UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CLARISSA PESSOA BORGES FERNANDES

PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA SIGNOMIAL VIA OTIMIZAÇÃO DC

João Pessoa
2014

CLARISSA PESSOA BORGES FERNANDES

PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA SIGNOMIAL VIA OTIMIZAÇÃO DC

Dissertação apresentado à Pós-Graduação de Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Dr. Roberto Quirino do Nascimento

João Pessoa

2014

Fernandes, Clarissa Pessoa Borges Fernandes

Problemas de Programação Geométrica Signomial Via Otimização DC

Clarissa Pessoa Borges. - João Pessoa: O autor, 2014.

Número de folhas : il., fig.

Dissertaçao (mestrado) - Universidade Federal da Paraíba. CT. Engenharia de Produção, 2014.

Problemas de Programação Geométrica Signomial Via Otimização DC

por

Clarissa Pessoa Borges Fernandes

Dissertação apresentada à Pós-Graduação de Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção apresentado em fevereiro de 2014.

Aprovada por:

Roberto Quirino do Nascimento

Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento

Orientador

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba

Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira

Profa. Dra. Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira

Examinador Externo

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Rodrigo José Guerra Leone

Examinador Externo

Universidade Potiguar

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

À Deus sempre Ele em primeiro lugar.

Aos meus pais, irmãs e irmãos pelo carinho, apoio e amizade;

Ao meu esposo amado, sempre ao meu lado segurando minha mão, me dando força para seguir em frente;

Ao meu filho Carlos Eduardo, razão da minha luta diária para permanecer sempre forte;

Ao meu orientador, Roberto Quirino de Nascimento, pelo conhecimento passado, pela orientação, paciência e dedicação;

Aos professores Lucidio dos Anjos Formiga Cabral e Jairo Rocha de Farias pelo conhecimento transmitido e por todo apoio, estímulo e atenção oferecidos durante o período do mestrado;

Aos professores do PPGEP, pelo valioso conhecimento passado durante os últimos anos;

À professora Ana Flávia Uzeda Macambira pela amizade e conhecimento transmitido;

Aos meus amigos do LAPORTE, em especial Roberta, Nádia, Abner, Leandro e Rodrigo pela amizade sincera, ajuda no tex e problemas computacionais, onde dividimos alegrias e angústias;

Ao PPGEP e seus funcionários, em especial Ana e Elizama, por serem tão atenciosas, competentes e facilitarem enormemente minha vida;

À todos os professores que passaram em minha vida, pela contribuição na minha formação;

Aos demais amigos que sempre acreditaram em meu potencial e contribuíram de alguma maneira para que esse trabalho pudesse ser concretizado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Clarissa Pessoa Borges Fernandes

RESUMO

Neste trabalho é feita uma abordagem da teoria de Problemas de Programação Geométrica e da teoria de Otimização de Diferença de Funções Convexas(DC) onde mostra-se que uma classe dos problemas de Programação Geométrica, conhecida por Problemas Signomiais, pode ser escrita como a diferença de funções convexas e mais adiante, que um problema DC pode ser escrito na forma CDC que é a forma canônica do problema DC. A vantagem de se escrever na forma CDC é que pode-se encontrar a solução global para este tipo de problema. Os problemas resolvidos tem como referência os artigos Nenad [20], Maranas [17] e Dembo [5].

Palavras-chave: Programação Geométrica Signomial, Otimização DC.

ABSTRACT

In this work an approach theory of geometrical problems and programming optimization theory Convex Difference Function (DC) is shown which is made of a class of geometric programming problems, known as Signomiais problems can be written as the difference convex functions and further, a DC problem can be written as CDC which is the canonical form of the problem DC. The advantage of writing in the form CDC is that one can find a global solution to this problem. The problem is solved by reference to Articles Nenad [20], Maranas [17] e Dembo [5].

Keywords: Signomial Geommetric Programming, DC Optimization

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Programação Geométrica(PG) é uma técnica de otimização com muitas aplicações no mundo real, os casos mais atrativos de PG são os não convexos também conhecidos como Programação Geométrica Signomial(PGS), estes problemas podem ser escritos como problemas de otimização onde a função objetivo e as restrições são a diferença entre duas funções convexas, problemas com esta característica são conhecidos na literatura como Programação DC, os quais para casos bem particulares é possível estabelecer condições necessárias e suficientes para obtenção de mínimos globais. O objetivo deste trabalho foi desenvolver um método de otimização global para programação geométrica signomial utilizando a metodologia de otimização DC. O fato novo neste método são os resultados obtidos para PGS ao utilizar uma técnica tradicional em PG denominada condensação aliada aos resultados de otimização DC, resultando num algoritmo que foi denominado de PGDCA, análogo aos algoritmos DCA desenvolvidos para otimização DC em conjuntos poliédricos. Tais algoritmos consistem em minimizar uma função côncava em um conjunto poliedral.

Programação Geométrica é um dos ramos da Programação Matemática que procura otimizar uma função que pode ser vista como um "polinômio generalizado" que consiste de uma soma de termos onde cada termo é um produto de uma constante positiva e das variáveis do modelo elevados a potências arbitrárias.

A Programação Geométrica (PG) surgiu para resolver problemas algébricos de programação não-linear nos quais as funções envolvidas apresentam-se na forma posinomial [Zener,1961]. O termo Programação Geométrica foi adotado devido a relação existente entre as médias geométrica e aritmética de n números positivos. Os Problemas de Programação Geométrica podem ser Posinomiais ou Signomias. Os problemas posinomiais são caracterizados por funções de termos positivos enquanto que os signomiais possuem pelo menos um termo negativo. Soluções para problemas posinomiais podem ser encontradas através de algoritmos tais como Branch and Bound e Método de Pontos Interiores. No caso dos problemas signomiais, existem algumas particularidades, entre elas a não convexidade da função objetivo que torna mais difícil a sua resolução.

Problemas de Programação Geométrica Generalizada (PGG), também chamada de Programação Geométrica Signomial (PGS), são caracterizados por funções objetivos e restrições descritas como a diferença de dois posinômios. Os PGSs contém um ou mais monômios com coeficientes negativos [17]. Para esta classe de problemas em muitos casos é possível determinar um mínimo local e para encontrar a solução global é necessário utilizar técnicas de otimização global. Uma dessas técnicas para resolver tais problemas é transformar a função objetivo na diferença de duas funções convexas.

Os problemas de Otimização DC, onde a região viável é um conjunto convexo e a função objetivo é a diferença entre duas funções convexas, aqui chamado de "problema geral de otimização DC". Problemas de Otimização DC tem um grande número de aplicações como nas áreas de economia, engenharia e outros campos de aplicação, como podem ser visto nos artigos Tuy [30], Tuy [31] e Hoai [9]. Este tipo de problema cobre os problemas de otimização convexa padrão e minimização côncava. De fato, qualquer problema de Otimização contínuo sobre um conjunto compacto pode ser transformado como um problema de Otimização DC [30].

Os CDC's, Problemas Canônicos de Otimização DC (CDC), possuem a função objetivo linear e sua região viável é a intersecção de um conjunto convexo com o compleementar de um conjunto convexo aberto. Todos os problemas de otimização DC podem ser reduzidos a sua forma CDC, que tem uma estrutura matemática mais simples que a do problema geral de otimização DC. Assim, algoritmos para resolver o problema CDC possibilitam um tratamento único aos problemas de otimização DC.

1.1 Organização da Dissertação

Esta dissertação esta organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos a revisão bibliográfica. Em seguida, no capítulo 3, é apresentada a teoria de Programação Geométrica, técnica utilizada para resolver problemas com função objetivo convexa. No capítulo 4, são mostrados os principais resultados teóricos sobre funções DC e otimização

DC do problema geral de otimização DC e de sua forma Canônica (CDC). No capítulo 5 o problema de programação geométrica signomial é escrito na forma padrão de diferença convexa e definido como sendo o Problema DC Geométrico (DCG). Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as soluções existentes na literatura e os resultados computacionais obtidos com o algoritmo desenvolvido neste trabalho.

Capítulo 2

Programação Geométrica

A Programação Geométrica é uma técnica de otimização utilizada para resolver algebricamente problemas de otimização não-linear. Foi desenvolvida no início da década de 60 no século passado por Clarence Melvin Zener (1905 - 1993), Richard J. Duffin (1909 - 1996) e Elmor L. Peterson(1938). Em 1961 Zener descobriu uma maneira simples de minimizar funções da forma:

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \ldots, p \tag{2.1}$$

Esse tipo de função foi definido a priori como um polinômio generalizado que passou a se chamar de posinômio. Uma soma de vários posinômios é denominado uma função posinomial. Esses polinômios generalizados apareciam nos modelos matemáticos desenvolvidos por ele ao estudar alguns problemas existentes na Westinghouse Electric Corporation. Ao associar-se com Zener, Duffin e Peterson, formularam uma teoria que denominaram desigualdades geométricas para então desenvolver esta técnica que hoje é a Programação Geométrica [6]. É denominada desta forma devido ao relacionamento existente entre as médias geométricas e aritméticas, as quais são fundamentais na elaboração da teoria de dualidade para este tipo de problema. Num problema de Programação Geométrica as parcelas existentes na função objetivo e nas restrições são chamadas de posinômios e a função objetivo é chamada função posinomial.

Programação Geométrica Generalizada é uma extensão dos problemas de programação geométrica mas, em termos computacionais preservam as restrições do problema de programação geométrica. Podem ser: potências fracionárias de posinomiais, máximo de posinômios, produtos e somas de posinômios. Problemas caracterizados por funções objetivos e/ou restrições que envolvem a diferença de dois ou mais posinômios são chamados de Problemas de Programação Signomial. Para esta classe de problemas em muitos casos só é possível determinar um mínimo local. Para determinar a solução global é necessário utilizar técnicas de otimização global.

2.0.1 O problema primal de programação geométrica posinomial

O problema primal de programação geométrica posinomial é um problema da forma:

$$min\ g_0\left(t\right)$$

Sujeito a:

$$g_k\left(t\right) \leq 1,\ k = 1, \ldots, p,\ t > 0 \tag{2.2}$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \ldots, p \tag{2.3}$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \ldots, n_k\},\ k = 0, 1, \ldots, p$$

$$m_0 = 1,\ m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \ldots, m_p = n_{p-1} + 1,\ n_p = n$$

as constantes c_i são positivas e a_{ij} são números reais.

