

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**KENNEDY CARVALHO LOPES**

**PREFERÊNCIAS ASSIMÉTRICAS VARIANTES NO TEMPO NA FUNÇÃO  
PERDA DO BANCO CENTRAL DO BRASIL**

**JOÃO PESSOA  
2012**

**KENNEDY CARVALHO LOPES**

**PREFERÊNCIAS ASSIMÉTRICAS VARIANTES NO TEMPO NA FUNÇÃO  
PERDA DO BANCO CENTRAL DO BRASIL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia (PPGE) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Economia.

**Orientador:** Prof. Dr. Edilean Kleber da Silva Bejarano Aragón

**JOÃO PESSOA  
2012**

L864p      Lopes, Kennedy Carvalliho.  
                 Preferências assimétricas variantes no tempo na função  
                 perda do Banco Central do Brasil. / Kennedy Carvalho Lopes.  
                 - João Pessoa, 2012.  
                 50f.  
                 Orientador: Edilean Kleber da Silva Bejarano Aragón.  
                 Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCSA/PPGE  
                 1.Economia - Brasil. 2.Política monetária - Brasil. 3. Regra  
                 de Política Monetária forward-looking.

UFPB/BC

CDU:33(81)(043)

**KENNEDY CARVALHO LOPES**

**PREFERÊNCIAS ASSIMÉTRICAS VARIANTES NO TEMPO NA  
FUNÇÃO PERDA DO BANCO CENTRAL DO BRASIL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, como requisito para a conclusão do curso de Mestrado em Economia.

Submetida à apreciação de banca examinadora, sendo aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Edilean Kleber da Silva Bejarano Aragón  
Departamento de Economia/PPGE-UFPB  
Orientador

---

Prof. Dr. Erik Alencar de Figueiredo  
Departamento de Economia/PPGE-UFPB  
Examinador Interno

---

Prof. Dr. André de Mattos Marques  
Departamento de Economia/PPGE-UFRN  
(Examinador Externo)

## **AGRADECIMENTOS**

**À DEUS por tudo que tem feito na minha vida.**

**Aos meus pais, por todo o estímulo que me proporcionaram durante esta jornada.**

**Ao meu orientador Professor Dr. Edilean Kleber da Silva Bejarano Aragón pelo incentivo para iniciar esta jornada e pela paciência e dedicação na condução da orientação.**

**Aos meus colegas do PPGE da UFPB por todo apoio e suporte.**

**A todos os professores do Departamento de mestrado em Economia por seus valiosos conhecimentos.**

**A todos os Funcionários do PPGE/UFPB.**

**À CAPES pelo auxílio através de bolsa integral nos últimos dezoito meses.**

**“They did not know it was impossible, so they did it!”**

**Jean Cocteau.**

**“A persistência realiza o Impossível”**

**Proverbio Chinês**

## RESUMO

Este trabalho estima uma função de reação forward-looking com parâmetros variando no tempo para verificar mudanças na condução da política monetária brasileira sob o regime de metas de inflação. Como a regra de política apresenta regressores endógenos, o filtro de Kalman convencional não pode ser aplicado. Diante disso, um procedimento em dois passos do tipo de Heckman (1976) é utilizado para estimação consistente dos hiperparâmetros do modelo. Os resultados mostram que: i) há forte evidência empírica de endogeneidade dos regressores da regra de política monetária; ii) que a taxa de juros esperada esteve acima de 10% durante todo o período analisado, tendo uma média de 11%; iii) a resposta da taxa Selic à inflação varia consideravelmente ao longo do período e tem mostrado uma tendência decrescente; iv) a resposta da taxa de juros em relação ao desvio da inflação a meta respeita o princípio de Taylor; v) o coeficiente de suavização da taxa de juros foi constante durante todo o período analisado; vi) que o BCB teve em boa parte do período analisado uma aversão recessão, permitindo uma inflação acima da meta.

**Palavras-Chave:** regra de política monetária *forward-looking*; modelo com parâmetros variando no tempo; Brasil.

## ABSTRACT

This paper estimates a reaction function with forward-looking time-varying parameters for changes in the Brazilian monetary policy under inflation targeting regime. As the policy rule has endogenous regressors, the conventional Kalman filter can't be applied. Thus, a two-step procedure of the type Heckman (1976) is used to estimate the hyperparameters consistent model. The results show that: i) there is strong empirical evidence of endogeneity of the regressors of monetary policy rule, ii) the expected interest rate was above 10% throughout the analysis period to an average of 11%; iii) response the Selic rate to inflation varies considerably throughout the period and has shown a declining trend, iv) the response of interest rates relative to inflation deviation from the target with the principle of Taylor; v) the coefficient of smoothing rate interest has been constant throughout the period; vi) that the BCB had in much of the period analyzed an aversion recession by allowing inflation above target.

**Keywords:** forward-looking monetary policy rule; time-varying parameter model; Brazil.

### Lista de Figuras

<b>Figura 1:</b> Função perda simétrica e assimétrica com relação ao hiato do produto (a) e inflação (b).	18
<b>Figura 2:</b> Evolução das variáveis no período analisado (2000:01 -2011:12)	26
<b>Figura 3:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{0 T}$ .	30
<b>Figura 4:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{1 T}$ .	30
<b>Figura 5:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{1 T}$ e do desvio da inflação em relação à meta.	31
<b>Figura 6:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{2 T}$ .	31
<b>Figura 7:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{3 T}$ .	32
<b>Figura 8:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{4 T}$ .	32
<b>Figura 9:</b> Evolução do coeficiente $\beta_{5 T}$ .	33
<b>Figura 10:</b> Evolução do coeficiente $\theta_{0 T}$ .	33
<b>Figura 11:</b> Evolução do coeficiente $\alpha_{t T}$ .	34
<b>Figura 12:</b> Evolução do coeficiente $\alpha_{t T}$ (sem outliers).	34
<b>Figura 13:</b> Evolução do coeficiente $\gamma_{t T}$ .	35

### Lista de Tabelas

<b>Tabela 1:</b> Testes de raiz unitária	27
<b>Tabela 2:</b> Estimativas dos parâmetros da regra de política monetária	28

### Lista de Quadros

Quadro 1: Caracterização do Regime Politico de acordo com o sinal de $\alpha$ e $\gamma$ .	18
--	----

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2. Revisão da Literatura</b>	<b>14</b>
2.1. Preferências assimétricas	14
2.2. A curva de Phillips não-linear	16
<b>3. O Modelo Teórico</b>	<b>17</b>
3.1. A estrutura da Economia	17
3.2. O problema do banco central e a função de reação para a taxa de juros	18
<b>4. Metodologia</b>	<b>20</b>
4.1. A forma reduzida da função de reação	20
4.2. O filtro de Kalman com correção de viés	21
4.3. Descrição dos dados	26
<b>5. Análise dos resultados</b>	<b>27</b>
5.1. Teste de Raiz Unitária	27
5.2. Estimação da função de reação com parâmetros variantes no tempo	28
<b>6. Conclusão</b>	<b>36</b>
<b>7. Referências</b>	<b>38</b>
Apêndice A: O Método de Máxima Verossimilhança com Filtro de Kalman	41
1.1. Definição do Modelo na Forma Espaço Estado	
1.2. Filtro de Kalman	
1.3. Estimação por Máxima Verossimilhança	
1.4. Decomposição em Função do Erro de Previsão	

## 1. Introdução

Nas últimas décadas, a função de reação da política monetária vem sendo exaustivamente estudada. O foco principal desses estudos é a chamada regra de Taylor (Taylor, 1993), onde se supõe que o banco central altera a taxa de juros de política monetária em resposta aos desvios correntes da inflação e do produto em relação aos seus valores-alvos. Clarida et al. (1998, 2000) analisam uma função de reação do tipo *forward-looking* onde a autoridade monetária ajusta a taxa de juros de forma proativa, utilizando como variáveis explicativas as expectativas futuras da inflação e do hiato do produto.

Em comum, as especificações para as funções de reação analisadas por Taylor (1993) e Clarida et al. (1998, 2000) assumem que o banco central reage linearmente à inflação e ao hiato do produto. Isso ocorre porque ambas as especificações estão teoricamente fundamentadas na abordagem linear-quadrática, onde é suposto que o banco central minimiza uma função perda quadrática sujeita a um sistema de equações lineares descrevendo a economia. A abordagem linear-quadrática é uma estrutura maleável que pode ser usada para examinar as características dinâmicas de uma política monetária ótima (Ikeda, 2010).

A função perda quadrática tem sido normalmente usada avaliar a política monetária ótima por três razões. A primeira é que a função perda quadrática combina com restrições lineares implicando em regres de decisão lineares. A segunda razão é que a função perda quadrática permite que a autoridade monetária suavize a taxa nominal de juros. A terceira razão é que a função perda quadrática pode ser obtida a partir de uma aproximação de segunda ordem da função intertemporal do agente representativo. Porém a função perda quadrática apresenta uma desvantagem ao dá pesos iguais para desvios da inflação e do hiato do produto em relação à seus valores-alvos.

Vários autores vêm quebrando os dois pressupostos que fundamentam a especificação linear para a função de reação. Cukierman (2000), e Cukierman e Muscatelli (2003), Bec et al. (2002) Cukierman e Gerlach (2003), Ruge-Murcia (2003) e Surico (2007b) consideram que as preferências do banco central podem ser assimétricas para desvios positivos e negativos da inflação em relação à meta e do produto em relação ao produto potencial. De acordo com Cukierman (2000), os políticos e o público em geral são comumente mais avessos a valores negativos do que a valores positivos do hiato do

produto.<sup>1</sup> Como nas democracias, os bancos centrais independentes não são totalmente insensíveis aos órgãos políticos, este tipo de assimetria pode estar presente na função perda do *policymaker*. Adicionalmente, em períodos que a autoridade monetária está preocupada com a credibilidade de sua política, é possível que a perda atribuída à desvios positivos da taxa de inflação em relação à meta seja maior do que à de desvios negativos.

Quanto ao pressuposto da linearidade da curva de Phillips, Orphanides e Wieland (2000), Schaling (2004), Nobay e Peel (2000) e Dolado et al. (2005) consideram que a inflação é uma função não-linear do hiato do produto. A partir disso, eles demonstram que, quando combinada com uma função perda quadrática, a não-linearidade da curva de Phillips implica uma regra de política monetária ótima não-linear com relação à inflação e ao hiato do produto.

Para o Brasil, Aragón e Portugal (2010) testaram se as preferências do Banco Central foram assimétricas durante o regime de metas inflacionárias. Esses autores encontraram evidências de comportamento assimétrico em favor de uma inflação acima da meta para amostra completa (2000-07), mas não para o período de 2004-07. Sá e Portugal (2011) também verificaram uma assimetria em favor de uma inflação acima da meta para o período de março de 1999 a fevereiro de 2011. Medeiros e Aragón (2011) utilizaram testes de quebra estrutural e verificaram que o tipo de assimetria encontrado por Aragón e Portugal (2010) e Sá e Portugal (2011) só foi observado até 2003. Após esse período, eles constataram que autoridade monetária foi mais avessa a desvios positivos da inflação em relação à meta.

Este trabalho justifica-se, principalmente, por existir na literatura econômica um *trade-off* entre inflação e crescimento econômico. Sarel (1996) mostra que uma inflação acima de 8 por cento ao ano tem um impacto muito forte e negativo sobre o crescimento econômico. Ghosh e Phillips (1998), mostram que uma taxa de inflação de cerca de 2,5 por cento ou inferior, a inflação e o crescimento são correlacionados positivamente. Acima desse limite, a inflação e o crescimento são negativamente correlacionados, mas a relação é convexa no sentido de que o impacto marginal negativo da inflação sobre o crescimento diminui com o aumento da inflação.

Já segundo Yehou (2002) uma alta inflação implica significativos custos reais por reduzir a eficiência do conjunto de mecanismo de alocação de preços e por gerar

---

<sup>1</sup> Sobre a preferência assimétrica do Federal Reserve, o vice-chefe, Alan Blinder, declarou que “*in most situations the CB will take far more political heat when it tightens pre-emptively to avoid higher inflation than when it eases pre-emptively to avoid higher unemployment*” Blinder (1998, pp. 19-20).

incertezas. Ainda de acordo com Yehoue estes custos, surgem porque arranjos institucionais, ou seja, de tributação e de sistemas de contratação, não são totalmente ajustados à inflação, e porque a inflação alta é frequentemente associada com alta volatilidade e imprevisibilidade.

A partir do exposto acima, este trabalho espera mostrar que durante o período analisado o Banco Central do Brasil, mudou suas preferências em relação à inflação e ao produto, passando de uma preferência por aversão à expansão, preocupado com a estabilidade de preços e em dar credibilidade à condução da política monetária após anos de inflação alta no Brasil, para preferências por Aversão à recessão, ou seja, uma maior preocupação com o crescimento econômico.

Assim, o objetivo deste trabalho é estimar parâmetros de assimetria nas preferências do Banco Central do Brasil que são variantes no tempo. Para isto, utiliza-se a metodologia de filtro de Kalman com correção de viés, proposto por Kim e Nelson (2004) e Kim (2006). A vantagem de considerar assimetrias variantes no tempo é que se pode descrever como o Banco Central atualiza suas preferências em cada instante  $t$ , além de identificar os períodos em que as preferências assimétricas são observadas.

Teoricamente, este trabalho segue Kim (2004, 2006) e Kim e Nelson (2006), e considera que a autoridade monetária tem uma função perda Linex e se depara com uma curva de Phillips convexa. A especificação da regra de taxa de juros obtida da solução do problema de otimização do *policymaker* permite estimar os parâmetros de assimetrias nas preferências do banco central e testar se estes coeficientes são estatisticamente significativos. Além disso, é possível verificar a existência de não-linearidade na função de reação decorrente da convexidade da curva de Phillips.

Este trabalho é constituído por cinco capítulos, além desta introdução. No segundo capítulo encontra-se a revisão bibliográfica sobre o tema estudado. No capítulo 3 são apresentados o modelo teórico utilizado e a derivação da regra ótima para a taxa de juros. O modelo empírico e a descrição do procedimento de Kalman com correção de viés são mostrados no capítulo 4. O quinto capítulo traz os resultados do trabalho. Por fim, as conclusões são expostas no capítulo 6.

Os resultados mostram que: i) há forte evidência empírica de endogeneidade dos regressores da regra de política monetária; ii) que a taxa de juros esperada esteve acima de 10% durante todo o período analisado, tendo uma média de 11%; iii) a resposta da taxa Selic à inflação varia consideravelmente ao longo do período e tem mostrado uma

tendência decrescente; iv) a resposta da taxa de juros em relação ao desvio da inflação a meta respeita o princípio de Taylor; v) o coeficiente de suavização da taxa de juros foi constante durante todo o período analisado; vi) que o BCB teve em boa parte do período analisado uma aversão recessão, permitindo uma inflação acima da meta.

## 2. Revisão da Literatura

Neste capítulo serão apresentadas algumas contribuições teóricas e empíricas sobre os dois assuntos tratados nesse trabalho: as preferências assimétricas e curva de Phillips não-linear.

