

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

MURILO MASSARU DA SILVA

**O MERCADO FUTURO DE DÓLAR DA BM&FBOVESPA: UMA ANÁLISE
DE DEPENDÊNCIA SOB A ÓTICA DA TEORIA DE CÓPULAS**

**JOÃO PESSOA
2013**

MURILO MASSARU DA SILVA

**O MERCADO FUTURO DE DÓLAR DA BM&FBOVESPA: UMA ANÁLISE
DE DEPENDÊNCIA SOB A ÓTICA DA TEORIA DE CÓPULAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Mestre em Economia

Orientador: Prof. Dr. Sinézio Fernandes Maia.

JOÃO PESSOA
2013

S586m Silva, Murilo Massaru da.

O mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA: uma análise de dependência sob a ótica da teoria de cópulas / Murilo Massaru da Silva.-- João Pessoa, 2013.

78f. : il.

Orientador: Sinézio Fernandes Maia

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCSA

**O MERCADO FUTURO DE DÓLAR DA BM&FBOVESPA: UMA ANÁLISE DE
DEPENDÊNCIA SOB A ÓTICA DA TEORIA DE CÓPULAS.**

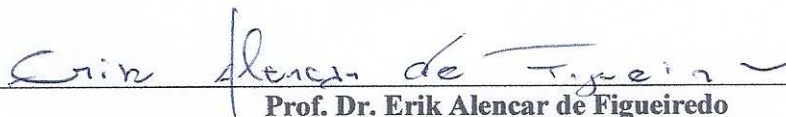
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, como requisito para a conclusão do curso de Mestrado em Economia.

Submetida à apreciação da banca examinadora, sendo aprovada em: 22/03/13

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Sinezio Fernandes Maia
Departamento de Economia/PPGE-UFPB
Orientador



Prof. Dr. Erik Alencar de Figueiredo
Departamento de Economia/PPGE-UFPB
Examinador Interno



Prof. Dr. Paulo de Andrade Jacinto
Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia/PPGE-PUCRS
Examinador Externo

RESUMO

Este estudo foi desenvolvido com o objetivo de modelar a relação de dependência entre o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA e a economia norte-americana, por meio da abordagem de cópulas. O contrato futuro de dólar negociado na bolsa brasileira é um dos cinco contratos futuros de câmbio com maior volume de negociação do mundo, portanto tem papel fundamental no mercado financeiro nacional. Após a estimação de uma série de famílias de cópulas constatou-se que a cópula *t-student* é apropriada para modelar a dependência entre as variáveis analisadas. Além disso, os testes estatísticos realizados rejeitaram tanto a hipótese de independência entre as séries quanto a de dependência de valores extremos. A pesquisa revelou que as variáveis em estudo possuem dependência negativa moderada, mesmo se tratando de mercados distintos de diferentes países.

Palavras-chave: mercado futuro de dólar; cópulas; dependência.

ABSTRACT

Considering the high integration degree of the world financial market, this paper attempts to model the dependence relationship between the BM&FBOVESPA U.S. Dollar futures market and the U.S. economy, using the Copula framework. The U.S.Dollar future contract negotiated on the Brazilian futures market is one of the top five futures contracts with the highest negotiation volume of the world and, hence, it plays a fundamental role in the Brazilian financial market. After the estimation of several families of copulas it was shown that the *t-student* copula is appropriated to model the dependence between the analyzed variables. Furthermore, the realized statistics tests rejected hypothesizes of independence and extreme value dependence. This study concludes that the variables present a moderate negative dependence, even considering that it is about different kind of markets from distinct countries.

Keywords: dollar future market;copulas;dependence.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	3
1.1.1 Objetivo geral	3
1.1.2 Objetivos específicos	3
1.1.3 Estrutura do trabalho	3
2 REVISÃO DE LITERATURA	4
3 MODELO TEÓRICO	10
3.1 Moderna Teoria da Carteira	10
3.2 Teoria de Cópulas	13
3.2.1 Cópulas Arquimedianas	15
3.2.2 Cópulas de Valores Extremos	17
4 ESTRATÉGIA EMPÍRICA: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	19
4.1 Testes de Raiz Unitária e Estacionariedade	19
4.2 Cópulas Estimadas	20
4.2.1 Cópulas Arquimedianas	20
4.2.2 Cópulas Elípticas	23
4.2.3 Cópulas de Valores Extremos	23
4.2.4 Outras Cópulas	25
4.3 Medidas de Dependência	26
4.4 Teste de Independência de Genest e Rémillard (2004)	29
4.5 Testes de Dependência de Valores Extremos	29
4.6 Teste de <i>Goodness-of-fit</i>	30
4.7 Modelos de variância condicional univariados	31
4.7.1 Modelo GARCH	31
4.7.2 Modelo IGARCH	32
4.7.3 Modelo EGARCH	32
4.7.4 Modelo GJR	33
5 O MERCADO FUTURO DE DÓLAR DA BM&FBOVESPA	34
6 RESULTADOS	40
6.1 Descrição dos Dados	40
6.2 Testes de Raiz Unitária e Normalidade	46
6.3 Estimação das Cópulas	47
6.4 Critérios de escolha entre cópulas	49

6.5 Teste de Independência	51
6.6 Testes de dependência de valores extremos	52
6.7 Teste de <i>goodness-of-fit</i>	53
6.8 Apresentação gráfica das cópulas escolhidas	54
6.9 Medidas de dependência entre as variáveis.....	57
6.10 Estimação de cópulas utilizando resíduos de regressões.....	58
7 CONCLUSÃO	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	65
ANEXO.....	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Desvio-padrão empírico do portfólio em função do número de ativos.....	12
Figura 2 – Participação no mercado futuro de dólar por tipo de agente em 2012.....	35
Figura 3 – Evolução da participação por tipo de agente no mercado futuro de dólar.....	36
Figura 4 – Evolução do volume mensal transacionado no mercado de dólar futuro (em bilhões de dólares).....	37
Figura 5 – Decomposição da série mensal do volume transacionado por médias móveis.....	37
Figura 6 – Volume negociado dos contratos futuros de dólar com vencimento em 2012.	38
Figura 7 – Índice S&P 500.....	41
Figura 8 – Retorno do Índice S&P 500 (em %).	41
Figura 9 – Cotação do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro.	42
Figura 10 – Retornos do primeiro vencimento em aberto do dólar Futuro (em %).	43
Figura 11 – Cotação do contrato de dólar futuro V12.....	44
Figura 12 – Retornos do primeiro do dólar futuro V12 (em %).	45
Figura 13 – Histogramas dos retornos.....	47
Figura 14 – Gráficos da cópula <i>t-student</i> entre os retornos do S&P 500 e do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro.	55
Figura 15 – Gráficos da cópula <i>t-student</i> entre os retornos do S&P 500 e do dólar futuro V12.....	56

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplos de famílias de cópulas arquimedianas de um parâmetro	17
Tabela 2 – Os 20 contratos futuros e de opções de câmbio mais negociados em 2011	34
Tabela 3 – Estatísticas Descritivas do índice S&P 500	41
Tabela 4 – Estatísticas Descritivas dos retornos do índice S&P 500 (em %)	42
Tabela 5 – Estatísticas descritivas da série do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro.....	42
Tabela 6 – Estatísticas descritivas dos retornos do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro (em %).	43
Tabela 7 – Estatísticas descritivas do contrato de dólar futuro V12 (em %)	44
Tabela 8 – Estatísticas descritivas do retorno de dólar futuro V12 (em %).	46
Tabela 9 – Testes de raiz unitária	47
Tabela 10 – Normalidade das séries.....	47
Tabela 11 – Estimativas das cópulas entre os retornos do S&P 500 e dólar futuro (primeiro vencimento em aberto).....	49
Tabela 12 – Estimativas das cópulas entre os retornos do S&P 500 e do dólar futuro (V12).....	49
Tabela 13 – Estimativas das cópulas entre os retornos do S&P 500 e o negativo do retorno do dólar futuro	50
Tabela 14 – Distância entre a cópula paramétrica e a cópula empírica.....	52
Tabela 15 – Teste de independência entre os retornos do mercado de dólar futuro e S&P 500	52
Tabela 16 – Testes de dependência de valores extremos	53
Tabela 17 – Teste de <i>Goodness-of-fit</i> das copulas paramétricas.....	54
Tabela 18 – Grau de dependência entre as variáveis.....	58
Tabela 19 – Critérios de escolha entre modelos de variância condicional.....	59
Tabela 20 – Estimativas das cópulas entre os resíduos dos retornos do S&P 500 e do dólar futuro	60
Tabela 21 – Comparação entre as estimativas feitas pelos resíduos e pelos dados originais.....	61
Tabela 22 – Código do mês de vencimento do contrato futuro.....	69

1 INTRODUÇÃO

Em um contexto de globalização das relações comerciais e financeiras, fica muito difícil entender o comportamento da economia brasileira. A elevada integração do comércio e do mercado financeiro de diversos países torna suas economias interdependentes, ou seja, é cada vez mais comum que choques ocorridos em outros países causem efeitos na economia do País.

A crise financeira de 2008 confirmou essa situação. A crise no mercado imobiliário norte-americano foi rapidamente transmitida para o mercado financeiro, derrubando os índices de ações de bolsas de valores no mundo inteiro. Naturalmente essa instabilidade financeira se propagou para a economia como um todo, causando brusca redução no ritmo de crescimento do PIB de diversos países, devendo-se ressaltar que em muitos casos chegou a ocorrer recessão. No Brasil, por exemplo, o PIB cresceu -0,33% em 2009, enquanto no Japão o crescimento foi de -5,53%.

Tendo em vista que choques externos podem ser transmitidos para a economia brasileira, é importante saber quantificar o grau de dependência que os diversos setores nacionais possuem em relação à economia de outros países, pois a partir da mensuração do risco que se corre é possível adotar estratégias para seu gerenciamento.

A conjuntura econômica internacional está em um momento de muita incerteza. A Europa vivencia grande instabilidade política a respeito da zona do euro, enquanto alguns países já convivem com a dura recessão¹ e com elevados índices de desemprego².

A China assume hoje papel de nova potência, graças ao acelerado crescimento econômico nas últimas décadas. Se em 1990 sua participação na produção mundial era menor que 2%, em 2011 este valor ultrapassou os 10%, segundo o FMI. Existem dúvidas se todo esse fantástico crescimento é sustentável a médio e longo prazo, e quais seriam os efeitos para a economia mundial caso o ritmo de crescimento chinês diminuísse.

Os Estados Unidos também passam por um momento de incerteza econômica, principalmente no que diz respeito à demora na recuperação pós-crise. Além disso, está sendo amplamente discutida uma política sobre a dívida pública americana, que possui um teto definido por lei. Há grande apreensão de que, caso a lei não seja alterada, o país terá de adotar políticas fiscais contracionistas previstas em lei, como a redução de gastos com programas

¹ A Grécia, por exemplo, obteve uma variação de -6,9% no PIB em 2011, de acordo com o FMI.

² Durante o mês de janeiro de 2013, a taxa de desemprego na Espanha chegou a 26,2%.

sociais e o aumento de impostos, o que poderia piorar ainda mais o ritmo de crescimento de sua economia.

Os títulos do tesouro americanos (*t-bonds*) são extremamente importantes para o sistema financeiro internacional, pois são considerados quase como ativos livres de risco. Em momentos de grande volatilidade no mercado financeiro mundial é comum que os investidores passem a trocar investimentos de maior risco por títulos de baixa rentabilidade. Essa peculiaridade dos *t-bonds* permite que o governo americano se endivida a juros baixos, o que pode explicar, em parte, o crescimento nominal da dívida pública. A razão Dívida Pública/PIB cresceu expressivamente nos últimos 12 anos, saltando de 57,8% em 2001 para 103,7% em 2012, o que pode estar comprometendo a capacidade de solvência do país.

Os agentes que operam no mercado financeiro brasileiro estão, direta ou indiretamente, expostos aos problemas que ocorrem na economia mundial. Desta forma, é importante que se conheça o grau de dependência dos ativos financeiros nacionais com a situação de economias estrangeiras. Neste trabalho, dedicou-se especial atenção à relação que o mercado de dólar futuro da BM&FBOVESPA tem com a economia americana.

Para isso, utilizou-se o índice S&P500 como indicador da economia americana, pois ele inclui 500 grandes empresas dos setores importantes da economia daquele país. Apesar de se tratar de um indicador do mercado de capitais, ele é capaz de captar as expectativas de diversos agentes, mesmo os que não têm contato direto com esse mercado.

O mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA foi escolhido como alvo de estudo devido à sua grande importância para o mercado financeiro brasileiro e para o mercado de derivativos de câmbio mundial. Durante o mês de fevereiro de 2013, por exemplo, esse mercado apresentou volume financeiro de R\$ 597 bilhões. Dada a grande movimentação financeira, não é de se surpreender que esse seja um dos contratos futuros de câmbio mais negociados do mundo.

Contudo, a avaliação da dependência entre dois mercados não é tarefa simples. Normalmente utiliza-se o coeficiente de correlação linear para verificar o quanto duas variáveis são dependentes, ignorando a possível presença de uma dependência não linear. É possível também a adoção de modelos de regressão que estimem o parâmetro de dependência. Esta abordagem, contudo, carrega uma série de pressupostos, como a homoscedasticidade, a normalidade dos resíduos e a correta especificação do modelo, os quais nem sempre são válidos.

A metodologia de cópulas surge como alternativa para mensurar a dependência que não faz nenhuma suposição a respeito da distribuição das variáveis, ou seja, é ideal para

trabalhar com os retornos de ativos financeiros que geralmente são leptocúrticos. As medidas de dependência calculadas por meio de cópulas também são capazes de captar a presença de associação não linear entre as variáveis. Como as funções do tipo cópula representam distribuições multivariadas, a estimação das cópulas permite não somente a obtenção de um “grau” de dependência, como também é possível conhecer o formato dessa relação.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Estimar a relação de dependência entre o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA com a economia dos Estados Unidos, por meio da abordagem de cópulas.

1.1.2 Objetivos específicos

- Testar a hipótese da independência entre as duas variáveis.
- Verificar se as variáveis possuem dependência de valores extremos.
- Utilizar os resíduos de modelos de regressão univariados como variáveis de entrada na estimação das cópulas.

1.1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em sete seções, sendo a primeira a Introdução. Na segunda é feita uma revisão da literatura sobre o mercado futuro de dólar no Brasil, como também sobre trabalhos que aplicam a metodologia de cópulas. O modelo teórico é apresentado na seção 3, onde se discute brevemente a Moderna Teoria da Carteira e é apresentada a introdução à teoria das cópulas. Na seção 4 descrevem-se os procedimentos metodológicos adotados e apresenta-se a forma funcional das cópulas que serão estimadas. Na seção 5 contextualiza-se o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA, destacando suas características e ressaltando sua importância. Os resultados são apresentados na seção 6, enquanto as conclusões se encontram na seção 7.

2REVISÃO DE LITERATURA

Os mercados de opções, futuros e opções sobre futuros de dólar são estudados com diferentes objetivos. Guimarães e Silva (2002), por exemplo, analisaram a credibilidade de curto prazo da política cambial do período entre janeiro de 1997 e janeiro de 1999. Nesse período estava sendo adotado no Brasil o regime de bandas cambiais. Entretanto,

em um regime de bandas confiáveis, quando a cotação cambial está no limite superior, deve-se esperar uma queda da taxa de câmbio, propriedade chamada de reversão a média. No caso em estudo, porém, em nenhum momento deveria ser esperada uma valorização do real, pois a manutenção da política incluía o reajuste periódico da banda larga (GUIMARÃES; SILVA, 2002).

Para verificar a credibilidade da política cambial, os autores utilizaram dados sobre valores de opções de compra, contratos futuros de dólar e juros (DI) e taxa de câmbio *spot* da BM&F, para estimar os parâmetros implícitos nos prêmios das opções pelo modelo de Merton (1976). Posteriormente, esses parâmetros foram utilizados para calcular a probabilidade e as magnitudes esperadas de uma desvalorização do real.

Apesar do problema de identificação das estimações realizadas, os parâmetros calculados referentes à possibilidade de saltos e os valores da volatilidade implícita estimados pelo modelo de Merton (1976) indicam que os *smiles* de volatilidade estavam mimetizando a possibilidade de ocorrência de saltos discretos. Além disso, constatou-se também que a desvalorização ocorrida em janeiro de 1999 parece ter sido diferente daquela que os prêmios das opções projetavam.

Mello (2005) comparou o desempenho do modelo de precificação de opções de Black (1976) com um modelo alternativo em que são utilizados dados sobre os mercados de futuros e opções sobre futuros da BM&FBOVESPA. Essa modelagem alternativa baseia-se no estudo de Câmara (2003). Nesse modelo assume-se que os preços do contrato futuro possuem distribuição lognormal com assimetria negativa.

Mello (2005) escolheu as opções sobre futuro de dólar para realizar essa comparação, por três razões. Em primeiro lugar, as distribuições históricas dos preços do dólar e de seu retorno apresentaram, em vários períodos, assimetria negativa. Além disso, o contrato futuro de dólar é um ativo que apresenta elevada liquidez. E, por último, o mercado de opções sobre dólar estava ganhando importância.

Os resultados indicam que, apesar das limitações e dos vieses do modelo de Black (1976), o modelo de Câmara (2003) teve desempenho inferior quanto à precificação das opções sobre o futuro de dólar. Também, um desvio na hipótese de lognormalidade da distribuição dos preços do ativo-objeto resulta em diferenças na maioria dos casos relevantes para precificar as opções.

A proteção contra o risco (*hedge*) por meio dos derivativos de dólar é de fundamental importância para diversos agentes econômicos que são diretamente afetados pelas variações cambiais, como exportadores e importadores. Para realizar essas operações de *hedging*, os agentes precisam primeiro saber quais instrumentos utilizar e a quantidade destes derivativos que minimizam o risco de acordo com sua aversão particular. Tanaka (2005), por exemplo, fez uma investigação sobre a Razão Ótima de *Hedge* (ROH) para uma carteira composta por dólar *spot* e dólar futuro.

O autor fez um comparativo entre a estimação da ROH por duas abordagens. A primeira delas surge como o coeficiente da regressão por Mínimos Quadrados Ordinários do preço do dólar *spot* sobre o dólar futuro. Nessa abordagem a ROH é constante ao longo do tempo. Já na segunda abordagem reconhece-se o caráter variável da covariância condicional do mercado futuro e estima-se a ROH por meio de um modelo GARCH Bivariado-BEKK-Diagonal.

Como critério de comparação utiliza-se a variação porcentual da variância da carteira em relação à carteira sem *hedge*. Os resultados indicam que o segundo método foi superior ao primeiro, pois

a redução média da variância da carteira com *hedge* em relação à carteira sem *hedge* só foi conseguida, quando se considerou a natureza variante no tempo da covariância condicional entre o retorno do dólar *spot* e o retorno do dólar futuro e o da variância condicional deste último (TANAKA, 2005).

Costa *et al.* (2011) também se propuseram encontrar o *hedge* ótimo, utilizando contratos futuros de ações, taxas de juros e câmbio no Brasil, assim como petróleo nos Estados Unidos. Nesse estudo os contratos futuros foram “os mais representativos em termos de negócios da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F). Além disso, diversos agentes – incluindo Estados, Investidores Institucionais e Instituições Financeiras – atuam nesse segmento e necessitam suas carteiras”.

Os autores afirmam que a definição do nível ótimo de *hedge* não é tão simples, pois “utilizar contratos futuros na mesma proporção da posição à vista, para proteger todo portfólio, é considerado um *hedge* ingênuo, pois admite que os dois mercados sempre

caminhem juntos”. A metodologia de Vetores Autorregressivos (VAR) foi adotada para identificar o nível ótimo de *hedge*.