Um exemplo do Problema de Programação Geométrica Posinomial:

$$\begin{aligned} &Minimize\ t_1^{-1} \\ &\quad s.a. \quad t_1 t_2^{-1} + 0.5 t_3^{-1} \leq 1 \\ &\quad 0.01 t_3 t_4^{-1} + 0.01 t_2 + 0.0005 t_2 t_4 \leq 1 \\ &\qquad t_j > 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

2.0.2 O Problema de Programação Geométrica na forma convexa

Posinômios em geral não são convexos, um exemplo é a função $f\left(t\right) = t^{1/2}$. No entanto, através de uma mudança de variáveis podemos escrever o problema de programação geométrico primal como um problema de programação convexa como será visto no problema abaixo.

Considere a seguinte mudança de variáveis:

$$t_j = e^{z_j}, \quad z_j \in \Re, \quad j = 1, \cdots, m \tag{2.4}$$

Aplicando essa transformação às variáveis t_j do problema 2.3 obtém-se problema de programação geométrica na forma convexa:

$$min\ f_0(z) \tag{2.5}$$

Sujeito a:

$$f_k(z) \leq 0,\ k = 1, \ldots, p,\ z > 0 \tag{2.6}$$

onde

$f_k(z) = log\left(\sum_{i \in J[k]} e^{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j + \widetilde{c}_i}\right)$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \ldots, n_k\},\ k = 0, 1, \ldots, p$$

$$m_0 = 1,\ m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \ldots, m_p = n_{p-1} + 1,\ n_p = n$$

as constantes c_{ij} são positivas e a_{ij} são números reais.

Um exemplo do Problema de Programação Geométrica Convexa:

$Minimize\ -z_1$

$s.a.\quad log\left(e^{z_1 - z_2} + 0.5e^{-z_3}\right) \leq 0$

$log\left(0.01e^{z_3 - z_4} + 0.01e^{z_2} + 0.0005e^{z_2 + z_4}\right) \leq 0$

$z_j > 0, j = 1, 2, 3, 4$

Dado um problema de otimização, associado a ele existe um problema dual. Tal problema é obtido quando estudamos uma teoria chamada Teoria de Dualidade, dentre elas destaca-se: Dualidade Lagrangeana, Dualidade de Wolf, Dualidade Fenchel. Duffin, Zener e Peterson desenvolveram uma teoria de dualidade baseada em uma transformação denominada Transformada de Legendre resultando no problema a seguir.

2.0.3 O problema dual de programação geométrica posinomial

Associado ao problema primal de programação geométrica temos o seu dual, dado por:

$$max\ v(\delta, \lambda) = \prod_{k=1}^{p} \left\{ {\lambda_k}^{\lambda_k} \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \right\} \tag{2.7}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in J[k]} \delta_i = 1 \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\delta_i = 0,\ j = 1, \ldots, m \tag{2.9}$$

$$\delta_i \geq 0 \tag{2.10}$$

A equação 2.8 é chamada condição de normalidade e a condição 2.9 é chamada de condição de ortogonalidade.

Um fato importante é que a função dual v, definida em 2.7, não é uma função côncava, no entanto a função

$$f(\delta) = \ln(v(\delta)) = \sum_{i=1}^{n} \{\delta_i \ln(c_i) - \delta_i \ln \delta_i\} + \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \tag{2.11}$$

satisfaz esta propriedade, sendo a mesma duas vezes diferenciável com matriz Hessiana dada por:

$$\nabla^2 f(\delta) = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & H_p \end{bmatrix}$$

onde

$$H_0 = \begin{bmatrix} -\delta_1^{-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\delta_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\delta_{n_0}^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$H_k = \begin{bmatrix} (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \ldots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \ldots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \ldots & \lambda_k^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \ldots & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) \end{bmatrix}$$

$k = 1, \ldots, p$

O relacionamento entre as variáveis primais e duais de um problema de PG é dado por:

$$\delta_i g_k(t) = \lambda_k c_{ij} \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, \quad i \in J[k] \tag{2.12}$$

Um problema de programação geométrica primal (PPGP) é dito consistente, factível ou viável se existe $t \in \mathbb{R}^m$ que satisfaça as equações 2.2 e 2.3, se $g_k(t) < 1,\ k = 1, \ldots, p$ então o problema (PPGP) é dito superconsistente ou estritamente viável. Um problema de programação geométrica dual (PPGD) é dito consistente, factível ou viável se existe $\delta \in \mathbb{R}^n, \delta_i \geq 0$ que satisfaça 2.8, 2.9 e 2.10. Um problema de programação geométrica é dito canônico se o seu problema dual possuir uma solução viável estritamente positiva, isto é, se existir $\delta \in \mathbb{R}^n, \delta_i > 0$ que satisfaça as equações (2.7) e (2.8). Definimos o grau de dificuldade d de um problema de programação geométrica como: $d = n - (m + 1)$ onde n é o número de termos posinimiais e m é o número de variáveis primais.

2.0.4 Programação Geométrica Generalizada

Um problema de programação geométrica generalizado é um problema de programação geométrica posinomial onde a função objetivo e as restrições são funções especiais de posinômios. Estas funções são: potências fracionárias positivas, máximos de posinômios, somas de posinômios, etc. Os posinômios são preservados por potências de inteiros positivos. Na função de potências fracionárias posinomiais algumas dessas potências podem ser manipuladas através de operações algébricas e esse novo problema ainda têm solução viável e continua sendo um problema de programação geométrica. O termo "programação geométrica generalizada" apresentado aqui difere daquele definido em [6], porque nesta referência o termo programação geométrica generalizada significa uma generalização de desigualdades geométricas.

2.0.5 Programação Geométrica Signomial

O problema primal de programação geométrica signomial

O problema primal de programação geométrica signomial é uma generalização do problema posinomial e pode ser escrito na seguinte forma:

$$min\ g_0(t)$$

Sujeito a:

$$g_k(t) \leq 1,\ k = 1, \ldots, p,\ t > 0 \tag{2.13}$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_i c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \ldots, p \tag{2.14}$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \ldots, n_k\} \qquad k = 0, 1, \ldots, p$$

$$m_0 = 1, \quad m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \ldots, m_p = n_{p-1} + 1, \quad n_p = n$$

as constantes c_i são positivas, a_{ij} são números reais e $\sigma_i = \pm 1$.

Devido a existência de termos negativos, o problema acima não pode ser convertido para um problema convexo usando-se as transformações de variáveis definidas em 2.4. Desta forma os problemas signomiais são problemas não convexos e qualquer ponto que satisfaça as condições de Karush-Kuhn-Tucker pode ser apenas um mínimo local ou apenas um ponto de sela. Tal fato levou inicialmente os pesquisadores a tentarem resolver este tipo de problema usando programação geométrica sequencial, que consiste em resolver problemas signomiais através de uma sequência de problemas de programação geométrica posinomial. Esta metodologia denomina-se condensação. Atualmente as técnicas de otimização global têm sido exploradas, ver [23], [24], [25] e [26], por exemplo.

Capítulo 3

Otimização D.C.

Muitos problemas de otimização envolvem funções que podem ser expressadas como a *diferença entre duas funções convexas* (funções DC). Estas funções compõem parte interessante e importante da otimização não convexa, pelos seus aspectos teóricos e também pelo grande número de aplicações. Isto porque convexidade não é preservada em muitas operações, tais como a multiplicação por escalar negativo, produto de funções, etc. Nas secções seguintes serão apresentadas as propriedades das funções DC e definido o problema denominado de O Problema Geral de Otimização DC, ou simplesmente Problema de Otimização DC. Em seguida são mostrados alguns exemplos de problemas DC e suas respectivas modelagens. Posteriormente o problema de Otimizaçãp DC é colocado em sua forma canônica (CDC).

3.1 Introdução

Otimização de funções que são diferenças de funções convexas ou simplesmente Otimização DC é um campo interessante e importante em otimização não convexa. Isto porque além de vários problemas poderem ser reescritos como problemas de otimização DC, ela goza de propriedades comumente encontradas na otimização, como multiplicação por escalar, máximo de funções, mínimo, valor absoluto e outras. Além disso, um grande número de funções podem ser representadas como a diferença de funções convexas pois um resultado muito importante é o fato de que toda função de classe C-2 tem uma representação DC, veja TUY [32] embora não haja uma representação geral dessa forma, bastando exibir uma representação DC. Nesta secção, serão apresentadas algumas propriedades de funções DC.

Definição 3.1. *:Uma função f definida em um conjunto convexo $X \subseteq \Re^n$ é dita DC em X se, para todo $x \in X$, f pode ser expressada como:*

$$f(x) = p(x) - q(x) \tag{3.1}$$

onde p, q são funções convexas em X.

Uma função que é uma diferença de funções convexas em $\Re^n$ é chamada de função DC. A representação 3.1 é uma decomposição de f como uma função DC.

Definição 3.2. *:Problema de otimização global é chamado de um problema de programação DC se ele pode ser escrito da forma:*

$$\begin{array}{rl} \textit{Minimizar} & f_0(x) \\ \textit{s.a.} & x \in X, \\ & f_i(x) \leq 0, (i = 1, \ldots, m) \end{array} \tag{3.2}$$

Uma característica interessante da programação DC é que alguns problemas que podem ser escritos como o que aparece em 3.2 podem ser reduzidos ao problema canônico de minimizar uma função linear sobre a intersecção de um conjunto convexo com o complementar de um conjunto convexo aberto. O complementar de um conjunto convexo aberto é usualmente descrito como uma restrição convexa reversa, e tem a forma:

$$g(x) \geq 0 \tag{3.3}$$

onde $g : \Re^n \to \Re$ é uma função convexa.