### 2.1. Preferências assimétricas na função perda do banco central

Na literatura macroeconômica, o estudo sobre regras ótimas para a condução da política monetária é muitas vezes baseado em um modelo linear-quadrático (LQ). Este modelo admite que o *policymaker* apresente uma função perda quadrática, implicando que um desvio positivo da inflação (ou produto) de sua meta gera uma perda igual a um desvio negativo de mesmo tamanho.<sup>2</sup> Quando o instrumento de política é a taxa de juros de curto prazo, a combinação de uma função perda quadrática com um sistema dinâmico linear descrevendo a economia leva a uma função de reação linear com relação aos desvios da inflação e produto de suas metas.

Recentemente, vários trabalhos têm utilizado especificações para a função perda que permitem que a autoridade monetária possa ter preferências assimétricas em relação à inflação e ao hiato do produto. Cukierman (2000) investigou as implicações econômicas quando a autoridade monetária é mais avessa a hiatos negativos do produto e está incerta acerca das condições econômicas. Ele demonstra que um viés inflacionário surge mesmo no caso em que a meta para o produto efetivo é o produto potencial da economia.<sup>3</sup> Bec et al. (2002) analisam a política monetária ótima de um banco central com uma função perda *threshold* que considera diferentes pesos relativos atribuídos ao hiato do produto em períodos de recessão e expansão econômica.

Orphanides e Wilcox (2002) e Aksoy et al. (2006) investigaram as ações de um banco central que atribui uma perda quadrática aos desvios da inflação do intervalo de tolerância para a sua meta explícita, e uma perda próxima de zero para a inflação dentro da zona de tolerância. Esses autores demonstram que um banco central oportunista responde mais agressivamente a uma elevação do produto quando a inflação ultrapassa um limite de tolerância.

---

<sup>2</sup> Ver, Taylor (1993, 1999), Svensson (1997) e Clarida et al. (1998, 2000).

<sup>3</sup> Evidências empíricas deste tipo de viés inflacionário são providas por Cukierman e Gerlach (2003) para um conjunto de 22 países pertencentes à Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

Dolado et al. (2004) encontram que, na ausência da certeza de equivalência, quando o banco central associa uma maior perda a desvios positivos da inflação de sua meta, a incerteza induz a um comportamento prudente por parte da autoridade monetária. Isso é verificado através da inclusão da variância condicional da inflação como um argumento adicional na regra de Taylor.

Nobay e Peel (2003) são os pioneiros na análise da política monetária ótima de um banco central com uma função perda Linex (exponencial linear) que permite assimetrias nas preferências sobre desvios positivos e negativos da inflação em relação à meta.<sup>4</sup> A vantagem do uso deste tipo de função perda é que ela permite a estimação paramétrica do coeficiente medindo a assimetria. Surico (2007a, 2007b) estendeu o modelo de Nobay e Peel (2003) para testar a presença de preferências assimétricas para a inflação e hiato do produto no Federal Reserve (FED) e no Banco Central Europeu (BCE).

Sobre as evidências empíricas, Gerlach (2000) e Surico (2007a) mostram que o Federal Reserve foi mais preocupado com hiatos negativos do que hiatos positivos do produto no período pré-Volcker. Bec et al. (2002) verificam que a fase do ciclo de negócios, mensurada pelo hiato do produto, tem importância na condução da política monetária pelos Bancos Centrais da Alemanha, EUA e França. Cukierman e Muscatelli (2003) proveem evidências de não linearidades com respeito à inflação e ao hiato do produto em funções de reação estimadas para Alemanha, Reino Unido e EUA. Dolado et al. (2004) observam que as preferências do Federal Reserve em relação à inflação foram assimétricas durante o regime Volcker-Greenspan. Aragón e Portugal (2010) e Medeiros e Aragón (2011) encontram evidências de que o Banco Central do Brasil apresentou uma preferência assimétrica em favor de uma inflação acima da meta no período 2000-2003.

Diferente dos trabalhos acima, Ikeda (2010) estima preferências assimétricas variantes no tempo para o BCE. Para isto, ele emprega o procedimento de Filtro de Kalman com correção de viés, proposto por Kim (2006). Os resultados encontrados mostram que o BCE apresenta uma maior aversão a expansões do produto e que essa aversão tem aumentado ao longo do tempo.

---

<sup>4</sup> A função de perda Linex foi inicialmente utilizada em um contexto de análise bayesiana (Varian, 1974; Zellner, 1986) e utilizada nos estudos monetários por Nobay e Peel (1999).

## 2.2. A Curva de Phillips Não-linear

Phillips (1958), em seu artigo seminal, encontrou uma relação negativa e linear entre desemprego e inflação de salários no Reino Unido no período de 1861 a 1957. Posteriormente, vários pesquisadores encontraram a mesma relação entre desemprego e inflação de preços. Esta relação inversa entre inflação e desemprego ficou conhecida como Curva de Phillips.<sup>5</sup>

Nos últimos anos, a linearidade da curva de Phillips vem sendo discutida em diversos artigos.<sup>6</sup> Clarck et al. (1996), Bean (1997) e Schaling (2004) propõem um formato convexo para a curva de Phillips. Para estes autores, a convexidade da curva de Phillips ocorre quando a economia está sujeita às restrições na capacidade produtiva.<sup>7,8</sup> Eisner (1997) e Stiglitz (1997) mostram que, em um mercado de concorrência imperfeita onde os empresários são receosos de que elevações de preços estimulem a entrada de novas empresas, a curva de Phillips é côncava. Filado (1998) propõem uma curva de Phillips côncava-convexa para os EUA. Para ele, a curva de Phillips será convexa se o hiato do produto for positivo, e côncava se o hiato do produto for negativo.

Para a condução da política monetária, a não-linearidade da curva de Phillips tem importantes efeitos. Orphanides e Wieland (2000) derivam uma regra monetária ótima não-linear para o caso em que a autoridade monetária apresenta uma função perda quadrática e depara-se com uma curva de Phillips zona-linear que possibilita não-linearidades no *trade-off* de curto prazo entre inflação e produto. Nobay e Peel (2000) analisam a política monetária discricionária ótima sob uma curva de Phillips não-linear e verificam que a autoridade monetária não pode mais remover o viés inflacionário definindo uma meta para o produto igual à taxa natural. Dolado et al. (2005) demonstram que a função de reação ótima do banco central, para uma economia com a curva de Phillips não-linear, é uma regra de taxa de juros *forward-looking* aumentada para incluir a interação entre inflação esperada e hiato do produto. Eles encontram evidências empíricas desse tipo de assimetria para os Bancos Centrais da Alemanha, Espanha e França, mas não para o Federal Reserve.

---

<sup>5</sup> Ver Gordon (1970).

<sup>6</sup> Evidências empíricas em favor de uma curva de Phillips não-linear são apresentadas por Laxton et al. (1995, 1999), Dupasquier e Ricketts (1998), Álvarez-Lois (2000), Gerlach (2000) e Dolado et al. (2005).

<sup>7</sup> Neste caso, se as empresas estiverem operando perto da capacidade instalada, qualquer aumento de demanda agregada pode se traduzir quase exclusivamente em um aumento da inflação, mesmo no curto prazo.

<sup>8</sup> Outras razões para uma relação convexa entre inflação e desemprego (ou produto) são a rigidez nominal para baixo de preços e/ou salários e presença de custos de menu.

### 3. O Modelo Teórico

Seguindo Surico (2007b), este trabalho fundamenta-se teoricamente no modelo Novo-Keynesiano expandido para incluir uma relação convexa entre inflação e hiato do produto na curva de Phillips. Além disso, é assumido que o banco central apresenta uma função perda Linex. Isso possibilita que a autoridade monetária tenha preferências assimétricas em relação aos seus objetivos ou metas. Em específico, é permitido que o *policymaker* seja mais avesso a desvios negativos do produto efetivo em relação ao produto potencial e a desvios positivos da taxa de inflação em relação à meta inflacionária. A presença de não-linearidade na curva de Phillips e assimetrias na função perda explicam possíveis respostas não-lineares da taxa de juros de política monetária a variações na inflação e no produto.

#### 3.1. A estrutura da economia

Considere uma economia cuja evolução da inflação e do hiato do produto seja representada por um sistema de duas equações, a saber:

$$\pi_t = \theta E_t \pi_{t+1} + \frac{\kappa x_t}{1 - \kappa \tau x_t} + e_t \quad (1)$$

$$x_t = -\varphi(i_t - E_t \pi_{t+1}) + E_t x_{t+1} + u_t \quad (2)$$

onde  $\pi_t$  é a taxa de inflação,  $x_t$  é o hiato do produto (isto é, a diferença entre o produto efetivo e o produto potencial),  $E_t \pi_{t+1}$  e  $E_t x_{t+1}$  são os valores esperados para a taxa de inflação e hiato do produto condicionados às informações disponíveis no período  $t$ ,  $i_t$  é a taxa de juros, e  $u_t^s$  e  $u_t^d$  são, respectivamente, os choques de custos e choques de demanda. Os parâmetros  $\theta$ ,  $\kappa$  e  $\varphi$  são constantes positivas, com  $0 < \theta < 1$ .

A equação (1), que representa a curva de Phillips, segue a estrutura proposta por Calvo (1983) e apreende a característica de preços nominais sobrepostos, onde cada firma tem uma probabilidade  $\theta$  de manter o preço do produto fixado em qualquer período de tempo  $t$ . A natureza discreta do ajuste de preços resultantes deste fato incentiva cada empresa a ajustar um preço mais elevado quanto maior a expectativa de inflação futura.

O parâmetro  $\tau$  controla a não-linearidade na curva de Phillips, permitindo que essa curva seja mais inclinada para valores mais elevados de inflação e hiato do produto.

Quando o parâmetro  $\tau$  tende a zero, a linearidade é restaurada. A convexidade da curva de Phillips implica que alterações na demanda agregada associado com um aumento da taxa de juros geram um efeito mais forte (fraco) no produto e um efeito mais fraco (forte) na inflação quando o produto é baixo (alto).

A equação (2) representa a curva IS e é uma versão log-linearizada da equação de Euler para o consumo. Ela é obtida a partir das decisões ótimas das famílias sobre o consumo/poupança, com a imposição da condição de *market clearing*. Esta formulação mostra que as famílias preferem suavizar seu consumo ao longo do tempo, fazendo o hiato do produto uma função positiva do seu valor futuro esperado. Neste caso, a expectativa de um aumento do consumo no futuro leva a um maior consumo no presente, aumentando assim a demanda corrente pelo produto.

Os choques  $e_t$  e  $u_t$  são dados pelos processos autorregressivos:

$$e_t = \rho_{u^s} u_{t-1}^s + \hat{e}_t \quad (3)$$

$$u_t = \rho_{u^d} u_{t-1}^d + \hat{u}_t \quad (4)$$

sendo  $0 \leq \rho_{u^s}, \rho_{u^d} \leq 1$ ,  $\hat{e}_t$  e  $\hat{u}_t$  são variáveis aleatórias com média zero e desvio-padrão  $\sigma_{\mu^s}$  e  $\sigma_{\mu^d}$ , respectivamente.

### 3.2. O problema do banco central e a função de reação para a taxa de juros

Admita que as ações de política monetária sejam tomadas antes da realização dos choques econômicos  $e_t$  e  $u_t$ . Condicionado às informações disponíveis no período anterior, o formulador de política monetária procura escolher as taxas de juros corrente e futuras de modo a minimizar:

$$E_{t-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^\tau L_{t+\tau} \quad (5)$$

sujeito a estrutura da economia, dada pelas equações (1) e (2), sabendo que  $\delta$  é o fator de desconto fixado. A função perda Linex no período  $t$  é expressa como segue:

$$L_t = E_{t-1} \left\{ \left[ \frac{e^{\alpha(\pi_t - \pi^*)} - \alpha(\pi_t - \pi^*) - 1}{\alpha^2} \right] + \lambda \left[ \frac{e^{\gamma x_t} - \gamma x_t - 1}{\gamma^2} \right] + \frac{\mu_i}{2} (i_t - i^*)^2 + \frac{\mu_{\Delta i}}{2} (i_t - i_{t-1})^2 \right\} \quad (6)$$

onde  $i_t$  é a taxa de juros nominal,  $i^*$  é a meta implícita da taxa de juros,  $\pi^*$  é a meta da inflação,  $\lambda$  é o peso relativo sobre o desvio do produto em relação ao produto potencial,  $\alpha$  e

$\gamma$  medem as assimetrias nas preferências sobre a inflação e produto, e  $\mu_i$  e  $\mu_{\Delta i}$  são os pesos dados à estabilização da taxa de juros ao redor de uma meta implícita  $i^*$ , e da taxa de juros no período  $t-1$ ,  $i_{t-1}$ . A finalidade da autoridade monetária é estabilizar a inflação e a taxa de juros em torno de suas metas e manter o hiato do produto igual a zero.

A função perda (6) permite que a autoridade monetária trate de forma diferenciada desvios positivos e negativos da inflação e do produto em relação a seus valores alvos. Por exemplo, um valor positivo de  $\alpha$  implica que, *ceteris paribus*, os desvios da inflação acima da meta geram uma perda maior do que desvios abaixo da meta (ver Fig. 1). Este tipo de comportamento descreve uma autoridade monetária que está preocupada em estabelecer credibilidade à sua política de redução da inflação. É importante ressaltar que a especificação Linex (6) não impede que  $\alpha$  tenha um valor negativo, implicando que uma inflação abaixo da meta é mais custosa para a autoridade monetária do que uma inflação acima da meta.

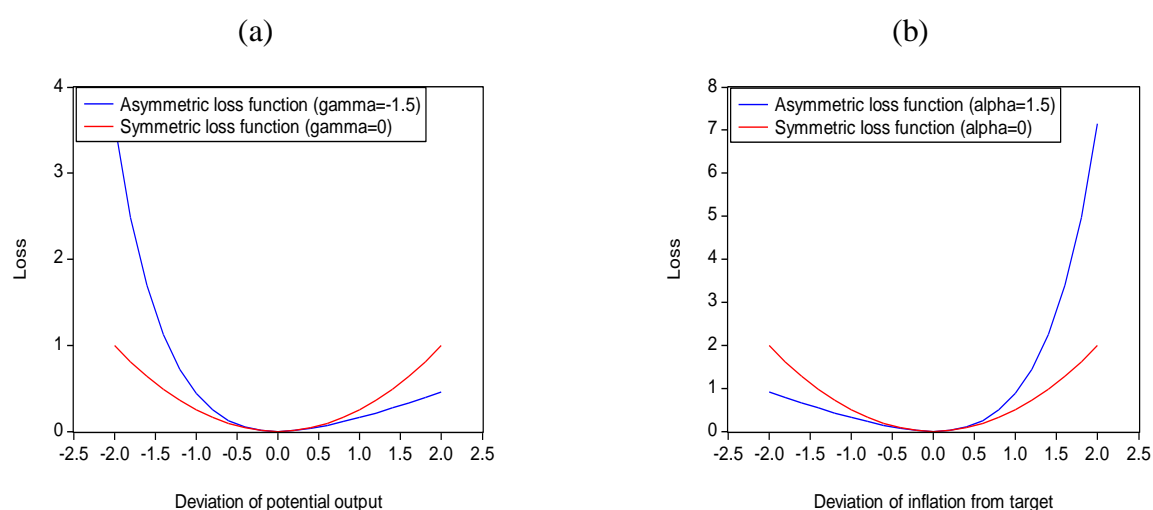


Figura 1 – Função perda simétrica e assimétrica com relação ao hiato do produto (a) e inflação (b)

Quadro 1: Caracterização do Regime Político de acordo com o sinal de  $\alpha$  e  $\gamma$ .

