações problemas propostas.

Na discussão sobre o sentido no ensino de Matemática, Panizza (2006) adverte que nas últimas décadas tem-se dado maior ênfase na aprendizagem de conceitos que de procedimentos, conduzindo a uma ideia de que os últimos fossem mecânicos, não tendo nada para serem compreendidos, somente para serem observados e recordados. A autora ressalta que o manuseio de procedimentos exige compreensão do sistema de numeração decimal e das propriedades que envolvem as operações e, para tanto, os professores de anos iniciais precisam ter acesso consciente a tais conhecimentos.

Referindo-se às orientações curriculares do sistema de ensino japonês, Isoda e Olfos (2011) afirmam que há uma ‘teimosia’ assumida por aquele currículo. Tal ‘teimosia’, se revela na exigência que as crianças provem seus argumentos, descritivos ou dedutivos, juntamente com os processos de conceitualização e ‘procedimentação’ (tabelas de multiplicar). No entanto, os autores concluem que talvez o que mais tem funcionado e provocado sucesso naquele país, não é somente o fato da sequência e gradação dos conteúdos serem seguidos com rigidez, mas “bem mais a coerência interna do sistema de sugestões que se provêm ao professor” (ISODA e OLFOS, 2011, p. 45, tradução nossa).

Sobre a necessidade do trabalho docente com as duas frentes – a da conceitualização e da procedimentalização – Nunes e Bryant (1997) asseveram: “Se nos concentrarmos em instrução Matemática como ensino de técnicas e prestamos pouca atenção à relação entre o modelo e a situação que ele matematiza, criamos um divórcio entre o conhecimento de técnicas e a percepção do sentido” (NUNES e BRYANT, 1997, p. 190).

As orientações do IREM e do grupo ERMEL, citadas por Chamorro (2011), apresentam algumas linhas que precisam ser consideradas pelas propostas de ensino: o reforço ao tratamento do Sistema de Numeração Decimal; situações de interação, grupos, coleções;

explorar o conjunto de problemas que pertencem ao campo multiplicativo; uso inicial do quadriculado seguido de seu abandono, para se chegar ao procedimento formal – Fibonacci; associação da multiplicação e divisão; uso de tabelas de multiplicar a partir da série de múltiplos; construção da técnica da multiplicação; uso do cálculo mental, duplicações sucessivas e decomposição de números; trabalho com jogos que pretendem a aquisição e memorização de repertórios ou uso e descobrimento de técnicas de cálculo mental (dominó, jogos de batalha, bingos, entre outros).

Nunes *et al.* (2005) sugerem que o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo deva basear-se em alguns princípios: engajamento dos alunos na resolução de problemas; priorização da coordenação entre esquemas de ação (correspondência e distribuição) que dão origem ao raciocínio multiplicativo; coordenação entre sinais e representações ligadas ao raciocínio multiplicativo, principalmente o uso tabelas e gráficos e estímulo ao registro de estratégias pelos alunos.

A justificativa para o uso de tabelas e gráficos como instrumentos adequados para representar a multiplicação está coerente com a compreensão conceitual desta operação – a existência de uma relação fixa entre duas variáveis. Assim,

para representar o raciocínio multiplicativo, necessitamos de tabelas e gráficos em que duas variáveis estejam representadas. Isso significa que os professores precisam investir simultaneamente em resolução de problemas e no ensino da representação em tabelas e gráficos (NUNES *et al.*, 2005, p. 105).

Voltaremos a discutir o papel dos gráficos e tabelas no ensino de multiplicação no Capítulo específico sobre as representações semióticas, no qual trataremos das contribuições de Raymond Duval para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

3. A CONTRIBUIÇÃO DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL NA MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA

O objetivo deste Capítulo é contextualizar o conceito de mediação pedagógica no ensino de multiplicação. Para tanto, alguns princípios da teoria Histórico-cultural serão revisitados, especificamente de Vigotski e Leontiev, na perspectiva de situarmos o fenômeno de formação de conceitos e de aprendizagem como processo de humanização, base para a compreensão da mediação pedagógica no ensino desse conteúdo.

3.1 Contribuições da Teoria Histórico-Cultural para o Ensino de Matemática – Vigotski⁷

A psicologia soviética buscou a construção de uma nova psicologia fundamentada cientificamente em pressupostos marxistas⁸. Tanto as teorias naturalistas em psicologia humana quanto as de corrente sociológica conservavam a separação entre os dois domínios – o individual e o social. De acordo com Leontiev (1978), somente a filosofia do materialismo dialético propõe a relação entre ambos, estendendo a explicação científica e materialista aos fenômenos naturais e sociais. “Vigotski foi o primeiro a exprimir a tese de que a ‘démarche’ histórica devia tornar-se o princípio diretor da edificação da psicologia do homem” (LEONTIEV, 1978, p. 153).

Baquero (1998) aponta três temas principais na teoria de Vigotski: a preocupação com o método genético ou desenvolvimental, que se preocupa com o processo e não com o produto; a afirmação de que os processos mentais superiores no indivíduo tem sua origem na vida social e, por fim, que os instrumentos de mediação (ferramentas e signos) cumprem um papel central na constituição de tais processos. Esses dois últimos temas perpassarão nosso trabalho, sendo que o terceiro terá uma discussão maior.

Vigotski (1991) argumentou que a constituição do humano se dá a partir da cultura e das relações sociais, inaugurando a abordagem que compreende e analisa o funcionamento da mente humana e das funções mentais superiores como a memória, a atenção, a percepção, e outras, a partir da natureza histórico-cultural.

⁷Há diferentes traduções para seu nome. Usaremos esta forma quando nos referirmos ao autor. No entanto, no decorrer do texto outras escritas aparecerão quando se referirem às traduções da literatura pesquisada.

⁸Nem todos os intérpretes de Vigotski tomam esse pressuposto como referência. Prestes (2012), apresenta um trabalho minucioso acerca das inadequações de tradução das obras de Vigotski.

Referenciando-se na abordagem marxista, Vigotski caracteriza que o que nos constitui como humano advém de experiências que só são vivenciadas por homens e mulheres: a histórica, a social e a duplicada. Para ele, o homem não se serve unicamente do que recebeu de forma hereditária, ele possui uma experiência histórica, herdada de gerações anteriores e essa herança não física difere-o do animal. Essa história é registrada em diferentes sistemas semióticos como a oralidade, a escrita, a arte, constituindo-se em registros de experiências vividas por diferentes grupos sociais, formando a experiência social coletiva, e isso inclui a experiência social de outras pessoas. Por exemplo, posso saber muito sobre Marte, sem nunca ter olhado por um telescópio, mas a partir dos estudos realizados por pesquisadores, ou seja, a experiência dos outros pode ser repassada pelo discurso e aprendemos com ela (VIGOTSKI, 1991).

Na sua relação com a natureza, o homem elabora novas formas de adaptação, submetendo a natureza a si mesmo, construindo ferramentas, inventando o trabalho de maneira consciente. Aqui se faz presente a experiência duplicada, a qual sua ação, sua atividade, repete o que antes havia sido previsto e antecipado em sua mente.

Para Vigotski, a relação entre natureza e cultura acontece por meio da superação e não pela via do dualismo, ou seja, ao produzir cultura, o homem supera formas de lidar e de compreender processos naturais. De acordo com Sirgado (2002), as funções biológicas não desaparecem com a emergência das funções culturais, mas adquirem uma nova forma de existência: elas são incorporadas na história humana. Para ele, “[A]firmar que o desenvolvimento é cultural equivale, portanto, a dizer que é histórico, ou seja, traduz o longo processo de transformação que o homem opera na natureza e nele mesmo como parte dessa natureza” (SIRGADO, 2002, p. 51).

Nesse contexto, Vigotski (2000) propõe a lei básica do desenvolvimento das funções psíquicas superiores, a qual fundamenta que o desenvolvimento dessa função ocorre primeiramente em espaços sociais, para depois ser internalizado pelo indivíduo. Assim, toda função mental é construída em dois momentos: no primeiro, de maneira interpsicológica, por meio dos ambientes sociais nos quais se está inserido, partilhando-se determinada função com outros sujeitos; no segundo momento, o intrapsicológico, que significa a internalização daquela função pelo sujeito. O próprio Vigotski exemplifica: “geralmente perguntam, como esta ou aquela criança se comporta no coletivo. Nós perguntamos: como o coletivo cria nesta ou naquela criança as funções superiores?” (VIGOTSKI, 2000, p. 29).

Portanto, a compreensão do papel exercido pelas relações socioculturais evidencia a importância que o processo educacional escolar tem sobre o desenvolvimento das funções

mentais, uma vez que tem sido um espaço primordial para a socialização e apropriação de conhecimento. Referindo-se ao ensino de Matemática, especificamente de multiplicação, evidencia-se a importância das interações promovidas entre o docente e os alunos, entre os alunos, bem como o manuseio de materiais informativos e impressos, como livros, jornais, encartes e outros como calculadoras e softwares computacionais.

Nessa direção, se as relações vivenciadas no coletivo provocam desenvolvimento, é necessário, na escola, o planejamento também dessas interações, entre o professor e alunos e dos alunos entre si. Pensando no ensino de Matemática, não cabe mais a sala silenciosa, com alunos individualmente, escrevendo e solucionando exercícios e problemas. O debate, a troca de informações, a pesquisa e a validação das estratégias devem ser orientados pelo professor e assumidos pelos alunos.

A partir dessa lei, Vigotski inaugura uma nova compreensão sobre a relação entre desenvolvimento e aprendizagem. Essa relação passa a ser compreendida de uma maneira mais complexa, ampliando-se a própria concepção de desenvolvimento. “O estado de desenvolvimento mental da criança pode ser determinado pelo menos através da elucidação de dois níveis: o nível de desenvolvimento atual e o nível de desenvolvimento imediato” (VIGOTSKI, 2001b, p. 480)⁹.

O primeiro nível evidencia os processos já concluídos, abrangendo o que a criança já é capaz de fazer sozinha, mas não determina em sua plenitude seu estado de desenvolvimento, pois não é capaz de explicitar os processos que estão em processo ou em amadurecimento, regulando-se apenas pelas funções já conquistadas e construídas. O segundo nível, denominado imediato ou proximal, indicaria as capacidades que o sujeito pode alcançar com a ajuda do outro, revelando “para nós o amanhã da criança, o estado dinâmico do seu desenvolvimento que leva em conta não só o já atingido, mas também o que se encontra em processo de amadurecimento” (VIGOTSKI, 2001b, p. 480).

A partir desta proposição, Vigotski inaugura o conceito de zona de desenvolvimento imediato ou proximal (ZDP) que significa a

distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKY, 1989, p. 97).

⁹ O desenvolvimento imediato é traduzido em alguns textos como desenvolvimento proximal. A autora Zoia Prestes, no estudo sobre as traduções das obras de Vigotski no Brasil, discute o termo ‘zona de desenvolvimento iminente’.

Assim, “a aprendizagem, que se orienta nos ciclos já concluídos do desenvolvimento, acaba sendo ineficaz do ponto de vista do desenvolvimento geral da criança, não conduz o desenvolvimento mas segue a reboque dele” (VIGOTSKI, 2001b, p. 482). A proposição da zona de desenvolvimento imediato se apresenta como uma relação oposta ao que era consensual entre os psicólogos, ao indicar que “só é boa a aprendizagem que supera o desenvolvimento” (VIGOTSKI, 2001, p. 482). Desta forma, os processos de aprendizagem não coincidem com o desenvolvimento, mas estão a ele associados, criando zonas de desenvolvimento imediato. Vigotski conclui: “Nossa hipótese pressupõe uma unidade entre esses dois processos, mas não a identidade (...). Ela pressupõe a transformação de um em outro” (VIGOTSKI, 2001b, p. 486).

Nessa perspectiva, a imitação tem um papel importante no desenvolvimento psicológico das crianças e Vigotski defende que ela está estreitamente vinculada à compreensão e não somente à repetição, como algumas teorias ressaltaram. “Através da imitação na atividade coletiva, orientada pelos adultos a criança está em condições de fazer bem mais, e fazer compreendendo com autonomia” (VIGOTSKI, 2001b, p. 479).

Analisando o conceito de ZDP, Facci (2004) assevera que ele

transforma a relação de autoridade do professor com o aluno, e mesmo o papel da interação no processo de aprendizagem, uma vez que confere ao professor a função principal de ensinar, de dirigir o processo educativo, com a finalidade de potencializar as possibilidades do aluno, de forma que converta em desenvolvimento atual aquilo que estava na zona de desenvolvimento próximo (241-242).

Além disso, se a lei geral do desenvolvimento indica a interação com conceitos em um nível anterior à sua internalização, por meio das relações sociais, é imprescindível que o docente, responsável também pela organização do ambiente de aprendizagem possibilite situações de interação e imitação acerca dos procedimentos matemáticos. É importante enfatizar que a ampliação do conhecimento e a conversão de capacidades em amadurecimento para outras já amadurecidas, não é um processo natural, principalmente quando nos referimos à apropriação de saberes sistematizados como, no caso, a multiplicação de números naturais.

Vigotski esclarece ainda que é impossível contestar o fato de que o ensino deve estar combinado ao nível de desenvolvimento da criança. “Podemos alfabetizar uma criança com 1 ano? Ensinar álgebra a crianças com 7 anos?” (VIGOTSKI, 2001b, p. 477-478). Daí ser

necessário compreender a relação entre os dois processos – aprendizagem e desenvolvimento. Nesses exemplos, vemos que são apresentadas capacidades que exigem para além do desenvolvimento real das crianças, não sendo capacidades aproximadas aos conhecimentos que as crianças já possuem.

Sobre essa questão, Daniels (2002) afirma que mesmo que corroborem a ideia que em colaboração a criança pode sempre fazer mais do que sozinha, essa capacidade não é infinita, mas restrita aos limites de seus estados de desenvolvimento e seu potencial intelectual.

Esta ressalva ganha pertinência quando nos referimos aos processos de aprendizagem em espaços escolares que ainda tem fortes resquícios da concepção que desconsidera a participação do sujeito/aluno no processo. Como equívoco, poder-se-ia pensar que a colaboração de um adulto ou de uma criança mais experiente potencializaria a capacidade de aprender de uma criança, em todas as situações, o que não procede. Ao usar do termo imediato ou proximal, está-se indicando que para ocorrer o avanço na aprendizagem, a relação entre os conhecimentos prévios e os novos, do outro mais experiente, deverá se situar em uma proximidade conceitual, possibilitando pontes e ‘links’ entre o conhecimento já estabilizado e o que está em vias de se consolidar.

Além disso, o conceito de ZDP, ou zona de desenvolvimento iminente, aponta que “existe um campo de possibilidades para o desenvolvimento das funções psicológicas na atividade guia” (PRESTES, 2012, pp. 206 – 207), e que nessa atividade em colaboração, seja escolar ou não, de imitação ou de brincadeira, as crianças se deparem com situações desafiadoras.

Da discussão feita até aqui corroboramos o princípio que o desenvolvimento das capacidades mentais tem como fundamento a interação e inserção sociocultural, o que ratifica o valor de espaços sociais, principalmente da escola no alcance desse desenvolvimento. Esse pressuposto tem implicação direta com a compreensão do processo educativo. Se o externo tem primazia sobre o interno, a relação ensinar e aprender é ressignificada a partir de uma nova compreensão entre o desenvolvimento e a aprendizagem. A aprendizagem não precisa mais estar a reboque do desenvolvimento, mas adiante dele, promovendo-o, provocando-o.

Nessa perspectiva, “o ensino é o sistema de organização dos meios pelos quais se transmite ao indivíduo a experiência elaborada pela humanidade, considerado eficiente aquele ensino que se adianta ao desenvolvimento” (FACCI, 2004, p. 230).

A partir dessa proposição, cabe ao professor, na função de ensinar, identificar conceitos já construídos (espontâneos e científicos) e conceitos em via de amadurecimento,

que são explicitados com ajuda; de promover interações entre crianças com níveis de desenvolvimentos diferentes; realizar atividades com variedade de elementos mediadores (linguagem oral, representações semióticas, materiais de uso social) que potencializem a aprendizagem de conceitos.

3.1.1 O pensamento, a linguagem e o desenvolvimento de conceitos

Quando Vigotski argumenta que os sistemas semióticos constituem-se em instrumentos psicológicos de mediação no processo de desenvolvimento humano, ele parte também de estudos sobre a função da linguagem. A linguagem assume uma função para além da comunicação, sendo uma ferramenta cultural que promove e potencializa o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.

Ao investigar a relação entre o pensamento e a linguagem, Vigotski (2001a, 2009) toma a palavra como unidade de análise, visto que ela possui propriedade potencial para ambos os processos. A palavra possui sonoridade e significado, constituindo-se em fenômeno ao mesmo tempo da linguagem e do pensamento. A “palavra nunca se refere a um objeto isolado mas a todo um grupo ou classe de objetos. Por essa razão cada palavra é uma generalização latente, toda palavra já generaliza e, em termos psicológicos é antes de tudo uma generalização” (VIGOTSKI, 2009, p. 9).

O autor em estudo identifica a função comunicativa da linguagem como sendo um meio de enunciação e compreensão. Embora nos animais seja encontrado um tipo elementar de comunicação primitiva, Vigotski afasta completamente esse tipo daquela encontrada nos humanos, uma vez que há ausência de ideação e representação. O signo presente na capacidade de representação é indispensável nos processos de comunicação, pois esta “sem signos é tão impossível quanto sem significados – a comunicação envolve necessariamente generalização e desenvolvimento de significado” (VIGOTSKI, 2009, p. 12).

Para ele, as raízes dos processos de pensamento e linguagem são diferentes e seus percursos de desenvolvimento ora convergem ora divergem, possibilitando que a fala torne-se intelectual e o pensamento seja verbalizado. O pensamento se torna verbal quando a criança enuncia, a partir de antecipação e inferências realizadas mentalmente, e a fala se torna intelectual porque ao expressar determinada palavra, o significado social já se encontra nessa enunciação.

Toda a teorização de Vigotski sobre a relação entre a linguagem e o pensamento e o seu processo de desenvolvimento serve de base para a compreensão do processo de construção de conceitos. Ele afirma que não existe conceito sem palavras, “o pensamento em conceitos é impossível fora do pensamento verbal”, sendo uma capacidade mental que exige a participação das diferentes funções mentais, como a memória, atenção, percepção, entre outras. Portanto,

[O] emprego funcional da palavra ou de outro signo como meio de orientação ativa de compreensão (...) de sua abstração e síntese é parte fundamental e indispensável do processo de formação de conceitos. A formação de conceito ou a aquisição de sentido através da palavra é o resultado de uma atividade intensa e complexa (operação com palavra ou signo), da qual todas as funções intelectuais básicas participam em uma combinação original (VIGOTSKI, 2009, p. 168).

O desenvolvimento dos conceitos na infância ocorre por meio de um processo delineado em estágios: o estágio do pensamento por amontoado sincrético; o estágio do pensamento por complexo e o pensamento por conceitos, porém essas etapas são compostas de subfases que se interferem e se sobrepõem, não ocorrendo numa sequência linear e rigorosa.

No primeiro estágio a palavra é tomada como encadeamento sincrético, imagem instável que substitui a carência de nexos objetivos por aspectos essencialmente subjetivos. No segundo estágio, tem-se o pensamento por complexo que representa objetos particulares, com vínculos objetivos, baseando-se em relações factuais da experiência imediata, diferentemente do pensamento lógico-abstrato. Esse pensamento já apresenta a “generalização ou a unificação de objetos heterogêneos concretos” (VIGOTSKI, 2009, p. 180), porém o vínculo se baseia no concreto, sendo “factual e fortuito” (Idem, p. 181).

Dentre as subfases do pensamento por complexo, a última, denominada de pseudoconceitos, é significativa, uma vez que intermedeia a passagem para a terceira etapa – a dos conceitos propriamente ditos. O pseudoconceito possui aparência idêntica ao conceito, considerando-se os aspectos externos, porém, em termos internos, ainda é um complexo. Esse pensamento é muito comum na idade pré-escolar e é confundido com os conceitos pelo fato de sofrerem a influência direta do discurso dos adultos. No pseudoconceito “não há contornos sólidos, e reinam os processos ilimitados que frequentemente impressionam pela universalidade dos vínculos que combinam” (VIGOTSKI, 2009, p. 189).

As interações existentes entre crianças e adultos ou com crianças maiores, possibilitam comunicação e assimilação, pela criança, de vocabulário similar ao do adulto, porém a apreensão do significado não ocorre imediatamente, pois o conceito só é apreendido tardiamente. Ou seja, embora criança e adulto estejam falando da mesma palavra e até do mesmo referente, os significados que um possui são extremamente diferentes e mais complexos que os do outro. Essa característica da coincidência no referente, mas não no significado é uma peculiaridade no pensamento infantil por complexo, uma regra na evolução da linguagem (VIGOTSKI, 2001a, 2009).

Desta forma, o pensamento infantil e do adulto podem até coincidir na função nominativa, ou seja, ao referenciar-se aos objetos e fatos cotidianos pelos nomes, mas diferem nas operações mentais nas quais se baseiam, comprovando que os atos de pensamento da criança por meio da linguagem são diferentes dos atos do pensamento dos adultos.

É bom ressaltar que o pensamento por complexo está presente também na linguagem dos adultos, sendo mais utilizada do que imaginamos. Quando usamos expressões do tipo: o braço do rio, perna da mesa, entre outras, estamos nos referindo a um complexo e não a um conceito, o que comprova que o pensamento do adulto não é formado inteiramente por conceitos, sendo utilizados igualmente os pseudoconceitos.

Por fim, a terceira etapa desse processo corresponde à construção de conceitos que conta com os vínculos entre os elementos e a uniformidade entre eles. Essa etapa também possui subfases, indicando um processo de construção efetiva, não sendo alcançado pela mera associação entre palavras e objetos. Segundo Vigotski, o

conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar do pensamento com o qual a criança percebe e toma conhecimento da realidade que a cerca. Neste caso, o experimento mostra que o papel decisivo na formação do verdadeiro conceito cabe à palavra. (...) com a palavra ela os sintetiza, simboliza o conceito abstrato e opera com ele como lei suprema entre todos aquelas criadas pelo pensamento humano (VIGOTSKI, 2009, p. 226).

A diferença entre o complexo e o conceito está localizada no emprego da palavra. No primeiro caso tem-se o emprego funcional da palavra em determinado contexto e, no segundo caso, a palavra será resultado de aplicação inteiramente diversa, em diferentes contextos. “Palavra é signo e esse pode servir como meio para operações intelectuais que por intermédio

da palavra levam a distinção fundamental entre complexo e conceito” (VIGOTSKI, 2009, p. 227).

No entanto, somente na adolescência se chega ao pensamento por conceitos, concluindo-se o 3º estágio. Porém, ao ter aprendido operar com as formas superiores de pensamento, ou seja, com os conceitos, o adolescente não abandona as formas mais elementares de pensamento, fato que é observado até no comportamento dos adultos, o qual está longe de pensar sempre por conceitos. Para Vigotski,

[O] processo de formação de conceitos não difere da atividade puramente associativa pelo volume de conexões, mas porque representa um novo tipo de atividade, cujo traço principal é a passagem de processos intelectuais imediatos a operações mediadas por leis (...), dentre elas a significação provocada pela via funcional como meio racionalmente utilizado (VIGOTSKI, 2009, p. 173).

Desta forma, a diferença do intelecto de uma criança para o de um adolescente não seria uma questão relativa à quantidade de vínculos e conexões, mas de novas formações qualitativas, na qual a linguagem assume uma função de meio racionalmente utilizado.

A palavra tem lugar central nos processos de ensino, seja a palavra do educador, seja a palavra dos estudantes, a palavra dos livros, dos cadernos e de outros instrumentos utilizados. A palavra que comunica, que se objetiva, que ensina, que organiza e que sistematiza. Pensando o ensino de Matemática no ensino fundamental, no qual as crianças iniciam o processo de formação de diferentes conceitos científicos, além da palavra da língua materna, tem-se a palavra organizada e significada em uma linguagem matemática – uma língua formal que compõe sistemas numéricos e métricos, com propriedades e regras, operações, equações, gráficos, tabelas. Assim, no processo de construção dos conceitos matemáticos têm-se a tensão e convivência entre essas duas linguagens.

Se, conforme Vigotski, um conceito espontâneo não é apropriado de maneira automática, mas passa por um processo longo de construção, os conceitos matemáticos que estão embutidos na linguagem formal tornam-se mais complexos ainda, uma vez que essa linguagem é carregada de conceitos e formulações teóricas. Nos anos iniciais esse processo de apropriação é intercalado pela utilização de registros icônicos e pictóricos que talvez se aproximem do pensamento por complexo, no qual ainda há uma forte referência ao contexto e ao factual.

Vigotski ainda complementa afirmando que a adolescência não é um período de conclusão, de maneira rigorosa, mas também de transição, de crise e amadurecimento. Este

aspecto é melhor observado quando a situação a ser resolvida exige a definição do conceito, pois utilizar adequadamente o conceito em uma situação concreta é menos difícil que defini-lo verbalmente.

Há uma profunda diferença entre a formação do conceito e sua definição verbal, uma vez que “a existência do conceito e a consciência dele não coincidem nem no surgimento nem no seu funcionamento” (VIGOTSKI, 2009, p. 229). Este fenômeno da dificuldade na definição verbal do conceito é observado também no adulto devido à dificuldade de “transferência do sentido ou significado do conceito elaborado para situações concretas sempre novas, que ele pensa no plano também abstrato” (VIGOTSKI, 2009, p. 231).

O conceito não pode ser compreendido como mero produto de associações. Realizar associações é uma premissa indispensável no processo de formação de conceitos, mas insuficiente para caracterizá-lo. Conforme o autor, “o momento central de toda essa operação é o uso funcional da palavra como meio de orientação arbitrária da atenção, da abstração, da discriminação de atributos particulares e de sua síntese e simbolização com o auxílio do signo” (VIGOTSKI, 2009, p. 236).

Vê-se a importância atribuída à utilização da palavra como orientadora da ação humana de aprender e desenvolver-se. No caso da atividade de aprendizagem de Matemática, será a sua utilização orientando diferentes funções mentais, descrições, reflexões, raciocínios percorridos, sínteses, bem como a representação por meio de registros diversos que possibilitará a construção de conceitos envolvendo os conteúdos ensinados no espaço escolar.

3.1.2 Os conceitos espontâneos e científicos

A teoria de Vigotski preconiza que pensar por conceito exige um nível de abstração e racionalização maior que quando lidamos com saberes cotidianos que são construídos espontaneamente em diferentes contextos socioculturais. Assim, ao mesmo tempo em que ele caracteriza os conceitos espontâneos e científicos, diferenciando-os, também teoriza sobre suas relações. Os conceitos espontâneos seriam aqueles formados a partir da experiência pessoal da criança em seu convívio com adultos e outras crianças e os conceitos científicos corresponderiam aos conceitos sistematizados racionalmente e elaborados a partir do ensino escolar.

Os conceitos espontâneos ascendem para as generalizações e os conceitos científicos, que são mais explorados no período escolar, descendem ao concreto. Nessa comparação, são

identificados pontos fortes e fracos de cada tipo de conceito, sendo que a fraqueza dos conceitos espontâneos reside na capacidade de abstração, de operar arbitrariamente e a dos conceitos científicos, no verbalismo excessivo. Quanto aos pontos fortes, nos conceitos espontâneos têm-se a aplicação imediata ao contexto (mesmo que não se faça corretamente) e, nos conceitos científicos, a habilidade de uso arbitrário, não necessariamente, contextual (VIGOSTKI, 2009).

Para Vigotski, estes dois tipos de conceitos devem ser compreendidos de maneira relacionada, sendo necessário identificar até que ponto pode ser alcançada tal relação e em quais circunstâncias não ocorre, uma vez que o desenvolvimento de cada conceito se dá por vias diferentes.

Comparando a aprendizagem de uma língua estrangeira à aprendizagem dos conceitos científicos e a língua materna aos conceitos espontâneos, o autor exemplifica o quanto os conceitos científicos podem potencializar os conceitos espontâneos. Ele conclui que aprender uma língua estrangeira eleva a capacidade de compreender e tomar consciência de sua própria língua, assim como o domínio da álgebra aumenta consideravelmente o domínio do pensamento matemático. Referindo-se à aquisição dos conceitos científicos ele considera que

essa formação de conceitos requer atos de pensamento inteiramente diversos, vinculados ao livre movimento no sistema de conceitos, à generalização de generalizações antes constituídas, a uma operação mais consciente e mais arbitrária com conceitos anteriores (VIGOTSKI, 2009, p. 269).

Para Vigotski (2001a, 2009), Piaget demonstrou que o que é mais peculiar no pensamento infantil é a incapacidade para conscientizar-se das relações que ela utiliza de modo espontâneo e automático, devido ao egocentrismo infantil. Desta forma, a não-consciência e não-arbitrariedade são as características básicas dos conceitos espontâneos e a consciência e a arbitrariedade, aspectos peculiares aos conceitos científicos. Como então a criança pode tomar consciência de seus conceitos?, questiona Vigotski.

Os conceitos científicos, mediados por outros conceitos, com um sistema hierárquico interior de inter-relações, são o campo em que a tomada de consciência dos conceitos, ou melhor, a sua generalização e apreensão parecem surgir antes de qualquer coisa (...) Desse modo, a tomada de consciência passa pelos portões dos conceitos científicos (VIGOTSKI, 2009, p. 290).

Para Vigotski “*só no sistema o conceito pode adquirir as potencialidades de conscientizáveis e arbitrariedade*” (VIGOTSKI, 2009, p. 291, grifos do autor). Generalização significa ao mesmo tempo tomada de consciência e sistematização de conceitos, porém, interessa demonstrar que esse sistema e a tomada de consciência não são trazidos de fora para o campo dos conceitos infantis, de forma automática, mas que estes já pressupõem a existência de conceitos infantis ricos e maduros.

Para o autor, o problema da relação entre os conceitos espontâneos e científicos é uma questão que exige o entendimento da relação entre o ensino e o desenvolvimento. Compreendemos que os processos de ensino promovem situações de aprendizagem diferentes para as crianças, por favorecerem a tomada de consciência, possibilitando a transferência de conceitos que estão no plano de ação para o plano da linguagem. Assim, nos voltaremos para os processos de aprendizagem ocorridos na escola que possam favorecer essa tomada de consciência.

No ensino de Matemática, assim como de outras disciplinas, o processo de ensino é permeado pelos conceitos espontâneos dos estudantes, assim como conceitos científicos em processo de apropriação e os conceitos escolares (científicos) propriamente ditos. Nos anos iniciais e por toda a escolarização, recomenda-se que os conceitos matemáticos sejam explorados em espiral, tendo-se um longo período para sua construção e apropriação. No caso da multiplicação, embora as crianças desde pequenas já lidem com situações de ensino nas quais esse conteúdo seja explorado didaticamente, a sua apropriação em seus diversos significados só vai ocorrer após alguns anos e dependendo da intensidade desses processos de ensino.

Vigotski (2009) discorda que essa tomada de consciência venha de forma repentina e mediante apenas os processos de ensino, como algo totalmente externo à criança. Funções como memória, atenção, percepção, assimilação são importantes para o processo e já demonstram presença na criança antes mesmo da idade escolar. Portanto, para tomar consciência é preciso que haja o que deve ser conscientizado e apreendido, o que implica que essas funções já se encontram em processo de formação na mais tenra infância.

Comparando os dois tipos de conceitos, vê-se que nos conceitos espontâneos “a criança tem o conceito do objeto e a consciência do próprio objeto representado nesse conceito, mas não tem a consciência do próprio conceito, do ato propriamente dito de pensamento através do qual concebe esse objeto” (VIGOTSKI, 2009, p. 345). Aqui, o processo percorre o caminho do objeto ao conceito, de baixo para cima.

Com os conceitos científicos “seu desenvolvimento começa pelo trabalho com o próprio conceito como tal, pela definição verbal do conceito, por operações que pressupõem a aplicação não espontânea desse conceito” (VIGOTSKI, 2009, p. 345). O processo percorrido é do conceito ao objeto, de cima para baixo, das propriedades mais complexas e superiores para as elementares. Portanto, eles se desenvolvem em sentidos opostos.

Se entendermos que os processos de ensino e de aprendizagem fomentados no ambiente escolar potencializam o desenvolvimento de funções psíquicas superiores e que, nesse contexto, os conceitos científicos têm um papel importante por possibilitarem a tomada de consciência e a apreensão, então o desenvolvimento dos conceitos científicos deve ter prioridade no contexto escolar. Porém, para a conquista dos conceitos científicos, o processo de ensino precisa tomar como base os conhecimentos prévios das crianças, sejam espontâneos ou científicos, ampliando o que elas já sabem e possibilitando-as saber a mais, com a ajuda de outras mais experientes, do professor, dos materiais escritos ou outros instrumentos.

Relacionando à aprendizagem de multiplicação de números naturais, a consciência do conceito e a sua utilização de forma arbitrária em diferentes situações se constitui em uma conquista necessária para crianças dos anos iniciais escolares. Essa perspectiva não se coaduna com a mera repetição de cálculos ou memorização mecânica de fatos fundamentais nem tampouco somente com a exploração espontânea de classes de problemas. Ela exige atividade mental dos alunos – com a utilização de funções superiores (atenção arbitrária, a memória lógica, a abstração, a comparação e a discriminação de significados) – e do professor – com a compreensão aprofundada do conteúdo e de como possibilitar esse desenvolvimento, abrangendo conceitos e representações simbólicas.

Aspecto importante constatado por Vigotski foi que a aprendizagem dos processos de escrita, gramática, aritmética e das ciências naturais não começa no momento em que as respectivas funções mentais estão maduras. Pelo contrário, se apoia em processos psíquicos imaturos, que apenas estão iniciando o seu círculo primeiro e básico de desenvolvimento, e essa “imaturidade das funções no momento em que se inicia o aprendizado é lei geral e fundamental a que levam unanimemente as investigações em todos os campos do ensino escolar” (VIGOTSKI, 2009, p. 319).

A criança pode dominar certas habilidades no campo da linguagem e em outras áreas, mas não sabe que as domina, portanto, ela não tem consciência do que já sabe nem consegue aplicar esse conhecimento de forma arbitrária. Vigotski (2009) apresenta dois conceitos, o de irmão e de economia planificada para esclarecer. Embora o conceito de irmão seja usado pela criança de maneira espontânea, ela não se dá conta dele quando perguntada sobre a relação

entre ela e seu irmão, evidenciando não compreender a relação recíproca entre ambos. A explicação é que a criança não tomou consciência do conceito, embora o utilize cotidianamente. O mesmo não ocorre com o conceito de economia planificada que embora não o aplique no contexto diário apreendeu-o a partir de um processo formal que a levou ao processo de conscientização do mesmo. Nesse ponto, pensamos que Leontiev possa complementar Vigotski ao trazer a contribuição da atividade no processo de desenvolvimento cognitivo, como um mecanismo que promova a conscientização de conceitos no processo formal de ensino. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Aqui se tem a evidência que os processos de aprendizagem e desenvolvimento nem sempre são coincidentes, uma vez que nesses exemplos os processos de aprendizagem estão sempre à frente do desenvolvimento, revelando “inter-relações complexas que só são possíveis em decorrência da discrepância entre ambos” (VIGOTSKI, 2009, p.323). Resumindo,

no momento da assimilação de alguma operação aritmética, de um conceito científico, o desenvolvimento dessa operação e desse conceito não termina mas apenas começa, a curva do desenvolvimento não coincide com o aprendizado do programa escolar; no fundamental a aprendizagem está à frente do desenvolvimento (VIGOTSKI, 2009, p. 324).

Nessa perspectiva, a zona de desenvolvimento imediato (ou proximal) tem mais importância que o nível atual de desenvolvimento, porque para cada disciplina formal, o “ensino seria totalmente desnecessário se pudesse utilizar apenas o que já está maduro no desenvolvimento, se ele mesmo não fosse fonte de desenvolvimento e surgimento do novo” (VIGOTSKI, 2009, p. 334).

Os conceitos espontâneos e científicos, ao se desenvolverem de maneira oposta, oportunizam as condições de desenvolvimentos das propriedades que o seu outro não possui e o vínculo entre esses dois tipos de conceitos é a zona de desenvolvimento imediato. Temos o exemplo sobre o aprendizado da língua materna, correspondendo aos conceitos espontâneos, na qual a criança aprende de forma inconsciente e não-intencional e, a aprendizagem de uma língua estrangeira, correspondendo aos conceitos científicos, a qual ela aprende de forma consciente e intencional. Ao aprender uma nova palavra estrangeira, a criança não se relaciona com o objeto, mas com a palavra correspondente na língua materna. O mesmo é observado nos conceitos científicos: “que é mediatizado por outros conceitos anteriormente construídos” (VIGOTSKI, 2009, p. 352).

Ao discorrer sobre a construção de conceitos, temos vislumbrado o papel potencializador da educação no desenvolvimento do pensamento humano, pois ao lidar com palavras, conceitos, ideias, o processo de abstração é infinitamente mais denso que a abstração que toma por referência os objetos e a realidade circunstancial das crianças. Vigotski complementa:

Toda operação de pensamento - definição de conceito, comparação e discriminação de conceito, estabelecimento de relações lógicas entre conceitos, etc. - não se realiza senão por linhas que vinculam entre si os conceitos e as relações de generalidade e determinam as vias eventuais de movimento de um conceito a outro. (VIGOTSKI, 2009, p. 377).

Isso não quer dizer que os processos de educação oferecidos à maioria da população em idade escolar tenham contribuído para tal conquista – a capacidade de realizar abstrações estabelecendo relações lógicas entre conceitos. Porém, essa é uma finalidade a ser buscada nos espaços educacionais formais, sendo imprescindível para isso, a reflexão sobre como promover a transformação de conceitos espontâneos em científicos.

Ampliando a discussão proposta por Vigotski, Leontiev discute com profundidade a importância e papel da Atividade no desenvolvimento humano. Para esse trabalho, utilizaremos alguns princípios que advêm de sua formulação.

3.2 O Pensamento de Leontiev - a atividade, a consciência e a linguagem

As contribuições de Leontiev para a compreensão dos processos de mediação pedagógica no ensino de Matemática se localizam no âmbito da Teoria da Atividade, que foi construída a partir de sua produção teórica sobre o desenvolvimento do psiquismo.

De acordo com Kuzolin (1990), Vygotsky traçou um programa teórico que dava conta de três tipos de mediadores: signos e símbolos; atividades individuais; e relações interpessoais, sendo que Vygotsky avançou mais na mediação semiótica e Leontiev avançou na mediação provocada pela atividade.

Leontiev (1978) compreende que os aspectos que caracterizam o psiquismo humano e que o diferenciam do psiquismo animal são: o tipo de atividade realizado pelos homens; a linguagem; e a consciência, sendo que estes aspectos se interpõem e se integram. O autor esclarece: “chamamos de atividade um processo que é eliciado e dirigido por um motivo - aquele no qual uma ou outra necessidade é objetivada. Em outras palavras: por trás da relação entre atividades, há uma relação entre motivos” (LEONTIEV, 1983, p. 13). Se no animal a

relação é imediata, havendo uma coincidência entre o objeto e o motivo da atividade, nos homens, cada vez mais essa relação é mediatizada (DUARTE, 2002).

Nesse contexto, o trabalho foi a atividade que possibilitou o processo de humanização, ligando o homem à natureza, possibilitando sua ação sobre ela, modificando a natureza e a própria natureza humana, o que possibilitou o desenvolvimento de capacidades ainda adormecidas. O trabalho humano é uma atividade, desde a origem, social e coletiva, fundada na cooperação entre indivíduos, mediatizando sua comunicação.

A compreensão da consciência a partir do referencial teórico marxista traduz uma concepção oposta à abordagem burguesa, a qual é vista de maneira metafísica e absoluta, sendo, por isso, indeterminável. Assim, “a consciência individual do homem só pode existir nas condições em que existe a consciência social”. Ela “é o reflexo da realidade, refratada através do prisma das significações e dos conceitos *lingüísticos*, elaborados socialmente” (LEONTIEV, 1978, p. 88).

Assim, o pensamento vem a ser “o processo de reflexo consciente da realidade, nas suas propriedades, ligações e relações objetivas, incluindo mesmo os objetos inacessíveis à percepção sensível imediata” (LEONTIEV, 1978, 84). Tal processo é objetivado pelos conceitos verbais e operações lógicas, igualmente elaboradas socialmente, daí a importância da linguagem, que por seu intermédio, nos possibilita “a imagem consciente, a representação e o conceito” (LEONTIEV, 1978, p. 85).

Para o autor, assim como a consciência, a linguagem surge ao mesmo tempo em que o trabalho, que é produto da coletividade, enquanto uma necessidade nascida a partir da organização do mesmo. Se os homens assumem uma dupla função no trabalho, a perspectiva de produzir objetos e a perspectiva de se comunicar com os outros homens, a linguagem também não desempenha apenas o papel de meio de comunicação entre eles, mas ao mesmo tempo se constitui uma forma da consciência e do pensamento humanos, integrada ao processo de produção material.

Quanto aos processos de comunicação pela linguagem, desde a primeira infância o contato da criança com os objetos humanos só farão sentido mediante o processo de comunicação que os adultos proporcionam de forma prática. Segundo Leontiev (1978), as relações dos homens são sempre mediatizadas por outros homens e, nesse processo, a comunicação tem papel importante, uma vez que constitui a segunda condição específica indispensável para que o processo de apropriação dos conhecimentos e fenômenos produzidos pela humanidade seja efetivado. Essa condição é sempre realizada, uma vez que não existe pessoa que sobreviva sozinho.

Para o autor, embora a linguagem desempenhe um papel enorme e verdadeiramente decisivo, ela não é definidora da natureza humana no homem. Ela é aquilo através do qual se generaliza e se transmite a experiência da prática sócio-histórica da humanidade sendo, portanto, “um meio de comunicação e condição de apropriação pelos indivíduos dessa experiência e a forma de sua existência na consciência” (LEONTIEV, 1978, p. 172). Nesse sentido, Leontiev se distancia de Vigotski, pois seus estudos vão à direção da atividade, tendo a linguagem como componente integrador, mas não a aprofundando.

O desenvolvimento humano pressupõe aquisição e apropriação dos fenômenos objetivos que o mundo propõe, sendo que nesse processo o homem é ativo e parte de um processo já construído por seus antepassados. Na apropriação desses fenômenos a atividade do sujeito e a linguagem são fundamentais, tendo nos processos educativos o espaço fundamental para a realização dessa finalidade.

É por meio da atividade que o homem se apropria de objetos e fenômenos sócio-históricos acumulados pela humanidade e a aptidão de utilizar instrumentos é uma propriedade da espécie humana. Muito do que se transmite de geração em geração entre os humanos não pode ser realizado pela hereditariedade, mas pela experiência sócio-histórica. A apropriação dos fenômenos sócio-históricos se dá por um processo ativo e para tal “é necessário desenvolver em relação a eles uma **atividade** que reproduza, pela sua forma, os traços essenciais da atividade encarnada, acumulada no objeto” (LEONTIEV, 1978, p. 268, grifo nosso).

A necessidade de apropriação do saber acumulado historicamente pela humanidade se baseia no argumento de que ele possibilita aos indivíduos “pensarem de uma forma humana, pois ao utilizarem os signos sociais, ao fazerem relações com os fatos e objetos apreendidos, é que os indivíduos podem compreender a realidade social e natural” (FACCI, 2004, p. 209).

Sobre esse processo de apropriação, Vigotski se referia ao mecanismo de internalização que corresponde à interiorização das ações exteriores. Por meio desse processo, ocorre a transformação gradual das ações exteriores em ações interiores, intelectuais, realizando-se necessariamente na ontogênese humana.

Assim, se se quer construir na criança uma nova ação intelectual, como a ação de adição, é preciso apresentar-lha inicialmente como uma ação exterior, é preciso exteriorizá-la (...); supõe que o sujeito passe das ações realizadas no exterior às ações situadas no plano verbal, depois a uma interiorização progressiva destas últimas (LEONTIEV, 1978, p.188).

Na sociedade contemporânea, a escola é um espaço que tem por excelência o objetivo de favorecer a apropriação da experiência humana acumulada a cada nova geração. Para Saviani (2008, p. 13), “o trabalho educativo é o ato de produzir, direta e intencionalmente, em cada indivíduo singular, a humanidade que é produzida histórica e coletivamente pelo conjunto de homens”.

Ressaltamos que nem sempre a escola tem assumido a responsabilidade no processo de humanização, favorecendo mais ainda o esvaziamento de sentido de sua função, não garantindo, efetivamente, o desenvolvimento do pensamento do sujeito. A escolarização pode potencializar ou limitar, ampliar ou restringir, sendo que muitos elementos concorrem para que sua função seja efetivada ou não.

O processo educativo é fundamental, pois permite que não seja necessário reinventar o mundo a cada nova geração, o que não seria possível, sendo um dos principais componentes responsáveis pela transmissão e apropriação do conhecimento acumulado pela humanidade.

Se pensarmos no conhecimento matemático acumulado pela humanidade, seriam “necessárias mil vidas para se produzir o pensamento lógico ou matemático abstrato e sistemas conceituais correspondentes” (LEONTIEV, 1978, p. 266). Isso nos esclarece a importância dos processos educativos, nos quais os conhecimentos acumulados pelas gerações que nos antecederam são transmitidos, repassados e ressignificados. “O movimento da história só é, portanto, possível com a transmissão, às novas gerações, das aquisições da cultura humana, isto é, com educação” (LEONTIEV, 1978, p. 273).

Para o autor, as atividades são “os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo” (LEONTIEV, 2010, p. 68). Desta forma, a realização da atividade está relacionada diretamente ao motivo que impulsiona. No caso da atividade humana, o motivo tem raiz social e cultural.

Para Leontiev (1978), a “primeira condição de toda atividade é uma necessidade, porém em si, a necessidade não pode determinar a orientação concreta de uma atividade, pois é apenas no objeto da atividade que ela encontra sua determinação” (LEONTIEV, 1978, pp. 107-108). Temos, então, a necessidade objetivada no objeto e fim da atividade e o motivo da atividade como aquilo que a estimula. O autor exemplifica a partir de uma situação rotineira: a leitura de um livro de História por um aluno que se prepara para um exame. Ao ver essa situação não podemos afirmar que psicologicamente o aluno está em atividade, pois não sabemos ainda o motivo que provocou sua leitura. Se o aluno souber por um colega que essa leitura não será mais necessária para o exame e, portanto, abandoná-la essa situação não pode

ser compreendida como atividade, uma vez que o motivo da leitura não coincidiu com o seu objetivo - a aprendizagem e ampliação do conhecimento por meio do livro, mas passar no exame.

Se, por outro lado, o estudante continuar com a leitura, evidencia-se que o que a dirigiu foi o próprio livro, o seu conteúdo, e ela será uma atividade, psicologicamente falando. “Dizendo de outra forma, alguma necessidade especial do estudante obteve satisfação no domínio do conteúdo do livro – uma necessidade de conhecer, de entender, de compreender aquilo de que tratava o livro” (LEONTIEV, 2010, p. 68).

Vê-se nessa discussão que a atividade engloba uma necessidade, motivos e objetivos. Leontiev ainda se refere às emoções e os sentimentos que os sujeitos possuem diante de determinada atividade. Além desses elementos, as ações e as operações também são descritos como elementos constituintes da atividade como um todo.

Para ele, uma ação seria “um processo cujo motivo não coincide com seu objetivo (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade do qual ele faz parte” (LEONTIEV, 2010, p. 69). Se voltarmos ao exemplo da leitura do livro de História, quando essa leitura ocorre meramente para que o estudante seja aprovado, ela corresponde simplesmente a uma ação, pois o que a dirige não se objetiva nela (aprender o conteúdo do livro), mas passar no exame.

Ainda utilizando esse exemplo da leitura como uma ação, podemos identificar diferentes operações, como relacionar o que está sendo lido com outra matéria, inferir o final da discussão ou da narração, entre outras. Por operações, Leontiev define como o modo de execução de uma ação. Assim, uma mesma ação pode ser executada por diferentes operações e uma mesma operação pode se inserir em diferentes ações.

O significado de uma ação diz respeito ao conteúdo da ação, enquanto o sentido da mesma diz respeito às razões, aos motivos pelos quais o indivíduo age. Nessa direção, Leontiev (1978) difere significação de sentido, sendo o primeiro equivalente à forma como o homem assimila a experiência das gerações anteriores, generalizada por meio da linguagem, sendo algo mais amplo que o sentido. Este, por sua vez, embora tenha um aspecto mais pessoal, não pode ser compreendido apenas a partir da consciência própria, até por que isso é impossível. Para Leontiev (1978), o ‘sentido consciente’ traduz a relação do motivo com a finalidade de uma atividade.

Nessa perspectiva, “(...) para encontrar o sentido pessoal devemos descobrir o motivo que lhe corresponde” (DUARTE, 2002, p. 97), pois não há sentidos puros. Sentido pessoal é diferente de significações sendo “o sentido que se exprime nas significações (como o motivo

nos fins) e não a significação no sentido” (DUARTE, 2002, p. 98). O sentido pessoal traduz a relação do sujeito com os fenômenos conscientizados, fazendo parte da consciência de cada um. No espaço educativo, esses conceitos são muito caros, uma vez que os sentidos e significados das ações realizadas por alunos e professores precisam coincidir com a finalidade de contribuir com a apropriação de conhecimento, portanto de desenvolvimento humano.

Pensando na atividade que orienta o desenvolvimento ontogenético, Leontiev (2010) apresenta quatro estágios que as pessoas percorreriam ao longo de seu desenvolvimento, tendo em cada estágio uma atividade preponderante ou principal. Os estágios seriam o pré-escolar, cuja atividade preponderante seria o brincar; o estágio escolar, que traz a ampliação das obrigações com a atividade principal do estudo; o estágio da adolescência, com a conquista de mais espaço e autoafirmação, iniciando um treinamento especial; e na juventude, a preparação e atuação no mundo do trabalho.

A atividade principal é então a atividade “cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento” (LEONTIEV, 2010, p. 65). Entretanto, cabe a ressalva que o conteúdo dos estágios se relaciona de forma direta com as condições concretas nas quais o sujeito participa. Outro aspecto destacado é que

(...) não é a idade da criança, enquanto tal, que determina o conteúdo de estágio do desenvolvimento; os próprios limites de idade de um estágio, pelo contrário, dependem de seu conteúdo e se alteram *pari passu* com a mudança das condições histórico-sociais (LEONTIEV, 2010, p. 65 – 66).

Nessa pesquisa, estudamos o processo de ensino e de aprendizagem no período que corresponde ao estágio escolar, cuja atividade principal das crianças é o estudo. No interior dessa atividade maior, outras atividades são desenvolvidas pelas crianças contendo diferentes ações e operações. Aprende-se Matemática e outras disciplinas, e no interior da Matemática, estudam-se diferentes conteúdos. O conteúdo da multiplicação envolve dois grandes objetivos a serem alcançados pelas crianças: resolver problemas envolvendo seus significados e realizar procedimentos de cálculo que envolvam multiplicação por um número ou números multidígitos.

Para Núñez (2009), a teoria Histórico-cultural compreende “a aprendizagem como uma atividade especificamente humana orientada para um objetivo” (p. 25) e as investigações posteriores a Vigotski, principalmente de Leontiev e equipe

permitiram esclarecer que o processo de formação dos conceitos científicos impõe como condição a definição do tipo de atividade necessária para sua formação, ou seja, a organização de tipos específicos de atividade que desencadeia o desenvolvimento potencial e o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, entre elas o pensamento conceitual, e consequentemente o desenvolvimento integral da personalidade do aluno (NÚÑEZ, 2009, p. 57).

Assim, vemos que a discussão da atividade como condição e meio para a formação dos conceitos científicos, complementa a proposição de Vigotski, pois a palavra e os sistemas semióticos estariam no interior da atividade.

Nessa perspectiva, Núñez (2009) teoriza minuciosamente sobre os elementos que estruturam a atividade – os motivos, os objetivos, as ações, as operações discutindo suas relações, semelhanças e diferenças de maneira muito complexa. Baseando na Teoria da Atividade, discute a estrutura da atividade de aprendizagem, delimitando os seguintes componentes: o papel do aluno (nível, motivos, necessidades), as características do objeto de estudo; os procedimentos; os recursos, os resultados previstos, a situação e/ou o contexto e os resultados. Para tanto, caberá ao professor organizar as ações necessárias e adequadas que os alunos deverão se envolver para o alcance da atividade de aprendizagem. É nesse sentido que se afirma que Leontiev contribui do ponto de vista metodológico para a atuação docente.

Noutra perspectiva de análise das contribuições da teoria da atividade, Rigon *et al.* (2010) compreendem a atividade pedagógica como uma unidade dialética entre a atividade de ensino e a atividade de estudo, sendo uma síntese entre a aprendizagem e o desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Seu objetivo, portanto, é proporcionar aos estudantes a construção e a apropriação do conhecimento, favorecendo o exercício da dúvida, instigando a pesquisa e os motivando no processo de sua aprendizagem (RIGON, *et al.*, 2010). Assim,

o objeto da atividade pedagógica é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação de conhecimentos e saberes; por meio dessa atividade – teórica e prática –, é que se materializa a necessidade humana de se apropriar-se dos bens culturais como forma de constituição humana (RIGON, ASBAHR e MORETTI, 2011, p. 24).

A atividade pedagógica, hoje, mais do que nunca, precisa garantir a apropriação do conhecimento pelo aluno de forma consistente, bem como fomentar a formação de sua postura crítica, possibilitando que o educando se assuma também com sujeito do processo de produção do conhecimento (ASBAHR, 2005).

Vale ressaltar que nessa teoria, a apropriação é entendida como um fenômeno ativo, o que implica que o sujeito que aprende está em atividade, assumindo como seu objeto o conteúdo ou o fenômeno a ser aprendido. O “estudante não é mero consumidor da aula nem objeto de trabalho do professor, mas é principalmente sujeito da atividade de aprendizagem” (RIGON, ASBAHR e MORETTI, 2010, p. 31).

Temos, portanto, dois tipos de atividades: a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem, que inclui a atividade de estudo realizado pelo professor para melhor promover o ensino. Nesse contexto, professores e alunos são sujeitos do processo de ensinar e aprender. “Tomar o ensino como uma atividade implica definir o que se busca concretizar com a mesma, isto é, a atividade educativa tem por finalidade aproximar os sujeitos de um determinado conhecimento” (MOURA, 2005, p.157).

A organização de situações didáticas que promovam no estudante um “querer aprender”, se constitui uma importante função, uma vez que o motivo de aprender não está baseado em necessidades biológicas, mas em necessidades socioculturais, portanto, foi e é construído historicamente. Embora muitos elementos interfiram na construção do motivo de aprender, até limitando a atuação docente, este ainda é um dos grandes objetivos da atividade de ensino (RIGON, ASBAHR E MORETTI, 2010). “A atividade de ensino do professor deve gerar e promover a atividade do estudante. Ela deve criar nele um motivo especial para sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade” (MOURA *et al.*, 2010, p. 90).

Na teoria da atividade, a necessidade se materializa no objeto, tornando-o motivo da atividade, o mesmo se dando na atividade de aprendizagem. Para que as atividades de ensino e de estudo sejam efetivadas é fundamental que haja coincidência entre os motivos de ambas as atividades.

O sentido na atividade de ensino se efetiva na atividade de aprendizagem que, para ocorrer de maneira consciente, precisa ser organizada por meio das ações e operações planejadas pelo professor. Para tanto, as leituras e estudos, participação em reuniões e em discussões em grupos, os registros individuais e coletivos, elaboração de planos de aula, escolha de instrumentos metodológicos, são tarefas imprescindíveis ao profissional que assume a tarefa de ensinar. Mais especificamente, as ações do professor são descritas por Moura *et al.* (2010, p. 102):

eleger e estudar conceitos a serem apropriados pelos estudantes; organizá-los e recriá-los para que possam ser apropriados; organizar o grupo de estudantes de modo que as ações individuais sejam providas de significado social e de sentido pessoa na divisão do trabalho coletivo e refletir sobre a

eficiência das ações, se realmente conduziu aos resultados inicialmente idealizados.

Desta maneira, é exigido que o professor se envolva “com a sua atividade de aprendizagem, atividade que auxilia a tomar consciência de seu próprio trabalho e a lidar melhor com as contradições e inconsistências do sistema educacional” (MOURA, *et al.*, 2010, p. 91).

O acréscimo de Leontiev em relação a Vigotski é que a mediação necessária para desenvolvimento dos processos mentais superiores é promovida pela/na atividade organizada para tal. Mesmo Vigotski não reduzindo o papel da mediação aos sistemas semióticos, pois os considerava como mais um tipo de instrumento, sua investigação priorizou o aspecto da linguagem no desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

Conforme Núñez (2009), a proposição teórica de Leontiev complementa as teses de Vigotski, porém os dois autores ainda “não revelaram os processos que possam explicar a internalização da atividade externa, em atividade interna” (p. 92). Para Núñez, quem alcançou o intento de responder sobre o mecanismo de interiorização das ações externas foi o psicólogo Galperin, membro do grupo de pesquisas de Vigotski e Leontiev, propondo a Teoria de Assimilação por Etapas das Ações Mentais. No entanto, embora consideremos a importância desta teoria, tomaremos nesse trabalho de tese apenas a referência de alguns princípios teórico-metodológicos de Vigotski e Leontiev.

Das contribuições de Leontiev, nos é muito cara a compreensão da atividade como desencadeadora de desenvolvimento, principalmente porque nela, a consciência e a linguagem lhe são inerentes. Pensando no ensino e na aprendizagem de multiplicação como atividades, essa teoria exige que pensemos em quais ações são planejadas e promovidas para que ocorra a apropriação dos conceitos e procedimentos que a envolvem. Qual o significado destas ações? Que operações envolvem? Qual o sentido que as professoras e crianças lhes atribuem?

De Vigotski, assumimos a base teórica de que o desenvolvimento cognitivo tem sua base nos aspectos social e cultural e não meramente individual. Além disso, mesmo considerando que os sistemas semióticos se inserem num contexto de atividade, a proposição de Vigotski que tais sistemas são instrumentos de mediação pedagógica é muito importante porque aprofundaremos o papel que as representações semióticas têm no processo de ensino e de aprendizagem da multiplicação. A relação entre desenvolvimento e aprendizagem, o processo de formação de conceitos e a compreensão da relação entre conceitos espontâneos e científicos ajudarão a analisar o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação.

3.3 A Mediação Pedagógica e o Ensino de Matemática

O termo “mediação pedagógica” vem sendo usado no âmbito educacional de maneira diversa, sendo na maioria das vezes atribuída à perspectiva vigotskiana. A partir dos anos 1990, textos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, trazem para o professor, dentre outras funções, a de ser mediador, “ao promover a confrontação das propostas dos alunos, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar (...), é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas” (BRASIL, 1997, p. 40), ou seja, organizando os momentos de interlocução na sala de aula, referindo-se principalmente à resolução de problemas. Vê-se, nessa concepção, que o professor será mediador quando exercer determinadas tarefas de ensino, possibilitando o debate e a troca de saberes entre os estudantes, sendo o responsável pela escolha de procedimentos metodológicos para esse fim. A ideia de mediação pedagógica ampliaria, portanto, a ação docente.

A mediação para Vigotski se constitui em um elemento fundante de sua análise sobre o desenvolvimento humano por meio da cultura, portanto, carrega um significado bastante amplo. O termo mediação foi utilizado na tradição marxista significando o papel exercido pelos instrumentos utilizados pelo homem no domínio e na transformação da natureza. Por não aceitar que a estrutura estímulo-resposta defendida pela reflexologia, à sua época, explicasse o processo de desenvolvimento das formas superiores de pensamento, Vigotski estendeu o conceito de mediação do uso de instrumentos, na relação homem-natureza, para o uso de signos, na relação sociocultural das pessoas.

Nessa direção, teríamos dois tipos de instrumentos: os técnicos e os psicológicos. Os primeiros influem sobre o próprio objeto, constituindo-se como elementos intermediários entre a atividade humana e o objeto externo/natureza, determinando mudanças no próprio objeto; os instrumentos psicológicos estão dirigidos aos próprios processos psíquicos, da psique e do comportamento. O autor assim define: “Os instrumentos psicológicos são criações artificiais – estruturalmente são dispositivos sociais e não orgânicos ou individuais. Estão dirigidos ao domínio dos processos próprios ou alheios, o mesmo que a técnica está ao domínio da natureza” (VIGOTSKI, 1991, p. 65).

São exemplos de instrumentos psicológicos as formas de linguagem oral e escrita, gestual, os sistemas numéricos, os dispositivos de memória, o simbolismo algébrico, as obras de arte, os diagramas, os mapas, os desenhos, enfim, todo gênero de signos convencionais ou

não, enquanto criações humanas artificiais. Vigotski (1991) conclui: “O emprego do instrumento psicológico eleva e amplia infinitamente as possibilidades de comportamento, pois põem ao alcance de todo mundo os resultados do trabalho de gênios e estudiosos” (p. 68 e 69). Nesse ponto, ele relaciona o papel do instrumento psicológico ao desenvolvimento provocado pela apropriação de conhecimentos ocorridos principalmente em contextos educativos.

Sobre o papel dos sistemas semióticos no desenvolvimento, Daniels (2002) faz uma ressalva, que “não são as ferramentas ou os signos, em e por si mesmos, que são importantes para o desenvolvimento do pensamento, mas o significado codificado neles” (DANIELS, 2002, p. 9). Wertsch complementa:

Por um lado, as ferramentas culturais não podem desempenhar nenhum papel na ação humana se não forem apropriadas por indivíduos concretos agindo em contextos específicos. Por outro lado, não podemos agir como humanos sem invocar ferramentas culturais (WERTSCH, 1993, apud DANIELS, 2002, p. 25).

Essa interpretação se constitui pertinente para os processos de ensino, uma vez que a apropriação das ferramentas culturais por estudantes precisa ocorrer de maneira orientada, organizada e sistematizada.