Definição 3.3. *:Um problema canônico DC é um problema de otimização da forma*

$$\begin{array}{rl} \textit{Minimizar} & c^T x \\ \textit{s.a.} & x \in D \\ & g(x) \geq 0 \end{array} \tag{3.4}$$

onde $c \in \Re^n, g : \Re^n \to \Re$ é convexa, e D é um subconjunto convexo compacto do $\Re^n$.

A seguir serão expostas algumas propriedades das funções DC, algumas aplicações e as condições de otimalidade para problemas de Otimização DC na suas formas geral e canônica.

3.1.1 O espaço das funções DC

As funções DC são fechadas para muitas das operações comumente encontradas em otimização. As provas de alguns teoremas e propriedades que não foram mostradas em detalhes neste trabalho podem ser vistas em Horst [11].

Teorema 3.4. *:Seja f, $f_i(i = 1, \ldots, m)$ funções DC. Então as seguintes funções também são DC.*

1. $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *para algum número real* λ_i;
2. $max_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ *e* $min_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$;
3. $|f(x)|, f^+ := max\{0, f(x)\}, f^- := min\{0, f(x)\}$;
4. *o produto* $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$.

Demonstração. :

(2) Seja $f_i = p_i - q_i, (i = 1, \ldots, m)$ uma decomposição DC de f_i. Da igualdade

$$f_i = p_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} q_j$$

segue que

$$max_{i=1,\ldots,m}\{f_i\} = max_{1,\ldots,m}\left\{p_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} q_j\right\}$$

que é a diferença de duas funções convexas, desde que o máximo, assim como a soma de um número finito de funções convexas são funções convexas. A prova para $min_{1,\ldots,m} f_i(x)$ é similar.

(3) Seja $f = p - q$ com p, q convexas. Então temos, $|f| = 2max\{p, q\} - (p + q)$ que é uma decomposição DC de $|f|$. As afirmações f^+ e f^- seguem de (2).

(4) Desde que $f_i = f^+ + f^-$, do ponto de vista de (3) pode-se reduzir a questão de encontrar uma decomposição DC para um produto de duas funções DC não negativas, $f_i = p_i - q_i$ com p_i e q_i não negativas e convexas, para $(i = 1, 2)$. Então

$$f_1 \cdot f_2 = (p_1 - q_1) \cdot (p_2 - q_2)$$
$$= \frac{1}{2}\left[(q_1 + q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2\right] - \frac{1}{2}\left[(p_1 + q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2\right]$$

é uma decomposição DC de $f_1 \cdot f_2$, desde que o quadrado de uma função não negativa convexa seja convexa. O resultado para $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$ segue por indução.

Teorema 3.5. *:Toda função localmente DC é DC.*

Demonstração. :Ver Hartman [8].

Corolário 3.6. *:Toda função $f : \Re^n \to \Re$ cuja segunda derivada parcial é contínua em todos os pontos é DC.*

Demonstração. :Os elementos da Hessiana $\nabla^2 f$ de f são limitados em toda vizinhança fechada $B(x_0, \epsilon)$. Portanto, para $\mu > 0$ suficientemente grande, a função $f(x) + \mu\|x\|^2$ é convexa em $B(x_0, \epsilon)$ (desde que a Hessiana $\nabla^2 f(x) + 2\mu I$ é semidefinida positiva em $B(x_0, \epsilon)$ para μ suficientemente grande). Então $f(x) = \left(f(x) + \mu\|x\|^2\right) - \mu\|x\|^2$ é d.c. em $B(x_0, \epsilon)$ e por isso DC pelo Teorema 4.6.

Corolário 3.7. *:Toda função real contínua em um conjunto convexo compacto $C \subset \Re^n$ é o limite de uma sequência de funções d.c. que converge uniformemente em C.*

Corolário 3.8. *:Seja $f : \Re^n \to \Re$ uma DC e $g : \Re \to \Re$ convexa. Então a composição gof é DC.*

Demonstração. :Seja $x_0 \in \Re^n$ e $y_0 = f(x_0)$. A função convexa $g(y)$ pode ser representada em alguma vizinhança $B(y_0, \epsilon_0)$ de y_0 como o supremo local de alguma família de funções afins, isto é, $g(y) = sup_{i \in I}(a_i y + b_i)$ para $y \in B(y_0, \epsilon_0)$ onde a_i, $b_i \in \Re$, e I é um conjunto de índices tal que $s = sup_{i \in I}|a_i| < \infty$. Seja $f(x) = p(x) - q(x)$, p, q convexas em alguma vizinhança $B(y_0, \epsilon_1)$ satisfazendo $f(B(y_0, \epsilon_1)) \subseteq B(y_0, \epsilon_0)$. Então, para $x \in B(y_0, \epsilon_1)$

$$a_i f(x) + b_i = b_i + a_i p(x) - a_i q(x)$$
$$= [b_i + (s + a_i)\, p(x) + (s - a_i)\, q(x)] - s\,(p(x) + q(x))$$
$$= \widetilde{p_i}(x) - \widetilde{q_i}(x)$$

Com $\widetilde{p_i}$ e $\widetilde{q_i}$ convexas e $\widetilde{q_i}(x) = s\,(p(x) + q(x))$ independente de i. Segue que:

$g(f(x)) = sup_{i \in I}(\widetilde{p_i}(x) - \widetilde{q_i}(x)) = sup_{i \in I}\widetilde{p_i}(x) - \widetilde{q_i}(x) = \widetilde{p_i}(x) - \widetilde{q_i}(x)$ com $\widetilde{p_i}$ convexa.

A função $g \circ f$ é localmente DC e por isso DC por causa do Teorema 4.6.

Teorema 3.9. *:O quadrado $d_M^2(x)$ da função distância é DC para algum subconjunto fechado não vazio M do $\Re^n$*

Demonstração. :Tem-se

$d_M^2(x) = inf\{\|x-y\|^2 : y \in M\}$

$= \|x\|^2 + inf\{-\|x\|^2 + \|x-y\|^2 : y \in M\}$

$= \|x\|^2 - sup\{\|x\|^2 - \|x-y\|^2 : y \in M\}$

$= \|x\|^2 - sup\{2x^T y - \|y\|^2 : y \in M\}$

A norma $p(x) = \|x\|^2$ é convexa e a função $q(x) := sup\left\{2x^T y - \|y\|^2 : y \in M\right\}$ é o supremo local de uma família de funções afins e portanto convexa.

3.2 Condições de Otimalidade

Considere um par de problemas de programação DC dados por:

$$\omega^*{}_\delta = inf\{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) \le \delta\} \tag{3.5}$$

e

$$\psi^*{}_\eta = inf\{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) \le \eta\} \tag{3.6}$$

onde $Z \subseteq \Re^p, \delta, \eta \in \Re$ e ω e ψ são funções finitas em $\Re^p$. Seja $\Omega^*{}_\delta$ e $\Psi^*{}_\eta$ o conjunto das soluções ótimas dos Problemas 3.5 e 3.6, respectivamene.

Definição 3.10. *:Diz-se que os Problemas 3.5 e 3.6 são recíprocos se $\Omega^*{}_\delta = \Psi^*{}_\eta$ (neste caso o princípio da reciprocidade é válido).*

Proposição 3.11. *:Se $Z = \Re^p$, $\omega(z) = \|z\|$ e $\eta = \omega^*{}_\delta$, então o princípio da reciprocidade vale para alguma função contínua $\psi(z)$ sempre que $\{z \in Z : \psi(z) \le \delta\} \neq \emptyset$.*

A prova se encontra em TIKHONOV (1980) [13]

Proposição 3.12. *:Assuma nos Problemas 3.5 e 3.6 que $\eta = \omega^*{}_\delta$ e que $\psi^*{}_\eta = \delta$. Então o princípio da reciprocidade vale para toda função definida no conjunto Z e para funções arbitrárias $\omega(z)$ e $\psi(z)$.*

Demonstração. :Seja z^* seja uma solução ótima de 3.5. Então $z^* \in Z, \omega(z^*) = \omega^*{}_\delta = \eta$ e $\psi(z^*) \leq \delta = \psi^*{}_\eta$, que implica que z^* é solução ótima de 3.6. Então $\Omega^*{}_\delta \subseteq \Psi^*{}_\eta$. A relação $\Omega^*{}_\delta \supseteq \Psi^*{}_\eta$ é análoga.

A seguir serão estabelecidas as condições de otimalidade para o problema de otimização DC derivadas da proposição anterior. Antes disso, será introduzido o conceito de subconjunto robusto do $\Re^p$.

Definição 3.13. *:Seja $Z \subset \Re^p, f : \Re^p \rightarrow \Re$, e $\delta \in \Re$. O conjunto*

$$S(Z, f, \delta) = \{z \in Z : f(z) \leq \delta\}$$

é dito robusto se

$$S(Z, f, \delta) = cl(\{z \in Z : f(z) < \delta\})$$

onde para cada conjunto S, $cl(S)$ é o fecho de S.

Lema 3.14. *:Se nos problemas 3.5 e 3.6 a função ω é convexa e a condição 3.7 é satisfeita*

$$\exists z^0 \in Z : \omega\left(z^0\right) < \omega^* \tag{3.7}$$

,

então o conjunto $S(Z, \omega, \eta)$ é robusto para cada $\eta \geq \omega^*$.

Demonstração. :De 3.7 e da convexidade de ω, segue que para cada $\eta \geq \omega^*$ é válido

$$cl(\{z \in \Re^p : \omega(z) < \eta\}) = \{z \in \Re^n : \omega(z) \leq \eta\}$$

e

$$Z \cap \{z \in \Re^p : \omega(z) < \eta\} \neq \emptyset.$$

Segue que

$$cl(\{z \in Z : \omega(z) < \eta\}) = cl\left(Z \cap \{z \in \Re^p : \omega(z) < \eta\}\right)$$

$$\subseteq Z \cap cl\left(Z \cap \{z \in \Re^p : \omega(z) < \eta\}\right)$$

$$= Z \cap cl\left(Z \cap \{z \in \Re^p : \omega(z) \leq \eta\}\right)$$

$$= S(Z, \omega, \eta).$$

Para mostrar a relação $"' \supseteq "'$, seja

$$z^1 \in S(Z, \omega, \eta) = Z \cap \{z \in \Re^p : \omega(z) \leq \eta\}$$

e sejam (z^0, z^1) e $[z^0, z^1]$ os segmentos aberto e fechado, respectivamente. Então

$$\left(z^0, z^1\right) \subset Z \cap \{z \in \Re^n : \omega(z) < \eta\}$$

e portanto

$$\left[z^0, z^1\right] \subset cl(Z \cap \{z \in \Re^p : \omega(z) < \eta\})$$

isto é

$$z^1 \in cl(\{z \in Z : \omega(z) < \eta\}).$$

Considerando um caso especial do problema3.5

$$\omega^*{}_\delta = inf\left\{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) \leq 0\right\}. \tag{3.8}$$

A seguinte condição de otimalidade para o problema 3.8 é um corolário da Proposição 3.17.