$\pi_t$	Resultado	$x_t$	Resultado
$\alpha > 0$	Aversão à expansão	$\gamma > 0$	Demanda por recessão
$\alpha < 0$	Aversão à recessão	$\gamma < 0$	Demanda por expansão

Por sua vez, quando  $\gamma$  apresentar um valor negativo, a perda marginal associada a um hiato do produto negativo é maior que a de um hiato do produto positivo com o mesmo valor absoluto, implicando que a autoridade monetária apresenta uma demanda precaucional por expansão econômica (Cukierman, 2000). Para o caso em que  $\gamma$  e  $\alpha$  tendem para zero, (6) é reduzida para a função perda quadrática (simétrica):

$$L_t = \frac{1}{2} \left[ (\pi_t - \pi^*)^2 + \lambda x_t^2 + \mu_i (i_t - i^*)^2 + \mu_{\Delta i} (i_t - i^*)^2 \right] \quad (7)$$

Tomando a estrutura da economia e as expectativas das variáveis futuras como dadas, um banco central discricionário escolhe otimamente a taxa de juros corrente re-otimizando em cada período. Visto que não há persistência endógena na inflação e hiato do produto, o problema de otimização intertemporal pode ser reduzido a uma sequência de problemas de otimização estática. Neste caso, tomando a condição de primeira ordem e resolvendo para  $i_t$ , temos:

$$i_t = (1 - \theta_1) \left\{ i^* + \frac{1}{\mu_i} E_{t-1} \left[ \left( \frac{e^{\alpha(\pi_t - \pi^*)} - 1}{\alpha} \right) \left( \frac{\kappa \varphi}{(1 - \kappa \tau g_t)^2} \right) \right] + \frac{\lambda \varphi}{\mu_i} E_{t-1} \left( \frac{e^{\gamma x_t} - 1}{\gamma} \right) \right\} + \theta_1 i_{t-1} \quad (8)$$

onde  $\theta_1 = \frac{\mu_{\Delta i}}{\mu_i + \mu_{\Delta i}}$  é o parâmetro de suavização da taxa de juros.

De acordo com a função de reação (8), a taxa de juros ótima ajustada pela autoridade monetária responde de forma não-linear à inflação e ao hiato do produto no período  $t$ . Quando  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $\tau$  tendem para zero, é possível mostrar que a equação (8) é reduzida para a função de reação:

$$i_t = (1 - \theta_1) \left[ i^* + \frac{\kappa \varphi}{\mu_i} E_{t-1} (\pi_t - \pi^*) + \frac{\lambda \varphi}{\mu_i} E_{t-1} x_t \right] + \theta_1 i_{t-1} \quad (9)$$

Neste caso, a taxa de juros de política monetária responde linearmente ao hiato do produto esperado e taxa de inflação esperada para o período  $t$ . Da comparação entre as equações (9) e (8), verifica-se que a presença de assimetrias nos objetivos da autoridade monetária e a não-linearidade na curva de Phillips implicam diretamente em uma função de reação da taxa de juros que é não-linear.

## 4. Metodologia

Este capítulo apresenta a forma reduzida para a regra de taxa de juros e a metodologia de filtro de Kalman com correção de viés que será utilizada para estimação dos coeficientes de preferências assimétricas variantes no tempo para Banco Central do Brasil.

### 4.1. A forma reduzida da função de reação

Os procedimentos de estimação da função de reação (8) e de teste da hipótese de preferências simétricas são complicados em razão da indeterminação de importantes parâmetros e da presença de parâmetros de incômodo (*nuisance parameters*) não-identificados sob a hipótese de que  $\gamma = \alpha = 0$ .<sup>9</sup> Para contornar esses problemas, os termos exponenciais em (8) são linearizados através de uma expansão de Taylor de segunda ordem ao redor de  $\pi_t - \pi^* = 0$  e  $x_t = 0$ . Fazendo isto, chega-se a seguinte especificação para a regra de política monetária:

$$i_t = (1 - \theta_1) \left\{ i^* + \frac{\kappa\varphi}{\mu_i} E_{t-1} (\pi_t - \pi^*) + \frac{\lambda\varphi}{\mu_i} E_{t-1} x_t + \frac{\alpha\kappa\varphi}{2\mu_i} E_{t-1} (\pi_t - \pi^*)^2 + \frac{\alpha\lambda\varphi}{2\mu_i} x_t^2 + \frac{2\kappa^2\tau\varphi}{\mu_i} E_{t-1} [(\pi_t - \pi^*) x_t] \right\} + \theta_1 i_{t-1} + \frac{o_t}{\mu_i} \quad (10)$$

onde  $o_t$  é o resto da expansão de Taylor.

Para chegar a uma especificação da função de reação que possa ser estimada, os valores esperados para inflação e hiato do produto são substituídos por seus valores realizados. Fazendo isto, tem-se:

$$i_t = (1 - \theta_1) \left\{ \beta_0 + \beta_1 (\pi_t - \pi^*) + \beta_2 x_t + \beta_3 (\pi_t - \pi^*)^2 + \beta_4 x_t^2 + \beta_5 (\pi_t - \pi^*) x_t \right\} + \theta_1 i_{t-1} + e_t \quad (11)$$

em que

$$\beta_1 = \frac{\kappa\varphi}{\mu_i}, \beta_2 = \frac{\lambda\varphi}{\mu_i}, \beta_3 = \frac{\alpha\kappa\varphi}{2\mu_i}, \beta_4 = \frac{\gamma\lambda\varphi}{2\mu_i}, \beta_5 = \frac{2\kappa^2\tau\varphi}{\mu_i}, \theta_1 = \frac{\mu_{\Delta i}}{\mu_i + \mu_{\Delta i}} \quad (12)$$

e

<sup>9</sup> Por exemplo, se  $\gamma = \alpha = 0$ , então os coeficientes relacionados à taxa de inflação e ao hiato do produto na função de reação (8) são indeterminados.

$$e_t = -(1-\theta_1) \left\{ \beta_1 \left[ (\pi_t - \pi^*) - E_{t-1}(\pi_t - \pi^*) \right] + \beta_2 (x_t - E_{t-1}x_t) + \beta_3 \left[ (\pi_t - \pi^*)^2 - E_{t-1}(\pi_t - \pi^*)^2 \right] \right\} + \frac{o_t}{\mu_t} \quad (13)$$

$$\left\{ + \beta_4 (x_t^2 - E_{t-1}x_t^2) + \beta_5 \left[ (\pi_t - \pi^*)x_t - E_{t-1}((\pi_t - \pi^*)x_t) \right] \right\}$$

é o termo de erro. De acordo com (12), os parâmetros de assimetria na função perda do banco central,  $\alpha$  e  $\gamma$ , podem ser identificados e estimados através das seguintes expressões

$$\alpha = \frac{2\beta_3}{\beta_1} \text{ e } \gamma = \frac{2\beta_4}{\beta_2}.$$

#### 4.2. Especificação da função de reação com parâmetros variantes no tempo

Para captar mudanças na condução da política monetária e nas preferências do banco central, considera-se que os parâmetros da função de reação são variantes no tempo e assumem uma dinâmica de passeio aleatório, isto é,

$$i_t = \beta'_{0,t} + \beta'_{1,t}\tilde{\pi}_t + \beta'_{2,t}x_t + \beta'_{3,t}(\tilde{\pi}_t)^2 + \beta'_{4,t}(x_t)^2 + \beta'_{5,t}(\tilde{\pi}_t)x_t + \theta_t i_{t-1} + e_t,$$

$$e_t = - \left\{ \beta'_1(\tilde{\pi}_t - E_{t-1}\tilde{\pi}_t) + \beta'_2(x_t - E_{t-1}x_t) + \beta'_3[\tilde{\pi}_t^2 - E_{t-1}(\tilde{\pi}_t)^2] + \right\} + \frac{o_t}{\mu_t}, \quad e_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_e^2) \quad (14)$$

$$\left\{ + \beta'_4[x_t^2 - E_{t-1}(x_t)^2] + \beta'_5[\tilde{\pi}_t x_t - E_{t-1}(\tilde{\pi}_t x_t)] \right\}$$

$$\beta'_{i,t} = (1-\theta_t)\beta'_{i,t}, \quad i = 0, 1, \dots, 5 \quad (15)$$

$$\beta'_{i,t} = \beta'_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \quad \varepsilon_{i,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_{\varepsilon,i}^2) \quad (16)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \varepsilon_{6,t}, \quad \varepsilon_{6,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_{\varepsilon,6}^2) \quad (17)$$

onde  $\tilde{\pi}_t = \pi_t - \pi^*$  é o desvio da inflação em relação á meta. Os coeficientes  $\beta'_{i,t}$  ( $\beta_{i,t}$ ),  $i = 0, 1, \dots, 5$ , medem a resposta de curto prazo (longo prazo) da taxa Selic às variáveis explicativas da regra de política monetária. A partir de (12), é possível verificar que os parâmetros de assimetria variantes no tempo podem ser obtidos através das seguintes expressões  $\alpha_t = 2\beta'_{3,t}/\beta'_{1,t}$  e  $\gamma_t = 2\beta'_{4,t}/\beta'_{2,t}$ .

De (14), vê-se que o distúrbio  $e_t$  é uma combinação linear de erros de previsão e, por isso, correlacionado com as variáveis  $\tilde{\pi}_t$ ,  $x_t$ ,  $(\tilde{\pi}_t)^2$ ,  $(x_t)^2$  e  $\tilde{\pi}_t x_t$ . Diante disso, a estimação de (14)-(17) pelo filtro de Kalman convencional via Máxima Verossimilhança não pode ser realizada porque esse procedimento é derivado sob a hipótese de que os regressores e os distúrbios não são correlacionados.

A fim de corrigir o problema de endogeneidade, serão utilizadas variáveis instrumentais (IV). Em específico, as relações entre os regressores endógenos e os seus instrumentos serão dadas por:

$$\tilde{\pi}_t = z_t' \delta_1 + v_{1t}, \quad v_{1t} \sim N(0, \sigma_{v1}^2) \quad (18)$$

$$x_t = z_t' \delta_2 + v_{2t}, \quad v_{2t} \sim N(0, \sigma_{v2}^2) \quad (19)$$

$$\tilde{\pi}_t^2 = z_t' \delta_3 + v_{3t}, \quad v_{3t} \sim N(0, \sigma_{v3}^2) \quad (20)$$

$$x_t^2 = z_t' \delta_4 + v_{4t}, \quad v_{4t} \sim N(0, \sigma_{v4}^2) \quad (21)$$

$$\tilde{\pi}_t x_t = z_t' \delta_5 + v_{5t}, \quad v_{5t} \sim N(0, \sigma_{v5}^2) \quad (22)$$

em que  $z_t$  é o vetor das variáveis instrumentais. Por simplicidade, será assumido que as relações entre os regressores endógenos da equação (9) e seus instrumentos são constantes.

#### 4.2.1. Um procedimento de Máxima Verossimilhança em dois estágios

Este trabalho segue Kim (2004, 2006) e Kim e Nelson (2006), e utiliza um procedimento em dois estágios para a estimação da função de reação (14)-(17). Para esta finalidade, as variáveis  $\tilde{\pi}_t$ ,  $x_t$ ,  $(\tilde{\pi}_t)^2$ ,  $(x_t)^2$  e  $\tilde{\pi}_t x_t$  são decompostas em dois componentes: componente previsto e o componente de erro de previsão. Fazendo isto, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\pi}_t \\ x_t \\ \tilde{\pi}_t^2 \\ x_t^2 \\ \tilde{\pi}_t x_t \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_t \\ x_t \\ \tilde{\pi}_t^2 \\ x_t^2 \\ \tilde{\pi}_t x_t \end{bmatrix} \bigg| \psi_{t-1} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \\ v_{4t} \\ v_{5t} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \\ v_{4t} \\ v_{5t} \end{bmatrix} = \Omega^{1/2} \begin{bmatrix} v_{1t}^* \\ v_{2t}^* \\ v_{3t}^* \\ v_{4t}^* \\ v_{5t}^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{1t}^* \\ v_{2t}^* \\ v_{3t}^* \\ v_{4t}^* \\ v_{5t}^* \end{bmatrix} \sim i.i.d.N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (24)$$

onde  $\psi_{t-1}$  é a informação disponível em  $t-1$ ,  $\Omega$  é a matriz de variância e covariância do vetor de erros de previsão,  $v_t = [v_{1t} \ v_{2t} \ v_{3t} \ v_{4t} \ v_{5t}]'$ .

Tomando o vetor  $5 \times 1$  dos erros de previsão padronizados,  $v_t^* = [v_{1t}^* \ v_{2t}^* \ v_{3t}^* \ v_{4t}^* \ v_{5t}^*]'$ , tem-se a estrutura de covariância entre  $v_t^*$  e  $e_t$ :

$$\begin{bmatrix} v_t^* \\ e_t \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_5 & \rho \sigma_e \\ \rho' \sigma_e & \sigma_e^2 \end{bmatrix} \right), \quad (25)$$

onde  $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4 \ \rho_5]'$  é um vetor de correlação constante. A decomposição de Cholesky para a matriz de covariância na equação (25) resulta na seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} v_t^* \\ e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ \rho' \sigma_e & \sqrt{(1 - \rho' \rho)} \sigma_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \omega_t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \omega_t \end{bmatrix} \sim i.i.d. N \left( \begin{bmatrix} 0_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_2 & 0_5 \\ 0_5' & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (26)$$

onde  $0_5$  é o vetor  $5 \times 1$  de zeros. Essa decomposição permite reescrever  $e_t$  da seguinte maneira:

$$e_t = \left( \begin{array}{l} \rho_1 \sigma_e v_{1t}^* + \rho_2 \sigma_e v_{2t}^* + \rho_3 \sigma_e v_{3t}^* + \\ + \rho_4 \sigma_e v_{4t}^* + \rho_5 \sigma_e v_{5t}^* \end{array} \right) + \omega_t^*, \quad \omega_t^* \sim N(0, (1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 - \rho_4^2 - \rho_5^2) \sigma_e^2) \quad (27)$$

onde  $\omega_t^*$  é não correlacionado com  $v_{1t}^*, v_{2t}^*, v_{3t}^*, v_{4t}^*$  e  $v_{5t}^*$ . Isto é, o papel da equação (27) é de decompor  $e_t$  na equação (14) nos seguintes componentes: i) os componentes  $v_{1t}^*, v_{2t}^*, v_{3t}^*, v_{4t}^*$  e  $v_{5t}^*$ , que são correlacionados com  $\tilde{\pi}_t, x_t, (\tilde{\pi}_t)^2, (x_t)^2$  e  $\tilde{\pi}_t x_t$ ; e ii) o componente  $\omega_t^*$  que é não correlacionado os regressores endógenos.