Os resultados indicaram que o uso de contratos futuros para controle do risco do Ibovespa e do Petróleo requer elevado percentual de utilização desses contratos, devendo-se ressaltar que se obtém desempenho muito bom quanto à eficácia do *hedge*. Já para o mercado de juros esse desempenho foi bem menor, assim como a utilização dos contratos futuros. Entretanto, o resultado mais importante destacado pelos autores foi a ausência de relação de longo prazo entre o dólar *spot* e o dólar futuro, o que naturalmente reduz a eficiência do *hedge*.

Apesar de não haver trabalhos sobre o mercado futuro de dólar do Brasil que adotam a metodologia de cópulas, as possibilidades de aplicação desse método são extremamente abrangentes. De acordo com Patton (2009):

The number of papers on copula theory in finance and economics has grown enormously in recent years. One of the most influential of the ‘early’ papers on copulas in finance is that of Embrechts, McNeil and Straumann (2002), which was circulated as a working paper in 1999. Since then, scores of papers have been written, exploring the uses of copulas in finance, macroeconomics, and microeconomics, as well as developing the estimation and evaluation theory required for these applications (PATTON, 2009).

Um dos trabalhos que explora bem a aplicação da teoria de cópulas em econometria financeira é o de Patton (2002). O autor reconhece que diversas variáveis econômicas são distribuídas de forma não normal. Além disso, a medição de dependência por meio da correlação linear é criticada, principalmente pelo fato de poder existir dependência assimétrica.

Sendo assim, o autor sugere a utilização da teoria de cópulas, que é capaz de considerar a dependência de modo mais abrangente, pois permite a construção de distribuições multivariadas paramétricas flexíveis. Uma grande contribuição desse trabalho é a extensão da teoria de cópulas para permitir variáveis condicionantes, aplicando o modelo de distribuição conjunta para as taxas de câmbio entre o marco alemão e o dólar americano e também entre o yen japonês e o dólar americano.

Um resultado que pode ser destacado, entre outros, é que durante o período anterior à criação do euro foi fortemente rejeitada a hipótese nula de que as taxas de câmbio possuíam estrutura de dependência condicional simétrica. Além disso, foram detectadas fortes evidências de que houve quebra estrutural na cópula condicional após a criação do euro, em 1999.

Ané e Kharoubi (2003) utilizam a teoria de cópulas com o objetivo de melhorar a proteção do risco no mercado financeiro. Os autores reconhecem que:

The assumption of multivariate normal returns lies at the heart of the modern portfolio theory that establishes the variance as the risk measure and the correlation between asset returns as the measure of dependence that determines portfolio diversification and hedging performance (ANÉ; KHAROUBI, 2003).

São utilizados dados de seis índices de ações para a análise: Dax 30, FTSE 100, Hang Seng, NASDAQ, Nikkei 225 e S&P 500. As cópulas estimadas são a gaussiana, Gumbel (1960), Frank (1979) e Cook-Johnson (1981). Para evitar a escolha arbitrária de qual cópula deve ser escolhida, é feito o mesmo procedimento que Durrleman, Nikeghbali e Roncalli (2000), no qual se adota um critério de seleção baseado na cópula empírica de Deheuvels (1979, 1981).

A partir dos resultados da estimação das cópulas, Ané e Kharoubi (2003) propõem a aplicar um modelo de Valor em Risco (VaR) para verificar se a relação de dependência estimada por cópulas gera melhorias nas estimações do VaR. Os autores concluíram que a má especificação na estrutura de dependência pode ser a causa de erro de estimação de mais de 20% do VaR.

Quanto aos modelos de gestão de risco, Kat e Palaro (2005) sugerem uma técnica baseada na teoria de cópulas que permite a derivação de estratégias de negociação dinâmicas. O objetivo desse trabalho é mostrar que a técnica pode gerar resultados estatisticamente similares aos dos *hedge funds*.

Os autores estendem a formulação teórica do modelo de *Payoff Distribution Pricing* de Dybvig (1988) para um contexto bivariado. Em seguida é determinada a função de *payoff* desejada, que, dada a distribuição dos ativos a serem negociados, implica a distribuição do retorno desejado. Por último, são comparados os resultados desse procedimento com base em cópulas com os retornos de três *hedge funds*.

Kat e Palaro (2005) concluem que:

in this paper we have shown that it is possible to design dynamic trading strategies, which generate returns similar to those of individual hedge funds and funds of hedge funds. Since this is accomplished by trading (futures on) traditional assets only, these strategies avoid the typical drawbacks surrounding hedge fund and other alternative investments. As such, our synthetic hedge fund returns are clearly to be preferred over real hedge fund returns (KAT; PALARO, 2005).

Outra possível aplicação da teoria de cópulas é a mensuração do contágio financeiro entre diferentes mercados. Rodriguez (2006) considera a possibilidade dos mercados financeiros se tornarem mais interdependentes durante períodos de crises. De acordo com o autor, esse assunto adquiriu grande importância durante a década de 1990, quando ocorreram cinco grandes crises.

Foram utilizados os retornos diários de cinco índices de ações de países do leste asiático (Tailândia, Malásia, Indonésia, Coreia do Sul e Filipinas) durante a época da crise asiática. Além disso, também foram estudados os retornos diários de índices de ações de países latino-americanos (México, Argentina, Chile e Brasil) durante o período da crise mexicana.

Os resultados evidenciaram que a estrutura de dependência entre os retornos dos índices de ações nos países asiáticos e latino-americanos mudou durante as crises asiática e mexicana. Por outro lado, a dependência medida pelo *Tau* de Kendall foi relativamente pequena, no entanto as mudanças na dependência durante regimes de alta variância foram estatisticamente significantes.

Um estudo nacional que também teve o objetivo de mensurar o contágio financeiro foi o de Santos (2010). Nesse trabalho, foram estimadas cópulas para modelar e quantificar a dependência entre quatro diferentes mercados: IBOVESPA, S&P 500, FTSE e Nikkei 225, para um intervalo de observações entre 2000 e 2009.

O autor seguiu a metodologia de Patton (2002), no que se refere à utilização dos resíduos padronizados dos modelos marginais do tipo ARMA-GARCH para estimação das cópulas. As cópulas escolhidas foram as mesmas encontradas em Patton (2002), ou seja, as cópulas condicionais. A escolha dessa metodologia foi no sentido de identificar se houve contágio financeiro durante a crise do *subprime*.

Nesse estudo concluiu-se que o mercado brasileiro apresentou sinais claros de contágio em relação ao mercado norte-americano. Entretanto, as cópulas estimadas não foram concordantes no que diz respeito ao contágio dos mercados japonês e londrino em relação à crise.

Os modelos de volatilidade multivariados permitem a análise não somente do risco individual do ativo, mas também da transmissão e do contágio da volatilidade de outros mercados. Pereira e Pereira (2009) apresentam o modelo de cópulas como alternativa às demais metodologias de cálculo de risco para um portfólio resultante de posições idênticas em quatro fatores de risco.

Nesse trabalho, além da apresentação detalhada do modelo de cópulas, tem-se uma excelente referência nos estudos sobre volatilidade, pois também faz uma revisão de alguns dos modelos de volatilidade univariados mais populares: ARCH, GARCH, EGARCH, TGARCH e PGARCH. Em seguida, são descritos alguns dos modelos multivariados de volatilidade: GARCH multivariado, VEC, diagonal, BEKK, EWMA, Modelo de Correlação Constante (CCC) e Modelo de Correlação Dinâmica (DCC).

Os resultados indicam que ao comparar o modelo de cópulas com os demais modelos de volatilidade multivariados apresentados verifica-se que as medidas de risco estimadas pela teoria de cópulas apresentam superioridade considerável, quando se consideram um nível de confiança alto. Entretanto, o modelo é limitado porque sua estimação é lenta e de difícil convergência. Além disso,

em relação a sua aplicabilidade e implantação em bancos de investimentos, entendemos como um pouco crítica no momento, por dois motivos principais: primeiro a necessidade de ter que se supor alguma função de acoplamento de forma “ad-hoc”, este tipo de imposição dificulta a defesa perante a alta cúpula, e em segundo lugar a dificuldade para estimar modelos multivariados acima de quatro (PEREIRA; PEREIRA, 2009).

3 MODELO TEÓRICO

3.1 Moderna Teoria da Carteira

No trabalho seminal de Markowitz (1952), a teoria de finanças começou a ser desenvolvida nos moldes em que é conhecida até hoje. O autor propôs uma nova modelagem, que tratava da mensuração de duas características fundamentais dos ativos financeiros e portfólios: risco e retorno.

Markowitz (1952) propunha que a partir de dados históricos dos retornos dos ativos era possível não somente mensurar seu risco e retorno esperados, mas também minimizar o risco do investidor por meio da diversificação na composição de uma carteira. O autor definiu o retorno esperado como a média dos retornos passados, e o risco era definido como a variância desses retornos.

Partindo do pressuposto que os retornos dos ativos financeiros seguem distribuição normal, o risco poderia de fato ser mensurado, pois quando a média e a variância dessa distribuição são conhecidas, é possível calcular a probabilidade de ocorrência de qualquer evento. Sendo assim, o risco deixa de ser um critério subjetivo e passa a ser medido em termos probabilísticos.

O autor, nesse mesmo trabalho, apresenta uma prova de que, dentro dessa estrutura média-variância, a diversificação de um portfólio pode reduzir a variância (risco), mantendo um dado nível de retorno desejado constante. Por questões de simplicidade, é apresentado aqui o modelo que contém apenas dois ativos, entretanto esses resultados podem ser estendidos para modelos com até n ativos.

Considerando um portfólio com dois ativos de risco e que são ambos normalmente distribuídos, a média e o desvio-padrão do portfólio podem ser calculados quando $a\%$ da nossa riqueza é investida no ativo X, e $b\%$ investido no ativo Y. O retorno do portfólio pode ser representado como a soma ponderada das duas variáveis:

$$R_p = aX + bY \quad (3.1.1)$$

O retorno médio é o resultado esperado:

$$E(R_p) = E[aX + bY] \quad (3.1.2)$$

Separando os termos, tem-se que:

$$E(R_p) = E(aX) + E(bY) \quad (3.1.3)$$

Como a e b são constantes, tem-se que:

$$E(R_p) = aE(X) + bE(Y) \quad (3.1.4)$$

A variância do portfólio é expressa como:

$$\begin{aligned} VAR(R_p) &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\ &= E[(aX + bY) - E(aX + bY)]^2 \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned} VAR(R_p) &= E[(aX - aE(X)) + (bY - bE(Y))]^2 \\ &= E[a^2(X - E(X))^2 + b^2(Y - E(Y))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (3.1.6) \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$VAR(aX) = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 VAR(X) \quad (3.1.7)$$

E também,

$$VAR(bY) = b^2 E[(Y - E(Y))^2] = b^2 VAR(Y) \quad (3.1.8)$$

Além disso,

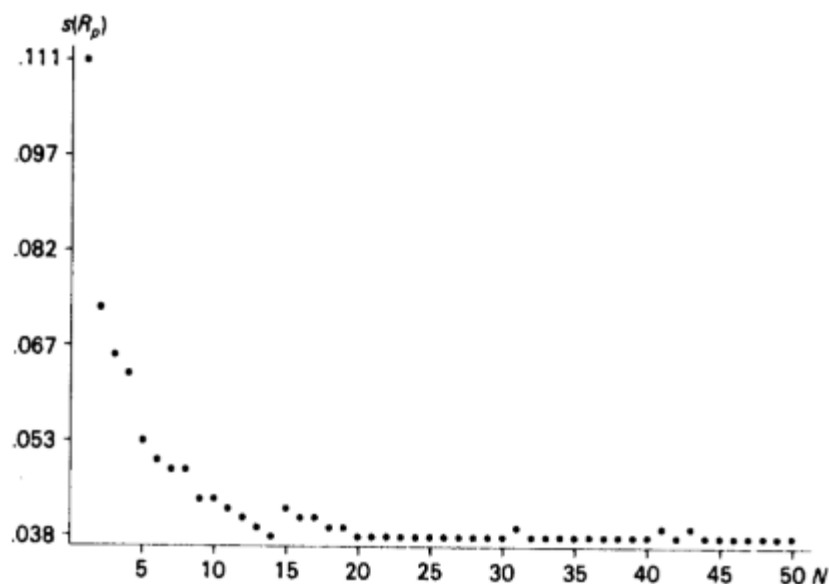
$$COV(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (3.1.9)$$

Portanto, a variância de um portfólio pode ser representada por:

$$VAR(R_p) = a^2VAR(X) + b^2VAR(Y) + 2abCOV(X,Y) \quad (3.1.10)$$

Esse resultado evidencia que para reduzir o risco de uma carteira não é preciso apenas reduzir a proporção de ativos de maior risco e incluir títulos com menor variância, é necessário observar também a covariância entre esses ativos. Na equação (12), se a covariância entre X e Y é negativa, a combinação entre os dois ativos resulta em uma carteira mais eficiente do que aquelas compostas apenas por um dos dois ativos.

Além disso, é possível demonstrar que à medida que uma carteira vai aumentando sua diversificação essa otimização da relação risco-retorno tende a ficar cada vez mais eficiente. No entanto, encontram-se limites empíricos para essa redução do risco, como mostra a Figura 1.



Fonte: Fama (1976).

Figura 1 – Desvio-padrão empírico do portfólio em função do número de ativos.

Apesar da grande importância deste trabalho, a variância como medida de risco mostrou-se passível de críticas³. Sendo assim, existe a necessidade de encontrar medidas mais eficientes de volatilidade, que tentam captar com maior precisão o “verdadeiro” risco dos

³ Entre elas, a elevada curtose característica dos ativos financeiros, que conseqüentemente não caracteriza uma distribuição normal pressuposta por Markowitz (1952). Sendo assim, como os ativos possuem distribuição desconhecida, é impossível o cálculo da probabilidade de um determinado desvio em relação à média, como visto em Fama (1965).

ativos financeiros, como é o caso dos modelos da família de variância condicional introduzidos por Engle (1982).

A mensuração do risco é apenas um dos problemas encontrados em finanças. A gestão desse risco também é extremamente importante para os agentes econômicos, pois é comum que muitos queiram se proteger desse risco, enquanto outros desejam especular em cima dessa variabilidade. Markowitz (1952) propôs a utilização da covariância como medida de dependência, sendo também comum utilizar a correlação de Pearson para avaliar a composição de um portfólio.

A teoria de cópulas é útil para realizar uma gestão de risco, porque ela não somente fornece índices de dependência, como também investiga a natureza dessa dependência e, portanto, fornece mais informações relevantes.

3.2 Teoria de Cópulas

A palavra *copula*, em latim, é um nome que significa “uma ligação, vínculo, conexão” e é usada na gramática e na lógica para descrever a parte de uma proposição que conecta o sujeito e o predicado.

A definição de cópulas apresentada por Nelsen (2006) diz que, por um ponto de vista, cópulas são funções que juntam ou “acoplam” funções de distribuição multivariadas com as suas funções de distribuição de probabilidade marginais unidimensionais. Alternativamente, cópulas são funções de distribuição multivariadas cujas margens unidimensionais são uniformes no intervalo (0,1).

Formalmente, antes de definir o conceito de cópula, introduz-se o conceito de subcópulas. Para o caso de duas dimensões, uma subcópula é uma função C' que segue as seguintes propriedades:

1. $Dom C' = S_1 \times S_2$, onde S_1 e S_2 são subconjuntos de $\mathbf{I}$ contendo 0 e 1.
2. C' é “grounded” e “2-increasing⁴”.
3. Para cada u em S_1 e v em S_2 , $C'(u, 1) = u$ e $C'(1, v) = v$.

Logo, as cópulas podem ser consideradas como subcópulas cujo domínio é $\mathbf{I}^2$. Sendo assim, pode-se dizer que a cópula é uma função de $\mathbf{I}^2$ em $\mathbf{I}$, com as seguintes propriedades:

⁴ As definições de *grounded* e *2-increasing* podem ser encontradas em Nelsen (2006).

1. Para cada u e v em $\mathbf{I}$,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (3.2.1)$$

e

$$C(u, 1) = u \quad e \quad C(1, v) = v \quad (3.2.2)$$

2. Para cada u_1, u_2, v_1, v_2 em $\mathbf{I}$, sendo que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (3.2.3)$$

Além disso, sabe-se que para qualquer subcópula:

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v) \quad (3.2.4)$$

Consequentemente, para qualquer cópula:

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (3.2.5)$$

ou então,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \quad (3.2.6)$$

A inequação (3.2.6) é conhecida como inequação de *Fréchet-Hoeffding bounds*. A função $M(u, v)$ é denominada *Fréchet-Hoeffding upper bound*, enquanto, analogamente, $W(u, v)$ é chamada de *Fréchet-Hoeffding lower bound*. Apesar de serem construídas teoricamente, essas duas funções possuem interpretação prática bastante direta, pois representam as funções de perfeita dependência positiva e negativa, respectivamente.

Existe uma terceira cópula frequentemente encontrada dentro da Teoria de Cópulas e que também possui interpretação prática fácil: a cópula do produto. Formalmente ela pode ser escrita como $\Pi(u, v) = uv$. Esta cópula ilustra o caso da perfeita independência entre as variáveis. A sua intuição é a mesma por trás da regra que diz que quando dois eventos são independentes a chance de ocorrência de ambos é igual à multiplicação da probabilidade de cada um deles.

Para entender melhor a aplicação de cópulas na estatística é fundamental que se conheça o Teorema de Sklar (1959), que pode ser formalmente descrito como: Assuma que H é uma função de distribuição conjunta com margens F e G . Desta forma, existe uma cópula C , que para quaisquer x e y pertencentes a $\bar{\mathbf{R}}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (3.2.7)$$

Se F e G são contínuas, então C é única; se não, C é unicamente determinada em $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. Se C é uma cópula e F e G são funções de distribuição, então $H(x, y)$ é uma função de distribuição conjunta com margens F e G .

3.2.1 Cópulas Arquimedianas

A classe de cópulas arquimedianas representa um importante grupo de cópulas que possui vários pontos positivos. Essas cópulas podem ser construídas com facilidade e existem diversas funções com propriedades distintas que podem ser usadas para modelar vários tipos de dependência.

Assumindo que X e Y são variáveis aleatórias contínuas, com função de distribuição conjunta H e funções de distribuição marginal F e G , respectivamente, sabe-se que quando X e Y são independentes, $H(x, y) = F(x)G(y)$ para todo $x, y \in \bar{\mathbf{R}}$. Este é o único caso em que se pode dividir a função de distribuição conjunta em um produto de uma função F e uma função G .

Quando é possível escrever

$$\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y)) \quad (3.2.1.1)$$

para uma função λ positiva no intervalo $(0, 1)$, então, ao assumir que $\varphi(t) = -\ln \lambda(t)$, pode-se reescrever H como a soma das marginais, ou seja:

$$\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v) \quad (3.2.1.2)$$

Antes de definir o que é uma cópula arquimediana, é preciso mais duas definições:

- 1) Assuma que φ é uma função contínua, estritamente decrescente de $\mathbf{I}$ em $[0, \infty]$, tal que $\varphi(1) = 0$. A função pseudoinversa de φ é a função $\varphi^{[-1]}$ com $\text{Dom}\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ e $\text{Ran}\varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$, dada por:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (3.2.1.3)$$

- 2) Assuma que φ é uma função contínua, estritamente decrescente de $\mathbf{I}$ em $[0, \infty]$, tal que $\varphi(1) = 0$, e assumamos que $\varphi^{[-1]}$ é a pseudoinversa de φ . Assumamos que C é a função de $\mathbf{I}^2$ em $\mathbf{I}$ dada por:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (3.2.1.4)$$

As cópulas que puderem ser descritas pela equação (3.2.14) são denominadas arquimedianas. Já a função φ é conhecida como geradora da cópula. Nos casos em que $\varphi(0) = \infty$, pode-se afirmar que φ é uma geradora estrita. Sendo assim $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, consequentemente

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.2.1.5)$$

representa uma cópula arquimediana estrita.