Proposição 3.15. *:Assuma que no problema 3.8 a função ω é convexa, o conjunto $S(Z, \psi, 0) = \{z \in Z : \psi(z) \leq 0\}$ é robusto e a condição 3.7 é satisfeita. Então o ponto viável z^* de 3.8 é uma solução ótima se e somente se*

$$0 = inf\left\{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) \leq \omega(z^*)\right\}. \tag{3.9}$$

Demonstração. :Como $\omega(z^*) \geq \omega^*$, segue que o conjunto $S(Z, \omega, \omega(z^*))$ é robusto pelo lema 4.20. Portanto,

$$inf\,\{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) \leq \omega(z^*)\} = inf\,\{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) < \omega(z^*)\} = 0$$

que implica, no ponto de vista a robustez do conjunto $S(Z, \psi, 0)$, que

$$\omega(z^*) \leq inf\,\{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) < 0\} = inf\,\{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) \leq 0\} = \omega^*.$$

Então, os problemas 3.8 e 3.9 são recíprocos.

Uma importante classe de problemas de otimização DC é:

$$\omega^* = inf\,\{g(x) - h(x) : x \in X\} \tag{3.10}$$

onde g e h são duas funções convexas em $\Re^n$ e X é um subconjunto fechado convexo do $\Re^n$. O resultado seguinte fornece uma condição de otimalidade para o problema 3.10

Proposição 3.16. *:Assuma que o problema 3.10 tem solução. Então o ponto $x^* \in X$ é uma solução ótima se e somente se existe $t^* \in \Re$ tal que*

$$0 = inf\,\{-h(x) + t : x \in X, t \in \Re, g(x) - t \leq g(x^*) - t^*\}. \tag{3.11}$$

Demonstração. :Usando uma variável adicional t, temos

$$\omega^* = inf\,\{g(x) - t : x \in X, t \in \Re, -h(x) + t \leq 0\}. \tag{3.12}$$

$x^* \in X$ é uma solução ótima de 3.10 se e somente se existe $t^* \in \Re$ tal que (x^*, t^*) é uma solução ótima de 3.12. Seja $p = n+1, Z = X \times \Re, \omega(z) = g(x) - t$ e $\psi(z) = -h(x) + t$. Então as condições da proposição 3.17 são satisfeitas e os problemas 3.12 e 3.11 são recíprocos.

3.3 Problema Canônico DC

O problema canônico DC (CDC) é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} && c^T x \\ &\textit{s.a.} && x \in D \\ & && g(x) \geq 0, (i = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $c \in \Re^n, g : \Re^n \to \Re$ é convexa, e D é um subconjunto convexo compacto do $\Re^n$.

3.3.1 Transformação de problemas DC na forma canônica

Neste trabalho, o problema canônico CDC é:

$$min\left\{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\right\},$$

onde $c^T x$ é um produto interno, D é um subconjunto convexo compacto do $\Re^n$ e g é uma restrição reversa convexa.

Teorema 3.17. *:Todo problema de Otimização DC é equivalente a um problema na forma CDC em $\Re^{n+2}$.*

Demonstração. :Considere o problema de Otimização DC na forma:

$$min\left\{f_0(x) : x \in X, f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\right\}$$

onde cada $f_i(x)$ possui uma decomposição DC e D é um subconjunto convexo compacto do $\Re^n$.

O problema acima pode ser escrito na forma

$$min\left\{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\right\}.$$

Utilizando uma variável adicional x_{n+1},

$$min\left\{x_{n+1} : x_{n+1} \in \Re, x \in D, f_0(x) - x_{n+1} \leq 0, f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\right\}$$

Em seguida, é definida a função

$$f(x, x_{n+1}) = max\left\{f_0(x) - x_{n+1}, f_i(x), i = 1, \ldots, m\right\}.$$

Seja $f(x, x_{n+1}) = g(x, x_{n+1}) - h(x, x_{n+1})$ a decomposição do máximo vista anteriormente. Adicionando mais uma variável, x_{n+2}, e escolhendo

$$z = \left\{(x, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \Re^{n+2}\right\},\ D = \left\{z \in \Re^{n+2} : x \in X, g(x, x_{n+1}) - x_{n+2} \leq 0\right\}.$$
$$g(z) = -(h(x, x_{n+1}) - x_{n+2})$$

obtém-se então o problema

$$min\left\{x_{n+1} : z \in D, g(z) \geq 0\right\}.$$

Ou seja, minimizar uma função linear sobre um conjunto convexo e uma restrição reversa convexa, chegando assim na forma CDC.

A seguir, um exemplo do problema de programação geométrica signomial transformado na forma CDC é exposto para melhor entendimento da teoria.

Exemplo: Considere o seguinte problema de otimização

$$\begin{gathered} min \;\; (x_1^4 + x_2 + x_3) - (x_1 + x_2^2 - x_3) \\ \text{s.a. } \mathrm{x}_1 + x_2 + x_3 \leq 6,5 \\ (\mathrm{x}_1 - x_2 - 1,2)^2 + x_3 \leq 4,4 \\ \mathrm{x}_1 \geq 1,4 \\ \mathrm{x}_2 \geq 1,6 \\ \mathrm{x}_3 \geq 1,8 \end{gathered}$$

Primeiramente, deve-se colocar na forma de um problema de otimização DC. Sendo assim, adicionando uma nova varável $x_4 \in \Re$ e reescrevendo o problema como:

$$\begin{gathered} min \;\; x_4 \\ \text{s.a. } (\mathrm{x}_1^4 + x_2 + x_3) - (x_1 + x_2^2 - x_3 + x_4) \leq 0 \\ \mathrm{x}_1 + x_2 + x_3 - 6,5 \leq 0 \\ (\mathrm{x}_1 - x_2 - 1,2)^2 + x_3 - 4,4 \leq 0 \\ \text{1,4 - x}_1 \leq 0 \\ \text{1,6 - x}_2 \leq 0 \\ \text{1,8 - x}_3 \leq 0 \end{gathered}$$

Adicionando uma nova varável $x_5 \in \Re$, tem-se:

$$\begin{gathered} min \;\; x_4 \\ \text{s.a. } (\mathrm{x}_1^4 + x_2 + x_3) \leq x_5 \leq (x_1 + x_2^2 - x_3 + x_4) \\ \mathrm{x}_1 + x_2 + x_3 - 6,5 \leq 0 \\ (\mathrm{x}_1 - x_2 - 1,2)^2 + x_3 - 4,4 \leq 0 \\ \text{1,4 - x}_1 \leq 0 \\ \text{1,6 - x}_2 \leq 0 \\ \text{1,8 - x}_3 \leq 0 \end{gathered}$$

E então o problema fica na seguinte forma CDC:

$$
\begin{gathered}
min \;\; x_4 \\
\text{s.a. } (\mathrm{x}_1 + x_2^2 - x_3 + x_4) - x_5 \geq 0 \\
(\mathrm{x}_1^4 + x_2 + x_3) - x_5 \leq 0 \\
\mathrm{x}_1 + x_2 + x_3 - 6,5 \leq 0 \\
(\mathrm{x}_1 - x_2 - 1,2)^2 + x_3 - 4,4 \leq 0 \\
\text{1,4 - x}_1 \leq 0 \\
\text{1,6 - x}_2 \leq 0 \\
\text{1,8 - x}_3 \leq 0
\end{gathered}
$$

Ou seja, $min \quad \{x_4 : max\,\{h_i\} \leq 0, \quad g(X) \geq 0\}$.

3.3.2 Condições de Otimalidade para o Problema Canônico DC

Considere o problema canônico DC (CDC) com o conjunto viável $F = \{x : g(x) \geq 0\}$, exige-se que o problema CDC satisfaça algumas das seguintes hipóteses:

(H_1) D é compacto e $intD \neq \emptyset$.

(H_2) existe um ponto $x^0 \in D$ satisfazendo $g(x^0) < 0$ e $c^T x^0 < min\left\{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\right\}$.

(H_3) $F = cl\,(intF)$.

A suposição (H_2) significa que $g(x) \geq 0$ é essencial, pois se (H_2) não é satisfeita então o problema (CDC) é equivalente ao problema de minimização convexa:

$$
\begin{aligned}
Minimizar \quad & c^T x \\
s.a. \quad & x \in D
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

A terceira propriedade, é a robustez do conjunto viável $F = \{x \in D : g(x) \geq 0\}$ de (CDC).

Isto significa, em particular, que é excluído o caso onde a intersecção dos conjuntos $\{x : g(x) \geq 0\}$ e D é uma parte da fronteira de D.

A critério de ilustração, considere o seguinte exemplo:

Seja $D = \left\{(x_1, x_2) : \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \leq 1, \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \leq 1\right\}$ e os problemas (1) $\min\left\{-\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{2}x_2 : x \in D, g(x) = x_1^2 + x_1^2 - 8x_1 + 7 \geq 0\right\}$ e (2) $\min\left\{-\frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{2}x_1 : x \in D, g(x) = x_1^2 +\right.$ Enquanto que no problema (1) as condições H1 - H3 são satisfeitas, vê-se que no problema (2) a condição H2 não é.

Seja $G = \{x \in \Re^n : g(x) \leq 0$ e seja ∂A a fronteira do conjunto $A \in \Re^n$.