Andrada (2011) afirma que

embora Vigotski não destaque em sua teoria os meios que viabilizam a configuração de atividades mediadas pelos signos, pela palavra, permite-nos localizá-los na via da comunicação, do diálogo, o que só se viabiliza porque no pensamento, o homem reflete a realidade de modo generalizado (2011, p. 98).

Quando Vigotski define os instrumentos psicológicos como mediadores dos processos interativos entre as pessoas, explicitando a linguagem e os sistemas semióticos como parte desse conjunto de instrumentos, ele assinala o papel essencial dos discursos, signos, tarefas e instrumentos utilizados nos processos educativos em uma perspectiva ampla, mas, mais ainda, nos processos ocorridos em espaços escolares, local onde se objetiva favorecer o desenvolvimento intelectual.

Nesse sentido, um dos grandes desafios que essa teoria coloca é a necessidade de formação docente na perspectiva de que seu trabalho provoque o desenvolvimento das funções psicológicas superiores nos alunos. Daí, a forte crítica levantada por intérpretes da teoria histórico-cultural aos processos formativos que vem se baseando nas proposições do

professor reflexivo e competente¹⁰ os quais vêm valorizando sobremaneira a aprendizagem, a partir dos interesses e aptidões dos alunos, provocando esvaziamento da função dos professores no ato de ensinar.

Complementando as ideias da teoria histórico-cultural sobre mediação que não se referem especificamente à mediação pedagógica, nos aproximamos de Oliveira, Almeida e Arnoni (2007) que compreendem da mediação tomando por base os pressupostos da lógica dialética marxista. Para eles, geralmente esse conceito tem sido tomado como o “termo médio de uma relação entre elementos equidistantes ou à ligação entre dois termos distintos, ou ainda a passagem de um termo a outro” (OLIVEIRA, ALMEIDA e ARNONI, 2007, p. 101). Esse sentido se coaduna com o significado de ‘ponte’, proporcionando a ideia de professor como mediador da relação entre o ensino e aprendizagem.

Nessa perspectiva, “se atribui à mediação o dever ou a responsabilidade de eliminar ou minimizar a diferença entre os termos ensino e aprendizagem, conhecimento sistemático e experiência cotidiana e entre o professor e alunos” (OLIVEIRA, ALMEIDA e ARNONI, 2007, p. 101). Teríamos associadas a esse conceito, as noções de equilíbrio, unificação, igualdade, resultado de uma relação.

Contrariamente a esse entendimento, os autores argumentam em favor da dimensão ontológica da relação entre ensino e aprendizagem e não, puramente epistemológica. A dimensão ontológica estaria fundamentada no Ser e não no conhecimento, tendo a mediação como fundamento do trabalho educativo. A perspectiva epistemológica, por outro lado, teria por base o sujeito cognoscente e o objeto a ser conhecido, importando o conhecimento do objeto pelo sujeito, o que conduz a uma valorização da aprendizagem em detrimento do papel docente no processo de ensino.

Baseados na lógica dialética, os autores defendem que “a mediação é, portanto, uma força negativa que une o imediato ao mediato e, por isso, também os separa e os distingue” (OLIVEIRA, ALMEIDA e ARNONI, 2007, p.102). Explicando a afirmação, eles ressaltam:

a *mediação* permite que pela negação, o imediato seja superado no mediato sem que o primeiro seja anulado ou suprimido pelo segundo, ao contrário, o imediato está presente no mediato e este está presente naquele, então ela é responsável pela reflexão recíproca de um termo no outro. O mediato não supera o imediato, quem o faz é a *mediação*. Assim, a força inerente à superação não se manifesta nos polos da relação, o imediato e o mediato, ela é uma propriedade da *mediação* (OLIVEIRA, ALMEIDA e ARNONI, 2007, p. 103).

¹⁰ Para uma compreensão detalhada da crítica, ver FACCI, 2004.

Nessa perspectiva, a mediação pedagógica se caracterizaria como uma relação, uma interação permeada também por tensões entre os conhecimentos mais sistematizados, do professor (o mediato) e os conhecimentos não sistematizados dos alunos (o imediato). Por outro lado, também consideramos que essa mediação pedagógica deve ser pensada, organizada e avaliada pelo profissional responsável pelo ensino – o professor.

É com base nesse conceito de mediação pedagógica que assumimos as representações semióticas de multiplicação como instrumento específico dessa mediação no ensino de Matemática nos anos iniciais, entendendo que os professores utilizam representações semióticas de professores pra ensinar o conteúdo, e os alunos, no processo de aprendizagem, vão representando a multiplicação por meio de registros diferentes que precisam ser valorizados, explicitados, tensionados e ampliados.

Assim, as representações semióticas utilizadas para representar e comunicar o conceito de multiplicação por professores e alunos serão nosso objeto mais específico de análise dessa mediação pedagógica. No Capítulo seguinte, traremos a teoria de Raymond Duval acerca da contribuição das representações semióticas no processo de compreensão matemática, relacionando-a com alguns pressupostos da teoria histórico-cultural.

4. AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO

Neste Capítulo discutimos sobre a relação entre a linguagem e a Matemática; os entrelaçamentos possíveis entre a tese de Vigotski sobre o papel de mediação dos sistemas semiótico; e a teoria de Duval acerca das representações semióticas no pensamento matemático, demonstrando suas contribuições para pensarmos a mediação pedagógica no ensino de multiplicação nos anos iniciais.

4.1 A Linguagem e a Matemática

A linguagem exerce um papel fundamental no ensino sistematizado, uma vez que os processos de comunicação nele presentes implicam a explicação de conceitos, princípios e procedimentos pelo professor, cuja intenção é a aprendizagem de conteúdos matemáticos pelos alunos. Nesse processo, os estudantes também explicitam suas ideias e estratégias por meio da comunicação oral ou escrita. No ensino de Matemática, a comunicação na sala de aula se dá pela interação entre a língua materna e uma linguagem Matemática específica, característica dessa ciência que, para ser apreendida, exige processos cognitivos de assimilação e compreensão diferentes daqueles usados na aquisição da língua materna.

Devlin (2004) defende a tese que a Matemática e a linguagem são inseparáveis e que o surgimento das duas áreas na cultura humana foi possível pela mesma capacidade que se evoluiu nos homens, ou seja, a predisposição genética, hoje conquistada para a linguagem, corresponderia às mesmas exigências para se aprender e lidar com a Matemática. Na sua argumentação, o autor considera que as capacidades de formulação e a imaginação que envolvem a antecipação e o planejamento, são as que deram sustentação para o surgimento da capacidade para a linguagem e para a Matemática. O autor vai mais além ao afirmar que a “Matemática é apenas uma forma especializada de usar nossa capacidade para a linguagem” (DEVLIN, 2004, p. 17), e que as “características do cérebro que permitem lidar com a Matemática são aquelas mesmas que nos permitem usar a linguagem – falar com os outros e entender o que eles dizem” (p. 20).

Ratificando essa relação entre a linguagem materna e a compreensão Matemática, Devlin (2004) cita estudos que têm mostrado que crianças chinesas e japonesas têm maior facilidade na aprendizagem da contagem e dos sistemas numéricos que crianças com idioma inglês, devido à facilidade de regras gramaticais na construção dos numerais naqueles

idiomas. Naqueles sistemas, os aspectos aditivo e multiplicativo do sistema numérico já se encontram na própria enunciação do número. Por exemplo, no sistema de numeração japonesa temos: 1 = ichi; 2 = ni; 3= san; 4= yon (...) 10 = juu; então, ao dizer 24, tem-se ni juu yon, ('dois dez quatro'), o que corresponde a 2 vezes 10 mais 4; para 12, tem-se juu ni ('dez e dois'); para 22, ni juu ni ('dois dez dois'); 40, yon juu ('quatro dez'); 43, yon juu san ('quatro dez três').

Provavelmente, pelo fato dos seus objetos não poderem ser acessados diretamente, a Matemática demanda uma linguagem própria, na qual a precisão, a concisão e a universalidade são marcas registradas e o que tem acarretado dificuldades para os estudantes que, no seu cotidiano, têm por referência o discurso em língua materna (D'AMORE, 2006). Precisão e concisão reúnem-se no fato da Matemática possuir um código semiológico próprio, capaz de carregar uma densidade de informação em um sistema bastante sintético e potente, no qual podem ser geradas definições e proposições desprovidas de sentido para o estudante.

A universalidade se caracteriza pela possibilidade de comunicar ideias e proposições a todos que dominem essa língua formal, independentemente da língua materna que possuam, gerando certa atemporalização e arbitrariedade, o que contrasta radicalmente com a maneira narrativa do texto do aluno que é temporal, sequencial e contextual (D'AMORE, 2007b). Além disso, podemos ainda encontrar na linguagem Matemática, registros diversos para um mesmo objeto. Por exemplo: $/// /// ///$, $9, 5+4; 6+3, 3 \times 3, 81/9, 3^2$, entre outros.

Conforme D'Amore (2004), todo conceito matemático remete a não-objetos, correspondentes a conceitos, ideias e abstrações, que não estão necessariamente ligados à realidade concreta, não sendo possíveis, por isso, reenvios ostensivos. Explicando melhor, o autor assinala que todo conceito matemático se serve de representações, porque a Matemática não dispõe de 'objetos' para exibir em seu lugar. Dessa maneira, a conceitualização deve se tornar presente através dos registros representativos, que são bastante variados. (Idem).

O pesquisador explica que o processo de ensino de Matemática é permeado por um paradoxo causado por sua linguagem específica: se o ensino exige comunicação, devendo ser entendido por todos, para favorecer a aprendizagem seria primordial a utilização clara e compreensível dessa linguagem. No entanto, a Matemática se constitui enquanto linguagem específica, possuidora de regras diferentes que precisam ser compreendidas e apropriadas pelos estudantes.

Para D'Amore (2006), na busca de resolução desse paradoxo, pensando em facilitar a compreensão da Matemática, se traduz essa linguagem específica para a língua materna e, nesse processo, acrescenta-se outra língua no contexto escolar, o 'matematiquês'. Essa nova

‘língua’, existente somente na escola, é constituída de um aparato linguístico de frases feitas e de adaptações que, ao invés de contribuir para a compreensão da linguagem Matemática, em muitos casos, gera perda de sentido para os estudantes. A partir desse contexto se justifica a necessidade de uma didática específica voltada ao ensino e à aprendizagem dessa ciência.

Dois aspectos são exigidos no decorrer da aprendizagem Matemática: a compreensão do objeto matemático enquanto formulação e conceito e a compreensão do objeto linguístico que o expressa (D’AMORE, 2006; PANIZZA, 2006). O ato em si de representação e a compreensão desse objeto linguístico são componentes estudados e pesquisados pela semiótica, ciência responsável pelo estudo dos signos, sejam eles referentes a toda e qualquer linguagem.

A língua materna é uma forma principal de linguagem humana, mas não é única, uma vez que somos seres simbólicos com linguagens complexas e plurais como imagens, gráficos, sinais, sons, objetos, gestos, expressões, cheiros, entre muitos outros (SANTAELLA, 1988). Conforme Santaella (1988, p. 15), a semiótica “é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido”.

Para D’Amore (2006), o signo é a representação adequada do significado. Porém, os signos são artefatos, objetos por sua vez linguísticos (em sentido amplo), termos que têm o objetivo de representar para indicar, proporcionando assim sua objetivação (D’AMORE, 2006).

Em sua análise sobre os modelos teóricos que fundamentam a semiótica, Duval (2011) faz uma breve síntese das contribuições de Peirce, Saussure e Frege, chegando a afirmar que os modelos por eles propostos são inadequados para a análise do funcionamento e desenvolvimento da atividade Matemática. Ele então propõe uma reformulação nas questões essenciais de cada autor, estabelecendo uma relação com o ensino da Matemática. Para a questão de Saussure ele formula: “Quais os processos de discriminação permitem reconhecer as unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma expressão semiótica?” (p. 36); Para a questão de pesquisa de Peirce, ele inquirir: “Em função de quais critérios podemos classificar dados os tipos de representações utilizáveis em Matemática e no ensino de Matemática?” (p.36); e para a questão de Frege ele assim o faz: “Quais os mecanismos de substituição ou de transformação próprios a cada tipo de representação utilizada em Matemática?” (p. 36).

Duval (2011) insiste na caracterização dos conceitos que envolvem os termos representação e signo. Segundo o autor, o que os faz semelhantes é a função “de ‘se colocar no lugar de’ o que eles representam ou designam e surgem da mesma exigência epistemológica fundamental que é jamais se confundirem com os próprios objetos” (p. 37). Por outro lado, o que os distingue é a natureza da relação com os próprios objetos. “A relação entre os signos e os objetos não contém nenhuma interação, mas é apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado, a língua, um sistema de numeração, etc.” (p. 37).

Devido às capacidades cognitivas de tratamento, possibilitados pela revolução semiótica em Matemática, principalmente com a Álgebra e a Análise, envolvendo tudo que pode ser compreendido como ‘linguagem Matemática’, Duval (2011) considera melhor utilizar o termo representação ao invés de signo.

Para ele, as representações semióticas possuem uma característica fundamental, diferentemente dos signos: “*elas têm uma organização interna que varia de um tipo de representação semiótica para outra*. A organização de uma frase simples não é mesmo a de uma equação” (DUVAL, 2011, p. 37 e 38 grifos de autor). Para ele, é como se os signos correspondessem mais às unidades elementares de sentido como letras, siglas, algarismos, e as representações semióticas abrangessem aspectos mais complexos como frases em linguagem natural, as equações, as figuras geométricas, os esquemas, os gráficos, entre outros. Nessa direção, o conceito de representação semiótica é mais abrangente que o conceito que reduz “o papel dos signos no funcionamento cognitivo a uma simples codificação de informações ou conceitos” (Idem, p. 16).

Conforme Duval (2011), as dificuldades dos alunos em aprender Matemática possuem razões muito mais abrangentes – epistemológicas, cognitivas e didáticas, nos conduzindo a questionar sobre o que é o conhecimento matemático e o que o caracteriza, bem como a forma como eles são apresentados e podemos ter acesso a eles.

Os objetos matemáticos são inacessíveis à percepção e à observação direta, mesmo com a ajuda de instrumentos, diferentemente dos objetos de investigação de outras ciências, como a Biologia, a Química e a Física, e, para a sua apropriação torna-se basilar o uso de representantes semióticos que possam traduzir de forma mais acessível seus significantes e processos.

Devido a essa peculiaridade, Duval (2003, 2009), alerta sobre o paradoxo cognitivo gerado no processo de ensino de Matemática, o qual está assim resumido: se só é possível acessar os objetos matemáticos por meio de representações semióticas, como então não

confundir tais representações com os próprios objetos? Uma das respostas encontradas é que a variedade de representações semióticas favoreceria pistas para a solução do paradoxo, ou seja, a separação entre objeto e representante. A justificativa é que se cada representação remete à parte de cada objeto, quanto mais variados os registros de representação utilizados, mais próximo se estaria da compreensão do objeto.

A partir de então, Duval (2003) questiona quais mecanismos possibilitariam, de fato, o acesso aos objetos matemáticos e se esses serviriam para o ensino de todas as áreas de conhecimento. Investigando especificamente a Matemática, ele sinaliza algumas pistas:

[A] diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática daquela requerida por outras áreas não deve ser procurada nos conceitos, mas nas duas características: a importância primordial das representações semióticas e a variedade de representações utilizadas em Matemáticas (DUVAL, 2003, p.13 e 14).

Para Duval, os conceitos são elaborados por meio do uso de representações semióticas. Ele não nega a potencialidade das representações mentais que abrangem os conceitos, pelo contrário, a inclui em sua proposição, articulando as representações mentais às representações semióticas. Estes aspectos serão discutidos mais especificamente no item 4.3 quando relacionarmos os dois tipos de representação.

Diferentemente de Duval (2009), D'Amore (2006) amplia o conceito de objeto matemático, incluindo inclusive as representações e toda a linguagem Matemática. Para ele, o objeto matemático é “tudo que é indicado, assinalado, nomeado quando se constrói, se comunica ou se aprende Matemáticas¹¹” (D'AMORE, 2006, p.179), sendo algo ao qual nos referimos, seja real ou imaginário. Os objetos matemáticos devem ser considerados como símbolos de unidades culturais, emergentes de um sistema de usos ligados a resolução de situações que certos grupos de pessoas realizam (D'AMORE, 2006).

Com base em sua definição, ter-se-ia uma relação bem extensa de objetos matemáticos, como a própria linguagem matemática em seus diversos registros (termos, expressões, notações, gráficos); as situações–problemas; as aplicações extra-matemáticas; os exercícios; as ações que envolvem operações – algoritmos, técnicas de cálculos, procedimentos; os conceitos mediante definições ou descrições; as propriedades ou atributos dos objetos (enunciados sobre conceitos); os argumentos que se usam para validar ou explicar

¹¹A utilização do termo “matemáticas” se dá por existirem diferentes manifestações matemáticas, conforme contextos históricos e socioculturais diversos. Em nosso texto usaremos o termo “Matemática”, considerando esse significado mais amplo.

enunciados (seja por dedução ou outro tipo). Esses objetos se organizam em entidades mais complexas como sistemas conceituais e teorias (D'AMORE, 2006).

Vê-se que o estudo e a investigação sobre a produção de representações de objetos matemáticos são fundamentais para o estudo da apropriação do saber matemático. Parafraseando Vigotski, Moreno Armella afirma que “toda ação cognitiva é uma ação mediada por instrumentos materiais ou simbólicos” (citado por D'AMORE, 2005, p. 55). A escola tem por responsabilidade promover o desenvolvimento cognitivo, favorecendo, pelo ensino, a formação e o desenvolvimento de conceitos, procedimentos e atitudes dos estudantes. No entanto, ensinar e desenvolver conceitos, procedimentos e atitudes, são tarefas que, mesmo complementares, estão carregadas de complexidade quanto aos aspectos epistemológicos, metodológicos e socioculturais.

Nesse trabalho, a compreensão, a problematização e a utilização de representações semióticas no ensino de multiplicação será o nosso foco, pois concordamos com o pressuposto que isto constitui ferramenta indispensável no processo de ampliação de conhecimento dos estudantes.

4.2 O Significado e o Sentido na Matemática e em seu Ensino

Duas grandes perspectivas orientam a compreensão do significado em Matemática, influenciando, portanto, a maneira de ensiná-la: as teorias realistas e as teorias pragmáticas. De acordo com D'Amore (2005), nas teorias realistas o significado se constitui numa relação convencional e direta entre os signos e objetos (concretos ou ideais), pressupondo um realismo conceitual. Em relação à Matemática, essa concepção conduz a uma visão platônica dos objetos matemáticos como se as noções, os conceitos, as estruturas possuíssem uma existência real que não dependesse do ser humano, uma vez que pertencem a um domínio ideal (D'AMORE, 2005). Assim, “conhecer, de um ponto de vista matemático, significa descobrir entidades e suas relações em um tal domínio” (Idem, p. 26).

Em outra direção, nas teorias pragmáticas, as expressões linguísticas assumem significados diferentes dependendo do contexto no qual estão inseridas, sendo circunstanciadas, não podendo ser generalizadas. Nessa perspectiva, os objetos matemáticos são “símbolos de unidades culturais que emergem de um sistema de utilizações que caracterizariam as pragmáticas humanas (...) e que se modificam continuamente no tempo, inclusive segundo as necessidades” (D'AMORE, 2005, p. 27). O processo de conhecer estaria entrelaçado ao uso de conhecimentos em contextos adequados, não sendo, portanto, algo

absoluto. As discussões atuais no campo da Didática da Matemática estariam mais próximas dessa segunda perspectiva.

Outro aspecto que influencia o significado do objeto matemático é a relação entre a compreensão a partir do espaço institucional/escolar e da esfera pessoal, enquanto sujeito. Conforme D'Amore (2005), é no processo de ensino e aprendizagem que cada sujeito entra em contato com o 'objeto da Matemática', porém, "a relação entre a pessoa e o objeto é condicionada pelo processo de institucionalização do conhecimento" (p. 31) que ocorre, principalmente em espaços escolares, cuja função é a ampliação dos conhecimentos espontâneos e pessoais.

A discussão a partir da esfera institucional e pessoal abre a possibilidade de discutirmos o conceito de sentido, que vem a ser um conceito diferente de significado. Conforme as contribuições de Leontiev (1978), a significação de um objeto ou fenômeno está relacionada a um sistema de ligações, de interações e de relações objetivas, sendo "refletida e fixada na linguagem, o que lhe confere a sua estabilidade" (LEONTIEV, 1978, p. 94). A significação pertence ao mundo dos fenômenos objetivamente históricos (representações de uma sociedade, sua ciência, língua – sistemas de significações), no entanto, o homem não está isolado, ele elabora significados a partir de experiências das gerações anteriores. "A significação é, portanto, a forma sob a qual um homem assimila a experiência humana generalizada e refletida" (LEONTIEV, 1978, p. 94), enquanto reflexo generalizado da realidade elaborado pela humanidade, envolve conceitos, saberes e conhecimentos acumulados.

Noutra direção, o sentido é caracterizado como algo subjetivo e pessoal, uma relação que se cria na vida, na atividade do sujeito. O sentido consciente traduz a relação do motivo ao fim, mas motivo não corresponde à necessidade e sim, àquilo em que a necessidade se concretiza, nas condições consideradas e para as quais a atividade se orienta e se estimula.

O significado de uma ação diz respeito ao conteúdo da ação, enquanto o sentido da mesma diz respeito às razões, aos motivos pelos quais o indivíduo age. Nessa direção, "(...) para encontrar o sentido pessoal devemos descobrir o motivo que lhe corresponde" (DUARTE, 2002, p. 97), pois não há sentidos puros. Sentido pessoal é diferente de significações sendo "o sentido que se exprime nas significações (como o motivo nos fins) e não a significação no sentido" (DUARTE, 2002, p.98).

Discutindo o ensino de Matemática, Panizza (2006) evidencia que a questão do sentido vem sendo uma das preocupações nos professores que ensinam esta disciplina. A palavra sentido vem sempre associada a outro termo, como sentido de um conhecimento,

sentido de um conceito, sentido de uma atividade, sentido de uma representação ou de um problema, evidenciando dimensões diferentes da aquisição de sentido na Matemática.

Referindo-se a Frege, Duval (2012a) ressalta a importância da distinção por ele colocada nos termos ‘referência e sentido’. Para o autor, essa distinção induziu separar com clareza a significação (sentido) que depende do registro de descrição escolhida, da referência que depende dos objetos expressos ou representados. Por exemplo, 2×3 , $18/3$, $4+2$ são

formas escritas que designam um mesmo número, quer dizer, são expressões que fazem referência a um mesmo objeto. Mas não possuem um mesmo significado, uma vez que não são reveladores do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista (...) (DUVAL, 2012a, p. 99).

As representações 2×3 , $18/3$, $4+2$ têm como referente o mesmo objeto, o número 6, no entanto, o sentido de cada uma é diferente, remetendo a diferentes propriedades.

Conforme Panizza (2006), a distinção entre referência e sentido nos permite analisar produções das crianças, uma vez que elas optam por diferentes estratégias de cálculo, facilitando o alcance de suas respostas. Quando uma criança é levada a calcular $3+42$, e, para alcançar rapidamente a solução, inverte $42+3$, é porque ela já compreende que embora mude o sentido, o referente é o mesmo. Nesse caso, ela se apropriou da propriedade comutativa da operação de adição.

Ainda segundo a autora, as crianças já são capazes de reconhecer diferentes representações de um mesmo objeto, embora não o façam de maneira convencional. Na tradição escolar, as representações não-convencionais utilizadas pelas crianças na resolução de problemas nem sempre são consideradas como forma de conhecer, sendo necessário que os professores dos anos iniciais reconheçam esses conhecimentos espontâneos nos alunos, buscando compreender seu papel no processo de aprendizagem de conceitos e das próprias representações convencionais.

Embora hoje já se tenha uma perspectiva de acolher as diferentes estratégias e representações não convencionais das crianças, é necessário que ultrapassemos a perspectiva atribuída a esses procedimentos como somente anteriores aos procedimentos formais e comecemos a aceitar e compreender a coexistência de ambos os tipos – representações não convencionais e formais.

No entanto, Panizza (2006) adverte que embora algumas propostas didáticas proponham que o ensino tome como ponto de partida os saberes que os alunos já sabem, os

seus conhecimentos espontâneos, essa não é uma tarefa fácil para o professor. A autora ainda ressalta que é necessário a esse profissional:

distinguir conceitualmente os objetos de conhecimento e suas representações; compreender as condições sob as quais uma representação funciona; reconhecer as diversas representações que os alunos utilizam como uma maneira de conhecer, constitutiva dos conhecimentos que constroem (PANIZZA, 2006, p. 24).

O que destacamos como difícil nesse processo é que não basta apenas considerar as representações como legítimas do processo de conhecer de cada aluno e que, portanto, tem sentido para ele. Nesse trabalho de pesquisa sobre a operação de multiplicação de números naturais, no item no qual discutimos sobre as representações das crianças dessa operação, buscamos identificar significados e conceitos presentes, níveis de registros, bem como potencialidades e limites de alguns registros. Sabemos que hoje o professor de anos iniciais não tem uma formação profissional que possibilite o olhar e a interpretação de tais representações, nessa perspectiva.

Para Panizza (2006), torna-se necessário rever dois aspectos no ensino de Matemática nos anos iniciais: a sequência quase sempre utilizada para as etapas – ação efetiva, representação gráfica e representação simbólica. Para ela, a “subordinação do simbólico à ação não dá lugar ao uso das representações simbólicas encerradas no mesmo processo de a resolução de problemas – que começa com a representação do problema em si mesmo (...)” (p. 25).

Com essa reflexão, não se propõe que o trabalho seja invertido e que de início sejam propostas tarefas com o simbólico, mas que se compreenda que dependendo da situação ou conteúdo, termos de início alguma representação como o desenho, esquema, ou outras. O segundo aspecto, refere-se especificamente, ao trabalho com a resolução de problemas. Tornou-se comum que na proposição de problemas, pedir que a criança realize o cálculo¹² e, em seguida, escreva a resposta. A autora denuncia que tal procedimento metodológico tem perdido a sua função inicial que foi a de favorecer que as crianças elaborassem suas estratégias para a solução do problema, ficando hoje muito mais a ideia de que é preciso fazer uma conta armada, um cálculo formal.

¹² Ela informa que na Argentina, usa-se o termo ‘planejamento’, para corresponder uma forma convencional de organizar os dados na resolução de problemas. Aqui no Brasil tem-se o ‘cálculo e a resposta’, escritos logo abaixo dos problemas.

4.3 De Vigotski a Duval: As Representações Semióticas na Mediação Pedagógica

Questões sobre a contribuição dos sistemas semióticos na formação dos processos mentais superiores ou sobre a relação entre o sistema semiótico de uma língua e o desenvolvimento do conhecimento científico são encontradas tanto nos estudos de Lev Semenovich Vigotski quanto nos de Raymond Duval (D'AMORE, 2007b).

Vigotski empreendeu esforços no sentido de comprovar que a linguagem, enquanto instrumento psicológico, medeia a relação entre os homens, a tal ponto que tem a função de 'potencializar' a formação de estruturas superiores de pensamento, o que legitima a contribuição de sua teoria, com pioneirismo, para os estudos que versam sobre a relação entre a linguagem e a cognição humana. A linguagem, para ele, envolveria os sistemas semióticos que nos rodeiam, como as formas de linguagem oral e escrita, gestual, os sistemas numéricos, os dispositivos de memória, o simbolismo algébrico, as obras de arte, os diagramas, os mapas, os desenhos, enfim, todo gênero de signos convencionais, enquanto criações humanas artificiais.

Se na tradição marxista o instrumento de trabalho assume a função de mediação na relação do homem com a natureza, Vigotski amplia o conceito de instrumento, incluindo a linguagem e os sistemas semióticos como outro tipo de instrumento – o instrumento psicológico – que assumiria a função de mediação entre as pessoas. Para ele, esse instrumento psicológico teria papel essencial no desenvolvimento dos processos superiores de pensamento.

Voltado para o ensino e a aprendizagem em Matemática, Duval defende a tese de que não existe compreensão cognitiva e até conceitualização sem a capacidade de representação por meio de signos, também conhecida como *semiósis*, e aprofunda a discussão no campo da Educação Matemática, sobre o papel das representações semióticas no desenvolvimento matemático no contexto escolar.

Nesse aspecto, vemos uma semelhança com a abordagem vigotskiana, ao tomar um aspecto da linguagem – as representações semióticas, como potencializadora do desenvolvimento conceitual em uma área específica de conhecimentos elaborados pela humanidade, a Matemática. Além disso, Duval defende que a compreensão de conceitos matemáticos se efetiva na possibilidade de sua representação, não sendo este somente um momento posterior à formação de conceitos.

Como todo sistema semiótico é artificial, criado pela cultura humana, ao defender sua tese Duval contraria a ideia de que a capacidade para aprender Matemática se encontra em

certo *apriorismo* ou inatismo que pessoas com algum tipo de predisposição teriam e outras, não. Pelo contrário, percebemos em suas discussões teóricas uma tendência a assumir a primazia do fator sociocultural no processo de desenvolvimento. Conforme a lei básica do desenvolvimento humano que Vigotski preconiza, segundo a qual os processos internos foram antes vivenciados externamente, é fundamental valorizar e/ou priorizar os sistemas semióticos criados artificialmente, uma vez que eles são instrumentos de mediação no processo de desenvolvimento humano. Assim, tanto Vigotski quanto Duval atribuem um papel indispensável dos sistemas semióticos no processo de desenvolvimento humano.

Vigotski afirma que a formação de um conceito culmina com o processo de internalização o qual é posterior a convivência com esse conceito nas relações sociais. Assim, a internalização ou a construção do conceito estaria num momento posterior à sua convivência no plano externo. Embora Vigotski não tenha respondido sistematicamente esse processo de internalização de conceitos, ele nos fornece algumas pistas.

Quando Vigotski discute a formação dos conceitos espontâneos e científicos ele sugere uma relação entre ambos, ou seja, a formação de um conceito científico não se dá automaticamente, mediante sua exposição, demonstração ou ilustração, mas a partir de interações entre as ideias já construídas (sejam espontâneas ou mediante interações escolares) e os novos conceitos. Só que isso não ocorre de forma automática. Se a generalização e a tomada de consciência são características que fazem parte do conceito científico, eles “não são trazidos de fora para o campo dos conceitos infantis, de forma automática, mas que estes já pressupõem a existência de conceitos infantis ricos e maduros”. Assim, as funções como memória, atenção, percepção, assimilação são importantes para o processo e já demonstram presença na criança antes mesmo da idade escolar. Portanto, para tomar consciência é preciso que haja o que deve ser conscientizado e apreendido, o que implica que essas funções já se encontram em processo de amadurecimento na mais tenra infância.

Ele chega a afirmar que a formação de conceitos exige do sujeito o desenvolvimento da capacidade de utilizá-lo conscientemente e de maneira arbitrária em situações que ultrapassam a referência imediata e sensível. Pensando no desenvolvimento da capacidade matemática, essa exigência de Vigotski relativa à utilização consciente e arbitrária do conceito, corresponderia à capacidade de lidar/compreender os objetos matemáticos, operando com os conceitos de maneira o mais generalizado possível, compreendendo e utilizando variados registros de representação, transitando-se de uma representação para outra, conseguindo coordená-las.

É com esse pressuposto de Vigotski, de que o desenvolvimento cognitivo é potencializado com os sistemas semióticos, que afirmamos a tese de que as representações semióticas de multiplicação constituem elementos de mediação pedagógica no ensino desse conteúdo.

4.4 Raymond Duval e a Contribuição das Representações Semióticas

A investigação de Duval sobre a *semiosis* e o pensamento humano, principalmente o pensamento matemático, tenta responder o paradoxo existente no processo de aprendizagem dessa área de conhecimento. Como os objetos matemáticos não são acessíveis de maneira direta, sendo necessária a utilização de representações externas, há uma possibilidade real de se confundir tais objetos pelas suas representações semióticas.

Embora esse autor compreenda que as representações e os sistemas de expressão não se constituem em objetos matemáticos, ele empreendeu esforços para afirmar sua importância, enfatizando sua necessidade no processo de compreensão e apreensão dos objetos matemáticos. Ele afirma que sem sua utilização não há compreensão de objetos matemáticos. “Em outras palavras, para Duval só é possível conhecer, compreender, aprender Matemática pela utilização das representações semióticas do objeto matemático” (COLOMBO, FLORES e MORETTI, 2008, p. 45).

Conforme Duval (2009), a aprendizagem das Matemáticas constitui campo para atividades cognitivas como conceitualização, raciocínio, resolução de problemas e até compreensão de textos. Essas atividades requerem sistemas de expressão e representação. Assim, ele pergunta: esses sistemas são apenas secundários ou essenciais? O funcionamento cognitivo seria independente da pluralidade de registros semióticos? O autor argumenta “que esses registros não são secundários, mas essenciais e que é a *semiosis* quem determina as condições de possibilidade e de exercício da *noesis*” (DUVAL, 2009, p. 17), que corresponderia à capacidade de compreensão e raciocínio.

Segundo Duval (2009; 2008; 2012), muitos autores compreendem e valorizam a existência de vários tipos de representação, porém, sua importância para a descrição e explicação de processos cognitivos não tem sido considerada. Estes defendem que os registros semióticos têm a função somente de comunicar e exteriorizar as representações mentais internas ao indivíduo. Duval, embora ratifique essa função, reclama outra função, a de possibilitar o desenvolvimento da atividade Matemática por meio de um trabalho específico com os registros de representação.

A teoria empreendida por Duval tem como base “o pensamento moderno: um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos” (FLORES, 2006, p. 77). Investigando sobre essa teoria, Flores (2006) corrobora que a preocupação de Duval é com a cognição, uma vez que para ele não haverá compreensão possível sem o recurso às representações semióticas, as quais possibilitam a apreensão dos objetos matemáticos.

Colombo, Buehring e Moretti (2009) destacam três vantagens da teoria de Duval: a economia de tratamento possibilitada pela linguagem matemática, a complementaridade de registros, uma vez que nenhum sistema de representação dá conta do conteúdo do objeto, sendo necessária sua representação em diferentes registros e a própria conceitualização, uma vez que ela depende da coordenação de diferentes registros de representação.

Assim, sua contribuição tem sido questionar o uso de apenas um tipo de representação no interior das aulas de Matemática, pois “permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático” (FLORES, 2006, p. 80), o que favorece ao equívoco de confundir a representação pelo objeto, não contribuindo com a apropriação efetiva do conhecimento matemático.

Analisando as contribuições desta teoria nas pesquisas brasileiras, Colombo, Flores e Moretti (2008) afirmam que ela chegou ao Brasil no início da década de 1990 e as primeiras pesquisas embasadas sobre essa temática começaram a ser publicadas na segunda metade da década de 1990. Além dos aspectos referentes à aprendizagem e ao ensino de Matemática, esta teoria também se preocupa com a “forma como o saber pode ser estruturado para ser ensinado e aprendido” (p. 42), proporcionando compreender possibilidades pedagógicas específicas para o trabalho do professor com essa disciplina.

Com base nos dados coletados das pesquisas realizadas no período de 1990 a 2005, os temas explorados até então “estão em torno das principais dificuldades apresentadas por alunos – sejam estes do Ensino Fundamental, Médio ou Superior – que, ao utilizarem a noção de registros de representação semiótica, buscam possíveis soluções para minimizar tais dificuldades” (COLOMBO, FLORES E MORETTI, 2008, p. 59).

4.4.1 Os diferentes tipos de representações

As representações, de uma maneira geral, foram classificadas por Duval (2009) com base em alguns critérios que ressaltam semelhanças e diferenças. Para ele, as representações podem ser conscientes ou não-conscientes e externas ou internas.

As representações conscientes e não-conscientes seriam as que aparecem ao sujeito, sendo percebidas por ele (conscientes) ou representações que lhe escapam completamente (não-conscientes). O que favorece a passagem de uma representação não-consciente para consciente é o processo de objetivação. “A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado” (DUVAL, 2009, p. 41).

Porém, além da objetivação, as representações conscientes apresentam caráter intencional, o que é essencial do ponto de vista cognitivo. Esse aspecto possibilita a compreensão do que é significativo em cada objeto, possibilitando a tomada de consciência. Leontiev (1978) se refere à objetivação como parte do processo de tomada de consciência, que necessita também da significação.

As representações externas e internas correspondem àquelas representações que são observáveis ou não. Todas as representações externas são produzidas por um indivíduo ou um sistema, se efetuando por meio de um sistema semiótico o que, por natureza, a transforma em representação semiótica. Já as representações internas são aquelas que pertencem “a um sujeito e que não são comunicadas a outro pela produção de uma representação externa” (DUVAL, 2009, p.42), como, por exemplo, as representações mentais. As representações externas apresentam as funções de comunicação, objetivação (para si e para o outro) e de tratamento, que serão realizadas dentro de um sistema semiótico, conforme será discutido mais adiante.

Duval (2009) ressalta que não há uma oposição entre essas duas classificações, uma vez que uma representação interna pode ser consciente ou não-consciente e uma representação consciente pode ser ou não exteriorizada. A partir do cruzamento destes aspectos teríamos organizados três tipos de representações: as representações mentais; as representações semióticas e as representações computacionais¹³.

As representações mentais são aquelas “que permitem olhar o objeto em ausência total de significante perceptível” (DUVAL, 2009, p. 45), sendo definidas, geralmente, por imagens mentais. No entanto, são mais amplas, envolvendo ideias, noções e conceitos, o que extrapola o nível perceptivo.

As representações semióticas são externas e conscientes e se apresentam como figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas ou linguísticas, dentre outras, podendo ser divididas ainda em analógicas ou não-analógicas. As primeiras guardam relações de

¹³ Estão presentes nas pesquisas na área da Inteligência Artificial e da Psicologia Cognitiva.

semelhança com o objeto, por exemplo, as imagens, e as segundas não conservam relação com o objeto a que se referem como, por exemplo, as línguas.

A relação entre essas representações se constitui complexa, pois não se observa uma correspondência direta entre as duas, encontrando-se diferenças bem significativas. A primeira é que pode existir certa independência entre as funções de objetivação e expressão, entre o que o sujeito mentalmente representa e o que ele externaliza. Isso se explica porque pode ocorrer uma objetivação e, no momento do sujeito representá-la semioticamente, não conseguir expressá-lo suficientemente, efetuando um registro mais simples do que pretendia. Por outro lado, pode-se encontrar uma expressão satisfatória de uma representação e esta não ser fruto de uma objetivação sua, como, por exemplo, em uma situação de reprodução por imitação, como no caso do teatro ou quando se declama uma poesia (DUVAL, 2004).

A segunda diferença é que as representações semióticas apresentam um grau de liberdade, podendo ser transformadas (tratadas e/ou convertidas) e as mentais, não. Enquanto as primeiras podem ser objetos de dois olhares, do representante e do representado, as segundas se limitam à perspectiva do representado. A última diferença é que as representações semióticas possibilitam, para o mesmo objeto, mais de uma representação, o que é decisivo para a função de tratamento e a perspectiva da conceitualização. Portanto, “as representações mentais não se prestam a tratamentos a não ser por meio da mobilização de um registro semiótico e da prática mental desse registro” (DUVAL, 2009, p. 46).

Sobre as representações mentais, vê-se uma referência à Vigotski, uma vez que, para esse autor, “o desenvolvimento das representações mentais está ligado à aquisição e interiorização de representações semióticas começando pelo desenvolvimento da linguagem ordinária” (DUVAL, 2009, p. 37), o que corrobora a sua tese da primazia do externo sobre o interno, ou melhor, do social e cultural sobre o individual.

Duval (2004; 2009) esclarece que embora a existência de vários tipos de representações seja aceita, sua importância para a descrição e explicação de processos cognitivos, ainda não vem sendo considerada, chegando-se a minimizar e reduzir as diferenças entre elas, desconhecendo-se, principalmente, as potencialidades das representações semióticas.

As representações mentais serão consideradas neste trabalho a partir da reflexão sobre os significados que envolvem o conteúdo de multiplicação, porém o nosso foco será o reconhecimento, a valorização e o trabalho sistemático com as representações semióticas. Foi nessa direção que caminhamos – o da valorização da potencialidade das representações semióticas no ensino e aprendizagem da Matemática nos anos iniciais de escolarização.

4.4.2 As Representações Semióticas – funções e atividades cognitivas

As representações semióticas podem ser divididas em representações discursivas, que são expressas em língua natural ou em uma língua formal, ou representações não-discursivas, que são explicitadas por meio de figuras, diagramas, esquemas ou gráficos.

Argumentando sobre a relação de dependência entre as representações semióticas no funcionamento cognitivo, Duval (2009) afirma que não se trata apenas do problema mais geral entre a linguagem e o pensamento, mas, sobretudo, de um problema de orientação e opção didática para o ensino de Matemática.

Flores (2006, p.17) corrobora entendendo que o “importante é que estas representações semióticas não são, segundo Duval, somente para fins de comunicação, mas essenciais para as atividades cognitivas do pensamento”. Portanto, é necessário aprofundar as diferentes funções que estas representações assumem para além da expressão ou comunicação, evidenciando o tratamento e a objetivação.

A função de comunicação está presente em todas as formas de linguagem, mas são as línguas naturais “os sistemas semióticos mais apropriados para cumprir esta função entre os indivíduos em um grupo ou em uma sociedade” (DUVAL, 2004, p. 87). Seja por meio da conversação promovida nas relações de interações, sejam na exposição de ideias por meio de conferência, diálogos, ou outros, estamos lidando com discursos produzidos por uns para serem comunicados a outros, uma vez que esse recurso “é o modo fundamental de interação social entre indivíduos” (Idem). Na Matemática essa função é utilizada também com meio para informar um raciocínio, uma ideia e/ou um procedimento.

A função de tratamento é necessária para a atividade que envolve a apreensão do conhecimento, pois se efetiva com a extração de informações recebidas de dentro de outras informações. Ela vai além da comunicação, uma vez que possibilita a transformação de um discurso, tornando evidente e explícito o que antes não fora percebido. “É no registro de uma língua natural ou formal que o raciocínio se desenvolve e encontra toda a sua potência” (DUVAL, 2004, p. 88). Temos como exemplo a escrita dos números tendo por base o sistema de numeração decimal, que possibilita escrever infinitos números e com eles realizar cálculos e tratamentos.

A função de objetivação está associada ao processo de significação que o objeto tem para o sujeito, uma vez que

é a possibilidade para o sujeito tomar consciência do que até o momento não era consciente e que ainda não teria podido ter uma consciência clara (...). Esta tomada de consciência é realizada como projeção e não como uma simples explicitação, chegando a se constituir preponderante no funcionamento cognitivo. (DUVAL, 2004, p. 88).

Isso se explica porque as capacidades de conceitualização, de compreensão e de conversão são formas de objetivação ou estreitamente ligadas a ela, o que é possibilitado pela relação entre a diversidade de registros e o funcionamento cognitivo do pensamento.

Além das funções exercidas pelas representações semióticas, Duval assinala três atividades cognitivas que lhes são inerentes: a formação, o tratamento e a conversão. A formação de representações implica a expressão ou evocação de uma representação mental ou um objeto ausente por meio da seleção, dentre os caracteres escolhidos, do que ‘queremos’ representar. O tratamento e a conversão correspondem a um processo de transformação de uma representação semiótica em outra sendo que, na primeira, a transformação ocorre no mesmo tipo de registro e, na segunda, a transformação da representação se dá para outro registro.

Estas atividades podem ser reagrupadas em tarefas de produção e tarefas de compreensão que podem abarcar mais de uma dessas atividades. Por exemplo, a elaboração de um texto pode ser uma tarefa de produção que envolva formação e tratamento de representação. No caso de leitura e interpretação de texto, que se constitui como uma atividade de compreensão, podem ser mobilizados os três tipos de atividades: conversão, tratamento e até formação (DUVAL, 2009).

Quanto à atividade de formação de representação, é necessário que as representações respeitem regras próprias do sistema empregado, apresentando conformidade com o sistema semiótico no qual está inserido. A formação de uma representação semiótica se dá a partir do uso desse sistema por outros, como a língua materna, a língua formal (Matemática) e imagens. Portanto, ela se refere à determinação de unidades elementares e suas combinações possíveis a partir de regras internas desses sistemas semióticos.

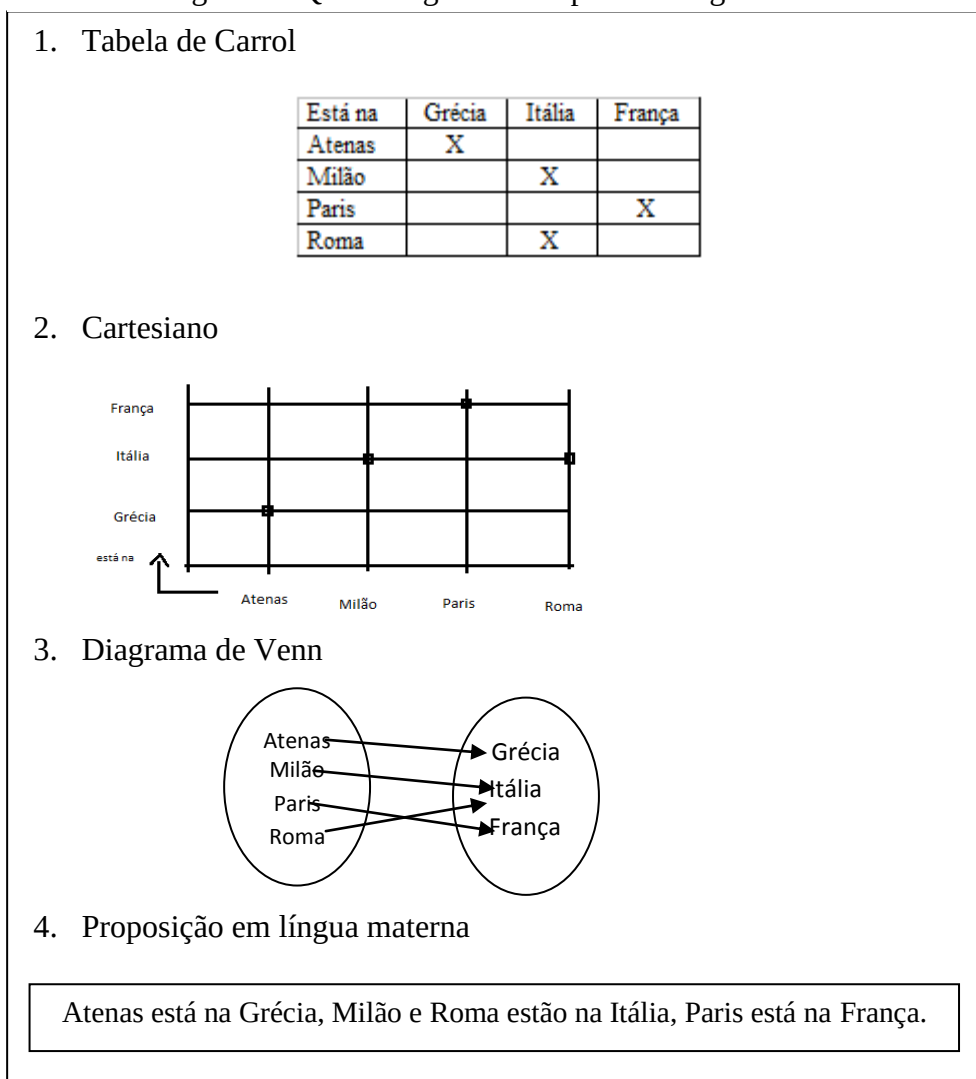
Nos anos iniciais as crianças representam de maneira bastante híbrida, uma vez que ainda não se apropriaram das regras que regem a língua formal da Matemática. Elas usam frequentemente desenhos e números, números justapostos sem os devidos sinais de operação, desenhos associados a algoritmos, entre outros.

Buscando responder a questão sobre o significado e diferentes registros, D’Amore (2007b) pesquisou alunos de ensino fundamental e médio levantando questionamentos acerca

da utilização e escolha dos instrumentos linguísticos e representativos utilizados pela escola no ensino de Matemática. Ele questiona: “Qual registro é visto mais imediato pelos alunos? Eles identificam como significantes de um mesmo significado? Conseguem traduzir de um objeto a outro? Quais dificuldades apresentam? Em Matemática, é lícito usar o registro proposicional?” (Idem, p. 270).

A pesquisa se referiu à apresentação de uma informação sobre a relação entre dois conjuntos (cidades e países) por meio de 4 significantes: tabela de Carrol; o plano Cartesiano; diagramas de Venn e um texto proposicional. Dentre as questões propostas aos estudantes, incluía-se a que questionava: qual representação você usaria para ensinar seus colegas das séries menores? Vejamos os registros utilizados na pesquisa:

Figura 1 - Quatro Significantes para um Significado



Fonte: D'Amore, 2007, p. 272.

Os resultados encontrados apontaram que o significante na forma proposicional é o que está mais distante para os alunos, na relação com os conceitos matemáticos, chegando-se a obter respostas do tipo “não tem nada a ver com a Matemática”. Esse dado é preocupante, pois se vê que há uma negação da presença e necessidade do texto em língua materna para o processo de apropriação do saber matemático, o que só aumenta o distanciamento entre essa área de conhecimento e a maioria dos estudantes. Outro dado importante foi que a representação cartesiana se caracterizou como a de mais difícil compreensão, evidenciando o não entendimento desse registro, sua fragilidade conceitual e sua pouca utilização na sala de aula.

No próximo item, discutiremos as duas outras atividades que se referem às transformações realizadas nas/com as representações semióticas – o tratamento e a conversão.

4.4.3 O Tratamento de Representações Semióticas

O tratamento das representações semióticas compreende “uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas” (DUVAL, 2009, p. 39), permitindo uma transformação interna de um registro de representação ou de um sistema semiótico. Tem-se o exemplo do cálculo de uma operação ou equação, o qual ocorre dentro de um mesmo sistema semiótico, ou ainda, a paráfrase, que significa uma transformação interna ao registro da língua, na qual um enunciado é transformado para ser explicado de outra forma.

Ressalta-se que se o tratamento dos registros expressos tanto por meio de uma língua quanto por meio de figuras geométricas não são algoritmizáveis, ou seja, não possuem uma sequência de passos a ser seguida – esses registros são chamados multifuncionais. Por outro lado, têm-se os registros monofuncionais que exigem um tratamento que ocorre principalmente através de um algoritmo, considerando-se uma sequência de procedimentos.

Duval (2009) distingue dois tipos de tratamentos: os quase-instantâneos e os intencionais. Os tratamentos quase-instantâneos¹⁴ “são aqueles efetuados antes mesmo de terem sido marcados e produzem as informações e as significações em que um sujeito tem imediatamente consciência” (DUVAL, 2009, p. 50 e 51). O termo quase-instantâneo enfatiza

¹⁴ Duval se recusa a utilizar o termo automático, ainda utilizado na literatura vigente. Tal objeção se deve ao fato do termo envolver confusão de sentido, podendo significar tanto a ausência de intencionalidade quanto ao processo de automatização e repetição, conceitos não aceitos pelo autor, uma vez que se pode realizar uma ação de maneira rápida e imediata com intencionalidade e significação. Por exemplo, um aluno pode resolver um algoritmo de multiplicação entendendo esse procedimento no contexto do sistema de numeração decimal.

o aspecto temporal em que as informações são acionadas pelo sujeito, no caso, rapidamente, conforme a experiência vivenciada que proporcionou adquirir tal competência. Poderíamos estabelecer também, uma relação entre o tratamento quase-instantâneo e a capacidade de calcular operações aritméticas mentalmente.

Realizar um tratamento quase-instantâneo com a multiplicação corresponde ao estudante encontrar o resultado para uma operação, por exemplo, 4×125 , de maneira rápida, compreendendo as regras de ordem e de agrupamento presentes no sistema de numeração decimal. Poderíamos também exemplificar uma situação de tratamento em um gráfico ou uma tabela, nos quais os alunos tivessem que preencher informações a partir das regras desses registros.

Os tratamentos intencionais “são aqueles que tomam ao menos o tempo de um controle consciente para ser efetuado e que se apoiam exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados, numa percepção furtiva do objeto” (DUVAL, 2009, p. 52). Eles se apoiam sobre os dados que se apresentam ao sujeito que, ao tratá-los, consegue efetuar um depois do outro, sendo influenciado pela quantidade de elementos ou questões a considerar. Para o autor em destaque, o melhor desempenho dos estudantes repousa sobre a complementaridade entre esses dois tipos de tratamentos no processo de resolução de problemas matemáticos. Nos anos iniciais, referindo-se à multiplicação, o tratamento intencional pode ser observado quando a criança resolve uma operação, necessitando de apoio dos dedos, de materiais de contagem, desenhos, apoiando-se perceptivamente sobre referentes.

Duval (2009) identifica que há uma valorização maior dos tratamentos intencionais sobre os quase-instantâneos, no entanto, para ele o domínio sobre tratamentos quase-instantâneos em uma determinada área aumenta a chance de estabelecer relações entre conceitos e conteúdos dessa mesma área e que a sua não apreensão poderia limitar a construção hierárquica do conhecimento. “A função dos tratamentos quase-instantâneos é fornecer à ‘percepção imediata’ da consciência unidades informacionais cada vez mais ricas para que essa possa ver objetos mais complexos ou mais gerais” (DUVAL, 2009, p. 52). Essa função aparece como condição de todo o processo qualitativo na aprendizagem, entretanto, é preciso compreender que antes de serem quase-instantâneos, esses tratamentos já foram intencionais.

Pozo (1998) discute a capacidade de resolução de problemas em Matemática, fazendo uma distinção entre exercícios e problemas, esclarecendo que o que determina se uma situação se constitui apenas um exercício ou um problema é a forma como cada sujeito

resolve a proposição. Se para resolvê-la já se tem, de forma imediata, os mecanismos e caminhos que conduzem à solução, ter-se-ia então um exercício. Se, por outro lado, o sujeito ainda necessita encontrar um caminho e estratégias que o conduza à solução, estaria diante de um problema.

Entretanto, ele ressalta que os exercícios que se baseiam “no uso de habilidades ou técnicas *sobreaprendidas* (ou seja, transformadas em rotinas automatizadas como consequência de uma prática contínua)” (p. 16, grifos do autor), embora não exijam do aluno, a capacidade de estabelecer relações mais amplas, possuem a função de suporte instrumental necessário, embora não suficiente, para o alcance de situações com desafios e exigências mais complexas. Entendemos que as discussões de Pozo (1998) se coadunam com os argumentos apresentados por Duval (2009), embora seu trabalho esteja circunscrito no campo da resolução de problemas e ainda utilize a nomenclatura ‘automático’.

4.4.4 A Conversão de Representações Semióticas

Converter é transformar a representação de um objeto, situação ou informação dada num registro, em um outro registro desse mesmo objeto ou informação em um sistema semiótico diferente. Essa ação não é simplesmente de codificação/decodificação, nem tampouco um processo secundário no fazer matemático. É um processo semio-cognitivo subjacente a toda e qualquer atividade matemática (DUVAL, 2008).

Operações como tradução, ilustração, transposição, interpretação, codificação, entre outras, são realizadas em um processo de conversão, uma vez que o registro de partida é diferente do registro de chegada.

As atividades de conversão são aquelas que mais exigem do aluno, pois envolvem transformação de um registro para outro, sendo necessário perceber a diferença entre o sentido e a referência dos símbolos ou dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e aquilo que ela representa (DUVAL, 2009, p. 59).

Poderíamos exemplificar com a ação de resolver problemas, uma vez que se tem um registro inicial em uma proposição - texto em língua materna - e ao final tem-se a utilização de um algoritmo que conduziu à sua solução; ou ainda a perspectiva inversa, tendo-se o algoritmo de entrada para a elaboração de um texto correspondente. No caso de problemas que envolvem operações aritméticas, os variados significados que elas possuem devem ser

considerados, pois um problema com significado de proporção simples, por exemplo, pode gerar menos dificuldade na conversão do que um problema com o significado de multiplicação comparativa.

Na escrita de um número, é preciso distinguir a significação operatória fixada para o significante e o número representado, assim, a significação operatória não é a mesma para 0,25; $\frac{1}{4}$; e $25 \cdot 10^{-2}$, dificultando a conversão, por exemplo, de uma representação de um número na forma decimal para outro na forma fracionária. Isto ocorre porque não são os mesmos procedimentos de tratamento que permitem efetuar operações com esses significantes (DUVAL, 2009, p. 60), como se vê nos seguintes exemplos, envolvendo a adição: $0,25 + 0,25 = 0,5$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $25 \cdot 10^{-2} + 25 \cdot 10^{-2} = 50 \cdot 10^{-2}$. Cada caso demanda um tratamento operatório específico e bem distinto dos demais.

As atividades de conversão apresentem uma exigência maior no sentido de mobilização cognitiva e Duval avalia que elas não são valorizadas no espaço escolar em relação às atividades de formação e tratamento. Segundo ele, a escola privilegia a aprendizagem de regras concernentes à formação de representações e de regras de tratamento, “mas o lugar reservado à conversão das representações de um registro a outro é mínimo, se não nulo” (DUVAL, 2009, p. 62).

Maranhão e Iglioni (2003), a partir de uma investigação sobre os registros de representação de números racionais, corroboraram o problema levantado por Duval de que no ensino fundamental tem sido mais estimulados os tratamentos que as conversões e que, quando essas ocorrem, é priorizado um dos sentidos em relação a outros, como, por exemplo, o percurso do texto proposicional ao algoritmo. Os autores argumentam ser necessário explorar conversões em sala de aula sempre nos dois sentidos, trazendo aquelas que não são naturais e diretas, ou seja, investigando aquelas que apresentam mais dificuldades entre os estudantes. Eles evidenciam que um aluno pode pensar que 0,25 é diferente de $\frac{1}{4}$, mas compreender que $\frac{1}{4}$ corresponde a 0,25.

Para Duval (2009), cada representação só informa parte do objeto representado, daí a importância e necessidade de abranger representações heterogêneas sobre determinado objeto, integrando-as, primeiro para não confundi-las com seu objeto e, segundo, para se alcançar o máximo possível sua compreensão¹⁵.

¹⁵ Essa necessidade de coordenação de registros como condição para o domínio da compreensão e diferenciação real entre o objeto matemático e sua representação também é discutida por D'Amore (2007).

Ao mesmo tempo em que converter representações exige mais do estudante, constituindo uma atividade menos espontânea e mais difícil de adquirir, ao se apropriar dessa capacidade, veem-se ganhos “espetaculares nas macro-tarefas de produção e compreensão” (DUVAL, 2009, p. 63) envolvendo conceitos matemáticos. A exigência da atividade cognitiva de conversão se constitui mais complexa porque o que está em jogo é o estabelecimento de uma correspondência entre dois registros de representação, não mais entre representação e objeto real.

Contudo, a coordenação entre os diferentes registros de representação não se dá de forma natural e fácil, mesmo em um processo de ensino que se proponha a isto. A limitação do trabalho matemático a um só registro ou mono-registros faz com que a maior parte dos alunos se revele incapaz de mobilizar conhecimentos já adquiridos. O autor em estudo ressalta:

A passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade Matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. (DUVAL, 2009, p. 18).

Sobre o processo de conversão, D’Amore (2006) argumenta que a passagem da representação de um objeto matemático a outro, por meio de transformações, de uma parte conserva o significado do objeto, porém, em algumas ocasiões pode chegar mesmo a mudar seu sentido.

A dificuldade encontrada nos alunos durante tarefas que exigem conversão entre registros de representação é causada por um fenômeno chamado incongruência entre as representações. Esse fator pode tanto aumentar o tempo para que se realize a conversão quanto, em situações extremas, até tornar impossível sua compreensão. Duval (2009) identifica três critérios de congruência entre dois registros de representação: a possibilidade de uma correspondência ‘semântica’ dos elementos significantes; a univocidade ‘semântica’ terminal e a organização das unidades significantes – mesma ordem nas duas representações;

Como exemplo, Duval (2009) apresenta a pesquisa sobre resolução de problemas aditivos realizada por Gérard Vergnaud, na qual três fatores comandam as dificuldades encontradas nos sujeitos pesquisados: identidade ou não entre a operação semântica sugerida pelos verbos; quando os verbos portadores da informação numérica não são antônimos, ocorrendo a não univocidade semântica; e quando a ordem de apresentação dos dados exige invertê-la, partindo-se do final.

As dificuldades ligadas a não-congruência da conversão podem ainda ser agravadas se o aluno desconhece um dos dois registros de representação a coordenar, muitas vezes porque não estudou ou aprofundou a heterogeneidade de registros semióticos em Matemática – gráficos, tabelas, diagramas, esquemas, produção de textos – ficando, na maioria das vezes, restrito ao tratamento envolvendo os cálculos aritméticos ou algébricos.

Tarefas com o conteúdo de multiplicação que exigem a conversão de registros envolvendo tabelas ou gráficos pode gerar dificuldade nos estudantes se eles não conhecem tais registros ou se não realizaram tratamentos com eles.

Duval (2009) assinala que mais do que identificar as dificuldades devido a não-congruência entre as representações, é necessário “situar a importância em relação à aprendizagem das Matemáticas e a análise que daí é geralmente feita em termos de complexidade conceitual” (p. 79). Poderíamos então crer que se trata de um processo secundário, porém, isto pode ser enganoso “porque os fracassos dados a não-congruência revelam um fechamento dos registros de representação” (p. 80), provocando um verdadeiro enclausuramento, podendo persistir até após ensino de alguns variados registros.

A utilização de variados registros de representação semiótica é importante para o desenvolvimento cognitivo e sua importância se dá “pelas diferenças de custo ou de limitação para a função de tratamento e por aquelas possibilidades de apresentar para a função de comunicação, que existem entre os registros” (DUVAL, 2009, p.80). Poderá ser mais fácil compreender a escrita decimal dos números na sua escrita numérica ou algébrica que em linguagem natural, assim como determinada informação explícita em um esquema ou figura que num texto descritivo.