De acordo com Nelsen (2006), lembrando o axioma arquimediano para os números reais positivos (se a, b são números positivos reais, então existe algum número inteiro n , tal que $na > b$), uma cópula arquimediana se comporta como um operador binário no intervalo $\mathbf{I}$. A cópula define para cada par u, v em $\mathbf{I}$, um número $C(u, v)$ em $\mathbf{I}$. Como a “operação” C é comutativa e associativa, e preserva o ordenamento, isto é, $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$ implica que $C(u_1, v_1) \leq C(u_2, v_2)$.

Como mencionado, as cópulas arquimedianas podem ser construídas com facilidade, pois é necessário apenas encontrar funções que servem como geradoras, isto é, funções contínuas decrescentes convexas φ de $\mathbf{I}$ em $[0, \infty]$ com $\varphi(1) = 0$. Na Tabela 1 tem-se uma lista com uma série de famílias de cópulas arquimedianas de um parâmetro, assim como suas respectivas funções geradoras.

Tabela 1 – Exemplos de famílias de cópulas arquimedianas de um parâmetro

Table 4.1. One-parameter		
(4.2.#)	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_\theta(t)$
1	$\left[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0) \right]^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$
2	$\max\left(1 - \left[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta\right]^{1/\theta}, 0\right)$	$(1-t)^\theta$
3	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$
4	$\exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$	$(-\ln t)^\theta$
5	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 - \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$
6	$1 - \left[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta\right]^{1/\theta}$	$-\ln[1 - (1-t)^\theta]$
7	$\max(\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0)$	$-\ln[\theta + (1-\theta)t]$
8	$\max\left(\frac{\theta^2 uv - (1-u)(1-v)}{\theta^2 - (\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right)$	$\frac{1-t}{1 + (\theta-1)t}$
9	$uv \exp(-\theta \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \theta \ln t)$
10	$uv / \left[1 + (1-u^\theta)(1-v^\theta)\right]^{1/\theta}$	$\ln(2t^{-\theta} - 1)$
11	$\left[\max(u^\theta v^\theta - 2(1-u^\theta)(1-v^\theta), 0) \right]^{1/\theta}$	$\ln(2 - t^\theta)$
12	$\left(1 + \left[(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta\right]^{1/\theta}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{t} - 1\right)^\theta$
13	$\exp\left(1 - \left[(1 - \ln u)^\theta + (1 - \ln v)^\theta - 1\right]^{1/\theta}\right)$	$(1 - \ln t)^\theta - 1$
14	$\left(1 + \left[(u^{-1/\theta} - 1)^\theta + (v^{-1/\theta} - 1)^\theta\right]^{1/\theta}\right)^{-\theta}$	$(t^{-1/\theta} - 1)^\theta$

Fonte: Nelsen (2006).

3.2.2 Cópulas de Valores Extremos

Formalmente, uma cópula C pertence à categoria de valores extremos se existir uma cópula C_F que satisfaz a:

$$C_F(u_1^{1/n}, \dots, u_d^{1/n})^n \rightarrow C(u_1, \dots, u_d) \quad (3.2.2.1)$$

quando $n \rightarrow \infty$, para todo $(u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$. Já as cópulas *max-stable* são aquelas que satisfazem à seguinte relação:

$$C(u_1, \dots, u_d) = C(u_1^{1/m}, \dots, u_d^{1/m})^m \quad (3.2.2.2)$$

para todo inteiro $m \geq 1$ e todo $(u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$. A prova de que toda cópula *max-stable* é também de valores extremos é trivial, enquanto o contrário também pode ser facilmente provado⁵. Portanto, pode-se afirmar que uma cópula é de valores extremos se, e somente se, ela for *max-stable*.

De acordo com Pickands (1981), todas as cópulas de valores extremos podem ser representadas por:

$$C(u, v) = \exp \left[\log(uv) A \left\{ \frac{\log(v)}{\log(uv)} \right\} \right] \quad (3.2.2.3)$$

em que $A: [0,1] \rightarrow [0,1]$ é convexa e também que $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$. Em grande parte dos casos, tenta-se descobrir uma família paramétrica apropriada para A , que é equivalente ao se procurar por uma cópula apropriada.

⁵ Gudendorf e Segers (2010).

4 ESTRATÉGIA EMPÍRICA: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 Testes de Raiz Unitária e Estacionariedade

Ao trabalhar com séries temporais, um dos primeiros passos comumente adotado é a averiguação se as séries possuem raiz unitária ou se elas podem ser consideradas estacionárias. Em modelos de regressão, a utilização de séries integradas pode gerar o problema da regressão espúria, quando a dependência entre as variáveis é superestimada, dada a existência de uma tendência comum entre elas.

Apesar de a estimação de cópulas ser diferente dos modelos de regressão, também pode ser perigoso medir a dependência entre variáveis que possuem raiz unitária, pois é possível que variáveis sem relação lógica alguma sejam dependentes umas das outras.

Portanto, serão realizados testes de raiz unitária e estacionariedade para utilizar apenas séries que possam ser consideradas $I(0)$. O primeiro teste realizado é o de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), no qual é avaliada a hipótese nula de que a série possui raiz unitária. O teste é proposto por Banerjee *et al.* (1993), sendo a estatística de testes e a tabela com os p-valores fornecidos pelos autores. O número de defasagens a serem utilizadas no teste é determinado pela fórmula encontrada em Trapletti, Hornik e Lebaron (2012):

$$k = \text{trunc}((\text{length}(x) - 1)^{\frac{1}{3}}) \quad (4.1.1)$$

em que k é o número de defasagens e x é o vetor de variáveis. Segundo Trapletti, Hornik e Lebaron (2012), esse valor “*corresponds to the suggested upper bound on the rate at which the number of lags, k , should be made to grow with the sample size for the general ARMA(p, q) setup*”.

O segundo teste realizado é o de *Phillips-Perron* (PP), que assim como o ADF também avalia se a série é $I(1)$. A estatística de teste e a tabela com os p-valores também podem ser encontradas em Banerjee *et al.* (1993). Nesse teste, o número de defasagens é escolhido de acordo com a seguinte fórmula, fornecida por Trapletti, Hornik e Lebaron (2012):

$$k = \text{trunc}(4 * (n/100)^{(0.25)}) \quad (4.1.2)$$

em que k é o número de defasagens e n é o comprimento da série.

O último teste utilizado é o de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), que diferentemente do ADF e do PP avalia a hipótese nula de que a série é estacionária. Portanto, ao analisar os três testes conjuntamente, tem-se uma visão mais ampla a respeito da ordem de integração das séries. O teste KPSS é mais bem descrito em Kwiatkowski *et al.* (1992) e o número de defasagens utilizado é aquele proposto por Trapletti, Hornik e Lebaron (2012), no qual:

$$k = \text{trunc}(3 * \sqrt{n}/13) \quad (4.1.3)$$

em que k é o número de defasagens e n é o comprimento da série.

4.2 Cópulas Estimadas

De acordo com o teorema de Sklar, a distribuição multivariada de duas ou mais variáveis pode ser representada por uma cópula das distribuições univariadas. Normalmente a cópula “verdadeira” é desconhecida, sendo necessário testar uma diversidade de funções para encontrar qual delas se ajusta melhor ao tipo de dependência que as variáveis possuem entre si.

Há uma grande diversidade de famílias de cópulas paramétricas que fornecem candidatas à cópula a ser escolhida. Somente no que tange à categoria de famílias de cópulas arquimedianas de um parâmetro, existem diversas possibilidades de escolha, como pode ser observado na Tabela 1.

Dada a grande quantidade de famílias de cópulas conhecidas existentes, é preciso escolher um delimitado grupo que será estimado por questão de simplicidade. Segundo Trivedi e Zimmer (2005):

Choosing a copula that permits only positive dependence is also restrictive if one expects either positive or negative dependence in the relevant data context. Thus, in many empirical settings, choosing a relatively unrestrictive copula is a sensible decision. In many empirical settings trying several copulas to explore the dependence structure is a sound strategy (TRIVEDI; ZIMMER, 2005).

4.2.1 Cópulas Arquimedianas

As famílias de cópulas estimadas neste trabalho são relativamente comuns na literatura sobre cópulas e captam diferentes tipos de dependência. As primeiras cópulas estimadas pertencem à classe de cópulas arquimedianas. Segundo Nelsen (2006), esse conjunto de cópulas é importante por que:

These copulas find a wide range of applications for a number of reasons: (1) the ease with which they can be constructed; (2) the great variety of families of copulas which belong to this class; and (3) the many nice properties possessed by the members of this class (NELSEN, 2006).

Dentre as cópulas arquimedianas, foram estimadas apenas cinco: Clayton, Frank, Gumbel, Ali-Mikhail-Haq e Joe. A cópula Clayton foi apresentada em Clayton (1978) e possui a seguinte forma:

$$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (4.2.1.1)$$

em que o parâmetro de dependência θ assume valores apenas de $(0, \infty)$. É interessante ressaltar que quando θ se aproxima de zero, as margens se tornam independentes. Por outro lado, quando θ se aproxima de ∞ , a cópula se torna mais parecida com o limite superior de Fréchet.

Outra propriedade da cópula Clayton é que ela não é capaz de captar dependência negativa. De acordo com Trivedi e Zimmer (2005):

It has been used to study correlated risks because it exhibits strong left tail dependence and relatively weak right tail dependence.[...] When correlation between two events, such as performance of two funds or spouses' ages at death, is strongest in the left tail of the joint distribution, Clayton is an appropriate modeling choice (TRIVEDI; ZIMMER, 2005)

A segunda cópula arquimadiana a ser estimada é a cópula Frank. Ela recebe este nome porque é encontrada em Frank (1979) e possui a seguinte forma funcional:

$$C(u_1, u_2; \theta) = -\theta^{-1} \log \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\} \quad (4.2.1.2)$$

Um importante ponto positivo dessa cópula é que o parâmetro de dependência pode variar entre $(-\infty, \infty)$. Consequentemente, ela é capaz de modelar tanto o caso de dependência positiva quanto negativa. Outra propriedade dessa função é que à medida que o parâmetro de dependência se aproxima de $-\infty$, a função converge para o limite inferior de Fréchet.

Analogamente, se θ se aproxima de ∞ , a cópula converge para o limite superior de Fréchet. Quando o parâmetro de dependência é igual a 0, as variáveis são independentes.

Por outro lado, essa família de cópulas só é apropriada quando a dependência é mais concentrada no meio da distribuição, ou seja, a cópula Frank não deve ser usada para variáveis que apresentem grande dependência nas caudas.

A cópula Gumbel é um caso especial das cópulas arquimedianas, pois também pertence à classe de cópulas de valores extremos. Esta função foi proposta por Gumbel (1960) e é descrita pela seguinte fórmula:

$$C(u_1, u_2; \theta) = \exp\left(-((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta)^{1/\theta}\right) \quad (4.2.1.3)$$

Nesse caso, o parâmetro de dependência θ varia apenas de $[1, \infty)$. Quanto θ é igual a 1, as variáveis são independentes. À medida que o parâmetro tende a ∞ , a função se aproxima do limite superior de Fréchet. Esta cópula é útil para variáveis que apresentam grande dependência na cauda direita, ou seja, quando os valores são muito altos. Porém, essa função não é capaz de captar dependência negativa.

A quarta cópula arquimadiana estimada é a Ali-Mikhail-Haq (AMH), que leva este nome por ser derivada da função de distribuição conjunta encontrada em Ali, Mikhail e Haq (1978). A cópula AMH é definida por:

$$C(u_1, u_2; \theta) = \frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1 - u_1)(1 - u_2)} \quad (4.2.1.4)$$

O parâmetro θ situa-se em $[-1, 1)$, conseqüentemente essa família de cópulas é capaz de captar tanto dependência positiva quanto negativa. Segundo Quinn (2007): *The AMH copula is skewed in its dependence structure, similar to the Gumbel, however it estimates dependence more precisely in the lower tail.* Além disso, à medida que θ se aproxima de seus valores máximo e mínimo essa cópula não converge para os limites superior e inferior de Fréchet, respectivamente. Desta forma, essa cópula não é aconselhável para variáveis com dependência forte.

Por último, estima-se a cópula Joe, que é mais bem discutida em Joe (1993, 1997). Sua forma funcional é descrita por:

$$C(u_1, u_2; \theta) = 1 - \left[(1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)^\theta(1 - u_2)^\theta\right]^{1/\theta} \quad (4.2.1.5)$$

Nesse caso, o parâmetro de dependência assume valores entre $[1, \infty)$, restringindo a função a captar somente a dependência positiva. Quando θ é igual a 1, as variáveis são independentes, e quando θ tende a ∞ , a função equivale ao limite de Fréchet superior, ou seja, essa função pode ser usada tanto em casos de dependência fraca quanto forte. Além disso, essa cópula apresenta grande dependência na cauda superior, ao contrário do que ocorre na cauda inferior, onde a dependência é relativamente mais baixa.

4.2.2 Cópulas Elípticas

A classe de cópulas elípticas é muito utilizada, pois abrange duas famílias extremamente importantes: gaussiana e *t-student*. A cópula gaussiana possui esta denominação por ser associada à distribuição normal multivariada. Esta função pode ser representada por:

$$C(u_1, u_2; \theta) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\theta^2)^{1/2}} \times \left\{ \frac{-(s^2 - 2\theta st + t^2)}{2(1-\theta^2)} \right\} ds dt \quad (4.2.2.1)$$

em que Φ é a função de distribuição de probabilidades acumulada de uma normal. O parâmetro de correlação é restrito ao intervalo $[-1, 1]$. Esta função é apropriada para captar dependência positiva e negativa, e a medida que se aproxima de -1 e 1 a cópula atinge os limites de Fréchet superior e inferior, respectivamente.

A cópula *t-student*, de forma similar, também pode ser relacionada com uma distribuição *t-student* multivariada. Esta cópula, por sua vez, depende de dois parâmetros e pode ser escrita como:

$$C(u_1, u_2; \theta, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\theta^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{(s^2 - 2\theta st + t^2)}{v(1-\theta^2)} \right\}^{-(v+2)/2} ds dt \quad (4.2.2.2)$$

Assim como na cópula gaussiana, o parâmetro de dependência se situa entre $[-1, 1]$, sendo que esta cópula também atinge os limites de Fréchet superior e inferior. Ela pode ser usada como alternativa à gaussiana quando as variáveis possuírem dependência nas caudas.

4.2.3 Cópulas de Valores Extremos

Em algumas séries temporais é comum que as variáveis possuam dependência de valores extremos, quando a relação entre elas se torna mais evidente nas observações que se

concentram nas caudas das distribuições. Neste trabalho foram estimados quatro diferentes tipos de cópulas de valores extremos (além da cópula Gumbel, que também é arquimediana): Galambos, Husler-Reiss, Tawn e *t-Extreme Value* (t-EV). A cópula Galambos pode ser encontrada em Galambos (1987) e é escrita como:

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 \exp \left(\left((-\log u_1)^{-\theta} + (-\log u_2)^{-\theta} \right)^{-1/\theta} \right) \quad (4.2.3.1)$$

O parâmetro θ encontra-se dentro de $[0, \infty)$, conseqüentemente não é apto para modelar dependência negativa. Quando o parâmetro de dependência se aproxima de 0, a cópula converge para a independência entre as variáveis, e à medida que θ tende a infinito a cópula se aproxima do limite superior de Fréchet.

Husler e Reiss (1989) propuseram a cópula Husler-Reiss, utilizando a seguinte expressão:

$$C(u_1, u_2; \theta) = \exp \left\{ -\tilde{u}_1 \Phi \left(\theta^{-1} + \frac{1}{2} \theta \ln \left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} \right) \right) - \tilde{u}_2 \Phi \left(\theta^{-1} + \frac{1}{2} \theta \ln \left(\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} \right) \right) \right\} \quad (4.2.3.2)$$

em que $\tilde{u}_i = -\ln u_i$. Assim como na cópula Galambos, o parâmetro de dependência varia entre $[0, \infty)$, captando apenas dependência positiva entre as variáveis.

A cópula Tawn tem esse nome por ter sido encontrada no trabalho de Tawn (1988); ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 \exp \left\{ -\theta \frac{\log u_1 \log u_2}{\log(u_1 u_2)} \right\} \quad (4.2.3.3)$$

Nessa cópula, o parâmetro de dependência está entre $[0, 1]$, devendo ser ressaltado que quando θ é igual a zero, a cópula se torna independente. Uma característica peculiar dessa cópula é que ela não alcança o limite superior de Fréchet, ou seja, ela só é apropriada para captar dependência fraca.

A última cópula de valores extremos estimada é a *t-Extreme Value* (t-EV), que é baseada na cópula *t-student*. Essa cópula também é composta por dois parâmetros e foi derivada em Demarta e Mcneil (2007), até chegar à seguinte expressão:

$$C(u_1, u_2; \theta, v) = \exp \left(\log(u_1 u_2) \mathbf{A}_{\theta, v} \left(\frac{\log(u_1)}{\log(u_1 u_2)} \right) \right), \quad (4.2.3.4)$$

em que

$$A_{\theta,v}(w) = wt_{v+1}\left(\frac{\left(\frac{w}{1-w}\right)^{1/v} - \theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\sqrt{v+1}\right) + (1-w)t_{v+1}\left(\frac{\left(\frac{1-w}{w}\right)^{1/v} - \theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\sqrt{v+1}\right) \quad (4.2.3.5)$$

O parâmetro referente à dependência das variáveis encontra-se entre $[-1,1]$, entretanto ela só é capaz de mensurar dependência positiva. Essa cópula também não é capaz de indicar independência, e à medida que o parâmetro θ se aproxima de 1 ou -1 a cópula converge para o limite superior de Fréchet.

4.2.4 Outras Cópulas

Além das cópulas arquimedianas, elípticas e de valores extremos, são estimadas mais duas famílias de cópulas bastante conhecidas: Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) e Plackett. A cópula FGM foi proposta inicialmente em Morgenstern (1956) e segue a seguinte forma funcional:

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 \left(1 + \theta((1 - u_1)(1 - u_2))\right) \quad (4.2.4.1)$$

O parâmetro θ localiza-se entre $[-1,1]$, e é capaz de modelar tanto casos de dependência positiva quanto aqueles de dependência negativa. Quando θ se iguala a zero, as variáveis são independentes entre si. Essa cópula limita-se apenas a casos em que a dependência é fraca, ou seja, essa função não é apropriada quando se trabalha com variáveis fortemente associadas.

A família de cópulas Plackett, apresentada em Plackett (1965), pode ser escrita como:

$$C(u_1, u_2; \theta) = \frac{[1+(\theta-1)(u_1+u_2)] - \sqrt{[1+(\theta-1)(u_1+u_2)] - 4u_1u_2\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)} \quad (4.2.4.2)$$

Nesse caso $\theta \in (0, \infty)$, $\theta \neq 1$. Esta cópula é bem abrangente, pois pode modelar tanto a dependência positiva quanto a negativa. Além disso, essa função abrange os dois limites de Fréchet. Quanto θ se aproxima de 1, a função se aproxima do caso de independência. Esta cópula, por outro lado, limita-se apenas aos casos em que não há grande dependência nas caudas.