Teorema 3.18. *:No problema CDC, assuma que D é limitado, F é não vazio e a restrição convexa reversa $g(x) \geq 0$ é essencial. Então existe uma solução ótima na intersecção $\partial D \cap \partial G$ que são as fronteiras de D e G.*

Demonstração. :Como D é limitado e F é não vazio, existe uma solução ótima. Primeiro, vamos mostrar que que toda solução ótimo deve estar em ∂G: suponha que existe uma solução ótima $\overline{x}$ para CDC não em ∂G. Desde que a restrição convexa reversa é essencial, existe um ponto x^0 satisfazendo $g(x^0) < 0$ e $c^T x^0 < c^T \overline{x}$. O segmento de linha aberto $(x^0, \overline{x})$ intercepta a fronteira do conjunto convexo G num ponto

$$\widehat{x} = \lambda x^0 + (1 - \lambda)\overline{x}, \lambda \in (0, 1)$$

que é viável e satisfaz

$$c^T \widehat{x} = \lambda c^T x^0 + (1 - \lambda)c^T \overline{x} \leq \lambda c^T \overline{x} + (1 - \lambda)c^T \overline{x} = c^T \overline{x}.$$

Isto contradiz a otimalidade de $\overline{x}$.

Agora seja $\overline{x} \in \partial G$ uma solução ótima. O conjunto convexo fechado G tem um hiperplano suporte H em $\overline{x}$ cuja interseção $K = H \cap D$ com o conjunto compacto convexo D é um conjunto compacto convexo satisfazendo $\overline{x} \in K \subset F$. Portanto, $min\left\{c^T x : x \in K\right\}$ é atingido no ponto extremo v de K que deve ser o ponto de fronteira de D. Além disso, $\overline{x} \in K \subset F$ implica $c^T v = c^T \overline{x}$, isto é, v é uma solução ótima de CDC e portanto, como mostrado acima, deve ser ao ponto de fronteira de G.

Exemplo 3.19. *:Para ilustrar o teorema acima, considere $D = \left\{(x_1, x_2) \in \Re^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 4, x_2 \geq 0\right\}$, $(\sqrt{3} - 1){x_1}^2 - x_2 + 1$. Temos $\partial D \cap \partial G = \left\{(-1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3})\right\}$ então cada função linear $c_1 x_1 + c_2 x_2$ que atinge seu mínimo sobre D é um ponto que viola a restrição reversa convexa $g(x_1, x_2) \geq 0$ e esta violação deve ser minimizada sobre $D \cap \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \geq 0\}$ em um dos pontos $(-1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3})$.*

Proposição 3.20. *:(Condição de otimalidade necessária) No problema CDC, sejam as hipóteses H_1 e H_2 satisfeitas. Então toda solução ótima $\overline{x}$ de CDC satisfaz*

$$max\left\{g(x) : x \in D, c^T x \leq c^T \overline{x}\right\} = 0 \tag{3.15}$$

Demonstração. :Do teorema 3.28 temos que $g(\overline{x}) = 0$, e por isso $max\left\{g(x) : x \in D, c^T x \leq c^T \overline{x}\right\} \geq 0$. Mas $max\left\{g(x) : x \in D, c^T x \leq c^T \overline{x}\right\} > 0$ é impossível porque um ponto $\widehat{x} \in D$ satisfazendo $g(\widehat{x}) > 0, c^T \widehat{x} \leq c^T \overline{x}$ deve ser uma solução ótima de CDC, desde $\overline{x}$ seja ótimo. Isto portanto implica que $g(\widehat{x}) = 0$ pelo teorema 3.28.

Proposição 3.21. *:(Condição de otimalidade suficiente) Assuma que no problema CDC o conjunto viável F é robusto (condição H_3 é satisfeita) e que o ponto x^0 satisfazendo $g(x^0) < 0$ existe. Seja $\overline{x} \in F$ e $S \supseteq F$ tal que*

$$max\left\{g(x) : x \in S, c^T x \leq c^T \overline{x}\right\} = 0. \tag{3.16}$$

Então $\overline{x}$ é uma solução ótima de CDC

Demonstração. :Assuma que o ponto $\overline{x} \in F$ satisfaz $c^T \widehat{x} < c^T \overline{x}$. Então existe uma bola aberta B em torno de $\widehat{x}$ tal que $c^T x < c^T \overline{x}$ para todo $x \in B$. Como F é robusto, existe uma sequência $\{x_q\} \subset int(F)$ convergindo para $\widehat{x}$. A convexidade da função g e $g(x^0) < 0$ implica que $int(F) \subseteq \{x : g(x) > 0\}$. Isto segue que existe um índice q_0 tal que $x_{q_0} \in int(F) \cap B$, isto é, temos um ponto viável satisfazendo $g(x_{q_0}) > 0$ e $c^T x_{q_0} < c^T \overline{x}$. Isto contradiz 3.16.

Capítulo 4

Programação Geométrica Signomial via DC na forma padrão

Neste capítulo será formulado o problema de programação geométrica na forma padrão do problema de diferença convexa.

O problema de Programação Geométrica Signomial (PGS) é caracterizado por uma função objetivo e/ou restrições que são diferenças de dois posinômios; o problema de programação geométrica signomial contém um ou mais termos com coeficientes negativos. Cada posinômio do problema é um produto de variáveis positivas, sendo que cada uma delas pode estar elevada a uma potência real, multiplicado por uma constante c_i real:

$$M_i(t) = c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}$$

.

Assim, um posinômio $g_k(t)$ é um somatório de monômios $M_i(t)$. Veja Maranas [17]. Agrupando-se os monômios de mesmo sinal, o problema (PGS) pode ser formulado como o seguinte problema de otimização não-linear:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} \quad && g_0(t) = g_0^+(t) - g_0^-(t) && (4.1)\\
&s.a. \quad && g_k(t) = g_k^+(t) - g_k^-(t) \leq 1 \quad k = 1, 2, \cdots, p && (4.2)\\
& && 0 < t_j^L \leq t_j \leq t_j^U \quad j = 1, 2, \cdots, m &&
\end{aligned}$$

Onde

$$g_k^+(t) = \sum_{i \in J^+[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}$$

$$g_k^-(t) = \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, \quad k = 1, 2, \cdots, p \tag{4.3}$$
$$J^+[K] = \{i \in J[k]; \sigma_i = 1\}$$
$$J^-[K] = \{i \in J[k]; \sigma_i = -1\}$$

Em (4.1), $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é o vetor de variáveis; $g_k^+(t)$ e $g_k^-(t)$, para $k = 1, 2, \cdots, p$ são funções posinomiais em t ; a_{ij} são constantes reais arbitrárias e c_i são coeficientes positivos. Os conjuntos $J^+[k]$ e $J^-[k]$ indicam os índices dos posinômios que constituem as partes positivas e negativas da função posinomial $g_k(t)$, respectivamente.

A função objetivo e as restrições da formulação original (PGS) são geralmente funções não-convexas. Aplicando-se em (4.1) a transformação $t_j = \exp(z_j)$ com $j = 1, 2, \cdots, m$, obtém-se o seguinte problema, denotado por (DC), cuja função objetivo e restrições são a diferenças de funções convexas, pois funções posinomiais na forma exponencial são convexas, logo:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} \quad && G_0(z) = G_0^+(z) - G_0^-(z) && (4.4)\\ &s.a. && G_k(z) = G_k^+(z) - G_k^-(z) \leq 0 \quad k = 1, 2, \cdots, p && (4.5)\\ & && z_j^L \leq z_j \leq z_j^U \quad j = 1, 2, \cdots, m && \end{aligned}$$

Sendo,

$$G_k^+(z) = \sum_{i \in J^+[k]} c_i e^{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j}$$

$$G_k^-(z) = \sum_{i \in J^-[k]} c_i e^{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j}, \quad k = 1, 2, \cdots, p$$

Para que $z_j^L = ln\left(x_j^L\right)$, é necessário que $t_j^L > 0$, para $j = 1, 2, \cdots, m$.

4.1 Redução do problema PSG a um problema DC na forma canônica

Uma propriedade importante da programação geométrica é que quando o problema primal tem a forma posinomial, este admite uma reformulação convexa, e a solução global pode ser encontrada resolvendo-se o dual associado, o qual exibe uma estrutura muito mais simples. Quando o problema é signomial, o método mais popular para resolvê-lo é a condensação. A ideia básica da condensação é aproximar um posinômio (soma de monômios) por um único monômio. Em Yang [33] discute-se como um problema signomial pode ser aproximado por um problema posinomial. De acordo com Beightler [4] dois casos podem ocorrer em um problema de PG signomial: a função objetivo ser signomial ou ser posinomial.

Caso 1: A função objetivo é posinomial, ou seja, $J^{-}[k] = \emptyset$

Neste caso é criada uma variável t_0 onde o problema fica como segue. Ou seja, um problema com função objetivo linear onde as restrições podem ser posinimiais ou signomiais.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} \quad && t_0 \\ &s.a. && g_0(t)t_0^{-1} \leq 1 \\ &&& g_k(t) \leq 1 \quad, k = 1, \cdots, p \\ &&& t > 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Usando o item 2 do Teorema 3.4, pode-se escrever o problema (4.6) na forma padrão D.C. que tem como restrições a diferença de funções posinomiais as quais após a transformação exponencial são funções convexas.

$$\textit{Minimizar} \quad t_0 \tag{4.7}$$

$$s.a. \quad G(t) = Max\,\{g_{k^+}(t) - g_{k^-}(t)\} \leq 1, \quad k = 0, \cdots, p \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &D = \{(t, t_0); \quad g_k(t)t_0^{-1} \leq 1; \\ &\quad g_k(t) \leq 1 \ se \ \ J^{-}[k] = \emptyset \\ &\quad L \leq t_i \leq U, \quad i = 1, \ldots, m\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

$G(t)$ ainda é uma função DC pelo item 2 do Teorema 3.4.