Para Duval (2003, p. 14), a “originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. Para que os alunos, no processo de aprendizagem Matemática, possam se apropriar de variados registros de representações, podendo transitar entre um e outro, é necessário que alcance a capacidade de coordenação entre as representações. Essa capacidade não tem nada de espontâneo e natural, sendo necessário um trabalho específico na perspectiva de que os alunos produzam representações variadas. Conforme o autor,

uma representação pode verdadeiramente funcionar como uma representação, ou seja, possibilitar o acesso ao objeto representado quando duas condições forem atendidas: dispor de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir representação de um objeto, de uma

situação... e poder converter ‘espontaneamente’ de um sistema a outro (DUVAL (2009, p. 38).

Embora haja o termo ‘espontaneamente’ na citação, o autor ressalta que esse não é um processo natural, evidente e espontâneo para a maior parte dos estudantes. Muito pelo contrário, ele exige dos alunos a compreensão de que um mesmo objeto pode ser representado por meio de registros diferentes, sendo necessário o estabelecimento de relações e a coordenação entre eles. Para entender melhor os elementos destacados, discutiremos especificamente o processo de transformação de representações, que ocorre por meio do tratamento e da conversão.

O processo de conversão entre os registros de representação não apresenta as mesmas dificuldades em todas as direções, quer dizer, a conversão entre a representação não-discursiva, ou seja, de um gráfico para uma representação de uma expressão em língua natural pode ser mais espontânea que a conversão inversa, ou seja, de uma expressão em língua natural para a representação em um gráfico ou uma equação, que se revela mais complexa.

A conversão de uma expressão em língua natural para uma representação não-discursiva não pode ser direta porque exige o desvio por outra representação intermediária, como da passagem da língua natural para a língua formal. Aqui o registro de chegada é uma descrição a partir do registro intermediário e não o de saída e “a complexidade da conversão inversa se dá porque estamos em presença de duas conversões sucessivas” (DUVAL, 2009, p.110).

Essa discussão esclarece que nem toda conversão possui o mesmo nível de exigência cognitiva e isso precisa ser compreendido pelos professores de Matemática. Inferimos que esta possa vir a ser uma das maiores razões para as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas, uma vez que é predominantemente exigida dos alunos a conversão do texto em língua natural para um registro algorítmico. Além disso, se considerarmos que as operações aritméticas envolvem diferentes significados, diferentes grandezas numéricas, as variáveis que interferem no processo de resolução de problemas são ampliadas.

Panizza (2006) utiliza o termo ‘ilusão da transparência’ para se referir a expectativa que os professores têm em relação aos seus alunos, em ‘enxergar’ nas representações aquilo que os professores identificam e ‘vêem’.

Uma das razões que explicam a dificuldade dos estudantes é o fato da Matemática utilizar a língua natural de maneira especializada, com formas de expressões referenciais muito mais complexas do que em seu emprego comum, envolvendo ‘encadeamentos de

complementos do substantivo' nas diferentes definições (DUVAL, 2004). O autor assim explica: “A utilização da língua natural em Matemáticas provém de um emprego especializado e não de um emprego comum. E esta diferença que afeta essencialmente as funções discursivas de referência e de expansão discursiva, pode ser muito grande e oculta” (p. 156).

Para uma aprendizagem Matemática eficaz é necessário proporcionar a integração dos mais variados registros semióticos, favorecendo situações de conversão entre representações, para além das atividades de tratamento, buscando-se abranger ao máximo a rede conceitual do objeto que se pretende ensinar. Entretanto, Duval (2009) alerta que exercícios de conversão não são suficientes para a coordenação de registros de representação, devido aos fenômenos de incongruência, portanto, os casos de não-congruência são sempre casos particulares, não podendo ser ‘agrupáveis’ e também porque “a conversão das representações requer a identificação das unidades significantes nos registros de saída e de chegada” (p. 99) e esse é o ponto nevrálgico da dificuldade, uma vez que sempre são essas unidades significantes que fazem falta ao estudante.

Duval (2009) sugere que “a discriminação das unidades significantes de uma representação, e então a possibilidade de uma apreensão daquilo que ela representa, depende da apreensão de um campo de variações possíveis relativamente à significância num registro” (p. 101), o que quer dizer ser necessário ampliar ao máximo as possibilidades de representação de um mesmo objeto matemático, possibilitando a “exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação em outro registro”. (Idem). Dentre as variações podemos encontrar aquelas que não exercem mudanças, constituindo-se em exclusivamente semióticas e aquelas que exercem mudanças, chamadas de variações cognitivas.

A organização de situações de aprendizagem centrada sobre a coordenação de registros requer então que identifiquemos todas as variações cognitivamente pertinentes de uma representação num registro, da forma que uma exploração (...) possa ser colocada em prática pelos alunos (DUVAL, 2009, p. 102).

Referindo-se a operação aritmética de multiplicação, consideraremos os seguintes registros de representação semiótica: desenho, enunciados orais ou escritos sobre

multiplicação, enunciados de problemas multiplicativos, algoritmos alternativos¹⁶, algoritmo formal, envolvendo adição de parcelas iguais ou a multiplicação, tabelas, gráficos, esquemas (árvore de possibilidades).

Sobre os registros em língua materna, principalmente a leitura e produção de texto, Duval (2003) assinala que eles são muito complexos por lidar com a representação discursiva da língua natural com suas associações verbais e formas de raciocínio, como argumentação e dedução. D'Amore (2006) sugere algumas situações que podem potencializar a atuação do estudante na apropriação do conhecimento matemático por meio desse registro:

discutir e estudar textos com dados supérfluos; pedir que produzam textos em condições particulares; fazer análise sobre o conteúdo de um texto, sobre as informações que fornece, sobre as relações que fornece, sobre sua decomposição e recomposição, atividades com um texto sem pergunta e o aluno terá de criar, entre outras (p. 258).

Nessa perspectiva, algumas funções são atribuídas ao professor, pois ele é um profissional responsável pela organização e sistematização do processo de ensino, tendo por base a premissa vigotskiana de que “o bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento”.

Reiteramos que a ação do estudante enquanto protagonista do seu processo de aprender deve ser incentivado e valorizado pelo professor desde o processo de comunicação em sala de aula até a produção de conhecimento matemático, evidenciada principalmente nos registros produzidos pelas crianças nos anos iniciais da escolarização. Em um artigo de nossa autoria (AZERÊDO, 2008), discutimos sobre a não-valorização das representações pessoais utilizadas pelas crianças no processo de resolução de problemas na escola, havendo uma tendência à valorização de procedimentos algorítmicos, embora, em muitos casos, vazios de significação e sentido.

Quando o algoritmo é confundido com o próprio objeto matemático, contribui-se para a não compreensão deste. “É necessário identificar nos procedimentos e representações que os alunos utilizam diversas maneiras de tratamento e de conhecimento dos objetos e suas representações” (PANIZZA, 2006, p. 21), proporcionando “espaços de emergência das representações não-convencionais dos alunos (...), uma vez que estas representações externas têm um *valor produtivo* na aprendizagem” (PANIZZA, 2006, p. 25).

¹⁶ O termo algoritmo alternativo é utilizado por Luize (2001) para designar as estratégias produzidas pelos alunos no processo de resolução de problemas, diferentes do algoritmo formal.

Além disso, a maioria das pesquisas chegou a resultados sobre a carência de uma utilização efetiva da noção teórica dos registros de representação semiótica tanto por parte dos professores quanto por parte dos livros didáticos que eles utilizam. Ao apresentar sugestões de atividades e sequências didáticas, tais pesquisas contribuem para a ação pedagógica do professor, no entanto, as conclusões também indicam que não bastam apenas atividades e sequências bem elaboradas, porque o professor precisa compreender as orientações teórico-metodológicas que as fundamentam, o que desemboca no problema da formação docente. (COLOMBO, FLORES E MORETTI, 2008, p. 59).

Em pesquisa realizada, Damm (2003) interroga qual o tipo de representação mais adequada para o ensino de problemas do campo aditivo, colocando-se um problema didático. Para a autora a conversão entre o texto escrito num problema à solução exige a seleção de que o aluno disponha, implícita ou explicitamente de uma representação.

A questão é “então, saber se as representações semióticas podem se constituir num instrumento eficaz para levar os alunos à compreensão e à resolução dos problemas, e, no caso dos problemas aditivos, qual seria o tipo dessa representação” (DAMM, p. 42). Ao pesquisar a solução de problemas aditivos que carregam em si o fenômeno da incongruência, a autora propõe uma representação de adição deveria abranger dois eixos distintos: “um sobre o qual são marcadas as relações referentes às etapas do enunciado e o outro onde os dados operatórios são situados em função da situação” (p. 43). Como exemplos de ‘boa’ representação, ela propõe o uso de gráficos e ilustrações que permitam às crianças visualizarem deslocamentos sobre a semirreta graduada e deslocamentos verticais (elevador, montanha) e horizontais (barco e rua).

Assim, seu trabalho contribui para minimizar as dificuldades de alunos diante do fenômeno de não congruência, em problemas aditivos, possibilitando um terceiro registro – uma representação intermediária entre o registro de partida e o de chegada.

Resumindo, apresentamos três ideias fundamentais da teorização de Duval (2003) que nos ajudarão no processo de análise dos dados obtidos: o desenvolvimento da capacidade mental de representação depende do desenvolvimento cultural dos sistemas semióticos – apropriação e domínio desses sistemas; nos sujeitos em período de desenvolvimento e formação inicial, a aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros, e essa coordenação não é espontânea; a diversidade de registros contribui para o desenvolvimento de capacidades cognitivas globais.

5. OS CAMINHOS DA PESQUISA DE CAMPO

Para conseguir fazer uma análise sobre o ensino de multiplicação nos anos iniciais, evidenciando o lugar atribuído às representações semióticas, foi necessário assumirmos a pesquisa qualitativa como norteadora do processo de coleta e análise de dados, uma vez que ela favorece, por meio de diferentes instrumentos, adentrarmos no universo escolar, identificando variados elementos de análise.

Triviños (1987, p. 127) afirma que na pesquisa qualitativa a descrição é marca fundamental. Nela, “busca-se mergulhar na essência do fenômeno e não apenas na aparência. De início se descreve, para num segundo momento procurar explicar as causas da existência do fenômeno”. Mais adiante, o mesmo autor acrescenta que

os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados e o produto. O que caracteriza uma pesquisa qualitativa não está somente na análise dos resultados obtidos, mas na forma de como eles foram obtidos, na relação estabelecida entre o cientista e os sujeitos da pesquisa (TRIVIÑOS, 1987, p. 127).

Na busca de um instrumento que pudesse nos oferecer variedade e densidade de dados sobre as representações semióticas no ensino de multiplicação, optamos pela formação de um grupo de discussão com professores de anos iniciais. Para Rubio e Varas (1999), o grupo de discussão funciona “como espelho da realidade social porque os sujeitos, expondo suas ideias e debatendo sobre elas, não fazem mais que refletir suas próprias vivências, pensamentos, posições... acerca de uma situação ou problema concreto” (p. 334).

Devido à dificuldade relatada por pesquisadores no processo de constituição de grupos de discussão ou até de grupo focal, uma vez que nem sempre é possível contar com a participação efetiva dos sujeitos durante as sessões, promovemos um curso destinado às professoras, acerca da multiplicação de números naturais, o qual motivaria sua participação. Esse curso teve duração de 30 horas e foi certificado pela Universidade Federal da Paraíba, por meio do Laboratório de Estudos e Pesquisas da Aprendizagem Científica – LEPAC.

Nesse sentido, nossa expectativa foi também contribuir com o processo formativo dos professores que estiveram conosco, tendo como referência a reflexão e tomada de consciência de sua atividade de ensinar, favorecendo o exercício da práxis educativa. Para Franco (2008), a articulação entre pesquisa e prática docente é importante para provocar o exercício de uma

práxis que signifique construção de saberes e desenvolvimento profissional, pois ao refletir sobre sua prática o professor a ressignifica.

Enquanto uma prática for mecanicamente estruturada, sob forma de reprodução acrítica de fazeres, ela não se transformará em saberes da experiência, uma vez que não foi vivenciada como práxis, não foi renovada nem transformada com as águas da reflexão, da pesquisa e da história (FRANCO, 2008, p. 110).

Por estarmos diretamente envolvidas na pesquisa de campo, a vigilância epistemológica precisou ser redobrada, uma vez que o fato de ser responsável pelo curso exigia intervenções, explicações e respostas que buscamos realizar o mais tardiamente possível, para que a fala e as impressões primeiras do grupo fossem expostas sem a nossa influência tão direta. Embora não acreditemos que exista a neutralidade do pesquisador, uma vez que as relações e laços entre ele e os sujeitos pesquisados vão ocorrendo desde as primeiras etapas de constituição da pesquisa, era necessário, num primeiro momento, coletar dados o mais próximo da realidade e menos enviesados possível.

Apesar de termos pensado antecipadamente em um curso sobre o ensino de multiplicação, apresentando aos professores os objetivos específicos e uma proposta preliminar, o desenvolvimento do curso foi sendo adequado, gradativamente, de acordo com as demandas vindas do grupo. Assim, podemos identificar no curso, três momentos: o primeiro que envolveu o levantamento de informações sobre a compreensão de multiplicação e seu ensino, procurando identificar como as representações semióticas eram consideradas; o segundo momento com a aplicação de um diagnóstico junto aos alunos e, por fim, um momento que envolveu a análise dos resultados das crianças com as devolutivas e fechamentos didáticos em relação ao tema do curso.

Os dados coletados referem-se às professoras participantes do curso e aos seus alunos do ano de 2012. Utilizamos 09 (nove) instrumentos¹⁷ de coleta dos dados com as professoras e 03 (três) com os alunos. Todos os instrumentos foram tabulados e organizados a partir de temáticas evidenciadas pelas professoras, tendo a nossa provocação ou não. Além desses instrumentos, os encontros foram audiogravados com o consentimento dos participantes, pois além dos instrumentos respondidos por escrito, a fala e a discussão no grupo eram essenciais para nós. Todos os arquivos de áudio foram transcritos pela pesquisadora, tendo alguns trechos apresentados para a descrição e análise dos dados.

¹⁷ Todos os instrumentos estão nos Apêndices deste trabalho.

No processo de análise buscamos articular de maneira coerente as questões de pesquisa, os objetivos propostos e o referencial teórico que orientou a leitura e a reflexão do objeto. Nesse contexto, assumimos a análise de conteúdo com seu conjunto de técnicas para tratar e análise os dados e informações coletadas. Para Bardin, (2003, p.42), a análise de conteúdos pode ser assim resumida:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Sabemos que em nenhum processo de pesquisa tem-se a neutralidade, pensada ser possível por teóricos da pesquisa clássica e positivista. No entanto, houve um esforço em manter certo distanciamento entre nossos interesses de comprovação de hipóteses e o que foi obtido a partir do campo de pesquisa. Em relação à inferência, buscamos ‘ler’ do material obtido não apenas o visível, mas o invisível, o não dito. A inferência se localiza entre o processo de descrição de dados e a sua interpretação a partir do referencial teórico obtido (RICHARDSON, 1999).

Devido à quantidade extensa de dados, a categorização adequada para os procedimentos de análise e de interpretação de dados se constituiu em um processo longo que demanda idas e vindas. Nessa pesquisa, assumimos o critério de categorização semântica, que considera os temas que foram enunciados e discutidos durante as sessões de encontro com o grupo, o que conduziu a uma categorização *a posteriori*.

Para Bardin (2003, p. 105), “fazer uma análise temática, consiste em descobrir os ‘núcleos de sentido’ que compõem a comunicação, e cuja presença, ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objectivo analítico escolhido”. Vemos, portanto, a necessária relação e até dependência desse processo de análise aos objetivos e compreensão que se tem do fenômeno investigado.

Além dos dados qualitativos expostos nas opiniões, reflexões e respostas aos instrumentos aplicados durante o curso, a quantificação nos foi exigida para organizar os dados do diagnóstico aplicado aos alunos, tanto no levantamento de acerto e erro, quanto na sua relação com os significados da multiplicação e nos registros semióticos utilizados. Conforme Richardson (1999, p. 79), “o aspecto qualitativo de uma investigação pode estar

presente até mesmo nas informações colhidas por estudos essencialmente quantitativos, não obstante perderem seu caráter qualitativo (...)”.

A quantificação considerou os dados absolutos, à medida que apareceram nas respostas das crianças, mas na análise de dados foram considerados não somente os índices maiores ou mais evidentes, mas também àqueles que, embora tenham aparecido de forma incipiente, nos ajudaram a refletir acerca do tema em análise.

5.1 A Constituição do Grupo de Discussão

Inicialmente, fizemos contato com a Secretaria de Educação do município de João Pessoa, solicitando autorização para realizarmos a pesquisa de campo junto aos professores dos anos iniciais de escolas localizadas nos Bairros Bancários e Mangabeira, chamadas escolas do Pólo I. A escolha de escolas desses bairros se deve ao fato da pesquisadora já ter estabelecido contatos anteriores com suas direções e docentes em projetos de extensão desenvolvidos pela Universidade Federal da Paraíba.

Após a autorização por parte da Secretaria de Educação, visitamos as referidas escolas para convidar os professores dos anos iniciais do Ensino fundamental para participarem do curso: “Ensino de Matemática nos anos iniciais: aprofundando o estudo sobre a multiplicação”, o qual constituiria o campo empírico para a construção de nossa tese de Doutorado em Educação.

O convite para o curso destinava-se às professoras que estivessem ensinando no 3º, 4º ou 5º anos do Ensino Fundamental I, tendo a possibilidade de optar pelo horário da quarta à noite ou o sábado pela manhã. A opção por professores do 3º ao 5º ano se justificou pelo fato do conteúdo de multiplicação ser explorado de maneira mais direta nos planos de ensino dessas turmas.

Ao visitar seis escolas já contávamos com a inscrição de 35 (trinta e cinco) professores, distribuídos em dois grupos – noite, com 21 (vinte e um) e manhã, com 14 (catorze) professoras. Esclarecemos que durante esse processo de visita, alguns professores que ensinavam o 1º e 2º ano, bem como estagiários, demonstraram interesse, solicitando que pudessem liberar sua inscrição. Encerramos as visitas na sexta escola, visto que o número de inscritos já ultrapassava o limite de participação. Fizemos contatos com cada professor inscrito, seja por e-mail ou mensagem telefônica, confirmando sua participação no curso e informando mais uma vez o calendário e programação.

Para esse trabalho, teremos como referência o grupo da noite, no qual contamos com a participação efetiva de 08 (oito) professoras até o final do curso, enquanto no grupo da manhã, houve muitas faltas, o que atrapalhou o levantamento de dados e as discussões.

Iniciamos o curso com o grupo da noite, no dia 18 de abril de 2012, com a participação de 11 (onze) professoras, no Laboratório de Estudos e Pesquisas da Aprendizagem Científica – LEPAC/CCEN/UFPB e encerramos as atividades com 8 (oito) professoras, no dia 18 de junho de 2012. As participantes eram de quatro escolas, situadas nos bairros de Bancários e Mangabeira, da cidade de João Pessoa, sendo 2 (duas) do 2º ano; 2 (duas) do 3º ano; 1 (uma) do 4º ano e 2 (duas) do 5º ano, distribuídas no quadro a seguir:

Quadro 1 - Distribuição das professoras por escolas e ano de atuação

Escolas	Professoras	Anos que lecionam
Escola 1 - Bancários	01	3º ano
Escola 2 – Mangabeira II	03	2º, 2º e 4º anos
Escola 3 – Mangabeira III	03	3º, 5º e 5º anos
Escola 4 – Mangabeira I	01	2º ano

Fonte: Sistematização da autora a partir do Instrumento 1

A participação das professoras durante o curso foi bastante significativa. Das 08 (oito) que ficaram conosco até um final, somente duas faltaram em um encontro, apresentando justificativas ao grupo e à pesquisadora. Suas expectativas em relação ao curso foram expressas em palavras como “aprender novidades, inovações, materiais lúdicos, adquirir conhecimento, suprir dificuldades, aprender novos caminhos e estratégias para levarem inovações à sala de aula”, tendo nos termos lúdico, concreto e dinâmico palavras recorrentes. Esse aspecto será retomado no capítulo seguinte sobre o ensino de multiplicação.

Na apresentação dos dados referentes às falas das professoras, seguiremos a ordem das turmas por elas ensinadas, ou seja, do 2º ano ao 5º ano.

5.2 O Desenvolvimento do Curso

O curso intitulado: “Ensino de Matemática nos anos iniciais: aprofundando o estudo sobre a multiplicação”, ocorreu durante os meses de abril a junho de 2012, com carga horária de 30 (trinta) horas. O curso foi pensado como um espaço propício para coletarmos informações que nos respondessem às questões antes colocadas sobre o ensino de multiplicação e a contribuição das representações semióticas nesse processo. Para as

professoras, deixamos claro, desde o início, que ele fazia parte do processo de pesquisa de campo do nosso Doutorado em Educação. Entretanto, buscamos oportunizar um espaço de reflexão, aprendizagem e troca de saberes, tendo como foco a discussão sobre o ensino de multiplicação nos anos iniciais.

Os objetivos do curso foram: discutir as demandas para o ensino de Matemática nas séries iniciais; partilhar experiências sobre o ensino de multiplicação e estudar/vivenciar as perspectivas atuais para o ensino acerca do campo multiplicativo. A carga horária foi distribuída, inicialmente, em seis encontros presenciais ocorridos nos dias 18 e 25 de abril; 09, 16 e 30 de maio e 13 de junho, acrescidos de atividades extras como leitura de textos, análise de estratégias e aplicação de atividades em suas turmas. Durante o curso, sentimos necessidade de mais um encontro, o qual ocorreu no dia 18 de junho, totalizando 07 (sete) encontros.

Quatro encontros do curso ocorreram no Laboratório de Estudos e Pesquisas da Aprendizagem Científica – LEPAC/CCEN/UFPB – porém, com a deflagração da greve dos professores e servidores da universidade, decidimos realizar os encontros restantes na casa de uma professora, num bairro próximo à Universidade. A duração de cada encontro era de 3 horas, aproximadamente.

Sempre iniciávamos os encontro ou temáticas com a exposição dos professores para, em seguida, irmos complementando, questionando, conduzindo uma reflexão mais sistemática.

De forma resumida, as atividades realizadas no curso seguiram a seguinte sequência:

1º encontro – realizou-se a acolhida aos participantes com a entrega do material e apresentação da proposta do curso e dos professores. Nesse momento, foi ressaltada a importância da interação entre todos, bem como a participação efetiva nas discussões a serem propostas. Seguiu-se com a aplicação do questionário inicial para levantamento do perfil do grupo (Apêndice A) seguido de uma apresentação individual e, posteriormente, um levantamento inicial sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais, especificamente, sobre o ensino de multiplicação (Apêndice B).

2º encontro – conclusão do levantamento inicial sobre o ensino de matemática com uma discussão coletiva; atividade de registro: “como ensino a multiplicação?” (Apêndice C); atividade de casa: aplicação de um problema em cada turma e análise de soluções.

3º encontro – retorno dos problemas aplicados na turma; retorno da análise de soluções de uma atividade de multiplicação; discussão coletiva sobre a tabuada; elaboração de problemas envolvendo a ideia de multiplicação (Apêndice D). Combinados sobre as visitas a

cada sala de aula para aplicação de problemas envolvendo a ideia de multiplicação, com o objetivo de diagnosticar a compreensão das crianças sobre a multiplicação. A atividade de casa foi a leitura do texto: “Um novo jeito de ensinar a tabuada”, publicado na revista Nova Escola (Dez/2011).

4º encontro – discussão sobre os diferentes significados que envolvem a multiplicação com a apresentação de um arquivo em power point, no data show; realização de atividades envolvendo os significados da multiplicação: área (com o geoplano e o papel quadriculado); combinatória (dobraduras de camisas e calças). Discussão do texto sobre a tabuada. Para casa, enviamos a atividade – Análise sobre representações (Apêndice E);

5º encontro – discussão coletiva sobre a atividade ‘Análise sobre representações’; atividade em grupo sobre significados da multiplicação: proporção simples e múltipla (atividade da fábrica de colares). Discussão sobre algumas representações das crianças sobre multiplicação. Atividade de casa: análise dos resultados obtidos no diagnóstico com a ideia de multiplicação (tabela por turma e gráfico de acertos).

6º encontro – interação sobre a análise dos resultados de cada turma; discussão de representações utilizadas pelas crianças nas questões 1, 4 e 7 do diagnóstico aplicado aos alunos (Apêndice F); discussão sobre as representações utilizadas no processo de ensino da multiplicação. Atividade de casa: Tarefa 1 (Apêndice G) e Tarefa 2 (Apêndice H).

7º encontro – discussão sobre as tarefas: “como realizei as atividades? Tive alguma dificuldade? Que questões eu levanto frente a essas tarefas?”. Avaliação do curso e definição de data para entrega do certificado e do portfólio.

Além das atividades do curso, voltamos às escolas no mês de novembro de 2012 para aplicar uma segunda atividade aos alunos, envolvendo questões de tratamento (cálculo e gráfico) e de conversão, atentando-se a outras direções, como: problema/texto – algoritmo; problema/texto – tabela; problema/texto – esquema; problema/texto – desenho e algoritmo – problema/texto.

5.3 As Professoras Participantes

No primeiro encontro do curso aplicamos um questionário (Apêndice A) que levantou algumas informações básicas sobre o grupo de professoras – formação acadêmica, tempo de atuação em sala de aula, sua relação com a Matemática, dificuldades e expectativas relativas ao curso.

Para mantermos o sigilo em relação à identidade das professoras, usaremos uma codificação indicando o ano de atuação e a ordem indicada por nós quando há mais de uma professora de um mesmo ano, por exemplo: 2ºP1, significa 2º ano Professora 1; 2ºP2, 2º ano Professora 2; 3ºP1, 3º ano, Professora 1, e assim sucessivamente, conforme indica o Quadro 2, com outras informações a respeito do grupo:

Quadro 2 - Apresentação das professoras

Professoras	Idade	Tempo de atuação nos anos iniciais (em anos)	Ano que leciona (2012)	Tempo de atuação no ano/série (em anos)	Formação pedagógica
2ºP1	24	08	2º	2	Normal, Pedagogia e Psicopedagogia (Pós-graduação)
2ºP2	40	10	2º	2	Pedagogia e Psicopedagogia (Pós-graduação)
2ºP3	46	10	2º	3	Pedagogia e PROEJA (Pós-graduação)
3ºP1	27	10	3º	2	Pedagogia e Psicopedagogia (Pós-graduação)
3ºP2	29	12	3º	1	Pedagogia
4ºP1	47	25	4º	2	Normal e Pedagogia
5ºP1	39	10	5º	10	Normal, Pedagogia e Psicopedagogia (Pós-graduação)
5ºP2	55	25	5º	10	Letras e Psicopedagogia (Pós-graduação)

Fonte: Sistematização da autora a partir do Instrumento 1

A maioria das professoras possui 10 anos ou mais de atuação nas séries iniciais, no entanto, apenas duas professoras que atuam no 5º ano possuem significativa experiência na série que leciona atualmente. O grupo de professores possui razoável experiência profissional e que as escolas têm promovido rodízio entre os professores na perspectiva deles atuarem em diferentes turmas ao longo do Ensino Fundamental I, prática comum nas escolas locais. Ressaltamos que apenas uma dessas professoras não é do quadro efetivo da rede pública municipal.

Referindo-se à formação pedagógica, 07 (sete) professoras são graduadas em Pedagogia, sendo que 03 delas possuem o curso Médio Normal. Uma professora é graduada em Letras com pós-graduação em Psicopedagogia. A pós-graduação em nível de especialização está presente na formação de 06 (seis) professoras, sendo que 05 (cinco) optaram por Psicopedagogia - uma ainda cursando, e uma é pós-graduada na área de Educação de Jovens e Adultos, pelo PROEJA.

Todas as professoras afirmam gostar de ensinar Matemática, embora a professora 5ºP2 afirme “durante todo o meu trajeto de aluna, eu sempre tive dificuldade com a Matemática,

por isso é um desafio ensiná-la”. As razões para gostar de ensinar Matemática vão desde a sua relação com o dia-a-dia, até razões referentes ao desafio de pensar matematicamente, conforme exposto nos falas que seguem:

Porque a Matemática está presente em nosso dia-a-dia e amo estimular, principalmente o raciocínio lógico (2ºP1);

Acho a Matemática fantástica porque nos faz pensar, é sempre um desafio compreender a lógica dos números, das formas etc. (2ºP3);

Acredito que por estar a Matemática tão presente no dia-a-dia é interessante trabalhar essa disciplina e as questões referentes a ela (3ºP1);

Porque convivemos com a Matemática constantemente no nosso dia-a-dia. Ela desenvolve nosso raciocínio lógico e nos capacita para o amanhã (4ºP1).

Além dessas razões, o gosto de ensinar Matemática está vinculado ao trabalho pedagógico proporcionado com materiais concretos, como os professores dizem:

Gosto de lidar com os números, principalmente com material concreto, pois na Matemática podemos sempre comprovar o que é dito e assim as aulas ficam bem dinâmicas (2ºP2);

Porque tem mais facilidade de trabalhar com o concreto, com a construção de materiais (3ºP2);

É uma disciplina que bem aplicada ela envolve e motiva o aluno (5ºP1).

A referência ao uso e manuseio de material concreto é evidente. Spinillo e Magina (2004) identificam entre os professores de anos iniciais um mito sobre a contribuição do material concreto para a aprendizagem da Matemática. As autoras questionam o uso do material, principalmente quando dissociado de registros semióticos e de reflexão.

As dificuldades que as professoras têm com a Matemática foram organizadas em dois grupos: as de ordem conceitual e as de ordem metodológica. No primeiro grupo têm-se as dificuldades com a Geometria (ângulos e desenhos geométricos), com a subtração com reserva; multiplicação; divisão e frações; já as do segundo grupo envolveram a produção de material; associação entre jogos e conteúdos; o trabalho de maneira lúdica e mais significativa das 4 (quatro) operações; o trabalho com uma série menor; ensinar a interpretar problemas. Compreendemos que essas dificuldades estão interligadas, não sendo possível definir a fronteira entre o que se relaciona ao conteúdo especificamente ou à metodologia, por exemplo, a capacidade de associar jogos e conteúdos envolve a compreensão de conceitos matemáticos e de procedimentos metodológicos.

Nas dificuldades dos alunos em relação à Matemática, elencadas pelas professoras, identificamos três grupos de dificuldades: de ordem conceitual, de ordem procedimental e de ordem atitudinal, expostas no Quadro 3. Mais uma vez enfatizamos que essa classificação não é rígida, pois os conceitos, os procedimentos e as atitudes se interagem, inclusive está explícito nas falas de algumas professoras.

Quadro 3 - Dificuldades dos alunos em relação à Matemática

Conceituais – Procedimentais – Atitudinais		
A maior dificuldade dos meus alunos é no raciocínio lógico, pois quer dar respostas rápidas sem que aja uma interpretação do processo (2ºP1); Abstrair conteúdos, na faixa etária do 2º ano, eles só conseguem compreender através do concreto (2ºP3);	Interpretação de problemas (5ºP1);	O principal deles é a falta de atenção e de interesse, acompanhados das dificuldades em assimilar os conteúdos trabalhados: adição e multiplicação com e sem reserva, o uso do QVL (4ºP1);
	Interpretação dos problemas – não conseguem identificar quais as operações que devem fazer para achar a solução (5ºP2);	
	Divisão, interpretação de problemas matemáticos (principalmente os que incluem mais de uma operação) (3ºP1);	As dificuldades que vejo é a falta de acompanhamento em casa e a questão de raciocínio lógico, não são habituados a pensar (2ºP2).
	A resolução de problemas é uma dificuldade porque acham que a matemática é apenas números, e também fazer o cálculo porque muitas tinham o hábito de copiar as respostas prontas e não raciocinar e calcular (3ºP2);	

Fonte: Sistematização da autora a partir do Instrumento 1

Vemos que aparece nesse primeiro levantamento a dificuldade com a multiplicação, principalmente relacionada ao sistema de numeração decimal, mas ela foi apontada por apenas uma professora. A resolução de problemas foi apontada por quase todas as professoras, evidenciando uma dificuldade também delas em explorar esse procedimento com as crianças.

6. O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS

Para compreendermos o ensino de multiplicação nos anos iniciais, durante o curso proposto, optamos pela aplicação de diferentes instrumentos, os quais, conforme já informado, foram elaborados na medida em que o processo formativo foi ocorrendo. Nesse percurso, vieram à tona as dificuldades sentidas/percebidas das professoras e dos alunos, as sequências didáticas, os significados explorados e as representações semióticas utilizadas. Os instrumentos 2, 3, e 4 trazem o núcleo das informações analisadas para temática do ensino de multiplicação, complementado por trechos de diálogos ocorridos nos encontros ao longo do processo de formação.

6.1 Contextualização - dificuldades e potencialidades vivenciadas

No início do curso, nenhuma professora havia explorado o conteúdo da multiplicação naquele ano. Especificamente sobre a multiplicação, o Instrumento 2 (Apêndice B) apresentava uma questão sobre as dificuldades enfrentadas pelas professoras no ensino de multiplicação, destacando aquelas apresentadas pelos alunos e o que tem sido feito para sanar tais dificuldades.

Sobre as dificuldades enfrentadas pelas professoras no ensino de multiplicação, duas delas (2ºP3 e 5ºP1) afirmaram não ter dificuldades com esse conteúdo e o restante da turma informou sinalizou questões referentes aos procedimentos metodológicos, dentre os quais, três delas evidenciam a necessidade de dinamização e criatividade no processo de ensino. Vejamos as respostas:

Desenvolver estratégias para trabalhar as tabelas de multiplicação de forma mais dinâmica. Associar conteúdos com os jogos. ‘A compreensão em si da multiplicação é fácil, o difícil é na resolução de problemas!’ (2ºP1);

Aplicar jogos (2ºP2);

Ensinar de maneira criativa, dinâmica, agradável (3ºP1);

A minha dificuldade é transmitir para o nível da minha turma, porque eu acho que ainda é muito superficial para atingir a compreensão de todos. Com a escola integral as crianças ficam cansadas, não aguentam (3ºP2);

Trabalhar esse contexto mais dinamizado, um maior apoio pedagógico. Maior interação e cooperação da escola, pois a escola não tem valorizado o processo (4ºP1);

A didática (5ºP2).

Embora a professora 5ºP2 utilize o termo didática, cujo significado extrapola o de referir-se apenas aos procedimentos metodológicos, no momento de discussão no grupo evidencia que seu intuito foi ressaltar o modo de ensinar. Essa professora se definiu por diversas vezes, como ‘tradicional’.

A resposta da professora 2ºP1 traz a dificuldade em relação às tabelas de multiplicar que corresponde a tabuada, mas evidencia uma dicotomia entre o significado da operação e a resolução de problemas, como se pudesse identificar a compreensão das crianças sem o recurso à resolução de problemas. Ora, é na solução de problemas que envolvem situações multiplicativas diferentes que o aluno expõe sua compreensão sobre os significados envolvidos. Portanto, supomos que quando a professora faz essa afirmação ela se refere ao tratamento do algoritmo, ou seja, um aluno pode resolver um algoritmo e não resolver um problema.

As respostas envolvem o aspecto metodológico porque a pergunta assim o indicava. Quando perguntamos sobre as dificuldades sentidas no processo de ensinar, elas entenderam no processo que se realiza o ensino, no fazer pedagógico em sala de aula. Apesar de classificar suas respostas como procedimentais, em seu interior, questões fundamentais de compreensão conceitual se apresentam.

Tornar a aula dinâmica e criativa implica compreender a relação desse aspecto com o conteúdo a ser ensinado, o que não é fácil quando se pretende que esse dinamismo promova conhecimento e não fique apenas na superficialidade. O ‘estabelecimento da relação entre conteúdos e jogos’ é um desafio a ser ultrapassado pelo docente, uma vez que não basta inserir o jogo e a brincadeira na sala de aula; é necessária uma inserção articulada com a organização curricular em andamento. Trabalhar o conteúdo, considerando o nível da turma, talvez seja um dos saberes mais complexo a ser conquistado pelo professor - significa saber o que a turma sabe, seu conhecimento real, criar zonas de desenvolvimento proximal para fazê-los saber mais.

É evidente que também identificamos nessas respostas, ranços de um ‘modismo pedagógico’, o qual assinala que as salas de aula devem ser alegres, motivadas, onde se aprende com prazer e felicidade, provocando nas professoras frustrações por não conseguirem alcançar tais expectativas, uma vez que as condições de trabalho e de formação não lhes possibilitam. E ainda, o mais importante – quem disse que aprender é sempre prazeroso e alegre? Aprender também exige esforço e trabalho, concentração e atenção, atividade mental e não necessariamente física.

Quanto às dificuldades dos alunos percebidas pelas professoras, em relação ao conteúdo de multiplicação temos:

Multiplicar números maiores que 6 (2ºP1);

Para chegar na multiplicação há necessidade de ter uma boa base de adição, assim, quando não ocorre uma aprendizagem significativa na adição ocorre a dificuldade de compreender a multiplicação. Solução de problemas (2ºP2);

Os déficits de aprendizagem dos alunos. Muitos alunos chegam ao 3º ano sem dominar a sequência numérica de 0 a 100, adição, subtração, etc. (2ºP3);

Desinteresse (3ºP1);

A dificuldade das crianças eu percebi que é a prática das atividades que são passadas, porque muitos não querem cumprir por já estarem cansados da rotina deles. As crianças tem o hábito de copiar a resposta e isso acomoda. Gosto de trabalhar em cima do erro então o aluno tem que tentar! (3ºP2);

Falta de interesse, desestímulo; Acreditar que não conseguem aprender; defasagem nos conteúdos. Defasagem em armar contas, operações com reservas. As crianças não acreditam em si (4ºP1);

As crianças chegam ao 5º ano sem o hábito de ler, consequentemente não querem resolver os problemas (5ºP1);

A tabuada (5ºP2).

Fazendo uma sistematização dessas respostas, vê-se que duas professoras atribuem o desinteresse dos alunos como dificuldade (3ºP1 e 4ºP1); 04 (quatro) professoras reclamam da falta de base anterior – 2ºP2, 2ºP3, 4ºP1, 5ºP1; 02 (duas) se referem à aprendizagem da tabuada (2ºP1 e 5ºP2); 02 (duas) se referem à resolução de problemas (2ºP2 e 5ºP1); 02 (duas) professoras ressaltam o hábito das crianças em duas perspectivas: de não lerem e de copiarem somente as respostas explicitadas pela professora (5ºP1 e 3ºP2). A professora 3ºP2 traz uma problemática que extrapola o universo da sala de aula – a escola com horário integral e o cansaço que provoca nas crianças.

Sabemos que aspectos relativos ao desinteresse e desestímulo não estão somente relacionados ao estudo da multiplicação, e as professoras que os destacaram, na questão anterior se referiram ao dinamismo na sala de aula. Estes comportamentos estão num contexto muito mais amplo que envolve sentido e significado no processo de aprender. Entretanto, cabe a reflexão sobre o que é proposto com a multiplicação – como esse conteúdo tem sido proposto? Qual sua significação para as crianças? As crianças se interessam por outros conteúdos matemáticos?

Leontiev (2010) discute que a atividade é mediadora do processo de desenvolvimento cognitivo, sinaliza que esta é movida por uma necessidade que se objetiva em um motivo. O

motivo de aprender a multiplicação precisa estar vinculado aos seus objetivos – o de compreender significados numéricos novos (proporção, área, fator escalar, função, combinação) para resolver situações-problema, interagir e ampliar a compreensão do mundo, extrapolando as vantagens internas ao processo escolar.

Voltando-se para as dificuldades relacionadas aos conhecimentos matemáticos – a base na adição e subtração, a sequência numérica até 100, a multiplicação de números maiores que 6, armar a conta ou a própria tabuada – se referem especificamente à aprendizagem do algoritmo e procedimentos de cálculo que precisam ser explorados, de maneira investigativa, conduzindo à observação de regularidades, discussão e compreensão do sistema de numeração decimal também relacionada a situações-problema.

Quanto à dificuldade na resolução de problemas, suas causas se devem muito mais pela ausência de um trabalho sistemático, específico, com diferentes situações que explorem significados na multiplicação do que a falta do hábito da leitura. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Na questão referente ao que tem sido feito para sanar as dificuldades relatadas, as professoras responderam:

Tenho utilizado muito material concreto, focalizando a adição de parcelas iguais. Coluna e linhas. Realizo bingos; vivenciando situações do dia-a-dia. Uma sugestão é utilizar, no 2º ano, problemas simples, usando o nome das crianças nos problemas. Representar também aquele problema no desenho, para representar melhor aquela situação; no bingo, usar situações com as crianças e solicitar a escrita das respostas. Utilizar situações não só no papel, mas lidar com problemas na fala, na oralidade (2ºP1);

Busco atividades (net) e materiais concretos (2ºP2);

Tentamos trabalhar com o concreto para provocar um maior domínio desses conteúdos (2ºP3);

Estabelecer o elo entre o ensino e a realidade, a presença da Matemática no dia-a-dia, mostrar a importância e o significado do que é aprendido, tornando útil o conhecimento (3P1);

É muito trabalhoso, mas eu procuro atender as dificuldades que aparecem individualmente quando acho tempo, mas nem sempre é possível (3ºP2);

Passar os conteúdos de forma tranquila e usando os alunos como os próprios instrumentos de ensino (4ºP1);

Tento contextualizar com o cotidiano a princípio surte efeito. Busco trabalhar com problemas que os levem a pensar, raciocinar (5ºP1);

Tento em todas as aulas procurar deixar meus alunos tranquilos e ensino com paciência, procurando muitas vezes tirar as dúvidas individualmente (5ºP2).

A partir das respostas, vimos que todas as professoras do 2º ano recorrem ao material concreto, enfatizando a ideia de adição de parcelas iguais, sendo que a professora 2P1 disse utilizar outras atividades como: bingos, situações do dia-a-dia com os nomes deles e a representação do problema em desenhos. Nessa direção, a professora 4P1 busca utilizar as crianças com instrumentos de ensino. A utilização do material concreto ou das crianças como instrumentos, nos anos iniciais é uma ideia bastante difundida, conforme Spinillo e Magina (2004). É importante, no entanto, estar atento para o seu objetivo: apresentar o conteúdo, realizar cálculos, entreter as crianças, ou outros, pois dependendo do objetivo pretendido, o registro pictórico pode favorecer o seu alcance. Em turmas pequenas, sua utilização tem sido para favorecer a contagem um a um.

Trazer o contexto e a realidade para o processo de ensino tem sido estratégia de 03 (três) professoras 2ºP1, 3ºP1 e 5ºP1, o que a preocupação com o sentido do conteúdo que está sendo ensinado. Em Matemática, embora os objetos sejam abstratos, para acessá-los precisamos de referentes para que os alunos possam atribuir sentido – no caso, situações do contexto das crianças. Durante a discussão no grupo, uma professora chegou a relatar a problematização feita como a situação cotidiana de consumo de pães por pessoa, em uma determinada família, durante um dia. Nesse caso, podemos até inferir uma aproximação com a realidade das crianças, mas é importante estarmos atentos para inúmeras situações que os professores utilizam pensando estar contextualizando, mas se constituem em situações artificiais e inadequadas para as crianças.

A tranquilidade e a paciência são qualidades do trabalho pedagógico destacadas por duas professoras – 4ºP1 e 5ºP2 - e o atendimento individual é utilizado pela professora 3ºP2 quando tem tempo. Esses aspectos contribuem fortemente para a gestão da sala de aula, proporcionando um clima de confiança e respeito. Conforme discutiremos mais adiante, esses aspectos serão fundamentais para que a criança exponha seu pensamento e expresse suas estratégias de resolução de problemas, seja oralmente ou por escrito.

Durante o segundo encontro com o grupo de professoras, adentramos na temática do ensino de multiplicação. Por meio de um instrumento escrito (Apêndice C), solicitamos que as professoras relatassem os procedimentos utilizados no ensino de multiplicação, ressaltando o que achavam mais importante, buscando apresentar uma sequência de ações. Após a

aplicação desse instrumento, cada professora fez a apresentação oral no grupo sendo acrescentadas outras observações¹⁸.

6.2 O Ensino de Multiplicação

Antes de apresentar os dados relativos à forma de trabalho com a multiplicação de números naturais, das oito professoras participantes dessa pesquisa, evidenciamos um pequeno diálogo ocorrido no grupo, logo após ser proposta a atividade de relato sobre o ensino de multiplicação:

Pesquisadora: Gente! Nós vamos agora relatar como cada uma ensina a multiplicação.

5ºP2: Seria no caso, como a gente ensina a conta de multiplicar?

Pesquisadora: Não.

3ºP1: Como a gente ensina a multiplicação!

Silêncio.

Pesquisadora: Essa pergunta é muito interessante, 5ºP2.

5ºP2: Porque quando você fala em multiplicação, eu penso só na conta, como é que eu vou ensinar a armar a conta.

Pesquisadora: Vocês entenderam o que é?

3ºP1: A operação em si. O que ela envolve, o que ela trabalha...

2ºP1: A sua função, o papel dela diante do problema...

Pesquisadora: Percebeu 5ºP2?

Esse pequeno trecho é significativo para que compreendamos os níveis de compreensão que se tem sobre a multiplicação. Quando 5ºP2 questiona: “Seria no caso, como a gente ensina a conta de multiplicar?”, explicita-se a compreensão sobre a operação estando basicamente vinculada à aprendizagem do algoritmo. Posteriormente, ela mesma reitera: “Porque quando você fala em multiplicação, eu penso só na conta, como é que eu vou ensinar a armar a conta.” Porém, embora prontamente tenhamos respondido “não” à sua pergunta, no grupo, duas professoras complementam a questão, evidenciando uma compreensão mais ampliada da operação – “A operação em si. O que ela envolve, o que ela trabalha.” (3ºP1); “A sua função, o papel dela diante do problema.” (2ºP1). Essas professoras evidenciaram uma compreensão maior sobre a operação de multiplicação, não se restringindo ao procedimento de cálculo.

O relato das professoras sobre como promovem o ensino de multiplicação nos favoreceu elencar algumas categorias para análise: a sequência utilizada, os significados da

¹⁸ As respostas desse instrumento foram transcritas no Anexo A, complementadas com a exposição oral de cada professora.

multiplicação, a resolução de problemas, os materiais, os jogos e brincadeiras, os tipos de cálculo e as representações semióticas¹⁹. Destes aspectos, alguns estão mais evidentes, outros menos e outros em algumas sequências realmente ausentes, o que pode ser analisado também, devido a sua importância para o ensino dessa operação.

6.2.1 A sequência

Para visualizar melhor as sequências trabalhadas pelas professoras, fizemos um resumo, a partir dos relatos de cada professora (Quadro 4), dando um caráter de lista, o que nos ajuda a visualizar uma sequência de ações.

Quadro 4 - Resumo das sequências de trabalho com a multiplicação

Prof ^a	Sequência trabalhada
2P1	Exploração do significado no dicionário: o que é multiplicar? Gravuras com contexto de adição de parcelas iguais; Gravuras e objetos que possuam linhas e colunas (dama, caixa de ovos, frente de um edifício, tijolos com furos, fileiras da sala); Treino com problemas ilustrados e com números.
2P2	Trabalho com agrupamentos (análise quantos grupos; registro escritos na adição e multiplicação); Quadro Valor de Lugar – cálculo; Problemas com materiais que se repetem (lápiz de cor, cadernos, fileiras); Problemas com situações de roupas – associações.
2P3	Apresentação da multiplicação como adição de parcelas iguais; Problemática do cotidiano em que seja necessário dobrar, triplicar... A operação e os sinais ($\times$, $=$); Situações de formar conjuntos (sementes, tampas, palitos); Representação dos conjuntos com numerais e o resultado final; Registro no caderno.
3P1	Trabalho com as ideias de multiplicação; Resolver adição de parcelas iguais (materiais concretos); Ideias de dobro e triplo; ênfase que a multiplicação e a adição implicam em quantidades maiores (exceto por 0 e por 1), diferente da subtração e divisão; Cálculo de algoritmos; Solução de problemas (leitura e interpretação), destacando a palavra-chave e solicitando para os alunos se imaginarem nos problemas.
3P2	Contação de uma historinha ou problema, instigando o raciocínio e a participação; Formação de grupos com materiais da sala (gravuras, tampinhas, bolinhas); Continhas no quadro com a resolução pelas crianças;

¹⁹ Este aspecto será apresentado e discutido no Capítulo 7.

	Trabalho com o livro didático.
4P1	Mostra a importância e contextualização da multiplicação; Relação entre adição e multiplicação, utilizando materiais concretos para a solução de multiplicações; Pesquisas em supermercados; Jogos com a multiplicação; Lista de problemas – desafios.
5P1	Inicia com uma situação-problema com adição de parcelas iguais; Explora o cálculo de várias maneiras, sem precisar ‘decorar’; Construção da tabuada com os alunos; Motivação com jogos e brincadeiras.
5P2	Associação entre adição e multiplicação; Trabalha com a tabuada, mas não de maneira sequenciada; Cria situações para que usem a tabuada sem perceberem que estão usando.

A sequência que cada professora assume ao ensinar o conteúdo da multiplicação nos remete ao processo de ordenamento e priorização de cada uma em seu fazer pedagógico, implicando em compreensão do que é mais importante para a aprendizagem das crianças. Tal compreensão não é simplesmente construída de maneira individual, mas condiz com entendimentos acerca de currículo que permeiam a formação docente e as práticas escolares.

Um aspecto mais geral observado é a apresentação da multiplicação como uma versão da adição, utilizando-se de materiais de contagem para formação de grupos, correspondendo às atividades primeiras das sequências. Chama-nos a atenção o uso do dicionário da professora 2ºP1 e o trabalho com as ideias de multiplicação, da professora 3ºP1, as quais evidenciam a preocupação em apresentar definições verbais – conceitos científicos sobre o conteúdo a ser ensinado, precedido da manipulação de materiais.

A palavra carrega a capacidade de generalização no processo de comunicação, embora esta se configure em níveis diferenciados. Segundo Vigotski, a “palavra nunca se refere a um objeto isolado mas a todo um grupo ou classe de objetos. Por essa razão cada palavra é uma generalização latente, toda palavra já generaliza e, em termos psicológicos é antes de tudo uma generalização” (VIGOTSKI, 2009, p. 9).

Em outro momento, tem-se o registro escrito do que foi representado com o material manipulável, com o trabalho com o algoritmo e, por fim a proposição de problemas. Essa ordem é verificada nos relatos das professoras 2ºP1, 2ºP2, 3ºP1 e 4ºP1. No caso das sequências de 2ºP3, 3ºP2, 4ºP1 e 5ºP1 um problema ou uma história, aparece como desencadeadora do trabalho com a multiplicação, evidenciando a necessidade de

contextualizar o conceito, porém, ao observarmos o restante das suas sequências, vemos que os problemas a serem resolvidos pelas crianças serão aplicados após o trabalho com o algoritmo formal.

Embora identifiquemos algumas semelhanças na ordem das sequências, ressaltamos a variedade e maleabilidade na organização pedagógica de cada turma. Referindo-se às vantagens do sistema escolar japonês, Isoda e Olfos (2011) assinalam que a razão para o sucesso alcançado por lá, talvez esteja na coerência interna presente nas orientações propostas aos professores. Na proposta curricular daquele país, identifica-se uma atenção especial ao princípio da extensão no ensino – inicia-se com o produto entre números discretos, com unidades de medidas, seguida das tabelas de multiplicar com números e 1 a 5, depois de 6 ao 9, por 10 e potências de 10; as propriedades da multiplicação com números pequenos, com números grandes (ISODA e OLFOS, 2011).

Das sequências apresentadas, destacamos dois pontos importantes – o trabalho com o manuseio de materiais e a resolução de problemas. Da ênfase na manipulação de materiais no início da sequência, compreendemos dois aspectos: um positivo, visto que essa manipulação favorecerá a contagem um a um ou por grupos, proporcionando referentes reais aos cálculos, e outro negativo, visto que o que está sendo manipulado e vivenciado é a contagem de quantidades e não necessariamente situações contextuais. Para a contextualização de situações-problema, poderiam utilizar dramatizações, dobraduras, jogos, entre outros. O outro ponto, sobre a resolução de problemas como aplicação do conteúdo trabalhado no final das sequências, contribui para que a criança associe o problema a uma conta determinada, visto que se propõem problemas para aplicar algoritmos, aspecto negativo, discutido por Moro (2005), Diniz (2001).

6.2.1 Os Significados

Referindo-se aos significados explorados, sobressai aquele relativo à adição de parcelas iguais ou grupos iguais. Em todas as turmas a multiplicação é apresentada às crianças como “forma simplificada de adição” (5ºP1), sendo enfatizada a relação de continuidade entre essas duas operações, como bem ilustra a fala da professora 5ºP2: “Eu ensino a operação da multiplicação após a adição, porque quando o aluno aprende a somar se torna mais fácil associar a multiplicação, por exemplo: $2+2+2=6$, quantas vezes foi somado o dois? Três vezes, que dará 6”.

Em duas turmas de 2º ano, aparecem indícios de outros significados da multiplicação, como a ideia de área, no exemplo dado sobre objetos que contenham arranjos com linhas e colunas (damas, caixa de ovos, tijolos) (2ºP1) e a combinatória, no exemplo sobre as ‘associações’, na fala da professora 2ºP2. Segundo Van de Walle (2009d), trabalhar o arranjo não significa, necessariamente, explorar o conceito de multiplicação como o produto de medidas que conduz ao conceito de área, pois se está explorando quantidades discretas.

Embora tenhamos no Brasil um documento curricular, publicado em 1987, que aponta para o trabalho com a multiplicidade de significados da multiplicação – os PCN de Matemática, esta orientação não foi apropriada pelo o grupo de professoras com as quais trabalhamos.

Conforme discussões já feitas, não podemos negar que a multiplicação tem relação estreita com a adição, configurando-se, numa continuidade, principalmente para o processo de cálculo. No entanto, essa operação significa também uma ruptura e descontinuidade com a adição, ao oportunizar a criança a aprendizagem de novos conceitos como proporcionalidade, área, combinatória, como destacamos em nossa discussão teórica.

Outros conceitos matemáticos são explorados, como a relação entre multiplicação e divisão, que aparece no relato da professora 2ºP2; o sistema de numeração para a explicação do algoritmo, trabalhando-se mais especificamente com o quadro valor de lugar – QVL, nas sequências de 2ºP2 e 3ºP2; as ideias de dobro, triplo, quádruplo, em 2ºP3 e 3ºP1. Na sequência da professora 3P1 um aspecto merece reflexão: a ideia repassada às crianças que a multiplicação juntamente com a adição conduz sempre a resultados maiores, exceto quando se trabalha com o fator 0 (zero) e 1 (um), o que influencia diretamente na formação do conceito de multiplicação de maneira equivocada.

Essa afirmação só é verdadeira quando lidamos com o conjunto dos números naturais, pois com números racionais, podemos ter $2 \times 0,5 = 1$ ou ainda $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ nas quais os resultados não foram maiores que os fatores. Esse é um aspecto importante de ressaltar, pois tem interferido enquanto obstáculo didático, conforme D’Amore (2007a), na aprendizagem dos números racionais, tanto na forma decimal quanto fracionária.

D’Amore (2007a) apresenta três tipos de obstáculos que podem interferir na aprendizagem de conceitos matemáticos: os obstáculos ontogenéticos, epistemológico se os didáticos²⁰. Os de natureza ontogenética envolvem tanto aqueles referentes às patologias quanto to aqueles referentes à maturidade do sujeito. O obstáculo epistemológico indica uma

²⁰ A discussão sobre os tipos de obstáculos que interferem no processo de aprender Matemática é bastante complexa. Para maior aprofundamento ver D’Amore (2007), Brousseau (1976).

dificuldade “quando na história de um conceito se percebe uma não continuidade, uma ruptura, mudanças radicais de concepções, então se supõe que tal conceito possua no seu interior obstáculos de caráter epistemológico” (D’AMORE, 2007a, p. 214). Esses se constituem obstáculos tanto para serem concebidos, aceitos como aprendidos por matemáticos e estudiosos.

Os obstáculos de natureza didática são provocados pela escolha equivocada de uma sequência didática ou de um projeto didático, por exemplo, afirmar que a multiplicação sempre aumenta pode significar um obstáculo didático que mais tarde quando a criança lidar com números racionais terá de rever, pois se pode ter um multiplicando e/ou multiplicador não naturais.

6.2.3 Materiais utilizados

As sequências apresentadas nos anos até o 4º ano apresentam um tópico específico referente ao uso de material concreto, utilizado especificamente para a formação de grupos com quantidades iguais, enfatizando a ideia de adição de parcelas iguais. O material concreto serviria basicamente “para solucionar as multiplicações” (4ºP1), ou seja, eles teriam a função de facilitar o cálculo, no processo de contagem das quantidades de cada grupo para a obtenção de um total. No caso da professora 2ºP1, a justificativa maior para seu uso é que as crianças se encontram na fase operacional concreta, fazendo referência direta às etapas piagetianas acerca do desenvolvimento cognitivo.

Sobre a necessidade do material concreto/manipulável nos anos iniciais, Spinillo e Magina (2004) alertam para o seu mito junto aos professores. Segundo essas autoras, não é a presença ou o manuseio do material que promove a compreensão, mas os referentes que são atribuídos à linguagem da Matemática. Se o material concreto tem a função de representar as quantidades para facilitar o cálculo, este também pode ser substituído por gravuras e desenhos, como é sugerido pelas sequências das professoras 2P1 e 3P1. Por outro lado, tem-se a ausência de materiais que potencializariam o trabalho com a multiplicação envolvendo outros significados – a tabuada, a malha quadriculada, o geoplano e jogos específicos, como o jogo das argolas, quatro em linha, entre outros²¹.

²¹ Ver Rêgo e Rêgo, ano, em seu livro de jogos matemáticos - Matematicativa.

6.2.4 Resolução de problemas

A resolução de problemas envolvendo a multiplicação aparece em quase todas as sequências, à exceção da apresentada pela 5ªP2, o que é revelador, visto que foi essa professora que expôs que quando pensa nessa operação, ‘só pensa na conta para ser armada e resolvida’. As outras 07 professoras propõem problemas em dois momentos distintos: como um momento inicial, de motivação e introdução ao tema, e como aplicação do procedimento algoritmo ensinado. Para o primeiro caso temos os relatos:

Apresento uma problemática envolvendo situações do cotidiano dos próprios alunos em que se faça necessário dobrar, triplicar, quadruplicar... quantidades e só depois apresento a operação com os sinais de vezes, igual e a pergunta final (2P3).

Início com uma historinha, invento na hora, envolvendo a situação real deles, se não for a historinha invento um probleminha (o mais básico possível, do simples para o complexo... (3P2).

Começo a mostrar que no dia-a-dia eles já vivem a multiplicação mesmo sem saber identificá-la e isso é importante. Por exemplo: Quantas pessoas tem na sua casa? Cada um come quantos pães? E se são 8 pessoas, cada um come dois pães, quantos pães são consumidos? Já vai começando associar a adição com a multiplicação (4P1).

Nos relatos destas professoras o problema é assumido como um elemento de motivação, de ponto de partida para o ensino do conteúdo, não como um ‘caminho’ para ensinar e aprender Matemática. Porém, embora o problema assuma tal função, ele não é retomado em outro momento com um trabalho direcionado ao conteúdo procedimental de resolver problemas multiplicativos. Isso fragiliza a compreensão de outros significados da operação que nos é dada pela diversidade de situações.

Para o segundo grupo, o da perspectiva do problema para aplicação do conteúdo estudado, tem-se a proposição de listas de problemas pela professora 4ªP1, ao final de sua sequência, e o ‘treino’ com problemas, após realizar agrupamentos, registros e cálculos, das professoras 2ªP1 e 2ªP2:

(...) E posteriormente, treinar a compreensão do multiplicar em probleminhas que envolvam diversas situações do cotidiano dos alunos, inclusive com o nome deles, para que fiquem mais entusiasmados (2ªP1);

(...) Em seguida passo a fazer problemas com materiais que se repetem na sala; lápis de cor, cadernos, carteiras e filas; vou colocando tudo o que vejo para chamar a atenção e estimulando-os a pensarem e resolver (2ªP2).

Diniz (2001, p. 89), ao descrever a perspectiva metodológica do trabalho com a resolução de problemas, afirma que ela “envolve mais do que aspectos, puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, conseqüentemente do que significa aprender”, extrapolando a proposição de problemas convencionais, aplicados após o ensino de determinado conteúdo, chegando-se a explorar os problemas não convencionais ou abertos, conforme Dante (1989).

Sobre uma intervenção docente na direção de ensinar as crianças a resolverem problemas, a professora 3ºP1 relata: “Trabalho o cálculo dos algoritmos e na solução de problema busco enfatizar a leitura e a interpretação deles, destacando palavras-chave e a ideia de uma quantidade maior”.

O destaque de palavras-chave correspondente a cada operação no procedimento da resolução de problemas não contribui para que a criança busque a compreensão completa da situação-problema e se constitui um equívoco quando os professores a enfatizam, conforme Van de Walle (2009d).

Desta forma, pensando em facilitar a vida acadêmica dos alunos, os professores impedem que eles realizem uma análise geral do problema, atribuindo sentido ao contexto e às informações presentes como um todo e não a palavras isoladas.

Numa outra direção, pensando em ajudar as crianças a conceituarem a multiplicação a partir dos problemas, atribuindo-lhe sentido, a mesma professora 3ºP1 escreveu: “Incentivo os alunos a se imaginarem nos problemas, até mesmo como o personagem principal em meio a uma situação” (...). E na discussão no grupo acrescentou: “Eu gosto muito de situações que eles possam se sentir dentro do problema, às vezes me coloco dentro do problema, me transformo em personagens, uso os materiais deles”. Essa possibilidade de inserir-se na situação problemas contribui para que se construa uma representação mental do conteúdo na situação, além de servir como estratégia motivadora.