Substituindo (27) em (14), obtém-se:

$$i_t = \left[ \begin{array}{l} \beta'_{0,t} + \beta'_{1,t} \tilde{\pi}_t + \beta'_{2,t} x_t + \beta'_{3,t} (\tilde{\pi}_t)^2 + \beta'_{4,t} (x_t)^2 + \beta'_{5,t} (\tilde{\pi}_t) x_t + \theta_t i_{t-1} + \\ + \rho_1 \sigma_e v_{1t}^* + \rho_2 \sigma_e v_{2t}^* + \rho_3 \sigma_e v_{3t}^* + \rho_4 \sigma_e v_{4t}^* + \rho_5 \sigma_e v_{5t}^* \end{array} \right] + \omega_t^* \quad (14')$$

Na equação (14'), o novo termo de erro é não correlacionado com  $\tilde{\pi}_t, x_t, (\tilde{\pi}_t)^2, (x_t)^2, \tilde{\pi}_t x_t, v_{1t}^*, v_{2t}^*, v_{3t}^*, v_{4t}^*$  e  $v_{5t}^*$ . Dado isto, o procedimento da estimação por Máxima Verossimilhança (MV) se dá em dois passos:

*Passo 1:* Estimar as equações (18)-(22) por MV ou Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) e obter os erros de previsão padronizados,  $\hat{v}_{1t}^*, \hat{v}_{2t}^*, \hat{v}_{3t}^*, \hat{v}_{4t}^*$  e  $\hat{v}_{5t}^*$ .

*Passo 2:* Estimar por MV via filtro de Kalman a equação

$$i_t = \left[ \begin{array}{l} \beta'_{0,t} + \beta'_{1,t} \tilde{\pi}_t + \beta'_{2,t} x_t + \beta'_{3,t} (\tilde{\pi}_t)^2 + \beta'_{4,t} (x_t)^2 + \beta'_{5,t} (\tilde{\pi}_t) x_t + \theta_t i_{t-1} + \\ + \rho_1 \sigma_e \hat{v}_{1t}^* + \rho_2 \sigma_e \hat{v}_{2t}^* + \rho_3 \sigma_e \hat{v}_{3t}^* + \rho_4 \sigma_e \hat{v}_{4t}^* + \rho_5 \sigma_e \hat{v}_{5t}^* \end{array} \right] + \omega_t^* \quad (14'')$$

junto com as equações (16) e (17).

Como destacado por Kim (2006) e Kim e Nelson (2006), os erros de previsão padronizados  $\hat{v}_{1t}^*, \hat{v}_{2t}^*, \hat{v}_{3t}^*, \hat{v}_{4t}^*$  e  $\hat{v}_{5t}^*$  são incluídos em (14'') como termos de correção de viés em semelhança ao procedimento de dois passos proposto por Heckman (1976). Nesse caso, os termos de correção de viés são inseridos a fim de capturar possíveis mudanças no grau de incerteza associados à inflação e ao hiato do produto, e que são consideradas na regra de política monetária.

#### 4.2.2. O filtro de Kalman

A função de reação da política monetária (14'') pode ser expressa como:

$$Y_t = \left( X_t' \beta_t + \rho_1 \sigma_e \hat{v}_{1t}^* + \rho_2 \sigma_e \hat{v}_{2t}^* + \rho_3 \sigma_e \hat{v}_{3t}^* + \rho_4 \sigma_e \hat{v}_{4t}^* + \rho_5 \sigma_e \hat{v}_{5t}^* \right) + \omega_t^*, \quad \omega_t^* \sim N \left( 0, \left( 1 - \sum_{j=1}^5 \rho_j^2 \right) \sigma_e^2 \right) \quad (28)$$

$$\beta_t' = \beta_{t-1}' + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \Sigma_\varepsilon) \quad (29)$$

$$\text{onde } Y_t = i_t, \quad X_t' = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\pi}_t & x_t & \tilde{\pi}_t^2 & x_t^2 & \tilde{\pi}_t x_t & i_{t-1} \end{bmatrix}' \text{ e } \beta_t' = \begin{bmatrix} \beta_{0,t}' & \beta_{1,t}' & \beta_{2,t}' & \beta_{3,t}' & \beta_{4,t}' & \beta_{5,t}' & \theta_t' \end{bmatrix}'.$$

Para esse modelo, o filtro de Kalman pode ser descrito pelas equações:<sup>10</sup>

$$\beta_{t|t-1} = F \beta_{t-1|t-1} \quad (30)$$

$$P_{t|t-1} = F P_{t-1|t-1} F' + \Sigma_\varepsilon \quad (31)$$

$$\eta_{t|t-1} = Y_t - X_t' \beta_{t-1|t-1} - \rho_1 \sigma_e v_{1t}^* - \rho_2 \sigma_e v_{2t}^* - \rho_3 \sigma_e v_{3t}^* - \rho_4 \sigma_e v_{4t}^* - \rho_5 \sigma_e v_{5t}^* \quad (32)$$

$$H_{t|t-1} = X_t' P_{t-1|t-1} X_t + \sigma_{\omega^*}^2 \quad (33)$$

$$\beta_{t|t} = \beta_{t|t-1} + P_{t|t-1} X_t H_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1} \quad (34)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} X_t H_{t|t-1}^{-1} X_t' P_{t|t-1}. \quad (35)$$

Embora o filtro de Kalman forneça a inferência correta em  $\beta_t$ , as variância  $P_{t|t-1}$  e  $P_{t|t}$  são medidas incorretas. Para corrigir esse viés de endogeneidade, a inferência em  $\beta_t$  deverá ser condicionada aos termos de correção de viés  $v_{1t}^*, v_{2t}^*, v_{3t}^*, v_{4t}^*$  e  $v_{5t}^*$ . A equação (34) fornece a variância de  $Y_t$  condicionada a informação passada e os termos de correção de viés. A equação (35) fornece a variância de  $\beta_t$  condicionada à informação no tempo  $t$  e nos termos de correção de viés. Desse modo a variância condicional correta de  $Y_t$ , bem como a variância correta de  $\beta_t$  não poderá ser condicionada aos termos de viés de correção. Para

<sup>10</sup> Para mais detalhes sobre o filtro de Kalman, ver Apêndice A e Kim e Nelson (1999).

tanto as inferências corretas para a variância condicional de  $\beta_t$  são dadas pelas seguintes equações:

$$H_{t|t-1}^* = X_t' P_{t|t-1} X_t + \sigma_e^2, \quad (36)$$

$$P_{t|t}^* = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} X_t H_{t|t-1}^{*-1} X_t' P_{t|t-1}, \quad (37)$$

$$P_{t+1|t}^* = F P_{t|t}^* F' + \Sigma_\varepsilon. \quad (38)$$

Para uma inferência mais apurada sobre  $\beta_t$ , estimam-se os valores suavizados destes parâmetros,  $\beta_{t|T}$ , no qual utiliza toda informação disponível na amostra. Seguindo Kim (2004), o filtro de suavização é dado pelas seguintes equações que são interagidas para  $t=T-1, T-2, \dots, 1$ :

$$\beta_{t|T} = \beta_{t|t} + P_{t|t} P_{t+1|t}^{-1} (\beta_{t+1|T} - \beta_{t+1|t}) \quad (39)$$

$$P_{t|T}^* = P_{t|t}^* + P_{t|t} P_{t+1|t}^{-1} (P_{t+1|T}^* - P_{t+1|t}^*) P_{t+1|t}^{-1} P_{t|t}' \quad (40)$$

#### 4.3. Descrição dos dados

Os dados para as estimações das funções de reação do Banco Central do Brasil foram coletados juntos aos *sites* dos principais institutos de pesquisas, como o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA) e Banco Central do Brasil (BCB). As variáveis tem periodicidade mensal e foram coletadas para o período 2000:01- 2011:12.

A variável dependente,  $i_t$ , é a taxa de juros Selic acumulada no mês e anualizada. A taxa Selic é o principal instrumento da política monetária brasileira sob o sistema de metas de inflação.

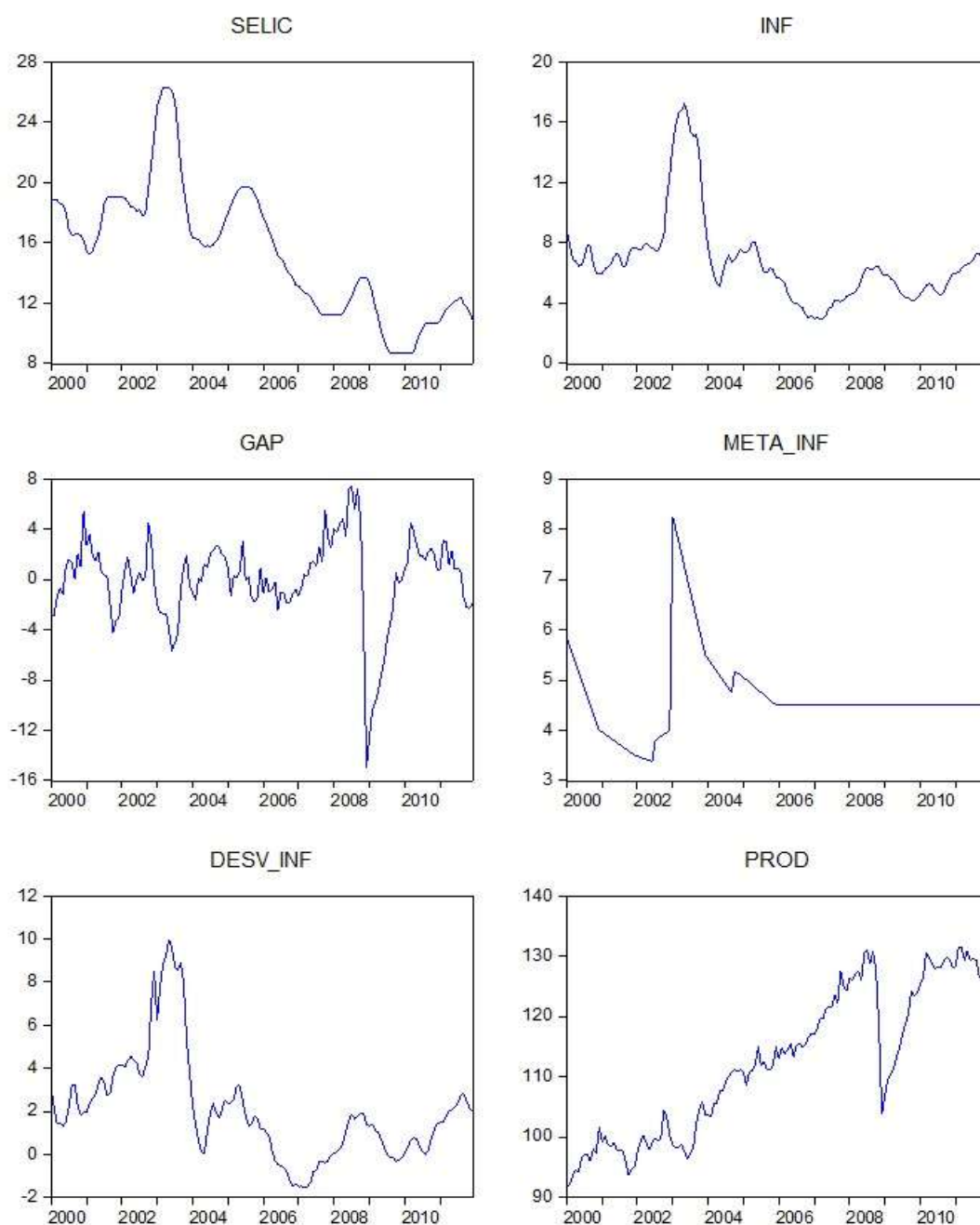
A variável  $\tilde{\pi}_t$  é o desvio da inflação ( $\pi_t$ ) em relação à meta de inflação ( $\pi_t^*$ ). A taxa de inflação é inflação acumulada nos últimos doze meses, medida pelo Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e é utilizado pelo CMN (Conselho Monetário Nacional) como referência para o regime de metas de inflação.<sup>11</sup> A série de metas de inflação refere-se às metas para a inflação acumulada nos próximos 12 meses. Como o CMN estabelece as metas de inflação para os anos calendário, os dados foram interpolados.<sup>12</sup>

<sup>11</sup> O IPCA é calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e é o índice de preços utilizado pelo CMN como referência para o regime de metas de inflação.

<sup>12</sup> Na construção da série de metas de inflação, foi considerado o fato de que o BCB perseguiu uma meta ajustada de 8,5% em 2003, e 5,5% em 2004, bem como uma meta de 5,1% em 2005. Para detalhes sobre as metas ajustadas e a meta anunciada para 2005, ver Cartas Abertas (de 2003 e 2004) enviadas pelo BCB ao Ministro da Fazenda, e as notas da reunião do Comitê de Política Monetária (Copom) de setembro de 2004.

O hiato do produto ( $x_t$ ) será mensurado pela diferença percentual entre o índice de produção industrial ajustado sazonalmente ( $y_t$ ) e o produto potencial ( $yp_t$ ), isto é,  $x_t = 100(y_t - yp_t) / yp_t$ . Como o produto potencial é uma variável não-observada, ela deve ser estimada. Diante disso, o filtro Hodrick-Prescott (HP) será utilizado para se obter uma variável *proxy* de  $yp_t$ .

**Figura 2: Evolução das variáveis no período analisado (2000:01 -2011:12)**



## 5. Análise dos resultados

### 5.1. Teste de raiz unitária

Antes da estimação da função de reação do BCB, testou-se se as variáveis utilizadas na análise são estacionárias. A estacionariedade de uma série temporal se dá quando a sua média e variância permanecem constantes ao longo do tempo e o valor da covariância em dois períodos de tempo depende apenas da distância entre esses dois períodos.

Os testes realizados foram: ADF (Augmented Dickey-Fuller); Phillips-Perron (PP); ERS, de Elliot et al. (1996); e o teste  $MZ_t^{GLS}$ , sugerido por Perron e Ng (1996) e Ng e Perron (2001). Para todos os testes, a hipótese nula é que a série é não estacionária. A escolha do número de defasagens a ser incluído em cada regressão,  $k$ , baseou-se no critério de informação Schwarz Modificado (MSIC), considerando um número máximo de defasagens de  $k_{max} = \text{int}(12(T/100)^{1/4}) = 13$ . Os testes incluíram um termo constante (c) e uma tendência linear (t), sempre que essa tenha sido estatisticamente significativa.