Colocando o problema (4.6) na forma canônica CDC onde $G(t) = Max\left\{g_{k^+}(t) - g_{k^-}(t)\right\} = Max\left\{g_{k^+}(t) + \sum\limits_{l=0, l\neq k}^{p} g_{k^-}(t)\right\} - \sum\limits_{k=0}^{p} g_{k^-}(t) = H_1(t) - H_2(t)$, D é definido por (4.9) e H_1 e H_2 são funções posinomiais.

$$\begin{aligned} Minimizar \quad & t_0 \\ s.a. \quad & H_1(t) - H_2(t) \leq 1, \\ & t, t_0 \in D \end{aligned} \tag{4.10}$$

E portanto, o problema (4.6) na forma canônica CDC:

$$\begin{aligned} Minimizar \quad & t_0 \\ s.a. \quad & H_1(t) z^{-1} \leq 1, \\ & (1 + H_2(t)) z^{-1} \geq 1 \\ & t, t_0 \in D \\ & z > 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Apresentando um exemplo para melhor entendimento:

$$\begin{aligned} Minimizar \quad & x_0 \\ s.a. \quad & \frac{x_0}{4} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_0^2}{16} - \frac{x_1^2}{16} \leq 1 \\ & \frac{x_0^2 x_1^{-1}}{6} + \frac{x_1}{6} + \frac{7x_1^{-1}}{3} - x_0 x_1^{-1} \leq 1 \\ & 1 \leq x_0 \leq 100 \\ & 1 \leq x_1 \leq 100 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Aplicando o item 2 do Teorema 2.4:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} && t_0 \qquad (4.13)\\
&s.a. && Max\left\{\frac{x_0}{4}+\frac{x_1}{2}+x_0x_1^{-1}, \frac{x_0^2x_1^{-1}}{6}+\frac{x_1}{6}+\frac{7x_1^{-1}}{3}+\frac{x_0^2}{16}+\frac{x_1^2}{16}\right\}-\left(\frac{x_0^2}{16}+\frac{x_1^2}{16}+x_0x_1^{-1}\right)\leq 1\\
& && 1\leq x_0\leq 100\\
& && 1\leq x_1\leq 100
\end{aligned}$$

O problema na forma CDC fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} && t_0 \qquad (4.14)\\
&s.a. && z^{-1}+\left(\frac{x_0^2}{16}+\frac{x_1^2}{16}+x_0x_1^{-1}\right)z^{-1}\geq 1\\
& && \left(\frac{x_0}{4}+\frac{x_1}{2}+x_0x_1^{-1}\right)T^{-1}\leq 1\\
& && \left(\frac{x_0^2x_1^{-1}}{6}+\frac{x_1}{6}+\frac{7x_1^{-1}}{3}+\frac{x_0^2}{16}+\frac{x_1^2}{16}\right)T^{-1}\leq 1\\
& && x_0^{-1}\leq 1\\
& && x_1^{-1}\leq 1\\
& && \frac{x_0}{100}\leq 1\\
& && \frac{x_1}{100}\leq 1\\
& && Tz^{-1}\leq 1\\
& && z>0\\
& && T>0
\end{aligned}$$

Ou seja, colocando na notação de conjunto: $min\left\{x_0 : max\left\{h_i\right\}\leq 0, g\left(X\right)\geq 0\right\}$

Caso 2: A função objetivo é signomial

O modelo apresentado acima foi definido quando a função objetivo era posinomial. No caso da função objetivo ser signomial é preciso utilizar algumas propriedades matemáticas para colocar o problema na forma padrão.

Minimizar $g_0(t)-h_0(t)$ é equivalente a:

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & t_0 \\ s.a. \quad & g_0(t) - h_0(t) \leq f(t_0) \\ & t, t_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Onde $f : \Re_+ \longrightarrow \Re$ definida por $f(t_0) = \sqrt{t_0} - \frac{1}{\sqrt{t_0}}$. Essa formulação foi utilizada pois a função $f(t_0) = \sqrt{t_0} - \frac{1}{\sqrt{t_0}}, t_0 > 0$ apresenta propriedades que fazem com que o problema original possa ser escrito na formulação (4.16) sem a necessidade de fazer uma verificação prévia do sinal do valor da função objetivo em uma solução viável do problema original. A função f tem as seguintes propriedades:

1. Quando $t_0 \to +\infty, \sqrt{t_0} \to +\infty$ e $-\frac{1}{\sqrt{t_0}} \to 0$. Esse é o caso em que a função objetivo signomial $g_0(t) - h_0(t) > 0$ em um ponto viável $t \in \Re^m_{++}$ do problema signomial original.

2. Quando $t_0 \to 0, \sqrt{t_0} \to 0$ e $-\frac{1}{\sqrt{t_0}} \to -\infty$. Esse é o caso em que a função objetivo signomial $g_0(t) - h_0(t) < 0$ em um ponto viável $t \in \Re^m_{++}$ do problema signomial original.

3. Além disso, f é uma função côncava e estritamente crescente.

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & t_0 \\ s.a. \quad & g_0(t) t_0^{-\frac{1}{2}} - h_0(t) t_0^{-\frac{1}{2}} + t_0^{-1} \leq 1 \\ & g_k(t) - h_k(t) \leq 1 \quad , k = 1, \cdots, p \\ & t > 0. \\ & l_1 \leq t_i \leq U_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{4.16}$$

Escrevendo o Problema de Programação Geométrica Signomial (PGS) na forma padrão DC, na qual será chamado forma padrão DC Geoométrica.

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & t_0 \\
s.a. \quad & h(t,t_0)t_{m+2}^{-1} \geq 1 \\
& g_k^-(t,t_0)t_{m+1}^{-1} \leq 1 \quad , k = 0, \cdots, p \\
& t_{m+1}t_{m+2}^{-1} \leq 1 \\
& t_{m+1} > 0 \\
& t_{m+2} > 0 \\
& l_1 \leq t_i \leq U_i, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Onde:

$$
h(t,t_0) = \begin{cases} h_0(t)t_0^{-\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, & \text{se} \quad J^-[0] = \emptyset \quad e \quad J^-[k] \neq \emptyset \\ \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, & \text{se} \quad J^-[k] \neq \emptyset \end{cases}
$$

$$
g_0^-(t,t_0) = \begin{cases} g_0(t)t_0^{-\frac{1}{2}} + t_0^{-1} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, & \text{se} \quad J^-[0] \neq \emptyset \quad e \quad J^-[k] \neq \emptyset \\ g_0(t_0)t_0^{-1} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, & \text{se} \quad J^-[0] = \emptyset \quad e \quad J^-[k] \neq \emptyset \end{cases}
$$

$$
g_k^-(t) = \begin{cases} g_k(t) + \sum_{l=1; l \neq k}^{p} \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}, & \text{se} \quad J^-[k] \neq \emptyset \\ g_k(t), & \text{se} \quad J^-[k] = \emptyset \end{cases}
$$

Capítulo 5

Solução do Problema PG na forma Canônica

Nesta seção será mostrada de forma detalhada de como o problema de Programação Geométrica na forma DC (PDCG) foi resolvido satisfazendo as contições de otimalidade apresentadas no capítulo 4.

O Problema de Programação Geométrica é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & g_0(t) - h_0(t) \\ s.a. \quad & g_k(t) - h_k(t) \leq 1 \quad , k = 0, \cdots, p \\ & g_k^-(t, t_0) t_{m+1}^{-1} \leq 1 \\ & l \leq t \leq U \end{aligned} \tag{5.1}$$

Onde g_k e h_k são funções da forma:

$g_k(t) = \sum_{i \in J^+[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}$ e $h_k(t) = \sum_{i \in J^-[k]} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}$

com $J[k] = J^+[k] \cup J^-[k]$.

A busca por soluções para um problema de PG signomial não é tão simples como para o caso dos problemas de PG posinomiais. Esse fato ocorre em virtude de o problema de PG signomial não satisfazer o teorema de dualidade para Programação Geométrica descrito na literatura. Duffin [6] e Bazaraa [3]. Neste caso, a abordagem mais utilizada para resolver problemas de PG signomial é por meio da técnica de condensação, que é introduzida inicialmente por Beightler [4].

Se a função h não está presente em uma restrição ou na função objetivo, então a função é posinomial. Mesmo a função objetivo sendo signomial, é possível, através da introdução de uma variável, transformar o problema num problema com função objetivo posinomial.

Problemas de Programação Geométrica signomiais não são convexos, no entanto, a transformação exponencial converte Problemas de Programação Geométrica Signomiais em uma classe de problemas denominados DC Programming, ou seja, restrições da forma $g(t) - h(t)$ são consideradas diferença de funções convexas.

Problemas DC podem ser escritos numa forma padrão que são obtidos através de resultados inerentes a condições necessárias e suficientes para otimalidade global.

Um problema DC está na forma padrão se estiver escrito da seguinte forma, chamado de Problema P

$$\begin{aligned} Minimizar \quad & c^t x && (5.2)\\ s.a. \quad & h(x) \geq 0 && (5.3)\\ & x \in D \end{aligned}$$

Onde, $D \subseteq \Re^n$ é um conjunto convexo e $h : \Re^n \longrightarrow \Re$ também é convexa.

Definindo o problema P1 por:

$$\begin{aligned} Maximizar \quad & h(x) && (5.4)\\ s.a. \quad & c^t x \leq M && (5.5)\\ & x \in D \end{aligned}$$

O problema P possui uma solução global quando o problema P1 tem solução ótima x^* e $h(x^*) = 0$.

Definindo o problema DC Geométrico como sendo o problema DCG1 abaixo:

$$\begin{aligned} Maximizar \quad & h(t, t_0) && (5.6)\\ s.a. \quad & g_k(t) \leq 1 && (5.7)\\ & t_0 \leq M \end{aligned}$$

Onde as restrições posinomiais da forma $g_k(t) \leq 1$ e $h(t, t_0)$ é da forma como definida em 5.1.

Uma solução (t^*, t_0^*) é uma solução global para o Problema de Programação Geométrica Signomial se (t^*, t_0^*) é uma solução ótima de DCG1 e $h(t^*, t_0^*) = 1$, satisfazendo a proposição 3.33 que é a condição suficiente de otimalidade.

A estratégia para resolver este problema é atualizar M de modo que se obtenha (t^0, t_0^0) satisfazendo $h(t^0, t_0^0) = 1$.