6.2.5 Jogos e brincadeiras

Somente a professora 5P1 fez referência a jogos e brincadeiras envolvendo a multiplicação, apesar de não ter especificado quais os jogos de que tem feito uso. Os jogos/brincadeiras que exploram a multiplicação estimulam o cálculo mental dos fatos fundamentais da multiplicação, sugerindo-se que sejam aplicados com a função de fixar o conteúdo e contribuir na memorização dos fatos básicos da multiplicação por meio de situações lúdicas.

6.2.6 Os tipos de cálculo

Dos diferentes tipos de cálculo (escrito, mental, estimado e com a calculadora), evidenciou-se o cálculo escrito em todas as turmas. Com as etapas iniciais para a compreensão do algoritmo, evidenciaram-se: formação de grupos/conjuntos, adição de parcelas iguais, uso do quadro valor de lugar – QVL, contas no quadro, uso de algoritmos, construção da tabuada. Destacamos que a construção da tabuada foi citada apenas por uma professora do 5º ano, porém com muitas ressalvas.

O cálculo mental não foi sequer mencionado nos relatos e nas discussões propostas e o uso da calculadora para apoio ao cálculo escrito e à resolução de problemas foi mencionado e/ou questionado, em algumas conversas no grupo. Voltaremos a esse ponto mais adiante, visto sua importância para o ensino de multiplicação.

Após a apresentação e discussão dos relatos de cada professora sobre o ensino de multiplicação, duas questões necessitavam de mais esclarecimento – uma se referia aos significados de multiplicação que as professoras possuíam e a outra se relacionava à tabuada e outras representações semióticas que se utilizam para ensinar a multiplicação. Esses aspectos se relacionam diretamente com os descritores avaliativos presentes na Prova Brasil, realizada pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, os quais se referem à compreensão da multiplicação – de seus diferentes significados e ao cálculo escrito por meio de um algoritmo formal.

Para a primeira questão, realizamos a atividade do Apêndice D, na qual solicitávamos a elaboração de problemas de multiplicação. Para a segunda questão indagamos o porquê de a tabuada estar presente apenas nas sequências do 5º ano e a sua necessidade/importância para o ensino de multiplicação. Essa segunda questão nos levaria mais uma vez à discussão das representações semióticas no ensino de multiplicação, especificamente os tipos de cálculo.

6.3 Os Significados de Multiplicação a partir da Elaboração de Problemas

Para termos mais informações sobre a compreensão das professoras acerca da multiplicação, solicitamos que cada uma elaborasse três situações problemas envolvendo esta operação.

Todos os problemas elaborados foram descritos a partir da configuração proporcional, inerente aos problemas do grupo de isomorfismo de medidas (VERGNAUD, 2009) embora, de acordo com os PCN Matemática, três significados possam ser identificados nos problemas elaborados pelas professoras: comparação, proporção e configuração retangular. Somente um

problema elaborado (5ºP2) não correspondeu à operação de multiplicação, porque a pergunta não se referiu à uma relação entre duas variáveis, mas a uma quantidade já informada no problema.

A professora 2ºP1 elaborou dois problemas com a ideia de comparação – a e c, e um com a ideia de proporção. No problema da letra a, a unidade de referência é a turma do 2º ano e no problema c, a quantidade de livros que as meninas têm.

- *A turma do 2º ano tem 21 alunos. Se chegasse o dobro de crianças nessa turma, com quantos alunos ela ficaria?* (comparação)
- *Professora Geruza tem uma caixa de lápis de pintar com 12 lápis. Se ela comprar mais 2 caixas, com quantos lápis ela vai ficar?* (proporção)
- *As meninas do 2º ano possuem 10 livros infantis, enquanto que os meninos tem o triplo dessa quantidade. Quantos livros os meninos tem?* (comparação)

Organizando na configuração proporcional de Vergnaud (2009) temos:

	Turma	21 alunos	1 caixa	12 lápis	meninas	10 livros
a.	Dobro	?	b.	2 caixas	c.	Tripla
				?		?

A professora 2ºP3 elaborou dois problemas com a ideia de proporção e um com a ideia de comparação:

- *Pedro traz para escola todos os dias 2 salgadinhos, em 5 dias quantos salgadinhos Pedro come?* (proporção)
- *Mariana tem 8 bonecas, Júlia tem três vezes mais bonecas que Mariana. Quantas bonecas Júlia têm?* (comparação)
- *No pátio da escola tem 12 bicicletas, quantas rodas podemos contar?* (proporção)

No primeiro problema, a relação de dois salgados por dia deverá ser identificada pelo respondente, bem como a relação duas rodas por bicicleta, estando essas informações, portanto, implícitas. Nesse grupo aparece a medida de tempo no termo ‘dia’.

Na organização da configuração proporcional, temos:

	1 dia	2 salgados	Mariana	8 bonecas	1 bicicleta	2 rodas
a.	5 dias	?	b.	3 vezes mais	c.	12 bicicletas
				?		?

A professora 3ºP1 formulou todos os problemas com o significado de proporção.

- Se numa partida de basquete a equipe vencedora marcou 27 cestas de 2 pontos e 13 de 3, quantos pontos ela fez?
- Carlos comprou 2 álbuns de figurinhas. Sabendo que em cada álbum há 30 espaços, quantas figurinhas são necessárias para completar os 2 álbuns?
- João tem 2 cédulas de R\$10,00 e Jorge 4 cédulas de R\$5,00. Quanto cada um tem?

Nos problemas a e c, ela propôs dois momentos para a resolução, o primeiro no qual se encontram os valores de pontos obtidos das cestas de 2 e 3 pontos e, em seguida, a totalização de pontos. No problema c, o conteúdo de sistema monetário aparece e, pelo fato da informação de uma cédula não estar explícito, tende-se a pensar em um problema como adição de parcelas iguais.

Organizando na configuração proporcional, temos:

	1 cesta	2 pontos		1 álbum	30 espaços		1 cédula	10,00
a.	27 cestas	?	b.	2 álbuns	?	c.	2 cédulas	?

Nos problemas elaborados pela professora 3ºP2, dois se referem à proporção (a e c) e o problema b dá indícios de configuração retangular, visto que fica evidente a disposição espacial das carteiras em fileiras.

- Maria ganhou 3 caixas de chocolate do seu avô. Cada caixa tinha 21 bombons. Quantos ela ganhou ao todo?
- A sala de aula de Tia Ju tem 5 fileiras de carteiras, com 6 carteiras cada fileira. Quantos alunos cabem nesta sala de aula?
- Eu tenho 3 caixas de lápis, 1 de cor, 1 hidrocor e 1 giz de cera. Cada caixa tem 12 lápis. Quantos lápis eu tenho no total?

Na configuração proporcional, temos:

	1 caixa	21 bombons		1 fileira	6 carteiras		1 caixa	12 lápis
a.	3 caixas	?	b.	5 fileiras	?	c.	3 caixas	?

A professora do 4º ano só elaborou dois problemas:

- Ana saiu de João Pessoa para visitar seus pais em Sousa, ela gasta 285,00 reais de combustível na ida. Quanto ela gastaria se visitasse seus pais duas vezes por ano?

- *João tinha 45 bolas de gude em sua coleção e seu irmão Rui possuía o triplo. Quantas bolas de gude Rui têm?*

O primeiro problema envolve o valor monetário referente a gastos com combustível proporcional a um trecho de viagem – a ida, necessitando que se identifique a informação implícita de que cada viagem envolve a ida e a volta, tendo-se 4 trechos para duas viagens por ano. O segundo problema refere-se a uma comparação entre as quantidades de bolas de gude de duas pessoas.

Na organização proporcional, temos:

	1 trecho	285,00		João	45 bolas
a.	4 trechos	?	b.	Rui, o triplo	?

Os problemas elaborados pela professora do 5º ano 2 foram:

- *Laura foi na loja de sapatos comprar tênis para seus três filhos, comprou 4 pares para cada filho. Quantos pares ganhou cada filho?*
- *Uma televisão pode ser comprada numa loja em 12 prestações R\$ 112,00. Qual o valor total desta televisão? (proporção)*
- *Para fazer a festa de aniversário da Polizinha, minha amiguinha aqui presente, encomendei 2 centos de brigadeiro, cada brigadeiro custou R\$ 0,25, 75 beijinhos, cada um custou R\$ 0,25 e 90 empadinhas, cada uma custou R\$ 0,60. Quanto gastei? (proporção)*

O primeiro problema não correspondeu ao conteúdo de multiplicação, visto que a resposta da pergunta já consta no próprio enunciado: *Quantos pares ganhou cada filho?* Os outros dois problemas envolveram compras e valores em dinheiro, sendo que no problema c, além de serem necessários vários procedimentos, o cálculo dos valores correspondentes aos brigadeiros, beijinhos e empadas, foi usado o número racional na forma decimal – 0,25 e 0,60, correspondendo a centavos de real. No problema c, ainda identificamos um termo usado no mercado de doces – o ‘cento’ que precisa ser compreendido pela criança.

Na configuração proporcional:

		1 prestação	112,00		1 brigadeiro	0,25	
a.	Não envolveu a multiplicação	b.	12 prestações	?	c.	2 centos	?

Embora tenha sido formulado um problema que se aproxima do significado da configuração retangular, em sua maioria, os problemas nos levam a ideia de proporção e a ideia de comparação, de acordo com os PCN.

Embora este documento curricular tenha sido publicados em 1997, com as orientações referentes ao trabalho com os variados significados da multiplicação, bem como servindo de referência para o Sistema de Avaliação Básica – SAEB, com um descritor específico envolvendo problemas, não há uma compreensão sobre essa variedade de significados e portanto, nem um trabalho sistemático, visto que em suas proposições de problema multiplicativos, as professoras não consideraram as ideias de combinatória e de configuração retangular.

Van de Walle (2009d), quando se refere às classes de problemas multiplicativos, afirma que duas classes são pouco mencionadas na maioria dos currículos: os problemas de combinações ou produtos cartesianos e problemas de produto de medidas (área). Só esclarecendo que para esse autor, embora os problemas de configuração retangular tragam sirvam de ponto de partida para o trabalho com área, eles ainda carregam a noção de grupos com quantidades iguais. No entanto, para ele, os arranjos – “organização de coisas em fileiras e colunas” (p.180), principalmente no papel quadriculado funcionam como um modelo para trabalharmos a propriedade distributiva da multiplicação.

Outro aspecto a considerar é que na formulação dos problemas, em sua maioria, os dados estão apresentados de forma direta, conduzindo a uma interpretação a partir da correspondência um-para-muitos, base da relação proporcional.

6.4 Os diferentes tipos de cálculo e a multiplicação - o cálculo mental, o cálculo escrito e com a calculadora

Culturalmente, quando nos referimos aos procedimentos algorítmicos de multiplicação e de divisão, o cálculo mental é enfatizado por meio da aprendizagem da tabuada²², uma vez que sua compreensão e memorização agiliza tais procedimentos de cálculo.

Historicamente, a utilização da tabuada ou as tabelas de multiplicar, ou ainda, os fatos fundamentais da multiplicação, tem carregado o peso do aspecto mnemônico descontextualizado, mecânico e repetitivo. No entanto, todo esse processo autoritário e penoso, ocorrido por meio de pressões e violência simbólica e física (com o uso da palmatória, na escola de décadas passadas), que permeou a aprendizagem da tabuada de

²² Também conhecida como tabelas de multiplicação.

multiplicação, não exclui, nos dias de hoje, a vantagem da compreensão desses fatos fundamentais para o processo de aprendizagem da operação. O que precisamos buscar é um processo didático que não se baseie no simples condicionamento, mas no desenvolvimento da memória, embasado em regularidades lógicas e em estratégias a partir das regras do sistema de numeração decimal e propriedades das operações aritméticas.

Nos relatos das professoras, o trabalho sistemático com o cálculo mental e aprendizagem dos fatos fundamentais estão simplesmente, ausentes. No instrumento 2, no qual perguntamos sobre as dificuldades no ensino de multiplicação, a professora 2ºP1 aponta como sua maior dificuldade: “desenvolver estratégias para trabalhar as tabelas de multiplicação de forma mais dinâmica” e ao se referir às dificuldades dos alunos, ela retoma a dificuldade de “multiplicar números maiores de 6”.

A professora 5ºP2 chega a afirmar que a tabuada é a maior dificuldade dos alunos no ensino de multiplicação, e na discussão sobre como cada uma ensina a multiplicação, somente as professoras desse ano se referiram à utilização da tabuada como necessária ao processo de ensino.

Para facilitar o cálculo mostro várias maneiras na hora de se calcular a multiplicação, **sem ser preciso decorar a tabuada**, e na hora do cálculo eles montam a tabuada. Fazendo com que eles percebam que o multiplicando vai ser somado com o resultado da multiplicação: ex: $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$. (5ºP1)

Parto das parcelas iguais para depois chegar à multiplicação usando a tabuada. **Não é apresentada sequenciada**, eu crio junto com eles situações para que possam usar a tabuada sem perceber que estão usando. (5ºP2)

Grifamos alguns pontos das falas porque embora essas professoras assumam que trabalham com a tabuada, é evidenciada uma posição de receio e ressalvas: “(...) sem ser preciso decorar a tabuada”, o que indica que não é bem visto ‘decorar’ a tabuada ou sabê-la de memória. A afirmação “Não é apresentada sequenciada”, é uma forma de nos dizer: “não queremos que eles memorizem”!

De uma maneira geral, durante o curso sentimos resistência por parte das professoras em assumir um trabalho efetivo com os fatos fundamentais da multiplicação, evidenciando a ausência de ações mais sistemáticas nessa direção. Mesmo as professoras do 5º Ano, quando falam do uso da tabuada, demonstram receio em assumir a contribuição do processo de memorização, conforme já discutimos anteriormente.

Mas por que não explorar a tabuada nas turmas do 2º, 3º e 4º anos? Será, de fato, que não se explora? Que compreensão essas professoras têm do trabalho pedagógico com a

tabuada? E por que essa resistência ao processo de memorização e apreensão dos fatos fundamentais? É possível um trabalho efetivo e significativo com as crianças dos fatos fundamentais da multiplicação? Para responder essas questões, foram promovidos debates no grupo de discussão, iniciados no 3º encontro. Da primeira discussão²³, ressaltamos o seguinte trecho:

Pesquisadora - Vamos problematizar um pouco sobre a tabuada – por que só apareceu na fala das professoras do 5º ano? Por que ninguém mais falou?

5ºP1: Porque é tradicional.

2ºP1: Na verdade, eu acho que o termo tabuada só não foi enfatizado, mas ela é trabalhada de formas variadas, dentro de situações-problema, com materiais concretos, mas não foi usado o termo tabuada.

Pesquisadora - Tu concorda 4ºP1, com 2ºP1?

4ºP1 - Com certeza. Na verdade quando você disse assim o termo tabuada em si...

3ºP1: Eu não trabalho essa questão da construção da tabuada.

2ºP3: Eu não trabalho no 2º ano a tabuada pronta, não!

5ºP1: Se você trazer uma maneira mais dinâmica de trabalhar a tabuada, era bom ser apresentado, né?

2ºP1: Assim, tem coisas que podem ser feitas, mas não dá para deixar de lado algumas coisas tradicionais...

Como justificativa para não se referirem à tabuada, a professora 5ºP1 falou que é porque ela é tradicional, evidenciando como é marcante a experiência histórica construída nas escolas com o ensino da tabuada, o que contraria as recomendações dos PCN de Matemática (BRASIL, 1997), conforme discutido em nosso referencial teórico.

No trecho de diálogo entre as professoras, também percebemos a negação e a afirmação do uso desse instrumento. A professora 2ºP1, inicialmente justifica que apenas o termo não foi enfatizado, mas que ela é explorada em diferentes situações. Em contrapartida, as professoras do 3º e 2º ano (3ºP1 e 2ºP3) dizem não trabalhar a construção da tabuada nem com ela pronta, respectivamente.

Enquanto a professora 5ºP1 informa que não se falou nesse instrumento porque ele tem o caráter tradicional, a professora 2ºP1 diz que “não dá para deixar de lado algumas coisas tradicionais”, voltando a afirmar o seu uso e sua compreensão de que a tabuada tem, para ela, esse caráter. Retomamos então esse termo:

Pesquisadora - O que vocês estão se referindo à tradicional?

2ºP1, 5ºP1, 2ºP3 - A sequência, a tabelinha em si, a tabuada pronta...

Pesquisadora – É tradicional, a tabela?

2ºP1: A tabelinha em si, eu acho.

2ºP3: Só com os numerais seria tradicional, porque a criança do 2º ano, ela só compreende se tiver a situação concreta, o material concreto... se

²³ Para melhor análise dessa primeira discussão, separaremos por trechos.

mostrasse uma tabuadinha daquela pronta para ela completar, ela poderia até completar, mas não saberia porque chegou aquele resultado.

5ºP2: Muito diferente do aluno do 5º.

2ºP3 – Bem diferente, mas no 2º ano trabalhar e até montar a tabuada... eu não sei! Nunca tentei...

Pesquisadora - Então, vocês tão entendendo a tabuada como ela já pronta, é isso?

Vários – Sim, exato! (3ºP1, 2ºP1, 2ºP3)

Nessa parte do diálogo, é ratificado o que a professora 5P1 já havia assinalado – que se tem uma visão da tabuada como algo tradicional e, por isso, negativo. O que transparece ser tradicional para as professoras não são as posturas assumidas pelo professor e, portanto, sua prática pedagógica, mas o instrumento tabuada - pronta e completa. Nesse sentido, é como também se fosse tradicional um texto pronto ou outro material já elaborado.

Na fala de 2ºP3, que nunca tentou explorar a tabuada, o fato de ter somente numerais seria tradicional porque para crianças do 2º ano dever-se-iam ter situações e materiais concretos. Ora, a necessidade de ter referentes é uma boa justificativa para a aprendizagem de operações numéricas nos anos iniciais, mas isso não invalida o trabalho com a tabuada, pelo contrário, o enriquece.

Nesse outro trecho a ênfase da professora 3P1 revela que trabalha a tabuada, mas de outra forma, ou seja, ela está presente de fato, mas não é assumida:

5P2: Mas eu uso nas contas, a tabuada.

3P1: Eu trabalhei uma atividade de sequência de números de 2 em 2, você tá trabalhando a tabuada aí, mas não necessariamente aquele conceito de 2x1, 2x2, 2x3, 2x4...

Pesquisadora – Ah! Então aqui tem outro conceito de tabuada! Percebe, quando você diz: eu tô trabalhando a tabuada aí?

3P1 – É, mas eu não trabalho com aquela construção da tabuada pronta, aquela sequência não...

Pesquisadora – Percebe?A gente tá dizendo que tabuada é aquela coisa pronta ou a gente tá dizendo que a tabuada é outra coisa?

2P3 – O que é mesmo a tabuada, hein Maria?

Pesquisadora – E então: o que é mesmo a tabuada?

Vários – Comentários e risos.

3P1 – Veja! tem uns meninos com a tabuada na mão que a mãe compra... eu tô falando dessa tabuada. Eu não trabalho essa construção de tabuada.

4P1: Já eu trabalho. Meu aluno precisa saber o cálculo $7 \times 8 = 56$, então eu sugiro que ele construa a tabuada até descobrir... então ele vai fazer o passo a passo, 8×1 , 8×2 , até chegar no 7, no 56... inicialmente, né?

Pesquisadora – Ok, certo. Então, ficou claro aqui que vocês, pelo menos as meninas que não são do 5º ano, tavam entendendo a tabuada como esse material pronto, a tabela pronta...

3P1 - Exatamente.

Pesquisadora - Aí por isso não se trabalha...

2P3 – Montando essa sequência, essa tabuada, não.

Inicialmente, o termo ou a prática com a tabuada na sala de aula sequer foram mencionados, após instigarmos explicitou-se que não se trabalha por ela ser tradicional, principalmente se ela ‘estiver só com números’. No entanto, outros elementos foram aparecendo: uma atividade na qual foi trabalhada a sequência de 2 em 2; a construção da tabuada pelas crianças do 4º ano. Então, agora se tem outro cenário: trabalha-se a tabuada, porém sem considerar sua sequência, ou trabalham-se os fatos fundamentais, mas de ‘maneira alternada’, quando é necessário fazer uma conta.

Nesse trecho da conversa, alguns significados se apresentaram: o da tabuada enquanto construção de uma sequência de fatos; o da tabuada pronta, encontrada para compra, e a tabuada que se trabalha no interior das atividades que exigem a resolução de equações multiplicativas. A organização dos fatos fundamentais em tabelas, considerando sua sequência, constitui um importante registro semiótico de ensino, com diferentes regularidades e propriedades. O processo de construção de tabelas pelos alunos é um espaço fecundo para a descoberta e análise das regras e relações presentes entre os fatores e os resultados, podendo-se variar o suporte de sua construção, como o uso do papel quadriculado, material manipulativo, sendo associado o desenho ou a colagem ao registro de cada fato fundamental enquanto equação multiplicativa.

Sobre a recusa em considerar a sequência dos fatos fundamentais, continuamos a problematização:

Pesquisadora – Ok, então em nenhum outro momento se monta essa sequência? É só no 5º ano?

2ºP2 – Não. Eu acho que monta.

5ºP2 – Eu não monto direto, eu monto assim; 8×4 , 8×9 ...

2ºP2 – É porque não se usa, no caso ela tá dizendo assim, porque não se usa a sequência. Eu uso, não a sequência. Eu não uso a sequência porque eu faço com que ele aprenda a calcular raciocinando, mesmo que seja contando...

2ºP1 – Para que não fique preso à sequência

2ºP2 - Sim. Para ele chegar a 2×6 ele não fique $2 \times$ nada, nada, 2×1 , 1; 2×2 , 2; 2×3 ... pra chegar a 2×6 . Não. Ele vai pensar porque 2×6 é $6 + 6$... 12.

Muitos aspectos podem ser extraídos desse diálogo que implicam a compreensão das professoras sobre a tabuada e seu uso no processo didático. As professoras estão preocupadas em possibilitar às crianças a compreensão do que significam as multiplicações, relacionando-as com a adição, ou seja, que elas saibam o significado de 2×6 , 5×2 , 8×4 , entre outras, mas a ideia delas se apropriarem mentalmente dos fatos fundamentais, parece ser incoerente com o que elas acreditam. Ou ainda: apropriar-se mentalmente dos fatos fundamentais

corresponderia a um processo mecânico e repetitivo, o que leva a negação de um trabalho sistemático com a sequência desses fatos.

Essa postura das educadoras tem raízes históricas, uma vez que há indícios de didáticas nas quais a memorização da tabela foi enfatizada sem que os alunos compreendessem o significado da operação e da função dos termos ali presentes – o multiplicando e o multiplicador. E mais, para dizer quanto corresponde 6×4 , a criança recitaria 6×1 , 6×2 , 6×3 até chegar naquele fato que ela estava precisando.

Quando Chamorro (2011) discute as dificuldades com a multiplicação na Espanha, aponta que um dos problemas enfrentados é o abandono do cálculo mental referente aos fatos fundamentais da multiplicação ou sua exploração de maneira insuficiente. A autora ainda ressalta que “o interesse de que os alunos memorizem os resultados das tabelas de multiplicar, reside em que ocorra uma transição do algoritmo da contagem para o processo de recuperação dos fatos numéricos na memória a longo termo” (CHAMORRO, 2011, p. 259). Essa conquista permitiria ao aluno mais tempo e recurso investido e menos erros cometidos. Além da maior possibilidade da criança se perder na contagem um a um, com o tempo demandando para esse processo, corre-se o risco de perda de sentido sobre o que se está multiplicando e para que o estejam fazendo.

A negação da sequência entre os fatos na tabela de multiplicar dificulta consideravelmente sua memorização. Se a memória humana é associativa, é preciso identificar e valorizar tais associações, observando-se regularidades e propriedades, como, por exemplo: a comutatividade entre os produtos 3×5 e 5×3 ; todos os resultados serem pares na tabela do 2; em todas as tabelas os resultados serem modificados com o acréscimo do multiplicador; os resultados na tabela do 5 terminarem sempre com 5 ou 0; os resultados da tabela do 6 corresponderem ao dobro da tabela do 3, entre outros. Conforme Chamorro (2011), esse não é um processo espontâneo, sendo necessário que o professor propicie a identificação e a reflexão sobre as propriedades da multiplicação.

Quando Vigotski destaca o papel dos sistemas semióticos como mediadores no processo de desenvolvimento mental, estabelecemos aqui uma relação entre os fatos fundamentais e o processo de formação de conceitos relativos à multiplicação. A sequência da tabuada constitui uma representação semiótica dos fatos fundamentais básicos, podendo ser construída pelos alunos, sendo instrumento de análise de suas regularidades.

A promoção da análise coletiva dos fatos fundamentais da multiplicação possibilita a compreensão de relações, a memorização desses fatos e/ou a busca de estratégias para ter acesso a um determinado produto – “se eu sei que a tabuada do 8 corresponde ao dobro da do

4 e eu preciso saber a quanto corresponde 8×6 , posso rapidamente encontrar $4 \times 6 = 24$, dobrá-lo e chegar a $8 \times 6 = 48$ ". Essa estratégia, além de ser eficiente, baseada na propriedade distributiva da multiplicação, é mais rápida que desenhar tracinhos e bolinhas. Insistir na perspectiva que as crianças contem com o material concreto ou o desenho, sem ampliar sua capacidade de cálculo, é concordar que os saberes espontâneos das crianças são suficientes e não precisam ser superados.

6.4.1 Discutindo um pouco mais sobre tabuada

Como um de nossos objetivos foi analisar o ensino de multiplicação nos anos iniciais, coube uma sessão mais específica com o grupo de professoras, na qual discutimos de maneira mais aprofundada, a compreensão que se tem da tabuada e seu uso na sala de aula. Nessa discussão, outros elementos apareceram, como a contradição entre a defesa pela sua utilização e o receio em usá-la, a argumentação contrária à sua inserção de maneira sequenciada e sistemática nas salas de aula e algumas sugestões metodológicas. Para melhor análise, discutiremos esse diálogo em partes, trazendo algumas intervenções.

Pesquisadora – vamos retomar a discussão sobre a tabuada. Quem gostaria de iniciar?

5ºP2 – Como eu sou do 5º ano, né? e eu já disse que sou muito tradicional, gosto muito de... quando eu aprendi, eu me lembro que quando chegava em casa, minha mãe dizia assim, é... até antes de lavar as mãos, ela dizia: quanto é 8×6 , quanto é 9×5 ? (risos do grupo) É! Ela disse que eu tinha de vir da escola já pensando...alguém pensa assim: é trauma! Né, não! Porque eu faço conta muito bem, eu faço de cabeça, eu tenho facilidade porque fui muito cobrada com a tabuada, sabe? E às vezes até ela dizia que só vai comer a sobremesa se responder tal conta, tal conta...

Nesse início de conversa, muitos elementos podem ser destacados. A relação que a professora assume com a Matemática, a partir da experiência vivenciada quando criança, da importância que sua mãe atribuía à memorização da tabuada, do condicionamento no processo de memorização da tabuada, vinculando o direito à sobremesa ao fato de se responder corretamente alguns fatos fundamentais e da positividade assinalada, pois se considera como alguém que tem facilidade em cálculo mental. Pela segunda vez, a professora se assume como tradicional, porém, desta vez, ela não se coloca de maneira negativa, mas defendendo uma posição.

Embora o grupo tenha reagido com admiração e risos frente à postura de sua mãe, não identificamos situação de constrangimento ou de receio por parte da professora, mas de valorização e de constatação da eficácia do ‘método’ utilizado pela sua mãe. Talvez, por isso,

essa professora seja a que mais defenda a utilização da tabuada na sala de aula, conforme veremos adiante, por ter alcançado sucesso no processo de memorização reforçado pela sua mãe e pelo sucesso destacado de seus alunos.

Entretanto, para nossa pesquisa, interessava-nos saber sobre a utilização ou não da tabuada na sala de aula e como esse processo ocorria. Ao fazer uma questão específica sobre esse assunto, as professoras foram relatando suas ações. Voltando para a professora do 5º ano:

Pesquisadora – 5ºP2, e para sua sala de aula, na sua prática, você vê a tabuada como?

5ºP2 - Fundamental para aprender, aprender os problemas... eu acho fundamental para aprender. E digo mais para eles: o professor do 6º ano cobra muito, vai ensinar álgebra... começa a usar o x, ainda perguntam logo... porque ainda perguntam isso, você foi aluno de quem? Ah! Da professora tal e ela não ensinou a tabuada? (...) Ah, os alunos no 5º ano, os professores não ensinam a tabuada! Então, a primeira coisa na lista de material eu peço para a mãe comprar uma tabuada.

Para a professora, a importância do trabalho com a tabuada em sua turma é a contribuição ‘fundamental’ na resolução de problemas, evidenciando uma compreensão sobre uma relação que não está evidente. Ora, aprender os fatos fundamentais de uma operação nos garantirá a capacidade para ler, interpretar, estabelecer uma estratégia e resolver uma questão proposta? Pode haver uma relação entre essas duas ações, quando na resolução utilizamos os fatos fundamentais, seja um cálculo formal ou alternativo, mas ela não é direta.

As habilidades e saberes exigidos para resolver um problema são de outra ordem que apenas resolver um cálculo. No problema têm-se diferentes informações e conceitos que precisam ser identificados, selecionados e utilizados conforme a exigência da pergunta, da incógnita. É exigida do sujeito uma conversão do texto proposicional que pode implicar um tratamento algorítmico ou não. Sem considerarmos que o aluno pode elaborar um algoritmo formal, resolvê-lo e não resolver o problema. No cálculo de um algoritmo, especificamente dos fatos fundamentais, tem-se um tratamento a ser feito com os números de acordo com a operação dada – aqui a complexidade é bem menor.

Portanto, a relação direta que a professora estabelece entre aprender a tabuada e a resolução de problemas é frágil e inadequada. Outra razão para o uso desse instrumento é a cobrança dos professores dos anos finais do ensino fundamental para os professores do 5º ano. Essa também é uma justificativa frágil porque, independente da cobrança dos professores de turmas seguintes, tem-se a responsabilidade com o trabalho com os conteúdos daquele ano com o qual se está trabalhando.

Ao voltar, especificamente sobre sua proposta didática, obtivemos o seguinte depoimento:

Pesquisadora – Ah. Então você trabalha com a tabuada pronta? E como você propõe a tarefa com a tabuada?

5ºP2 - Eu faço assim. Dentro da sala de aula eu deixo eles consultarem a tabuada até eu ver que já passou assim, um certo tempo, que começaram as aulas. (...) Aí depois eu começo a marcar, uma vez na semana, eu coloco lá na minha mesa, eu tomo a tabuada. Pergunto, quanto é isso? Aí pode dizer: é decorar! Né não! Eu também faço outra coisa no quadro. Eu coloco salteada porque eu não pergunto a tabuada seguida porque seguida ele vai decorar e eu não quero que eles decorem (...). Depois que eu vejo que a maioria já tá sabendo a tabuada, assim, aí eu proíbo consultar a tabuada. No quadro eu começo: a tabuada de 4 misturada com a tabuada de 6, eu faço isso, não sei se tá certo... Mas até agora deu certo, viu? (...) eu fui só treinando... porque eu acho que esse método que eu faço é da repetição. Sabe? Como eu, toda semana, três vezes na semana eu faço isso, aí é o método, pra mim que eu chamo da repetição, vai repetindo, repetindo...

Pesquisadora – Nesse momento (abril), eles estão ainda consultando?

5ºP2 - Não! Eles não estão mais consultando.

Embora a professora 5ºP2 seja a que mais defende a necessidade e utilização desse instrumento, seja referindo-se às dificuldades dos alunos em relação à multiplicação, seja informando que ‘é fundamental para aprender’, seu argumento em favor de seu uso é frágil e a proposta por ela encaminhada é empobrecida, pela exigência da memorização dos fatos a partir de uma consulta sistemática às tabelas, durante um curto período de tempo e a chamada oral, de forma alternada. A memorização é exigida sem um trabalho organizado a partir das relações numéricas entre os números, das regularidades e relações entre os resultados, sem uma investigação de propriedades aritméticas presentes nos fatos fundamentais multiplicativos. Identificamos que a proposta didática para o processo de memorização, do cálculo mental, tem descartado um dos seus pontos fortes – a análise da sequência e de relações entre os fatos multiplicativos.

Identificamos ainda um nítido receio em relação ao processo de memorização que popularmente é associado ao termo ‘decoreba’, indicando um processo de memorização sem entendimento ou compreensão. Embora no dicionário Aurélio (2009), decorar signifique “aprender de cor, reter na memória”, o verbete decoreba condiz com “aprender de cor, sem assimilar”, correspondendo mais um processo de treino e repetição que propriamente um processo de aprendizagem consistente.

Referindo-se às tabelas de multiplicação, Bigode (2012) afirma que elas

existem para serem consultadas, não para serem decoradas ou reconstruídas a cada momento. Tabuadas, como qualquer tabela, deveriam ser construídas

e ensinadas para serem **consultadas** e, no âmbito escolar, se as atividades de construção e consulta forem significativas, é grande a probabilidade de a maioria dos alunos as memorizarem naturalmente, sem esforço ou cara feia.

Concordamos que além do processo de construção e consulta, pode ser realizado um trabalho de observação, análise e reflexão sobre as regularidades e propriedades presentes nos fatos fundamentais. Mais do que memorizar tais fatos, é importante que as crianças compreendam procedimentos básicos utilizando propriedades numéricas e da própria operação da multiplicação, conforme já exemplificamos.

Nos depoimentos de outras professoras, que exemplificam o trabalho com a tabuada, veem-se marcas das histórias pessoais interferindo nas propostas pedagógicas.

(...) pra mim é um desafio, trabalhar a tabuada de uma maneira assim, diferente do que eu aprendi. (...) Aí eu pedi para eles comprarem e nesse processo de espera, eu tentei imaginar uma maneira de como dinamizar, trabalhar a tabuada sem ter que pegar aquela risca, seguir a ordem.. Até... Eu tenho muito medo de me pegar a esse tipo de recurso e esquecer outra maneira lúdica de trabalhar, assim, né? (3ºP2);

Uma maneira que eu conseguia fazer: formava duplas, realizava uma brincadeira, eles faziam uma listinha de multiplicação, digamos 10 ou 5 ou 6 multiplicações, aí o coleguinha iria resolver, você resolve o meu e eu resolvo o teu e depois eles mesmos iriam corrigir; então se achasse correto, aí sim, eu geralmente construía a tabuada com eles, mas não era para uso da chamada oral, porque acho que fiquei com trauma disso porque a professora do 4º ano perguntava 9x9? E eu: meu Deus!!... era algo obrigatório, parecia uma sabatina, você tem que saber na ponta da língua... e aí eles nem percebiam que estavam estudando e aprendendo a multiplicar (4ºP1).

(...) nos outros anos que eu trabalhei com as turmas maiores... eu sempre procurava fazer alguma coisa que estimulasse nesse sentido. A tabuada construía coletivamente, montava até um livrinho e aí a cada dia eles ficavam responsáveis para estudar em casa, por exemplo, a tabuada do 2 e do 3. Aí no dia seguinte eu fazia um bingo (...). Outra coisa também que eu fiz foi colocar a multiplicação e os resultados no chão. A criança recebia duas fichas, a ficha com a multiplicação em si e a ficha somente com um resultado (...) (2ºP1).

Sobre as marcas pessoais que interferem a ação docente, presente nas falas: “o desafio de trabalhar diferente do que aprendi”; “o medo de me pegar a esse tipo de recurso e esquecer outra maneira lúdica”; “acho que fiquei com trauma disso”; “era algo obrigatório, parecia uma sabatina”, respondem a uma posição em relação ao trabalho com a tabuada: “vou trabalhá-la de outra maneira porque do jeito que aprendi foi traumático, obrigatório, negativo”. Nessa busca pelo diferente, chega-se ao extremo de negar ao estudante a consciência da ação de

aprender o conteúdo – “eles nem percebiam que estavam estudando e aprendendo a multiplicar (4ºP1)”.

Essa não consciência é expressa pela professora como algo positivo, no entanto, ela afasta a criança da apropriação do conceito científico, pois essa característica é inerente ao conceito espontâneo. Conforme Vigotski (2009), uma grande vantagem do conceito científico é que ele favorece a tomada de consciência do próprio conceito, com suas propriedades e relações. A capacidade de operar com palavras, resumir, relacionar, falar sobre o conceito é fundamental para o alcance da consciência dele.

Nos depoimentos, as professoras relatam como novidade no trabalho com a tabuada, a elaboração de equações de multiplicar em duplas, juntamente com a correção; o uso de bingo e pareamento entre a sentença multiplicativa e o seu resultado, demonstrando preocupação em ‘inovar’, em ‘fazer diferente’. Essa preocupação tem raízes no movimento da Escola Nova quando fez a crítica à escola tradicional, deslocando a questão pedagógica do intelecto para o sentimento, do aspecto lógico para o psicológico, do esforço para o interesse (SAVIANI, 1986). Nós também fazemos a crítica ao ensino de Matemática baseado em procedimentos mecânicos sem compreensão, mas também fazemos a crítica a essa preocupação com o novo, como se fosse ‘algo mágico’ e independente da ação de ensinar do professor. Facci (2004) chega a falar da sedução e do modismo construtivistas que permearam nossas escolas e, ainda hoje, estão presentes em práticas espontâneas, meramente lúdicas, que não possibilitam aos alunos a apropriação do saber sistematizado.

6.4.2 A tabuada x a calculadora

No início da primeira conversa sobre a tabuada, algumas professoras afirmaram não usá-la, mas no decorrer das interações foram reveladas ações didáticas com o seu uso, embora de maneira incipiente e não sistemática. A professora 2ºP3, argumenta numa outra direção, a da negação do uso e importância da tabuada nos tempos atuais, no seguinte diálogo:

Eu acho assim, a tabuada no passado, ela foi muito importante porque não tinha os recursos que tem hoje, né? Então acho que hoje é desnecessário você cobrar uma tabuada, (...) porque tem outros recursos que todo mundo tem acesso como calculadora. Então acho que os professores deveriam se voltar mais a interpretação dos problemas e deixar essa coisa da tabuada e permitir que eles utilizem a calculadora, o celular com a calculadora porque hoje não é mais tão importante. Até essa mudança que atinge até mesmo o vestibular mesmo, né? Que não seja cobrado essas coisas tão rudimentares,

né? Como é a tabuada que você decora o resultado daquelas continhas, tendo um recurso muito mais rápido para você chegar aquele resultado (2ºP3);

Mas você veja que no vestibular não pode ser usado calculadora, até mesmo o celular! Por isso eu acho que é importante a tabuada (4ºP1).

Mas isso assim é toda uma tradição que pode ainda ser quebrada! É só uma tradição!! (2P3)

Nesse trecho da discussão, temos a opinião diferente e até extremada da professora 2ºP3, discordando do trabalho realizado com a tabuada, não vendo vantagens no seu ensino no contexto atual, por se caracterizar um ‘conhecimento desnecessário’, uma vez que as calculadoras poderiam assumir esse papel de maneira rápida e eficiente. O seu argumento vai à direção de estabelecer uma maior importância ao trabalho com a resolução de problemas, principalmente no que se refere à interpretação, colocando-o em oposição ao trabalho com a tabuada. Embora a professora do 5º ano argumente sobre o valor da aprendizagem dessa ferramenta como necessária, uma vez que no vestibular é proibido o uso de calculadoras e celulares, para nós, a argumentação vai à outra direção. A aprendizagem dos fatos fundamentais das operações aritméticas implica um trabalho intensivo e que fundamenta o cálculo mental.

Concordamos que o trabalho com problemas deve ser enfatizado, explorando-se significados, estratégias, hipóteses levantadas, enfim, o raciocínio e o ‘fazer matemático’, mas no trabalho com os fatos fundamentais também podem ser implementadas ações de investigação sobre regularidades, observando-se relações entre os termos: multiplicando, multiplicador e produto. Assim, não temos aqui uma perspectiva de oposição, mas de complementação. Acreditamos que a apreensão dos fatos fundamentais das operações, especificamente multiplicativos, constitui a apropriação de um instrumental a mais para a resolução de problemas, necessário, mas não suficiente, uma vez que, como já afirmamos, a resolução de problemas exige habilidades mais complexas.

Ao defender a apropriação dos fatos fundamentais das operações aritméticas, Van de Walle (2009e) faz uma ressalva importante: “embora calculadoras e contagens tediosas estejam disponíveis aos estudantes que não têm o domínio dos fatos fundamentais, a dependência desses métodos para combinações numéricas simples é um impedimento sério ao desenvolvimento matemático” (p.191). O autor faz referência à competência de calcular mentalmente fatos fundamentais como ferramenta básica. Por isso, o argumento da substituição do trabalho com a tabuada para o uso da calculadora é equivocado, uma vez que esse instrumento deve ser usado para ampliar a atividade matemática e não reduzi-la. O que

precisamos refletir é sobre como o trabalho tem sido feito, quais abordagens vem sendo consideradas e como podemos potencializá-lo.

As professoras não concordaram com a professora 2P3, argumentando:

Na verdade, se uma criança compreender de fato como funciona a multiplicação, ela vai resolver automaticamente sem saber de cor e salteado, como se diz, a tabuada em si. A gente sabe que a maioria do que a gente usa matemática, tem a multiplicação... na fração e divisão muita coisa a gente usa a multiplicação (...). Mas assim, é importante que haja essa compreensão do sentido da multiplicação. A partir do momento que se compreende, consegue se resolver com facilidade. E aí depois essa questão de saber quanto é 6×9 ou 9×6 é com o passar do tempo, de tanto você praticar você acaba sabendo, memorizando, aprendendo sem tá naquela sequência, não só na sequência, mas misturado mesmo (2P1);

Eu acho assim que se perde muito tempo com essa insistência, né? Dele aprender aquela sequência, coisa que ele pode resolver rapidinho com a calculadora e adiantar mais o processo da imaginação que conta ele vai fazer, interpretar mesmo os problemas (2P3).

Outro aspecto é levantado pela professora 2ºP3 – o tempo gasto com o ensino da tabuada. Se olharmos para o grupo de professoras com o qual trabalhamos ‘esse argumento cai por terra’, pois pelos relatos iniciais, a tabuada não foi sequer mencionada, quiçá explorada.

No entanto, quando analisamos algumas estratégias utilizadas com a tabuada, podemos também concordar com a crítica à perda de tempo, principalmente quando se baseiam em exercícios estéreis de repetição, sem um trabalho específico de investigação. Chamorro (2011), ao analisar o ensino de multiplicação na Espanha, propõe que o trabalho se volte mais as propriedades da operação e as regras do sistema de numeração, uma vez que a ênfase nos algoritmos formais tem fomentado o treino sem a compreensão.

É verdade que a utilização da calculadora em algumas situações favorece o trabalho, pois se pode reduzir significativamente o tempo dedicado ao cálculo, no entanto, a resolução de um problema com a ajuda da calculadora, embora pareça mais fácil, também exige o processo de interpretação e raciocínio, não só do problema como das próprias respostas obtidas. Diríamos que contém até mais dificuldades, visto que a calculadora não registra o procedimento de cálculo realizado. O grande problema dessa discussão é colocar em oposição a tabuada e a calculadora e ainda com a perspectiva de substituição – ou isto ou aquilo, o que para nós é um grande equívoco.

Sobre a tabuada, a professora 2P3 está convicta de que não é necessário promover uma sequência sistemática de atividades, visto que hoje se tem recursos tecnológicos para fazer

isso. Quando o restante do grupo se posicionou, acabaram caindo em outra discussão: o uso da calculadora na sala de aula.

2ºP3 – Agora, antigamente era essencial você saber a tabuada porque se você não soubesse você não teria como resolver...

2ºP1 – Acho que hoje ainda é fundamental, eu acho que mudou a forma, mas ainda é fundamental.

2ºP3 – Mas se você tem uma calculadora porque que você vai ficar lá...

4ºP1 – Sim, mas aí é como ela colocou, você não usa ela em todo tempo e em todo lugar! Não...

5ºP2 – Olha, a partir do momento que você se vicia numa calculadora, você esquece até quanto é 5×2 ...

4ºP1 – Se vicia só em ter...

3ºP2 – Não substitui não o cálculo mental, não!

3ºP1 – É verdade, principalmente com a história da discagem rápida.

Pesquisadora – Mas veja, quando a gente já conversou sobre a calculadora aqui e a gente já falou (...) que a calculadora é um instrumento a mais.

5ºP2 – Mas professora, veja, a partir do momento que o menino vai ter uma coisa fácil, ele não vai querer fazer o difícil.

2ºP1 – Ele não vai querer pensar.

5ºP2 – A partir do momento que ele tem a calculadora ali, ele não vai querer pensar...

A compreensão da calculadora na sala de aula ainda é permeada por mitos e por isso, negada. Conforme Van de Walle (2009c) tem-se quatro mitos em torno do uso dessa ferramenta do contexto escolar: o mito de que se as crianças usarem calculadoras não aprenderão os fundamentos, o mito de que o estudante fica preguiçoso, o mito que primeiro deve-se aprender no ‘mundo real’ antes de usar calculadoras e o mito da dependência ao instrumento.

No final, a professora 5P2 se justificou:

Eu falo que cobro, porque eu penso muito professora, quando for chegar na divisão. Porque se meu aluno não domina a multiplicação, a ‘famigerada’ tabuada, quando chegar na divisão, ele vai ter dificuldade, porque quando ele divide 89 por 5, pega o 8, ele tem de saber quantas vezes o 5 cabe no 8. Se ele souber a tabuada do 5, ele vai saber.

No final de conversa tivemos um fechamento com relação ao processo de memorização, sua importância no processo de aprendizagem de Matemática e de como poderemos contribuir com ela. Entendemos que a memorização não pode ser exigida das crianças como um processo anterior à compreensão, mas fundamentada por ela, quando é feita observação de regularidades nos próprios fatos fundamentais, o estudo de propriedades numéricas e de relações numéricas envolvidas. A professora do 3º ano 1 concluiu: “(...) quando a memória antecipa a compreensão, então é mecânico; mas aí quando a gente sabe o

processo da tabuada, que ela é um acréscimo, e tal, aí então não é mecânico” (3ºP1). Ou seja, quando a memória é exigida antes da compreensão, está baseada num processo mecânico de aprendizagem.

É chamando a atenção para todo esse processo que Chamorro (2011) afirma que o cálculo formal não é um fim em si mesmo, mas um meio para se resolver de forma eficaz diferentes situações. Nesse processo de apropriação de meios e ferramentas, a autora propõe dedicar-se mais tempo a teoria dos números que a aprendizagem de algoritmos e recomenda o uso da propriedade distributiva e a automatização de resultados simples, múltiplos de 10. Além disso, cabe a utilização de outros procedimentos de cálculo como a multiplicação egípcia, a calculadora e o cálculo mental.

6.5 Os Alunos e a Compreensão sobre a Multiplicação

A problematização com as professoras sobre os diferentes significados da multiplicação e a necessidade de ampliar as estratégias de cálculo dos alunos, seja por meio de um trabalho sistemático com o cálculo mental, seja por meio da identificação e valorização das estratégias apresentadas por eles, nos levou a aplicar em algumas salas de aula um diagnóstico, envolvendo problemas com o conceito de multiplicação. O objetivo maior foi discutir sobre a compreensão e as estratégias usadas, suas dificuldades e possibilidades didáticas a partir dos dados obtidos. Inicialmente, a ideia era analisar resultados de uma turma de cada ano, porém, no decorrer da coleta decidimos fazer em todas as salas para que cada professora tivesse um levantamento inicial de sua turma.

O diagnóstico se encontra no Apêndice F e antes de discutirmos os resultados, alguns esclarecimentos devem ser feitos. Foram elaborados dois diagnósticos: um para as turmas de 2º ano e outro para as turmas de 3º ao 5º anos. No entanto, mesmo no instrumento para as turmas de 3º ao 5º anos, modificamos a última questão devido à dificuldade sentida pelas crianças do 5º ano (1ª turma a ser aplicada²⁴).

A elaboração do diagnóstico baseou-se na classificação dos problemas apresentados dos PCN e na pesquisa de Santos (2011) que investigou a formação continuada de professores de anos iniciais acerca do campo multiplicativo (multiplicação e divisão). Elaboramos 09 (nove) problemas que envolviam a multiplicação, tendo um problema com o conceito de divisão (multiplicação inversa). Para as turmas do 2º ano, escolhemos 04 (quatro) problemas

²⁴ A mudança ocorreu após constatarmos que alunos do 5º ano não conseguiam entender o termo ‘15 em 15 dias’, o que seria agravado em turmas de alunos mais novos.

que constavam no primeiro, sendo que dois problemas ficaram idênticos e dois, com alteração na quantidade dos números envolvidos.

A realização desse diagnóstico ocorreu entre os dias 10 de maio a 04 de junho, seguindo o critério de disponibilidade das professoras. Participaram desta coleta 156 alunos de turmas de 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental, conforme indicamos no quadro abaixo:

Tabela 2 - Quantidade de alunos participantes do Diagnóstico

Turma	2P1	2P2	2P3	3P1	3P2	4P1	5P1	5P2	Total de alunos
Nº de alunos	21	16	13	16	23	17	20	30	156

Fonte: Sistematização da autora a partir da aplicação do Diagnóstico

Nosso entendimento nesse processo era que estávamos na sala enquanto pesquisadora e formadora, com experiência acadêmica diferente, mas extremamente solidária com a história e a experiência profissional de cada uma e suas condições de trabalho. Esse contato possibilitou maior interação com as professoras durante os encontros seguintes, deixando-as mais a vontade para relatarem dificuldades suas e de seus alunos.

No momento da aplicação do instrumento, apenas os estudantes da turma da professora do 5º ano 1 já tinham estudado o conteúdo da multiplicação no ano de 2012, o que exigiu que os alunos de outras turmas recorressem a conceitos já construídos/acumulados em outros anos. Em todas as turmas em que aplicamos o instrumento, as crianças se dispuseram a participar. Nas turmas do 5º ano, as professoras informaram que a atividade seria aproveitada para a avaliação individual, no sentido de estimular a participação. Em todas as turmas, nós lemos e explicamos cada questão, contribuindo para que alguma dificuldade na leitura não impedisse sua realização.

Como os instrumentos aplicados eram diferentes, faremos a discussão inicialmente, dos resultados das turmas de 2º anos, separadamente das turmas de 3º, 4º e 5º anos.

A análise dos conhecimentos dos alunos sobre a multiplicação ocorreu a partir das seguintes categorias: acerto – erro por turma e por significado do problema; variedade de estratégias/registros por significado do problema.

Após o término da realização do diagnóstico com as turmas, fizemos a organização e a tabulação dos dados, montando uma tabela com informações não somente sobre acerto e erro, mas, sobretudo, sobre algumas estratégias utilizadas para resolver, em especial os registros de representações semióticas utilizados. Além disso, fizemos um gráfico com os níveis de acertos de cada turma para cada questão. Esse material foi entregue às professoras, sendo

objeto de discussão do penúltimo encontro. O objetivo dessa atividade foi provocar uma reflexão sobre o nível de compreensão das crianças acerca da multiplicação, tomando como referência a tarefa diagnóstica.

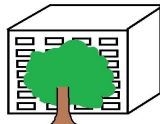
Como os dados das turmas do 2º ano se referiram às quatro questões, faremos a discussão dos registros semióticos, logo nesse mesmo tópico, o que não ocorrerá com os dados das outras turmas que serão discutidos no Capítulo seguinte.

6.5.1 Os saberes dos alunos do 2º ano

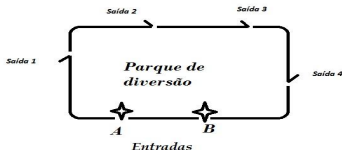
O instrumento aplicado em turmas de 2º ano foi composto de quatro situações-problema²⁵, evidenciando os seguintes significados: multiplicação inversa, conduzindo a uma divisão; configuração retangular; relação proporcional simples e a ideia de combinatória, conforme apresentamos na Figura 2.

Figura 2- Diagnóstico Aplicado aos Alunos do 2º ano

1. Na sala de aula a professora solicitou que as crianças formassem 4 grupos com quantidades iguais. Se havia 20 alunos, quantas crianças ficaram em cada grupo?
2. Esse edifício tem muitas janelas na frente. Por causa da árvore você não consegue ver todas as janelas. Quantas janelas tem na frente do edifício?



3. D. Joana faz bolos de chocolate para a Lanchonete ‘Gostosuras’. Ela utiliza 4 ovos para fazer um bolo de chocolate. Se ela fizer 2 bolos, de quantos ovos precisará?
4. O parque de diversão abaixo tem duas entradas (A e B) e 4 saídas (1, 2, 3, e 4).



Pense em **todas** as maneiras diferentes que você poderia entrar e sair desse parque. Quantas são essas maneiras?

Fonte: Instrumento elaborado pela autora

A aplicação do instrumento, nas turmas do 2º ano, foi descontraída e estimulada por meio da ‘contação de histórias’, que correspondia aos problemas da tarefa. Sugerimos que as crianças poderiam responder usando ilustração com lápis colorido em uma folha a parte. Cada questão foi lida como uma historinha e só passávamos à seguinte quando percebíamos que a

²⁵ A situação 2 foi adaptada de Nunes et al. (2005, p. 93) e a situação 4 foi baseada em Santos (2012).

maioria já havia concluído. Em todos os registros das crianças encontramos o desenho, em alguns casos, acompanhados de valores numéricos e em outros não.

As questões foram lidas mais de uma vez, chegando-se até em algumas turmas, a ocorrer uma intervenção mais direta, como foi o caso na turma 1, na qual, após algumas leituras da questão 1, desenhamos os 4 círculos no quadro, informando para neles distribuírem as crianças presentes na história. Embora a intervenção tenha sido direta, não determinou o acerto da questão pela maioria das crianças, conforme veremos adiante. A Tabela 3 contém os resultados de acertos de todas as questões nas três turmas.

Tabela 3 – Índices de Acertos nas Turmas de 2º ano, distribuídos por Significados dos Problemas

Significados Dos problemas	Turmas do 2º ano		
	1 (%)	2 (%)	3 (%)
Multiplicação inversa	33,3	62,5	38,4
Configuração retangular	9,5	37,5	7,6
Proporção simples	95,2	93,7	100
Combinatória	23,8	25	23
Total de alunos	21	16	13

Fonte: Sistematização da Autora – Diagnóstico (2º ano)

A turma 2 obteve um desempenho melhor em quase todas as questões, exceto na questão que envolvia a proporção simples, porém a diferença para menos não é tão significativa.

O problema de multiplicação inversa que conduzia à divisão com o significado de distribuição era um problema em que os dados não apareciam de maneira direta. Embora tenhamos feito a leitura por diversas vezes, tanto coletiva quanto individual, para aquelas crianças que nos solicitavam, foi inquietante perceber que as crianças entendiam que pelo fato de terem que formar 4 grupos, cada grupo deveria ter 4 componentes, erro mais comum nessa questão. Mesmo com a intervenção direta, desenhando quatro grupos no quadro, na turma 1 não se viu maior número de acertos.

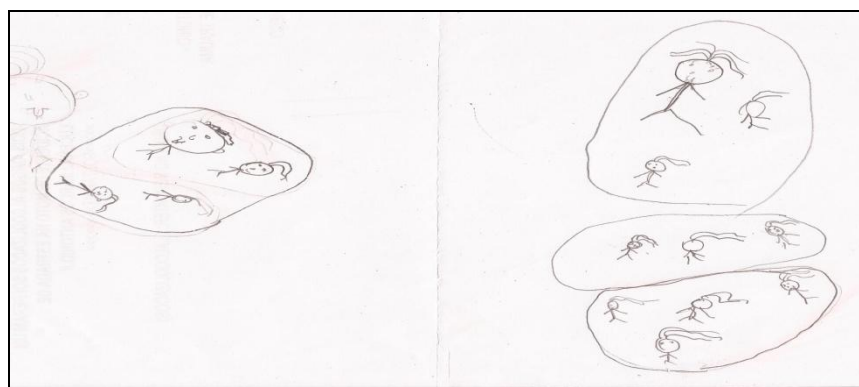
Outro aspecto se refere ao processo de resolução. Quando as crianças desenhavam as 20 crianças para depois distribuí-las em 4 grupos, geralmente se confundiam por não poder mover os desenhos. Por outro lado, aquelas crianças que optavam por formar os 4 grupos, tendiam a acertar porque o desafio que restava era completar os grupos até alcançar um total de 20 crianças. Mesmo com essa estratégia, algumas crianças formavam os 4 grupos e, ao

colocar em cada grupo 4 crianças, incluíam um quinto grupo com 4 componentes, não atendendo mais à indicação de se ter 4 grupos, mas ao total 20 crianças.

Para ilustrar esse processo de resolução, fizemos uma ordenação dos que não conseguiram sequer agrupar até aqueles que distribuíram as quantidades de crianças de forma correta.

Exemplos de registros sem coordenação entre os critérios solicitados pela situação-problema – ora considera os grupos, ora considera a quantidade total de crianças, podem ser observados nas figuras 3, 4 e 5.

Figura 3 - Registro da Aluna 5, 2º ano 3 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

A aluna 5 da turma 3 indica compreender que devem ser formados 4 grupos, porém não coordena essa informação com aquela que indica o total de crianças. Já com os alunos 6 e 8 da turma 1, ocorre o contrário. Eles consideram que são 20 crianças, mas não levam em consideração que devem ser formados 4 grupos.

Figura 4 - Registro do Aluno 6, 2º ano 1 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

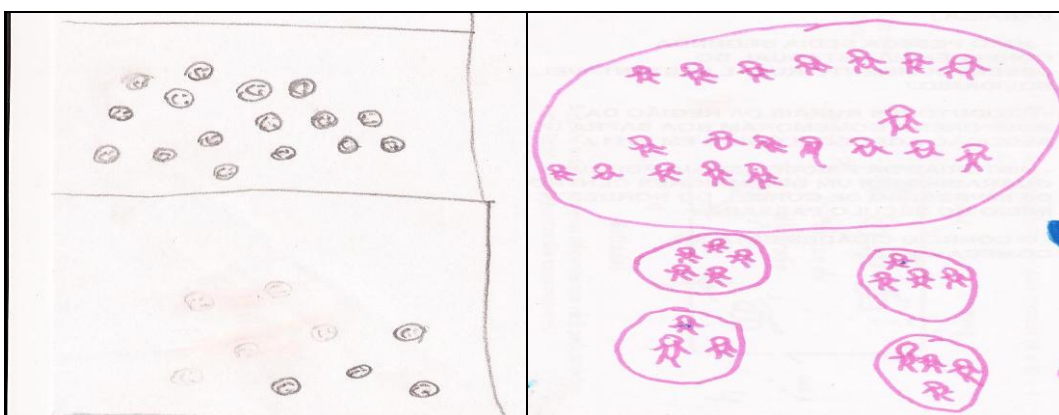
Figura 5 - Registro do aluno 8, 2º ano 1 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

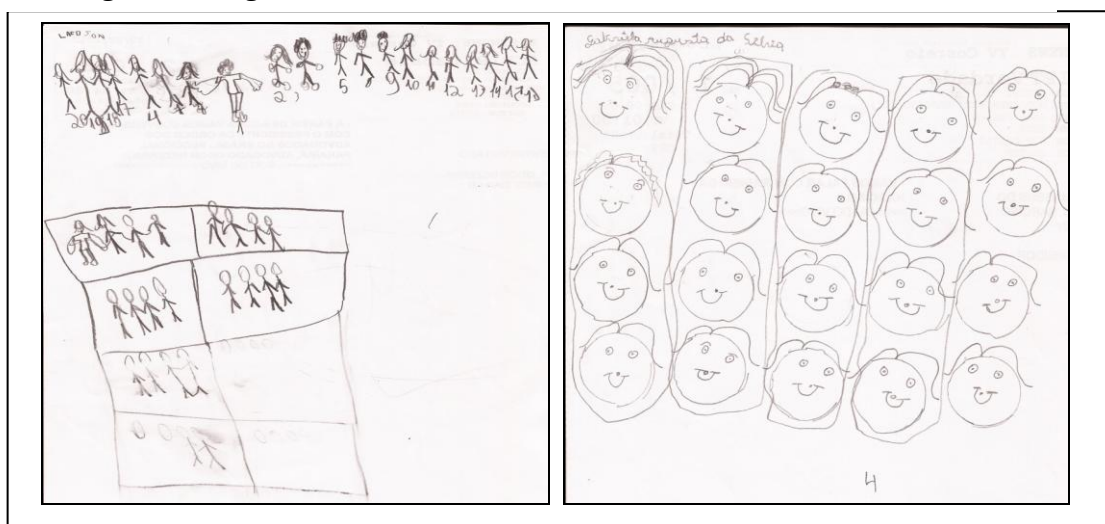
Nesse outro grupo de registros (Figuras 6, 7 e 8) percebemos que as crianças tentaram coordenar as duas informações do problema, mas não alcançaram êxito.

Figura 6 - Registros do Aluno 8, 2º ano 2 e a aluna 16, 2º ano 1 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

Figura 7 - Registros do aluno 8 e da aluna 4, 2º ano 3 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

O registro da aluna 17, da Figura 8, indica que ela inicialmente, pensou nos grupos com 4 crianças, porém, após uma mediação individual pela pesquisadora, foi questionada: *quantas crianças tem? Quantas tem na historinha?* Com isso, ela tentou considerar o total de crianças, com um lápis de outra cor, mas como não distribuiu corretamente as crianças que faltavam, pintou as crianças que passaram de 20, escrevendo 6 e 5, referindo-se ao número de crianças no grupo e escreveu 20, indicando o total de crianças a ser considerado.