4.3 Medidas de Dependência

De acordo com Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), o coeficiente de correlação é uma forma efetiva de representar comovimentos entre variáveis que apresentam relação linear. Entretanto, ele é extremamente deficiente quando a relação é não linear, o que pode ser facilmente verificado no caso de uma variável z normalmente distribuída e z^2 . Utilizar a medida de correlação linear para estimar o comovimento entre os mercados na presença de relação não linear pode ser enganoso, pois ele pode não cobrir todo o alcance entre -1 e +1, mesmo quando os dois mercados são movidos pelo mesmo fator, portanto são perfeitamente dependentes.

Trabalhar com medidas de dependência que também são capazes de captar relações não lineares pode ser muito útil em áreas como gestão de risco. É comum a utilização de medidas de dependências não paramétricas como o *Rho* de Spearman e o *Tau* de Kendall. Essas medidas não dependem das distribuições das probabilidades marginais, portanto estão diretamente relacionadas com as cópulas.

Essas medidas de dependência, nas suas versões amostrais, são determinadas pelo conceito de concordância. Para isso, assume-se que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $x_i \leq x_j$ e $y_i \leq y_j$, ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$. Analogamente, eles serão discordantes se $x_i \leq x_j$ e $y_i > y_j$, ou então se $x_i > x_j$ e $y_i \leq y_j$. Alternativamente, é possível escrever essa condição da seguinte maneira: (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ e discordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq 0$.

Assumindo que $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ é uma amostra aleatória de n observações de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas, existirão $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i, y_i) e (x_j, y_j) de observações dessa amostra. A versão amostral do *Tau* de Kendall é definida por:

$$\tau = \frac{c-d}{c+d} = c - d / \binom{n}{2} \quad (4.3.1)$$

em que c é o número de pares concordantes e d é o número de pares discordantes. Equivalentemente, t é a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância.

Para encontrar a versão populacional do *Tau* de Kendall é preciso assumir que (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) são vetores aleatórios i.i.d, com distribuição conjunta H cada um. Logo:

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4.3.2)$$

As cópulas permitem calcular essa versão populacional do *Tau* de Kendall. De acordo com Nelsen (2006), basta assumir que C_1 e C_2 sejam as cópulas de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , respectivamente. Desta forma, $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ e $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Denomina-se Q a diferença entre as probabilidades de concordância e discordância, ou seja:

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4.3.3)$$

então:

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \quad (4.3.4)$$

Sendo assim, a versão populacional do *Tau de Kendall* para X e Y é dada por:

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (4.3.5)$$

No caso específico das cópulas arquimedianas, o cálculo dessa medida é mais simples, pois é feito diretamente por meio da geradora da cópula, ou seja:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (4.3.6)$$

O *Rho* de Spearman normalmente é calculado pela correlação linear de postos, no entanto é possível calcular sua versão populacional de outra forma. Nelsen (2006) afirma que para obter essa medida assume-se que (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) são três vetores aleatórios independentes, com distribuição conjunta comum H (cujas margens são FeG) e cópula C . A versão populacional $\rho_{X,Y}$ do *Rho* de Spearman é definida como proporcional à probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para os dois vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_3) , isto é, um par de vetores com a mesma margem, porém um vetor possui função de

distribuição H , enquanto os componentes do outro vetor são independentes (o par (X_3, Y_2) também pode ser usado):

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \quad (4.3.7)$$

Observa-se que a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) é $H(x, y)$, enquanto a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_3) é $\Pi(x, y)$. Portanto, a versão populacional do Rho de Spearman é dada por:

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= \rho_C = 3Q(C, \Pi), \\ &= 12 \iint_{I^2} uv \, dC(u, v) - 3, \quad (4.3.8) \\ &= 12 \iint_{I^2} C(u, v) \, dudv - 3. \end{aligned}$$

De acordo com Trivedi e Zimmer (2005), em alguns casos é interessante saber a concordância entre valores extremos de variáveis aleatórias. A medida de dependência relacionada às caudas superior e inferior é essencialmente relacionada com a probabilidade condicional de que algum índice exceda algum valor, dado que outro índice excedeu outro valor.

A medida de dependência de caudas (*Tail Index*) pode ser definida em termos da função de sobrevivência conjunta $S(u_1, u_2)$ para variáveis aleatórias uniformes u_1 e u_2 . Denominam-se λ_L e λ_U as medidas de dependência nas caudas inferior e superior, respectivamente, em que:

$$\lambda_L = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{C(v, v)}{v}, \quad (4.3.9)$$

$$\lambda_U = \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{S(v, v)}{1-v}. \quad (4.3.10)$$

em que $S(v, v) = \Pr[U_1 > v, U_2 > v]$ representa a função de sobrevivência conjunta, em que $U_1 = F_1^{-1}(X)$, $U_2 = F_2^{-1}(Y)$. O índice de dependência na cauda superior pode ser interpretado como a probabilidade condicional $\Pr[U_1 > v | U_2 > v]$ ou $\Pr[U_2 > v | U_1 > v]$. Já o índice de dependência na cauda inferior representa a probabilidade $\Pr[U_1 < v | U_2 < v]$ ou $\Pr[U_2 < v | U_1 < v]$.

4.4 Teste de Independência de Genest e Rémillard (2004)

Ao investigar a relação de dependência entre variáveis é importante considerar a hipótese de que elas sejam independentes entre si. Genest e Rémillard (2004) propõem um teste com base na cópula empírica. A estatística de teste é definida por:

$$T_{A,n}^S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-p+1} \sum_{k=1}^{n-p+1} \prod_{j \in A} \left\{ \frac{2n+1}{6n} + \frac{R_{i+j-1}(R_{i+j-1}-1)}{2n(n+1)} + \frac{R_{k+j-1}(R_{k+j-1}-1)}{2n(n+1)} - \frac{\max(R_{i+j-1}, R_{k+j-1})}{n+1} \right\} \quad (4.4.1)$$

Sob a hipótese nula de independência, a distribuição limite de $T_{A,n}^S$ é a mesma de $\xi_{|A|}$, em que

$$\xi_k = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k} \frac{1}{\pi^{2k} (i_1, \dots, i_k)^2} Z_{i_1, \dots, i_k}^2, \quad (4.4.2)$$

em que os $Z_{i_1, \dots, i_k}$ são variáveis aleatórias independentes $N(0,1)$. Os valores críticos desse teste são encontrados na Tabela 1 de Genest e Rémillard (2004).

4.5 Testes de Dependência de Valores Extremos

Uma importante classe de cópulas é aquela que considera a existência de dependência de valores extremos. Quando isto ocorre, é comum que as variáveis sejam mais dependentes quando as observações são muito afastadas da média.

Neste trabalho foram realizados dois diferentes testes para verificar se as variáveis analisadas possuíam dependência que poderia ser caracterizada como de valores extremos. O primeiro teste é baseado na cópula empírica e avalia a hipótese nula de que as variáveis são dependentes de valores extremos. Kojadinovic, Segers e Yan (2011) propõem a seguinte estatística de teste:

$$T_{r,n} = \int_{[0,1]^d} \{Q_{r,n}(\mathbf{u})\}^2 dC_n(\mathbf{u}) \quad (4.5.1)$$

em que C_n é a cópula empírica, d é o número de variáveis, n é o número de observações, $r \geq 0$ e

$$\mathbb{Q}_{r,n}(\mathbf{u}) = \sqrt{n}[\{C_n(\mathbf{u}^{1/r})\}^r - C_n(\mathbf{u})] \quad (4.5.2)$$

Com o intuito de aumentar a sensibilidade do teste, os autores sugerem a utilização da estatística de teste com a seguinte forma⁶:

$$T_{r_i, \dots, r_p, n} = \sum_i^p T_{r_i, n} \quad (4.5.3)$$

O segundo teste, encontrado em Ben Ghorbal, Nešlehová e Genest (2009), também avalia a hipótese nula de que as variáveis possuem dependência de valores extremos e a estatística de teste é a seguinte:

$$S_n = -1 + \frac{8}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} I_{ij} - \frac{9}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i \neq j \neq k} I_{ij} I_{kj} \quad (4.5.4)$$

em que $I_{ij} = 1(X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j)$ e $I_{kj} = 1(X_k \leq X_j, Y_k \leq Y_j)$ para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

De acordo com Ben Ghorbal, Nešlehová e Genest (2009):

S_n is a U-statistic which is centred under H_0 . Furthermore, $\sqrt{n}\{S_n - E[S_n]\}$ converges weakly to a Normal random variable as $n \rightarrow \infty$. The finite and large-sample variance of S_n are given next under any copula C , along with its asymptotic distribution (BEN GHORBAL; NEŠLEHOVÁ; GENEST, 2009).

4.6 Teste de Goodness-of-fit

Um grande problema em trabalhar com a metodologia de cópulas é o perigo da má especificação da cópula. Apesar da existência de critérios de seleção entre diferentes modelos, é importante a realização de um teste estatístico para comprovar se a função cópula escolhida se ajusta bem às variáveis analisadas.

Genest, Rémillard e Beaudoin (2009) propõem um teste em que são comparadas as cópulas paramétrica e empírica. É testada a hipótese nula de que a estrutura de dependência

⁶ Empiricamente, Kojadinovic, Segers e Yan (2011) encontraram que é razoável utilizar $i = 3$ e $p = 5$, portanto este teste foi estimado com este formato. O cálculo dos p-valores também pode ser encontrado neste trabalho.

da distribuição multivariada é bem representada por uma família paramétrica específica de cópulas. A estatística de teste é definida por:

$$S_n = \int_{[0,1]^d} \mathbb{C}_n(\mathbf{u}) dC_n(\mathbf{u}) \quad (4.6.1)$$

sendo

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n}) \quad (4.6.2)$$

em que C_n é a cópula empírica de Deheuvels (1979) e C_{θ_n} é a cópula paramétrica.

4.7 Modelos de variância condicional univariados

Quando se trabalha com séries temporais é relativamente comum ajustar modelos de regressão univariados com base nas informações passadas da própria variável. No caso de dados financeiros, principalmente retornos, utilizam-se modelos que visam captar a volatilidade das séries, para obter uma medida de risco que o produto financeiro possui.

Na literatura de cópulas, como em Patton (2002) e Santos (2010), é comum o ajuste de modelos da família GARCH às séries, com a finalidade de extrair os resíduos das regressões e utilizá-los para estimar as cópulas em um segundo momento. Uma justificativa para esta abordagem é o fato de esses resíduos serem puramente aleatórios, pois as estimações realizadas com as séries originais podem ser viesadas, devido à estrutura de variância condicional.

O objetivo deste estudo foi estimar as cópulas tanto com as séries originais, quanto com as séries de resíduos. Para isto foi necessário, em primeiro lugar, definir os modelos de variância condicional utilizados.

4.7.1 Modelo GARCH

O modelo GARCH (*General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) foi introduzido por Bollerslev (1986) como uma generalização do modelo ARCH de Engle (1982). Assim como nos modelos autorregressivos (Ar(p)), a incorporação de termos de médias móveis traz maior parcimônia ao modelo para os modelos ARCH, ou seja, um modelo GARCH pode ser usado para estimar a volatilidade com menos parâmetros.

Um modelo GARCH(p, q) é definido por:

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (4.7.1.1)$$

sendo

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (4.7.1.2)$$

em que ε_t são variáveis aleatórias i.i.d., com média zero, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, q-1$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p-1$, $\alpha_q > 0$, $\beta_p > 0$, $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1$, $\gamma = \max(p, q)$.

4.7.2 Modelo IGARCH

O modelo IGARCH (*Integrated General Autorregressive Conditional Heteroscedasticity*) é utilizado quando $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) = 1$, $\gamma = \max(p, q)$, ou seja, esse polinômio possui raiz unitária. Sendo assim, os choques têm efeitos permanentes sobre a variância condicional.

4.7.3 Modelo EGARCH

Nelson (1991) desenvolveu o modelo EGARCH (*Exponential General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), pois os modelos ARCH e GARCH possuíam algumas limitações, principalmente porque

os modelos ARCH e GARCH tratam simetricamente os retornos, pois a volatilidade é uma função quadrática dos mesmos. Mas também é sabido que a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, tendendo a ser maior para retornos negativos (MORETTIN, 2008).

Como nos modelos anteriores, $r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$, em que ε_t é i.i.d. com média zero e variância unitária. O modelo EGARCH para a variância condicional de r_t é descrito por:

$$\log h_t = \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \cdot \left\{ \left| \varepsilon_{t-j} \right| - E \left| \varepsilon_{t-j} \right| + \tau \varepsilon_{t-j} \right\} \quad (4.7.3.1)$$

O modelo implica que se $\pi_j > 0$, um desvio de $|\varepsilon_{t-j}|$ de seu valor esperado resulta em variância de r_t maior do que no caso contrário. Já o parâmetro τ diz respeito à assimetria. Pode-se afirmar que se $\tau = 0$, a volatilidade responde de forma simétrica a choques positivos e negativos. Se $\tau < 0$, então os choques negativos tendem a ter maior efeito sobre a volatilidade do que os positivos. Pagan e Schwert (1991) e Engle e Ng (1991) constataram que os choques negativos tendem a ter maior efeito sobre a volatilidade do que choques positivos.

4.7.4 Modelo GJR

Glosten, Jagannathan e Runkle (1993) desenvolveram um modelo que visa captar o efeito alavancagem (*leverage*). O modelo pode ser descrito como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.7.4.1)$$

em que $S_{t-i}^- = 0$ se $\varepsilon_t > 0$ e $S_{t-i}^- = 1$ se $\varepsilon_t < 0$. Desta forma, os impactos positivos e negativos podem tomar diferentes magnitudes.

50 MERCADO FUTURO DE DÓLAR DA BM&FBOVESPA

O Contrato Futuro de Dólar Comercial começou a ser negociado no dia 25 de abril de 1990. Esse mercado permite que qualquer tipo de agente tenha acesso ao mercado de câmbio, pois o mercado à vista é restrito a bancos com carteira de câmbio. No mês de dezembro de 2012, por exemplo, o mercado futuro de dólar teve um volume de negociações de mais de 319 bilhões de dólares, enquanto no mercado de dólar à vista o volume foi de 104 bilhões, ou seja, o mercado futuro movimentou praticamente três vezes mais dinheiro do que o mercado à vista.

A importância do mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA não se restringe à economia brasileira. Este contrato foi o sexto mais negociado entre os contratos futuros e de opções de câmbio em 2011, como pode ser observado na Tabela 2.

Tabela 2 – Os 20 contratos futuros e de opções de câmbio mais negociados em 2011

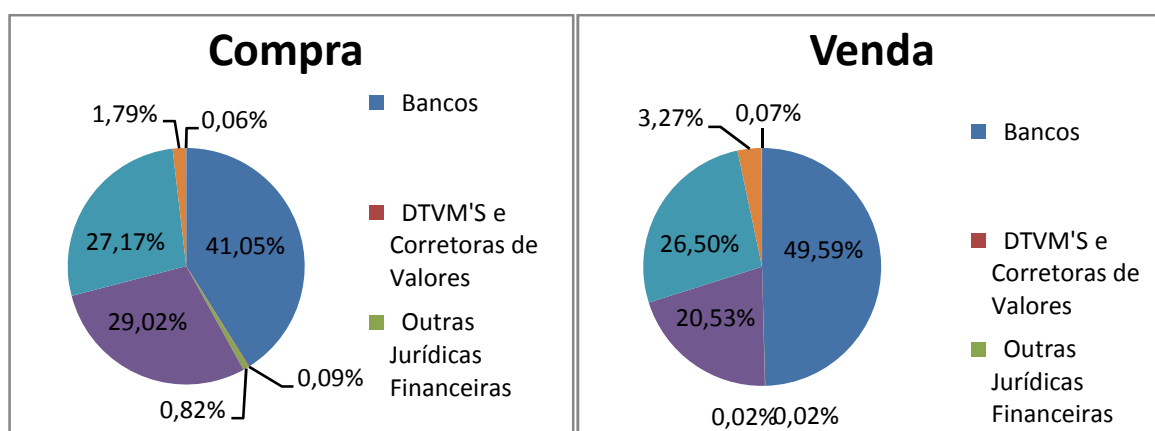
Posição	Contrato	Tamanho do Contrato	2010	2011	Variação Percentual (%)
1	Futuro de Dólar Americano/Rúpia Indiana, MCX-SX	1,000 USD	821,524,927	807,559,846	-1,7
2	Futuro de Dólar Americano/Rúpia Indiana, NSE India	1,000 USD	699,042,420	697,825,411	-0,2
3	Futuro de Dólar Americano/Rúpia Indiana, USE*	1,000 USD	124,766,134	340,576,642	173,0
4	Opção de Dólar Americano/Rúpia Indiana, NSE India**	1,000 USD	6,277,165	252,807,126	3.927,4
5	Futuro de Dólar Americano/Rublo Russo, RTS	1,000 USD	81,122,195	206,820,695	154,9
6	Futuro de Dólar Americano, BM&F	50,000 USD	82,453,621	86,167,955	4,5
7	Futuro de Euro FX, CME	125,000 Euro	86,232,358	84,236,825	-2,3
8	Futuro de Dólar Americano, KRX	10,000 USD	64,256,678	70,212,467	9,3
9	Futuro de Dólar Americano, Rofex	1,000 USD	61,729,396	54,373,381	-11,9
10	Futuro de Euro/Dólar Americano, RTS	1,000 Euro	39,476,420	45,657,240	15,7
11	Futuro de Dólar Australiano/Yen Japonês, TFX	10,000 AUD	34,272,436	41,589,199	21,3
12	Futuro de Dólar Americano/Yen Japonês, CME	10,000 USD	27,551,634	31,441,164	14,1
13	Futuro de Dólar Australiano, CME	100,000 AUD	25,903,355	30,751,538	18,7
14	Futuro de Euro/Rúpia Indiana, MCX-SX	1,000 Euro	46,411,303	29,403,759	-36,6
15	Futuro de Libra Britânica, CME	62,500 GBP	30,220,239	29,028,755	-3,9
16	Futuro de Yen Japonês, CME	12,500,000 Yen	31,862,793	28,369,147	-11,0
17	Futuro de Euro/Yen Japonês, TFX	10,000 Euro	19,921,565	26,769,174	34,4
18	Futuro de Dólar Canadense, CME	100,000 CAD	22,083,807	22,416,680	1,5
19	Futuro de Rolagem de Dólar, BM&F	50,000 USD	19,223,570	20,145,632	4,8
20	Futuro de Euro/Rúpia Indiana, NSE India	1,000 Euro	17,326,787	18,065,186	4,3

Fonte: FIA (2012).

Constata-se na Tabela 2 que apesar de o contrato futuro de dólar da BM&F ser apenas o sexto mais negociado, o tamanho do contrato é de US\$ 50.000, enquanto o dos cinco primeiros é de apenas 1.000 dólares, ou seja, o volume de dólares negociado pelos contratos da BM&FBOVESPA é superior ao dos cinco primeiros contratos.

Além de possuir um tamanho de contrato de US\$ 50,000, o contrato futuro de dólar da BM&FBOVESPA é caracterizado por uma cotação de reais por US\$ 1.000,00 e é negociado até o dia útil anterior à data de vencimento. Outra característica importante desse contrato é que ele é negociado para todos os meses do ano, o que lhe garante mais liquidez. Assim como em alguns contratos futuros de commodities, o contrato futuro de dólar é liquidado apenas financeiramente, o que permite que até mesmo pessoas físicas possam participar desse mercado.

A Figura 2 revela a participação de cada tipo de investidor no mercado de dólar futuro, tanto para as posições de compra quanto de venda. Em ambos os casos, o maior participante são os bancos, que chegam a representar quase metade de todos os investidores que assumem a posição de venda.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 2 – Participação no mercado futuro de dólar por tipo de agente em 2012.