Sendo $h(t, t_0)$ uma função posinomial, não é possível maximizá-la diretamente, pois maximização em Programação Geométrica só é permitido se a função objetivo tiver um único termo o que não é o caso de h já que a mesma possui pelo menos dois termos. Com isto, deve-se usar a condensação que é uma técnica tradicional em Programação Geométrica.

Sejam n_h o número de termos posinomiais de h e $w \in \Re^{n_h}$ pesos tais que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} w_i = 1 \ , \quad w_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \overline{h_w(t, t_0)} = \prod_{i=1}^{n_0} \left(\frac{c_i \prod t_j^{a_{ij}}}{w_i} \right)^{-w_i}$$

onde $\overline{h_w(t, t_0)}$ é a forma condensada de $\dfrac{1}{h(t, t_0)}$ já que

$$Maximizar\ h(t, t_0) \Leftrightarrow Minimizar\ \ \frac{1}{h(t, t_0)}$$

Sabendo que $h(t, t_0) = \sum c_i \prod t_j^{a_{ij}} \geq \prod_{i=1}^{n_0} \left(\dfrac{c_i \prod t_j^{a_{ij}}}{w_i} \right)^{w_i}$ logo

$$\frac{1}{h(t, t_0)} \leq \prod_{i=1}^{n_0} \left(\frac{c_i \prod t_j^{a_{ij}}}{w_i} \right)^{-w_i} = \overline{h_w(t, t_0)}.$$

Assim, resolver o DCG1 é equivalente a resolver uma sequência de problemas:

$$\begin{aligned} &Minimizar \quad && \overline{h(t,t_0)} && (5.8)\\ &s.a. && g_k(t) \leq 1 && (5.9)\\ & && t_0 \leq M_k \\ & && l \leq t \leq U \end{aligned}$$

Admita que (t^k, t_0^k) é a solução do problema acima e $p_k = h(t^k, t_0^k)$

Se a sequênia $h^k = \overline{h_{w_k}(t^k, t_0^k)} \cong 1$ e $\overline{h^k} \cong h(t, t_0)$ tem-se a solução aproximada do problema.

Os pesos, w_k é dado pela média ponderada geométrica dos termos signomiais e é atualizado por:
$w_i^k = \dfrac{r_i^k}{\sum r_i^k}$

Onde $h(t, t_0) = \sum c_i \prod t_j^{a_{ij}} = \sum r_i^k$ e $\sum w_i^k = \frac{1}{h^k} \sum r_i^k = \frac{h}{h} = 1$

A atualização de M_k é feita da seguinte maneira: $M_k = t_0^k \overline{h_k^{-2}}$ onde:

$$\overline{h_k} = \begin{cases} Min\left\{\frac{1}{p^2}, \frac{3}{2}\right\}, & \text{se} \quad p < 1 \\ Max\left\{\frac{1}{p^2}, \frac{3}{4}\right\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5.1 Algoritmo

Algoritmo:

Passo 1: Escreva o Problema de Programação Geométrica na forma padrão DC geométrica.

Passo2: Condense a função h com pesos w_k.

Passo3: Resolva o Problema DCG1.

Passo 4: Atualize M_k.

Passo 5: Atualize w_k.

Passo 6: Se $|h_k - 1| < \epsilon$, pare.

De acordo com o algoritmo utilizado para resolver os problemas, foi observado que a metodologia usada é satisfatória já que em alguns problemas o resultado da literatura foi melhorado, como nos problemas 2, 9, 10 e 12 concluindo que o resultado encontrado na literutura não era a solução global. Na tabela 5.1 estão os resultados para comparação das soluções encontradas nos problemas DC geométrico e das soluções encontradas na literatura.

Problema	Solução Problema DC Geométrico	Solução DEMBO, R.S.	Solução N. Mladenovic et al.	Solução Rijckaert-Martens
1	11.964354188901051			11.96
2	-83.166292876248477		-83.2535	-83.21
3	-5.739820299189251		-5.7398	-5.7398
4	-6.048232613753129		-6.0482	-6.0482
5	7049.259701907435	7049.324305	7049.25	7049.247
6	1.143623168507892		1.1437	1.1436
7	0.205653557690020			0.2015
8	0.140611630536061		0.1406	0.1406
9	10122.50013983291	10126.64252	10122.6964	
10	1213.109972529761	1227.1831610	1227.23	
11	3.951248832495454	3.9516982	3.9511	
12	97.599994628275937	97.591034		

Tabela 5.1: Resultados-resumo

Problema	Número de Variáveis	Número de Restrições	Número de Termos	Grau de Liberdade
1	2	1	5	2
2	3	1	6	2
3	4	2	7	2
4	8	4	15	6
5	8	6	19	10
6	10	6	16	5
7	10	7	15	4
8	11	9	19	7
9	5	6	21	15
10	7	14	58	50
11	8	4	16	7
12	13	13	39	25

Tabela 5.2: Problemas - Estatística

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, o problema de programação geométrica signomial foi escrito na forma padrão do problema de diferença de funções convexas, pois foi mostrado que, mesmo a função objetivo sendo signomial o problema pode ser reescrito com uma função objetivo posinomial. Feito isto, tem-se um Problema de Programação Geométrica Signomial com função objetivo posinomial (com um único termo) e com restrições signomiais que estas são escritas como funções DC. Foi desenvolvido um algoritmo que resolve uma sequência de Problemas de Programação Geométrica e atualiza o valor da função objetivo do problema original obtendo o ponto x^0 satisfazendo a condição de otimalidade suficiente da proposição 3.33. Ao reescrever o Problema PGS na forma CDC, ou seja na forma DC Geométrica, obtém-se um problema equivalente ao original e cuja solução, quando encontrada, é global. O algoritmo foi implementado em Matlab utilizando o GGPLAB desenvolvido por MUTAPCIC [19] e se mostrou eficiente na obtenção de soluções pelos testes realizados em problemas da literatura, Nenad [20], Maranas [17] e Dembo [5].

Capítulo 7

Apêndice

Resultados Computacionais

Problema 1 - [Rijckaert-Martens 9]

$$\begin{aligned} Minimize\ & 3.7t_1^{0.85} + 1.985t_1 + 700.3t_2^{-0.75} \\ s.a.\quad & 0.7673t_2^{0.05} - 0.05t_1 \leq 1 \\ & t_j > 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$

Estatística

Número de variáveis : 2

Número de restrições: 1

Número de termos: 5

Grau de dificuldade: 2

Resultados

Solução

$t_1 = 0.8113001939817$

$t_2 = 442.6689247308372$

Valor da função objetivo: 11.964354188901051

Número de iterações: 59

Problema 2 - [Rijckaert-Martens 10],[N. Mladenovic et al. GGP6]

$$\begin{aligned} Minimize\ & 0.05t_1t_2^{-1} - t_1 - 5t_2^{-1} \\ s.a.\quad & 0.01t_2t_3^{-1} + 0.01t_1 + 0.0005t_1t_3 \leq 1 \\ & 1 \leq t_1 \leq 100 \\ & 1 \leq t_2 \leq 100 \\ & 0 \leq t_3 \leq 100 \\ & t_j > 0, i = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 3

Número de Restrições : 1

Número de Termos: 6

Grau de Dificuldade: 2

Resultados

Solução

$t_1 = 87.531982195946483$

$t_2 = 8.879695337700937$

$t_3 = 1.424395696615999$

Valor da função objetivo: -83.166292876248477

Número de iterações: 32

Problema 3 - [Rijckaert-Martens 11],[N. Mladenovic et al. GGP7]

$$\begin{aligned} Minimize\ & t_1 + 0.4t_1^{0.67}t_3^{-0.67} \\ s.a.\quad & 0.05882t_3t_4 + 0.1t_1 \leq 1 \\ & 4t_2t_4^{-1} + 2t_2^{-0.71}t_4^{-1} + 0.05882t_2^{-1.3}t_3 \leq 1 \\ & t_j > 0, i = 1, \cdots, 4 \end{aligned}$$

Estatística

Número de variáveis : 4

Número de restrições: 2

Número de termos: 7

Grau de Dificuldade: 2

Resultados

Solução

$t_1 = 8.130072146577748$

$t_2 = 0.615366246902991$

$t_3 = 0.564043762280587$

$t_4 = 5.636208221492965$

Valor da função objetivo: -5.739820299189251

Número de iterações: 34

Problema 4 - [Rijckaert-Martens 12],[N. Mladenovic et al. GGP8]

$$\begin{aligned} Minimize\ & -t_1 - t_5 + 0.4t_1^{0.67}t_3^{-0.67} + 0.4t_5^{0.67}t_7^{-0.67} \\ s.a.\ & 0.05882t_3x_4 + 0.1t_1 \leq 1 \\ & 0.05882t_7t_8 + 0.1t_1 + 0.1t_5 \leq 1 \\ & 4t_2t_4^{-1} + 2t_2^{-0.71}t_4^{-1} + 0.05882t_2^{-1.3}t_3 \leq 1 \\ & 4t_6t_8^{-1} + 2t_6^{-0.71}t_8^{-1} + 0.05882t_6^{-1.3}t_7 \leq 1 \\ & t_j > 0, i = 1, \cdots, 8 \end{aligned}$$

Estatística

Número de variáveis : 8

Número de restrições: 4

Número de termos: 15

Grau de Dificuldade: 6

Resultados

Solução

$t_1 = 6.462076786069318$

$t_2 = 0.667486214705472$

$t_3 = 1.013760037836145$

$t_4 = 5.933189427804759$

$t_5 = 2.235351055006312$

$t_6 = 0.595770461059619$

$t_7 = 0.400647826333401$

$t_8 = 5.527311991676969$

Valor da função objetivo: -6.048232613753129

Número de iterações: 51

Problema 5 -[Rijckaert-Martens 13],[N. Mladenovic et al. GGP3],[DEMBO,

R.S. Problema 5]

$$\begin{aligned}
Minimize \quad & g_0(t) = t_1 + t_2 + t_3 \\
s.a. \quad & 833.332352t_1^{-1}t_4t_6^{-1} + 100t_6^{-1} \\
& -83333.333t_1^{-1}t_6^{-1} \leq 1 \\
& 1250t_2^{-1}t_5t_7^{-1} + t_4t_7^{-1} - 1250t_2^{-1}t_4t_7^{-1} \leq 1 \\
& 1250000t_3^{-1}t_8^{-1} + t_5t_8^{-1} - 2500t_3^{-1}t_5t_8^{-1} \leq 1 \\
& 0.0025t_4 + 0.0025t_6 \leq 1 \\
& 0.0025t_5 + 0.0025t_7 - 0.0025t_4 \leq 1 \\
& 0.01t_8 - 0.01t_5 \leq 1 \\
& t_j > 0, i = 1, \cdots, 8
\end{aligned}$$