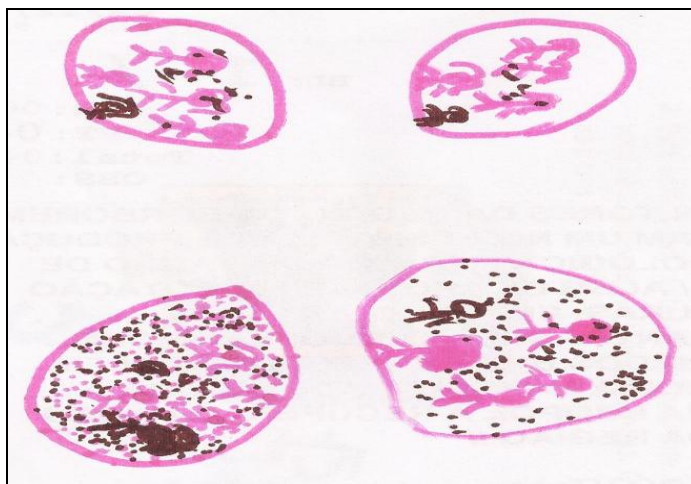
Figura 8 - Registros do aluno 12, 2º ano 3 e aluna 17, 2º ano 1 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

O que o aluno anteriormente citado não alcançou com a nossa mediação oral, a aluna da Figura 9 conseguiu. Ela inicialmente desenhou 4 crianças em cada grupo e ao ser questionada sobre quantas crianças a história indica, ela simplesmente completou cada grupo, ficando 5 crianças em cada um, alcançando a solução da proposição.

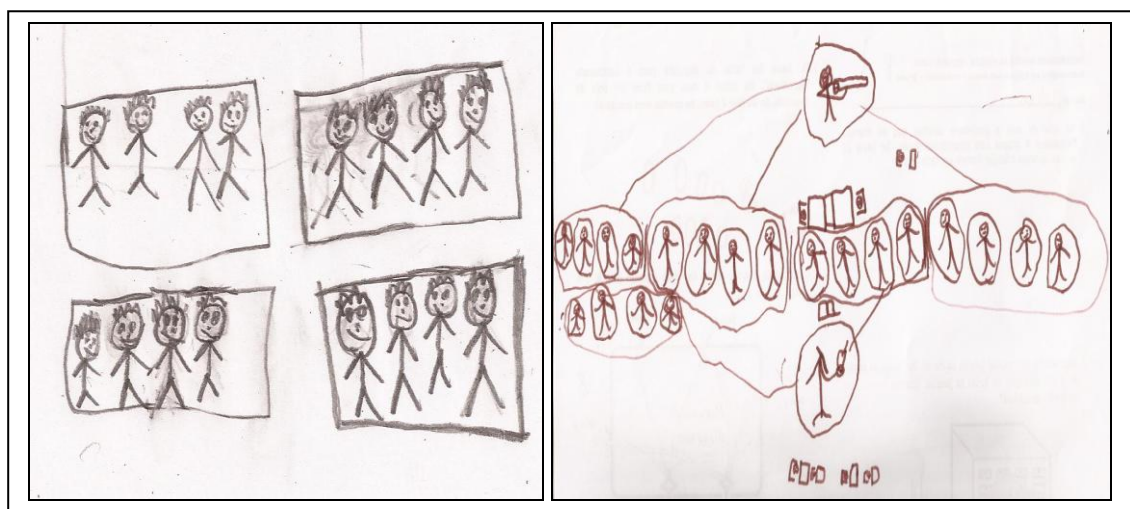
Figura 9 - Registro da aluna 1, turma 1, 2º ano – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

No entanto, algumas crianças, mesmo com questionamentos sobre a resposta encontrada ou porque já fizeram a atividade autonomamente, cometeram o erro de considerar o número de partes como o número que corresponde a uma parte, no caso, 4 correspondia aos grupos a serem formados e não à quantidade de crianças por grupo. A Figura 10 apresenta dois registros: no primeiro, o aluno entendeu que seriam 4 grupos de 4 crianças (não atendendo à indicação do total de alunos) e no segundo, o aluno desenhou 5 grupos com 4 crianças (atendendo à indicação do total, mas não à quantidade de grupos).

Figura 10 - Registros do aluno 8, 2º ano 2 e do aluno 11, 2º ano 1 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

Quase nenhuma criança acertou a questão sem uma mediação nossa porque como é uma turma de 2º ano que não lia convencionalmente (a época da coleta), além do momento coletivo de leitura e explicação inicial, interagimos com a turma, fazendo questionamentos sobre seus procedimentos e à disposição deles para que nos perguntassem sobre a questão.

Os registros das Figuras 11 e 12 indicam as crianças chegando a uma resposta correta após uma mediação individual.

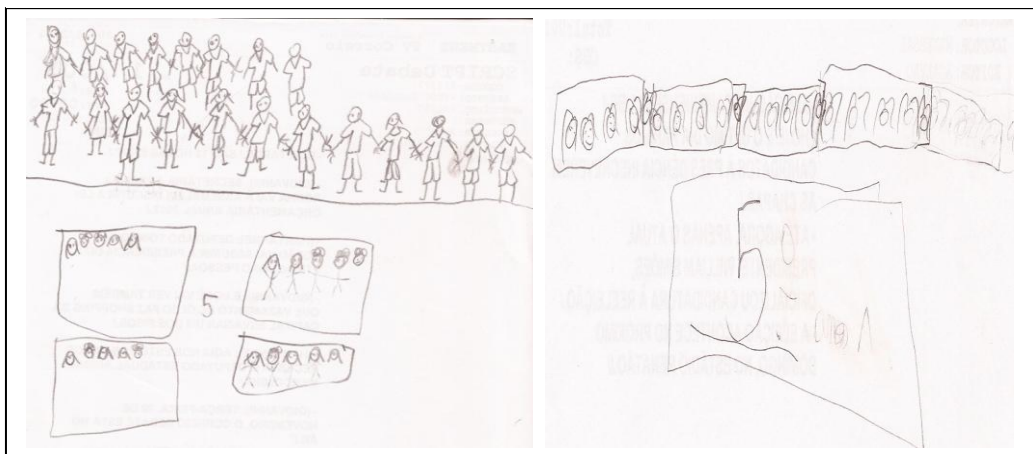
Figura 11 – Registros do aluno 15, 2º ano 1 e do aluno 9, 2º ano 3 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

O aluno 15 (2º1) desenhou as 20 crianças e inicialmente agrupou 4 delas em cada grupo, porém com a nossa mediação, conseguiu coordenar as informações indicadas na situação, distribuindo as duas crianças restantes, nos primeiros grupos com apenas 4. Com o registro do aluno 9 (2º3), foi necessária uma nova tentativa para que ele acertasse a questão. Vemos que no segundo desenho houve uma alteração – foi apagado o último grupo, e a criança escreveu 5.

Figura 12 – Registros dos alunos 3 e 13, 2º ano 2 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

Mesmo nos registros das crianças que acertaram a questão identificamos um processo rico de idas e vindas, de pensamento e reflexão a partir dos registros realizados. Nesse aspecto, compreendemos que muitos alunos só conseguiram alcançar a resposta mediante a mediação provocada por nós: “Mas a história fala de quantas crianças? E quantas você desenhou? E quantos grupos a professora solicitou?” Fazíamos as questões e deixávamos

que cada aluno refletisse sobre seu registro e estratégia. Para algumas crianças essa mediação oral foi suficiente, enquanto para outras, não. Essa ação foi muito positiva de ser presenciada pelas professoras que se surpreenderam com seus alunos levantando hipóteses, pensando e resolvendo problemas de multiplicação inversa.

Sobre essa questão, algumas professoras opinaram:

A primeira coisa que eu interpretei foi que mesmo sendo 2º ano, sem ter visto a nenhum conceito multiplicação, eu vi que era possível fazer desde que haja uma intervenção maior, você aí do lado, ajudando, eles conseguem fazer (2P1).

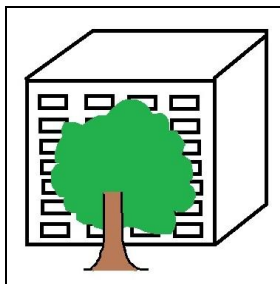
E a 1ª questão assim eu esperava que eles acertassem mais, mas eles tiveram dificuldades, desenharam as crianças, mas na hora de contornar, de formar os grupos eles tiveram bastante dificuldades, aí se perdiam, aí tentava fazer de novo, né? 2P3;

O 2º problema continha a ideia de configuração retangular, exigindo das crianças a percepção da regularidade espacial das janelas na frente de um edifício e sua contagem. Todas as crianças resolveram pela contagem, algumas, inclusive, desenhando as janelas sobre a árvore. Embora o número de erros tenha sido significativo, com os menores índices de acertos dentre todas as questões, respectivamente 9,5% (turma 1), 37,5% (turma 2) e 7,6% (turma 3), ressaltamos o resultado expressivo obtido pela turma 2, na qual seis alunos acertaram a questão, o que correspondeu a mais de um terço das crianças. Veremos mais adiante que esse resultado foi equivalente ao obtido por uma turma do 3º ano.

As dificuldades encontradas pelas crianças nessa questão foram duas: a de compreender que há janelas escondidas por trás da árvore e na contagem uma a uma das janelas. Nessa questão, especificamente, além de considerar o índice de acerto e erro, é necessário também analisar os erros cometidos, uma vez que as soluções não estão num mesmo patamar, sendo algumas mais próximas da resposta correta e outras mais distantes.

A questão solicitava o total de janelas que existiam na frente do edifício, portanto, incluía aquelas que se encontravam por trás da árvore conforme a Figura 13. Obtivemos quatro tipos equivocados de contagem das janelas: distanciando-se da resposta (33, 40, 44); aproximando-se da resposta (26, 27, 29, 30, 31); apenas das janelas visíveis (17, 18, 19, 20); apenas das janelas escondidas (9, 10).

Figura 13 - Desenho do Problema 2



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos

É importante destacar que mesmo errando, a criança utilizou alguma estratégia para chegar àquele resultado, portanto, não é suficiente a análise do ponto de vista de certo e errado. Se olharmos para as respostas encontraremos outros elementos que a criança colocou em jogo no ato de resolução, extraindo, daí, os raciocínios utilizados por elas, os quais orientarão intervenções posteriores.

Ao analisar os resultados dessa questão as professoras se pronunciaram:

Na questão 2 que era a questão do prédio, né? a maioria acabou errando, porque assim, uns esqueceram de contar as que estavam por trás da árvore, outros contaram, mas não associando o que estava em cada coluna, então acabava contando demais, então essa, poucas crianças acertaram, apenas duas. E isso chamou bastante atenção porque eu achava que não ia ser difícil porque só era fazer a correspondência com aquelas que estavam ao lado e aí, como eles estão muito no concreto, eles só viam as que estavam de cara, as que estavam escondendo ficou difícil essa análise. (2ºP1);

Eu achei interessante de um que ele é bem mais lento, mas ele olhou assim e disse 7, 7, 7..então ele imaginou o que? Que todas as linhas são iguais, então ele já foi contando nos dedos. Deu logo os 28, e eu fiquei admirada. (2ºP2);

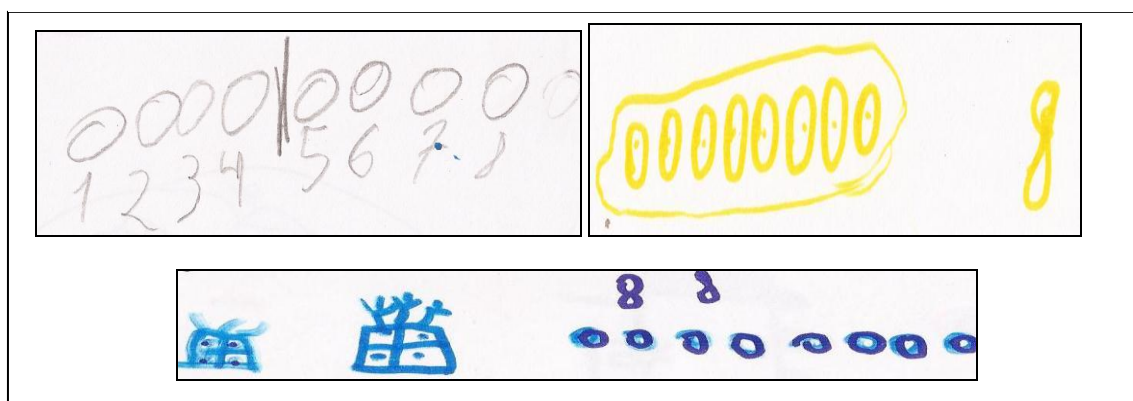
Me surpreendeu essa 2ª questão que era do desenho, eu pensei que eles iam acertar mais, mas não foi. É porque já tava pronto o desenho; eu imaginava que eles iam acertar mais, mas eu acho que só um que acertou, o das janelas. (2P3)

Vemos nas falas das professoras que elas se surpreenderam com os resultados, uma vez que esperavam que fossem mais positivos, principalmente porque o desenho poderia facilitar a compreensão. Sobre essa expectativa, Panizza (2006) se refere ao fenômeno da ‘ilusão de transparência’ quando o professor espera que naturalmente o aluno ‘veja’ em determinada representação o que ele ‘vê’. “Esta ilusão de transparência entre aquilo que ‘se mostra’ e o objeto ou relação representados é mais pronunciada quanto mais ‘perto do concreto’ se encontra a representação utilizada” (p. 28).

O problema de proporção simples (questão 3) foi o que obteve maior índice de sucesso nas turmas do 2º ano, tendo todos os alunos da turma 3, acertado. Como os dados numéricos envolvidos eram pequenos, talvez eles tenham se utilizado, mais rapidamente, da adição para a solução, inclusive, na turma 1, logo após a leitura da questão, algumas crianças já responderam “oito!”.

Todas as questões foram respondidas com desenhos de ovos (alguns, incluindo o bolo) e em quase todas as respostas foi incluído o número 8, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14 Registros dos alunos 3, 6 e 16, 2º ano 1 – Problema 3



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

O fato das crianças responderem essa questão de forma rápida nos leva a pensar em podermos proporcionar este mesmo tipo de problema com números maiores ou com o multiplicador maior que dois, pois como está não ofereceu desafio aos alunos.

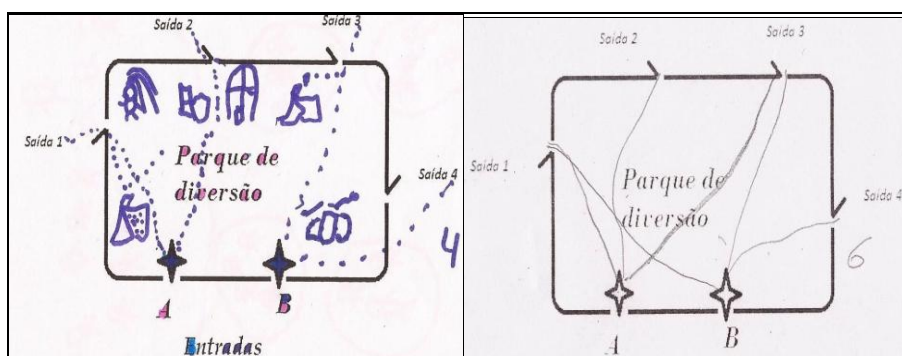
A última questão envolvia a ideia de combinatória, exigindo a quantidade referente às maneiras de sair e entrar do parque. Nas turmas de 2º ano, esse problema foi também difícil de ser entendido, inclusive a proposição “maneiras de entrar e sair”. Para tanto, desenhamos no quadro um modelo parecido com o da tarefa e solicitamos que algum aluno descrevesse uma maneira de entrar e sair do parque e em seguida perguntamos: *só tem esse jeito de entrar e sair do parque? Tem outras maneiras? Quantas são ao todo?*

Os índices de acerto nessa questão foram: 23,8% na turma 1; 25% na turma 2; e 23% na turma 3, tendo resultados melhores que a questão 2, principalmente para as turmas 1 e 3.

Em relação às respostas erradas, podemos classificar algumas estratégias. Aquela em que o aluno encontrou 4 possibilidades, aceitando a combinação de uma entrada para duas saídas, por exemplo: Entrada A com as saídas 1 e 2 e a Entrada B com as saídas 3 e 4, totalizando 4 maneiras. Encontramos ainda como resposta 6 e 7 caminhos, que avançava um pouco mais, porém, como não havia controle das combinações realizadas, não se chegava à

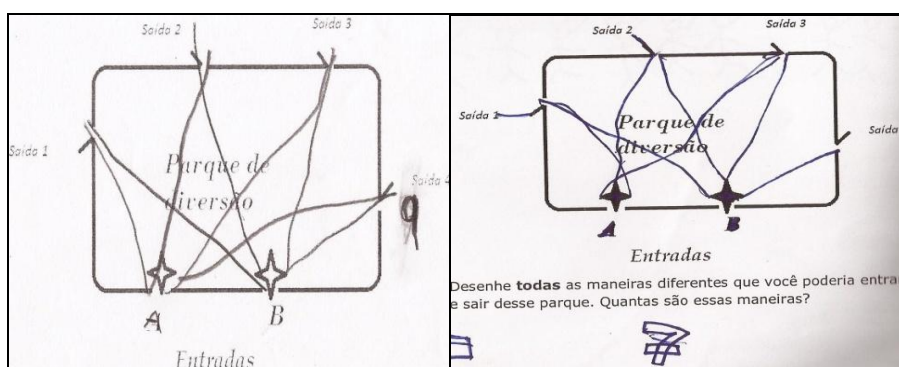
solução correta. Houve ainda resposta de 9 ou 10 caminhos, quando se repetiu algum deles ou quando se errou na contagem dos caminhos traçados. As figuras 15 e 16 trazem exemplos de registros realizados pelas crianças do 2º ano.

Figura 15 - Registros do Aluno 16, 2º ano 1 e do Aluno 15, 2º ano 2 – Problema 4



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

Figura 16 - Registros do Aluno 11, 2º ano 3 e do Aluno 2, 2º ano 2 – Problema 4



Fonte: Diagnóstico aplicado pela autora às Turmas de 2º ano.

Esse tipo de questão também não vem sendo explorado pela escola, principalmente nas turmas iniciais do Ensino Fundamental I (2º anos). Conforme o relato das professoras participantes dessa pesquisa, apenas a professora 2P2 fez menção a esse tipo de situação quando se referiu aos problemas de ‘associações’ entre roupas.

Entretanto, as turmas do 2º ano alcançaram resultados melhores que a do 3º ano 1, do 4º ano 1 e 5º ano 2; a turma do 2, equiparou-se em índice de acerto à turma do 5º ano 1. Inferimos que esse resultado se deve ao fato da questão favorecer o traçado dos caminhos e as crianças menores se permitiram desenhar os trajetos possíveis e contá-los em seguida, fato não observado nas turmas do 5º ano, principalmente o 5º ano 2.

6.5.2 A compreensão de multiplicação pelas crianças de 3º, 4º e 5º anos

Para compreendermos os conhecimentos dos alunos do 3º, 4º e 5º anos, elaboramos um diagnóstico²⁶ mais amplo, envolvendo os significados: comparação (1); proporção simples (um-para-muitos) (3), sendo dois problemas diretos e um indireto; proporção simples (muitos-para-muitos) (1); combinatória (1); configuração retangular (1) e multiplicação inversa (divisão) (1). A aplicação desse diagnóstico tinha uma relação direta com o curso que estávamos realizando, uma vez que teríamos a possibilidade de discutir os saberes dos alunos das professoras com as quais estávamos trabalhando.

Nesse sentido, duas categorias foram fundamentais: os significados dos problemas de multiplicação e os registros de representação dos alunos sobre a multiplicação. Pela amplitude do tema e da quantidade de dados, todas as discussões sobre as representações semióticas estarão no Capítulo 7. Nesse item, discutiremos os acertos e erros, descritos na Tabela 4 a seguir, tomando por referência os significados envolvidos nos problemas.

Tabela 4 – Índice de acertos de turmas do 3º ao 5º ano em Problemas multiplicativos

Significados dos Problemas											
Turma	Multiplicação inversa	Proporção simples não direta			Comparação	Proporção simples (nº menor)	Configuração retangular	Combinatória	Proporção simples (nº maior)	Proporção simples muitos-para-muitos	
	1	2a	2b	2c	3	4	5	6	7	8 a	8b
3º ano 1	6,2	31,2	12,5	0	31,2	56,2	37,5	18,7	37,5	25	25
3º ano 2	13	21,7	21,7	17,4	8,7	17,4	43,4	43,4	13	17,4	17,4
4º ano 1	17,6	47	23,5	17,6	41,1	41,1	53	11,7	29,4	29,4	29,4
5º ano 1	50	90	60	50	80	85	85	25	55	60	70
5º ano 2	50	66,6	43,3	10	70	63,3	86,6	13,3	33,3	36,6	33,3

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Ao observar os resultados alguns dados se sobressaem: a apropriação do raciocínio multiplicativo ao longo dos anos em algumas questões; a turma com melhor desempenho; a

²⁶ O diagnóstico consta no Apêndice G. Um último problema foi aplicado, porém não iremos analisá-lo porque ele foi modificado ao longo do processo de coleta de dados para as turmas de 3º e 4º anos.

questão com maior/menor índice de acerto; os significados mais complexos e distantes da vida acadêmica das crianças que geraram mais erros.

Quando analisaram os resultados de suas turmas, por meio de gráficos e tabelas entregues a cada uma, as professoras ressaltaram aspectos relativos à capacidade dos alunos, participação e envolvimento, à leitura, ao processo de avaliação, às especificidades dos problemas, dentre outros. As reflexões mais relevantes para a nossa investigação serão trazidas aqui. Sobre o envolvimento e participação das crianças, gostaríamos de ressaltar as seguintes falas:

Eu achei interessante e superlegal Maria, o incentivo quando você chegava perto, quando eu podia chegar perto e assim, dá uma luzinha, ‘olha! Você pode tentar dessa forma!’ E quando você chegou que abriu o espaço: ‘olha, você tem um papel extra, você pode riscar, você pode contar com lápis, contar com os dedos’, então eles sentiram liberdade de fazer isso (4ºP1);

Me chamou a atenção também a empolgação que eles tinham, né? ninguém desistia ou dizia que não queriam fazer – às vezes, ela já tava passando para outra questão e eles ainda na primeira (2P3).

Faremos inicialmente, uma análise mais geral, por ano e por turmas e, posteriormente, uma análise por significados. As estratégias/registros utilizados, tanto pelas crianças que acertaram quanto que erraram, visto que as estratégias erradas também evidenciam processos de pensamento e reflexão matemática, serão discutidas no capítulo seguinte.

6.5.2.1 Discussão considerando os resultados por ano e por turmas

Nossa hipótese inicial era que o conteúdo de multiplicação já vinha sendo explorado na escola, desde o 2º ano e que, portanto, mesmo que algumas questões gerassem dificuldades, outras não o fariam. Tal hipótese não se confirmou. Nas turmas do 2º ano não foi evidenciado um trabalho com esse conteúdo e nos 3º anos, quando fizemos a coleta, esse assunto ainda não tinha sido ensinado.

De uma maneira geral, podemos concluir que a escola ainda precisa explorar/trabalhar mais o conteúdo de multiplicação, embora os professores tenham afirmado, em sua maioria, que as crianças não tinham dificuldade com esse conteúdo.

O desenvolvimento gradual da capacidade de lidar com o significado da multiplicação ao longo dos anos se confirmou nas questões 1, 2a, 2b, 3, 5 e 8, porém, em outras questões, isto não fica evidenciado, como vemos principalmente nas questões 2c, 4, 6 e 7. Este dado pode ser melhor entendido com o aspecto da sequência e da organização curricular assumida

para o trabalho com esse conteúdo. Não basta apenas o desenvolvimento das crianças do ponto de vista cognitivo, é necessário que as intervenções didáticas sejam pensadas e organizadas numa perspectiva gradual de dificuldades e desafios, exigindo-se que uma criança de 4º e 5º anos consiga avançar mais que uma criança de 2º e 3º ano. Se realmente assumimos que a aprendizagem se adianta ao desenvolvimento, não aceitaremos que esse processo ocorra de maneira espontânea e não diretiva. É necessária uma compreensão acerca da organização curricular que possibilite avanços ao longo dos anos escolares.

Houve questões nas quais o resultado de alunos do 3º ano foi igual ou superior ao dos alunos do 4º e/ou 5º ano, com é o caso das questões de proporção indireta, 2c com o 3º ano 2 – 17,4%, o 4º ano - 17,6% e 5º ano 2 - 10%; a questão 6, de combinatória com o 3º ano 2 - 43,4% e 4º ano e 5º ano 2 respectivamente, 11,7% e 13,3%; e ainda na questão 7, de proporção simples com o nº maior, o 3º ano 1 – 37,5% e 4º ano – 29,4%.

Esses resultados indicam que se crianças menores podem compreender significados de multiplicação aqui explorados, crianças maiores teriam muito mais possibilidade, uma vez que suas experiências escolares e extraescolares tendem a serem maiores. Estes dados também indicam que a escola precisa assumir seu papel de potencializar o desenvolvimento matemático, ampliando as possibilidades de aprendizagem das crianças de anos iniciais.

Somente a turma do 5º ano 1, obteve índices positivos, a partir de 50% de acertos nas questões propostas, exceto naquela que envolvia o raciocínio combinatório. A diferença entre os resultados das turmas do 5º ano, que são de uma mesma escola, foi significativa. E este dado tem uma explicação aparente que pode ter influenciado nos resultados. Como essa foi a última turma visitada²⁷, no momento da aplicação do instrumento, os alunos já tinham estudado o conteúdo de multiplicação há alguns dias. Outro fator a influenciar foi que no dia da visita a escola já informara que encerraria as atividades mais cedo, por motivos administrativos, então, 15 (quinze) alunos faltaram a aula. Conforme informou a professora 5ºP1, dentre os faltosos estavam alguns alunos com mais dificuldades. Isso quer dizer que, embora não tivéssemos intenção, a turma do 5º ano 1 representa alunos em melhores condições de desempenho, segundo a própria professora.

Essa disparidade entre resultados de turmas do mesmo ano foi evidenciada também nos 3º anos. Porém, enquanto as turmas do 5º ano são de uma mesma escola, as de 3º são de escolas diferentes, sendo uma variável significativa nos resultados obtidos entre as duas turmas, uma vez que se supõe que cada escola proponha uma organização curricular

²⁷ No mês de junho de 2012.

atendendo às suas especificidades. O desempenho entre os estudantes dos 3º anos foi bem diverso, tendo cada turma alcançado resultado positivo em metade dos itens, sendo que, em sete deles, a diferença entre acertos foi maior que o dobro, o que evidencia a discrepância entre o desenvolvimento das crianças.

A turma 2, do 3º ano, foi aquela com maior índice de estudantes que não responderam as questões. Das oito questões aqui consideradas, somente a questão sobre combinatória, foi respondida por todos; nas restantes, em 5 (cinco) questões cerca de um terço dos alunos não responderam. Inferimos que isso se deveu ao fato do horário de aplicação do instrumento ter sido próximo do intervalo de aulas.

6.5.2.2 Por significados e níveis de erros

A sequência de situações-problema que assumimos para a discussão dos significados explorados e os níveis de acertos alcançados não será idêntica à da Tabela 4, pois lá consta a ordem do instrumento aplicado. Agrupamos os problemas em uma sequência que considera certa gradação de dificuldade, iniciando com os significados mais usuais e concluindo com os significados menos explorados na escola. Assim temos: comparação, proporção (simples, com número menor/número maior); proporção simples não direta; proporção simples (muitos-para-muitos); multiplicação inversa; configuração retangular e combinatória.

a) Multiplicação comparativa

A situação que envolvia o significado de comparação foi: *‘Na Lanchonete ‘Gostosuras’, um pastel grande custa R\$ 3,00 e a pizza grande de calabresa custa 7 vezes mais que o pastel. Qual é o preço dessa pizza?’*, na qual obtivemos os seguintes índices:

Tabela 5 – Índice de acertos com problema de Multiplicação Comparativa

Turma	3º ano 1	3º ano 2	4º ano 1	5º ano 1	5º ano 2
% Acerto	31,2	8,7	41,1	80	70

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Conforme a atividade de elaboração de problemas realizada no curso, o significado de comparação na multiplicação foi bastante evidenciado, no entanto, mesmo que ele seja explorado pelas professoras, ainda obtivemos índices muito pequenos de acerto entre as turmas de 3º e 4º ano. O significado de multiplicação comparativa é usualmente explorado nas

escolas de ensino fundamental, principalmente acompanhado de marcadores textuais como: dobro, triplo, quádruplo, o que ficou evidente na elaboração dos problemas pelas professoras durante o curso.

As turmas com mais acertos foram as de 5º ano 1 e 2 com 80% e 70%, respectivamente, e a de menor índice, a turma 2, do 3º ano, com 8,7%. O que provocou mais erros nas crianças foi o aspecto semântico presente no texto – ‘sete vezes mais’, o que induziu alguns alunos a realizarem uma soma entre os valores 3 e 7 que aparecem na proposição. Chama-nos a atenção que o 3º ano 1, tenha obtido quase um terço de acertos (31,2%), bem maior que o 3º ano 2 (8,7%).

Dentre os erros observados, além da confusão causada pelo aspecto semântico, o que fez os alunos adicionarem $7+3$, respondendo 10,00, algumas crianças que entenderam que o preço da pizza corresponderia a $3 \times 7,00$, erraram ao fazer os cálculos, chegando aos valores 18,00, 22,00 ou 24,00. Essas estratégias serão discutidas com mais profundidade no Capítulo seguinte.

Mesmo considerando a taxa de acertos do 5º ano, é significativo ressaltar que ainda se tenha mais 20% de crianças que ainda errem numa questão usual com números pequenos, cujo resultado poderia ser acessados até pelo cálculo mental.

b) Proporção Simples

Com o significado de proporcionalidade, foi aplicado maior número de questões, porém, com algumas variações. Nos itens 4 e 7, a diferença entre as situações está na grandeza numérica envolvida. No primeiro, temos: *‘D. Joana faz bolos de chocolate para a Lanchonete ‘Gostosuras’. Ela utiliza 4 ovos para fazer um bolo de chocolate. Se ela fizer 8 bolos, de quantos ovos precisará?’*. A questão poderia ser respondida mentalmente, por envolver os fatos fundamentais da multiplicação presentes na sequência da tabuada do 4 e do 8. Já a situação: *‘Marta vai comprar sorvete para uma festa na escola. Cada caixa de sorvete custa 13 reais. Ela precisa comprar 6 caixas com sabores variados. De quantos reais ela vai precisar?’*, dificilmente seria respondida mentalmente, o que exigia uma estratégia mais elaborada do estudante. Vejamos os resultados nas duas situações na Tabela 6.

Tabela 6 – Índice de acertos com problema de Proporção Simples - N° menor e maior

Turma	Proporção simples (n° menor) % Item 4	Proporção simples (n° maior) % Item 7
3° ano 1	56,2	37,5
3° ano 2	17,4	13
4° ano 1	41,1	29,4
5° ano 1	85	55
5° ano 2	63,3	33,3

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3° ao 5° anos.

Especificamente sobre a questão 4, o 5° ano 1 obteve o maior número de acertos, chegando a 85% e a turma com o menor índice de acerto foi a do 3° ano 2, com 17,4%. Nos chama a atenção que a outra turma do 3° ano tenha alcançado mais da metade (56,2%) das respostas corretas, superando o resultado da turma do 4° ano (41,1%). Observando os resultados das turmas do 5° ano, embora a turma 1 tenha chegado a 85% de acertos, a turma 2 só alcança 63%, em um problema que a operação de multiplicação poderia ser respondida pelo cálculo mental, $8 \times 4 = 32$. Este dado é preocupante, pois além de envolver quantidades pequenas, o significado de proporção simples é bastante usual na escola como um todo.

Na questão 7, que envolvia o mesmo significado - proporção simples, aumentando-se os valores dos dados, os resultados diminuem significativamente em todas as turmas, inclusive no 5° ano 1, que atinge somente 55% de acertos. É surpreendente a constatação da interferência no resultado geral da variável grandeza numérica, principalmente na turma do 5° ano 2, onde houve a maior queda, os acertos caem quase pela metade. Ao observarmos os resultados por turma, nesse problema, a gradação evolutiva esperada em alunos ao longo dos anos iniciais fica longe de ser constatada, pois se tem uma turma do 3° ano com índices melhores que o 4° ano e o 5° ano 2. Se analisarmos a turma que alcançou o melhor resultado, mesmo com algumas variáveis beneficiando seu quadro geral (já estudaram o conteúdo no ano, os alunos com mais dificuldades não participaram), o resultado é dramático, se considerarmos que o problema envolvia uma operação de multiplicação 6×13 , podendo ser resolvida também pela adição de parcelas iguais.

Para Chamorro (2011), a grande dificuldade das crianças com os algoritmos de multiplicação advém da não compreensão do sistema de numeração decimal com um aparato matemático considerável, no qual cada número encerra uma expressão de tipo polinomial em potências de base 10. Para responder essa dificuldade, podem ser explorados também outros

aspectos da multiplicação como a propriedade distributiva, os múltiplos de 10, as noções de dobro e metade.

Passemos agora a analisar os resultados com os problemas de proporção não direta e de proporção simples com correspondência muitos-a-muitos.

A questão 2 do diagnóstico²⁸ continha os itens a, b e c, trazendo o significado de proporção, mas foi apresentado de uma maneira não direta, uma vez que não estava explícito o preço por quilo. O problema trazia uma representação de tabela, referindo-se ao contexto da feira, conforme a Figura 17.

Figura 17 - Problema 2 do Diagnóstico - Proporção não direta

Carla compra frutas e verduras na feira. Hoje ela comprou 2 quilos. Veja na tabela quanto ela pagou. Paula comprou um quilo na mesma banca. Escreva na tabela quanto ela pagou. Ana e Eduardo também compraram nessa barraca. Veja quantos quilos eles compraram e preencha a tabela com os valores pagos.

Consumidores	Verdura e frutas	Preço
Paula	1 kg	
Carla	2 kg	6,00
Ana	3 kg	
Eduardo	5 kg	

Fonte: Diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

O desafio nessa questão era coordenar as informações que apareciam na situação. Carla pagou 6,00 por 2 kg de verduras e frutas. Ao observar a tabela ver-se-ia que outras pessoas também compraram nessa barraca e as crianças eram solicitadas a responder quanto cada uma gastou, relacionando a única informação relativa a preço – $2\text{kg} = 6,00$, com os outros dados. Como se pede o preço de 1 quilo, 3 quilos e 5 quilos, comprados nessa barraca, tem-se dificuldades diferentes em cada questão.

É observável na Tabela 7 que em todas as turmas há um decréscimo nos resultados corretos, surpreendendo o fato do 3º ano 2 e o 4º ano 1 obterem mais acertos que o 5º ano 2, no item 2c. Uma forte causa de erro foi a confusão na sequência de quilos 1, 2, 3 e 5, na qual muitas crianças consideraram para o item c, 4 quilos, uma vez que seguiria a sequência de acréscimo de mais um quilo.

²⁸ Esse problema foi baseado em Nunes et al. (2005).

Tabela 7 – Índice de acertos com problema de Proporção – não direta e muitos-a-muitos

Turma	Proporção simples - não direta %			Proporção simples (muitos-para-muitos) %	
	2a	2b	2c	8a	8b
3º ano 1	31,2	12,5	0	25	25
3º ano 2	21,7	21,7	17,4	17,4	17,4
4º ano 1	47	23,5	17,6	29,4	29,4
5º ano 1	90	60	50	60	70
5º ano 2	66,6	43,3	10	36,6	33,3

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

As crianças preencheram a tabela com uma variedade considerável de respostas, porém não pudemos ter acesso às estratégias utilizadas, uma vez que observamos a presença de poucos registros escritos. Tais estratégias podem ter sido o cálculo mental, contagem nos dedos, ou outras. No entanto, na variedade de respostas identificadas, percebemos a dificuldade que as crianças sentiram em coordenar os dados de maneira a chegarem a uma resposta correta. Mais de 40% das crianças não conseguiram acertar o valor de um quilo, o que exigia uma operação inversa – se 6,00 corresponde a 2 quilos, então 1 quilo corresponderia a 3,00. Se observarmos o índice de acerto dessa primeira questão, teremos uma queda considerável quando se pede o preço de 3 quilos, o que exigiu a coordenação entre o valor encontrado de 1 quilo para 3 quilos.

Se para responder a questão anterior era necessário encontrar o valor da unidade referência, no caso, o preço por quilo, na questão que envolvia a proporção simples com correspondência de muitos-para-muitos (Figura 18), esse aspecto não foi exigido, ou seja, não ajudava a resolver o problema identificar o valor de um caramelo, mas conservar a relação 5 para 3, ou seja, para cada 5 chocolates comprados, ganhava-se 3 caramelos.

Figura 18 - Problema 8 do Diagnóstico – Proporção muitos-a-muitos

Veja a promoção, na loja ‘Cacau Quente’:

Compre 5 chocolates e ganhe 3 caramelos!

Escreva a quantidade de caramelos que Ana e Joaquim ganharam após realizar a compra:

Ana comprou 20 chocolates. GANHOU ____ caramelos.

Joaquim comprou 15 chocolates. GANHOU ____ caramelos.

Fonte: Diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Esse tipo de questão não é comumente explorado pela escola, o que nos fez esperar que sua resolução trouxesse dificuldades às crianças. Conforme a Tabela 7, a turma com melhor índice foi o 5º ano 1, com 60%, para os caramelos que Ana ganhou, e 70% para os caramelos ganhos por Joaquim. A turma que obteve menor índice de acerto foi o 3º ano 2, com 17,4% de acerto para as duas perguntas. Chama-nos a atenção a aproximação entre o 3º ano 1 (25% de acertos) e o 4º ano 1 (29,4%), mais uma vez nos alertando acerca da gradação na intensidade na exploração dos conteúdos matemáticos os anos iniciais.

Nessa questão, também obtivemos uma variedade grande de respostas, as quais não apresentaram a estratégia utilizada para o seu alcance, gerando uma dificuldade maior para a análise, no entanto, ao discutirmos os registros semióticos elaborados pelos alunos, explicitaremos alguns bastante criativos (ver no próximo Capítulo). Algumas crianças compreenderam essa questão como uma multiplicação direta, ou seja, se alguém comprou 15 chocolates, então ganhou 3 vezes mais caramelos, respondendo 45, o que se constituía um equívoco.

c) A multiplicação inversa – Divisão

O significado que se aproximava diretamente da divisão, o da multiplicação inversa, estava presente no seguinte problema: *‘Na sala de aula a professora solicitou que as crianças formassem 6 grupos com quantidades iguais. Se havia 30 alunos, quantas crianças ficaram em cada grupo?’* Os resultados estão descritos na Tabela 8.

Tabela 8 – Índice de acertos com problema de Multiplicação Inversa (divisão)

Turma	3º ano 1	3º ano 2	4º ano 1	5º ano 1	5º ano 2
% Acerto	6,2	13	17,6	50	50

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Os resultados desse tipo de problema foram bem instigantes, uma vez que as quantidades envolvidas eram pequenas e também porque nós lemos e explicamos cada problema com tranquilidade, em todas as turmas. Os melhores resultados, do 5º ano, não passam da metade e o 3º ano 1 conseguiu um nível de acerto de apenas 6,7%. O que ocorreu? Por que as crianças erraram tanto? Como elas entendem esse tipo de problema?

Se compararmos com os resultados do 2º ano, veremos que os índices alcançados pelas crianças menores superam as turmas do 3º ano 1 e 4º ano. Ao analisarmos no Capítulo seguinte, os registros semióticos utilizados nesse tipo de problema, consideraremos que o

mesmo gerou um fenômeno denominado por Duval (2011) como incongruência semântica, ou não congruência, o qual corresponde a não conversão entre um registro de saída, no caso, a proposição do problema em texto, e o registro de chegada, que seria o desenho ou o cálculo com o qual respondesse a questão solicitada. Esse fenômeno diz respeito à dificuldade dos estudantes em identificar as unidades significantes nos registros a serem transformados. Ainda para Duval (2011), é muito difícil catalogar todos os casos de incongruência entre registros de uma representação, porém, ao serem explorados os mais variados tipos, possibilita-se que as crianças se capacitem a identificar unidades significantes em cada tipo diferente.

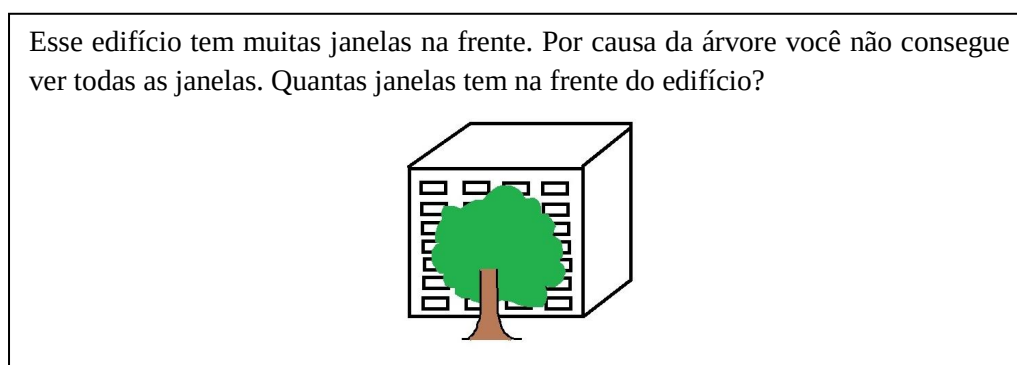
Nunes et al. (2005) discute sobre alguns tipos de problemas do campo multiplicativo num perspectiva inversa e, conforme sua análise, esse problema seria inverso tipo 2, o qual não explicita a relação fixa entre as duas variáveis, não conduzindo às crianças a utilizarem o esquema da correspondência. A autora cita erros semelhantes em problemas inversos de divisão nos quais as crianças obtêm respostas corretas cometendo erro de interpretação, ou seja, “contam quantos elementos em um grupo quando a pergunta refere a ‘quantos grupos’” (p.99).

Nos dois últimos tipos de problemas que iremos discutir, acrescentaremos os resultados das turmas do 2º ano, uma vez que foram aplicados também nelas.

d) Configuração retangular

O problema²⁹ da Figura 19 se aproximava do conceito de área por trazer uma representação com um arranjo retangular.

Figura 19 - Problema 5 do Diagnóstico – Configuração Retangular



Fonte: Diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

²⁹ Esse problema foi adaptado de Nunes et al. (2005).

O problema poderia ser resolvido pela contagem simples, porém, exigia a atenção para a regularidade na disposição espacial das janelas – são 4 colunas, cada uma com 7 janelas. Os resultados estão descritos na Tabela 9.

Tabela 9 – Índice de acertos com o Problema de Configuração Retangular

Turma	2º ano 1	2º ano 2	2º ano 3	3º ano 1	3º ano 2	4º ano 1	5º ano 1	5º ano 2
% Acerto	9,5	37,5	7,6	37,5	43,4	53	85	86,6

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Somente as turmas de 5º ano atingiram resultado satisfatório, com 85% e 86,6% de acerto, respectivamente. Um pouco mais da metade dos estudantes do 4º ano também responderam positivamente, no entanto, é um resultado baixo se atentarmos que a questão poderia ser respondida com uma contagem simples. Olhando para os 2º anos, duas turmas ficaram abaixo dos 10% e a turma 2 alcançou os mesmos resultados do 3º ano 1, o que indica que este tipo de problema já pode ser resolvido por crianças de anos anteriores.

Como a solução dessa situação-problema poderia ser alcançada com sua contagem baseada no desenho, as crianças não utilizaram uma variedade de registros, exceto 9 (nove) alunos que desenharam o restante das janelas que estavam escondidas pela árvore. Além desses, 4 (quatro) crianças do 5º ano utilizaram a adição ao lado do desenho, seja $7+7+7+7=28$ ou $14+14=28$, e 5 (cinco) alunos, também do 5º ano, registraram uma multiplicação, $4 \times 7=28$, ao lado do desenho.

Analisando os resultados de seus alunos, a professora 3ºP2 fez a seguinte afirmação:

Então eu observei que a questão 5 e a questão 6, do edifício das janelas e a do parque de diversão, foram os mais pontuados, então eu coloquei assim, que acreditava que fosse pelo fato de ter o desenho, para eles poderem, completarem o desenho e chegar ao resultado, para o nível deles é mais fácil (3ºP2)

Essa inferência da professora tem respaldo, uma vez que o desenho se constitui em um registro pictórico que facilita a compreensão da criança da situação proposta.

Entre os erros mais cometidos pelos alunos do 3º ao 5º ano, estão aqueles que disseram ter entre 25 e 30 janelas (excluindo, logicamente o 28), totalizando 21 crianças. Nessas turmas, somente 4 (quatro) alunos responderam a questão atentando-se apenas para as janelas visíveis.

Outro ponto a ressaltar é que esse tipo de problema não é utilizado na escola com frequência. Somente no relato da professora 2P1, encontramos indícios de exploração de

arranjos espaciais no ensino de multiplicação, na utilização de figuras como tijolos, caixa de ovos e tabuleiro de damas. Mesmo assim, nesses exemplos, as quantidades a serem contadas eram visíveis e acessíveis às crianças.

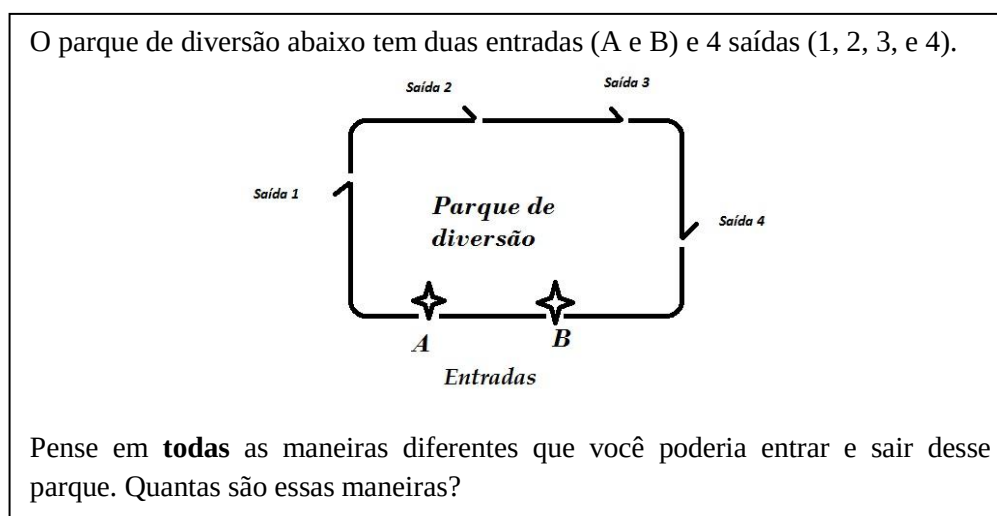
e) Combinatória

O significado envolvendo a combinatória é um dos menos trabalhados nas escolas, conforme indicam Van de Walle (2009d) e Pessoa (2009), e mesmo que os PCN Matemática (BRASIL, 1997) orientem seu uso já no 1º ciclo dos anos iniciais do ensino fundamental e os livros didáticos adotados pelas escolas já tragam algumas tarefas que envolvem esse significado, ele ainda está bem distante do cotidiano da sala de aula.

Conforme Pessoa (2009), o raciocínio combinatório constitui uma forma de pensar matematicamente, sendo importante a escola trabalhar com problemas variados que abranjam os seus diferentes significados como: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. Para os anos iniciais, as sugestões oferecidas nos PCN Matemática correspondem àqueles problemas de produto cartesiano, no qual se tem dois conjuntos com grandezas diferentes, sendo necessário construir um terceiro conjunto, diferente dos outros anteriores.

No exemplo aplicado aos alunos tínhamos um parque com 2 entradas e 4 saídas e perguntávamos de quantas maneiras seria possível entrar e sair desse parque (Figura 20). O conjunto correspondente à quantidade de maneiras de entrar e sair, constituía nosso terceiro conjunto.

Figura 20 - Problema 6 do Diagnóstico – Combinatória



Fonte: Diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Os dados referentes a esse problema estão contidos na Tabela 10 e por ele ter sido aplicado também nas turmas do 2º ano, trazemos os dados referentes a esse ano.

Tabela 10 - Acertos com o Problema de Combinatória

Turma	2º ano 1	2º ano 2	2º ano 3	3º ano 1	3º ano 2	4º ano 1	5º ano 1	5º ano 2
% Acerto	23,8	25	23	18,7	43,4	11,7	25	13,3

Fonte: Sistematização da autora do diagnóstico aplicado às turmas de 3º ao 5º anos.

Nesse problema a turma do 4º ano foi a que apresentou menos acertos, juntamente com o 5º ano 2, e a que obteve mais acertos foi o 3º ano 2. As turmas do 2º anos ficaram próximos ao 5º ano 1, que em todas as questões obteve resultados melhores. Afirmamos, então, que os dados fornecidos por essa situação evidenciam aspectos instigantes sobre o fazer matemático.

Uma estratégia básica para resolver essa situação seria traçar os quatro caminhos possíveis da entrada A até as quatro saídas e da entrada B às quatro saídas, realizando em seguida a contagem dos caminhos traçados. Pensamos que como essa estratégia se aproxima mais do desenho, o que é comumente associado às ações de crianças menores, os estudantes do 4º e 5º ano não recorreriam a essa estratégia. Se olharmos as estratégias erradas cometidas por crianças de 4º e 5º anos encontramos semelhanças com aquelas realizadas por estudantes do 2º ano.

Sobre a participação dos alunos, a professora 3ºP2, assinalou:

A questão 6, a do parque todos eles tentaram, foi a única que os 23 que fizeram, independente dos que erraram e do que acertaram, mas todos eles tentaram, enquanto que as outras não, teve uns que fizeram e outros que não fizeram mesmo, aí teve essa disparidade, mas a 6ª todos tentaram. (3ºP2)

E a professora do 5º ano 1, complementou:

(...) chamou minha atenção também foi aquela do parque que eu achava que eles iam se sair bem, né? e não se saíram. Porque justamente, tinha o desenho ali, eu achava que eles iam fazer as associações de tudinho e no entanto, encontraram dificuldades, nessa questão, né? (5ºP1).

A professora se surpreendeu com o baixo índice de acertos de sua turma, uma vez que havia o desenho para facilitar o processo de resolução. No entanto, o desenho não vem sendo estimulado em crianças maiores enquanto uma estratégia eficaz de resolução de problemas, daí a necessidade de socializar em sala de aula os diferentes procedimentos utilizados, juntamente com os registros semióticos, sendo um momento de análise, no qual serão discutidos vantagens e desvantagens e em quais situações eles caberiam.

Outra hipótese que levantamos é sobre a ausência de proposição de problemas com esse significado na escola, o qual contribui para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e pode proporcionar à criança a elaboração de um tipo de resolução.

Assim como vimos nas turmas do 2º ano, dentre as estratégias dos estudantes do 3º ao 5º ano, chama atenção a estratégia que distribui as saídas pelas entradas, dois a dois, tendo-se para a entrada A, as saídas 1 e 2 e para a Entrada B, as saídas 3 e 4, ou ainda, para a A, as saídas 1 e 3 e para a B, as saídas 2 e 4, chegando somente a quatro possibilidades. Como uma evolução no processo de solução, temos a estratégia que conduz a 6 caminhos possíveis, na qual o aluno já se permite maior flexibilidade, porém, ainda sem o controle da regularidade.

O que é bastante significativo nessa questão é que muitas crianças do 2º ano se saíram bem melhor que alunos dos anos seguintes. Considerando a estratégia que conduziu a 4 (quatro) caminhos, dentre as crianças de 2º ano, a frequência dessa resposta foi de 32%, enquanto nas turmas de 3º ao 5º ano, atingiu 46%, o que é preocupante, uma vez que se espera que os estudantes tenham atingido um desenvolvimento conceitual mais elaborado na mediada em que avançam na escolaridade.

Alguns indícios gerais foram fornecidos pelo resultado desse diagnóstico.

(i) A participação e o envolvimento das crianças com a tarefa, embora em uma turma tenhamos identificado um número significativo de respostas em branco, nos indicando interesse pela atividade de resolução de problemas. Ressaltamos que em todas as salas nós fizemos a leitura dos problemas, o que certamente os ajudou nesse processo, uma vez que nosso objetivo estava focado em identificar conhecimentos sobre multiplicação e, ao lermos, inseria-os já no processo de solução, sem o entrave da dificuldade com a leitura do texto escrito.

(ii) A possibilidade de explorar problemas de multiplicação com significados diferentes já com crianças de 2º ano do ensino fundamental, mesmo que suas professoras afirmassem não trabalhar esse conteúdo, desafiando-as e adiantando o seu desenvolvimento.

(iii) A constatação de que não há, efetivamente, nas turmas pesquisadas uma gradação de desenvolvimento, tendo-se em quase metade das questões do diagnóstico, uma grande variação de desempenho, na qual alunos do 2º ano tem desempenho igual ou superior ao dos alunos dos anos seguintes, as quais, supostamente, deveriam estar mais adiantadas.

(iv) A dificuldade das crianças ao resolverem problemas multiplicativos não é pequena, evidenciando uma dificuldade com a operação e com a atividade de resolver problemas. Mesmo em significados mais usuais no contexto da escola (proporção simples e comparação), encontramos índices de acertos muito baixos. No problema de proporção

simples (direta) que podia ser resolvido com a multiplicação 6×13 , o melhor resultado de uma turma do 5º ano chegou a 55%, sem falar que, para as professoras, este não é um conteúdo que as crianças têm dificuldades.

Em problemas com significados menos usuais, como combinatória, multiplicação inversa, multiplicação não direta e correspondência muitos-a-muitos, os resultados são ainda mais preocupantes.

Nesse cenário, concluímos esse Capítulo com a fala de uma professora que demonstra sua reação ao ver os resultados dos alunos no diagnóstico:

Meu Deus, eu preciso fazer alguma coisa para ajudar e muito os meus alunos. E como eu disse, a deficiência... Eu to precisando mesmo criar novas atitudes, criar novas maneiras, ter um novo incentivo dentro da sala de aula. Foi isso assim que eu vi de imediato que tem de acontecer. Só que eu tenho visto que dentro da sala de aula, por uma parte, eu nunca tinha visto uma turminha assim, de meninos com tanta falta de interesse, tanta falta de estímulos (4P1).

Temos consciência que essa porção da realidade é apenas uma amostra em um determinado momento, do processo escolar de alunos de anos iniciais. Acreditamos que um dos caminhos possíveis para um maior desenvolvimento das crianças está na compreensão de que os registros semióticos, delas e dos professores, podem contribuir com a mediação pedagógica no ensino de multiplicação, tema do Capítulo seguinte.

7. AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO

O tema sobre as representações semióticas esteve presente em nossas discussões com as professoras desde as primeiras conversas sobre o ensino de multiplicação, no entanto, ele foi sendo ampliado ao longo dos encontros. Não era viável ou adequado simplesmente perguntar: *que representações semióticas vocês têm sobre a multiplicação? Ou, quais as representações semióticas mais utilizadas?* Embora essas perguntas necessitassem de respostas, o caminho para alcançá-las deveria ser outro, porque esse termo não fazia parte do contexto das professoras.

Para a análise da mediação pedagógica que as representações semióticas podem exercer no ensino de multiplicação, duas perspectivas foram, por nós, consideradas: a compreensão das professoras sobre as representações e as representações dos estudantes, ao solucionarem problemas de multiplicação. Em relação à primeira, temos a compreensão das professoras sobre os registros dos seus alunos, e daquelas utilizadas no processo de ensino.

Os dados referentes aos saberes das professoras sobre as representações foram coletados tomando por base os Apêndices E, H e I, bem como nas interações promovidas durante os encontros. Em relação às representações semióticas das crianças, foram aplicadas duas atividades, ao longo do curso: a primeira, aplicada pela própria professora, consistia em um problema envolvendo a multiplicação³⁰ e a segunda, um diagnóstico sobre o conhecimento das crianças acerca da multiplicação, aplicado pela pesquisadora em todas as turmas. O objetivo maior desse levantamento foi identificar os saberes das crianças acerca dos variados significados da multiplicação, favorecendo a reflexão e aprendizagem das professoras sobre esse conhecimento, num primeiro momento, mas possibilitando uma análise mais detalhada para a nossa pesquisa. Após cinco meses do término do curso, aplicamos um novo instrumento em três turmas (3º ano1, 4º ano e 5º ano1).

Compreendemos que a apropriação das professoras, acerca dos erros e acertos dos alunos, bem como dos tipos de registros e níveis de representação semiótica, é necessária para que ocorra a mediação pedagógica, ou seja, a intervenção e ação docentes com o objetivo de proporcionar ampliação dos conhecimentos dos estudantes, a partir dos registros de

³⁰ Essa tarefa foi proposta no 3º encontro. Dois problemas foram sugeridos: do cachorro Jorge, para turmas de 2º e 3º anos: *Jorge é um cachorro. Ele tem uma péssima memória, pois esquece sempre onde enterra os ossos. Ele recebe um osso por dia. Em três semanas, quantos ossos Jorge ganha?* e do robalo Rodrigo, para turmas de 5º ano: *Rodrigo é um robalo. Ele faz trinta e seis bolhas por minuto. Em uma hora, quantas bolhas Rodrigo, o robalo, faz?* Os dois problemas foram retirados de Gwinner, 1989.

representação. É preciso investigar o que se sabe para se alcançar, com maior propriedade, o que não se sabe e, portanto, o que é preciso fazer para saber.

A temática sobre as representações semióticas em Matemática foi o foco mais específico no 5º encontro, cujo instrumento presente no Apêndice E, favoreceu desde a reflexão sobre as representações semióticas utilizadas pelos alunos de 2º, 3 e 5º ano, até aquelas especificamente assumidas no ensino de multiplicação. Como o termo representação semiótica, ainda não fazia parte do universo das professoras, utilizamos o termo estratégia, entendendo que o termo a ele se aproxima, mesmo sendo menos denso.

7.1 As professoras e as representações semióticas dos estudantes

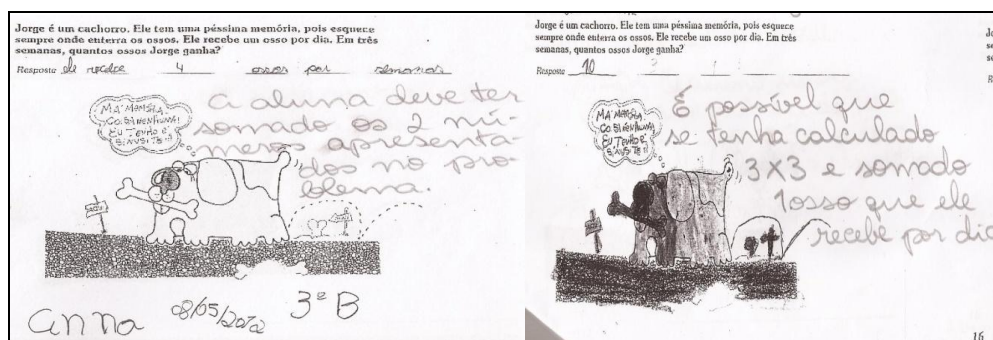
Iniciamos a análise e a reflexão sobre as representações semióticas a partir das respostas a duas situações-problema que envolviam a multiplicação (o ‘problema do cachorro Jorge’ e o ‘problema do robalo Rodrigo’), instigando, inicialmente a leitura sobre a variedade de estratégias³¹.

Cada professora fez uma leitura pontual dos registros, tentando identificar a estratégia que o aluno utilizou para resolver a situação, apontando os acertos e equívocos. Elas descreveram as estratégias elaboradas pelas crianças, sendo que algumas se basearam nos registros expostos enquanto outras levantaram hipóteses sobre os caminhos trilhados pelas crianças.

Refletindo sobre as diferentes estratégias utilizadas no problema do cachorro Jorge, a professora 2P2, ressaltou a variedade que foi evidenciada em sua turma: “algumas contaram as semanas, fizeram as contas com as parcelas iguais, contando os dias que contém a semana através de bolinhas, através de figuras dos ossos, e outros ainda não compreenderam o problema e acabaram fazendo o problema errado (...)”, como nos dois exemplos de registro da professora 3ºP1, na Figura 21.

³¹ No instrumento constavam 12 problemas resolvidos do cachorro Jorge e 08 relativos ao problema do robalo Rodrigo. Ver Apêndice E.

Figura 21 - Análise de Estratégia de Solução - Professora 3P1

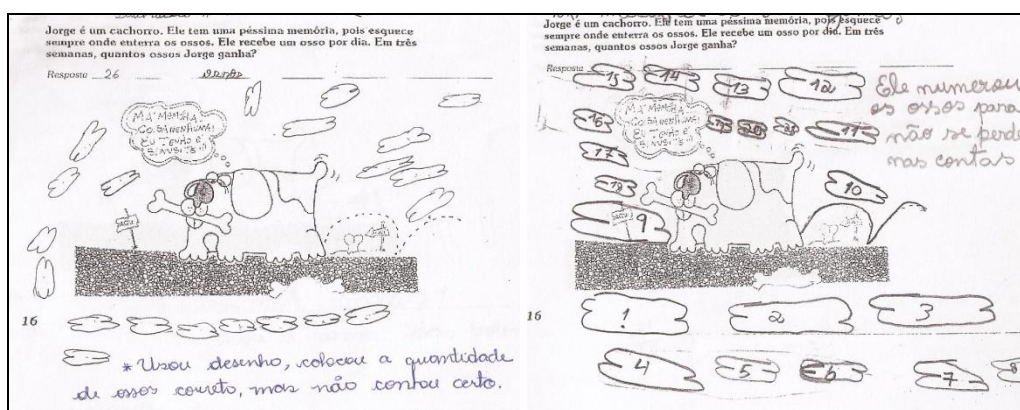


Fonte: Instrumento Aplicado às Professoras

Em relação à sua primeira reflexão, vê-se que a professora toma como pressuposto as quantidades numéricas que aparecem na situação, expostas nas expressões ‘um osso’ e ‘três semanas’, o que tem fundamento, uma vez que as crianças são ‘estimuladas’ a resolver problemas buscando os referentes numéricos que aparecem no problema-texto para realizar em seguida, uma operação. No caso, fazem $3 \text{ (semanas)} + 1 \text{ (osso por dia)} = 4 \text{ ossos por semana}$. A resposta da criança está errada, mas a análise da professora tem respaldo nos dados ali presentes.