Tabela 1: Testes de raiz unitária

Variável	Regressores Exógenos	ADF(k)	PP	ERS(k)	$MZ_t^{GLS}(k)$
$i_t$	c,t	-3,04 <sup>n.s</sup> (4)	-2,55 <sup>n.s</sup>	4,53 <sup>**</sup> (4)	-3,06 <sup>**</sup> (4)
$\tilde{\pi}_t$	c	-2,13 <sup>n.s</sup> (1)	-2,06 <sup>n.s</sup>	2,94 <sup>**</sup> (1)	-2,06 <sup>**</sup> (1)
$x_t$	c	-3,49 <sup>*</sup> (0)	-3,72 <sup>*</sup>	1,77 <sup>*</sup> (0)	-2,77 <sup>*</sup> (0)
$(\tilde{\pi}_t)^2$	c	-1,93 <sup>n.s</sup> (0)	-2,51 <sup>n.s</sup>	3,34 <sup>***</sup> (0)	-1,90 <sup>***</sup> (0)
$(x_t)^2$	c	-3,18 <sup>**</sup> (2)	-4,82 <sup>*</sup>	1,30 <sup>*</sup> (2)	-3,05 <sup>*</sup> (2)
$\tilde{\pi}_t x_{1t}$	c	-3,56 <sup>*</sup> (0)	-4,05 <sup>*</sup>	1,60 <sup>*</sup> (0)	-2,91 <sup>*</sup> (0)

Nota: \* Significativo a 1%. \*\* Significativo a 5%. \*\*\* Significativo a 10%. <sup>n.s</sup> Não- significativo.

A Tabela 1 apresenta os resultados dos testes de raiz unitária. Todos os testes realizados mostram que a hipótese de raiz unitária é rejeitada para as variáveis hiato do produto, quadrado do hiato de produto e desvio da inflação multiplicado pelo hiato do produto. Isso implica que as variáveis são integradas de ordem zero,  $I(0)$ .

Para as variáveis taxa Selic, desvio da inflação e quadrado do desvio da inflação, os testes ADF e PP indicam que elas não são estacionárias, enquanto que os testes ERS e  $MZ_t^{GLS}$  permitem rejeitar a hipótese nula de raiz unitária a pelo menos 10% de significância. Dado que o teste ERS tem um poder maior do que o ADF quando há

componentes determinísticos e o teste  $MZ_t^{GLS}$  tem uma menor distorção em relação ao teste PP, considerou-se a taxa Selic, o desvio da inflação e o quadrado do desvio da inflação como variáveis estacionárias.

## 5.2. Estimação da função de reação com parâmetros variantes no tempo

Como destacado na seção 4.2.1, a primeira etapa para estimação da função de reação do BCB com parâmetros variantes no tempo diz respeito à obtenção das estimativas dos erros de previsão padronizados,  $\hat{v}_{1t}^*, \hat{v}_{2t}^*, \hat{v}_{3t}^*, \hat{v}_{4t}^*$  e  $\hat{v}_{5t}^*$ . Para isto, as equações (18)-(22), que relacionam os regressores endógenos com os instrumentos, foram estimadas por ML. O conjunto das variáveis instrumentais incluiu um termo constante, as defasagens 1-3 da taxa Selic, da variação cambial, do quadrado do desvio da inflação e do quadrado do hiato do produto, as defasagens 1-3, 6, 9 e 11 da inflação, e as defasagens 1,2, 6 e 9 do hiato do produto.<sup>13</sup> Além dessas variáveis, a *dummy*  $d_{08M12}$  (=1 para 2008:12 e 0, caso contrário) foi inseridas nas regressões (19) e (21) para captar o efeito da crise econômica de 2008 sobre economia brasileira. Como testes de especificação preliminares indicaram a presença de heterocedasticidade condicional auto-regressiva, considerou-se que os erros das equações (18), (20) e (22) seguem um processo ARCH(2).

A Tabela 2 mostra os parâmetros estimados para a função de reação da política monetária com e sem os termos de correção de viés. As estimativas para os desvios padrões  $\sigma_{\varepsilon,i}$ ,  $i=1,...,6$ , são estatisticamente não significativos, este resultado mostra que não houve variações do coeficiente  $\beta$ 's da regra de política monetária no tempo. O teste de razão de verossimilhança (LR) feito para a hipótese nula de os parâmetros serem constantes ( $H_0: \sigma_{\varepsilon,i} = 0 \quad i=1,2,...,6$ ).<sup>14</sup> Para a especificação com correção de viés, o valor e o  $p$ -valor da estatística LR foram, respectivamente, 160,32 e 0,0000, indicando rejeição da hipótese nula a 1% de significância. Como o teste LR para estabilidade dos parâmetros é conservador, os resultados evidenciam fortemente mudanças na reação do Banco Central do Brasil à inflação e ao hiato do produto.

<sup>13</sup> A variação cambial é a variação percentual da taxa de câmbio nominal real/dólar (média do período).

<sup>14</sup> O valor log-likelihood para o modelo com parâmetros constantes e termos de correção de viés foi -92,1733.

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros da regra de política monetária

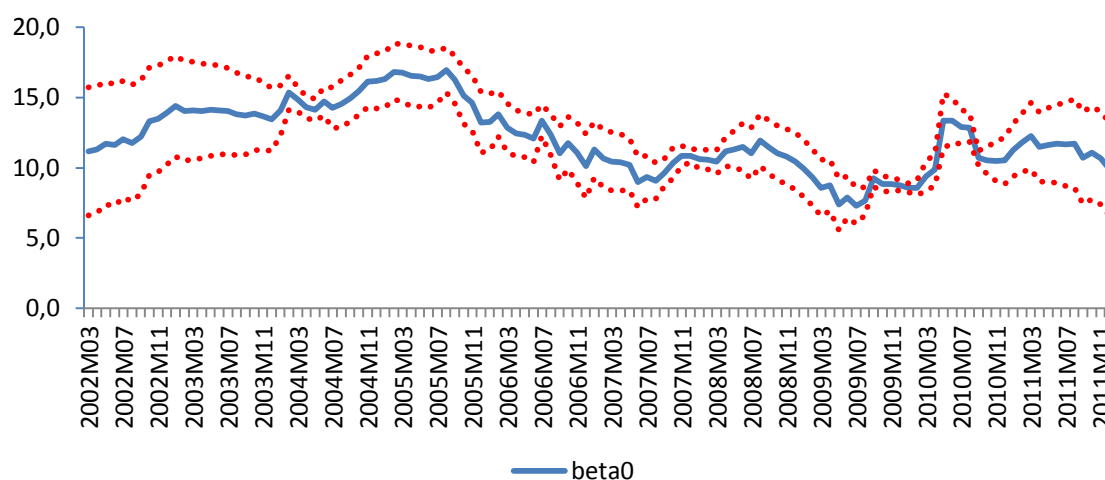
Parâmetros	Estimativas (Desvio Padrão)			
	Modelo com termo de correção de viés		Modelo sem termo de correção de viés	
$\sigma_{\varepsilon,0}$	0,1262	(0,0326)	0,1332	(0,0288)
$\sigma_{\varepsilon,1}$	0,0927	(0,0114)	0,0902	(0,0114)
$\sigma_{\varepsilon,2}$	0,0000	(0,0046)	-0,0000	(0,0064)
$\sigma_{\varepsilon,3}$	0,0000	(0,0060)	-0,0000	(0,0058)
$\sigma_{\varepsilon,4}$	0,0018	(0,0010)	-0,0025	(0,0010)
$\sigma_{\varepsilon,5}$	0,0000	(0,0020)	0,0000	(0,0020)
$\sigma_{\varepsilon,6}$	0,0000	(0,0061)	0,0000	(0,0080)
$\sigma_e$	0,0505	(0,0488)	0,0321	(0,0565)
$\rho_1$	-0,2182	(0,3292)		
$\rho_2$	0,2523	(0,5387)		
$\rho_3$	0,8542	(0,7925)		
$\rho_4$	-0,5865	(0,5226)		
$\rho_5$	0,1485	(0,3742)		
$Ln(L)$	-12,010		-15,499	
$LB1(24)$	0,2830		0,3530	
$LB2(24)$	0,9450		0,6520	
$JB$	0,0085		0,0102	

Nota: LB1(24) refere-se ao p-valor da estatística Ljung-Box para autocorrelação serial dos resíduos padronizados na ordem 24. LB2(24) refere-se ao p-valor da estatística Ljung-Box para autocorrelação serial dos resíduos padronizados ao quadrado na ordem 24. Valor entre parênteses refere-se ao desvio padrão.

Em relação ao problema de endogeneidade dos regressores na função de reação, os resultados mostram que todos os coeficientes para o termo de correção de viés da inflação ( $\rho_1$ ), do hiato do produto ( $\rho_2$ ), da inflação ao quadrado ( $\rho_3$ ), do hiato do produto ao quadrado ( $\rho_4$ ) e da inflação vezes o hiato do produto ( $\rho_5$ ) são todos estatisticamente insignificantes a 10%. O valor do teste LR (6,9784) para testar a hipótese nula de nenhuma endogeneidade ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0$ ) indica a não rejeição dessa hipótese para um nível de significância de 10%. Esses resultados indicam que ignorar possíveis problemas de endogeneidade da inflação e hiato do produto não resulta em sérios vieses na estimação dos coeficientes tempo-variantes da regra de política monetária.

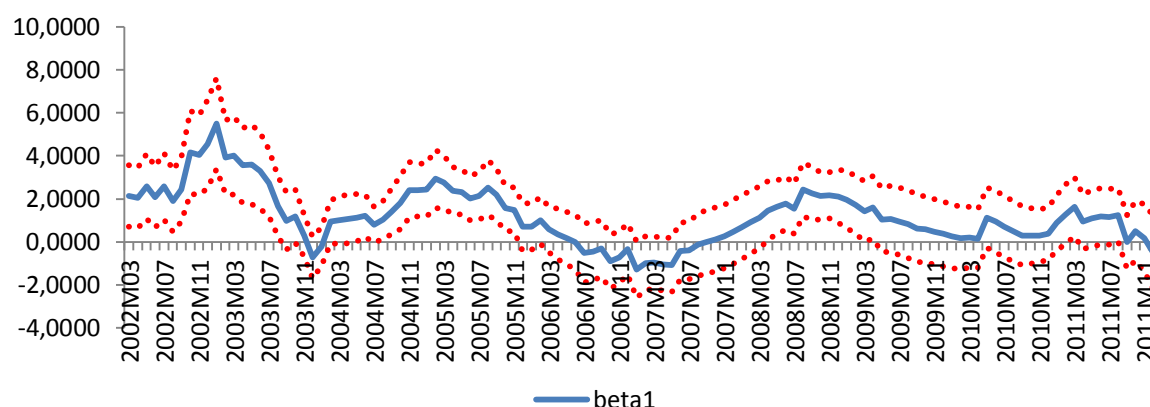
Com a finalidade de testar se os modelos estão adequadamente especificados, realizaram-se os testes Ljung-Box (LB) para autocorrelação serial dos resíduos padronizados e dos resíduos padronizados ao quadrado. Os resultados mostram que não se rejeita a hipótese nula, ausência de autocorrelação, de que os resíduos são não autocorrelacionados. Já o teste Jarque-Bera mostra que a hipótese de normalidade não é

rejeitada apenas para a especificação sem termos de correção de viés e a um nível de significância de 1%.



**Figura 3:** Evolução do coeficiente  $\beta_{0|T}$  (as linhas tracejadas indicam +/-1 desvio-padrão)

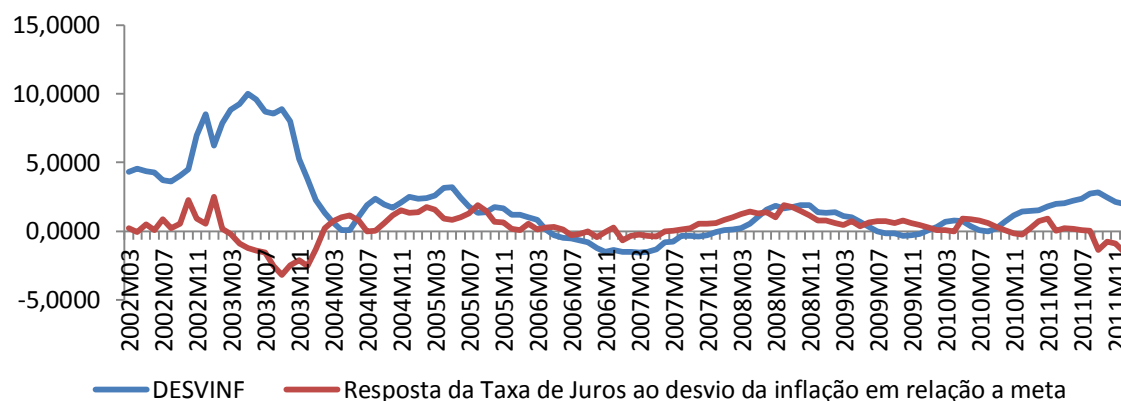
A Figura 3 mostra o comportamento do coeficiente  $\beta_{0|T}$ , que representa a taxa de juros desejada quando a taxa de inflação for igual a sua meta e o produto for igual ao produto potencial, ou seja, pode ser interpretado como a meta implícita para a taxa de juros ( $i^*$ ). Para o modelo sem correção de viés, constatou-se que entre 2002:3 e 2006:7, as estimativas para a meta da taxa Selic mantiveram-se acima de 10% ao ano. Já entre o período de 2006:8 à 2011:12, as estimativas para a meta da taxa Selic oscilaram abaixo de 10% ao ano. Para o período analisado, a média da meta implícita para a taxa Selic foi de 11%.



**Figura 4:** Evolução do coeficiente  $\beta_{1|T}$  (as linhas tracejadas indicam +/-1 desvio-padrão)

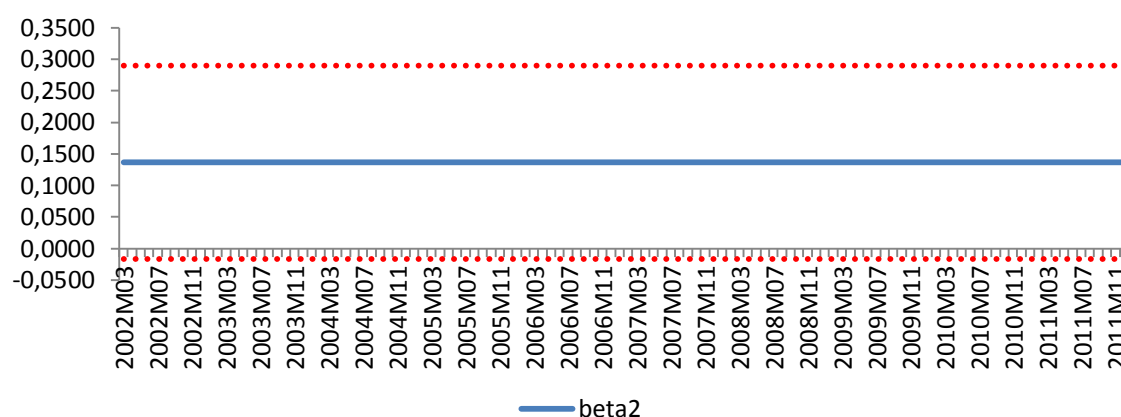
A Figura 4 mostra a evolução do coeficiente  $\beta_{1|T}$ , que mede a resposta no longo prazo da taxa Selic em relação aos desvios da inflação em relação à meta. Os resultados

indicam que essa resposta apresentou elevada oscilação no período, variando entre -1,2 e 5,5. Os resultados também mostram que tal resposta do Banco Central do Brasil vem diminuindo ao longo do período analisado.