Já os investidores institucionais nacionais representam o segundo maior comprador e o terceiro maior vendedor nesse tipo de contrato, enquanto os investidores não residentes também assumem um grande papel no mercado de dólar futuro, pois representam aproximadamente 27% das posições de compra e 26,5% das posições de venda.

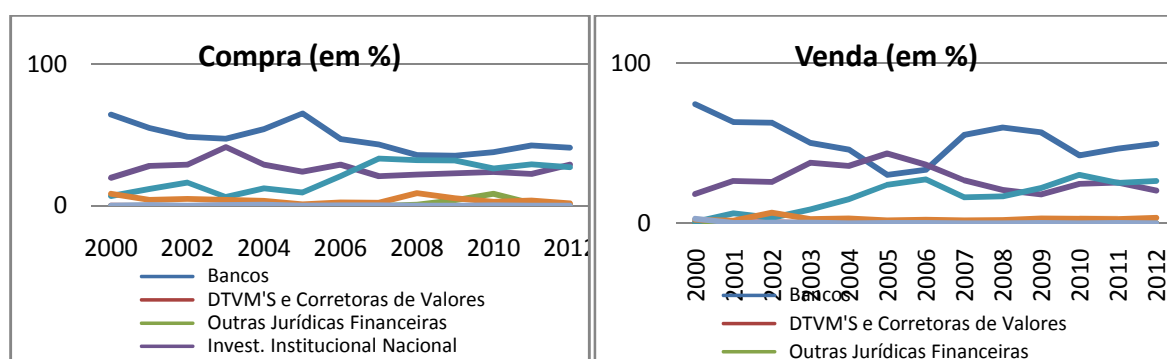
Já os demais tipos de agentes (DTVM's e Corretoras de Valores; Outras Jurídicas Financeiras; Pessoa Jurídica Não Financeira; e Pessoa Física) não chegam a representar nem

4% em conjunto de ambas as posições, ou seja, o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA parece ser dominado pelos “grandes jogadores” do mercado financeiro.

A Figura 3 evidencia que os bancos quase sempre foram os maiores participantes no mercado futuro de dólar, apesar da tendência de queda nessa participação. Esta elevada participação é explicada pelo fato de que

Na medida em que os demais agentes não podem carregar posições em câmbio pronto, estes tendem a recorrer aos bancos para adquirir estes produtos como forma de sintetizar estas operações. Os bancos atuam como contraparte na maior parte das operações deste mercado. Na medida em que o mercado de câmbio futuro se mostra mais líquido que o à vista, os bancos tendem a repassar os recursos adquiridos no mercado primário no primeiro vencimento do dólar futuro, em detrimento do mercado à vista (VENTURA; GARCIA, 2012)

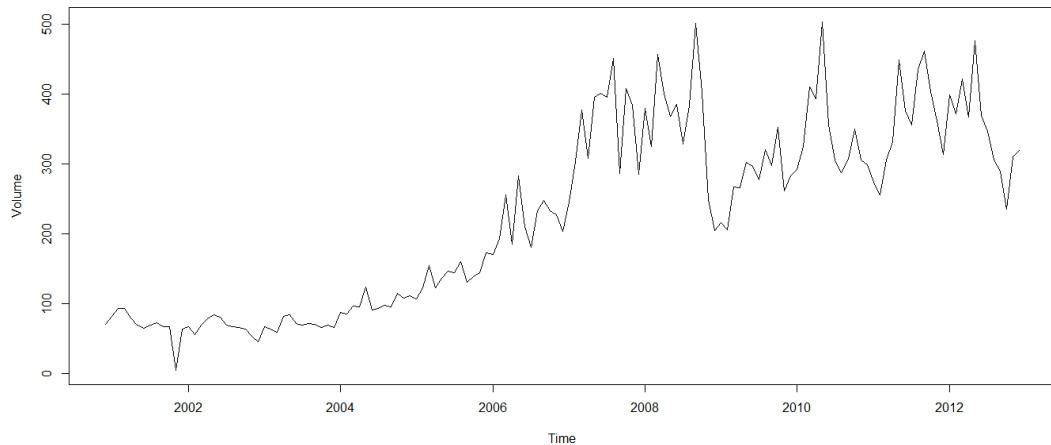
Outro aspecto interessante que pode ser destacado na Figura 3 é o crescimento na participação de Investidores Institucionais Estrangeiros. Essa tendência pode ser explicada pela relativa estabilidade macroeconômica vivenciada no período em questão, o que refletiu em maior confiabilidade da economia e do mercado de capitais brasileiros.



Fonte: Elaboração própria a partir de dados da BM&BOVESPA.

Figura 3 – Evolução da participação por tipo de agente no mercado futuro de dólar.

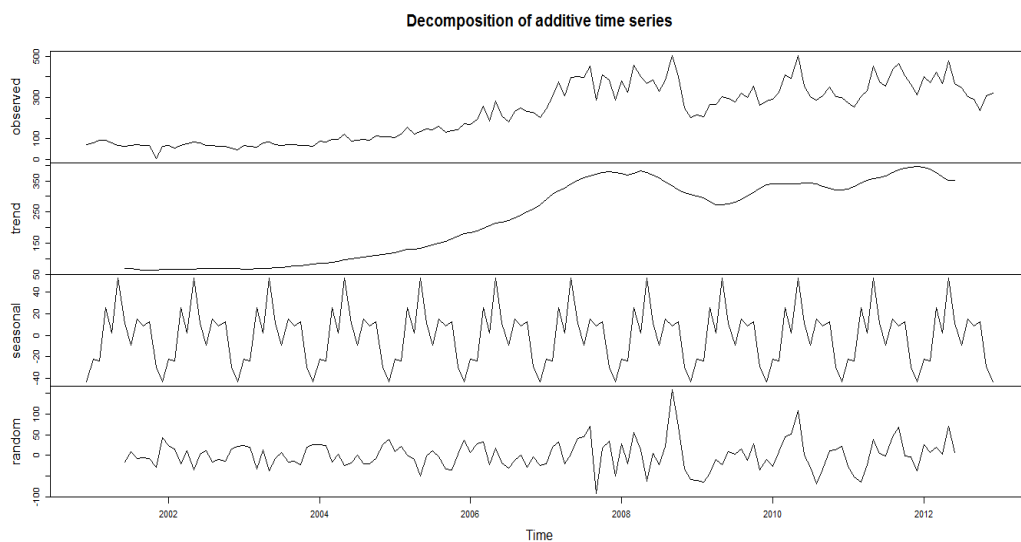
Na Figura 4 constata-se que o volume transacionado no mercado de dólar futuro da BM&FBOVESPA apresentou evolução significativa durante esse período, uma vez que no final de 2000 negociava-se cerca de 100 bilhões de dólares e ao final de 2012 negocia-se mais de 300 bilhões, ou seja, um aumento próximo de 200%. Uma das possíveis razões para o crescimento é o aumento da participação de investidores institucionais estrangeiros, que pode ser facilmente observada na Figura 3.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 4 – Evolução do volume mensal transacionado no mercado de dólar futuro (em bilhões de dólares).

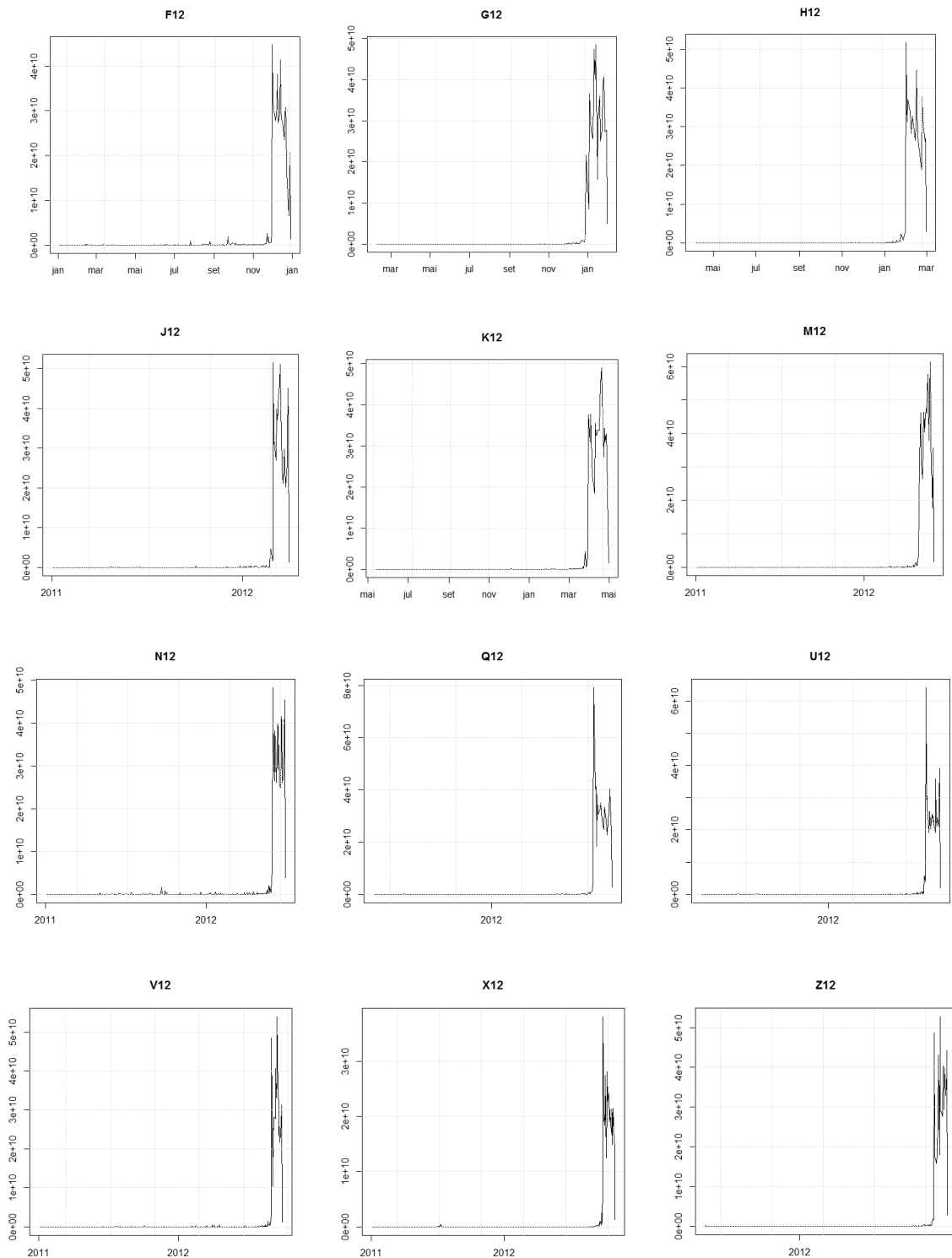
De acordo com a Figura 5, entre 2004 e 2008 houve nítida tendência de crescimento no volume transacionado pelo mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA. Ao decompor a série identifica-se a presença de sazonalidade evidente no volume de transações, o que pode ser explicado pela preferência dos agentes por algum vencimento em específico.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 5 – Decomposição da série mensal do volume transacionado por médias móveis.

Na Figura 6 nota-se uma característica interessante a respeito do mercado futuro de dólar: a negociação predominante do primeiro vencimento em aberto. Independentemente do contrato analisado, é possível verificar que o volume transacionado só se torna relevante no período de proximidade do vencimento.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 6 – Volume negociado dos contratos futuros de dólar com vencimento em 2012.

Nos demais dias, quando o contrato não está próximo do vencimento, é comum que não haja nenhuma negociação. É importante ressaltar que apesar de o volume negociado nesse período ser relativamente pequeno, ele não é desprezível, pois se trata de negociações na

ordem de milhões de dólares em grande parte dos casos, o que reflete a grande importância desse mercado, pois até nos seus dias de menor volume movimenta uma quantia financeira relativamente elevada.

Dada a grande movimentação financeira que ocorre no mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA, é comum estudar a relação que este tem com o mercado de dólar a vista. De acordo com Ventura e Garcia (2012)

As conclusões são que o mercado de câmbio futuro é mais líquido e lidera a formação da taxa de câmbio sobre o mercado à vista, fenômeno contrário ao que ocorre nas principais moedas do mundo. Assim, mostra-se que o mercado futuro é o locus de formação da cotação, sendo esta então transmitida por arbitragem ao mercado à vista (VENTURA; GARCIA, 2012).

Portanto, o mercado futuro de dólar não influencia somente aqueles agentes que dele participam, mas também todos os agentes que dependem da cotação do dólar a vista, incluindo importadores, exportadores e até mesmo consumidores de produtos importados. Dessa forma, estudar o mercado futuro de dólar não é um problema apenas de finanças, pois ele é importante para a economia brasileira como um todo.

6 RESULTADOS

Este capítulo é dedicado à investigação empírica da relação de dependência entre o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA e o índice S&P 500. Antes de realizar a estimação das cópulas, faz-se a análise univariada a respeito da estacionariedade e normalidade das séries utilizadas.

Junto com a estimação das cópulas também são feitos testes de independência, dependência de valores extremos e *goodness-of-fit* baseados na teoria de cópulas. Por meio de dois critérios de seleção, é escolhida a cópula que melhor representa a relação de dependência entre as variáveis, para que sejam calculadas as medidas de dependência.

Por fim, a estimação e os testes são repetidos para o caso em que se utilizam resíduos de regressões univariadas como variáveis de entradas, com o objetivo de comparação com os resultados iniciais.

6.1 Descrição dos Dados

Os dados foram obtidos por meio do Sistema de Recuperação de Informações da BMF&BOVESPA e pelo S&P Dow Jones Indices. A série utilizada como indicador da economia norte-americana é a S&P 500, que é um índice composto pelas quinhentas empresas mais importantes do mercado de capitais daquele país. Os dados coletados são de frequência diária e iniciam em 3/1/2000 e terminam em 7/12/2012.

Neste estudo foram consideradas duas diferentes abordagens para construir a série que representa o mercado futuro de dólar. A primeira delas é construída com os preços de ajuste do primeiro vencimento em aberto, enquanto a segunda delas considera apenas a cotação de um único contrato futuro.

Durante esse período a série apresenta dois momentos de baixa evidentes. O primeiro deles ocorre devido ao ataque de 11 de setembro, entre outros fatores, sendo que o índice só começou a se recuperar em meados de 2003. O segundo momento de grande perda foi durante a crise do *subprime*, considerada uma das piores crises do mercado financeiro de toda a história.

Os maiores momentos de baixa da série em nível também foram acompanhados por elevada volatilidade, o que reflete a grande incerteza vivida pelos investidores durante crises (Figuras 7 e 8). Observa-se também o período de baixa volatilidade que ocorre entre 2004 e 2007, justamente quando a economia norte-americana passava por um momento de recuperação e otimismo.



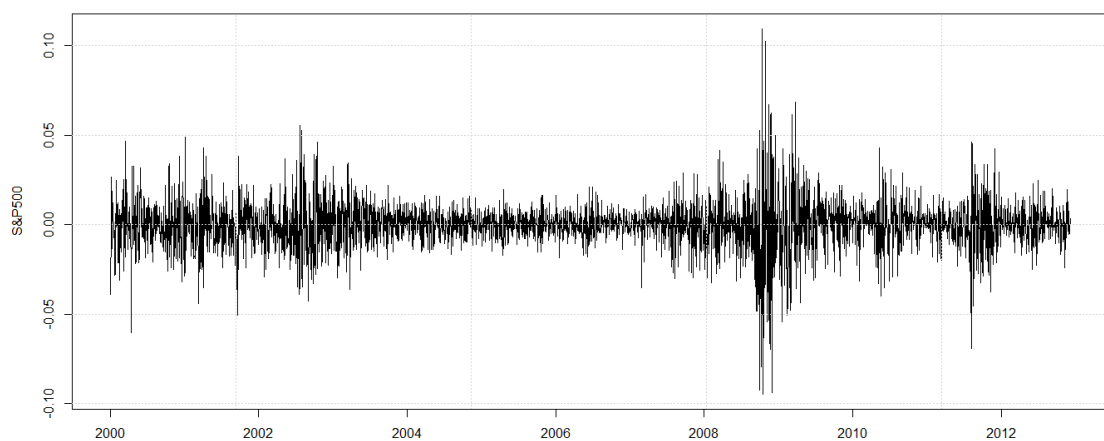
Fonte: elaboração própria a partir de dados da *S&P Dow Jones Indices*.

Figura 7 – Índice S&P 500.

Tabela 3 – Estatísticas Descritivas do índice S&P 500

S&P 500	
Min.	676,5300
1stQu.	1.093,1400
Median	1.209,5700
Mean	1.203,5000
3rdQu.	1.347,3200
Max.	1.565,1500
s.d.	184,3937

Fonte: elaboração própria a partir de dados da *S&P Dow Jones Indices*.



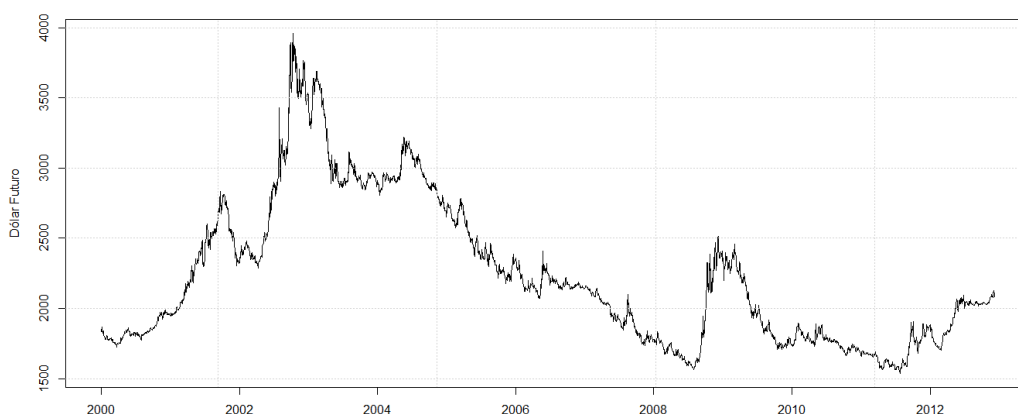
Fonte: elaboração própria a partir de dados da *S&P Dow Jones Indices*.

Figura 8 – Retorno do Índice S&P 500 (em%).

Tabela 4 – Estatísticas Descritivas dos retornos do índice S&P 500 (em%)

Retornos do S&P 500	
Min.	-0,09470
1st Qu.	-0,00607
Median	0,00052
Mean	-0,00001
3rd Qu.	0,00621
Max.	0,10957
s.d.	0,01353

Fonte: elaboração própria a partir de dados da *S&P Dow Jones Indices*.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 9 – Cotação do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro.

Tabela 5 – Estatísticas descritivas da série do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro

Dólar Futuro	
Min.	1.536,1020
1st Qu.	1.804,7230
Median	2.113,7740
Mean	2.232,8890
3rd Qu.	2.530,6420
Max.	3.961,7850
s.d.	518,2222

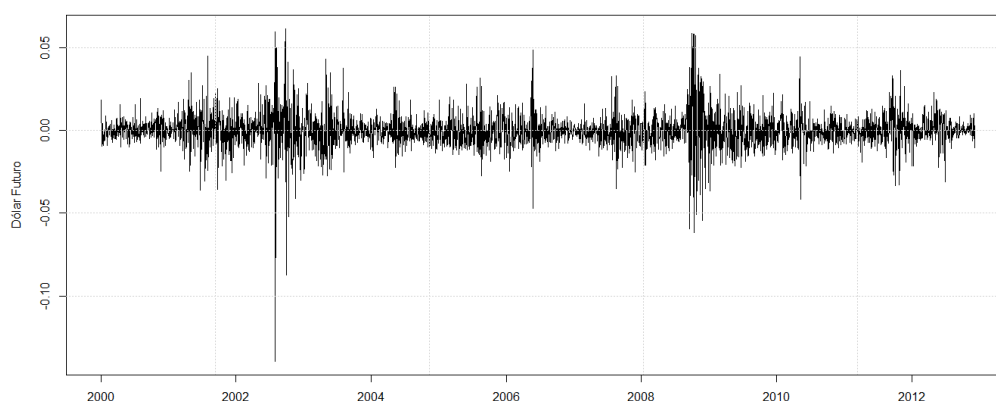
Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Dentro desse período negociam-se contratos futuros de dólar relativos a todos os meses do ano, ou seja, ao contrário de outros mercados de futuros o primeiro vencimento em aberto está sempre a menos de um mês de distância do final do contrato futuro, o que significa

que essa série capta exatamente aquele período quando os contratos são negociados com elevada liquidez.