No que se refere à sua discussão sobre o segundo registro, talvez sua reflexão tenha sido um ‘pouco forçada’ para aproximar a resposta da criança a uma resposta matemática com elementos multiplicativos. É mais provável que a criança tenha chegado a 10, a partir do referente ‘semana’ que possui 7 dias e o referente três semanas, fazendo-se também uma adição entre esses dois termos, e não a multiplicação proposta de $3 \times 3 = 9$. Os resultados das reflexões das professoras 2ºP2 e 2ºP3 estão presentes na Figura 22.

Figura 22 - Análise de Estratégia de Solução - Professoras 2P2 e 2P3



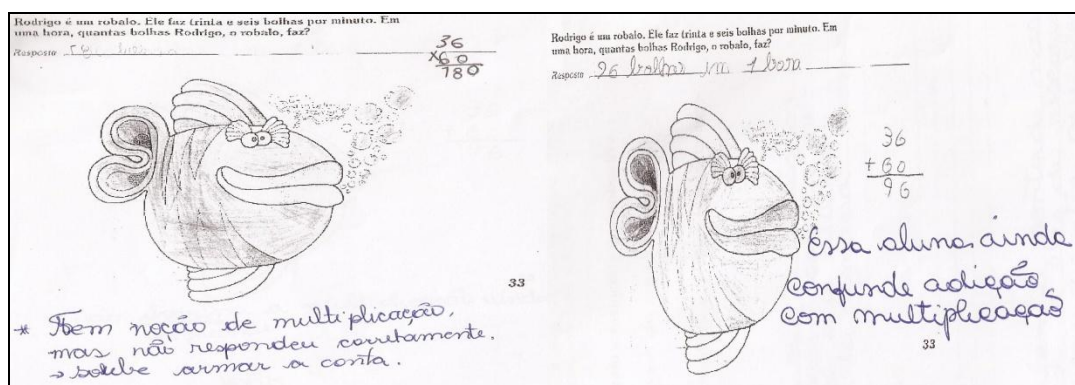
Fonte: Instrumento aplicado às Professoras

Esses dois registros são bem significativos porque o que levou a criança do primeiro registro a errar foi o não controle na contagem, o que não ocorreu na estratégia da segunda criança, possibilitando seu acerto. A reflexão da professora 2ºP2, à esquerda na Figura 22, indica que o aluno representou os ossos ganhos com desenhos de maneira correta, porém equivocou-se ao dar a resposta, provavelmente por errar a contagem dos ossos. A professora 3ºP2, no momento da discussão chegou a indicar que esse erro foi causado “pela disposição espacial que ela deu ao seu desenho, provocando o erro no momento da contagem”, uma vez que os ossos ficaram distribuídos ao redor do cachorro, o que poderia ter causado o engano de alguns serem contados mais de uma vez.

Em relação ao segundo registro, a professora 2P3 afirma que a criança enumerou os ossos ‘para não se perder nas contas’, o que constitui uma forma de controle no ato da contagem um a um, evidenciando um nível maior de organização no registro.

Em relação ao problema do robalo Rodrigo, as professoras identificaram os erros e ressaltaram os saberes já construídos, embora que em alguns casos lhes faltem aprofundamento teórico para refletir sobre as produções das crianças. No grupo, apareceram as seguintes reflexões: que os alunos já tinham noção de multiplicação, uma vez que somente um usou a adição, embora nem todos tenham resolvido corretamente; os alunos já tinha a noção de como calcular uma multiplicação por 2 números; os alunos já possuíam o entendimento das horas, pois todos usaram o termo 60, referente aos minutos que compõem uma hora, isso tudo sem o conteúdo de multiplicação ter sido ensinado. A Figura 23 evidencia algumas análises mais específicas.

Figura 23 - Análise de Estratégia de Solução - Professoras 2P2 e 3P2



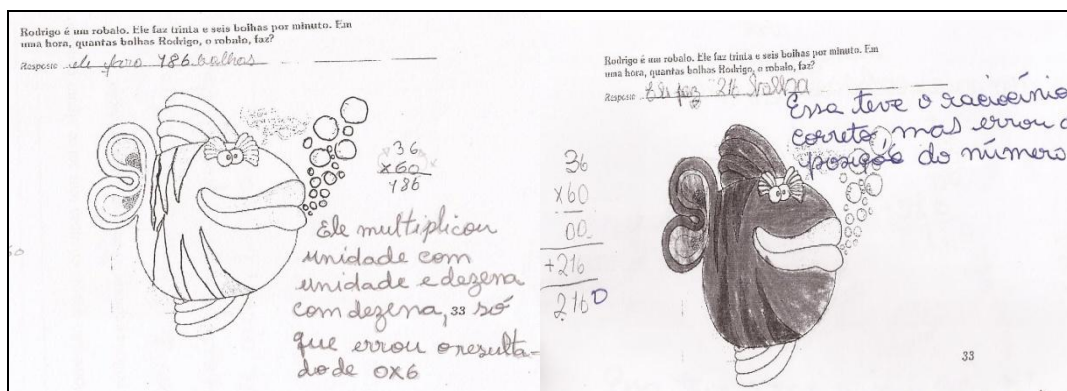
Fonte: Instrumento Aplicado às Professoras

A professora 2ºP2 reconheceu que a criança possui noções acerca da multiplicação, por armar a conta, mas não destaca seus erros no procedimento de cálculo. Ao responder

$0 \times 6 = 0$ e em seguida $6 \times 3 = 18$ de maneira correta, falta-lhe a compreensão de que cada algarismo do multiplicador deve ser multiplicado por cada algarismo do multiplicado.

A reflexão de 3ºP2 faz uma análise bastante simplista, afirmando que a criança ainda confunde adição com multiplicação, como se esse erro fosse parte de um processo natural idêntico a dizermos: ‘a criança ainda conta nos dedos’. Esse erro não se constitui em uma confusão de uma operação por outra, mas de não compreensão das ideias presentes em um texto proposicional. Ou ainda, uma saída encontrada, a de fazer uma conta com os algarismos que aparecem num problema conforme também indicaram Starepravo e Moro (2005).

Figura 24 - Análise de Estratégia de Solução - Professoras 2P2 e 3P2



Fonte: Instrumento Aplicado às Professoras

Nos comentários das professoras 2ºP2 e 3ºP2 (Figura 24) sobre as resoluções do problema, tem-se a dificuldade com o algoritmo formal, principalmente a compreensão do sistema de numeração decimal. Vê-se a indicação do raciocínio correto, pela escolha da operação adequada, porém as afirmações “errou a posição do número” e “só errou o resultado de 0×6 ” dizem pouco das dificuldades apresentadas pelas crianças.

A primeira criança não compreende que precisa multiplicar todos os algarismos de um número por todos do outro, ou seja, o algarismo da unidade do multiplicador precisa ser multiplicado por todos do multiplicando, assim como o algarismo da dezena. Portanto, a criança além de calcular errado $0 \times 6 = 6$, multiplicou em seguida $6 \times 3 = 18$, faltando 0×3 e 6×6 . Esse não é simplesmente um ‘erro de posição’. Indica a falta de compreensão das regras do algoritmo, baseadas no sistema de numeração.

O segundo aluno, embora esteja ciente da regra da multiplicação de todos os algarismos do multiplicador pelos do multiplicando, não realizou a soma corretamente entre os dois resultados obtidos, considerando que o zero ocuparia a ordem das unidades. É a não compreensão da posição, mas é algo mais, uma vez que o resultado obtido foi muito pequeno

- 216³². Se a criança verificasse sua resposta, viria que não era coerente, pois 10×36 corresponde a 360, o que ultrapassa o resultado obtido e, portanto, por 60 o resultado seria muito maior.

Essa não verificação dos resultados também se coloca para as resoluções anteriores. Um trabalho sistemático com a resolução de problemas corresponde a ensinar a necessidade de validação dos resultados obtidos. O cálculo estimado também cumpre essa função.

Para Duval (2011), a importância de um trabalho efetivo com as representações semióticas no ensino de Matemática é fundamental porque o acesso ao conhecimento matemático dá-se por meio dessas representações. Quando promovemos situações de reflexão dos professores sobre as estratégias utilizadas pelas crianças, a partir de registros semióticos, estamos reiterando a tese de Duval. Além disso, buscamos evidenciar que as representações semióticas de conceitos matemáticos constituem elementos importantes para o ensino de diferentes conteúdos, daí elas se tornarem também em ferramenta pedagógica.

Comparar registros, assinalando avanços entre eles, percebendo diferentes graus de compreensão, significa apropriar-se de uma ferramenta importante para o processo de ensino – os saberes das crianças. No entanto, essa identificação deve ser parte de um processo contínuo e espiralar, favorecendo em primeiro lugar a possibilidade de sua efetivação, o que significa que as crianças precisam ser estimuladas a registrarem e a expressarem seus pensamentos e estratégias. Parece redundante insistirmos nessa questão, mas não é tão distante a realidade de alunos que não usam da variedade de estratégias quando a escola propõe de maneira diretiva a resolução de problemas, por meio da estrutura cálculo – resposta, indicando a quase exclusiva maneira de resolver pelo uso de um algoritmo aritmético.

Para que se analisem com propriedade os saberes espontâneos das crianças e os conceitos científicos que estão em vias de amadurecimento, é imprescindível conhecer profundamente o conteúdo matemático presente. Todas as professoras que participam da pesquisa possuem formação em nível superior, sendo que 06 (seis) delas são pós-graduadas. No entanto, analisar representações semióticas de multiplicação com o intuito de intervenção pedagógica exige um conhecimento maior sobre essa operação, suas propriedades e suas possibilidades de cálculo.

³² No registro aparece o número 2160 porque a professora ao analisar, complementou a resposta inserindo o 0 (zero) ao final do resultado obtido.

O momento de discussão sobre as estratégias das crianças foi intenso e significativo, repercutindo no grupo sobre o próprio ato de refletir, espaço que nem sempre é proporcionado na escola, como é expresso na fala da professora 4ºP1.

Eu tava até comentando com a minha supervisora ontem, olhe, esse momento é tão bom! (...) Passa o tempo que eu até nem vejo, é uma coisa tão boa. Outra coisa que eu tô achando maravilhoso é realmente parar e observar porque eu tava pensando assim: meu Deus, quantas vezes eu vejo, eu vou fazer uma correção, (adição, multiplicação, qualquer correção), mas não parei, minha amada, para ficar realmente tentando entender, até por questão de tempo! Menina! Isso aqui, esses dias tem sido tão bom!

Por outro lado, embora seja constatado que a reflexão sobre a produção das crianças seja necessária, a própria professora do 4º ano e a do 5º ano 1 justificaram não fazê-lo por não ter tempo disponível.

(...) fiquei refletindo, talvez até pelo meu pouco tempo para chegar e questionar, questionar como meu aluno chegou ali, ver as possibilidades dele, ver o conhecimento dele, ver até, até onde realmente ele aprendeu e infelizmente, eu não sei as colegas, mas eu digo por mim, que a gente não para Maria para ver isso...A gente não para, não é? (...) E esse momento que a gente tá vendo aqui eu to vendo que eu to parando mais para olhar, assim, olhe se você ver, eu vou até mudar meu horário dentro da sala de aula, depois desse período aqui que a gente tá aqui (4ºP1);

(...) porque para se fazer uma análise de hipóteses e tal, a gente precisa de que? De tempo. E qual o professor que tem tempo de parar para tentar descobrir a hipótese que levou o aluno a colocar uma resposta daquela. Eu pelo menos, meu Deus do céu! (...) Então, infelizmente a gente não tem esses momentos que a 4P1 tá aí dando tanta ênfase; que bom se a gente tivesse, né? Para realmente analisar, né, Maria, por que o meu aluno respondeu dessa forma e não daquela? Porque é mais fácil, eu chegar como aqui eu chegar e colocar: tá errado aqui, tá errado aqui, certo, certo... Porque ela atingiu aquela resposta esperada, né? Mas a gente não teve tempo de ver que aqui é um avanço, que ela tá caminhando para esse acerto futuro (...) (5ºP1).

A continuidade da formação profissional é indispensável e essa formação deve implicar na compreensão do objeto a ser ensinado e do processo de ensino frente às demandas atuais. O fator tempo vem à tona porque as condições de trabalho docente, em nosso país, ainda obrigam o profissional de ensino a ter mais de um contrato de trabalho, o que o sobrecarrega, conduzindo-o a executar um número menor de funções, principalmente aquelas que se referem à reflexão e sistematização do trabalho realizado. Mais do que ter tempo, ou juntamente com tal reivindicação, é necessário saber o que fazer com ele, como potencializá-lo. Os processos de formação inicial e continuada de professores de anos iniciais precisam

contribuir, efetivamente, na articulação teoria e prática, tão defendida nos textos que fundamentam a Pedagogia. Se a formação inicial não dá conta desse complexo processo, pois ele não tem fim, que seja efetivamente complementado pela formação continuada que pode ser realizada de inúmeras formas, inclusive como foi feito no curso proposto para essa pesquisa.

É papel do professor reconhecer nos diferentes registros de seus alunos, o desenvolvimento conceitual ali explicitado e que nesses registros estarão interagindo conhecimentos espontâneos e conhecimentos escolares em construção. Além disso, é necessário atentar para a reflexão sobre esses registros no sentido de ampliá-los, propondo uma perspectiva mais próxima da linguagem matemática formal.

Esse momento de ‘olhar’ e ‘ver’ os registros de representações dos alunos já ocorre no ambiente escolar, porém, muitas vezes com objetivos destinados a classificar o certo e o errado, conforme corrobora a professora 5ºP1: “Porque é mais fácil, eu chegar como aqui eu chegar e colocar: tá errado aqui, tá errado aqui, certo, certo”. No entanto, nos relatos no grupo, outros elementos vieram à baila quando se referiram ao trabalho em sala de aula. Trabalhando com as contas no quadro, a professora 3ºP2 falara já no 2º encontro:

(...) eu encho o quadro de continhas e coloco eles para resolverem, isso aí já é um momento fase após o concreto, né? Quando já está indo para a montagem das contas. Eu vou individualmente de um a um, vou ver como está se fazendo, digo que pode contar, colocar palitinhos no quadro, pode desenhar bolinhas, pode contar nos dedos... e tem aqueles que se retraem por conta do erro, né? e como eu procuro me aproximar o máximo possível, eu não deixo o erro deles transparecer, já para evitar aqueles que sabem mais, chamar logo de ‘burro’, ‘tu não sabe?’ (3ºP2).

Nessa fala, vemos a preocupação em orientar cada aluno na aprendizagem do algoritmo formal, com o apoio do registro do desenho e da contagem um-a-um.

Complementando a ideia de que na escola já se faz a análise dos registros das crianças, a professora 2P2 afirmou:

a gente percebe com certeza quem tá num nível melhor quem tá num nível mais abaixo, então (...) tem uma parte no meu caderno que eu vejo o avanço da escrita, tá assim, assim...se melhorou nisso, precisa melhorar naquilo (...). Então a gente faz e no de matemática também. Eu e a professora 2P3, a gente discute muito isso. Na verdade a gente faz, mas às vezes a gente não registra como a gente fez aqui.

Esse ‘não registro’ indica as reflexões espontâneas, sem sistematização, e a professora 2P2 traz um elemento indispensável para a ação docente – o registro reflexivo. O registro que

tenha como objetivo a reflexão e também a orientação de seu trabalho, de seus futuros encaminhamentos e, nesse sentido, a sistematização por meio da escrita também conduz a um processo de formação.

Confirmamos que há na escola o trabalho de olhar os registros e estratégias das crianças muito mais na perspectiva de correção, assinalando ‘certo ou errado’ ou da classificação dos níveis dos estudantes, mas essa ação, embora já contenha sinais de reflexão, precisa ser ampliada por meio da apropriação maior do conceito da operação, no caso, da multiplicação.

Sobre a variedade de estratégias das crianças utilizadas para resolver problemas de multiplicação, seis professoras confirmaram haver em suas turmas, dando exemplos de contagem nos dedos e com objetos³³ (5 professoras); o uso de desenhos, como bolinhas e traços (6 professoras, sendo que 2ºP1 e 2ºP3 afirmaram que essa é a principal), cálculo mental (2 professoras), algoritmo da adição de parcelas iguais (4 professoras), algoritmo da multiplicação (3 professoras). Somente a professora 2ºP3 afirmou não ser evidente essa variedade, respondendo que como as crianças são pequenas, identifica-se mais o desenho. A professora 5ºP2 não entregou o instrumento respondido.

Embora haja uma afirmação da variedade de estratégias utilizadas pelas crianças no instrumento escrito, durante a discussão no grupo, os exemplos aos quais as professoras se referiam faziam menção aos problemas aplicados a partir do curso: *“foi uma diversidade no dia da atividade que Maria levou. Era contagem com bolinhas, contagem com tracinhos*³⁴*”* (3ºP2); *“eu coloquei que sim, que pela experiência do problema do cachorro Jorge...”* (2ºP2). *“E quando ela chegou que abriu o espaço: ‘olha, você tem um papel extra, você pode riscar, você pode contar com lápis, contar com os dedos’, então eles sentiram liberdade de fazer isso”* (4ºP1). Esse fato nos levou a questionar se tal diversidade tem sido mesmo observada no cotidiano da sala de aula.

Nessa direção, a professora 5ºP2, que não respondeu a questão por escrito, fez uma reflexão sobre algumas crianças que não demonstram variedade de estratégias.

(...) agora eu tenho uns alunos que têm o vício da fila, acham que tem de filar tudo, né? então eu noto assim, quando eu passo um trabalho, (...) aí tem uns colegas que entregam eles mesmo: ‘Tia, fulano tá ensinando, (é porque eles falam ensinando) tá passando, tá dando a resposta!’. É que tem aluno que parece... ele acha que não tem condição de fazer sozinho, eu percebo

³³ No caso do problema do cachorro Jorge, elas se referiram ao calendário.

³⁴ A aplicação do diagnóstico aconteceu a partir do 4º encontro com as professoras, portanto, essa fala remete a presença da pesquisadora na sala.

isso na minha turma. Eles acham que eles só vão fazer se o colega disser. Eles não param, não tem aquela “vou parar para pensar”; então eu falo pra eles: ‘ó, se você fizer, mesmo que você faça errado, você já tá aprendendo’(5ºP2).

Nesta fala, vê-se que alguns alunos se negam a realizar o trabalho e não se arriscam a utilizar estratégia alguma para resolver a atividade proposta. Nesse caso, o argumento da variedade de estratégias ‘cai por terra’, para os alunos que ficam esperando a resposta. E essa postura dos alunos também é ensinada e produzida pela própria escola. Em trabalho realizado anteriormente (AZEREDO, 2003), coletamos algumas estratégias das crianças no lixo da sala de aula, por não considerarem tais registros como parte de suas respostas, atendo-se apenas aos algoritmos formais, após a correção realizada pela referida professora.

Sabemos que a escola, com sua prática de exigir e valorizar o acerto, nega o erro e o ‘quase acerto’, desconsiderando-os como processo e como possibilidade para o acerto. Nesse contexto, a postura dos alunos de quererem/esperarem a resposta certa vem sendo estimulada no interior das aulas de Matemática, quando somente o resultado é valorizado ao final da atividade. Quando simplesmente se carimba E para o errado e C para o certo, não se explorando por meio de reflexão crítica os procedimentos realizados, conduz-se a uma postura passiva de não se expor, esperando-se que o outro – o professor ou o aluno mais ‘sabido’, forneça a informação.

7.2 As Professoras e as Representações Semióticas no Ensino de Multiplicação

O ensino de multiplicação engloba dois aspectos referentes às representações semióticas – às representações semióticas que as professoras utilizam em suas sequências didáticas sobre esse conteúdo e o aproveitamento pedagógico que é feito dos registros das crianças.

7.2.1 Representações Semióticas

As professoras utilizam diferentes representações no ensino de multiplicação, como as explanações orais a partir do significado de “forma simplificada de adição” (5ºP1); o uso do dicionário, pesquisando sobre o significado ali explícito para o verbete multiplicação (2ºP1) e a formulação de situações que conduzam a uma multiplicação.

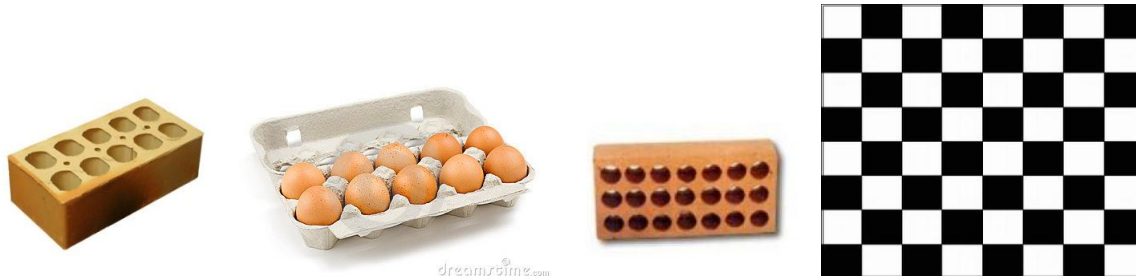
Especificamente sobre as representações semióticas, consideramos aquelas definidas por Duval (2009, p. 42) como “externas e conscientes, podendo ser divididas ainda em analógicas nas quais as imagens guardam relações de vizinhança e não-analógicas que não conservam relação com o modelo”. Essas representações são criadoras por natureza, apresentando flexibilidade e potência de uma diversidade de registros, com a possibilidade de tratamentos diversos.

As representações semióticas de multiplicação aparecem em diferentes registros, evidenciando a ideia de parcelas iguais até o trabalho com objetos que possuem linhas e colunas (configuração retangular), como nos exemplos citados:

- Formação de grupos com materiais concretos – uso de tampas e cordões para o contorno dos conjuntos.
- Formação de grupos com desenhos



- Gravuras com linhas e colunas³⁵



- Equação de soma de parcelas iguais juntamente com a multiplicação

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

$$5 + 5 = 10$$

$$7 + 7 + 7 = 21$$

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$8 \times 8 = 64$$

- Equação de multiplicação (horizontal e vertical)

$$2 \times 3 =$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \\ \times 5 \quad \times 3 \quad \times 7 \quad \times 2 \end{array}$$

$$4 \times 5 =$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \\ \times 5 \quad \times 3 \quad \times 7 \quad \times 2 \end{array}$$

$$8 \times 9 =$$

³⁵ Embora em Duval (2008, 2009) encontremos a possibilidade de inserir fotografias na classificação de representações semióticas analógicas, em Duval (2011, p. 134) encontramos outra classificação em relação à sua produção, na qual as fotografias por terem uma relação de causalidade com o objeto representado são consideradas representações visuais, mas não semióticas. Nessa mesma referência, o autor chega a afirmar: “As representações semióticas não são nem mentais, nem materiais, nem internas, nem externas. Elas são somente semióticas” (p. 134, grifos do autor).

- Algoritmo formal – multidígito

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 \times 4 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 54 \\
 \times 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 105 \\
 \times 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 349 \\
 \times 8 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 732 \\
 \times 15 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1293 \\
 \times 32 \\
 \hline
 \end{array}$$

- Proposição Textual em Problemas

Pedro traz para escola todos os dias 2 salgadinhos, em 5 dias quantos salgadinhos Pedro come? (2ºP2)

Se numa partida de basquete a equipe vencedora marcou 27 cestas de 2 pontos e 13 de 3, quantos pontos ela fez? (3ºP1)

É importante registrar que a utilização dessas representações não ocorre de maneira estanque, mas de forma integrada, podendo-se explorar os grupos com materiais e os registros na forma de adição, os desenhos dos grupos e as equações (adição e/ou multiplicação), os algoritmos e os desenhos, os algoritmos da multiplicação e os de adição, os textos de problemas e os algoritmos. Outro aspecto é que a variedade de representações ocorreu devido utilizarmos os relatos de todas as professoras, o que proporcionou uma complementação entre as sequências. Nenhum relato individualmente explicitou a utilização de todos esses registros.

O Quadro 5 apresenta uma sistematização breve das professoras acerca das estratégias utilizadas no ensino de multiplicação.

Quadro 5 - Estratégias Utilizadas pelas Professoras no Ensino de Multiplicação

Prof. ³⁶	Estratégias
2P1	- Formar determinados números de conjuntos, distribuindo pessoas ou objetos. Por exemplo: 15 pessoas para distribuir em 3 grupos e em 5 grupos; 10 balas em 2 conjuntos e em 5, e assim sucessivamente. Completar linhas e colunas; completando o gráfico;
2P2	Com tampinhas, por exemplo, separo a turma em grupo e oriento a turma agrupar quantidades iguais e por cores. Daí exploro as adições de parcelas iguais e as vezes que apresenta.
2P3	A utilização de desenhos de conjuntos, material escolar do próprio aluno, quantidade de carteira da sala de aula, entre outros.
3P1	- A idéia de proporcionalidade O uso do material dourado; a representação de conjuntos c/ desenhos; o raciocínio lógico; o algoritmo armado; a soma de parcelas iguais; os próprios alunos a formar grupos.
3P2	O uso do material concreto: tampinhas, palitos de picolé, bolinhas, etc. Trabalhar com desenhos; Trabalhar com as ordens do sistema decimal.
4P1	Utilizando material concreto. Ex: criar um material dourado com EVA ou cartolina onde cada forma representa um valor: unidade, dezena, centena; Cita-se um numeral e os alunos representam c/ esse material; Usando tampinhas, palitos, canudos e ou objetos de uso do aluno p/ que eles resolvem situações problemas ou algoritmo de forma real, concreta.
5P1	O uso de linhas e colunas; o concreto; desenhos de figuras separadas em parcelas iguais.

Fonte: Sistematização da Autora do Apêndice E.

³⁶ Mais uma vez, a professora 5ºP2 não entregou o instrumento.

O forte apelo ao uso do material concreto com a formação de grupos para que as crianças aprendam o conteúdo da multiplicação está presente na fala de todas as professoras. Juntamente a esse aspecto ‘prático’ vê-se a relação entre o trabalho com conjuntos (grupos) e a adição de parcelas iguais (3 professoras).

Embora as docentes 2ºP1 e 5ºP1 se refiram ao uso de linhas e colunas e 3ºP1, a ideia de proporcionalidade, o significado preponderante de multiplicação foi o de adição de parcelas iguais. Autores como Nunes e Bryant (1997), Van de Walle (2009d), Vale e Pimentel (2004) e os próprios PCN de Matemática (BRASIL, 1997) alertam para a necessária ampliação conceitual desse conteúdo desde os anos iniciais de escolarização.

A professora do 4º ano citou uma ação mais específica com o material dourado, envolvendo o sistema de numeração decimal, porém não associou essa sequência e a multiplicação. Talvez essa proposição didática, voltada para o sistema de numeração decimal, tenha uma relação mais direta com o estudo do algoritmo formal, que exige a compreensão de uma sequência de procedimentos baseados nas regras de agrupamento do nosso sistema de numeração. A professora do 3º ano 2 se refere às ordens do sistema de numeração, provavelmente para o trabalho com o algoritmo formal.

Outro aspecto a assinalar é que embora tenhamos aplicado esse instrumento no 5º encontro, nenhuma professora fez referência ao trabalho específico com os fatos fundamentais da multiplicação – a tabuada, confirmando a negação desse recurso enquanto ferramenta necessária para os alunos se apropriarem da operação. Apenas 3ºP1 fez referência propriamente ao algoritmo formal. Nas descrições das professoras, é visível um forte apelo ao aspecto da manipulação e do empírico como mecanismos que conduzem à aprendizagem da Matemática. Duval (2011) segue outra direção ao afirmar que é o semiótico que conduz a essa compreensão, fazendo uma crítica às sequências didáticas baseadas fundamentalmente no aspecto físico e empírico.

Se por meio do instrumento no qual discutimos as representações semióticas (Apêndice E), pouco foi evidenciado sobre o ensino do algoritmo formal, esse tema surgiu em outro momento quando a professora 5ºP2 informou que estava iniciando o ensino de multiplicação e que seus alunos estavam errando porque não afastavam o algarismo quando calculavam o segundo número do multiplicador, correspondente à dezena. Ela assim se pronunciou: *“Como eu entrei em multiplicação, meus alunos estão com muita dificuldade em multiplicar por dois algarismos porque eles não pulam a casa, a maioria, eles multiplicam e não pulam a casa (5P2)”*. Especificamente sobre o cálculo das operações, Duval (2009, 2011)

se refere a uma transformação denominada tratamento que significa uma transformação que ocorre no mesmo tipo de registro semiótico.

Explicamos então que é preciso relacionar a explicação às regras do sistema de numeração decimal. Demos um exemplo, com 17×15 , enfatizando que ao afastarmos o número, quando multiplicarmos o 1 da dezena, estamos ensinando uma convenção que ele precisa compreender sua razão de ser.

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 \times 17 \\
 \hline
 105 \\
 + 15 \\
 \hline
 255
 \end{array}$$

É interessante explicar que nessa multiplicação encontramos dois resultados parciais: um equivalente a multiplicação do número da unidade, no caso $7 \times 15 = 105$ e outro equivalente ao cálculo com número das dezenas, no caso $1 \times 15 = 15$, sendo necessário que o aluno compreenda que esse 15 equivale a 15 dezenas ou 150 unidades, pois estava-se multiplicando o 1 que equivale a 10 em 17. Após essa explicação, a professora 5ºP1 interferiu, estabelecendo-se, então a seguinte discussão:

Eu faço assim. Eu deixo bem explícito no quadro uma setinha mostrando que é a dezena, eu faço isso no quadro mesmo. (5ºP1)

Pesquisadora – Tudo bem, mas o que eu quero dizer é que ele pode entender a convenção, mas se ele quiser fazer $10 \times 15 = 150$, também dá certo.

Mas num fica mais complicado não, para eles? (5ºP1)

Eu acho complicado, porque para aqueles meus alunos eu tenho que procurar uma maneira mais curta, sem falar muito (5ºP2).

Diante desse relato, vemos que há receio das professoras em falar mais, explicar mais para não ficar complicado para seus alunos, embora entendamos que talvez esse ‘explicar mais’ exija compreender profundamente o conteúdo e nisso resida sua dificuldade. É preferível ‘perder mais tempo’, explicando e refletindo sobre os procedimentos para proporcionar a compreensão, do que sermos mais diretos e sintéticos e não favorecermos o entendimento, de fato, dos procedimentos e regras a seguir.

Toda a reflexão sobre as representações semióticas a partir das professoras corresponde à busca de respostas ou de explicação da nossa tese aqui proposta – a de que as

representações semióticas constituem elementos de mediação pedagógica. Se o acesso aos objetos matemáticos só ocorre por meio de representações semióticas (DUVAL, 1999, 2003, 2004, 2011; D'AMORE, 2007), o processo de ensino dos objetos matemáticos precisa ser pensado tomando-se por referencial os registros de representação semiótica e, portanto, sua exploração e utilização em sala de aula.

7.2.2 A Utilização Pedagógica das Representações das Crianças

No que se refere à exploração que as docentes fazem das estratégias apresentadas pelas crianças, algumas respostas voltam-se ao ensino de multiplicação, de maneira geral, não se referindo especificamente às estratégias das crianças, talvez por não terem entendido a questão:

Realizando diferentes situações problemas em que os alunos com auxílio, resolva-os utilizando objetos, pessoas e fazendo representações através dos desenhos. É preciso estimular, principalmente o uso dos desenhos para que haja melhor compreensão da situação, principalmente em turmas menores (2ºP1);

Trabalho muito com o material concreto, uso o material dourado, tampinhas e jogos de dominó, assim eles compreendem com mais facilidades e instigo o raciocínio lógico. Trabalho sempre em dupla e em grupo (2ºP2);

Através do material concreto (2ºP3);

Acolho as diferentes estratégias e mostro que há variados caminhos e que o mais importante é a compreensão que eles têm a respeito das situações e da resolução delas (3ºP1);

Eu costumo deixar eles bem a vontade nas atividades, dando liberdade a eles de riscarem a própria tarefa, mas procuro evitar que eles riskem a carteira (3ºP2);

Reconduzi-los a uma nova leitura, procurando usar material concreto (4ºP1);

Fazendo com que cada reflita sobre os caminhos que ele chegou aquele resultado. (5ºP1)

Pelas respostas, evidencia-se que o trabalho com tais estratégias ainda é incipiente. A fala da professora 5ºP1 de que promove a reflexão das crianças “sobre os caminhos que ele chegou aquele resultado”, é a única que apresenta um elemento de exploração e/ou continuidade do trabalho a partir do registro produzido. As professoras do 3º ano enfatizaram a postura de respeito e valorização das estratégias/representações, deixando as crianças à vontade, acolhendo as estratégias e mostrando que há vários caminhos. Esse aspecto é fundamental, pois se essa postura de valorização e respeito não ocorrer, as crianças se sentirão pouco a vontade para expor e discutir suas estratégias e registros.

As outras professoras fizeram referência à exploração de situações-problema, ao uso de material concreto (4), ao estímulo ao desenho (2), ao trabalho em duplas (1) e a instigação do raciocínio lógico (1), mas não respondem à indagação proposta sobre o que é feito após a elaboração das estratégias dos alunos, o que pode indicar ausência de uma ação sistemática nesse sentido.

Quanto à professora 5ºP1, que afirmou promover a reflexão sobre ‘os caminhos que ele chegou aquele resultado’, identificamos um forte componente didático de mediação pedagógica, uma vez que ela conduz o aluno a pensar sobre os procedimentos feitos, a realizar uma leitura e reflexão sobre sua própria produção, possibilitando sua ressignificação.

A discussão e reflexão acerca das produções dos estudantes no coletivo da sala de aula é enriquecedor e muito produtivo, uma vez que pode provocar tensões, ressignificações e sínteses. Para Sterepravo e Moro (2005, p. 138), geralmente “na escola, as crianças não tem oportunidade de interpretar suas notações. Nem mesmo têm chance de elaborar procedimentos pessoais de solução”, sendo mais frequente que os alunos utilizem o procedimento formal ensinado, observando se o fez corretamente ou não no momento de correção coletiva. Em pesquisa realizada, as autoras propuseram uma etapa de análise das notações feitas pelos próprios alunos, conduzindo a um processo de autoavaliação e tomada de consciência, uma vez que as crianças foram levadas a interpretar seus procedimentos, explicando-os e/ou avaliando-os.

Até aqui, dois desafios são postos ao trabalho docente com/a partir das representações semióticas dos alunos: o favorecimento e estímulo de sua produção, o que exige compreender que os estudantes levantam hipóteses, criam estratégias de pensamento matemático; e o que fazer após a sua produção, analisar suas vantagens e desvantagens, relacionando com o algoritmo formal da operação e até com outros algoritmos encontrados na história da multiplicação.

Duval (2011) discute a tomada de consciência das operações relativas à simetria, indicando que o recurso da linguagem, seja oral ou escrita, foi pouco utilizado. Para ele, a produção de um registro oral pode cumprir duas funções: a comunicação dialógica e a de objetivação. Sobre a objetivação, “ela produz para aquele que se exprime e por meio de sua expressão uma tomada de consciência” (p. 136), ajudando o aluno a dar-se conta de que sabe e do que não sabe.

Sobre esse aspecto, Vigotski também se referiu ao processo de formação de conceitos. Para ele, os conceitos científicos ou escolares favorecem nas crianças a tomada de consciência

dos mesmos, possibilitando utilizá-los de maneira arbitrária e em situações não somente específicas e circunstanciais.

Os conceitos científicos, mediados por outros conceitos, com um sistema hierárquico interior de relações, são o campo em que a tomada de consciência dos conceitos, sua generalização e apreensão parecem surgir. Assim, a tomada de consciência para pelos portões dos conceitos científicos (VIGOTSKI, 2009, p 290).

Porém, esse processo não ocorre de maneira automática, mediante o puro verbalismo, mas envolvendo uma série de “funções, como a atenção arbitrária, a memória lógica, a abstração, a comparação, a discriminação, por isso é inconsistente a ideia que os conceitos são apreendidos de forma pronta” (p. 247).

7.2.3 Ampliando o conhecimento sobre as representações semióticas de multiplicação

Buscando potencializar as atividades no grupo de discussão, aplicamos duas atividades (Apêndices H e I) cujo objetivo foi discutir problemas com significados que os alunos sentiram mais dificuldades, atentando-se para o uso de diferentes registros. Outro aspecto foi a necessidade de apresentar para as professoras, mesmo que de maneira breve, os conceitos problematizados por Duval (2009) de transformação da representação – o tratamento e a conversão.

A primeira tarefa (Apêndice H³⁷) problematizava conhecimentos de multiplicação e conhecimentos didáticos. As questões envolviam problemas com o significado de combinatória, (sendo que um envolvia permutação); o significado de configuração retangular (que pedia uma explicação para crianças de 4º e 5º anos) e um de proporção simples, que solicitava a construção de uma tabela, como resposta. A segunda atividade tinha um foco maior para a conversão entre representações semióticas, exceto a questão 2, que trazia um exercício de cálculo (tratamento). A conversão foi explorada nas direções: algoritmo – texto/problema; gráfico – texto/problema; tabela – texto/problema e tabela – gráfico.

Dessas duas atividades destacamos os elementos mais problematizados e discutidos juntamente com o grupo de docentes: os problemas de combinatória, o problema com a noção

³⁷ Os problemas que aparecem nessa tarefa foram adaptados de dois livros de Imenes, Lelis e Milani (2008) 4º e 5º anos.

de área (configuração retangular), o de elaboração de uma tabela e a elaboração de problemas a partir dos algoritmos propostos.

a) Tarefa 1 (Apêndice H)

A escolha de problemas com o significado de combinatória ocorreu por provocar menos acertos entre os alunos, no diagnóstico aplicado. Na hipótese de que esse resultado tenha ocorrido porque os professores não exploram este significado, propusemos dois problemas para serem solucionados de duas maneiras diferentes. O primeiro problema era: *A mãe de Luís comprou três tipos de pães no supermercado: de fôrma, bisnaguinha e pão integral. E levou para casa também três tipos de frios para fazer sanduíches: salame, presunto e mortadela. Quantos tipos diferentes de lanche é possível que ela faça para Luís, juntando um tipo de pão e um tipo de recheio?*

Essa situação traz o significado de produto cartesiano, cuja caracterização é que “dois ou mais conjuntos dispostos são combinados para formarem um terceiro conjunto” (PESSOA, 2009), no caso, o conjunto de tipos de lanche formados por pão e recheio. Para este problema todas as professoras responderam e apresentaram soluções com registros de desenhos, pares de letras, de algoritmo de adição ou de multiplicação, sendo que algumas fizeram durante o encontro.

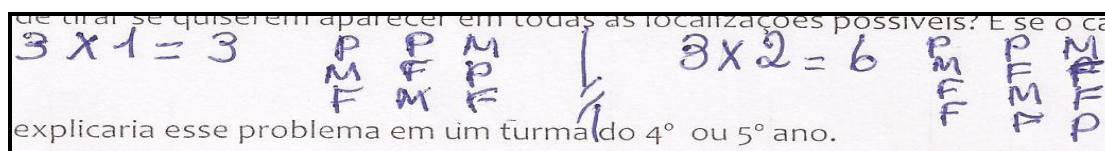
O segundo problema era : *Um pai, uma mãe e um filho querem tirar uma foto, sentados um do lado do outro. Quantas fotos diferentes eles terão de tirar se quiserem aparecer em todas as localizações possíveis? E se o casal tivesse 2 filhos?.* A questão gerou mais discussões, desencadeando uma reflexão sobre a proposição da adição de parcelas iguais como marca da multiplicação. Esse é um problema que, embora esteja no grupo de combinatória, segundo os PCN Matemática, aponta um significado diferente do anterior, pois exige que seja feita uma permutação simples.

Para compreender esse significado temos: “dado um conjunto formado por n elementos, chama-se permutação desses n elementos qualquer sequencia de n elementos na qual apareçam todos os elementos do conjunto”. (TELECURSO 2000, Aula 49, p. 398). Conforme Pessoa (2009), nas situações de permutações simples, “todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações e, quando a ordem é modificada, novas possibilidades são geradas”, o que diz respeito à mudança de posições das pessoas nas fotos.

Na primeira parte do problema, a dificuldade foi sentida por duas professoras. Uma que não conseguiu responder por pensar que “o filho ia tirar uma foto só com a mãe e outra

só com o pai” (4ºP1) e a professora 3ºP2, que representou sua solução como indicado na Figura 25.

Figura 25 - Registro de Solução ao Problema 2, Tarefa 1 - Professora 3P2



Fonte: Tarefa 1 aplicada às professoras.

Para esclarecer a questão, fizemos uma representação cênica, na qual convidamos três professoras para serem a mãe, o pai e o filho. Entendido o problema, passamos a questão seguinte: *e se fossem dois filhos?* Sobre essa questão, a professora 2ºP3 assim relatou:

esse nº 2 da letra B, o das probabilidades, quando foi só com um filho, tava bem facinho de fazer, mas quando apareceu outro filho, aí deu um pouquinho mais de trabalho, aí eu fiz como criança pequena de um por um, olha (mostrando sua estratégia), fui fazendo e como eu não sabia a regra, né? deve ter uma regra na Matemática que se dá conta rapidinho, mas aí eu não sabia, fui fazer um por um e fiz tudinho (2ºP3).

Nessa sua fala, a professora 2P3 expressa que seu jeito de fazer foi como de uma criança, pelo fato de não saber a ‘regra matemática’, no entanto, sua compreensão foi maior e mais consistente que a da professora 2ºP1 que se utilizou de uma regra matemática, mas não conseguiu explicar o porquê, conforme veremos a seguir.

As professoras apresentaram suas respostas no grupo e compararam estratégias. Além disso, promovemos a análise sobre os níveis de representações semióticas que foram evidenciadas no grupo. A Figura 26 apresenta três tipos de respostas que indicam certa graduação e seus níveis de compreensão.

Figura 26 - Registro de Solução Professoras 2ºP3, 3ºP1 e 2ºP1, respectivamente.

2 FILHOS {P=PAI, M=MÃE, F₁=FILHO, F₂=FILHO}

- P F₁ F₂ M
- P F₂ F₁ M
- P M F₂ F₁
- P M F₁ F₂
- P F₂ M F₁
- P F₁ M F₂
- M F₁ F₂ P
- M F₂ F₁ P
- M P F₁ F₂
- M P F₂ F₁
- M F₂ P F₁
- M F₁ P F₂
- F₁ F₂ P M
- F₁ P M F₂
- F₁ M P F₂
- F₁ F₂ M P
- F₁ P F₂ M
- F₁ M F₂ P
- F₂ F₁ P M
- F₂ P M F₁
- F₂ M P F₁
- F₂ F₁ M P
- F₂ P F₁ M
- F₂ M F₂ P

$6 \times 4 = 24$

1) Pai
Mãe
Filho

+ 2 fotos p/ cada pessoa. - -

$\Rightarrow 6$ fotos tendo um filho.

3×2 ou $3 + 3$

Pai Mãe Filho 1 Filho 2

P M F₁ F₂

P F₁ F₂ M

P F₂ F₁ M

P F₁ M F₂

P M F₂ F₁

P F₂ M F₁

$6 \times 4 = 24$ fotos.

ou $6 + 6 + 6 + 6$

P M F FPM

P F M FMP

M P F FMP

M F P FMP

$1 \times 2 \times 3 = 6$ maneiras

2 filhos: $6 \times 4 = 24$ maneiras

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ pessoas

você explicaria esse problema em um turno do 4º ou 5º ano

Fonte: Tarefa 1 aplicada às professoras.

As três respostas ao problema possibilitam discutirmos sobre a gradação entre as representações e seus níveis de compreensão sobre o problema. O primeiro registro indica a necessidade de identificar todas as possibilidades de fotos, considerando cada membro em uma posição, totalizando $6 \times 4 = 24$, o que não corresponde adequadamente o próprio registro, uma vez que se tem 4×6 .

No segundo registro semiótico, a resposta à primeira parte do problema contém todas as possibilidades para se tirar as fotos. A professora, após fazer o esquema representativo, escreve 3×2 , o que indica que há 2 posições para cada pessoa em cada posição, mas em seguida ela escreve $3 + 3$, cujo significado na situação descrita está ausente. Na segunda parte do problema tem-se as descrições das possibilidades para apenas uma pessoa, no caso o pai, na posição 1, tendo-se 6 fotos. Após esse registro, viu que se colocasse a mãe nessa posição, ter-se-ia mais 6 fotos e assim também para o filho 1 e o filho 2, generalizando o procedimento. O equívoco é encontrado, mais uma vez, no algoritmo $6 \times 4 = 24$, o qual não corresponde ao registro realizado, uma vez que temos 4 vezes 6 fotos tiradas com uma pessoa em determinada posição. No entanto, há avanço desse registro em relação ao anterior, pois

embora tenha iniciado da mesma forma, ocorreu uma generalização do procedimento, a partir da regularidade observada, chegando-se à solução de $6+6+6+6$.

Esse aspecto referente a representação do algoritmo da multiplicação em situações de combinação e, como veremos a seguir, em situações que envolvem área, é bastante instigante. A própria professora autora desse registro questionava: *qual é o registro correto? É 2×3 ou 3×2 ? É 6×4 ou 4×6 ?* Voltaremos a esse aspecto mais adiante.

A terceira solução apresenta um conhecimento sistematizado sobre análise combinatória, embora a professora não conseguisse explicar o porquê de tal procedimento e o que a levou a utilizá-lo. Pareceu-nos evidente que ela lembrou de alguma aula do ensino médio, na qual estudou esse conteúdo. Para ela, a resposta 6 na primeira parte do problema correspondia à multiplicação $1 \times 2 \times 3 = 6$ e o resultado 24, referente à segunda parte, foi o produto da multiplicação: $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

A explicação para que esse procedimento seja válido é que ele está baseado no raciocínio do princípio multiplicativo que “corresponde a uma ferramenta básica para resolver problemas de contagem, sem que seja necessário enumerar seus elementos” (TELECURSO 2000, p. 391, aula 48,). Os problemas de contagem estão incluídos naqueles que envolvem análise combinatória.

O princípio multiplicativo pode ser assim enunciado: se uma decisão d_1 pode ser tomada de n maneiras e, em seguida, outra decisão d_2 puder ser tomada de m maneiras, o número total de maneiras de tomarmos as decisões d_1 e d_2 será $n \cdot m$.

Vejamos a explicação desse princípio no exemplo trabalhado: *Um pai, uma mãe e um filho querem tirar uma foto, sentados um do lado do outro. Quantas fotos diferentes eles terão de tirar se quiserem aparecer em todas as localizações possíveis? E se o casal tivesse 2 filhos?*

Na primeira etapa do problema, temos três decisões a tomar, referentes às posições:

d_1 – pessoas que podem ficar na primeira posição

d_2 – pessoas que podem ficar na segunda posição

d_3 – pessoas que podem ficar na terceira posição

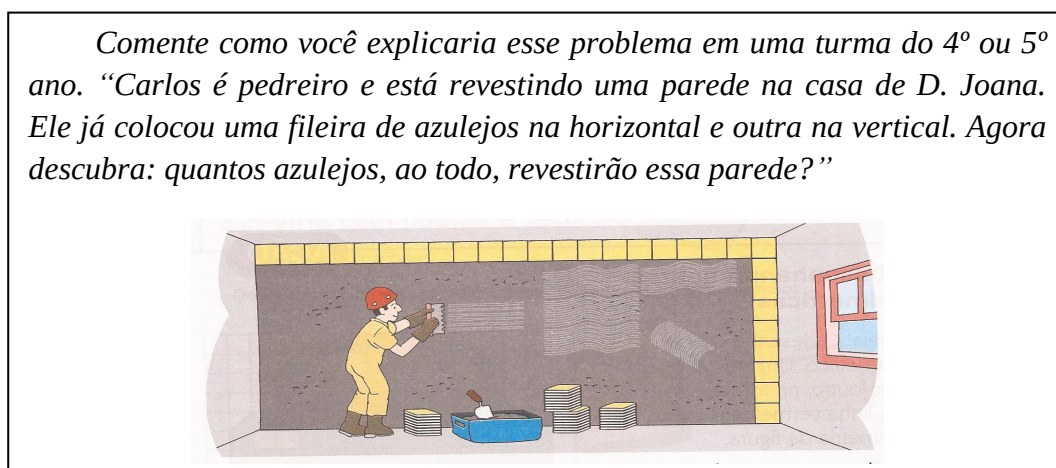
Para escolher as pessoas que podem ficar na 1ª posição, temos três possibilidades (o pai, a mãe e o filho); depois, para escolher quem pode ficar na 2ª posição, só há duas opções, pois uma pessoa já ocupou a 1ª posição; e para a 3ª posição só nos resta uma opção, pois já ocupamos a 1ª e a 2ª posição. Temos então, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Seguindo a mesma lógica para a segunda parte do problema, teremos 4 opções, para a 1ª posição; 3 opções para a 2ª posição; 2 opções para a 3ª posição e apenas uma opção para a última, ficando assim representada: $4.3.2.1=24$ possibilidades.

Ainda sobre essa questão, a professora questionou se o registro a fazer poderia ser 3×2 ou 2×3 (1ª parte do problema) ou 4×6 ou 6×4 (2ª parte do problema).

Outra questão, da mesma tarefa constituía-se em um problema profissional, uma vez que colocava as professoras em reflexão sobre o processo de ensino a partir da situação-problema. A questão não se referia somente à solução do problema, mas sobre a maneira como a professora explicaria o problema aos alunos de 4º e 5º anos (Figura 27³⁸).

Figura 27 - Problema 3 da Tarefa 1 aplicada às Professoras



Fonte: Tarefa 1 aplicada às professoras.

As respostas das professoras versaram desde a leitura da imagem com as crianças, observando e analisando o que já foi feito (2ºP1 e 5ºP1), contando os azulejos já colocados (3ºP1 e 4ºP1), passando pela explicação de que se devia multiplicar linha x coluna, ou 21×9 para chegar à solução do problema. Chamou-nos atenção as respostas de três professoras:

Carlos já utilizou 21 azulejos na horizontal e 9 na vertical, quantos azulejos ao todo irá utilizar para completar toda a parede? (2ºP3);

Eu explicaria que a quantidade de azulejos na horizontal já colocados (21) multiplicado (x) pelos azulejos na vertical (9) são suficientes para se chegar ao resultado correspondente a toda parede revestida. $21 \times 9 = 189$ azulejos. (Ideia de área) linha por coluna (3ºP1);

Observar quantos azulejos foram necessários para preencher cada coluna e para cada linha. Direciono para que eles vejam que o espaço de um é igual em todos os outros espaços. Sabendo que a multiplicação é a adição de

³⁸Esta figura contém uma imagem retirada de Imenes, Lelis, e Milani, 2008.

parcelas iguais eles vão perceber que somando chega-se ao resultado e multiplicando também (5ºP1).

A resposta da professora do 2º ano chamou nossa atenção porque ela simplesmente repetiu trechos do problema, sem mais nenhuma explicação, demonstrando uma intervenção pouco ativa; a resposta da professora 3P1 enfatizou a explicação a ser dada por ela sobre o procedimento da multiplicação como suficiente para solucionar a questão. Ora, seria necessário, antes de informar que pode ser resolvido por uma multiplicação, conduzir os alunos a uma leitura e reflexão sobre os azulejos que já foram colocados, construindo com as crianças o procedimento multiplicativo.

A professora que melhor apresentou uma sequência de passos a promover com as crianças, a partir dessa situação, foi a professora do 5º ano. Ela enfatizou três aspectos: a observação inicial dos dados fornecidos no desenho; o direcionamento para a compreensão da regularidade da quantidade que é igual em cada linha vertical e/ou horizontal e a relação com a adição de parcelas iguais e a multiplicação.

Na última questão da atividade solicitamos a construção de uma tabela para explicar aos alunos o seguinte problema: *Uma fábrica produz, em média, 6 camisas em 4 horas. Quantas camisas ela produz em 8 horas, em 12 horas e em 20 horas? Considerando esse tempo médio, em quanto tempo ela produz uma camisa, apenas? (monte uma tabela para explicar seu raciocínio).*

A discussão desse problema foi muito interessante porque, na primeira parte, nenhuma professora apresentou dificuldades: construíram tabelas, explicitando a relação entre a quantidade de horas e a quantidade de camisas fabricadas nesse tempo.

Figura 28 - Registro das Professoras 3P1, 2P1 e 2P3 respectivamente ao problema 3

6 camisas — 4 horas	HORAS TRABALHADAS	PRODUÇÃO DE CAMISAS	6 — 4 h
12 camisas — 8 horas	4 h	6	12 — 8
18 camisas — 12 horas	8 h	12	18 — 12
30 camisas — 20 horas	12 h	18	30 — 20
	20 h	30	

Fonte: Tarefa 1 aplicada às professoras.

No entanto, quando passamos a discutir o que foi feito para descobrir o tempo gasto, em média, na produção de uma camisa, ficaram explícitas algumas incompreensões que levaram quatro professoras a não responderem essa questão. Quem mais destacou sua

dificuldade foi a professora 2ºP3, que falou: “*eu fiz com a regrinha de 3, né? eu fiz 6 camisas para 4 horas que deu esse 1,5. Eu só não sei qual foi a conta*”. Em outro momento ela complementou: “*cheguei em 1,5 de 6 dividido por 4. Ai faltou essa transformação para hora, porque 1,5 é 1,5 de quê?*”.

Em seguida a professora 3ºP1 expressou: “*são 4 horas para 6 camisas, mas quer saber uma camisa só. Multipliquei 4 horas por 60, que é uma hora e cheguei a 240 minutos, 240 para 6 camisas, 240 dividido por 6, 40 minutos*”, apresentando as tabelas produzidas (Figura 29).

Figura 29 - Registro da Professora 3ºP1 - Problema 3

horas - camisas		min. - camisas	
4h	— 6	40	1
8h	— 12	80	2
12h	— 18	120	3
16h	— 24	160	4
20h	— 30	200	5
		240 (=4h)	6

Fonte: Tarefa 1 aplicada às professoras.

A partir da explicação da professora 3ºP1, as professoras entenderam a estratégia utilizada, mas restava discutir sobre o procedimento realizado pela professora 2ºP3, que a impediu de resolver a questão. Discutimos então sobre o que ela estava dividindo e qual sua relação com a resposta da colega.

Após as discussões, chegou-se à conclusão que a professora 2P3 tinha percorrido outra direção: ao invés de calcular a quantidade de tempo médio para se fabricar uma camisa, ela calculou a quantidade de camisa que é feita em 1 hora, obtendo a resposta, uma camisa e meia. Essa informação se assemelha ao resultado obtido por quem calculou o tempo gasto ao se fazer a camisa – 40 minutos. Ora, se em 40 minutos se faz uma camisa, com mais 20 minutos que faltam para uma hora, tem-se mais meia camisa.

Esse fato foi muito importante no grupo, servindo para fundamentar a discussão sobre a importância da significação que os dados e os números obtidos ao fazer os cálculos precisam ter. Nesse exemplo, a dificuldade não estava nos procedimentos realizados pela professora, mas na incompreensão do que os dados significavam.

Outro aspecto discutido foi o papel que a tabela tem na organização de dados, facilitando a visualização das regularidades matemáticas presentes. Por exemplo, observando os dados do problema na tabela, vê-se que de um lado os números vão se aumentando de 4 em 4 e no outro, de 6 em 6.

b) Tarefa 2 (Apêndice I)³⁹

A tese fundamental da teoria de Duval (2009, 2011) é que se o sujeito só tem acesso aos objetos matemáticos por meio de representações, sendo necessária a coordenação de variados registros de um mesmo objeto, pelo menos dois, uma vez que nenhuma representação semiótica consegue dar conta de todas as características e propriedades do referido objeto. Nessa direção, ao elaborarmos esta Tarefa (Apêndice I), especificamente sobre o tema da conversão, consideramos que a resolução de problemas também exige uma conversão de um texto proposicional para outro registro (algoritmo, esquema, desenho), mas aqui o foco foi a exploração da conversão em outras direções: algoritmo – problema/texto; gráfico – problema/texto; tabela – problema/texto; tabela – gráfico, além de uma atividade de cálculo de um algoritmo, que envolvia o tratamento.

Na questão que explorava a direção algoritmo – problema/texto, propusemos duas sentenças matemática: a) $307 \times 15 =$ e b) $4 \times 120 =$. Para a sentença a, obtivemos os seguintes problemas/texto presentes no Quadro 6.

Quadro 6- Problemas elaborados pelas professoras para a sentença 307×15

Professoras ⁴⁰	Problemas/texto
2P1	Uma televisão de 14 p custa 307 reais nas Lojas Maia. No mês de maio ela vendeu 15 TVs. Qual o valor em dinheiro que a loja recebeu com a venda desse produto?
2P2	Maria comprou uma geladeira e um fogão nas Lojas ‘Tudo Mais Barato’ e dividiu tudo em 15 prestações de 307,00. Qual foi o valor da compra?
3P1	Numa construção foram gastos 307 tijolos a cada dia. Qual o total de tijolos usados num período de 15 dias?
3P2	Nas Lojas Bugary houve uma liquidação de fogões. Cada fogão custa 307 reais. Eu comprei 15 fogões para presentear as famílias de um bairro. Quanto eu gastei no total?
4P1	Houve uma reforma na biblioteca, chegaram a penúltima remessa de livros, onde haviam 15 caixas com 307 livros em cada uma. Quantos livros novos chegaram?
5P1	José comprou uma moto. Ele deu R\$550,00 de entrada. E vai pagar o restante em 15 prestações iguais de R\$307,00. Qual o valor total da moto?

Fonte: Tarefa 2 aplicada às professoras.

Os problemas elaborados apresentam significados de proporcionalidade, sendo que três deles indicam a operação de multiplicação de maneira direta – 15×307 (2ºP2, 4ºP1 e 5ºP1), enquanto que os outros problemas especificam primeiramente o valor da unidade (o valor de uma TV, os tijolos usados por dia, o valor de um fogão). Os problemas de 2ºP1 e de

³⁹ Desta tarefa só analisaremos as questões que envolvem a conversão algoritmo – texto/problema, uma vez que as outras questões não foram discutidas no grupo com as professoras pela não disponibilidade de tempo.

⁴⁰ A professora 5ºP2 não respondeu a tarefa. A Professora 2ºP3 não respondeu esse item.

5ºP1 possuem informações a mais que precisam ser analisadas se consideradas ou não na resolução do problema. Em todas as situações, o número 15 assume a função de multiplicador. Quatro problemas trazem contexto de compra de produtos, obtendo-se o valor em reais e dois deles envolvem quantidades discretas, cujos resultados serão quantidades de tijolos e livros.

Para o segundo algoritmo, 4x120, os problemas elaborados estão descritos no Quadro 7.

Quadro 7 - Problemas elaborados pelas professoras para a sentença 4x120

Professoras	Problemas/texto
2P1	Quatro amigos vão fazer aniversários. Cada um deles tem direito a 120 convidados. Quantos convidados estarão nessa festa?
2P2	João colocou o piso da garagem de sua casa, nela coube 120 lajotas, sabendo que sua medida é um quadrado exato, quantas lajotas coube no piso da garagem? (2P2);
3P1	Paulo tem R\$ 120,00 e o seu irmão tem o quádruplo do seu valor. Quanto tem o irmão de Paulo? (3P1);
3P2	Dona Maria comprou 4 bicicletas para seus netos. Cada bicicleta custou 120 reais. Quanto foi que Dona Maria gastou com as bicicletas? (3P2);
4P1	Jeanderson coleciona carrinhos. Ele tem 1 coleção com 120 carrinhos. Seu amigo possui o quádruplo. Quantos carrinhos seu amigo tem? (4P1);
5P1	A distância entre as duas cidades Mari e Riachão é de 120 km. Um ônibus faz esse percurso (ida e volta) 4 vezes por dia, quantos quilômetros ele fará em uma semana? (5P1);

Fonte: Tarefa 2 aplicada às professoras.

Os significados que aparecem nesse grupo de situações são mais variados, contendo a ideia proporcional da relação um-para-muitos (2ºP1, 3ºP2, 5ºP1); comparação multiplicativa (3ºP1 e 4ºP1) e a ideia de área (2ºP2). Entretanto, alguns equívocos podem ser apontados, tanto no aspecto da elaboração do texto quanto no aspecto da informação matemática ali explorada.

Na elaboração do texto, o problema da professora 2ºP1 apresenta um erro ao vincular o número de convidados a que cada amigo tem direito à quantidade de convidados que estarão na festa, uma vez que muita gente pode ser convidada a participar de um evento e, por alguma razão, não comparecer. Se ela queria que as crianças realizassem a operação 4x120, poderia ter esclarecido: *quantos convidados estarão na festa se todos atenderem ao convite?*

Os equívocos vistos em relação à Matemática estão mais nítidos no problema da professora 2ºP2, que vem junto com equívocos em relação ao texto. Primeiro, porque ela informa que ‘*coube 120 lajotas no piso da garagem*’ e depois pergunta ‘*quantas lajotas coube no piso da garagem?*’. Seu maior equívoco em relação à compreensão matemática é induzir a ideia de área, conduzindo a noção que 120 lajotas corresponderiam a um lado do quadrado e, portanto, poder-se-ia ter 4x120. Porém, se houvessem 4x120 lajotas, um lado desse piso só

teria 4 lajotas e ele deixaria de ser quadrado. Por outro lado, se em cada lado da garagem coubessem 120 lajotas e essa garagem fosse quadrada, teríamos a multiplicação 120×120 , totalizando 14.400 lajotas. Aqui se vê mais uma vez a necessidade de coordenação da relação exigida pelo raciocínio multiplicativo que a ideia de adição de parcelas iguais não dá conta.