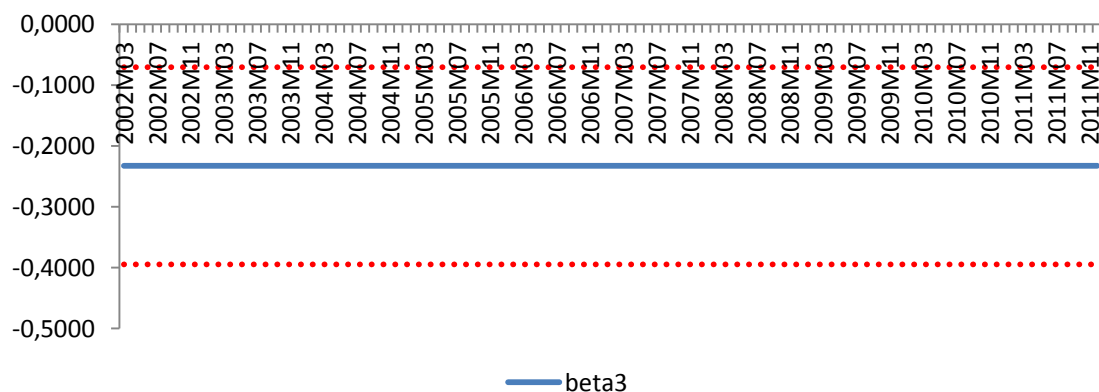
**Figura 5:** Evolução do coeficiente  $\beta_{1|T}$  e do desvio da inflação em relação à meta

Quando se compara o comportamento de  $(\beta_{1|T})$  com o do desvio da inflação em relação à meta, pode-se verificar que, em geral, o BCB tem elevado (diminuído) a sua resposta em períodos de aumentos (reduções) nesse desvio (ver Fig. 5). Entretanto, observamos que, em certos períodos, enquanto o hiato da inflação aumentava (diminuía), a resposta da taxa Selic diminuía (aumentava). Isso ocorreu, por exemplo, em quase todo o ano de 2003 e primeiro trimestre de 2004, e a partir de 2010. O resultado mostra que este coeficiente satisfaz o princípio de Taylor (1993), pois em grande parte do período analisado o valor do coeficiente  $\beta_{1|T}$  foi maior que 1, este resultado mostra que um aumento da inflação leva à um aumento suficiente da taxa de juros nominal para elevar a taxa de juros real.



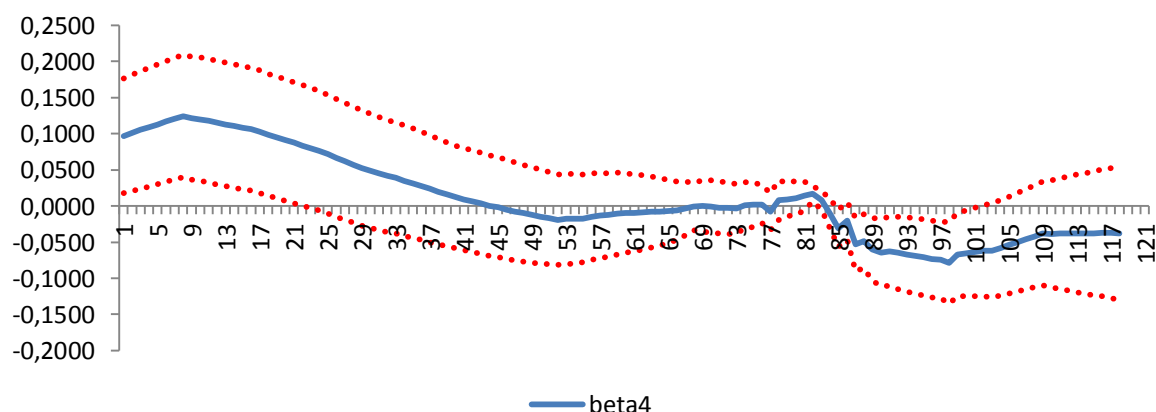
**Figura 6:** Evolução do coeficiente  $\beta_{2|T}$  (as linhas tracejadas indicam +/-1 desvio-padrão)

A Figura 6 mostra a resposta da taxa Selic ao hiato do produto. Os resultados mostram que este coeficiente ficou estável durante todo o período analisado. Este resultado surpreende, principalmente, por observarmos que a partir da crise de 2008-2009, o BCB vem aumentando a resposta da taxa Selic ao hiato do produto, ou seja, à atividade real.

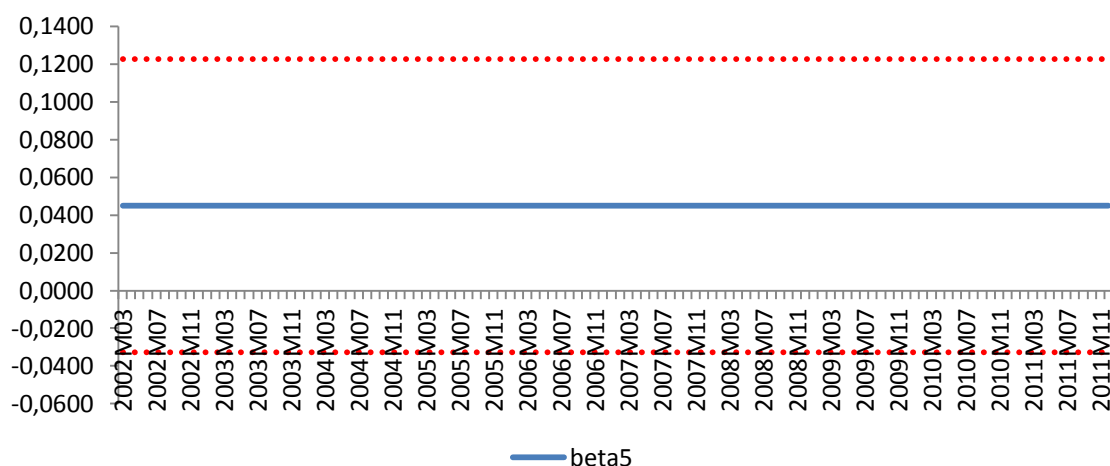


**Figura 7:** Evolução do coeficiente  $\beta_{3t|T}$  (as linhas tracejadas indicam  $\pm 1$  desvio-padrão)

As Figuras 7 e 9 mostram a evolução dos coeficientes  $\beta_{3t|T}$ , e  $\beta_{5t|T}$ , respectivamente. Os resultados mostram que os coeficientes permaneceram constantes ao longo do período analisado. Estes resultados mostram que tais variáveis não exercem pouca influência sobre a taxa Selic. Já a figura 8 mostra a evolução do coeficiente  $\beta_{4t|T}$ , que mede a resposta da taxa Selic em relação ao quadrado do hiato do produto o resultado mostra uma queda significativa ao longo do período em análise.

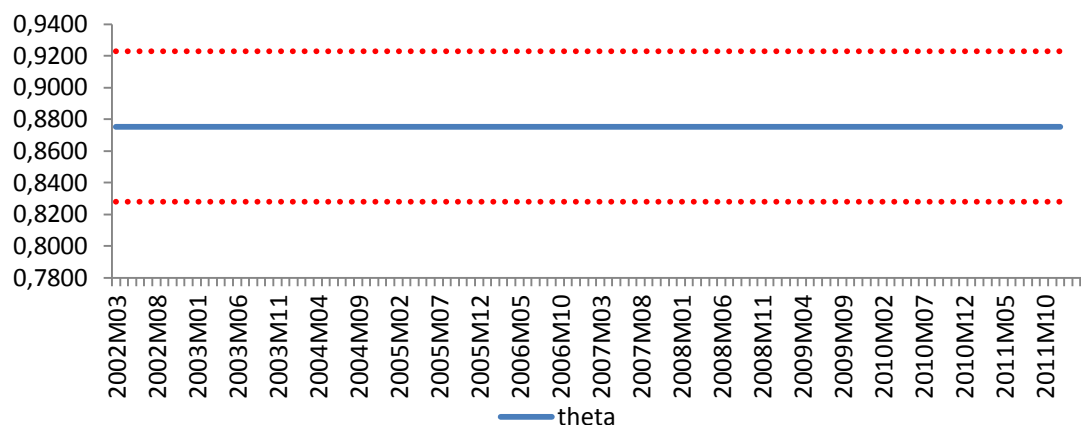


**Figura 8:** Evolução do coeficiente  $\beta_{4t|T}$  (as linhas tracejadas indicam  $\pm 1$  desvio-padrão)

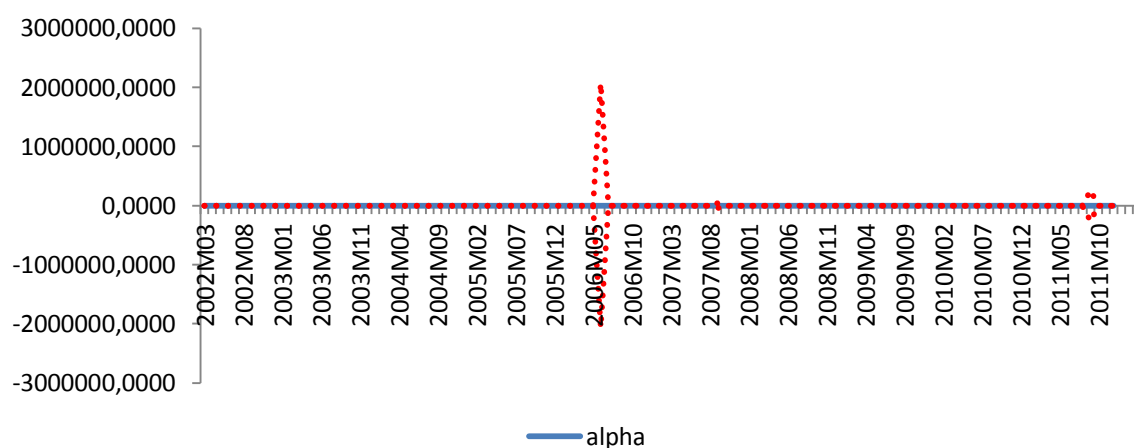


**Figura 9:** Evolução do coeficiente  $\beta_{5|T}$  (as linhas tracejadas indicam +/-1 desvio-padrão)

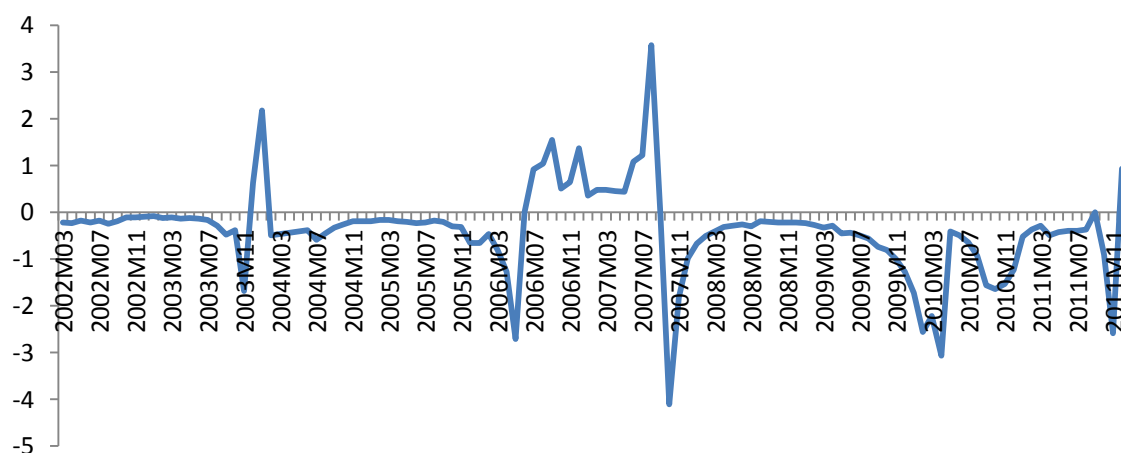
A Figura 10 mostra a trajetória do grau de suavização da taxa de juros ( $\theta_{0|T}$ ). Os resultados indicam que esta variável apresentou um comportamento estável ao longo de todo o período analisado. O valor encontrado para esta variável foi de 0,8753. Como a variável foi estatisticamente significativa, podemos que a taxa de juros defasada em um período tem influência sobre as decisões da taxa de juros Selic pelo Banco Central do Brasil.



**Figura 10:** Evolução do coeficiente  $\theta_{0|T}$  (as linhas tracejadas indicam +/-1 desvio-padrão)



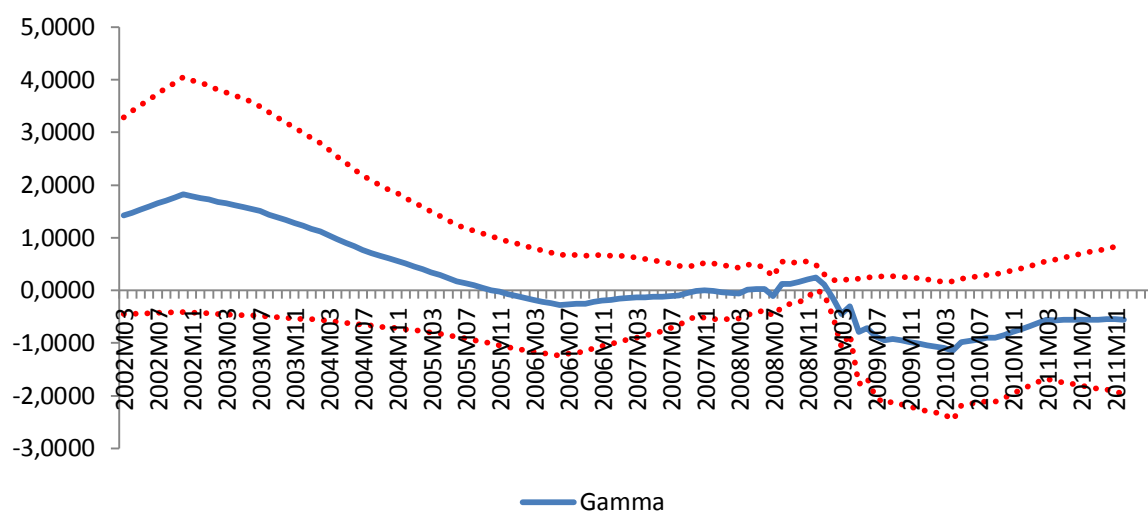
**Figura 11:** Evolução do coeficiente  $\alpha_{tT}$  (as linhas tracejadas indicam  $\pm 1$  desvio-padrão)



**Figura 12:** Evolução do coeficiente  $\alpha_{tT}$

A Figura 12 mostra o comportamento da variável  $\alpha_{tT}$ , que mede a assimetria em relação aos desvios da inflação. Os resultados mostraram que durante a maior parte do período analisado, o coeficiente obteve um valor negativo ( $\alpha < 0$ ), implicando que uma inflação abaixo da meta é mais custosa para a autoridade monetária do que uma inflação acima da meta. O resultado encontrado mostra que o BCB teve aversão à recessão. Estes resultados estão de acordo com os encontrados por Aragón e Portugal (2010) e Sá e Portugal (2011). Observou-se também que, apenas no período compreendido entre julho de 2006 a agosto de 2007, o coeficiente apresentou um valor positivo. Isso pode indicar reflexos das medidas tomadas pelo Governo para minimizar a crise financeira de 2007, uma das medidas tomadas pelo BCB, foi a flexibilização da política monetária, através da redução da taxa de juros. De acordo com relatório do próprio BCB de março de 2010, nesse contexto, o BCB vinha ajustando a taxa básica de juros, com vistas a eliminar o

descompasso entre o ritmo de expansão da demanda e da oferta, conter a deterioração das expectativas inflacionárias e, assim, promover o retorno da inflação à trajetória de metas.