O problema de trabalhar com esse tipo de série é que ela é construída com “pedaços” de várias séries distintas, que apesar da forte dependência entre si apresentam diferentes cotações no mesmo dia. Além disso, no momento em que o contrato com primeiro vencimento em aberto torna-se diferente, a quantidade de dias úteis remanescentes para o fim do contrato sofre um significativo salto.

É interessante ressaltar que os picos mais evidentes da cotação do dólar futuro coincidem com os momentos de baixa do índice S&P 500. Vale lembrar que a cotação do contrato futuro da BM&FBOVESPA está na escala de reais, ou seja, basta dividir a cotação por 1.000 para obter a taxa de câmbio apontada pelo mercado futuro. Sendo assim, durante o período analisado, o dólar futuro teve cotação mínima de R\$ 1,536 e máxima de R\$ 3,961, indicando uma grande variabilidade da série.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

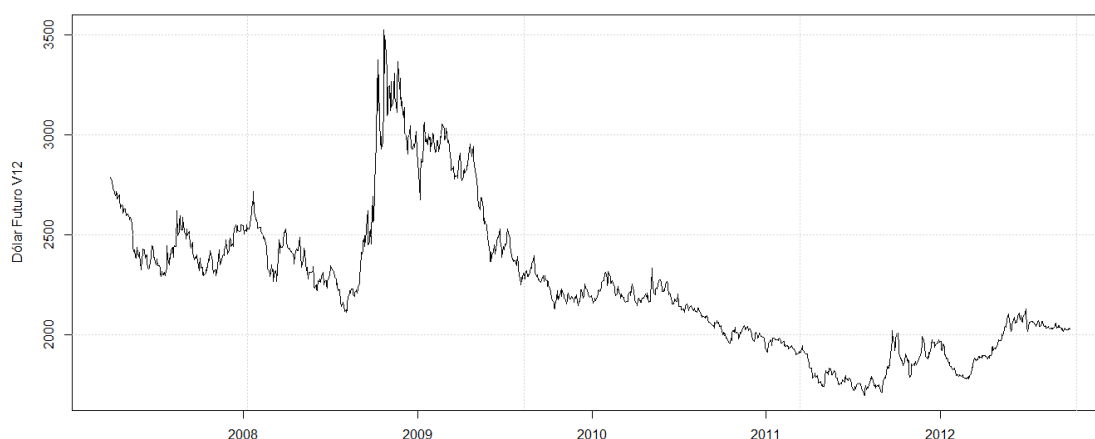
Figura 10 – Retornos do primeiro vencimento em aberto do dólar Futuro (em %).

Tabela 6 – Estatísticas descritivas dos retornos do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro (em %)

Retornos Dólar Futuro	
Min.	-0,13956
1st Qu.	-0,00516
Median	-0,00030
Mean	0,00004
3rd Qu.	0,00476
Max.	0,06157
s.d.	0,01087

Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Observa-se que os momentos de grande volatilidade do mercado de dólar futuro de dólar estiveram associados com os picos mais evidentes de sua cotação. Ao comparar a Figura 8 com a Figura 10, nota-se que os momentos de grande volatilidade acontecem simultaneamente nas duas séries em questão, entretanto eles são de diferentes magnitudes, ou seja, enquanto o período de maior volatilidade do S&P 500 ocorre durante a crise do *subprime*, o dólar futuro é mais volátil entre 2002 e 2003. Essa diferença possivelmente decorre do ambiente econômico interno de cada economia durante esses períodos. A economia brasileira no início do período era mais vulnerável e exposta a crises internacionais, no entanto durante a crise do *subprime* o Brasil já estava mais blindado quanto a esse tipo de crises. Os Estados Unidos, por outro lado, estavam no epicentro da crise de 2008 e, por isso, ficaram completamente expostos aos seus efeitos negativos.



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 11 – Cotação do contrato de dólar futuro V12.

Tabela 7– Estatísticas descritivas do contrato de dólar futuro V12 (em %)

Dólar Futuro V12	
Min.	1.697,777
1st Qu.	1.985.448
Median	2206.171
Mean	2248.957
3rd Qu.	2425.003
Max.	3523.918
s.d.	349.0097

Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

A série de contrato futuro de dólar V12 baseia-se no contrato que tem vencimento em outubro de 2012 e começou a ser negociado em 30/3/2007. A Figura 11 também evidencia um pico na cotação durante a crise do *subprime*. A série apresenta grande variabilidade, pois chegou a ser cotada em R\$3,523 no máximo e R\$1,697 no mínimo, em um período de tempo relativamente menor.

A utilização desse tipo de série também é passível de críticas. Este contrato futuro, por exemplo, só começa a ser cotado de acordo com as transações ocorridas um mês antes do vencimento, e nos demais meses a cotação de ajuste é definida pela seguinte fórmula:

$$PA_{dol,t}^n = Ptax_{t-1} \left(\frac{100000}{PA_{DI_t}^n} \right) / \left(\frac{100000}{PA_{DDI_t}^n} \right) \quad (6.1.1)$$

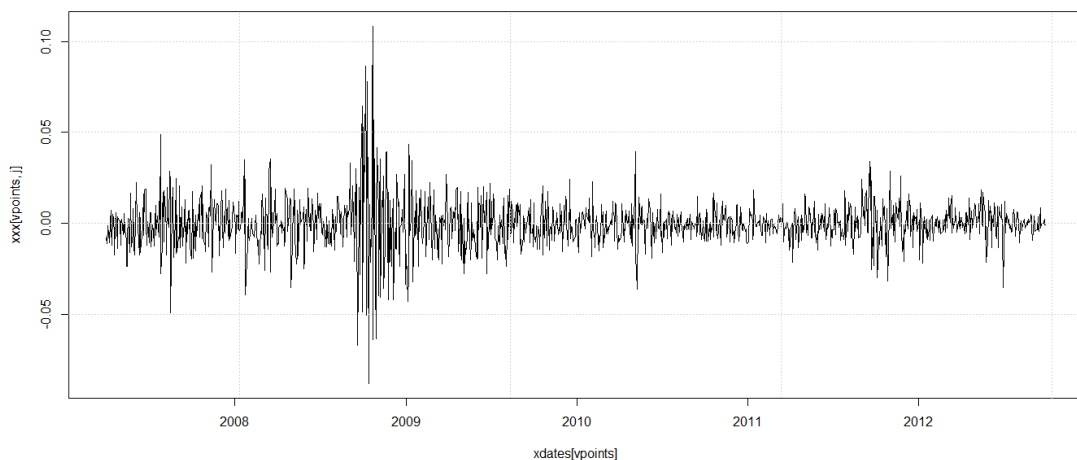
em que

$PA_{dol,t}^n$ = preço de ajuste do contrato futuro de dólar para o e -nésimo vencimento, na data “t” (arredondado na 3ª casa decimal);

$PA_{DI_t}^n$ = preço de ajuste do contrato futuro de DI, expresso em PU, para o e -nésimo vencimento, na data “t” (arredondado na 2ª casa decimal);

$PA_{DDI_t}^n$ = preço de ajuste do contrato futuro de DDI, expresso em PU, para o e -nésimo vencimento, na data “t” (arredondado na 2ª casa decimal); e

$Ptax_{t-1}$ = Ptax800 cotação de venda, divulgada pelo BACEN, do dia anterior à data de cálculo (com até quatro casas decimais).



Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Figura 12 – Retornos do primeiro do dólar futuro V12 (em %).

Tabela 8– Estatísticas descritivas do retorno de dólar futuro V12 (em %)

Retornos Dólar Futuro V12	
Min.	-0,08813
1st Qu.	-0,00643
Median	-0,00048
Mean	-0,00023
3rd Qu.	0,00563
Max.	0,10842
s.d.	0,01327

Fonte: elaboração própria a partir de dados da BM&FBOVESPA.

Assim como no caso das demais séries, o período de maior volatilidade coincide com o período de maior alta da série de cotações relacionada com a última grande crise financeira global. Aparentemente, o mercado de dólar futuro parece ser uma boa opção para quem gosta de especular em momentos tanto de crise americana, quanto de crise brasileira.

6.2 Testes de Raiz Unitária e Normalidade

São realizados os testes Dickey-Fuller Aumentado (ADF), Phillips-Perron (PP) e Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin para verificar se as séries possuem raiz unitária. Para os testes ADF e PP, a hipótese nula é aquela em que a série possui raiz unitária, enquanto no teste KPSS a hipótese nula é que a série é estacionária.

Todas as séries em nível não rejeitam a hipótese nula em 10% de significância para os testes ADF e PP, enquanto a hipótese de estacionariedade é rejeitada em 1%. (Tabela 9). As séries de retornos, por outro lado, rejeitam a hipótese nula de raiz unitária em 1% de significância. A estacionariedade não é rejeitada em nenhuma das séries de retornos, considerando o nível de confiança de 10%. Desta forma, as séries de retornos não aparentam problemas para a estimação das cópulas.

A Figura 13 mostra que as séries possuem elevada concentração ao redor da média, refletindo a grande curtose que esse tipo de série possui. Nenhuma das séries apresentou simetria, sendo que os retornos do S&P 500 e dólar futuro são negativamente assimétricos e os retornos do dólar futuro V12 possuem assimetria positiva. Considerando a elevada curtose e assimetria das séries, o teste de Jarque-Bera rejeita a hipótese nula de normalidade das distribuições com um grau de significância próximo a zero.

A abordagem de cópulas é bastante útil para trabalhar com esse tipo de série, pois não faz suposição nenhuma quanto à forma da função de distribuição de probabilidade das séries. Consequentemente, os resultados das medidas de dependência não são enviesados.

Tabela 9 – Testes de raiz unitária

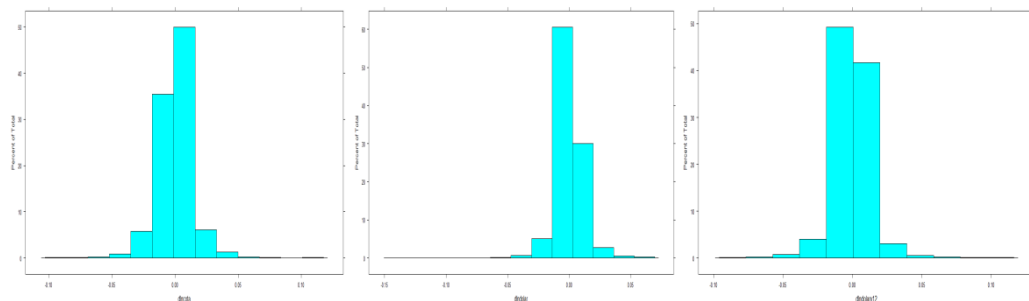
Séries	ADF		PP		KPSS	
	Estatística	Defasagens	Estatística	Defasagens	Estatística	Defasagens
S&P500	-2.1209	14	-8.8271	9	1.5529 ***	13
Dólar Futuro	-2.2639	14	-6.7911	9	9.6313 ***	13
Dólar Futuro V12	-2.0231	11	-10.9058	7	9.1***	8
Retornos do S&P 500	-15.3526 ***	14	-3286.05 ***	9	0.1433	13
Retornos Dólar Futuro	-13.6323 ***	14	-2950.687 ***	9	0.2182	13
Retornos Dólar Futuro V12	-10.5697 ***	11	-1231.142 ***	7	0.0771	8

* Rejeita a hipótese nula em 10% de significância.

** Rejeita a hipótese nula em 5% de significância.

*** Rejeita a hipótese nula em 1% de significância.

Fonte: elaboração própria.



S&P 500

Dólar Futuro

Dólar Futuro V12

Fonte: elaboração própria.

Figura 13 – Histogramas dos retornos.

Tabela 10– Normalidadedas séries

Séries	Assimetria	Curtose	Teste Jarque-Bera
Retornos do S&P 500	-0,1586162	10.30882	15236,37
Retornos Dólar Futuro	-0,3830103	17.0957	51891,42
Retornos Dólar Futuro V12	0,5890062	13.15318	13368,48

Fonte: elaboração própria.

6.3 Estimação das Cópulas

Dado que o Teorema de Sklar prova que a distribuição multivariada de duas ou mais variáveis aleatórias pode ser representada por uma cópula de suas distribuições marginais univariadas, estima-se uma série de famílias de cópulas distintas com o intuito de encontrar aquela função que melhor representa a cópula “verdadeira”.

Antes de estimar as cópulas é preciso definir as funções de distribuição marginais, para se encontrar as probabilidades associadas a cada observação, e assim trabalhar com

vetores cujos valores se encontram entre $[0,1]$. Em vez de supor que as variáveis seguem uma determinada distribuição marginal parametricamente especificada, calculam-se as pseudo-observações definidas da seguinte forma: dadas n realizações $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})$, i em $\{1, \dots, n\}$ de um vetor aleatório X , as pseudo-observações são definidas por $u_{ij} = r_{ij}/(n+1)$ for i in $\{1, \dots, n\}$ e j em $\{1, \dots, d\}$, onde r_{ij} denota o *rank* de x_{ij} entre todos x_{kj} , k in $\{1, \dots, n\}$.

Em primeiro lugar estimam-se as cópulas arquimedianas de Clayton, Frank, Gumbel, Ali-Mikhail-Haq e Joe por máxima verossimilhança e máxima pseudoverossimilhança. Desta forma, são encontrados os parâmetros de cada família que caracterizem de forma mais precisa a relação de dependência entre os retornos do S&P 500 e dos retornos do primeiro vencimento em aberto ou do contrato V12.

Em sequência, são estimadas as cópulas elípticas gaussiana e *t-student* que melhor caracterizam a relação de dependência entre as duas variáveis. Outras cópulas bastante conhecidas também são utilizadas: a cópula de *Farlie-Gumbel-Morgenstern* e a de *Plackett*.

Existe outro grupo de cópulas que se dedica a captar a dependência de valores extremos: *Galambos*, *Husler-Reiss*, *Tawn* e *t-EV*. É importante lembrar que a cópula de *Gumbel* também é uma cópula de valor extremo e, ao mesmo tempo, arquimediana.

Os resultados das estimações indicam que dentre as cópulas arquimedianas, apenas a cópula *Frank* convergiu para os dois pares de variáveis, enquanto as cópulas elípticas convergiram em todos os casos. A cópula de *Farlie-Gumbel-Morgenstern* convergiu apenas no primeiro par e a cópula *Plackett* convergiu em ambos. As cópulas de valor extremo não apresentaram convergência em nenhum dos casos.

Esse problema de convergência pode estar relacionado ao sinal da dependência entre essas variáveis. Algumas cópulas só podem ser utilizadas quando a dependência é positiva, ou seja, esses pares de variáveis provavelmente se associam negativamente.

Para verificar se a falta de convergência está relacionada a esse problema, os mesmos procedimentos foram repetidos para novos pares de variáveis, nos quais um dos vetores é multiplicado por -1. Desta forma, o sinal da dependência se inverte.

Ao fazer essa pequena modificação dos dados percebe-se que o problema de convergência é resolvido, enquanto na grande maioria dos casos em que as cópulas foram estimadas tanto com os dados originais quanto com os dados modificados, os parâmetros são exatamente o oposto do outro e a log-verossimilhança é exatamente igual. Portanto, pode-se afirmar que multiplicar uma das variáveis por uma constante, assim como nos modelos de regressão, não altera o ajuste da estimação.

6.4 Critérios de escolha entre cópulas

A estimação das cópulas é apenas o primeiro passo dentro da análise de dependência. Sabe-se que cada cópula representa uma diferente função de distribuição multivariada, por isso é preciso escolher entre as cópulas de diferentes famílias aquela em que a relação de dependência é mais bem ajustada.

Para isso, alguns critérios para fazer essa escolha podem ser adotados. Neste trabalho foram considerados os critérios de maior verossimilhança e menor distância da cópula empírica.

Em todos os casos a cópula que apresentou a maior verossimilhança foi a *t-student*, ou seja, segundo esse critério não existe problema em trabalhar apenas com aquela quantidade restrita de cópulas que convergiram com os dados iniciais (Tabelas 11 a 13).

Tabela 11 – Estimativas das cópulas entre os retornos do S&P 500 e dólar futuro (primeiro vencimento em aberto)

Cópula	Parâmetro	Log-Verossimilhança Máxima
Clayton	NA	NA
Frank	-2.1304 (0,1152)	170,8
Gumbel	NA	NA
Ali-Mikhail-Haq	NA	NA
Joe	NA	NA
Gaussiana	-0,32566 (0,01204)	173.5
<i>t-student</i> *	-0,335711 (0,005468)	296,8
<i>Farlie-Gumbel-Morgenstern</i>	-0,74608 (0,03975)	127
Plackett	0,3189 (0,01541)	195,2
Galambos	NA	NA
Husler-Reiss	NA	NA
Tawn	NA	NA
t-EV	NA	NA

* A cópula *t-student* estimou os graus de liberdade em 3.2635.

Obs.: os erros-padrão estão em parênteses.

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 12 – Estimativas das cópulas entre os retornos do S&P 500 e dólar futuro (V12)

Cópula	Parâmetro	Log-Verossimilhança Máxima
Clayton	NA	NA
Frank	-3,1035(0,1656)	144,9
Gumbel	NA	NA
Ali-Mikhail-Haq	NA	NA
Joe	NA	NA
Gaussiana	-0,44451(0,01571)	144.3
t-student*	-0,459399(0,007299)	214,8
Farlie-Gumbel-Morgenstern	NA	NA
Plackett	0,20433	166,4
Galambos	NA	NA
Husler-Reiss	NA	NA
Tawn	NA	NA
t-EV	NA	NA

* A cópula t-student estimou os graus de liberdade em 2.882.

Obs: Os erros padrão estão em parênteses.

Fonte: Elaboração própria.

Outro critério, encontrado em Trivedi e Zimmer (2005), seleciona a cópula paramétrica que apresenta a menor distância da cópula empírica, que pode ser definida pela seguinte equação:

$$Distância = \sum_{i=1}^N (\hat{C}_{ei} - \hat{C}_{pi})^2 \quad (6.4.1)$$

em que

$\hat{C}_{ei}$ é igual a observação i da cópula empírica; e

$\hat{C}_{pi}$ é igual a observação i da cópula paramétrica.

sendo a cópula empírica definida por:

$$\hat{C}_e(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{1}\{(Y_{j1} \leq Y_{i1}) \text{ e } (Y_{j2} \leq Y_{i2})\}. \quad (6.4.2)$$

em que $\mathbf{1}\{A\}$ é a função índice que iguala a 1 quando o evento A ocorre.