O texto da professora 5ºP1 não traz, necessariamente um equívoco, mas pode não atender ao que foi proposto, uma vez que é possível calcular a distância percorrida pelo ônibus em 1 dia e em uma semana (questões por ela proposta) sem necessariamente calcular 4×120 . Basta calcular 8×120 para o dia (uma vez que são 4 viagens de ida e volta), e em seguida, multiplicar o resultado por 7, que corresponde ao trajeto total em uma semana.

Nesses problemas, embora a posição do número 4 não seja a mesma ocupada pelo número 15, no item anterior, ele assume também a função de multiplicador. Esse fator ocorre porque geralmente, na escola, só encontramos problemas nos quais o multiplicador é assumido pelo número menor, provavelmente por facilitar o cálculo escrito.

As atividades seguintes que solicitavam as conversões de gráfico para problema texto, de tabela para problema texto e de tabela para gráfico, não foram discutidas no grupo, mas de uma maneira geral as professoras disseram não ter dificuldades.

7.3 Os Registros de Representações dos Estudantes sobre a Multiplicação

A variedade de registros de representação identificada no diagnóstico aplicado às turmas mereceu uma discussão aprofundada, visto que ela informou sobre níveis de compreensão da multiplicação através da resolução de problemas, fornecendo elementos significativos para que o docente intervenha e proponha a ampliação do conhecimento sobre esse conteúdo, favorecendo a apropriação matemática. É com essa discussão que fundamentamos a tese de que os registros de representação semiótica se constituem elementos de mediação pedagógica, possibilitando mais do que comunicação matemática, constituindo-se em elaboração de pensamento conceitual, podendo e devendo ser analisados e refletidos. Conforme Chamorro (2011, p. 258), “[H]á que constatar que o uso destes procedimentos informais de cálculo é majoritário entre o alunado, e que não necessariamente todos os alunos que os usam cometem erros”.

Como já indicamos no item sobre os resultados obtidos pelos estudantes, o diagnóstico envolveu 9 (nove) questões, dentre as quais apenas uma não foi trazida para esse trabalho. Se naquele item, o foco foi sobre os erros e acertos das crianças, destacando-se os níveis e

gradações, aqui buscamos o foco da variedade de registro e sua relação com os significados da multiplicação, bem como com os índices de acertos e erros.

O foco de nossa discussão é evidenciar nos registros das crianças, a variedade de estratégias, ressaltando que nem todo acerto nem todo erro possui o mesmo grau, mas explicitam níveis distintos de compreensão da multiplicação.

De todos os problemas propostos, aquele que desencadeou maior variedade de registros de representação foi o que se referia a uma multiplicação inversa, conduzindo a uma divisão. Por outro lado, os problemas de configuração retangular (das janelas do edifício), de combinatória (do parque) e de multiplicação indireta (preenchimento da tabela) foram aqueles com menos variedade de representação⁴¹. Desta forma, faremos a descrição e análise da variedade de registro para os problemas de comparação, proporção simples (com número menor e número maior), proporção simples (muitos-a-muitos) e multiplicação inversa⁴².

O problema: *Na Lanchonete 'Gostosuras', um pastel grande custa R\$ 3,00 e a pizza grande de calabresa custa 7 vezes mais que o pastel. Qual é o preço dessa pizza?* envolvia a ideia de comparação multiplicativa. Das 106 (cento e seis) crianças que participaram dessa coleta, 12% não responderam a questão, ficando mais evidente esse fenômeno na turma do 3º ano 2.⁴³ A Tabela 11 traz os tipos de registros observados.

⁴¹ Atribuímos esse resultado ao fato de os próprios problemas já apresentarem um tipo de registro - desenhos e tabela, respectivamente. Por isso, tais problemas não serão retomados aqui.

⁴² Seguiremos a mesma sequência adotada na discussão anterior sobre os índices de acertos nos diferentes tipos de problemas porque segue uma gradação de dificuldades conforme os significados (ou pelo menos dos mais explorados pela escola ao menos).

⁴³ Conforme já comentamos no item tal, inferimos que esse fenômeno ocorreu nesta sala devido ao horário de aplicação – próximo ao recreio da turma.

Tabela 11 – Índice de acertos e erros por tipos de registros - Problema de comparação

Tipos de Registros	Turmas									
	3º ano 1		3º ano 2		4º ano 1		5º ano 1		5º ano 2	
	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E
Escrita de uma resposta	2	3		8	2	3		1	4	3
Algoritmo da adição (nº do problema)		3				6		1		3
Desenho		2	1	2			3	1		1
Algoritmo da adição (parcelas iguais)	1				1		2	1		2
Algoritmo da Divisão				1						
Algoritmo da Multiplicação e desenho	1		1		3					
Algoritmo da Multiplicação	1	1			1		11		17	
Total	5	9	2	11	7	9	16	4	21	9
Não responderam	2		10		1		-		-	

Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos

Antes de analisar os dados da Tabela, esclarecemos da razão de inserirmos o registro ‘escrita de uma resposta’, embora que não possa dizer muito sobre a estratégia utilizada para alcançá-la, podendo ter sido cálculo mental, consulta à tabuada ou trocas de informações com os colegas. Entretanto, a opção de evidenciá-la se justifica por dois motivos: o primeiro, é que esse dado nos informa sobre a necessidade de estimular o fazer matemático das crianças por meio da explicitação de procedimentos por escrito, seja utilizando algoritmos formais ou números e desenhos.

A segunda razão se fundamenta em Duval (2011), que assinala que mesmo o cálculo mental implica algum tipo de representação semiótica, visto que para realizá-lo há uma exigência de um sistema semiótico que o embase em sua produção, no caso, o sistema de numeração decimal. Ele afirma: “A natureza de uma representação depende do sistema que o produz. Em outros termos, a diversidade de todas as representações que intervêm na atividade cognitiva global dos indivíduos se faz em função dos sistemas que permitem produzi-los” (p. 135).

Dos alunos que responderam a questão, 26 deles apresentaram uma resposta sem explicitação de estratégia, alertando para a necessidade de valorização junto aos alunos da explicitação de procedimentos por escrito. Foi observado que entre os estudantes do 3º ano que apresentaram apenas a resposta, 7 (sete) deles escreveram 10, indicando a estratégia de somar os números que aparecem no problema (3+7), ocorrendo ainda em outras turmas, mas com índices não tão significativos. Além disso, ao percebermos que 13 alunos explicitaram o

registro da adição dos números que apareciam no problema (3+7), sendo 6 deles da turma do 4º ano. Consideramos que esse fato ocorreu por haver a palavra-chave ‘mais’ no enunciado (Figura 30, Aluno 13). No entanto, como veremos em outros problemas, essa estratégia ocorrerá independente do texto conter tal palavra, inclusive em crianças que resolveram esse mesmo problema pelo algoritmo da multiplicação.

Figura 30 - Registros do aluno 13 do 5º ano 1 e do aluno 9, 4º ano – Problema 3

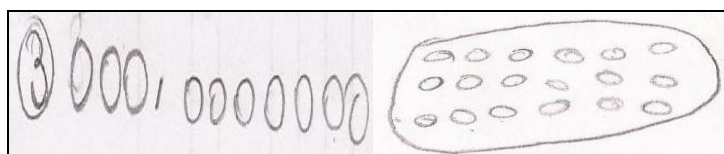
The image shows two handwritten mathematical problems. On the left, a student has written a simple addition: 3 plus 7 equals 10. On the right, another student has written a more complex calculation. It starts with 3,00 plus 10,00, which equals 13,00. Then, below that, they have written 10,3 plus 16,7, which equals 27,00. However, the final result written is 26,00.

Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos

No registro do aluno 9 (4º ano), ele utiliza o 10,00, fruto da soma dos termos 3 e 7, e volta a somar com 3,00, gerando um valor impossível para a adição, mas com marcas visíveis de uma operação de multiplicação.

Das 10 (dez) crianças que responderam usando a estratégia do desenho, seis cometeram erros, embora as quantidades envolvidas tenham sido pequenas. Ao olhar os registros dos alunos do 4º ano e do 5º ano, vemos um desenho com base nos números que aparecem no problema (3 e 7) e com base na adição de parcelas repetidas (Figura 31), só que o aluno do 3º ano organizou 3 grupos de 6 bolinhas e não de 7, conforme a situação pedia.

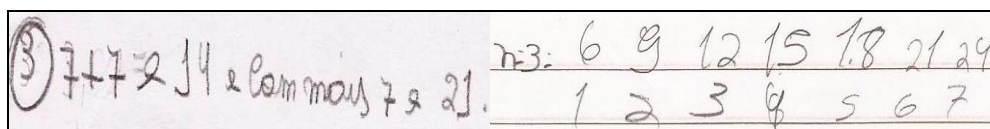
Figura 31 - Registros do Aluno 4, 4º ano e Aluno 5, 3º ano 2 – Problema 3



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Dos sete alunos que usaram a adição (7+7+7 ou 3+3+3+3+3+3+3), vejamos alguns registros, dentre os quais da aluna 12 do 4º ano (Figura 32) que explicou a sua operação e o do aluno 4 da turma 2 do 5º ano (Figura 32) que erra, embora pense nos números múltiplos de 3, pois começa do 6 e não do 1, e por isso chega a 24.

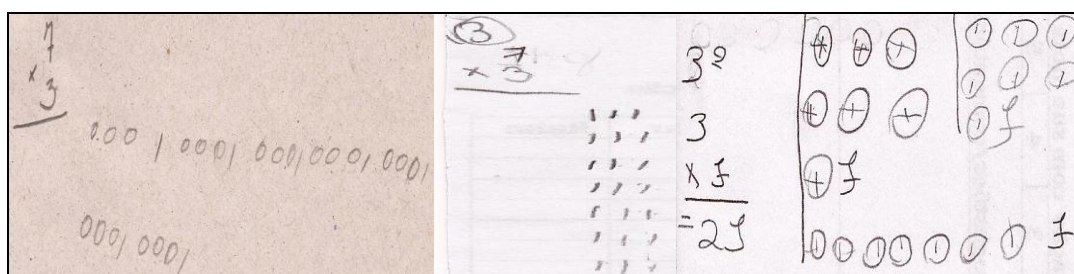
Figura 32 - Registros do Aluno 12, 4º ano e Aluno 4, 5º ano 2 – Problema 3



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Os cinco estudantes que utilizaram o algoritmo da multiplicação aliado ao desenho obtiveram a resposta correta, diferentemente daquelas que usaram somente o desenho, como destacamos na Figura 33.

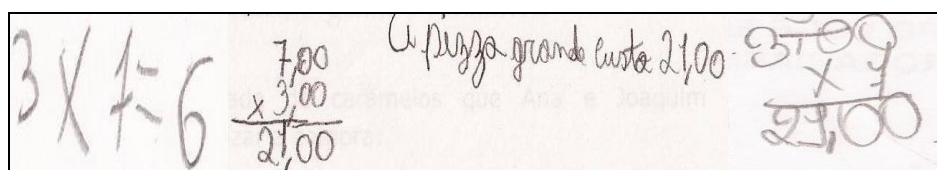
Figura 33 - Registros do Aluno 15, 3º ano 2; Aluno 1, 4º ano; Aluno 10, 4º ano – Problema 3



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

As crianças que utilizaram o algoritmo da multiplicação (31 delas) foram, em sua maioria, das turmas dos 5º anos, nos dando a pista de que o algoritmo formal não é apropriado pelas crianças em anos anteriores. Embora um aluno do 3º ano 1 tenha realizado uma multiplicação errada, conforme registro à esquerda na Figura 34, percebemos que todos os demais acertaram a questão, o que corresponde a um dado positivo. No registro seguinte, temos um aluno 9 do 5º ano 2, que embora tenha cometido o erro de escrever $3,00 \times 7,00$, uma vez que o 7 está no problema como um multiplicador, interpretou que o preço da pizza custa 21,00. O último aluno conseguiu interpretar que se teria 7 vezes 3,00 e o fez corretamente (Figura 34).

Figura 34 - Registros do Aluno 11, 3º ano 1; Aluno 9, 5º ano 2; Aluno 3, 5º ano 1



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

As representações semióticas dos estudantes para o problema: *D. Joana faz bolos de chocolate para a Lanchonete 'Gostosuras'. Ela utiliza 4 ovos para fazer um bolo de chocolate. Se ela fizer 8 bolos, de quantos ovos precisará?*, foram reunidas em 7 (sete) tipos de registros, apresentando um número maior de acertos que o item anterior nas turmas de 3º e 4º anos, conforme a Tabela 12.

Tabela 12- Índice de acertos e erros por tipos de registros – Problema com proporção simples com nº menor

Tipos de Registros	Turmas									
	3º ano 1		3º ano 2		4º ano		5º ano 1		5º ano 2	
	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E
Escrita de uma resposta	2	3		6		4		1	1	2
Algoritmo da adição (Nº do problema)		1		2		1				7
Desenho	6	3	4	1	7	2	5	2	7	2
Escrita de números (1234, 1234, 1234...)				1						
Algoritmo da adição (parcelas) e/ou desenho						3	4		2	
Algoritmo da Multiplicação e desenho	1						1		1	
Algoritmo da Multiplicação							7		8	
Total	9	7	4	10	7	10	17	3	19	11
Não fizeram	-		9		-		-		-	

Fonte: Sistematização da autora do Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos

Das 19 crianças que apresentaram exclusivamente uma resposta, somente três acertaram. No entanto, identificamos algumas aproximações, como 31, 33, 34, o que nos indica a utilização do cálculo mental baseado nas informações do problema. Mais uma vez, houve alunos que efetuaram uma soma com os valores que apareciam no problema, sendo que nesse problema, sete dessas crianças são do 5º ano 2 (Figura 35). Isso chamou nossa atenção porque nesse problema não apareceu a palavra-chave 'mais'.

quantidade discreta, como no problema anterior. Segundo Nunes e Bryant (1997), esse é um elemento a mais que pode provocar dificuldades nas crianças. Talvez encontremos nesses aspectos a explicação para a redução no índice de acertos.

A distribuição nos tipos de registros foi mais equilibrada nessa situação-problema (Tabela 13), mantendo-se as tendências já identificadas na questão anterior, como a da utilização do registro com algoritmo da multiplicação por alunos do 5º ano, embora somente 10 deles (de um total de 40) tenham acertado.

Tabela 13 – Índice de acertos e erros por tipo de registro - Proporção simples (nº maior)

Tipos de Registros	Turmas									
	3º ano 1		3º ano 2		4º ano		5º ano 1		5º ano 2	
	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E
Escrita de uma resposta	1	5		5	1	2	1	1		7
Algoritmo da adição (nº do problema)		2		2		4		1		5
Desenho	2	2	1	5	1	6	1	3	1	
Escrita de números (12345678, 12345678...)				1						
Algoritmo da adição (parcelas iguais) e desenho	3		2	1	1		4	1	4	1
Algoritmo da divisão								1		
Algoritmo da multiplicação e desenho		1			1					1
Algoritmo da multiplicação					1		5	2	5	4
Total	6	10	3	14	5	12	11	9	10	18
Não responderam	-		6		-		-		2	

Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Dentre os registros coletados, dois deles não conduziam à solução do problema: o algoritmo com os números que apareciam no problema (13 alunos) e o algoritmo da divisão (1 aluno). Foi significativo, em relação aos resultados do problema anterior, o fato de haver um pequeno aumento nessa estratégia, na turma do 4º ano. A Figura 42 apresenta alguns desses registros.

Figura 42 - Registros do aluno 3, 4º ano; aluno 16, 5º ano 2; aluno 14, 4º ano e aluno 5, 3º 2 – Problema 7

Four handwritten addition problems are shown side-by-side. Each problem is $13 + 6$. The first three show the result 19 , and the fourth shows $19,00$.

Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Se observarmos o registro que provocou mais sucesso, proporcionalmente, foi o algoritmo da adição de parcelas iguais, aliado ao desenho, inclusive em registros de crianças dos 3º anos. A vantagem dessa estratégia (Figura 43) é que foi desenhada a quantidade de parcelas referentes às unidades, no caso 6 vezes o 3, para depois contar-se as dezenas, tendo-se um número menor para controlar, o que ocasionou mais acertos. No registro do aluno 4 do 5º ano 2 (Figura 43), temos o algoritmo resolvido com apoio de tracinhos, mas com o erro devido a não compreensão de seu tratamento. O que chama a atenção é que embora ele tenha desenhado abaixo 6 grupos de 13 tracinhos, não tenha se dado conta da distância entre essa quantidade e o resultado obtido no algoritmo.

Figura 43 - Registros do aluno 14, 5º ano 2; aluno 4, 5º ano 2; aluno 10, 4º ano – Problema 7

Handwritten student work for the problem $13 + 6$. The work is divided into several sections. On the left, there are four vertical columns showing the problem $13 + 6$ and the result 19 . In the middle, there are two rows of tracinhos (dots) representing the addition. On the right, there are two rows of tracinhos representing the addition, with the result 19 written next to them. The work shows various strategies, including drawing groups of 13 and using tracinhos to represent the addition.

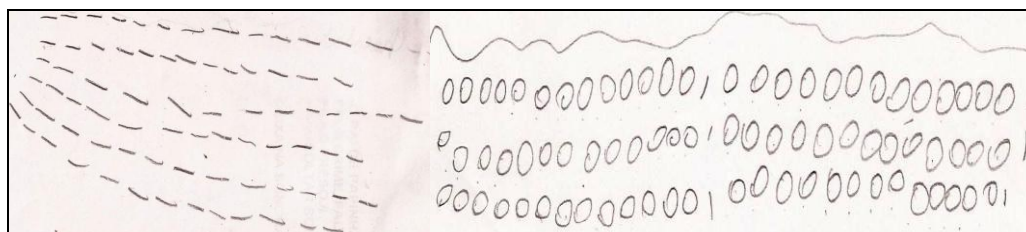
Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Duas estratégias utilizadas pelos estudantes foram mais equivocadas: a apresentação escrita de uma resposta e o uso do desenho. Em relação ao primeiro registro, inferimos que ao ser utilizado o procedimento de cálculo mental, muitas crianças erraram mediante a quantidade de numérica que aparece no problema. Quanto ao desenho, também a quantidade numérica interferiu, uma vez que desenhar e contar 78 unidades (bolinhas e/ou tracinhos), uma a uma, exige uma atenção e controle maior, podendo-se cometer mais erros. As respostas

aproximadas indicam esse erro: 75, 76, 77, 79, 80. Alguns registros em problemas de proporção simples com número maior estão distribuídos nas Figuras 44, 45 e 46 por suas características.

Registros com desenhos:

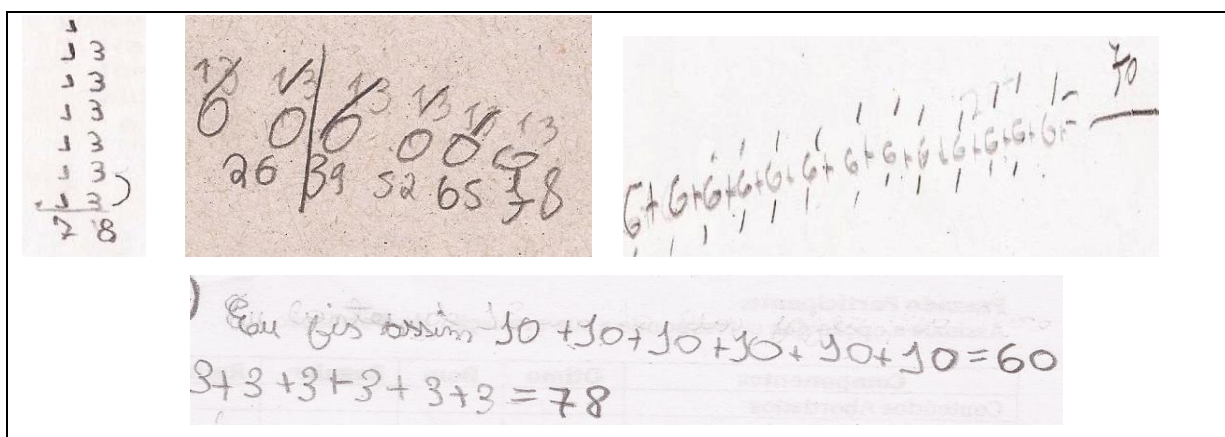
Figura 44 - Registros do aluno 17, 3º ano 2 e aluno 10, 3º ano 1 – Problema 7



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Registros com algoritmos com adição:

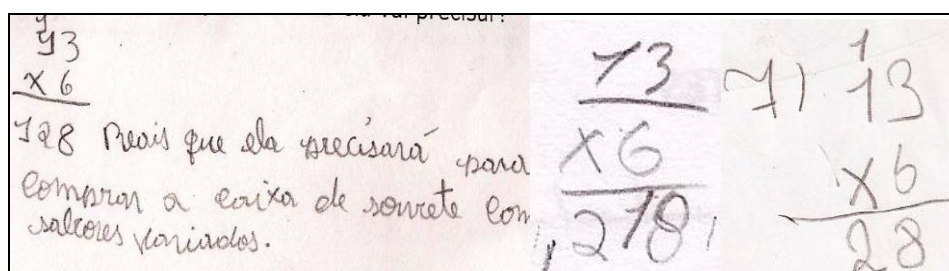
Figura 45 - Registros do aluno 21, 3º ano 2; aluno 11, 3º ano 2; aluno 1, 5º ano 1 e aluno 11, 4º ano (respectivamente) - Problema 7



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Registros com algoritmos da multiplicação:

Figura 46 - Registros do aluno 7, 5º ano 1; aluno 7, 4º ano; aluno 13, 5º ano 1 – Problema 7



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Evidenciamos nos registros desses alunos que embora elas utilizem o algoritmo da multiplicação, apresentam erros relativos ao tratamento, implicando a não compreensão das regras que orientam esse procedimento, as quais estão baseadas no sistema de numeração decimal⁴⁴.

A situação-problema que trazia um significado de proporção numa relação de muitos-a-muitos, no caso, de 5 para 3, provocou algumas surpresas para nós, uma vez que na escola, de uma maneira geral esse tipo de problema não vem sendo trabalhado, principalmente nos anos iniciais de escolarização. O problema estava assim colocado:

Veja a promoção, na loja ‘Cacau Quente’:

Compre 5 chocolates e ganhe 3 caramelos!

Escreva a quantidade de caramelos que Ana e Joaquim ganharam após realizar a compra:

Ana comprou 20 chocolates. GANHOU ____ caramelos.

Joaquim comprou 15 chocolates. GANHOU ____ caramelos.

Dentre os problemas do nosso diagnóstico, esse foi aquele com menos variedade de registros. Do total das 106 crianças das turmas de 3º ao 5º ano, 41 alunos utilizaram registros para responder essa questão, o que corresponde a 38,6% do total das crianças. Conforme os dados obtidos (Tabela 14), os desenhos aparecem em todas as turmas (sejam exclusivos ou acompanhados por números), sendo que o algoritmo da multiplicação só fica evidenciado nas turmas de 5º ano.

Tabela 14 - Índice de acertos e erros por tipo de registro - Proporção simples (muitos-a-muitos)

Tipos de Registros	Turmas													
	3º ano 1		3º ano 2		4º ano 1		5º ano 1				5º ano 2			
							8a		8b		8a		8b	
	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E
Escrita de uma resposta	2	7	3	8	2	7	4	5	6	3	7	13	6	14
Desenho ou desenhos com números	1	1		2	2	4	2		2		2	1	2	1
Pares de números	1		1		1	1	1		1		1		1	
Algoritmo da adição		2		2			2		2		1	1	1	1
Algoritmo da subtração												1		1
Algoritmo multiplicação							3	3	3	3		3		3
Total	4	10	4	12	5	12	12	8	14	6	11	19	10	20
Não fizeram	2		7		-		-				-			

Fonte: Sistematização da autora do Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

⁴⁴ Brandt (2005) discute a importância e desafios dos registros de representações semióticas na aprendizagem do sistema de numeração decimal.

Ao observarmos a Tabela 14, quase metade das crianças apresentou uma resposta sem explicitação de procedimentos, o que foi bastante significativo. Inferimos que esse acréscimo tenha sido provocado por dois fatores: a própria formulação de o problema solicitar o preenchimento de uma lacuna; a própria explicação que a pesquisadora fez ao interagir com as turmas no momento da aplicação do instrumento. Provavelmente, talvez esse problema tenha sido o mais explicado oralmente, inclusive fazendo-se gestos com as mãos e dedos – *“Vejam! Para cada 5 chocolates, você ganha 3 caramelos!”*. Diante dessa apresentação gestual, pensamos que estimulamos o cálculo mental, com a possibilidade de uma resposta direta e não com um procedimento escrito.

Desta forma, além da leitura, esse gesto funcionou como uma representação intermediária entre o texto proposicional e a resolução a ser realizada pela criança. Duval (2011) se refere às tarefas intermediárias como aquelas que envolvem a expressão oral e também escrita, possibilitando à criança a tomada de consciência.

A importância desses diferentes tipos de expressões intermediárias se deve à existência de uma verbalização implícita e silenciosa (...). Essa verbalização silenciosa é importante, pois é ela que comanda a gestão da atividade intencional, assim como a compreensão se obtém agindo (...). Ela não segue a ação, mas ela a acompanha permanentemente e permite antecipar o desenvolvimento da ação (DUVAL, 2011, p. 146).

Sob outra perspectiva, mesmo que as representações semióticas não tenham sido utilizadas pelos alunos em uma intensidade correspondente aos outros problemas, levantamos alguns indícios acerca dos resultados com esse problema, especificamente, destacando-se:

- A primeira reflexão é que nenhuma criança utilizou aqui a estratégia de adicionar números que apareceram no problema, pelo menos não explicitamente.
- A variedade de respostas para quem somente escreveu a resposta foi grande, chegando-se a encontramos mais de 60 (sessenta) tipos de pares respostas, uma vez que era solicitado o número de caramelos ganhos por Ana e Joaquim.
- Outro aspecto foi que em todos os anos, encontramos alunos que apresentaram registros criativos, possibilitando aos professores elementos para análise e reflexão, conforme a Figura 47.

Tabela 15- Índice de acertos e erros por tipo de registros - multiplicação inversa

Tipos de Registro		Turmas									
		3º ano 1		3º ano 2		4º ano 1		5º ano 1		5º ano 2	
		A	E	A	E	A	E	A	E	A	E
Escrita de uma resposta		1	1	3		1	1	1	2	5	4
Desenho com nº do problema			1								
Desenhos bolinhas, tracinhos, corações...	Desenho 7 grupos de 6		1								
	Desenho 6 grupos de 6		4				2				
	Desenho 5 grupos de 6		1		9		11		5		7
	Desenho 6 grupos de 5					2		3		2	
Escrita da sequência de 1 até 30 e divisão de 5 em 5					1					2	
Escrita dos números 6 6 6 6 6			1								
Escrita dos números 123456, 123456, 123456 ...					1						
Algoritmo da adição (nº do problema)			4		6						1
Algoritmo Subtração											1
Algoritmo Multiplicação								1		1	
Algoritmo Divisão e desenho								5	3	5	2
Total		1	13	3	17	3	14	10	10	15	15
Não responderam		2		3		-		-		-	

Fonte: Sistematização da autora do Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Esse problema, juntamente com o que se referia à quantidade de ovos para se fazer 8 bolos, foi o que apresentou menos respostas erradas por quem registrou apenas a solução. No entanto, embora esse dado possa, aparentemente, corresponder a um sucesso, confirma o que Nunes et al (2005, p. 99) assinalaram sobre problemas inversos de divisão, nos quais crianças obtêm a resposta correta ao cometerem “um erro de interpretação: contam quantos elementos em grupo quando a pergunta se refere a ‘quantos grupos’”. No caso aqui, eles tomaram o número de grupos (6) pela quantidade de cada grupo, podendo ter pensado em grupos de 6 e visto que ficaram 5 grupos, daí a resposta 5.

Nesse problema, foi também significativo o número de crianças que realizaram uma operação formal, principalmente de adição com os números presentes no enunciado, especificamente, alunos do 3º ano (Figura 52). Para nós, esse é um procedimento ensinado pela própria escola ao estimular as crianças a encontrar a operação que resolva o problema. Como a adição é a primeira operação ensinada tem mais chance de ser utilizada.

Figura 52 - Registros do aluno 13, 3º ano 1; aluno 22, 3º ano 2; aluno 10, 5º ano 2; aluno 16, 3º ano 2 – Problema 1

$$\begin{array}{r} 30 \\ + 60 \\ \hline 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ + 0 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ - 6 \\ \hline 24 \end{array}$$

ficaram em cada grupo 24 crianças.

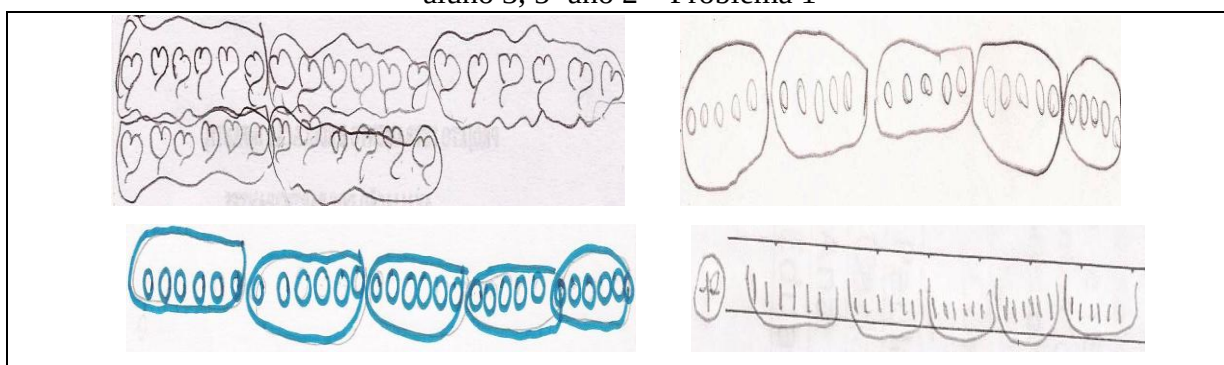
$$\begin{array}{r} 06 \\ + 30 \\ \hline 36 \end{array}$$

Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Entretanto, o que chama mais a atenção nos registros semióticos coletados é que mais de 40% das crianças que responderam o problema, utilizaram o desenho compreendendo que eram grupos com 6 pessoas em cada um. Mesmo os dois registros de escrita de números: 6 6 6 6 6 e o que trazia 5 grupos com números de 1 a 6 (1 2 3 4 5 6), embora não tenham se baseado no desenho, mantém a mesma lógica.

Algumas crianças, embora tenham dado a resposta '5', quando observávamos as estratégias verificávamos que se referiam a 5 grupos e não a 5 crianças por grupo (Figura 53).

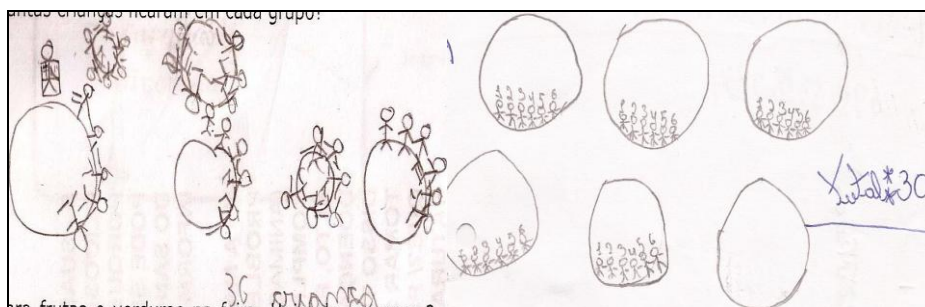
Figura 53 - Registros do aluno 1, 4º ano; aluno 1, 3º ano 2; aluno 15, 5º ano 1; aluno 3, 5º ano 2 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Mesmo os estudantes que entenderam que o enunciado do problema se referia a seis grupos (Figura 54), insistiram na ideia de que cada grupo contivesse 6 crianças, não coordenando as informações presentes no problema. Por isso, o aluno 14 do 4º ano chega ao resultado 36, e o aluno 13 (3º ano 2) deixa um grupo sem nenhuma criança porque já chegara a 30 alunos a sua distribuição.

Figura 54 - Registros do aluno 14, 4º ano e aluno 13, 3º ano 2 – Problema 1

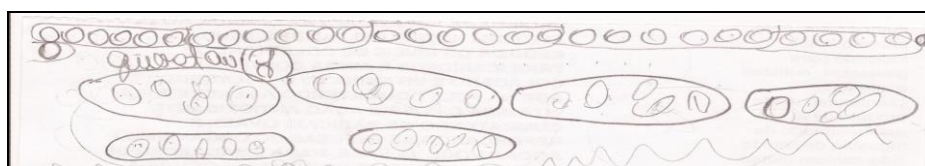


Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Se o texto explicitava que ‘a professora solicitou que formassem 6 grupos’, por que as crianças entendem que devem ser 6 pessoas em cada grupo? É com base em Duval (2009, 2011) que analisamos esse resultado como um caso de incongruência semântica. Para esse autor a incongruência é provocada por uma não compreensão da relação entre o registro de partida (a proposição do texto) e o registro de chegada (a solução escolhida pela criança), devido a não identificação das unidades significantes nos registros a serem convertidos. No caso, as unidades a serem coordenadas seriam a quantidade total de alunos e a quantidade de grupos solicitadas na proposição do problema.

Corroborando essa discussão, tomemos um exemplo ocorrido durante a aplicação na turma do 5º ano 1. A aluna 3, após ter desenhado 6 grupos com 5 elementos em cada um, foi por nós questionada: “*mas o problema indica que a professora solicitou quantos grupos?*”. A aluna releu o problema, refez os desenhos conforme indicamos na figura 49, tendo-se agora 6 grupos de 5:

Figura 55 - Registro do aluno 3, 5º ano 1 – Problema 1

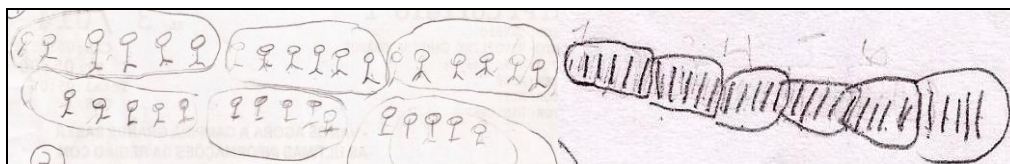


Porém, ao responder a questão escreveu: “*30 alunos e 6 grupos*”.

É surpreendente perceber que após a leitura do problema pela pesquisadora no coletivo do grupo, da mediação individual feita e após a observação do próprio registro, a aluna não tenha conseguido coordenar as informações presentes, respondendo de maneira insuficiente. Duval (2009) afirma que situações de incongruência podem levar a situações de fechamento, impedindo o processo de resolução.

Nos registros da Figura 57, temos representações de alunos que solucionaram o problema, embora vejamos no registro do aluno 13, alguns traços apagados, indicando que ele começara a responder considerando 6 crianças por grupo.

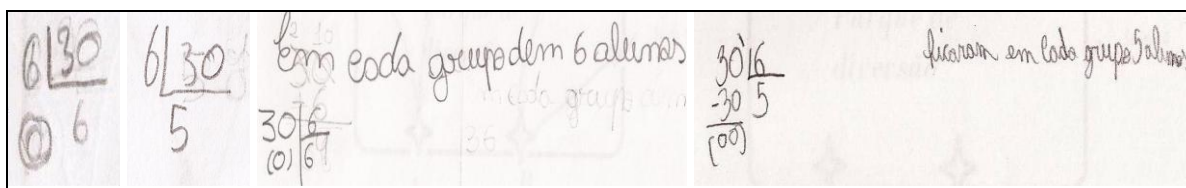
Figura 56 - Registros do aluno 13 e do aluno 7, ambos do 4º ano – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Outra informação importante é que apenas no 5º ano é observada a utilização do algoritmo da divisão (Figura 58), sendo que nem todos obtiveram sucesso. Embora o trabalho com os algoritmos formais já seja indicado ao longo dos anos iniciais, percebe-se na cultura escolar que a divisão é mais explorada no 5º ano do ensino fundamental.

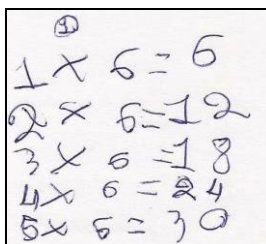
Figura 57 - Registros com a operação divisão do aluno 2, 5º ano 1; aluno 10, 5º ano 1, aluno 12, 5º ano 2; aluno 9, 5º ano 2 – Problema 1



Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

O registro da figura 59, sinaliza que a resolução foi feita pela operação da multiplicação, por meio da tabela de multiplicar de 6, indicando uma compreensão entre as ideias de multiplicação e divisão.

Figura 58 - Registro com a tabela de multiplicação do aluno 20, 5º ano 1 – Problema 1



1	x	5	=	5
2	x	5	=	10
3	x	5	=	15
4	x	5	=	20
5	x	5	=	25

Fonte: Diagnóstico aplicado aos alunos do 3º ao 5º anos.

Após toda a análise e discussão das representações semióticas sobre a multiplicação apresentadas pelos alunos, destacamos alguns aspectos:

- Os dados demonstraram um índice considerável de crianças que simplesmente escreve uma resposta, sendo necessário investir na objetivação e explicitação das estratégias infantis;
- O algoritmo formal da multiplicação não é uma representação da qual a criança tenha se apropriado, exceto por parte dos alunos do 5º ano;
- A ausência de trabalho com a variedade de registros semióticos dos alunos pelos professores, porque não se olha, trabalha, explora suas vantagens e desvantagens. Os dados indicam que ocorre certo respeito, mas não sua valorização e exploração do ponto de vista pedagógico;
- Em todos os problemas a explicação oral da pesquisadora assumiu a função de representação semiótica intermediária entre a proposição do problema em forma de texto e o registro de chegada elaborado pelos alunos. Isso porque não queríamos a interferência das dificuldades dos estudantes com o processo de leitura, o que torna nossos dados mais preocupantes;
- Foi significativa a incongruência semântica nos problemas de multiplicação inversa;
- A relação entre problemas de proporção muito-a-muitos e o uso de tabelas precisa ser explorada de modo mais sistemático em sala de aula;
- Houve um índice persistente de crianças que adicionaram os números que apareciam nos problemas, sem considerar o que foi proposto no enunciado, nos levando a questionar sobre a causa desse fenômeno.

7.4 Ampliando a Investigação - Transformações de Representações Semióticas de Multiplicação

Nossa tese caminha na direção de afirmar que as representações semióticas contribuem como elementos de mediação pedagógica, no processo de ensino, entretanto essa função só vai poder ser completa quando o docente, que é o responsável pela promoção de mediações em sala de aula, compreendê-la. Essa compreensão por parte do profissional qualifica as suas intervenções em sala de aula, possibilitando a mediação pedagógica no sentido de favorecer tensões entre o saber imediato das crianças e o saber mediato que o professor possui e promove em sala, na perspectiva de possibilitar a construção de sínteses e a formação de conceitos.

Se toda a atividade matemática exige o uso de representações semióticas, o tratamento ou a conversão de representações, é essa segunda tarefa, a que mais exige cognitivamente do estudante, contribuindo significativamente para seu desenvolvimento. Para tanto, a conversão necessita ser trabalhada em diferentes direções, uma vez que já se comprovou que as capacidades e dificuldades enfrentadas não são as mesmas (DUVAL, 2011).

Mesmo considerando que o diagnóstico já realizado poderia ser descrito como uma tarefa de conversão entre representações, pois em todas as questões o texto proposicional constituiu-se a representação de partida, necessitando-se de um processo de solução por meio de outra representação de chegada, sentimos a necessidade de verificar como as crianças fariam outra atividade, cujo foco fosse especificamente a transformação entre as representações, com o tratamento e conversão em outras direções. Para isso, pretendíamos responder as seguintes perguntas: como as crianças tratam os algoritmos da multiplicação, já que estudaram esse conteúdo durante o ano? Elas compreendem a multiplicação a partir de um gráfico (tratamento); as crianças se saíam melhor em situações problemas idênticos, nos quais as direções entre as representações fossem diferentes? (conversão).

Das questões que se referiam ao tratamento, optamos pelo algoritmo formal da multiplicação, com alteração na grandeza dos números, e pelo tratamento de informações presentes em um gráfico. Das questões de conversão, definimos por seis tipos de direção: problema/texto – tabela; problema/texto – algoritmo; problema/texto – desenho; sentença multiplicativa – problema/texto; problema/texto – desenho e problema/texto e esquema (árvore de possibilidades).

Para as questões que envolviam a conversão, tomamos por base a variedade de registros obtidos no diagnóstico: no problema, cujo significado gerou mais registros

pictóricos, fizemos uma questão com texto/problema – desenho; nos problemas em que a incidência de algoritmo foi maior, elaboramos questões com texto/problema – algoritmo, e assim por diante. Mantivemos os mesmo significados, inclusive alguns enredos e estrutura dos problemas, alterando a quantidade de dados numéricos envolvidos (Apêndice J). Temos consciência do limite desse novo instrumento, uma vez que não abarcamos todos os pares de direção, entretanto entendemos que ele poderia nos apresentar novos indícios sobre a compreensão das crianças acerca de registros semióticos sobre multiplicação.

O instrumento 10 continha 8 (oito) questões envolvendo a multiplicação, dentre as quais 6 (seis) referiam-se à conversão entre representações e (2) duas ao tratamento. Ele foi aplicado às turmas do 3º ano 1, do 4º ano 1 e 5º ano 1, no mês de novembro de 2012. Além disso, as professoras se posicionaram sobre a tarefa, fazendo uma análise breve sobre o desempenho de sua turma frente à mesma.

No contato com cada professora, antes de apresentar a atividade, perguntamos se elas tinham explorado alguma atividade vivenciada no curso, em sua turma. O motivo dessa questão era porque na tarefa a ser aplicada, havia duas questões que foram trabalhadas com as professoras. As professoras do 3º e 5º anos responderam que aplicaram atividades relativas a uma oficina pedagógica sobre jogos matemáticos, realizada pela pesquisadora no mês de julho. A professora do 3º ano ainda se referiu ao trabalho com o quadro da multiplicação. No 4º ano foi explorado o trabalho com gráficos, aliado a outras disciplinas.

A reflexão que as professoras fizeram acerca da atividade proposta foi separada em dois pontos: a visão geral sobre a atividade e a previsão sobre o desempenho dos alunos, evidenciando facilidades e dificuldades. Sobre a atividade a ser aplicada aos estudantes elas responderam:

A atividade é diversificada e abrange as operações (multiplicação no geral, divisão e adição como um caminho) por vários ângulos, possibilitando aos alunos a resolução dos problemas de diferentes maneiras (3ºP1);

Talvez, alguns podem até dizer: ô tia, mas essas contas já estão feitas? Eles podem até perguntar. E outros podem achar que o que tá aqui não é o correto e vão tentar buscar uma outra solução, eu acredito que vai surgir isso também. Mas tá ótima a atividade! Tá muito boa! Eu gostei demais! Espero que eles parem para fazer (4ºP1);

Trabalha todos os caminhos que podemos utilizar na multiplicação (5ºP1);

As professoras reconhecem a variedade no tipo de questões, no sentido de abranger diferentes possibilidades de pensar a multiplicação, de resolver situações-problema, o que é

positivo, podendo contribuir para que elas agreguem essa variedade de questão à sua prática de ensino de Matemática.

A professora do 4º ano indicou que seus alunos talvez estranhem o fato de algumas questões estarem respondidas, sendo proposto que busquem outros caminhos, além daqueles neles explícitos. Essa fala expõe que em sua experiência a professora não utiliza esse tipo de questão. No entanto, ela sinalizou um procedimento que se efetivou na ação das crianças – a busca de outros procedimentos, outros registros semióticos, além daqueles explícitos na tarefa, sendo a turma do 4º ano aquela que mais utilizou registros intermediários para resolver a tarefa.

Sobre a possibilidade de resolução pelas crianças e quais questões eles teriam mais facilidade em resolver, as professoras assim se expressaram:

Uma parte dos alunos sim, principalmente os que sabem ler, ou ao menos decodificar a escrita; as questões que apresentam as opções de resposta. Primeiro porque estão visualizando as possibilidades já apresentadas e também pela chance que possuem de marcar uma resposta mesmo sem ter entendido a questão (3ºP1);

Sim, eles tem acesso a situações problemas que fazem com que eles utilizem seu pensamento de forma prática, mesmo que vá pelos caminhos da adição ou multiplicação (5ºP1).

A professora do 4º ano, fez uma leitura pontual por questões, assinalando que os itens da questão 2, a questão 3 e a questão com configuração retangular seriam atividades que eles poderiam fazer com mais facilidade.

A resposta da professora do 3º ano indica dois aspectos: a leitura do texto de cada questão como um desafio para as crianças e o fato delas poderem visualizar as respostas como aspecto facilitador para a resolução da tarefa. Já a professora do 5º ano ressalta as possibilidades dos alunos resolverem a tarefa pela operação de adição ou multiplicação.

Um aspecto deve ser esclarecido sobre a aplicação das questões nas turmas aqui investigadas – foi feita a leitura de cada item pela pesquisadora, esclarecendo prováveis dúvidas que as crianças apresentavam. Por isso, embora saibamos que essa leitura prévia já se constituiu em uma representação para as crianças, por meio do registro oral, compreendemos que diminuímos, consideravelmente, a interferência de dificuldades na área de leitura nos resultados obtidos. Assumimos tal posição porque, como já afirmamos, o que pretendíamos analisar eram capacidades mais voltadas ao conhecimento matemático e a competência de

estabelecer relações entre os conceitos ali envolvidos. Nesse caso, as considerações da professora do 3º ano não se sustentam – ‘saber ler e decodificar a escrita’.

Quando perguntamos sobre as questões que as crianças teriam mais dificuldades, foram indicadas a questão 1, que envolvia a conversão da proposição do problema em forma textual para uma tabela, com o significado de proporção (4º ano); a questão 4c que envolvia o tratamento de cálculo da operação 62×15 (3º e 4º ano); a questão 5, da elaboração de uma situação-problema que correspondesse à sentença 3×6 , (3º e 5º ano) e a questão 8, sobre a conversão de um problema textual para um esquema, envolvendo a ideia de combinatória (4º ano).

Veremos a seguir que algumas previsões das professoras se confirmaram, indicando compreensão e acompanhamento da turma perante o conhecimento sobre a multiplicação e, por outro lado, outras previsões não se confirmaram, denunciando um conhecimento parcial ou insuficiente sobre a turma e sobre o campo das representações semióticas, pois além de se ter conhecimento sobre a multiplicação, exigiu-se dos estudantes o domínio dessas diferentes representações.

7.4.1 O tratamento e a conversão de representações semióticas

Devido à extensão dos dados obtidos, optamos por fazer um recorte metodológico para a análise nesse trabalho. Dos 13 (treze) itens distribuídos em oito questões, destacamos a análise de seis questões que exigiam a atividade de conversão de registro de representação e três itens que solicitavam o tratamento do algoritmo.

De uma maneira geral, percebemos que as crianças do 4º ano foram aquelas que mais utilizaram registros intermediários, ou seja, para elas, não foram suficientes os registros sugeridos como resposta na tarefa apresentada. Elas sentiram necessidade de desenhar, de refazer as contas já respondidas, indicando que a compreensão da congruência entre dois registros diferentes de uma mesma representação não lhes parece óbvia ou transparente, como o é para nós professores.

Na questão que se referiu ao tratamento do algoritmo de multiplicação, inserimos três itens: 12×4 , 3×1237 e 62×15 , cuja exigência correspondia à gradação dos números envolvidos (duas multiplicações com um algarismo no multiplicador e uma, com dois dígitos), bem como a compreensão exigida para armar a conta.

A nossa expectativa para essa questão era a de não gerar dificuldades, exceto para o 3º ano (item c). Contrariando nossas hipóteses, além da questão provocar dificuldades muitos alunos não a responderam ou registraram ‘não sei fazer’. Talvez um aspecto que tenha contribuído para esse resultado tenha sido a localização espacial da questão, ficando ao final da primeira página. No entanto, ainda ressaltamos que antes dos estudantes começarem a responder, realizamos a leitura de todos os itens, inclusive marcando no quadro cada item já lido e explicado. A Tabela 16 apresenta os resultados obtidos nessa questão.

Tabela 16- Resultados dos alunos na questão de tratamento de cálculo escrito

Questões	3º ano			4º ano			5º ano		
	Acerto	Erro	Não fez	Acerto	Erro	Não fez	Acerto	Erro	Não fez
12x4	35%	15%	50%	47%	30%	23%	66%	8%	26%
3x1237	15%	10%	75%	17%	54%	29%	36%	34%	30%
62x15	-	30%	70%	-	53%	47%	36%	31%	33%

Fonte: Sistematização da autora do 2º Instrumento aplicado aos alunos

Além do alto índice de questões não resolvidas, observa-se um crescente nos acertos da primeira multiplicação ao longo das três turmas 35%, 47% e 66%, respectivamente, embora sejam índices baixos, mesmo considerando as respostas em branco. Quanto à segunda sentença, o número de acertos reduziu para menos da metade em todas as turmas, evidenciando uma dificuldade das crianças em realizar o cálculo sugerido. Especificamente sobre os resultados do 3º e 4º anos, embora os acertos se aproximem de 15% e 17% respectivamente, os índices de erros se afastam, surpreendendo a turma do 4º ano com 54% de fracasso na resolução do algoritmo. O número de acertos do 5º ano nessa questão corresponde a um pouco mais que um terço, sendo um índice baixo para uma turma que encerrou o ciclo dos anos iniciais.

Para a terceira questão, nossa expectativa era que os alunos do 3º ano tivessem dificuldades, visto que esse tipo de algoritmo é mais explorado no 4º e 5º anos. A professora do 4º ano previu que seus alunos teriam dificuldades com esse cálculo porque ela não tinha trabalhado muito em sala de aula, outras de mesma estrutura. Mais uma vez surpreendeu o resultado do 5º ano pelo fato deles estarem no final do ano, encerrando um ciclo e seguindo com dificuldades nos algoritmos da multiplicação.

A partir desse resultado, aliado aqueles obtidos no diagnóstico, quando muitos alunos erraram o tratamento do algoritmo da multiplicação, inferimos que o trabalho com essa operação não vem promovendo a reflexão e a apropriação dos procedimentos de cálculos formais pelas crianças.

Em um diálogo sobre as dificuldades com a resolução de problemas dos alunos, a professora 5P1 afirmou que as crianças não têm dificuldades com o cálculo dos algoritmos formais: *“E a gente tira a prova porque se você chegar com aquela coisa bem tradicional: 35x12, 79x num sei quanto, eles realizam numa rapidez que não dá tempo nem de você terminar a tarefa no quadro que eles já responderam. Agora se você lança o problema para fazer eles lerem...”*. Vemos, a partir dos resultados obtidos, que essa fala não encontra sustentação. Mesmo o tratamento com cálculos nem tão complexos gerou dificuldades para um número considerável de crianças.

A ideia básica de que ao longo dos anos, as capacidades cognitivas das crianças e, no caso, as capacidades matemáticas são desenvolvidas e ampliadas, não se sustenta ao observarmos os resultados das questões que envolveram a conversão entre representações. Pelos dados que se apresentam no quadro essa gradação racional e lógica só é confirmada quando observamos os resultados da questão 1. Em todos os outros itens vemos que ora o desempenho dos alunos do 3º ano se aproxima ou até supera o desempenho de alunos de 4º ano e 5º anos, ora alunos do 4º ano se saem melhor que os do 5º ano.

Esse aspecto questiona consideravelmente a organização curricular de nossas escolas que, embora se guiem por orientações curriculares que apresentam uma sequência e gradação, na sala de aula, em especial a organização, se encontra muito fluida e espontânea.

Ainda de maneira geral, observando os dados da Tabela 17, as três primeiras questões constam maior índice de acertos que as três últimas, chamando à atenção o item que exigia a conversão do algoritmo à produção textual.

Tabela 17 – Índice de acertos em situações de conversões

Significado/Tipos de conversão	Proporção Texto- algoritmo - a	Comparação Texto- algoritmo	Multiplicação inversa Texto-desenho	Configuração retangular Texto-desenho	Combinatória Texto- esquema	Algoritmo- texto
Turmas						
3º ano	45%	60%	65%	45%	20%	10%
4º ano	58%	35%	82%	29%	23%	11%
5º ano	86%	90%	63%	60%	63%	16%

Fonte: Sistematização da autora da 2º Instrumento aplicado aos alunos

A primeira questão analisada solicitava a conversão do texto proposicional para o algoritmo com o significado de proporção simples: *Dona Alice comprou 8 pacotes de pães para fazer cachorros-quentes. Sabendo que em cada pacote há 12 pães, quantos cachorros-quentes ela poderá fazer?*

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 \times 8 \\
 \hline
 96
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12 \\
 +8 \\
 \hline
 92
 \end{array}
 \quad
 12+12+12+12+12+12+12+12 =$$

Para os resultados dessa questão, o crescente número de acertos, ao longo dos anos é constatado, tendo-se, respectivamente 45%, 58% e 86% para o 3º, 4º e 5º anos, sendo que nem todas as crianças que acertaram, assinalaram ao mesmo tempo o algoritmo de multiplicação e a adição de parcelas iguais. No 3º ano, tivemos um resultado instigante: metade da turma assinalou uma adição que não correspondia à resposta correta, seja a primeira ou a terceira que aparecia no instrumento.

O segundo item que aparece no quadro refere-se ao problema com o significado de comparação, cuja exigência correspondia à conversão do texto proposicional para o algoritmo correspondente. *Numa Pizzaria, uma pizza brotinho custa R\$ 7,00 e uma pizza gigante com 3 sabores custa 4 vezes mais. Qual é o preço da pizza gigante?*

$$7 + 3 + 4 = 14 \quad 3 \times 7 = 21 \quad 4 \times 7 = 28 \quad 7 + 4 = 11$$

Para essa situação, os dados são um pouco complexos, uma vez que o 3º ano obteve quase o dobro de acertos (60%) do 4º ano (35%), indicando certa defasagem dos alunos teoricamente mais adiantados. O 5º ano alcançou 90% de sucesso. Um dado importante a ser ressaltado é que o 4º ano obteve maior número de erros baseado na estratégia de juntar os algorismos do problema, assim como na multiplicação $3 \times 7 = 21$.

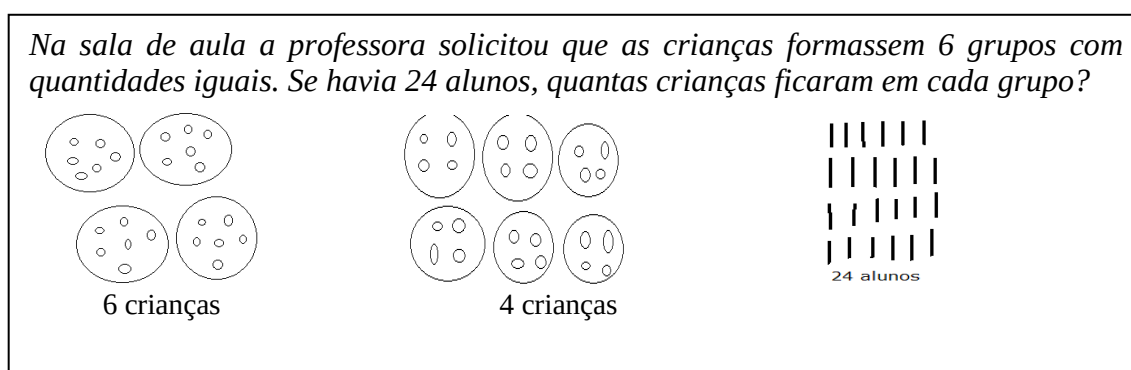
É importante retomarmos aqui uma questão. A estratégia da soma dos algarismos que aparecem nos problemas é maior no 4º ano que no 3º, devido ao processo de condução feito para que a criança descubra a operação a ser usada. Então, a adição é a primeira alternativa. Acreditamos que no 3º ano, as crianças sofrem menos influência do processo de ‘adivinhar a operação’.

Para aqueles que já alcançaram um nível de compreensão Matemática, as questões ficariam mais fáceis à medida que as respostas corretas já estavam ali presentes, inclusive essa foi uma opinião expressada pela professora do 3º ano. Entretanto, isso não é tão simples para os alunos em processo de formação.

Existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável, mesmo os outros registros discursivos próprios da matemática ou da lógica. É o que torna difícil a conversão dos enunciados da língua natural para representações em outro registro (DUVAL, 2011, p. 125).

Na questão que trazia o significado da multiplicação inversa foi proposta uma situação de conversão do texto/problema para o desenho, pelo fato de os alunos terem utilizado muitos desenhos no diagnóstico anterior (Figura 60). Solicitava-se que eles circulassem o desenho que respondesse a situação e os resultados para essa questão foram surpreendentes.

Figura 59- Problema 3 do instrumento 2 aplicado aos alunos do 3º ao 5º ano



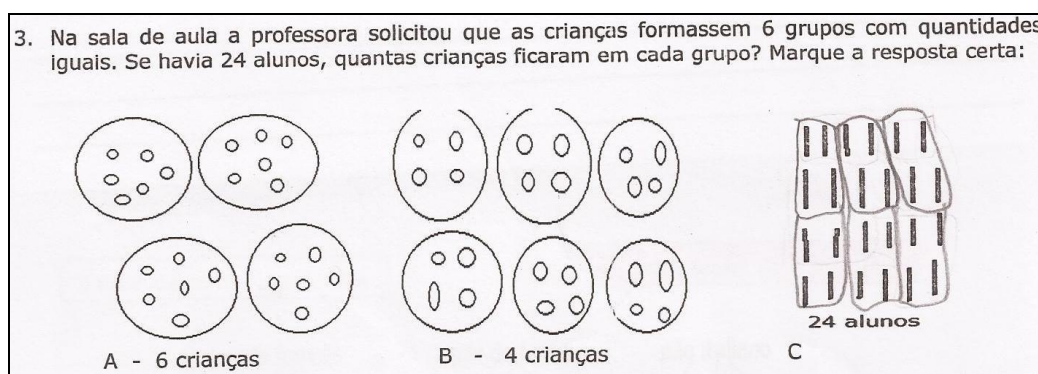
Fonte: 2º Instrumento aplicado aos alunos

Os acertos foram assim distribuídos – 65%, 3º ano, 82% para o 4º ano e 63% para os alunos do 5º ano. Se compararmos esses resultados àqueles obtidos no diagnóstico, veremos que o fato de ser inserida uma representação pictórica, trouxe uma mudança considerável no índice de acertos. Diríamos que o problema trazia embutido o fenômeno de incongruência semântica, termo utilizado por Duval (2009; 2011) para denominar a dificuldade de

reconhecimento de unidades significantes num processo de conversão entre um registro de partida e um registro de chegada de uma mesma representação.

Além de o sucesso ter sido obtido em todas as turmas, chama-nos atenção que o 4º ano tenha superado o 5º ano. Nessa turma, 20% dos erros foram de alunos que assinalaram 6 crianças. Um fato interessante no 4º ano foi que um aluno alterou a terceira representação, realizando nela a divisão dos grupos, conforme a Figura 60 indica. Essa resposta evidencia que para o aluno foi necessário o tratamento do desenho para o alcance da solução, assim como muitos estudantes sentiram a necessidade de realizar novamente os algoritmos da questão 2 para respondê-la. Portanto, embora as questões já apresentassem a resposta correta, para os alunos isso não foi suficiente para que eles ‘vissem’ e identificassem ali, a resposta.

Figura 60 - Resposta do Aluno 4º ano ao Problema 3



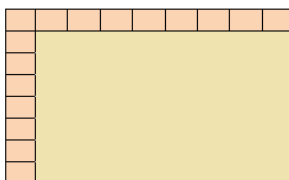
Fonte: 2º Instrumento aplicado aos alunos

Esse resultado sinaliza a pertinência de explorarmos os registros semióticos das crianças como elementos para a mediação pedagógica no ensino de multiplicação. O fato de colocarmos três registros semióticos para que a criança escolha aquele que corresponde ao outro registro de partida funcionou como um elemento de intervenção e de tensão entre seus conhecimentos relativos à multiplicação, presentes na tarefa a ser feita.

A partir de agora, analisaremos as questões que apresentam de uma maneira geral, índices menores de acertos. A questão da Figura 60 apresenta o significado de configuração retangular.

Figura 61 - Problema 7 do Instrumento 2 aplicado aos alunos do 3º ao 5º ano

Carlos é pedreiro e está revestindo uma parede na casa de D. Joana. Ele já colocou uma fileira de azulejos na horizontal e outra na vertical. Agora descubra: quantos azulejos, ao todo, revestirão essa parede?



Fonte: Segunda atividade aplicada aos alunos

Essa questão explora o significado da noção de área a partir da configuração retangular, assim denominada no PCN – Matemática (BRASIL, 1997). Talvez, mais que a conversão, nesse item era necessário que o aluno realizasse o tratamento do desenho, conforme a organização das linhas vertical e horizontal. Os resultados de acertos foram: 45% no 3º ano, 29% no 4º ano e 60% no 5º ano.

Dentre os erros cometidos, 20% dos estudantes do 3º ano traçaram corretamente os tijolos na parede, mas erraram na contagem dos mesmos; no 4º ano um pouco mais de 11% cometeu esse erro e no 5º ano, 36% dos estudantes. Esse dado indica que, embora o registro semiótico do desenho seja válido, é necessário que sejam explorados também suas desvantagens e limites, propondo às crianças estratégias baseadas no campo numérico, nas propriedades das operações e no próprio algoritmo formal. Nessa questão, apenas 04 (quatro) crianças compreenderam como multiplicação, registrando $8 \times 9 = 72$, sendo duas do 4º ano e duas do 5º ano.