**Figura13:** Evolução do coeficiente  $\gamma_{t/T}$  (as linhas tracejadas indicam  $\pm 1$  desvio-padrão)

A Figura 13 mostra a trajetória da variável  $\gamma_{t/T}$ , que mede a assimetria associada ao hiato do produto. Os resultados encontrados mostram que vem ocorrendo uma diminuição gradual ao longo do período analisado, sendo que entre 2002:3 e 2005:10 o coeficiente apresentou um valor positivo, o que mostra que durante este período o Banco Central tinha uma demanda por recessão. Este resultado pode ser resultado de uma maior preocupação em passar credibilidade de sua política monetária. Já a partir do final de 2005 o coeficiente apresentou um valor negativo, mostrando que para o Banco Central apresenta uma demanda precaucional por expansão econômica. Este resultado pode evidenciar uma clara mudança na postura do BCB por um crescimento econômico maior. O resultado encontrado para o BCB está de acordo com os encontrados por Gerlach (2000); Surico (2007a); Kim (2006); Aragón e Portugal (2010) e Medeiros e Aragón (2011), mostrando que em boa parte do período analisado o BCB apresentou uma maior aversão à expansão do produto, porém, o resultado difere do encontrado por Kim (2006) já que no caso do BCB essa aversão vem diminuindo ao longo do tempo. Porém devemos destacar que não há evidências de que o coeficiente foi significativo, o que está de acordo com o trabalho de Sá e Portugal (2011) e de Aragón e Portugal (2010).

## 6. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo estimar uma função de reação do Banco Central do Brasil, através do método dos parâmetros variantes no tempo (TPV). As estimações feitas considera o Brasil uma pequena economia fechada. Seguindo Kim (2006) e Kim e Nelson (2006) tem-se um modelo para a função de reação do Banco Central com parâmetros variantes no tempo e regressores endógenos. Este trabalho utilizou a abordagem proposta por Heckman (1976) em dois estágios para lidar com o problema da endogeneidade. Com a utilização desses procedimentos pode-se observar o comportamento dos parâmetros ao longo do tempo. Dado isto, será possível analisar o comportamento dinâmico do BCB diante de algumas variáveis como a inflação e o produto.

Foram realizados, testes de estacionaridade com o intuito de saber se as variáveis analisadas são estacionárias. A estacionaridade em séries temporais é de fundamental importância, os resultados mostram que as variáveis são estacionárias, ou seja, suas médias e variâncias são constantes ao longo do tempo e o valor da covariância em dois períodos de tempo só depende da distância entre esses períodos.

Foi realizado o teste de razão de verossimilhança (LR). Os resultados mostram que para a hipótese nula de os parâmetros serem constantes, o teste mostra que ao longo do período houve uma mudança na reação do BCB à inflação e ao hiato do produto. Já o resultado do teste LR para o problema de endogeneidade mostrou que ignorar o problema de endogeneidade da inflação e do hiato do produto não resultam em sérios vieses na estimação dos coeficientes.

Já os resultados para as estimações dos parâmetros mostraram que a média da meta implícita da taxa de juros foi de 11%. Já a resposta da taxa de juros ao desvio da inflação em relação a meta mostra que o BCB atuou aumentando (diminuindo) sua resposta ao longo do período analisado. Já a resposta à inflação mostrou que a variável respeita o princípio de Taylor (1993) na maior parte do período analisado (86%). Já a resposta da taxa de juros ao hiato do produto foi constante, ou seja, este resultado é oposto ao que o BCB tem feito durante o período em análise, visto que o mesmo vem aumentando a resposta da taxa Selic ao hiato do produto, ou seja, à atividade real. Os outros coeficientes que medem a resposta da taxa de juros em relação ao quadrado da inflação ( $\beta_{3|T}$ ) e a inflação versus o hiato do produto ( $\beta_{5|T}$ ), também foram constante durante todo o período

analisado. O coeficiente que mede a resposta da taxa de juros ao quadrado do produto ( $\beta_{4t|T}$ ) apresentou um comportamento decrescente durante todo o período analisado.

No que se refere ao coeficiente de suavização da taxa de juros ( $\theta_{0t|T}$ ), os resultados mostram que a variável permaneceu constante durante todo o período analisado com um valor de 0,8753. Os resultados divergem na estimativa da resposta de longo prazo da taxa Selic aos desvios da inflação corrente em relação a meta e aos desvio da inflação esperada em relação a meta.

Os resultados para a variável que mede a assimetria em relação a inflação ( $\alpha_{t|T}$ ) mostraram que o BCB agiu para que a inflação não ficasse abaixo de sua meta. O valor do coeficiente durante toda a maior parte do período analisado obteve um valor negativo. O resultado encontrado mostra que o BCB teve uma maior aversão à expansão econômico, preocupado em dar credibilidade a condução da política monetária. Este resultado está de acordo com os encontrados por Aragón e Portugal (2011) e Sá e Portugal (2011). Os resultados para a variável que mede a assimetria em relação ao hiato do produto ( $\gamma_{t|T}$ ) mostram que em boa parte do período analisado o BCB teve uma maior demanda por recessão, apresentando um coeficiente positivo, porém, tal aversão vem diminuindo ao longo do tempo. Os resultados ainda mostram que a partir da crise de 2007 o BCB passou a ter uma demanda por expansão econômica para minimizar os efeitos da crise sobre a economia brasileira. Neste contexto o BCB diminuiu a taxa Selic de modo a estimular a atividade econômica.

Concluirmos, a partir dos resultados, que o Banco Central do Brasil teve uma maior preocupação com o controle da inflação que como destaca o ex-presidente do BCB Carlos Longoni “é a sua principal função”, ou seja, o BCB foi mais avesso a expansão da economia e em dar credibilidade para a condução da política monetária. Os resultados mostram também que o BCB mudou o seu comportamento apenas a partir da crise de 2007 na tentativa de minimizar os efeitos na economia brasileira, e para isso o BCB iniciou um ajustamento da taxa Selic, para eliminar o descompasso entre o ritmo de expansão da demanda e da oferta.

## Referências

- ÁLVAREZ LOIS, P.P. Asymmetries in the capacity-inflation trade-off. **UFAE and IAE Working paper**, 2000.
- AKSOY, Y. et al. A quantitative exploration of the opportunistic approach to disinflation. **Journal of Monetary Economics**, n. 53, 1877-1893, 2006.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE J. B. **Optimal filtering**. Prentice Hall, 1979.
- ARAGÓN, E. K. da S. B.; FARIAS, V. G. M. Assimetria nas Preferências do Banco Central em uma Pequena Economia Aberta: Um Estudo Empírico para o Brasil, 2010.
- ARAGÓN, E. K. da S. B.; PORTUGAL, M. S. Nonlinearities in Central Bank of Brazil's Reaction Function: the Case of Asymmetric Preferences. **Est. Econ. São Paulo**, V. 40, Nº 2, P. 373-399, abril-junho/2010.
- BEAN, C. The Convex Phillips Curve and Macroeconomic Policymaking Under Uncertainty. Mimeo, **London School of Economics**, November, (1997).
- BEC, F. et al. Asymmetries in monetary policy reaction function: evidence for the U. S., French and German Central Banks. **Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics**, V. 6. Nº. 2, (2002).
- BLINDER, A. **Central Banking in Theory and Practice**. Massachusetts: The MIT Press, 1998.
- BOIVIN, J. Has US Monetary Policy Changed? Evidence from Drifting Coefficients and Real-Time Data. **Journal of Money, Credit and Banking**, Vol. 38, 1149-1173. 2006.
- BUENO, R. de L. da S. The Taylor Rule under Inquiry: Hidden states. XXVII Encontro Brasileiro de Econometria. Anais. Natal, 2005.
- CALVO, G. Staggered prices in a utility-maximizing framework. **Journal of Monetary Economics**, 12, 383-398, 1983.
- CLARIDA, R. et al. Monetary policy rules in practice: some international evidence, **European Economic Review**, Vol. 42, 1033 – 1067, 1998.
- \_\_\_\_\_. Monetary policy rules and macroeconomic stability: Evidence and some theory. **The Quarterly Journal of Economics**, Vol. 115, 145 – 180, 2000.
- CLARK, P.B. et al. Asymmetry in the U.S. Output-Inflation Nexus: Issues and Evidence. **IMF Staff Papers**, Vol. 43, No. 1, Washington, International Monetary Fund, March, 1996.
- CUKIERMAN, A. **The inflation bias result revisited**, Tel-Aviv University, Mimeo, 2000.

CUKIERMAN, A.; GERLACH, S. The inflation bias revisited: theory and some international evidence. **The Manchester School**, v. 71, n. 5, 2003.

CUKIERMAN, A., MUSCATELLI, V. **Do central banks have precautionary demands for expansions and price stability?: Theory and evidence**. Mimeo., Tel-Aviv University, 2003.

DOLADO, J. J. et al. Non-linear monetary policy rules: Some new evidence for the US. **Centre for Economic Policy Research**, Discussion paper No. 3405, 2004.

\_\_\_\_\_. Are monetary-policy reaction functions asymmetric? The role of nonlinearity in the Phillips curve. **European Economic Review**, v. 49, n. 2, 2005.

DURBIN, J.; KOOPMAN, S.J. **Time sériess analysis by state space methods**. Oxford Statistical Science Sériess, 24. Oxford University Press, 2002.

DUPASQUIER, C.; RICKETTS, N. Non-linearities in the output-inflation relationship: Some empirical results for Canada. Working paper 98-14, **Bank of Canada**, 1998.

EISNER, R. A new View of the NAIRU. **Northwestern University Working Paper**, 1997.

FILARDO, A. J **New evidence on the output cost of fighting inflation**. Economic review, third quarter, p. 33 – 61, 1998.

GERLACH, S. Asymmetric policy reactions and inflation. **Bank for International Settlements**. Mineo, 2000.

GHOSH, A.; PHILLIPS, S. “Warning: Inflation May Be Harmful to Your Growth,” **IMF Staff Papers** 45 (4): 672–710, December (Washington: International Monetary Fund). 1998.

GORDON, R. The recent acceleration of inflation and its lessons for the future. **Brookings Papers on Economic Activity**, 8-41, 1970.

\_\_\_\_\_. The impact of aggregate demand on prices. **Brookings Papers on Economic Activity**, 613-662, 1975.

HARVEY, A. C. **Forecasting, structural time sériess models and the Kalman filter**. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

IKEDA, T. Time-varying asymmetries in central bank preferences: the case of the ECB. **Journal of Macroeconomics** n. 32 1054-1066, 2010.

KIM, C. J.; NELSON, C. R. Estimation of a forward-looking monetary policy rule: A time-varying parameter model using ex post data. **Journal of Monetary Economics** 53, 1949-1966, 2004.

KIM, C. J. Time-varying parameter models with endogenous regressors: A Two-Step MLE Approach and a Augmented Kalman Filter. **Economics Letters** 91:21-26, 2006.

LAXTON, D. et al. Asymmetric Effects of Economic Activity on Inflation: Evidence and Policy Implications. **IMF WP/94/139**, 44 pages, 1995.

LAXTON, D. et al. The US Phillips curve: The case for asymmetry. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 23(9–10):1459–85, 1999.

LIMA, E. C. R.; MAKÁ, A.; MENDONÇA, M. MONETARY POLICY REGIMES IN BRAZIL. INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA (IPEA). RIO DE JANEIRO, 2007. (TEXTO PARA DISCUSSÃO, 1285A).

MEDEIROS, G. B.; ARAGÓN, E. K. da S. B. Testando Assimetrias nas Preferências do Banco Central em uma Pequena Economia Aberta: Um Estudo para o Brasil. XVI ENCONTRO REGIONAL DE ECONOMIA-ANPEC Regional. Fortaleza/Ceará, 2011.

NOBAY, A. R.; PEEL, D. A. Optimal Monetary Policy with a nonlinear Philips curve. **Econometric Letters**. N. 67. 159-164, 2000.

ORPHANIDES, A.; WIELAND, V. (1999). Inflation zone targeting. **European Economic review**. V. 44. Nº. 7, 1351-1387, 2000.

ORPHANIDES, A.; WILCOX, D. W. The opportunistic approach to disinflation. **International Finance**, 5(1), 47-71, 2002.

PHILLIPS, A. The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom 1861-1957, **Economica**, 25, 283-299, 1958.

PORTUGAL. M.S. Notas Introdutórias sobre o Princípio de Máxima verossimilhança: Estimacão e Teste de Hipóteses.

RUGE-MURCIA, F. J. A prudent central banker, **IMF Staff Papers**, forthcoming, 2001.

\_\_\_\_\_. The inflation bias when the central banker targets the natural rate of unemployment, **European Economic Review**, forthcoming, 2003.

SÁ, R.; PORTUGAL, M. S. Central Bank and asymmetric preferences: an application of sieve estimators to the U.S. and Brazil. FGV Conferences, 33º Meeting of the Brazilian Econometric Society.

Sarel, Michael, 1996, “Nonlinear Effects of Inflation on Economic Growth,” **IMF Staff Papers**, 43: 199–215, March. 1996.

SCHALING, E. The Nonlinear Curve and Inflation Forecast Targeting – Symmetric versus Asymmetric Monetary Policy Rules. **Journal of Money, Credit and Banking**, v.36(3), 361-386, 2004.

STIGLITZ, J., Reflections on the Natural Rate Hypothesis, *Journal of Economic Perspective*, vol. 11(1), pp. 3-10, 1997.

SURICO, P. The Fed's monetary policy rule and US inflation: The case of asymmetric preferences. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 31, 305-324. 2007a.