Tabela 13 – Estimativas das cópulas entre os retornos do S&P 500 e o negativo do retorno do dólar futuro

Cópula	S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto		S&P 500 e Dólar Futuro V12	
	Parâmetro	Log-Verossimilhança Máxima	Parâmetro	Log-Verossimilhança Máxima
Clayton	0,47343(0,02687)	187,5	0,72033(0,04507)	149,8
Frank	2,1304(0,1152)	170,8	3,1035(0,1656)	144,9
Gumbel	1,27229(0,01502)	201,5	1,42485(0,02715)	160,3
Ali-Mikhail-Haq	0,78925(0,02022)	179,5	0,93594(0,01629)	153,7
Joe	1,3290 NA	149,7	1,521NA	119,0
Gaussiana	0,32566(0,01203)	173,5	0,44451(0,01565)	144,3
<i>t-student</i>	0,335711(0,01047)	296,8	0,4593994(0,0001298)	214,8
<i>FGM</i>	0,7461(0,03975)	127,0	NA	NA
Plackett	3,1358(0,1674)	195,2	4,8939(0,3599)	166,4
Galambos	0,51520(0,01536)	177,3	0,68092(0,02715)	147,2
Husler-Reiss	0,83077(0,01647)	154,4	1,0057(0,0287)	128,9
Tawn	0,58507(0,02482)	227,3	0,758930,03156	174,6
t-EV	0,5529NA	204	0,6938NA	164

Obs: os erros-padrão estão em parênteses.

Fonte: elaboração própria.

Assim como no critério de maior log-verossimilhança, a cópula de *t-student* foi aquela que apresentou o melhor ajuste. Por isto não é necessário trabalhar com os dados modificados, nos quais um dos vetores é multiplicado por -1.

6.5 Teste de Independência

A cópula empírica também pode ser utilizada para testar se as duas variáveis são independentes entre si. A realização deste teste é importante, pois nos casos quando a relação de dependência é muito fraca, é possível que a hipótese de independência não seja rejeitada. Portanto será adotado o teste proposto por Genest e Rémillard (2004), com base na cópula empírica.

Tabela 14 – Distância entre a cópula paramétrica e a cópula empírica

Cópula	S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Dólar V12	S&P 500 e Negativo do Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Negativo do Dólar V12
Clayton	NA	NA	0,2073475	0,1657477
Frank	0,1574624	0,1137379	0,1524738	0,1070644
Gumbel	NA	NA	0,1913882	0,134434
Ali-Mikhail-Haq	NA	NA	0,1472174	0,1073379
Joe	NA	NA	0,6086153	0,4643328
Gaussiana	0,0895361	0,05745176	0,0911769	0,0606102
t-student	0,0276837	0,02824323	0,0255945	0,0242085
FGM	0,2742668	NA	0,2932759	NA
Plackett	0,2314038	0,1463121	0,2177123	0,1302532
Galambos	NA	NA	0,2117408	0,1449814
Husler-Reiss	NA	NA	0,2997844	0,2122131
Tawn	NA	NA	0,1785832	0,1274663
t-EV	NA	NA	0,1946634	0,1337044

Fonte: elaboração própria.

Na Tabela 15 constata-se que a hipótese de independência é rejeitada com um elevado grau de confiança. Desta forma, a utilização de cópulas paramétricas para encontrar a relação de dependência se mostra apropriada.

Tabela 15 – Teste de independência entre os retornos do mercado de dólar futuro e S&P 500

	S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Dólar V12
Estatística	2.935585	2.376479
P-valor	0.000	0.000

Obs.: H_0 = Independência.

Fonte: elaboração própria.

6.6 Testes de dependência de valores extremos

Apesar da escolha da cópula de t-student como melhor cópula paramétrica para medir a dependência entre os retornos do S&P 500 e os retornos do futuro de dólar, são realizados testes de valores extremos para averiguar se é necessário procurar outras famílias de cópulas de valores extremos como candidatas à cópula “verdadeira”.

É importante testar a dependência de valores extremos, pois é bastante utilizada para dados financeiros, como no trabalho de Poon, Rockinger e Tawn (2004). Em momentos de

grandes crises, por exemplo, pode ser razoável esperar que os ativos financeiros apresentem maior dependência.

Os resultados dos testes da Tabela 16 corroboram com os critérios de seleção de cópula, nos quais as cópulas de valores extremos estimadas foram preteridas. Além disso, os testes não deixam dúvidas de que a dependência entre essas variáveis não é de valores extremos, pois a hipótese nula é rejeitada em todos os casos com elevadíssimo grau de confiança. Dessa forma, não há razões para, em uma análise futura, utilizar outras famílias de cópulas de valores extremos.

Tabela 16 – Testes de dependência de valores extremos

Teste		S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Dólar V12	S&P 500 e negativo do Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Negativo do Dólar V12
Kojadinovic, Segers e Yan (2011)	Estatística	5,9618	4,7709	0,8847	0,8030
	P-valor	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Ben Ghorbal, Nešlehová e Genest (2009)	Estatística	-12,1492	-10,6846	6,3773	5,7743
	P-valor	0,0000	0,000	0,0000	0,0000

Obs.: em ambos os testes H_0 = As variáveis possuem dependência de valores extremos.

Fonte: elaboração própria.

6.7 Teste de *goodness-of-fit*

Apesar da escolha da cópula *t-student* como a melhor cópula paramétrica dentro do grupo em que foi estimada, é necessário verificar por meio de um teste estatístico se esta cópula é fidedigna à cópula empírica, ou seja, se a cópula escolhida se aproxima da cópula “verdadeira”.

Além disso, é possível que exista mais de uma cópula paramétrica que seja semelhante à cópula empírica. Desta forma, é realizado o teste de *goodness-of-fit* proposto por Genest, Remillard e Beaudoin (2009) para todas as cópulas que convergiram com os dados originais.

Os resultados da Tabela 17 evidenciam que a cópula *t-student* é superior às demais, não somente por apresentar o melhor ajuste de acordo com os critérios, mas também por ser a única entre elas que não rejeita a hipótese nula de ser estatisticamente diferente da cópula empírica, considerando o nível de significância de 10%.

Tabela 17 – Teste de *Goodness-of-fit* das copulas paramétricas

Cópula		S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Dólar V12
Frank	Estatística	0,159	0,157
	P-valor	0,000	0,000
Gaussiana	Estatística	0,092	0,089
	P-valor	0,000	0,000
<i>t-student</i>	Estatística	0,027	0,026
	P-valor	0,116	0,149
<i>FGM</i>	Estatística	0,281	0,274
	P-valor	0,000	0,000
Plackett	Estatística	0,234	0,231
	P-valor	0,000	0,000

Obs.: os testes foram realizados com 3.000 *bootstraps*.

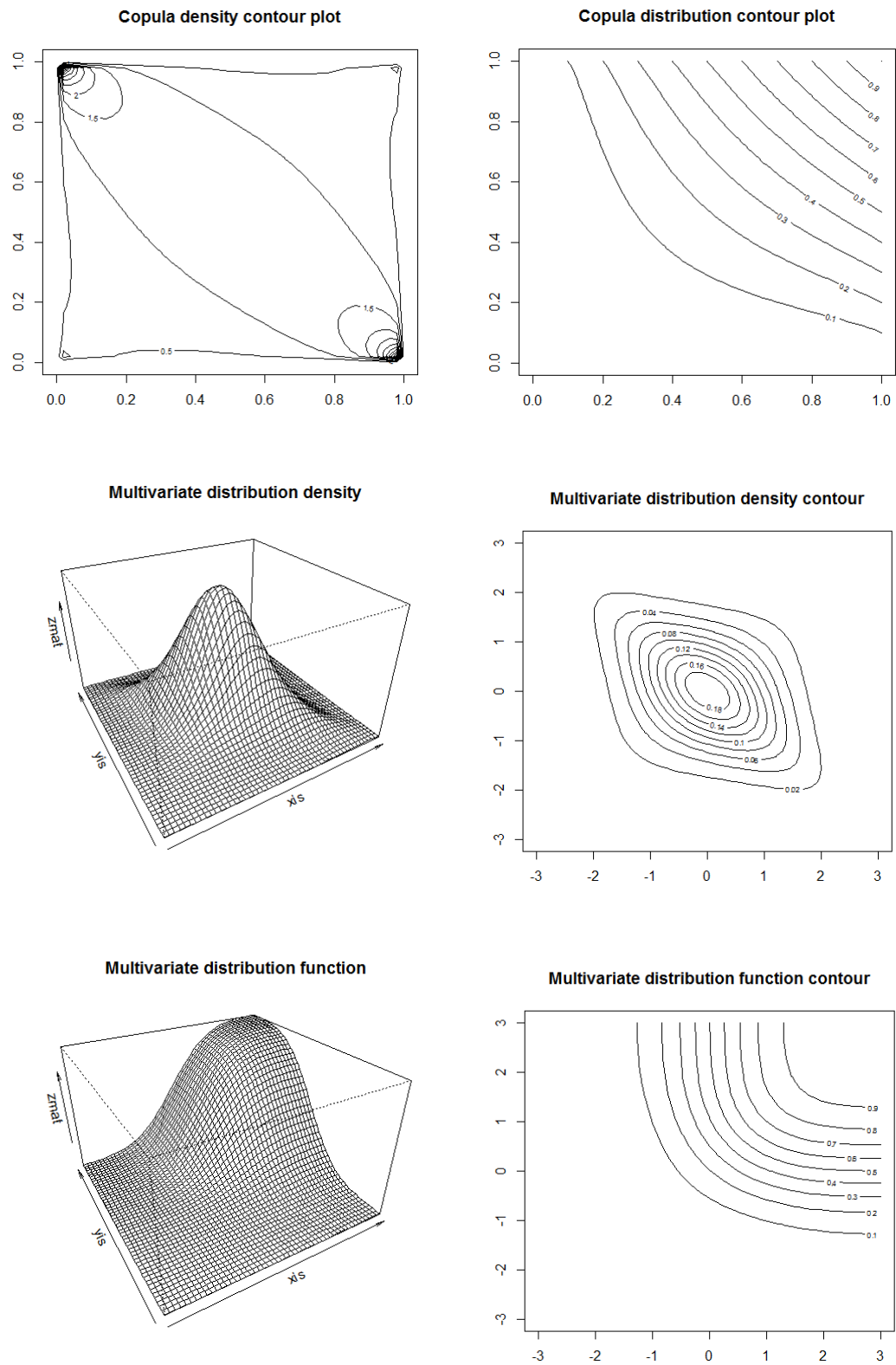
Fonte: elaboração própria.

Esse resultado é extremamente importante, pois nem sempre é possível encontrar uma cópula que se aproxime da “verdadeira”, consequentemente o cálculo das medidas de dependência entre as variáveis pode ser viesado por erro na especificação funcional da cópula.

6.8 Apresentação gráfica das cópulas escolhidas

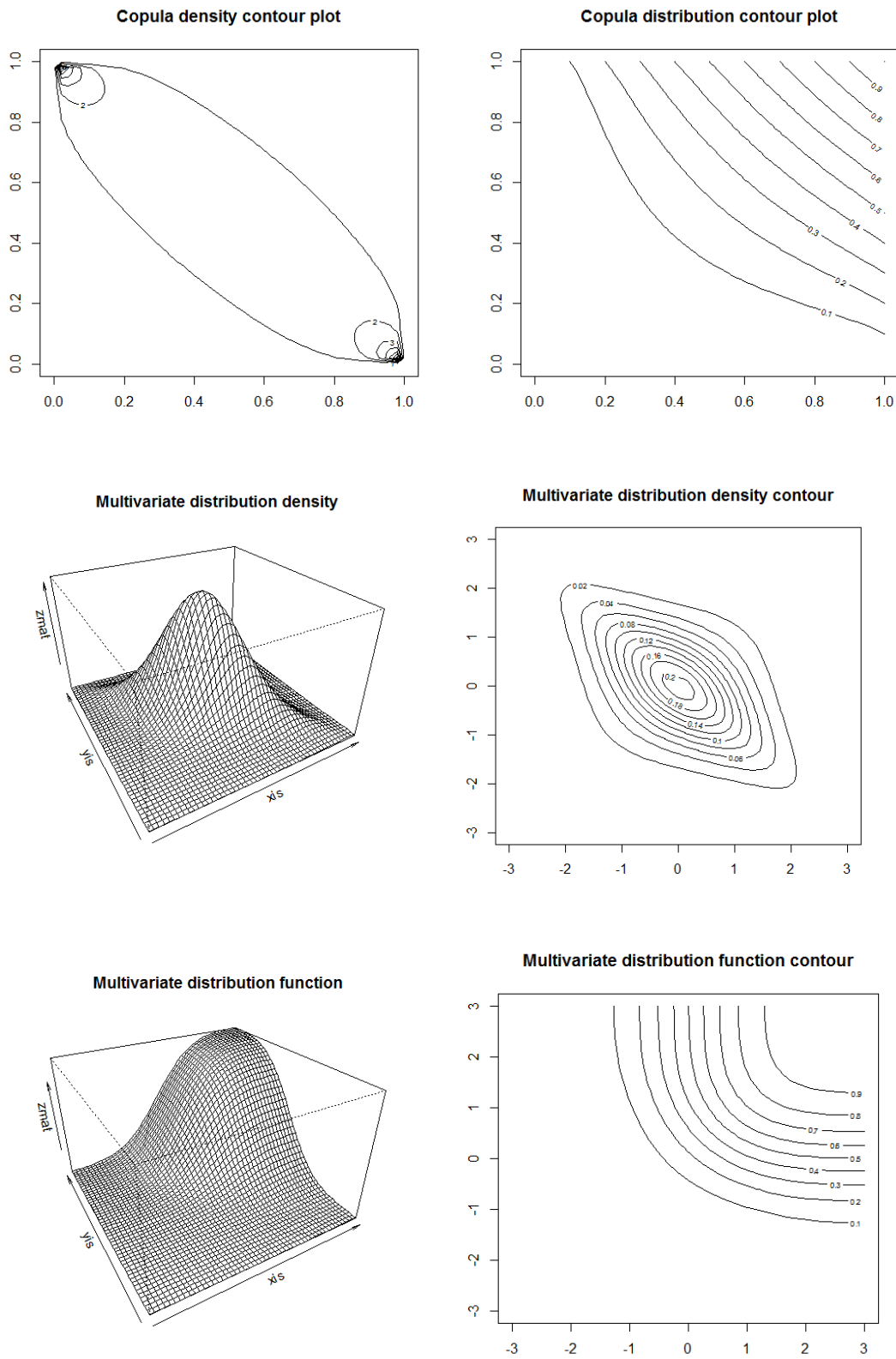
Para os dois pares de retornos estudados neste trabalho, a cópula *t-student* foi aquela que melhor se ajustou às relações de dependência entre as variáveis. Entretanto, o parâmetro obtido em cada uma delas é diferente, ou seja, suas respectivas cópulas são duas funções distintas da mesma família.

Primeiramente serão apresentados os gráficos da densidade e função de distribuição de cada cópula. Em segundo lugar são mostrados os gráficos da densidade e função de distribuição da distribuição multivariada via cópulas, utilizando margens com distribuição normal com média zero e variância igual a 1.



Fonte: elaboração própria.

Figura 14 – Gráficos da cópula *t-student* entre os retornos do S&P 500 e do primeiro vencimento em aberto do dólar futuro.



Fonte: elaboração própria.

Figura 15 – Gráficos da cópula *t-student* entre os retornos do S&P 500 e do dólar futuro V12.

Os gráficos que representam as funções de distribuição são bem simples de serem interpretados, e à medida que as margens tendem a infinito o valor da função tende a 1.

Já os gráficos da densidade da distribuição multivariada apontam como essa família de cópulas é capaz de captar certo grau de dependência nas caudas, o que é esperado *apriori*, por se tratar de dados do mercado financeiro.

6.9 Medidas de dependência entre as variáveis

Após a estimação e a escolha da cópula apropriada para cada par de retornos, resta descobrir qual é o tamanho e o grau da dependência entre estas variáveis. Esta informação é extremamente valiosa, principalmente para investidores e empresas que trabalham com exportação e, ou, importação, para se realizar uma melhor gestão de risco.

As medidas de dependência calculadas por cópulas têm a vantagem de não necessitarem de qualquer suposição a respeito da distribuição marginal univariada das variáveis estudadas, além de serem capazes também de captar não linearidades com facilidade.

Como esperado, as variáveis apresentam dependência negativa entre si, ou seja, uma variação positiva em uma delas resulta em maior probabilidade de que ocorra variação negativa na outra série. Este resultado é curioso, pois ele infere que nos momentos em que o indicador da economia americana está em queda, espera-se que a cotação do dólar futuro se valorize, e em momentos de alta é esperado que o dólar futuro sofra queda.

Uma hipótese para essa dependência negativa pode ser a grande integração entre a economia brasileira e a norte-americana, pois quando os Estados Unidos se encontram em momentos de crise, o capital estrangeiro começa a deixar o mercado brasileiro, por ser de alto risco, para comprar títulos mais seguros como os títulos do tesouro americano.

A Tabela 18 também informa que a série de dólar futuro V12 apresenta maior dependência com o índice S&P 500 que a série dos primeiros vencimentos em aberto, quando se observa tanto o Rho de Spearman quanto o Tau de Kendall.

Esse resultado pode ser explicado por algumas hipóteses. Em primeiro lugar, a série dos primeiros vencimentos em aberto é criada a partir da soma de várias janelas de diferentes contratos, pois apesar de ser razoável supor que esses contratos tenham comportamentos semelhantes, nada garante que essa “linearização” não traga prejuízos quanto ao conteúdo da informação fornecida.

Tabela 18– Graude dependência entre as variáveis

Medida de Associação	S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Dólar V12
Tau de Kendall	-0,2179533	-0,3038706
Rho de Spearman	-0,3221055	-0,4426464
Tail Index superior	0,0470570	0,0303200
Tail Index inferior	0,0470570	0,0303200

Fonte: elaboração própria.

Além disso, a série de dólar futuro V12 é bem mais curta do que a de primeiro vencimento em aberto, isto é, se supormos que a dependência não é constante ao longo do tempo, trabalhar com uma janela temporal menor pode trazer resultados mais precisos.

Finalmente, como dito na seção de descrição dos dados, a série do primeiro vencimento em aberto só utiliza dados de períodos de elevada liquidez, enquanto a série de dólar futuro V12, durante a grande maioria do tempo é determinado pela fórmula X.

6.10 Estimação de cópulas utilizando resíduos de regressões

Como é comum na literatura de cópulas de séries temporais, é adotado o procedimento de utilizar também os resíduos de um modelo da família GARCH para cada variável, com o intuito de trabalhar apenas com variáveis *pre-whitened*.

Portanto, em primeiro lugar é necessário encontrar o modelo que se ajusta melhor a cada série temporal. Assim como em Silva e Maia (2012), neste trabalho todos os modelos da família GARCH são estimados conjuntamente com uma equação do tipo ARMA para a média, ou seja, estamos trabalhando com estrutura ARMA-GARCH, ARMA-EGARCH, ARMA-IGARCH e ARMA-GJR. Além disso, analisa-se a possibilidade de utilizar outras formas de distribuição condicional, como as distribuições de *t-student* e *t-student* assimétrica.

Portanto os modelos estimados são caracterizados por uma estrutura ARMA(m,n), sendo $m = 0, \dots, 3$ e $n = 0, \dots, 3$ além de uma estrutura GARCH(p,q), IGARCH(p,q), EGARCH(p,q) ou GJR (p,q), sendo $p = 1, \dots, 3$ e $q = 0, \dots, 3$. Quando a equação da média têm os parâmetros m e n iguais a 0, trabalha-se com os modelos de heteroscedasticidade condicional simples.

Sendo assim, para cada modelo de variância (GARCH, EGARCH, IGARCH ou GJR), têm-se 192 possibilidades de modelos, além de três distribuições condicionais

diferentes, resultando em um total de 576 modelos a serem estimados para cada estrutura de variância. Obviamente, a estimação desses modelos tem um custo computacional relativamente elevado, portanto as estimações que não foram possíveis de ser realizadas foram automaticamente descartadas.