O problema que envolveu o raciocínio combinatório, principalmente o significado de produto cartesiano se encontra na Figura 62.

Segundo Duval (2009; 2011), para realizar conversões entre registros de representações é preciso coordenar e relacionar informações entre os dois registros – o de partida e o de chegada. Comumente, no ensino de matemática dos anos iniciais, as situações didáticas nas quais os alunos exercitam a ação de converter registros de representação semiótica é a resolução de problemas, passando de um enunciado em língua natural para uma solução a ser escolhida. É ainda pouco explorada a conversão envolvendo representações semióticas como tabelas, gráficos, algoritmos e enunciados em língua natural, em direções diferentes. Conforme Duval (2011, p. 67), “quando a transformação se realiza entre duas representações de um mesmo objeto que são heterogêneas, a questão que se coloca é saber se a transformação inversa é cognitivamente equivalente à transformação direta, isto é, se existe ou não reversibilidade”. Porém, o mesmo autor sinaliza: “[A] conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivamente tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha” (p. 118).

Os resultados obtidos com a questão de conversão de uma sentença aritmética para a produção de um enunciado de problema confirmam a complexidade e o desafio desse tipo de conversão. Sem falar que a produção de registro em língua natural apresenta uma exigência maior no sentido da tomada de consciência do funcionamento da língua. “Existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável, mesmo os outros registros discursivos próprios da matemática e da lógica” (DUVAL, 2011, p.125).

Quase a totalidade dos alunos sabia responder corretamente quanto era 3×6 , mas isso não os capacitava a atribuir um significado aos termos dessa operação no sentido da elaboração de um enunciado de um problema. Sem falar que os enunciados de problema constituem um tipo de texto, com regras e características específicas. Propor a formulação aos alunos “é uma forma de levá-los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados; a pergunta a ser respondida e a resposta; como articular o texto, os dados e a operação a ser usada” (CHICA, 2001, p. 152). Essa ação contribui para que o estudante tenha uma compreensão do problema como um todo e não somente nos números isolados, na operação e em palavras-chave. No entanto, mais do que qualquer outra exigência, é imprescindível que os estudantes sejam desafiados a resolver variados tipos de problemas, podendo tê-los como referência em sua produção.

Consideramos como certos todos os problemas nos quais o 3 e o 6 apresentassem o sentido de multiplicando e/ou multiplicador, mesmo que na pergunta final constasse algum

equivoco. Apresentamos no Quadro 8 alguns problemas, começando com aqueles mais distantes de uma resposta correta até aqueles que indicavam sua compreensão.

Quadro 8 - Problemas elaborados pelos alunos para a sentença 3×6

Problema elaborado ⁴⁶	Aluno – Turma
<i>Poliana tem 6 chocolate e comel 3 quatos sobrou. $6 \times 3 = 3$</i>	A. 7, 3º ano
<i>Helena foi ao supermecado chegado la ela disse eu só tenho 3×6, quanto eu tenho?</i>	A. 4, 5º ano
<i>Márcia tinha 6 canetas queria comprar mais três. Quantas canetas ela tem? 18</i>	A. 6, 5º ano
<i>Diana perguntou a Ricardo quanto é 3×6? Ricardo respondeu 18.</i>	A. 17, 5º ano
<i>Pedro tinha 3 figurinha de carosel e Paulo tinha o dobro mas só que ele queria multiplica $3 \times 6 = 18$.</i>	A. 18, 3º ano
<i>Karol tem 6 vezes mais de figuras e Duda tem só 3 figuras.</i>	A. 2, 4º ano
<i>Marina utiliza 3 laranjas para fazer 3 bolos. E se ela fizer 6 bolos quantas laranjas ela ira utilizar? $3 \times 6 = 18$</i>	A. 1, 4º ano
<i>Na loja Ana compro 6 pacotes de bonbom cada saquinho custa 3 Reais. Com quantos pacotes ela ficou</i>	A. 1, 3º ano
<i>Maria tem 6 figurinhas Poliana tem 6 e Viviane tem 6 au todo ficam com 18.</i>	A. 13, 3º ano
<i>Marina foi a uma loja e comprou 6 livro e Beatriz comprou 3 vezes mais. Quantos livros Beatriz comprou?</i>	A. 3, 4º ano
<i>Minha mãe foi fazer compras. Ela pego 3 Bandejas com 6 ovos cada quantos ovos vinheram ao todo?</i>	A. 29, 5º ano

Fonte: Sistematização da Questão 5 do 2º Instrumento aplicado aos alunos de 3º ao 5º anos.

O desempenho dos alunos nas três turmas foi aproximado e, ao olharmos a produção dos problemas, vemos que os erros/acertos presentes nos enredos são também semelhantes. O que ocorreu de significativo foi que os alunos do 5º ano responderam mais, embora não tenham acertado.

Se o trabalho na escola com as conversões já tem sido escasso, mais ainda o é, quando propomos direções não usuais no cotidiano das salas de aula, como do algoritmo ao texto, do texto à tabela, da tabela ao algoritmo, entre outras.

Conforme Duval (2012b) a ausência de coordenação entre registros não chega a impedir a compreensão, mas a deixa limitada a um contexto específico, não favorecendo as transferências a outras situações e outras aprendizagens.

⁴⁶ Os problemas estão transcritos considerando a produção original dos estudantes.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia basilar que guiou esse trabalho foi a possibilidade de discutir e argumentar em favor da tese que as representações semióticas constituem elementos fundamentais de mediação pedagógica no ensino de Matemática e de multiplicação, especificamente. A construção dessa afirmativa foi se delineando à medida que fomos aprofundando leituras e reflexões acerca dos conceitos de mediação pedagógica, com as contribuições da teoria histórico-cultural com Vigotski (1991, 2000, 2001a, 2001b, 2009) e Leontiev (1978, 2010) e de autores como Oliveira, Almeida e Arnoni (2007) que acrescentam componentes teóricos da dialética; de representações semióticas na matemática, com Duval (2008, 2009, 2010, 2011, 2012); e ensino de multiplicação nos anos iniciais a partir de diferentes estudos (ISODA E OLFOS, 2012; CHAMORRO, 2011; VAN de WALLE, 2009; NUNES e BRYANT, 1997), entre outros.

Para a problematização dessa afirmativa, realizamos um processo de investigação empírica sobre o ensino de multiplicação, buscando responder a questão: *qual o papel/lugar das representações semióticas no ensino de multiplicação que ocorre nos anos iniciais de escolarização?* Nesse trabalho, consideramos tanto as representações semióticas utilizadas pelos professores quando explicam, demonstram e propõem tarefas de multiplicação, quanto àquelas que os alunos explicitam por escrito, integrando conhecimento espontâneo e conhecimento escolar, nas suas produções matemáticas.

No percurso investigativo, desvelamos o ensino de multiplicação a partir da vivência de um grupo de discussão com oito professoras de anos iniciais, tendo acesso também aos seus alunos. Uma espécie de ‘pacto’ acadêmico e profissional foi estabelecido – as professoras participaram de um processo formativo, no qual a interação, a troca de experiência e o respeito a cada profissional foram marcas registradas e a pesquisadora pode acessar informações, por meio da escuta, do diálogo, da produção escrita e da visita a cada sala de aula, com aplicação de atividades aos estudantes. Todas nós crescemos a partir dessa experiência.

Para responder a pergunta norteadora, uma variedade de instrumentos foi utilizada, gerando uma quantidade extensa de informações, uma vez que fizemos também a gravação em áudio de todos os encontros, que foram organizadas em dois grandes eixos: o ensino da multiplicação, evidenciando compreensões das professoras e dos alunos, a operação; e as

representações semióticas de multiplicação utilizadas pelas professoras e produzidas pelas crianças.

Em relação ao primeiro eixo, o do ensino da multiplicação, os resultados indicaram que a ideia de multiplicação como adição de parcelas iguais é preponderante, compreendendo-se o material concreto de contagem como referência básica para a exploração do conceito. A resolução de problemas é inserida nas sequências de ensino, ora como procedimento motivador, no início do trabalho, ora como aplicação do algoritmo formal da multiplicação, tendo-se, portanto, um papel reduzido dessa competência básica em Matemática na sala de aula.

As dificuldades identificadas pelas professoras no ensino dessa operação foram direcionadas à metodologia (necessidade de dinamizar a sala de aula com a participação e envolvimento dos alunos) e às dificuldades dos alunos (desinteresse e desestímulo, bem como a falta de domínio de conteúdos matemáticos básicos). Em contrapartida, quando aplicamos as atividades nas turmas, nenhuma criança se negou a fazê-lo, destacando-se, pelo contrário, a disponibilidade e o interesse em respondê-las por completo.

O trabalho com o cálculo mental a partir da exploração dos fatos fundamentais da multiplicação (tabelas ou tabuada) esteve ausente na fala das professoras, sendo posteriormente explicitado por meio de atividades, nas quais a sequência e a possibilidade de memorização são desconsideradas, visto sua associação com a ‘escola tradicional e um trabalho mecânico’. Em contraposição a essa prática, trabalha-se com esse recurso de maneira que as crianças ‘não percebam’, sem enfatizar a sequência ou o processo de memorização. Desta forma, as possibilidades de promoção da aprendizagem, descoberta e reflexão sobre regularidades e propriedades do sistema de numeração, através do trabalho com um registro semiótico rico em informações, que corresponde à tabuada, não são compreendidas nem consideradas pela maioria das professoras.

Foram feitas críticas ao trabalho com a tabuada, pelas professoras participantes da investigação, propondo-se sua substituição pelo uso de calculadoras, argumentando-se essa defesa com base na agilidade e rapidez nos cálculos, destinando-se mais tempo ao trabalho com o raciocínio e interpretação de problemas. Presenciamos tensões entre opiniões, uma vez que há a defesa pela tabuada (embora não se trabalhando sistematicamente) e há rejeição à calculadora, acreditando-se que ela viciaria as crianças a não mais utilizar o cálculo escrito.

Entendemos ser necessária a exploração pela escola dos dois instrumentos. A tabuada, como instrumento que pode contribuir para o desenvolvimento do cálculo mental e ser construída, consultada, estudada e investigada pelos alunos e a calculadora podendo ser

explorada como instrumento de cálculo, reflexão e análise de resultados com as diferentes operações.

Quanto à compreensão dos alunos sobre a multiplicação, as dificuldades foram evidenciadas em todos os significados – comparação, proporção simples (direta, não direta, muitos-a-muitos), multiplicação inversa, configuração retangular e combinatória presentes no diagnóstico, inclusive naqueles mais explorados, o de comparação e proporção simples. Os problemas com maiores índices de erros foram os que envolviam multiplicação inversa e o de combinatória. Um dado significativo foi que os alunos do 2º Ano, no problema de combinatória, alcançaram índices idênticos ou superiores ao dos alunos do 4º e 5º Anos.

Na resolução de problemas com os significados de proporção simples e de proporção de muitos-a-muitos, alunos do 3º Ano obtiveram desempenho idêntico ou melhor que alunos de 4º e 5º Anos, indicando níveis diferentes de compreensão em todas as turmas. Aqui, vê-se a sinalização para a possibilidade de fomento à interação entre os estudantes com níveis diferentes de conhecimentos, intervindo nas zonas de desenvolvimento proximal de cada um.

Contrariando nossas hipóteses iniciais, de que a escola valoriza o trabalho com os algoritmos convencionais, os alunos demonstraram dificuldades no tratamento do cálculo formal da multiplicação, nos dois instrumentos a eles aplicados.

O fraco desempenho dos alunos com a resolução de problemas multiplicativos está também relacionado à dificuldade com a leitura e a interpretação do texto proposto, embora tenhamos feito uma leitura e breve explicação de cada questão, o que já se configurou em uma representação intermediária. Duval (2011) afirma haver uma ‘distância cognitiva considerável’ entre a língua natural e outros registros, mesmos discursivos, em Matemática, “(...) o que torna difícil a conversão dos enunciados da língua natural para representações em outro registro” (2011, p.125). Para Duval,

[E]ssa distância se deve ao fato que não são as mesmas operações discursivas que mobilizamos e desenvolvemos na prática espontânea da fala e no discurso matemático. E, pode ser, porque tudo foi feito para reduzir o lugar e o papel da língua natural no pensamento matemático (DUVAL, 2011, p. 131).

Esta seria mais uma razão para priorizarmos o trabalho com a resolução de problemas no ensino da Matemática. De acordo com Núñez (2011, p.125), as habilidades de “leitura e a interpretação da representação na forma de linguagem escrita permitem ativar representações mentais de forma tal a se estabelecerem relações adequadas entre a representação externa, de

natureza semiótica, e a representação interna ou mental”, contribuindo para a compreensão do objeto em estudo.

No segundo eixo sobre as representações semióticas de multiplicação, identificamos a variedade de representações usadas ao ensinar a operação, considerando todas as sequências relatadas (enunciados orais e em problemas escritos; desenhos e gravuras; organização de grupos de quantidades iguais, com material manipulável; uso do algoritmo da adição de parcelas iguais e do algoritmo de multiplicação). Sugerimos, baseadas em Nunes et al. (2005), o trabalho com as tabelas e os gráficos, pouco explorados em sala de aula, uma vez que a multiplicação implica a relação entre duas variáveis e esses registros de representação semiótica já trazem, em si, essa relação. Enfatizamos a importância das representações semióticas utilizadas pelas professoras, uma vez que elas são o veículo principal de acesso aos alunos, do objeto matemático em estudo.

Quanto à reflexão e à utilização pedagógica dos registros produzidos pelos alunos, algumas lacunas foram observadas. As professoras identificam os acertos e erros nos registros dos estudantes, mas afirmam não terem tempo para realizar uma análise mais apurada. Defendemos, considerando a realidade atual, que além dessa condição indispensável à prática docente, é necessário dominar os elementos teóricos que possibilitem o enriquecimento dessa análise. Outro aspecto evidenciado foi que a ação didática a partir das estratégias dos alunos ainda é incipiente, tendo apenas a referência da professora (5ºP1) que possibilita “que cada um reflita sobre os caminhos que ele chegou até ali”, sendo esta ação individualizada, sem que os resultados das reflexões sejam de alguma forma socializados.

Identificamos, com a aplicação do diagnóstico, uma grande diversidade de registros semióticos pelos alunos, embora esse fato não esteja vinculado diretamente ao acerto. O desenho foi um registro de destaque em todas as turmas, conduzindo ao sucesso quando aliado a números ou operações de adição e/ou multiplicação. O algoritmo formal da multiplicação foi mais utilizado por alunos de 5º Ano e não foi apropriado por alunos de anos anteriores.

Também evidenciamos um alto índice de alunos que não explicitaram suas estratégias de solução, alertando sobre o ambiente construído nas aulas de Matemática. Se quisermos alunos ativos, participativos e criativos, a confiança e a liberdade para expor e discutir as estratégias elaboradas, as quais indicam processos de pensamento, devem estar presentes. Van de Walle (2009b) afirma que os estudantes precisam ‘habitar’ a sala de aula, compondo uma ‘comunidade de aprendizes’. O professor precisa promover um ambiente coletivo de confiança e respeito, levando as crianças a perceberem que “é certo cometerem erros e que

eles são uma oportunidade para o crescimento quando eles são descobertos e explicados” (VAN de WALLE, 2009b, p. 50).

Complementando, Carvalho (2005) afirma que além da alteração nas atividades propostas, inserindo resolução de problemas e atividades de investigação, é necessário repensar outro contrato didático, no qual a confiança, a ajuda, a troca e o respeito sejam buscados por todos.

Nessa perspectiva, a partir da tese vigotskiana de que o meio sociocultural fomenta aprendizagem e desenvolvimento, precisamos pensar a sala de aula como esse meio sociocultural, de interação entre professores e alunos com níveis diferenciados de conhecimento. Nesse contexto, o professor é o responsável por promover trocas e socialização das estratégias e reflexões dos alunos, inclusive para provocar tensões e reflexões acerca da validade, vantagem/desvantagem dos procedimentos utilizados, organizando sequências didáticas para esse fim.

É com esse aspecto que retomamos a tese aqui defendida: de que as representações semióticas de multiplicação constituem instrumentos de mediação pedagógica. Mas para que essa função se efetive é imprescindível que o professor as utilize como instrumento de mediação, atribuindo a elas esse significado.

Anteriormente assinalamos que as professoras que participaram de nossa investigação referenciam e ‘supervalorizam’ o uso de material concreto como essencial para o ensino de multiplicação. Propomos, em outra direção, referenciar os registros de representação semiótica que as crianças produzem como instrumentos semióticos e potencialmente eficazes para a mediação pedagógica. Se entendemos mediação pedagógica como uma relação permeada por tensões entre conhecimentos mais sistematizados, dos professores, e aqueles não sistematizados, dos alunos, temos nos registros produzidos pelas crianças, um local e um material produtivo, no qual essas tensões se evidenciam, constituindo-se em um instrumental básico para reflexão dos saberes e conhecimentos que circulam na sala de aula. Além disso, possibilita ao professor re(avaliar) as representações semióticas utilizadas no processo de apresentação e exploração do conteúdo, retomando e/ou reforçando questões pertinentes.

Portanto, algumas perspectivas são indicadas: a utilização de representações semióticas variadas no ensino de multiplicação; a exploração dos registros semióticos de forma coletiva no espaço da sala de aula, favorecendo a tomada de consciência pelos alunos, de seus conhecimentos, lidando com operações de pensamento de comparação, discriminação, reversibilidade e análise, por meio da expressão oral, do uso da palavra sobre seus conceitos e compreensões. Segundo Vigotski (2009), por esse caminho o processo de abstração é

infinitamente mais denso que a abstração que toma por referência os objetos e a realidade circunstancial dos sujeitos.

Além disso, por outra perspectiva, tem-se a contribuição que trazem para o planejamento do trabalho docente. Conforme Duval (2011, p. 141), os registros dos alunos “são uma ferramenta para avaliar a pertinência cognitiva de sequências de atividades, isto é, sua adequação às condições necessárias para desenvolver a compreensão”, sendo um instrumento essencial para a ação do professor.

Desta forma, para que o processo de análise e reflexão de registros semióticos ocorra em sala de aula, duas exigências são postas: a organização de atividades pelos professores e o protagonismo dos alunos no processo de aprender. Para nós, o fato do professor ser o profissional responsável pela situação de ensino coloca-o como também responsável pela atuação do aluno nesse processo, o que nos remete ao seu processo formativo e a compreensão sobre esse seu papel.

Atentando-se para essas recomendações, estaremos contribuindo para o desenvolvimento de nossas crianças. Conforme Duval, “[U]ma aprendizagem que leve em consideração a ligação estreita que existe entre a noésis e semiose deve, então, elevar os alunos a uma condição de tomada de conscientização mais global e, para tal, são necessárias atividades de ensino mais específicas” (DUVAL, 2011, p. 285).

Assim, essa pesquisa possibilitou a abertura de diferentes frentes para futuras investigações, dentre elas: a organização de atividade que promovam reflexão e análise sobre os registros de multiplicação nas aulas de Matemática; as contribuições desse processo na aprendizagem do conteúdo pelos alunos; a utilização de tabelas e gráficos no ensino de multiplicação; o trabalho sistemático com a tabuada com vistas à possibilidade do cálculo mental; a contribuição das diferentes direções de conversão entre registros semióticos da multiplicação, entre outros, são alguns dos temas possíveis de serem investigados numa perspectiva de continuidade a essa pesquisa.

Dentre os limites identificados nesse processo, um ponto relevante foi a não observação de aulas sobre multiplicação, nas quais poderíamos problematizar ações docentes, planejadas e executadas; e visualizar atividades de mediação pedagógica propostas, evidenciando possíveis tensões na relação entre os conhecimentos docentes e dos alunos. A discussão sobre a contribuição desse processo formativo para as professoras também ficou ausente desse trabalho.

Todo esse processo nos ensinou muito. Porém, o mais significativo, foi o (re) encontro com o referencial teórico que compreende o papel do professor para além de ‘facilitador’ da

aprendizagem. O professor é aquele que ensina e se responsabiliza pela a aprendizagem do aluno. Sua função envolve diferentes ações, como explicar, questionar, orientar, informar, problematizar, escutar, observar, corrigir, avaliar, tomando por base um conhecimento sistematizado, possibilitando desenvolvimento ao aluno. Para que ele cumpra tais funções, é imprescindível compreender como realizá-las a partir de um referencial teórico que dê sustentação e do conhecimento sistematizado que se quer ensinar.

REFERÊNCIAS

- ANDRADA, L. P. de. *O professor na psicologia histórico-cultural: da mediação à relação pedagógica*. Universidade de Brasília: julho, 2006. (Dissertação de mestrado). Disponível em <<http://hdl.handle.net/10482/2151>>. Acesso em 07 de maio de 2011.
- ASBAHR, F. da S. F. *A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade*. Revista Brasileira de Educação, Maio/Jun/Jul/Ago 2005, Nº 29.
- AZERÊDO, M. A. de. *A Mediação Pedagógica na Resolução de Problemas Matemáticos*. João Pessoa, PB: UFPB, 2003. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação Popular), Universidade Federal da Paraíba. 2003
- AZERÊDO, M. A. *A Resolução de Problemas e a Não-valorização das Representações Pessoais de Solução*. Comunicação Oral. In: 2º Simpósio Internacional em Educação Matemática - SIPEMAT – Matemática formal e Matemática não-formal – 20 anos depois: sala de aula e outros contextos. Anais... Recife, 28 de Julho a 1 de Agosto de 2008.
- BAQUERO, R. *Vygotsky e a aprendizagem escolar*. Trad. Ernani F. da Fonseca Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.
- BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2003.
- BARRETO, M. de F. T. e ANASTACIO, M. Q. A. *A Compreensão de números apresentados por crianças: multiplicação*. In BICUDO, M. A. V. *Filosofia da educação matemática – fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2010. (p. 101-127)
- BIGODE, Antonio José Lopes. *Sobre o Ensino da Tabuada na Escola Primária*. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos_view.asp?cod=39>. Acesso em Outubro de 2012.
- BOURDIEU, P.; CHAMBOREDON, J-C e PASSERON, J-C. *Ofício de Sociólogo: metodologia da pesquisa na sociologia*. Trad. Guilherme João de Freitas Teixeira. 6. ed. Petrópolis, RJ; Vozes, 2007.
- BRASIL. Lei Nº 9394/96. Dispõe sobre as *Diretrizes e Bases da Educação Nacional* – LDBEN, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática*. Vol. 3, Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: *Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília: MEC, SEB; INEP, 2008.

BRASIL, INEP. *Relatório SAEB - 2005 PRIMEIROS RESULTADOS: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada*, Fevereiro de 2007. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/SAEB1995_2005.pdf>. Acesso em Janeiro de 2012.

BRASIL, INEP. *SAEB/Prova Brasil - 2011 Primeiros Resultados*. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/web/prova-brasil-e-saeb/resultados>>. Acesso em Fevereiro de 2013.

BRASIL, INEP. *Taxa de Aprovação, Prova Brasil, IDEB e Projeções (até a 4ª, 5ª a 8ª série e Ensino Médio) – Brasil*. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/planilhas-para-download>>. Acesso em 23 de fevereiro de 2013.

BRASIL, INEP. *Descrição dos Níveis da Escala de Desempenho de Matemática – SAEB 5º e 9º. Ano do Ensino Fundamental*. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/2011/escala_desempenho_matematica_fundamental.pdf> Acesso em 23 de Fevereiro de 2013.

BRASIL. MEC/ INEP. *Taxa de Aprovação, Prova Brasil, IDEB e Projeções (até a 4ª, 5ª a 8ª série e Ensino Médio) - Regiões Geográficas e Unidades da Federação*. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/planilhas-para-download>>. Acesso em 23 de fevereiro de 2013.

CARVALHO, D. L. de. *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1991.

CARVALHO, C. *Comunicações e interações sociais nas aulas de Matemática*. In: NACARATO, A. M. e LOPES, C. E. (Orgs.) *Escrituras e Leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 15 – 34.

CHAMORRO, M. d. C. *Podemos Explicar el Fracaso de los Estudiantes en el Aprendizaje de la Multiplicación?* In: ISODA, M. e OLFOS, R. (Coord.) *Enseñanza de la Multiplicación: Desde el Estudio de Clases Japonés a las Propuestas Iberoamericanas*. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2011.

CHARNAY, R. *Aprendendo (com) a resolução de problemas*. In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Orgs.) *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Trad. Juan A. Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 36 – 47

CHICA, C. H. *Por que Formular Problemas?* In: SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas – habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p.151 – 174.

COLOMBO, J. Ap. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. *Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando Tendências*. In: ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 29 – jan./jun. – 2008.

COLOMBO, J. A. A. ; BUEHRING, R. S. e MORETTI, M. T. *Registros de Representação Semiótica, tarefas e análises de dados: articulações em torno do currículo de Matemática*. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.8, p. 90-113, UFSC: 2009.

CURI, E. *A Matemática e os Professores dos Anos Iniciais*. São Paulo: Musa Editora, 2005.

CURI, E. *Análise de propostas presentes no material de matemática do PEC - Universitário, à luz de investigações e teorias sobre a formação de professores*. In: NACARATO, A. M. e PAIVA, M. A. V. P. (Orgs.) *A formação do professor que ensina matemática – perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DAMM, R. F. *Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos*. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em Matemática – registros de representação semiótica*. 7ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. 7ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMORE, B. *conceptualizacion, registros e representaciones semióticas y noética: inyecciones constructivistas en la aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolucion*. Uno. Barcelona, Espanha, 35, 2004. p.90 – 106.

D'AMORE, B. *Epistemologia e Didática da Matemática*. Trad. Maria Cristina B. Barufi; revisão técnica Ana P. Jahn; revisão final Sumaya Lima. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

D'AMORE, B. *Objetos, Significados, Representaciones Semióticas y Sentido*. In: Radford L., D'amore, B. (Eds) *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero especial della rivista Relime (Cinvestav, Mexico. DF, México), 2006. p. 177 – 196.

D'AMORE, B. *Conceitos. Obstáculos*. In: Elementos de Didática da Matemática. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007a. p.193 – 219.

D'AMORE, B. *Matemática, Didática da Matemática e Linguagens* In: Elementos de Didática da Matemática. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007b. p.241 – 284.

DANIELS, H (Org.) *Uma Introdução a Vygotsky*. Trad. Marcos Bagno. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

DEVLIN, K. *O Gene da Matemática*. Trad. Sérgio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DINIZ, M. I. *Resolução de Problemas e Comunicação*. In: SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas – habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p.87 – 98.

DUARTE, N. *A teoria da atividade como uma abordagem para a pesquisa em educação*. In: PERSPECTIVA, Florianópolis, v. 20, n. 02, p.279-301, jul./dez. 2002.

DUVAL, R. *Registros de Representações Semióticas e funcionamento Cognitivo da compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em Matemática – registros de representação semiótica*. 7ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11 – 33.

_____. *Semiosis y Pensamiento Humano – Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Trad. Myriam Veja Restrepo. Universidad del Vale. Santiago de Cali, Colombia, 2004.

_____. *Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education*. In: RADFORD, L., SCHUBRING, G., and SEEGER, F. (Eds.) *Semiotics in Mathematics Education o Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Sense Publishers, Rotterdam/Taipei. 2008. p.39 – 61.

_____. *Semiósisis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. (Fascículo I)

_____. *Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica*. Org. Tânia M. M. Campos; trad. Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*. Trad. Mércles T. Moretti. REVEMAT, e ISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96 – 112, 2011b.

_____. *Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência*. Trad. Mércles T. Moretti. Revemat: R. Eletr. De Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 1, p.97-117, 2012a.

_____. *Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento*. Trad. Mércles T. Moretti. Revemat: R. Eletr. De Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 – 297, 2012b.

FACCI, M. G. D. *Valorização ou esvaziamento do trabalho do professor? Um estudo crítico-comparativo da teoria do professor reflexivo, do construtivismo e da psicologia vigotskiana*. Campinas, SP: Autores Associados, 2004.

FERREIRA, M. C. C. e GOMES, M. L. M. *O raciocínio proporcional no contexto de avaliação das habilidades matemáticas pelo 2º INAF*. In: FONSECA, M. da C. F. R. (Org.) *Letramento no Brasil – habilidades Matemáticas*. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação: Instituto Paulo Montenegro, 2004. p. 127 – 152.

FIORENTINI, D. *Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente?* In: BORBA, M. de C. e ARAÚJO, J. de L. (Orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

FLORES, C. R. *Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem*. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 19, nº 26, 2006, pp.77 a 102.

FRANCO, M. A. S. *Pesquisa-ação e Prática Docente: articulações possíveis*. In: PIMENTA, S. G. e FRANCO, M. A. S. (Orgs.) *Pesquisa em Educação – possibilidades investigativas/formativas da pesquisa-ação*. São Paulo: Edições Loyola, 2008. p.103 – 138.

GWINNER, P. *“Pobremas” Enigmas Matemáticos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1989. Vol. I, II e III.

IMENES, L. M.; LELIS, M. e MILANI, E. *Matemática para conhecer o mundo*. 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2008. 4º e 5º ano.

ISODA, M. y OLFOS, R. (Coord.) *Enseñanza de la Multiplicación: desde el Estudio de Clases Japonés a las Propuestas Iberoamericanas*. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2011.

JAPIASSU, H. F. *Introdução ao Pensamento Epistemológico*. 7 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1992.

LEONTIEV, A. *O Desenvolvimento do Psiquismo Humano*. Trad. Manuel Dias Duarte. Editora: Horizonte Universitário, Lisboa, 1978.

LEONTIEV, A. *Atividade, consciencia, personalidade*. Trad. Maria Silvia Cintra Martins. La Habana: Pueblo y Educación, 1983.

LEONTIEV, A. N. *Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento Infantil*. In: VIGOTSKII, L. S., LURIA, A. R. e LEONTIEV, A. N. *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. Trad. Maria da Penha Villalobos. 11ª ed. São Paulo: Ícone, 2010.

LUIZE, A. “*Eu acho que $215 + 237$ vai dar um número mais perto de 500...*” In: MARINCEK, V. (Coord.) *Aprender Matemática resolvendo problemas*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001, p. 37 – 47.

MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em Matemática – registros de representação semiótica*. 7ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MARANHÃO, M. C. S. A. e IGLIORI, S. B. C. *Registros de Representação e Números Racionais* In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em Matemática – registros de representação semiótica*. 7ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MOURA, M. O. de *A atividade de Ensino como Ação Formadora*. In: CASTRO, A. D. de e CARVALHO, A. M. P. de. (Orgs.) *Ensinar a Ensinar – didática para a escola fundamental e média*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

MOURA, M. O. de. (Org.) *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livro, 2010.

MOURA, M. O. de; ARAÚJO, E. S.; RIBEIRO, F. D.; PANOSSIAN, M. L. e MORETTI, V. D. *A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem*. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Org.) *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livro, 2010.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. da S. e PASSOS, C. L. B. *A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – tecendo fios do ensinar e do aprender*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

NUNES, T. e BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. [et al.] *Educação Matemática 1 – Números e Operações Numéricas*. São Paulo: Cortez, 2005.

NUÑEZ, I. B. *Vygotsky, Leontiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos*. Brasília: Liber Livro, 2009.

NUÑEZ, I. B. As Representações Semióticas na Prova do ENEM 2009 na Área de Ciências Naturais. In: RAMALHO, B. L. e NUÑEZ, I. B. (Orgs.) *Aprendendo com o ENEM – reflexões para melhor pensar o ensino e a aprendizagem das Ciências Naturais e da Matemática*. Brasília: liber Livro Editora, 2011.

OLIVEIRA, E. M. de; ALMEIDA, J. L. V. de; ARNONI, M. E. B. *Mediação Dialética na Educação Escolar: teoria e prática*. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

PANIZZA, M. *Reflexões gerais sobre o ensino da matemática*. In: *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais: análise e propostas*. Trad. Antônio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006. pp 19-41.

PESSOA, C. A. dos S. *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio*. Recife: Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, 2009.

POZO, J. I. (Org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*; trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

PRESTES, Z. *Quando não é quase a mesma coisa – traduções Lev Semionovitch Vigotski no Brasil*. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

RÊGO, R. G. do e AZERÊDO, M. A. *Estratégias Gráficas na Resolução de Problemas Aritméticos*. Comunicação Oral. In: *Anais do Simpósio Internacional em Educação Matemática - SIPEMAT – Pesquisa em Educação Matemática: um olhar ampliado sobre a sala de aula*. Julho de 2006.

RÊGO, R. G. do e RÊGO, R. M. *Matematicativa*. 3ª Ed. João Pessoa: Editora universitária/UFPB, 2004.

RICHARDSON, R. J. e Col. *Pesquisa social – métodos e técnicas*. 3ª ed Revista e Ampliada. São Paulo: Atlas, 1999.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. da S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Org.) *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livro, 2010.

RIGON, A. J.; BERNARDES, M. E. M.; MORETTI, V. D. e CEDRO, W. L. *O Desenvolvimento Psíquico e o processo Educativo*. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Org.) *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livro, 2010.

RIO GRANDE DO SUL. Estado. *Referencial Curricular. Lições do Rio Grande – Matemática e suas Tecnologias*. Matemática Ensino Fundamental. Vol. 3. Disponível em <http://www.educacao.rs.gov.br/pse/html>. Acesso em 24/08/2009.

RUBIO, Mª J. e VARAS, J. *El Grupo de Discusión*. In: *El Análisis de La Realidad em La Intervención Social – métodos y técnicas de investigación*. Editorial CCS. Madrid, 1999. p.331 – 352.

SANTAELLA, L. *O que é Semiótica*. 6 ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1988.

SANTOS, V. de M. *Linguagens e comunicação na aula de Matemática* In: NACARATO, A. M. e LOPES, C. E. (Orgs.) *Escrituras e Leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p.117 – 125.

SANTOS, A. *Processos de Formação Colaborativa com foco no campo conceitual multiplicativo: um caminho possível com professoras polivalentes*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. p. 340.

SANTOS, J. R. dos e BURIASCO, R. L. C. *Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica*. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v. 16, n. 30 – jul./dez. - 2008.

SÃO PAULO (Estado). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2008.

SAVIANI, D. *Escola e Democracia: teorias da educação, curvatura da vara, 11 teses sobre educação e política*. 15ª ed. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1986.

_____. *Pedagogia Histórico-Crítica: primeiras aproximações*. 10ª ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

SILVA, C. M. da. *Explorando operações aritméticas com os recursos da história da Matemática*. Brasília, Plano Editora, 2003.

SIRGADO, A. P. *O social e o cultural na obra de Vigotski*. Educação & Sociedade, ano XXI, nº 71, Julho/02.

SPINILLO, A. G. e MAGINA, S. *Alguns 'mitos' sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental*. In: PAVANELLO, R. M. (Org.) *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*. 2004

STAREPRAVO, A. R. e MORO, M. L. F. *As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação*. In: MORO, M. L. F. e SOARES, M. T. C. (Orgs.) *Desenhos, Palavras e Números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Editora da UFPR, 2005.

TELECURSO 2000. *O Princípio Multiplicativo*, Aula 48; *As Permutações*, Aula 49.

TOLEDO, M. e TOLEDO, M. *Didática da Matemática: como dois e dois*. São Paulo: FTD, 1997.

TRIVIÑOS, A. N. S. *Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas, 1987.

VALE, I. e PIMENTEL, T. *Números e Operações*. In: PALHARES, P. (Coord.) *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel, 2004. p.159-213.

VAN de WALLE, J. A. *Explorando o que significa fazer Matemática*. In: VAN De WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental – formação de professores e aplicação em sala de aula*. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009a. p. 31-41.

_____. *Desenvolvendo a Compreensão em Matemática*. In: VAN De WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental – formação de professores e aplicação em sala de aula*. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009b. p. 42-56.

_____. *Tecnologias e Matemática Escolar*. In: VAN De WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental – formação de professores e aplicação em sala de aula*. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009c. p.130-143.

_____. *Desenvolvendo os Significados para as Operações*. In: VAN De WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental – formação de professores e aplicação em sala de aula*. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009d. p.168-190.

_____. *Ajudando as Crianças a dominar os Fatos Fundamentais*. In: VAN De WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental – formação de professores e aplicação em sala de aula*. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009e. p.191-213.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade – problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VYGOTSKY, L. S. *A Formação Social da Mente*. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

VYGOTSKI, L. S. *Obras Escogidas I*. Ministério de Educacion y Ciência. Ciudad Universitaria, Madrid: Visor Distribuciones. 1991.

VYGOTSKI, L. S. *Obras Escogidas II*. Madrid: A. Machado Libros. Visor Distribuciones. 2001a.

VIGOTSKI, L. S. *Manuscrito de 1929*. In: *Educação e Sociedade*, ano XXI, nº 71, Julho de 2000.

_____. *Psicologia Pedagógica*. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001b.

_____. *A Construção do Pensamento e da Linguagem*. Trad. Paulo Bezerra. 2ª ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2009.

ZUNINO, D. L. *A Matemática na Escola: aqui e agora*. Trad. Juan Acuña Llorens. 2. Ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

Este trabalho foi formatado a partir das Normas da ABNT: NBR – 6023 (Ago, 2002); NBR 6027 (Maio, 2003); NBR 6028 (Nov, 2003); NBR 10520 (Ago, 2002); NBR 14724 (Abril, 2011).

APÊNDICE A – Questionário Inicial

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – DOUTORADO

Curso: Ensino de Matemática nos anos iniciais: aprofundando o estudo sobre a multiplicação

Prof^a: Maria Alves de Azerêdo CE/DME

QUESTIONÁRIO PARA LEVANTAMENTO DE PERFIL DO GRUPO

I. Dados de Identificação

a) Nome: _____

b) Escola: _____

c) Idade: _____

d) Formação acadêmica:

() Normal/Magistério Completo

() Ensino Superior Incompleto -

Qual? _____

() Ensino Superior Completo - Qual?

() Pós-Graduação em

e) Ano em que leciona atualmente: () 3º Ano () 4º ano () 5º Ano

f) Quantos alunos estão matriculados? _____

g) Quantos anos já lecionou nesse ano? _____

h) Há quanto tempo leciona nos anos iniciais de escolarização? _____

i) Última formação/curso na área de matemática:

II. O Ensino de Matemática

j) Você gosta de ensinar Matemática? () Sim () Não - Por que?

k) Você tem alguma dificuldade ao ensinar Matemática? () Sim () Não - Qual (is)?

l) Quais as maiores dificuldades dos seus alunos com a Matemática?

m) Escreva o nome do livro didático de Matemática utilizado por você:

III.Em relação ao Curso

n) Quais suas expectativas em relação ao curso? O que lhe motivou estar aqui?

Agradeço desde já! Maria Azerêdo

APÊNDICE B – Refletindo sobre o Ensino de Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – DOUTORADO

Curso: Ensino de Matemática nos anos iniciais: aprofundando o estudo sobre a multiplicação

Prof^a: Maria Alves de Azerêdo CE/DME

Professora: _____

Refletindo sobre o Ensino de Matemática – algumas questões iniciais

- Como compreendo o ensino de Matemática nos anos iniciais?
- Quais são os maiores desafios?
- Pensando no ensino de multiplicação, quais são as maiores dificuldades? Quais as dificuldades nossas e das crianças?
- O que tem sido feito para sanar essas dificuldades?

APÊNDICE C – Relato de Experiência

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação - Doutorado

Curso: A Matemática nos anos iniciais – aprofundando o estudo sobre a multiplicação

Prof^a. Maria Alves de Azerêdo

Professora: _____

Relato de experiência

Relate aqui como você ensina a operação de multiplicação para seus alunos: o que você acha mais importante ressaltar? Tente apresentar numa sequência de ações.

APÊNDICE D – Elaboração de Problemas

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – DOUTORADO

Curso: Ensino de Matemática nos anos iniciais: aprofundando o estudo sobre a multiplicação

Prof^a: Maria Alves de Azerêdo CE/DME

Professora: _____

Elabore três problemas envolvendo a ideia de multiplicação e resolva de duas formas diferentes:

APÊNDICE E – Refletindo sobre a Resolução de Problemas

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
LABORATÓRIO DE ESTUDOS E PESQUISAS DA APRENDIZAGEM CIENTÍFICA
CURSO: APROFUNDANDO O ESTUDO SOBRE A MULTIPLICAÇÃO
NOME: _____

Refletindo sobre a resolução de problemas com o raciocínio multiplicativo

1. A partir das tarefas de resolução de problemas, escreva o que essas crianças sabem e como estão compreendendo a situação proposta.
2. Na sua turma, você encontra variedade de estratégias na resolução de problemas pelas crianças?

Sim () Não ()

3. Se SIM, quais estratégias você identifica?

Se NÃO, a que você atribui essa não utilização pelas crianças?

4. Como você explora essas diferentes estratégias?

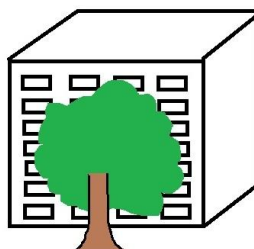
5. Essas estratégias representam muitas vezes a compreensão que as crianças têm sobre algum conceito matemático.

- Exemplifique algumas representações que **você** poderia explorar ao **ensinar** a multiplicação:

APÊNDICE F – Diagnóstico aplicado nas turmas de 2º ano

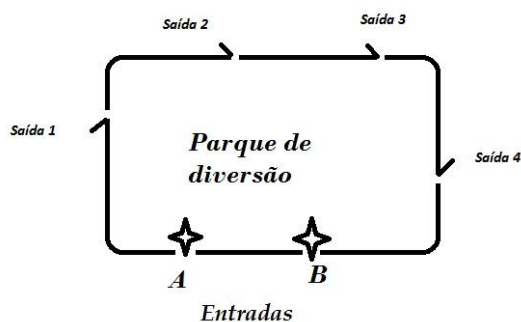
1. Na sala de aula a professora solicitou que as crianças formassem 4 grupos com quantidades iguais. Se havia 20 alunos, quantas crianças ficaram em cada grupo?

2. Esse edifício tem muitas janelas na frente. Por causa da árvore você não consegue ver todas as janelas. Quantas janelas tem na frente do edifício?



3. D. Joana faz bolos de chocolate para a Lanchonete 'Gostosuras'. Ela utiliza 4 ovos para fazer um bolo de chocolate. Se ela fizer 8 bolos, de quantos ovos precisará?

4. O parque de diversão abaixo tem duas entradas (A e B) e 4 saídas (1, 2, 3, e 4).



Pense em **todas** as maneiras diferentes que você poderia entrar e sair desse parque. Quantas são essas maneiras?

APÊNDICE G – Diagnóstico Aplicado às turmas de 3º ao 5º anos

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – CE/PPGE/LEPAC

Diagnóstico a ser aplicado com alunos – anos iniciais

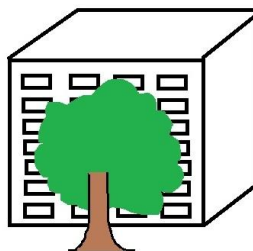
Nome: _____ Ano: _____

Resolva essas situações abaixo a partir do conhecimento que você possui:

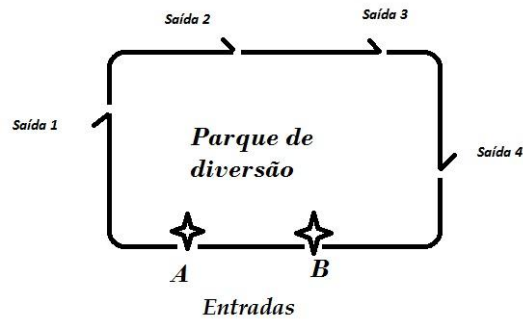
1. Na sala de aula a professora solicitou que as crianças formassem 6 grupos com quantidades iguais. Se havia 30 alunos, quantas crianças ficaram em cada grupo?
2. Carla compra frutas e verduras na feira. Hoje ela comprou 2 quilos. Veja na tabela quanto ela pagou. Paula comprou um quilo na mesma banca. Escreva na tabela quanto ela pagou. Ana e Eduardo também compraram nessa barraca. Veja quantos quilos eles compraram e preencha a tabela com os valores pagos.

Consumidores	Verdura e frutas	Preço
Paula	1 kg	
Carla	2 kg	6,00
Ana	3 kg	
Eduardo	5 kg	

3. Na Lanchonete 'Gostosuras', um pastel grande custa R\$ 3,00 e a pizza grande de calabresa custa 7 vezes mais que o pastel. Qual é o preço dessa pizza?
4. D. Joana faz bolos de chocolate para a Lanchonete 'Gostosuras'. Ela utiliza 4 ovos para fazer um bolo de chocolate. Se ela fizer 8 bolos, de quantos ovos precisará?
5. Esse edifício tem muitas janelas na frente. Por causa da árvore você não consegue ver todas as janelas. Quantas janelas tem na frente do edifício?



6. O parque de diversão abaixo tem duas entradas (A e B) e 4 saídas (1, 2, 3, e 4).



Pense em **todas** as maneiras diferentes que você poderia entrar e sair desse parque. Quantas são essas maneiras?

7. Marta vai comprar sorvete para uma festa na escola. Cada caixa de sorvete custa 13 reais. Ela precisa comprar 6 caixas com sabores variados. De quantos reais ela vai precisar?

8. Veja a promoção, na loja 'Cacau Quente':

Compre 5 chocolates e ganhe 3 caramelos!

Escreva a quantidade de caramelos que Ana e Joaquim ganharam após realizar a compra:

Ana comprou 20 chocolates. Ganhou ____ caramelos.

Joaquim comprou 15 chocolates. Ganhou ____ caramelos.

9. Albagli é um paquiderme. Ele usa 17 sabonetes e 22 esponjas para tomar banho. Albagli toma banho de 15 em 15 dias. Quantos sabonetes ele gasta em 3 meses?



Pinte a conta ou as contas que podem levar a solução do problema e responda a questão:

$$17 + 22 + 3$$

$$6 \times 17$$

$$17 \times 2$$

$$17 + 22 + 15 + 15$$

$$17 + 22 + 39$$

$$17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17$$

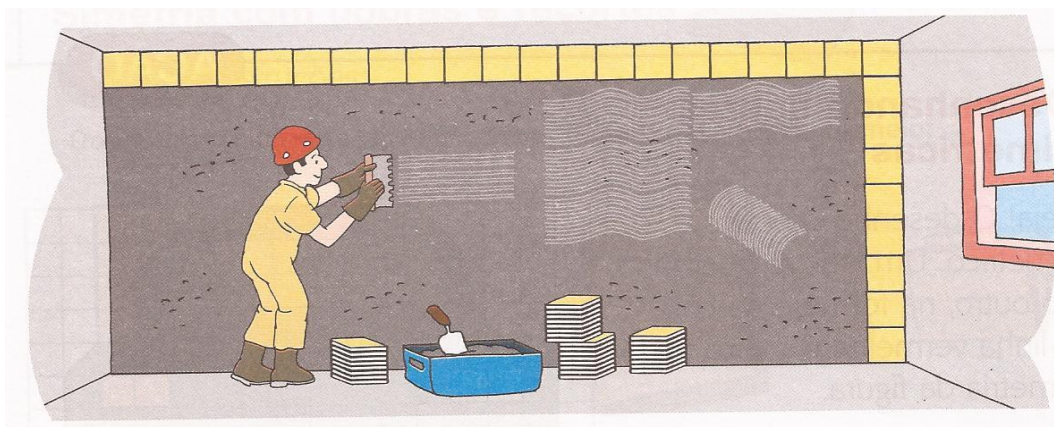
APÊNDICE H – Tarefa 1 – Professores

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Curso: Aprofundando o estudo sobre multiplicação – Prof^a: Maria Alves de Azerêdo
Professora-cursista: _____

Tarefa 1

1. Resolva esses problemas de 2 maneiras diferentes:
 - a) A mãe de Luís comprou três tipos de pães no supermercado: de fôrma, bisnaguinha e pão integral. E levou para casa também três tipos de frios para fazer sanduíches: salame, presunto e mortadela. Quantos tipos diferentes de lanche é possível que ela faça para Luís, juntando um tipo de pão e um tipo de recheio?
 - b) Um pai, uma mãe e um filho querem tirar uma foto, sentados um do lado do outro. Quantas fotos diferentes eles terão de tirar se quiserem aparecer em todas as localizações possíveis? E se o casal tivesse 2 filhos?
2. Comente como você explicaria esse problema em um turma do 4º ou 5º ano. Carlos é pedreiro e está revestindo uma parede na casa de D. Joana. Ele já colocou uma fileira de azulejos na horizontal e outra na vertical. Agora descubra: quantos azulejos, ao todo, revestirão essa parede?



3. Uma fábrica produz, em média, 6 camisas em 4 horas. Quantas camisas ela produz em 8 horas, em 12 horas e em 20 horas? Considerando esse tempo médio, em quanto tempo ela produz uma camisa, apenas? (monte uma tabela para explicar seu raciocínio).

APÊNDICE I – Tarefa 2 (Professores)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Curso: Aprofundando o estudo sobre multiplicação – Profª: Maria Alves de Azerêdo

Professora-cursista: _____

Tarefa 2

1. Elabore um problema que possa ser resolvido por meio destas sentenças e em seguida, resolva-o:

a) $307 \times 15 =$

b) $4 \times 120 =$

2. Resolva as operações:

a) $40 \times 905 =$

b) $32 \times 4709 =$

3. Elabore uma situação-problema que possa ser representado por:

a) gráfico



b) tabela

1	3
2	
3	
4	

4. Elabore um gráfico que represente os dados da tabela abaixo:

Semana	Dias
1 semana	7 dias
2 semanas	14 dias
3 semanas	21 dias
4 semanas	28 dias
5 semanas	35 dias

APÊNDICE J – Instrumento 2 - Tratamento e conversão (alunos do 3º ao 5º anos)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – CE/PPGE/LEPAC

Tarefa 2 - Alunos – anos iniciais - Ano: _____ Escola: _____

Nome: _____

1. Veja a promoção, na loja 'Cacau Quente':

Compre 5 chocolates e ganhe 3 caramelos!

- Pinte a tabela que indica os valores corretos de acordo com a promoção!

Carla			Lúcia			Roberto		
Criança	Nº de Chocolate	Caramelos ganhos	Criança	Nº de Chocolate	Caramelos ganhos	Criança	Nº de Chocolate	Caramelos ganhos
Marina	10	3	Marina	10	6	Marina	5	15
Vitor	15	4	Vitor	15	9	Vitor	15	45
Pedro	25	5	Pedro	25	15	Pedro	20	60

2. Leia cada situação-problema abaixo e **circule** a continha que corresponde à solução do problema:

- a. Dona Alice comprou 8 pacotes de pães para fazer cachorros-quentes. Sabendo que em cada pacote há 12 pães, quantos cachorros-quentes ela poderá fazer?

$$8 + 12 = 20 \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ + 8 \\ \hline 92 \end{array} \quad 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 =$$

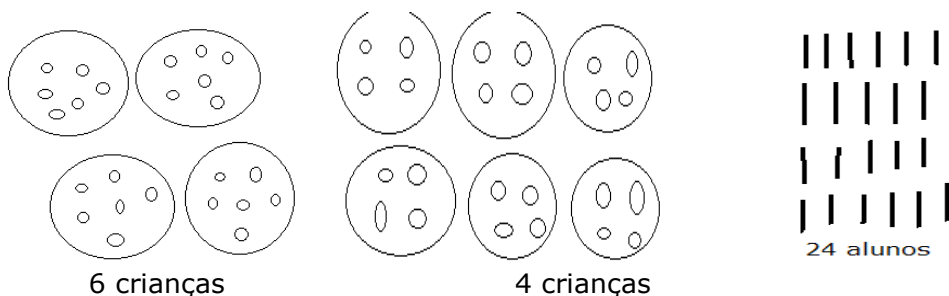
- b. Numa Pizzaria, uma pizza brotinho custa R\$ 7,00 e uma pizza gigante com 3 sabores custa 4 vezes mais. Qual é o preço da pizza gigante?

$$7 + 3 + 4 = 14 \quad 3 \times 7 = 21 \quad 4 \times 7 = 28 \quad 7 + 4 = 11$$

- c. D. Joana faz tortas de morango por encomenda. Ela utiliza 15 morangos em cada torta. Se ela fizer 5 tortas, de quantos morangos vai precisar?

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 5 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ + 5 \\ \hline 20 \end{array} \quad 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = \quad \begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

3. Na sala de aula a professora solicitou que as crianças formassem 6 grupos com quantidades iguais. Se havia 24 alunos, quantas crianças ficaram em cada grupo?

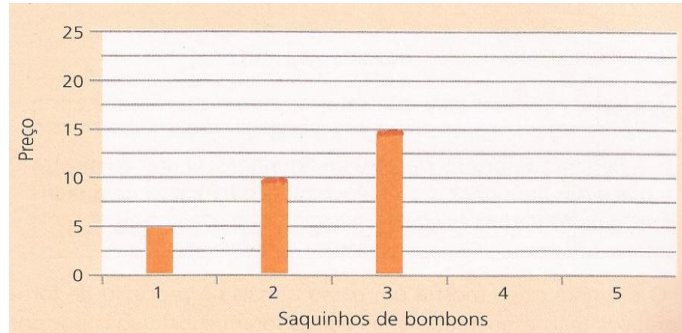


4. Arme as operações e efetue:

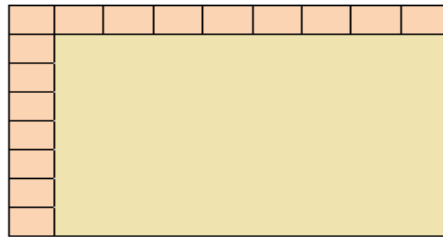
- a. $12 \times 4 =$ b. $3 \times 1327 =$ c. $62 \times 15 =$
 5. Elabore um probleminha que possa ser resolvido com a seguinte operação:

$$3 \times 6$$

6. O gráfico mostra o preço que uma loja cobra por um saquinho de bombons.



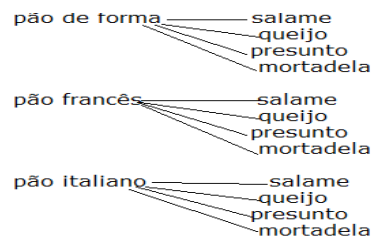
- Complete o gráfico, mostrando o preço para 4 e 5 saquinhos.
 - Quanto custariam 6 saquinhos de bombons? _____ E 10 saquinhos? _____
7. Carlos é pedreiro e está revestindo uma parede na casa de D. Joana. Ele já colocou uma fileira de azulejos na horizontal e outra na vertical. Agora descubra: quantos azulejos, ao todo, revestirão essa parede?



8. Na Lanchonete 'Gostosuras' temos diferentes opções de sanduíche. O freguês pode escolher entre 3 tipos de pão: pão de forma, pão francês ou pão italiano. Para o recheio há 4 opções: salame, queijo, presunto ou mortadela. Quantos tipos de sanduíche a padaria oferece?

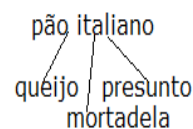
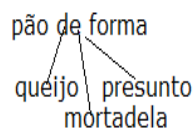
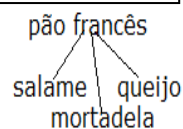
Veja as resoluções de 3 crianças e pinte o retângulo daquela que você achar correta:

forma _____ salame
 francês _____ queijo
 italiano _____ presunto



3 tipos de sanduíche - Laís

12 tipos de sanduíche - Carol



9 tipos de sanduíche - Ricardo

ANEXO A – Transcrição do Relato de Experiência – Ensino de Multiplicação

Transcrição do Instrumento 3 aplicado às professoras, complementado com a exposição oral no Grupo de Discussão.

2º Ano -

2P1 - Inicialmente, é necessário compreender o que significa multiplicar, consultando até mesmo o dicionário, e nada melhor, do que utilizar gravuras dentro de um contexto em que enfatize a adição de parcelas iguais. Em seguida, realizar a análise de objetos e situações que possuam linhas x colunas, como por exemplo: a dama, caixa de ovos de diferentes tamanhos (quantidades – 6, 12, 24, 32), tijolos de 6 e 8 furos, ilustração da parte frontal de um edifício, as fileiras da sala e outros. Dessa maneira a criança compreenderá melhor como acontece a multiplicação, ou adição de parcelas iguais. O material concreto é de suma importância, pois essas crianças encontram-se na fase do operacional concreto. E posteriormente, treinar a compreensão do multiplicar em probleminhas que envolvam diversas situações do cotidiano dos alunos, inclusive com o nome deles, para que fiquem mais entusiasmados. É também extremamente importante que os problemas a serem solucionados sejam representados por ilustrações e números.

2P2 - Com a turma do 2º ano em 2011, trabalhei assim: primeiro usei as tampinhas em grupos de 4 alunos, fazia sempre de quatro a cinco grupos, pedia que organizassem agrupamentos de 2 em 2, , três em três... Daí analisávamos quantas vezes conseguíamos formar os grupos, por exemplo; 2×5 ; 3×4 ... e víamos quantas tampinhas ficavam ao todo, daí se registrava em forma de adição: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$;

Em outro momento, apresentava o material dourado, que mostra também os agrupamentos de cubos para obter o resultado, apresentando com a adição e depois com a multiplicação. Daí então passo para o quadro de valor em que mostro como se resolve o cálculo, aplico no quadro e resolvemos juntos. Em seguida passo a fazer problemas com materiais que se repetem na sala; lápis de cor, cadernos, carteiras e filas; vou colocando tudo o que vejo para chamar a atenção e estimulando-os a pensarem e resolver. O interessante é que a turma se empolgou e ocorreu a aprendizagem, percebi que teve uns alunos que se interessaram ao ponto de ter momentos livres e os viam questionando sobre cálculos de multiplicação. O resultado final é que ao passar para a divisão eles notaram que era o inverso do que havia trabalhado. Daí foi até mais fácil para entenderem a divisão.

2P3 - Com os alunos do 2º ano, apresento a multiplicação como adição de parcelas iguais. Apresento uma problemática envolvendo situações do cotidiano dos próprios alunos em que se faça necessário dobrar, triplicar, quadruplicar... quantidades e só depois apresento a operação com os sinais de vezes, igual e a pergunta final. As situações vivenciadas tem sido **formar conjuntos** iguais com sementinhas, tampinhas de garrafas, palitos de picolés etc. Representar os conjuntos formados com numerais e chegar a um resultado final. Ex. João formou 3 conjuntos, em cada conjunto ele colocou 5 tampinhas de garrafas. Ao todo João utilizou quantas tampinhas? Obs: para formar os conjuntos utilizo linha ou lã de tricô na própria mesa do aluno. Depois que o aluno vivenciou essa situação passamos a representação com os numerais no caderno.

3º Ano

3P1 – Gosto, antes de mais nada, de explicar para os meus alunos as ideias que a multiplicação envolve. Mostro as maneiras de resolver a operação como a adição de parcelas iguais, trabalho a ideia de dobro ($2x$), triplo ($3x$) e a questão de que a operação da multiplicação assim como da adição implicam em resultados maiores (com exceções na multiplicação feita por $0 = 0$ e por $1 =$ ao outro fator.). Trabalho o cálculo dos algoritmos e na solução de problema busco enfatizar a leitura e a interpretação deles, destacando palavras-chave e a ideia de uma quantidade maior. Incentivo os alunos a se imaginarem nos problemas, até mesmo como o personagem principal em meio a uma situação. Gosto de usar materiais concretos – até mesmo os escolares – o uso de desenhos, de agrupamentos ou conjuntos também, e me coloco em parceria com eles dentro do problema.

3P2 - Eu gosto de iniciar contando sempre uma estorinha inventada que pode ser também um probleminha simples envolvendo algo que faça parte do dia a dia deles. Dão começo a instigá-los ao raciocínio deixando eles participarem independente de acertos e erros. Costumo sempre apresentar gravuras, tampinhas, bolinhas, canudos, os próprios materiais escolares, etc. com isso, começo oralmente com eles a encontrar as soluções dos problemas sem ir ao quadro, apenas conversando com eles e utilizando o material que tivermos de concreto. Depois partimos para o quadro chamando eles para responderem também questões simples, porque no momento de apresentação de um conteúdo, eu não costumo partir para fazer as atividades do livro, deixo isso para o segundo momento. Então vamos estruturar uma continha no quadro valor de lugar, obedecendo a posição dos números de acordo com as ordens. Gosto muito de levá-los ao quadro para e acompanhar cada um deles sem deixar a turma perceber que ele

‘errou’, então dou as orientações e procuro tirar as dúvidas que surgirem colocando os mesmo para fazerem uma nova continha.

4º Ano

4P1 - Mostrando a importância da multiplicação no nosso cotidiano, conduzindo os alunos a refletirem que eles usam a multiplicação em diversas situações em suas vidas. Relaciono a adição e a multiplicação; Uso materiais concretos para solucionar as multiplicações; Utilizo pesquisas internas ou externas usando a realidade deles (visita a supermercado); Realizamos jogos com multiplicações e ou os próprios alunos como instrumento da multiplicação; Desafios – lista de problemas (usados com incentivo).

5º anos

5P1 - Inicialmente apresento uma situação em que o aluno associe que somando as parcelas iguais, vou chegar ao resultado. Fazendo esta relação o aluno percebe que a multiplicação é a forma simplificada da adição. Para facilitar o cálculo mostro várias maneiras na hora de se calcular a multiplicação, sem ser preciso decorar a tabuada, e na hora do cálculo eles montam a tabuada. Fazendo com que eles percebam que o multiplicando vai ser somado com o resultado da multiplicação: ex: $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$. Motivar essa compreensão com jogos e brincadeiras fazendo com que eles compreendam.

5P2 - Eu ensino a operação da multiplicação após a adição, porque quando o aluno aprende a somar se torna mais fácil associar a multiplicação por exemplo: $2+2+2= 6$, quantas vezes foi somado o dois? Três vezes que dará 6. Parto das parcelas iguais para depois chegar a multiplicação usando a tabuada. Não é apresentada sequenciada, eu crio junto com eles situações para que possam usar a tabuada sem perceber que estão usando.