\_\_\_\_\_. The Monetary Policy of the European Central Bank. **Scandinavian Journal of Economic**. 109(1), 115-135. 2007b.

SVENSSON, L.E.O. Inflation forecast targeting: Implementing and monitoring inflation targets. **European Economic Review** 41, 111–1146, 1997.

TAYLOR, J. B. Discretion versus policy rules in practice. **Carnegie-Rochester Conference Sériess on Public Policy**, Vol. 39, 195 – 214, 1993.

\_\_\_\_\_. The robustness and efficiency of monetary policy rules as guidelines for interest rate setting by the European central bank,” **Journal of Monetary Economics**, Vol. 43, 655 – 679, 1999.

VARIAN, H. A Bayesian Approach to Real Estate Assessment, in Feinberg, S. and A. Zellner, eds., **Studies in Bayesian Economics in Honour of L. J. Savage**, Amsterdam: North-Holland, 195-208, 1974.

Yehoue, E. B. “Emerging Economy Responses to the Global Financial Crisis of 2007–09: An Empirical Analysis of the Liquidity Easing Measures” **IMF Working Paper** No. 09/265 (Washington: International Monetary Fund). 2009.

ZELLER, A. Bayesian Estimation and Prediction using Asymmetric Loss Functions. **Journal of the American Statistical Association**, 81, 446-451, 1986.

## APÊNDICE A:

### 1. O método de Máxima Verossimilhança com filtro de Kalman

O filtro de Kalman teve sua origem na década de sessenta, relacionada principalmente a teoria do controle de sistemas na área de engenharia elétrica. Vários são os trabalhos que utilizam o filtro de Kalman na teoria econômica, entre os principais estão os trabalhos Anderson e Moore (1979), Harvey (1989), Durbin e Koopman (2002).

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado. O filtro de Kalman baseia-se no princípio de que a partir de uma variável denominada “observável de observação” é possível estimar eficientemente outra variável, não observável, denominada de “variável de estado”. O filtro de Kalman possibilita fazer estimações dos estados passados, do estado presente e prever os estados futuros.

O procedimento do filtro de Kalman é aplicável a modelos escritos sob a forma de espaço-estados. Além disso, o filtro de Kalman possibilita a estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo através do método de máxima verossimilhança via decomposição do erro de previsão.

#### 1.1 Definição do modelo na forma de espaço de estados

Podemos definir os modelos lineares de séries temporais  $q$ -dimensionais na forma de espaço de estados, relacionando o vetor de observações  $\{ Z_t \}$  e o vetor de ruídos  $\{ v_t \}$ , através de um processo Markov  $\{ X_t \}$ ,  $p$  dimensional, denominado de vetor de estados.

Assim o modelo de espaço de estados (MEE) pode ser representado por duas equações:

$$Z_t = A_t X_t + v_t \quad (A1)$$

e

$$X_t = G_t X_{t-1} + \omega_t, \quad t = 1, \dots, N \quad (A2)$$

onde  $A_t$  é a matriz do sistema, de ordem  $(q \times p)$ ;  $v_t$  é o vetor de ruído da observação, de ordem  $(q \times 1)$ , não correlacionado, com média zero e matriz de covariância  $R$ ;  $G_t$  é a matriz de transição, de ordem  $(p \times p)$  e  $\omega_t$  é um vetor de ruídos não correlacionados,

representando a perturbação do sistema, de ordem  $(q \times I)$ , com média zero e matriz de covariância  $Q$ .

A equação (A1) é denominada *equação da observação*, enquanto que a equação (A2) é denominada *equação do estado*.

O modelo de espaço de estados (MEE) supõe que:

- i. O estado inicial  $X_0$  tem média  $\mu_0$  e matriz de covariância  $\Sigma_0$ ;
- ii. Os vetores de ruídos  $v_t$  e  $\omega_t$  são não correlacionados entre si e não correlacionados com o estado inicial, isto é,

$$E(v_t \omega_s') = 0, \quad \forall t, s = 1, \dots, N$$

$$E(v_t X_0') = 0 \text{ e } E(\omega_t X_0') = 0, \quad t = 1, \dots, N$$

O modelo de espaço de estados é dito gaussiano quando os vetores de ruído forem normalmente distribuídos.

No modelo univariado  $q = 1$  e, conseqüentemente,  $A_t$  é um vetor e  $v_t$  é um ruído com média zero e variância  $\sigma_v^2$ .

## 1.2 O filtro de Kalman

Podemos agrupar em dois grupos as equações do filtro de Kalman: equações de atualização do tempo, que são responsáveis pelo avanço das variáveis de estados e das covariâncias no tempo para obter-se as estimações anteriores (*a priori*) para o próximo instante e as equações de atualização da observação são responsáveis pela retroalimentação, ou seja, incorporam uma nova informação da variável observável nas estimações anteriores para obter um ganho na estimacão futura. Estes dos grupos funcionam de forma conjunta num sistema de retroalimentação.

Denominamos as equações de atualização de tempo como equações de previsão. Já as equações de atualização de observação são denominadas equações de correção.

A partir do modelo especificado pelas equações (A1) e (A2). Seja  $x_{t-1}$  o estimador ótimo de  $x_{t-1}$  baseado em informações até  $t-1$  incluindo  $y_{t-1}$ . Dados  $x_{t-1}$  e  $P_{t-1}$ , o estimador ótimo de  $x_t$  é dado por:

$$\hat{x}_t = T_t \hat{x}_{t-1} + c_t \tag{A3}$$

A matriz de covariância dos erros das variáveis de estado é dado por:

$$P_t = T_t P_{t-1} T_t' + R_t Q_t R_t' \quad (A4)$$

As equações (A3) e (A4) constituem o grupo denominado de equações de atualização do tempo ou equações de previsão. Estas equações representam um avanço no tempo  $t-1$  para  $t$ . Quando uma nova observação  $y_t$  é verificada, o estimador  $\hat{x}_t$  de  $x_t$  pode ser melhorado ou corrigido. As equações de atualização das observações são:

$$K_t = P_t Z_t' (Z_t P_t Z_t' + H_t)^{-1} \quad (A5)$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t + K_t (y_t - Z_t \hat{x}_t - d_t) \quad (A6)$$

$$P_t = (I - K_t Z_t) P_t \quad (A7)$$

O primeiro passo é determinar o ganho  $K_t$  dado pela equação (A5). Posteriormente, a nova informação observada  $y_t$  é incorporada à previsão anterior  $\hat{x}_t$  justamente com a matriz ganho  $K_t$  através da equação (A6), gerando a estimação posterior  $\hat{x}_t$ . O último passo é obter a matriz de covariância dos erros através da equação (A7). Este ciclo repete-se para o instante de tempo  $t-1$  sendo  $\hat{x}$  e  $P_t$  dados de entrada nas equações (A3) e (A4), respectivamente.

### 1.3 Estimação por Máxima Verossimilhança

Uma amostra aleatória  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , retirada de uma população com uma função de densidade de probabilidade  $f(y, \theta)$ , a qual depende do vetor de parâmetros  $\theta$ . O filtro de Kalman retorna o valor de todas as variáveis de  $t = 1$  até  $t = T$ . Resulta então todos os valores da variável de observação  $y_t$ . Os valores observados de  $y_t$  são conhecidos. Se as observações  $\{y_t\}_{t=1}^{t=T}$  são i.i.d. a função de probabilidade conjunta é dada por:

$$\prod_{t=1}^T f(y_t, \theta) \quad (A8)$$

onde  $y_t$  representa a função densidade probabilística em um instante  $t$  e  $\theta$  é o conjunto de hiperparâmetros que fazem parte do sistema de matrizes. Isto é, a função de densidade de probabilidade conjunta é simplesmente o produto das densidades de cada observação,

$$f(y_1, \theta) \times f(y_2, \theta) \times \dots \times f(y_n, \theta) \quad (\text{A9})$$

A equação (A8) representa a função de verossimilhança. O estimador de máxima verossimilhança é obtido maximizando (A8) em relação a  $\theta$ . Quando as observações não são independentes pode-se usar a definição de densidade conjunta condicional.

$$L(y; \theta) = \prod_{t=1}^T p(y_t | y_{t-1}) \quad (\text{A10})$$

onde  $p(y_t | y_{t-1})$  representa a função densidade de probabilidade condicional em  $t-1$ . Se os ruídos em (A1) e (A2) e se o vetor inicial de estado são Gaussianos, a distribuição de  $y_t$  condicional a  $y_{t-1}$  também é Gaussiana. Podemos escrever que condicionalmente a  $y_{t-1}$ ,  $x_t$  é tal que :

$$p(x_t | Y_{t-1}) \sim N(\bar{x}_t, P_t) \quad (\text{A11})$$

Podemos verificar que antes da retirada da amostra, cada observação é uma variável aleatória cuja função de densidade de probabilidade é igual a função de densidade de probabilidade da população. A média e a variância de cada observação a ser retirada são iguais à media e variância da população em questão. Assim, dizemos que na função de densidade conjunta, antes de retirada a amostra,  $\theta$  é fixo e  $y_t$  é variável.

Contudo, uma vez que tenha sido obtida uma amostra específica,  $y_t$  torna-se fixo e a função de densidade de probabilidade conjunta pode ser reinterpretada como sendo uma função do vetor de parâmetros  $\theta$ , que se torna variável. Para uma amostra  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  a função de densidade conjunta vista como função do vetor de parâmetros desconhecidos, é denominado  $\theta$  da função de verossimilhança.

O problema que se coloca é o de, cada uma amostra, obter-se uma estimativa dos valores dos parâmetros populacionais desconhecidos. Uma possibilidade para a resolução do problema de estimação é escolher o vetor  $\hat{\theta}$  que maximize a probabilidade de obtenção da amostra específica  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  que se tem em mãos. Em outras palavras, queremos o vetor  $\hat{\theta}$  que faz a probabilidade de obter-se a amostra já obtida a maior possível, ou seja, temos que achar o  $\hat{\theta}$  que maximize a função de verossimilhança.

Assim, obtemos portanto a função de verossimilhança  $L(\theta, y)$ , onde  $y$  é fixo e  $\theta$  é a variável, e o problema consiste em obter-se o vetor que maximiza esta função. O estimador de máxima verossimilhança é o vetor que faz

$$L(\theta, y) > L(\dot{\theta}, y) \quad (\text{A12})$$

onde  $\dot{\theta}$  é qualquer outro estimador de  $\theta$ .

Matematicamente a implantação deste procedimento parece ser simples, pois tudo que temos a fazer é maximizar a função de verossimilhança com respeito à  $\theta$ . Para tanto, basta igualar a zero as derivadas parciais da função de verossimilhança e achar o vetor  $\theta$  que resolve este conjunto de equações. A solução deste problema é utilizarmos o logaritmo natural da função de verossimilhança ( $\ln L$ ), pois maximizar o logaritmo natural é mais simples e produz os mesmos resultados da maximização da função original.

Considere agora as seguintes definições:

- i. Escore eficiente (*eficiente score*):  $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = S(\theta)$ ;
- ii. Matriz de informação:  $E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \theta'}\right) = I(\theta)$

Note que o estimador de máxima verossimilhança ( $\theta$ ) vai ser a solução do conjunto de equações  $S(\theta)$ . Mais ainda, dadas algumas condições bem gerais, é possível mostrar-se que  $\theta$  é consistente, assintoticamente normalmente distribuído e tem variância  $[I(\theta)]^{-1}$ . Este valor,  $[I(\theta)]^{-1}$ , é conhecido como limite inferior de Cramer-Rao, pois não existe outro estimador consistente do valor  $\theta$  que tenha variância menor. Neste sentido, o estimador de máxima verossimilhança ( $\theta$ ) é também eficiente assintoticamente.

#### 1.4 Decomposição em Função do Erro de Previsão

Até agora nós consideramos um conjunto de  $T$  observações independentes. Mas para o caso de variáveis dependentes, caso quando os resíduos da equação de regressão são heterocedásticos ou autocorrelacionados serialmente, podemos construir a função de verossimilhança de maneira análoga.

Neste caso, a densidade conjunta das observações é dada por:

$$\ln L(y_1, \dots, y_T; \mu, \sigma^2 V) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |V| - \frac{1}{2\sigma^2} (y_t - \mu) V^{-1} (y_t - \mu) \quad (\text{A13})$$

A equação (A13) é a forma usual da apresentação da função de verossimilhança quando as observações não forem independentes.

Já a função de verossimilhança em função do erro de previsão, devemos fatorar a densidade conjunta.

$$\ln L(y_1, \dots, y_T) = \ln l(y_1, \dots, y_T) + \ln l(y_T / y_1, \dots, y_{T-1}) \quad (\text{A14})$$

Considere o problema de estimar  $y_T$  usando-se toda a informação disponível até  $T-1$ . Para tanto devemos utilizar o estimador que minimiza o erro médio quadrado é  $(y_{T/T-1})$ , onde:

$$y_{T/T-1} = E(y_T / y_1, \dots, y_{T-1})$$

A variância do erro de previsão associada a  $y_{T/T-1}$  é dada por:

$$\text{Var}(y_T / y_1, \dots, y_{T-1}) = \sigma^2 f_T$$

As propriedades básicas da distribuição normal, nos garante que as duas distribuições na fatoração de  $\ln l(y_1, y_2, \dots, y_T)$ , são normais. Portanto, a distribuição condicional pode ser reescrita na forma da equação (A15) abaixo:

$$\ln l(y_T / y_1, \dots, y_{T-1}) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln f_t - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{(y_t - \hat{y}_{T/T-1})^2}{f_t} \quad (\text{A15})$$

A equação (A15) é obtida a partir da equação (A13), fazendo-se  $T=1$  e  $V = f_T$ . Devemos repetir a fatoração feita na equação (A12) para todas as demais observações de forma a obter,

$$\ln l(y_1, \dots, y_T) = \sum_{i=2}^T \ln l(y_i / y_{i-1}, \dots, y_1) + \ln l(y_1) \quad (\text{A16})$$

Agora o estimador de erro quadrático médio mínimo  $(y_t)$  é

$$\hat{y}_{t/t-1} = E(y_t / y_{t-1}, \dots, y_1)$$

de forma que a equação (37) pode, então, ser escrita como

$$\ln L(y_1, \dots, y_T) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln f_t - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t} \quad (\text{A17})$$

onde  $v_t = y_t - \hat{y}_{t/t-1}$  é o erro de previsão um passo a frente. Assim, chegamos a função de verossimilhança com base no erro de previsão. A vantagem em se escrever a função de

verossimilhança desta forma, é que  $v_t$  e  $f_t$  podem ser facilmente calculados de forma sequencial pelo filtro de Kalman.

Em modelos mais gerais onde um vetor de  $N \times 1$  é observado a cada ponto no tempo o argumento é o mesmo de antes com  $v_t$  sendo agora também um vetor de dimensão  $N \times 1$ , com os erros de previsão com média zero e matriz de variância  $F_t$ . O  $\ln L$  pode ser escrito como:

$$\ln L(y | \theta) = -\frac{NT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T v_t' F_t^{-1} v_t \quad (\text{A18})$$