Na Tabela 19 estão os modelos de variância condicional que melhor se ajustam às séries de acordo com os critérios de AIC e BIC. É importante lembrar que as duas séries de retornos do S&P 500 não são as mesmas, dado que a segunda delas é apenas um intervalo da primeira, pois suas observações só começam em 30/3/2007.

Tabela 19 – Critérios de escolha entre modelos de variância condicional

Critério	S&P 500	Dólar Futuro Primeiro Vencimento em Aberto
Menor AIC	ARMA(2,2)-EGARCH(3,1) <i>t-student</i> assimétrica	ARMA(3,3)-EGARCH(2,1) <i>t-student</i> assimétrica
Menor BIC	ARMA(0,1)-EGARCH(3,1) <i>t-student</i> assimétrica	ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) <i>t-student</i> assimétrica
Critério	S&P 500	Dólar futuro V12
Menor AIC	ARMA(1,1)-EGARCH(3,2) <i>t-student</i> assimétrica	ARMA(3,3)-gjGARCH(1,1) <i>t-student</i>
Menor BIC	ARMA(0,1)-EGARCH(2,1) <i>t-student</i> assimétrica	ARMA(0,0)-EGARCH(1,1) <i>t-student</i>

Obs: a distribuição condicional encontra-se entre aspas.

Fonte: elaboração própria.

O modelo ARMA-EGARCH foi superior aos demais em relação a quase todas variáveis, enquanto a distribuição condicional de *t-student* assimétrica apresentou maior ajuste em quase todas as séries, com exceção do dólar futuro V12, na qual a distribuição escolhida foi de *t-student*.

Devido à falta de concordância entre os critérios, daqui em diante serão utilizados apenas os resíduos dos modelos de variância condicional que apresentaram o menor AIC.

A partir dessas séries de resíduos são estimadas as cópulas apresentadas anteriormente, com o intuito de verificar qual delas melhor caracteriza a relação de dependência entre os pares de resíduos.

A Tabela 20 evidencia novamente que, dentre as cópulas paramétricas estimadas, a cópula *t-student* é aquela que melhor se ajusta aos dados utilizados, tanto pelo critério de máxima log-verossimilhança quanto pela distância da cópula empírica. Consequentemente, pode-se afirmar que mesmo com esta complexa transformação das variáveis, a mesma família de cópulas continua sendo a melhor modelagem para todos os pares de séries.

Tabela 20 – Estimativas das cópulas entre os resíduos dos retornos do S&P 500 e do dólar futuro

Cópula	Resíduos S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto			Resíduos S&P 500 e Dólar V12		
	Parâmetro	Log-verossimilhança Máxima	Distância da cópula empírica	Parâmetro	Log-verossimilhança Máxima	Distância da cópula empírica
Clayton	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Frank	-2,1292(0,1047)	171	0,1607316	-3,1213(0,1671)	147	0,120399
Gumbel	NA	NA	NA	NA	NA	NA
AMH	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Joe	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Gaussiana	-0,32642(0,01188)	174,3	0,08738217	-0,44971(0,01604)	148,2	0,061301
t-student*	- 0,335988(0,002741)	295,5	0,03092738	- 0,461428(0,005644)	215,9	0,033313
FGM	-0,749NA	127,9	0,2662917	NA	NA	NA
Plackett	0,32046(0,01554)	194,7	0,2263888	0,20436(0,01513)	167,8	0,146842
Galambos	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Husler-Reiss	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Tawn	NA	NA	NA	NA	NA	NA
t-EV	NA	NA	NA	NA	NA	NA

* As cópulas *t-student* estimaram os graus de liberdade em 3,297648 e 2,919002, respectivamente.
Fonte: elaboração própria.

Desta forma, resta saber se essa abordagem de utilizar os resíduos de regressões da família GARCH implica melhorias ao ajuste do modelo. Para isso, serão comparados os resultados do teste de *goodness-of-fitting* das cópulas dos resíduos com os das cópulas originais. Além disso, serão comparados os novos parâmetros obtidos e suas medidas de dependência.

Constata-se na Tabela 21 que, em ambos os casos, os parâmetros estimados por cópulas se alteram muito pouco quando são utilizados os resíduos das regressões da família GARCH. Mesmo com todo o esforço de encontrar qual modelo de regressão melhor se ajusta as séries univariadas e extraíndo apenas o seu resíduo, as cópulas estimadas continuaram muito parecidas entre si, pois tanto seus parâmetros quanto todas as suas medidas de associação apresentaram diferença muito pequena.

Em relação ao teste de *goodness-of-fit*, percebe-se que as cópulas continuam a não rejeitar a hipótese nula a 5% de significância, entretanto para as séries de primeiro vencimento em aberto a hipótese nula deixou de ser rejeitada a 10% de significância.

Tabela 21 – Comparação entre as estimativas feitas pelos resíduos e pelos dados originais

		S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	Resíduos S&P 500 e Primeiro Vencimento em Aberto	S&P 500 e Dólar V12	Resíduos S&P 500 e Dólar V12
Parâmetro		-0,33571	-0,33599	-0,45940	-0,44766
Teste <i>goodness-of-fit</i>	Estatística	0,02700	0,02900	0,02600	0,02400
	P-valor	0,11600	0,08440	0,14900	0,21300
Tau de Kendall		-0,21795	-0,21857	-0,30387	-0,29548
Rho de Spearman		-0,32211	-0,32299	-0,44265	-0,43114
Tail Index	Superior	0,04705	0,04691	0,03032	0,03173
	Inferior	0,04705	0,04691	0,03032	0,03173

Fonte: elaboração própria.

Portanto, apesar da adoção desse procedimento de utilizar os resíduos de regressões ser relativamente comum quando se estimam cópulas a partir de séries temporais, neste trabalho a utilização dos dados originais aparentou-se mais apropriada devido à pequena diferença entre as cópulas estimadas, pois a interpretação dos resultados a partir dos dados originais é muito mais intuitiva e direta.

7 CONCLUSÃO

O mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA cresceu a um ritmo elevado nos últimos dez anos, quanto ao seu volume de transações. Além disso, esse contrato futuro já é considerado um dos derivativos de câmbio mais negociados de todo o mundo, revelando que sua importância não se restringe ao mercado financeiro nacional.

Apesar do grande volume financeiro negociado, esse mercado é bastante concentrado quanto à participação dos agentes. Os bancos, os investidores institucionais e os investidores não residentes concentram mais de 95% de todos os contratos, enquanto os demais tipos de pessoas jurídicas e pessoas físicas possuem baixa participação. De fato, o tamanho do contrato⁷ é muito grande para atrair pequenos investidores, assim como pequenas e médias empresas que tenham interesse de realizar alguma estratégia de gestão de risco quanto ao câmbio.

A possibilidade de ocorrência de novas crises internacionais cria a necessidade de conhecer melhor o quanto os mercados brasileiros são afetados por variações em mercados estrangeiros. Portanto, neste trabalho propôs-se mensurar e modelar a relação de dependência entre o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA e a economia americana.

A dependência entre variáveis pode ser calculada a partir de várias técnicas diferentes. A metodologia de cópulas é escolhida graças à sua fundamentação teórica, a partir do teorema de Sklar (1959), que permite que se façam poucas suposições a respeito do comportamento da série. Além disso, são utilizadas medidas de dependência muito mais abrangentes do que o conceito de correlação linear.

Por meio da aplicação da teoria de cópulas para estimar a relação de dependência entre o mercado de dólar futuro da BM&FBOVESPA e o índice S&P 500, foi possível a extração de vários resultados passíveis de interpretação, tanto para o caso em que se utiliza a série do primeiro vencimento em aberto quanto para aquele no qual é considerada a série do contrato futuro de dólar com vencimento em outubro de 2012. Em primeiro lugar, é possível concluir que as duas variáveis possuem dependência negativa entre si, ou seja, quando o mercado financeiro americano estiver em baixa, é mais provável que ocorra elevação na cotação de ajuste do contrato de dólar futuro.

Diante da possibilidade de as variáveis serem independentes entre si, foi realizado o teste proposto por Genest e Rémillard (2004), no qual a hipótese de ausência de dependência foi rejeitada com elevado grau de confiança, em ambos os casos. Além disso, constatou-se

⁷ US\$ 50,000.00.

que a dependência entre as variáveis poderia ser caracterizada como sendo de valores extremos. De acordo com os dois testes realizados, conclui-se que as variáveis não possuem esse tipo de dependência.

Neste trabalho foram estimadas diversas famílias de cópulas com o objetivo de identificar qual delas melhor representa a relação de dependência entre as duas variáveis analisadas. Levando em consideração os resultados dos critérios de seleção, a cópula *t-student* foi escolhida como aquela que é mais precisa quanto à representação da dependência entre as variáveis, em ambos os casos. O teste de *goodness-of-fit* corrobora com esses resultados, pois, dentre todas as cópulas testadas, apenas a cópula *t-student* não rejeita a hipótese nula de que o modelo está bem ajustado. Como essa cópula é simétrica, esse resultado contradiz a expectativa, *a priori*, de que as variáveis poderiam ter dependência assimétrica.

Apesar da escolhada mesma família de cópulas para modelar a relação de dependência entre os dois pares de variáveis, é importante ressaltar que houve diferença em relação ao parâmetro que determina a função cópula. Essa diferença paramétrica resulta em diversas medidas de dependência, sendo tanto o *Tau de Kendall* quanto o *Rho de Spearman* maiores quando os retornos do contrato de dólar futuro V12 são considerados.

Ainda em relação aos resultados das medidas de dependência, verificou-se que as variáveis possuem grau de associação moderado. Esse resultado não surpreende por se tratar de mercados distintos em essência e de países diferentes, pois enquanto um deles negocia contratos futuros de câmbio no Brasil, o outro trata de ações de empresas norte-americanas.

Tendo em vista que as variáveis são negativamente dependentes entre si, é possível adotar uma estratégia de gestão de risco do ponto de vista prático, dado que nos momentos em que um dos ativos estiver em baixa, é mais provável que o outro ativo aumente a sua cotação.

Este trabalho é pioneiro em estudar a relação entre o mercado futuro de dólar da BM&FBOVESPA e o índice S&P 500, fornecendo uma explicação objetiva e probabilística de como o comportamento de um está ligado às variações do outro. Em momentos de crise na economia americana, por exemplo, é de se esperar que o mercado futuro de dólar também demonstre elevada volatilidade.

Em estudos futuros pode ser interessante averiguar se a relação de dependência entre esses mercados varia ao longo do tempo, devendo ser ressaltado que é possível comparar o grau de dependência entre contratos futuros com diferentes datas de vencimento, ou então se estimar cópulas condicionais como em Patton (2002).

Além disso, a metodologia de cópulas é muito abrangente quanto às possibilidades de aplicação, consequentemente é possível estudar a dependência entre diversos outros pares

de mercados. Pode-se também fazer a estimação de cópulas multivariadas, que não se limitam a modelar a relação de associação de apenas duas variáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALI, M. M.; MIKHAIL, N. N.; HAQ, M. S. A class of bivariate distributions including the bivariate logistic. *J. Multivariate Anal.*, v. 8, p. 405-412, 1978.

ANÉ, T.; KHAROUBI, C. Dependence structure and risk measure. *Journal of Business*, Chicago, v. 76, n. 3, p. 411-438, 2003.

BANERJEE, A.; DOLADO, J. J.; GALBRAITH, J. W.; HENDRY, D. F. *Cointegration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data*. Oxford University Press, Oxford, 1993.

BEM GHORBAL, N.; GENEST, C.; NESHELOVA, J. On the Ghoudi, Khoudraji, and Rivest test for extreme-value dependence. *The Canadian Journal of Statistics*, v. 37, n. 4, p. 534-552, 2009.

BLACK, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, v. 3, p. 167-179, 1976.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307-328, 1986.

CÂMARA, A. A generalization of the Brennan-Rubinstein approach for the pricing of derivatives. *Journal of Finance*, v. 58, n. 2, p. 805-820, 2003.

CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. *Copula methods in finance*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2004.

CLAYTON, D. G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, v. 65, p. 141-151, 1978.

COOK, R. D.; JOHNSON, M. E. A family of distributions for modeling non-elliptically symmetric multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society, B* v. 43, p. 210-18, 1981.

COSTA, T. M. T.; SANTOS, M. L.; MULLER, C. A. S.; AGUIAR, Q. M. C. Hedge ótimo e efetividade a partir da utilização de contratos futuros de índice de ações, câmbio, taxa de juros e petróleo. *Revista do Centro de Ciências da Economia e Informática*, Bagé, v.15, n. 27, 2011.

DEHEUVELS, P. La fonction de dependence empirique et ses propriétés—un test nonparamétrique d'indépendance. *Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences*, 5th Ser., v. 65, p. 274-92. 1979.

DEHEUVELS, P. A nonparametric test for independence. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, v. 26, p. 29-50. 1981.

DEMARTA, S.; MCNEIL, A. J. The tcopula and related copulas. *International Statistical Review*, Wales, v. 73, n. 1, p. 111-129, 2005.

DURRLEMAN,V.;NIKEGHBALI,A.;RONCALLI,T. *Which copula is the right one?* Working paper. Paris: Credit Lyonnais,Groupe de Recherche Opérationnelle, 2000.

DYBVIG, P. Distributional analysis of portfolio choice.*Journal of Business*, v. 61, p. 369-393, 1988.

EMBRECHTS, P.;FURRER, H.; KAUFMANN, R. Different kinds of risk. In: ANDERSEN,T. G.; DAVIS, R. A.; KREISS, J.-P.; MIKOSCH, T. *Handbook of Financial Time Series*, New York: Springer Verlag, 2008. p. 729-751.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometric*, v.50, p. 987-1007, 1982.

ENGLE, R.; NG,V. Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, v. 48, n. 5, p. 1749-78, 1993.

FAMA, E. F. *Foudations of finance:Porfolio decisions and securities prices*. Basic Books, 1976.

FAMA, Eugene F. The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, v. 37, p. 34-105, January 1965.

FIA – FUTURES INDUSTRY ASSOCIATION. *Annual volume survey*, 2012.

FRANK, M. J. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematica*, v. 19, p. 194-226, 1979.

GALAMBOS, J. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. 2. ed., R.E. Krieger Pub., 1987.

GENEST, C.; RÉMILLARD, B. Tests of independence and randomness based on the empirical copula process. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*,v. 13, n. 2, p. 335-369, 2004.

GENEST, C.; RÉMILLARD, B.; BEAUDOIN, D. Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 44, p. 199-213, 2009.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.;RUNKLE, D. E. On the relation between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, v. 48, p. 1779-1801, 1993.

GUIMARÃES, B. V.; SILVA, M. E. A possibilidade de saltos no câmbio implícita nos prêmios das opções. *Revista Brasileira de Economia*, Rio de Janeiro,v. 56, n. 3, p. 397-428, Jul./Set.2002.

GUMBEL,E.J.Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, v. 55, p. 698-707, 1960.

HUSLER, J.; REISS, R.D. *Extreme value theory: Proceedings of a conference held in oberwolfach*.Berlin:Springer, p: 279, 1989.

KAT, H. M.; PALARO, H. P. *Who needs hedge funds? A copula based approach to hedge fund return replication*. Working Paper, Alternative Investment Research Center, Londres, 2005.

KOJADINOVIC, I.; SEGERS, J.; YAN, J. *Large-sample tests of extreme-value dependence for multivariate copulas*. Cornell University Library, 2011. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/1105.2220>>. Acesso em: 9/3/2012.

KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P. C. B.; SCHMIDT, P.; SHIN, Y. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, v. 54, p.159-178, 1992.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MELLO, A. A. *Formação do preço de opções: Utilização de um modelo alternativo para a formação do preço da opção sobre futuro de dólar e comparação com o modelo de black*. 2005. Dissertação (Mestrado em Administração) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, n. 3, p. 125-44, 1976.

MORETTIN, P. A. *Econometria financeira – Um curso em séries temporais financeiras*. São Paulo: Blucher, 2008.

MORGENSTERN, D. Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, v. 8, p. 234-235, 1956.

NELSEN, R. B. *An Introduction to copulas*. 2. ed., Nova York: Springer, 2006.

NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns. *Econometrica*, v. 59, p. 347-370, 1991.

PAGAR, A. R.; SCHWERT, G. W. Alternative models for conditional stochastic volatility. *Journal of Econometrics*, v. 45, p. 267-290, 1990.

PATTON, A. J. *Applications of copula theory in financial econometrics*. Tese (Ph.D. em Economia) – University of California, San Diego, 2002.

PATTON, A. J. Copula-based models for financial time series. In: ANDERSEN, T. G.; DAVIS, R. A.; KREISS, J. -P.; MIKOSCH, T. *Handbook of financial*. New York: Springer Verlag, 2009. p. 729-751. (Time Series).

PEREIRA, D. E.; PEREIRA, P. L. V. *Cópulas – Uma alternativa para a estimação de modelos de risco multivariados*. Texto para Discussão, Escola de Economia de São Paulo, São Paulo, 2009.

PICKANDS, J. Multivariate extreme value distributions. In: PROCEEDINGS OF THE 43rd SESSION (Buenos Aires), (PS'81), International Statistical Institute, Voorburg, Netherlands, 1981. p. 859-878.

PLACKETT, R. L. A class of bivariate distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, v. 60, p. 516-522, 1965.

POON, S. -H.; ROCKINGER, M.; TAWN, J. Extreme value dependence in financial markets: Diagnostics, models, and financial implications. *Review of Financial Studies*, v. 17, n. 2, 581-610, 2004.

QUINN, C. *Using copulas to measure association between ordinal measures of health and income*. Working Paper, Health, Econometrics, and Data Group, University of York, 2007.

RODRIGUEZ, J. C. Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance*, v. 14, p. 401-423, 2007.

SANTOS, R. P. S. *Modelando contágio financeiro através de cópulas*. Dissertação (Mestrado em Economia) – Escola de Economia, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2010.

SILVA, M. M.; MAIA, S. F. *Previsões de volatilidade diária um passo a frente: Um estudo dos contratos futuros de soja com liquidação financeira da BM&FBOVESPA*. Disponível em <http://www.anpec.org.br/encontro/2012/inscricao/files_I/i7-597dc4b8daf494a05f2399634909547d.pdf>. Acesso em: 9 mar. 2012.

SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ Inst Statist Univ Paris*, v. 8, p. 229-231, 1959.

TANAKA, Y. *Estimação da razão ótima de hedge para o dólar futuro usando um modelo MGARCH-BEKK-diagonal*. 2005. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Economia e Administração) – Escola de Pós-Graduação em Economia, Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro.

TAWN, J. Bivariate extreme value theory: models and estimation. *Biometrika*, v. 75, n. 3, 397-415, 1988.

TRAPLETTI, A.; HORNIK, K.; LEBARON, B. *Time series analysis and computational finance*. 2012. Disponível em <<http://cran.r-project.org/web/packages/tseries/tseries.pdf>>. Acesso em: 9 mar. 2013.

TRIVEDI, P. K.; ZIMMER, D. M. Copula modeling: An introduction to practitioners. *Econometrics*, v. 1, n. 1, p. 1-111, 2005.

VENTURA, A.; GARCIA, M. Mercados futuro e à vista de câmbio no Brasil: O rabo abana o cachorro. *Revista Brasileira de Economia*, Rio de Janeiro, v. 66, n.1, p. 21-48, 2012.

ANEXO

Tabela 22–Código do mês de vencimento do contrato futuro

Código	Mês
F	Janeiro
G	Fevereiro
H	Março
J	Abril
K	Maio
M	Junho
N	Julho
Q	Agosto
U	Setembro
V	Outubro
X	Novembro
Z	Dezembro

Fonte: BM&FBOVESPA.