Estatística

Número de variáveis : 8

Número de restrições: 6

Número de termos: 19

Grau de Dificuldade: 10

Resultados

Solução

$t_1 = 576.338690410730$

$t_2 = 1362.166647185890$

$t_3 = 5110.754364310815$

$t_4 = 181.769273267590$

$t_5 = 295.569996908656$

$t_6 = 218.230720049881$

$t_7 = 286.199207181077$

$t_8 = 395.569979601420$

Valor da função objetivo: 7049.259701907435

Número de iterações: 201

Problema 6 -[Rijckaert-Martens 14],[N. Mladenovic et al. GGP9]

$$
\begin{aligned}
Minimize \quad & t_6 + 0.4t_4^{0.67} + 0.4t_9^{0.67} \\
s.a. \quad & t_1^{-1}t_2^{-1.5}t_3t_4^{-1}t_5^{-1} + 5t_1^{-1}t_2^{-1}t_3t_5^{1.2} \leq 1 \\
& 0.05t_3 + 0.05t_2 \leq 1 \\
& 10t_3^{-1} - t_1t_3^{-1} \leq 1 \\
& t_6^{-1}t_7^{-1.5}t_8t_9^{-1}t_{10}^{-1} + 5t_6^{-1}t_7^{-1}t_8t_{10}^{1.2} \leq 1 \\
& t_2^{-1}t_7 + t_2^{-1}t_8 \leq 1 \\
& t_1t_8^{-1} - t_6t_8^{-1} \leq 1 \\
& 10t_{10} \leq 1 \\
& t_j > 0, i = 1, \cdots, 10
\end{aligned}
$$

Estatística

Número de variáveis : 10

Número de restrições: 6

Número de termos: 16

Grau de Dificuldade: 5

Resultados

Solução

$t_1 = 2.094946929956101$

$t_2 = 12.094946971136208$

$t_3 = 7.905053027129663$

$t_4 = 0.459551628439474$

$t_5 = 0.357876296617547$

$t_6 = 0.454769181491416$

$t_7 = 10.454769228419750$

$t_8 = 1.640177739847128$

$t_9 = 1.197204898410308$

$t_{10} = 0.099999999947836$

Valor da função objetivo: 1.143623168507892

Número de iterações: 11

Problema 7 - [Rijckaert-Martens 15]

$$\begin{aligned} Minimize \quad & 0.05t_1 + 0.05t_2 + 0.05t_3 + t_9 \\ s.a. \quad & 0.5t_9t_{10}^{-1} + 0.25t_{10}^{-1} \leq 1 \\ & t_7^{-1}t_{10} - 0.5t_1t_4t_7^{-1} \leq 1 \\ & t_7t_8^{-1} - 0.5t_2t_5t_8^{-1} \leq 1 \\ & t_8t_9^{-1} - 0.5t_3t_6t_9^{-1} \leq 1 \\ & 0.79981t_4t_7^{-1} \leq 1 \\ & 0.79981t_5t_8^{-1} \leq 1 \\ & 0.79981t_6t_9^{-1} \leq 1 \\ & t_j > 0, j = 1 \cdots, 10 \end{aligned}$$

Estatística

Número de variáveis : 10

Número de restrições: 7

Número de termos: 15

Grau de dificuldade: 4

Resultados

Solução

$t_1 = 0.724199584180687$

$t_2 = 0.724199584206219$

$t_3 = 0.724199584238092$

$t_4 = 0.257579866008856$

$t_5 = 0.177099449984139$

$t_6 = 0.121765010869192$

$t_7 = 0.205242301347796$

$t_8 = 0.141114673461799$

$t_9 = 0.097023620058771$

$t_{10} = 0.298511850176084$

Valor da função objetivo: 0.205653557690020

Número de iterações: 23

Problema 8 - [Rijckaert-Martens 17],[N. Mladenovic et al. GGP10]

$$
\begin{aligned}
Minimize \quad & t_3^{-1} \\
s.a. \quad & 0.1t_{10} + t_7 t_{10} \leq 1 \\
& 10t_1 t_4 + 10t_1 t_4 t_7^2 \leq 1 \\
& t_4^{-1} - 100t_7 t_{10} \leq 1 \\
& t_{10} t_{11}^{-1} - 10t_8 \leq 1 \\
& t_1^{-1} t_2 t_5 + t_1^{-1} t_2 t_5 t_8^2 \leq 1 \\
& t_5^{-1} - 10t_1^{-1} t_8 t_{11} \leq 1 \\
& 10t_{11} - 10t_9 \leq 1 \\
& t_2^{-1} t_3 t_6 + t_2^{-1} t_3 t_6 t_9^2 \leq 1 \\
& t_6^{-1} - t_2^{-1} t_9 \leq 1 \\
& t_j > 0, j = 1, \cdots, 11
\end{aligned}
$$

Estatística

Número de variáveis : 11

Número de restrições: 9

Número de termos: 19

Grau de Dificuldade: 7

Resultados

Solução

$t_1 = 7.007340341302981$

$t_2 = 7.651940271722703$

$t_3 = 7.111787314499674$

$t_4 = 0.012492309509317$

$t_5 = 0.810313844076440$

$t_6 = 0.955696960520815$

$t_7 = 0.377309934102169$

$t_8 = 0.360735261752506$

$t_9 = 0.354724459831675$

$t_{10} = 2.095074738801261$

$t_{11} = 0.454724373412390$

Valor da função objetivo: 0.140611630536061

Número de iterações: 352

Problema 9 -[Rijckaert-Martens 23],[N. Mladenovic et al. GGP5],[DEMBO, R.S. Problema 2]

$$
\begin{array}{rl}
\textit{Minimizar} & 5.3578t_3^2 + 0.8357t_1t_5 + 37.2392t_1 \\
s.a. & 0.00002584t_3t_5 - 0.00006663t_2t_5 - 0.0000734t_1t_4 \leq 1 \\
& 0.000853007t_2t_5 + 0.00009395t_1t_4 - 0.00033085t_3t_5 \leq 1 \\
& 1330.3294t_2^{-1}t_5^{-1} - 0.42t_1t_5^{-1} - 0.30586t_2^{-1}t_3^2t_5^{-1} \leq 1 \\
& 0.00024186t_2t_5 + 0.00010159t_1t_2 + 0.00007379t_3^2 \leq 1 \\
& 2275.1327t_3^{-1}t_5^{-1} - 0.2668t_1t_5^{-1} - 0.40584t_4t_5^{-1} \leq 1 \\
& 0.00029955t_3t_5 + 0.00007992t_1t_3 + 0.00012157t_3t_4 \leq 1 \\
& 78 \leq t_1 \leq 102 \\
& 33 \leq t_2 \leq 45 \\
& 27 \leq t_3 \leq 45 \\
& 27 \leq t_4 \leq 45 \\
& 27 \leq t_5 \leq 45
\end{array}
$$

Estatística

Número de variáveis : 5

Número de restrições: 6

Número de termos: 21

Grau de dificuldade: 15

Resultados

Solução

$t_1 = 78.000015225998325$

$t_2 = 33.000008824625866$

$t_3 = 29.995764678305854$

$t_4 = 44.999972064114772$

$t_5 = 36.775295532579584$

Valor da função objetivo: 10122.50013983291

Número de iterações: 12

Problema 10 - N. Mladenovic et al. GGP1 - DEMBO, R.S. Problema 3

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & 1.715t_1 + 0.035t_1t_6 + 4.0565t_3 + 10.0t_4 + 3000.0 - 0.063t_3t_5 \\
s.a. \quad & 0.0059553571t_6^2 + 0.88392857t_1^{-1}t_3 - 0.11756250t_6 \leq 1 \\
& 1.10880000t_1t_3^{-1} + 0.13035330t_1t_3^{-1}t_6 - 0.00660330t_1t_3^{-1}t_6^2 \leq 1 \\
& 0.00066173269t_6^2 + 0.017239878t_5 - 0.0056595559t_4 - 0.019120592t_6 \leq 1 \\
& 56.850750t_5^{-1} + 1.08702000t_5^{-1}t_6 + 0.32175000t_4t_5^{-1} - 0.03762000t_5^{-1}t_6^2 \leq 1 \\
& 0.00619800t_7 + 2462.3121t_2t_3^{-1}t_4^{-1} - 25.125634t_2t_3^{-1} \leq 1 \\
& 161.18996t_7^{-1} + 5.000t_2t_3^{-1}t_7^{-1} - 489510.00t_2t_3^{-1}t_4^{-1}t_7^{-1} \leq 1 \\
& 44.333333t_5^{-1} + 0.33000000t_5^{-1}t_7 \leq 1 \\
& 0.02255600t_5 - 0.00759500t_7 \leq 1 \\
& 0.00061000t_3 - 0.0005t_1 \leq 1 \\
& 0.81967200t_1t_3^{-1} + 0.81967200t_3^{-1} \leq 1 \\
& 24500.0t_2t_3^{-1}t_4^{-1} - 250.0t_2t_3^{-1} \leq 1 \\
& 0.010204082t_4 + 0.000012244898t_2^{-1}t_3t_4 \leq 1 \\
& 0.00006250t_1t_6 + 0.00006250t_1 - 0.00007625t_3 \leq 1 \\
& 1.22t_1t_3^{-1} + 1.0t_1^{-1} - 1.0t_6 \leq 1 \\
& (1500; 1; 3000; 85; 90; 3; 145) \leq (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7) \leq (2000; 120; 3500; 93; 95; 12; 162)
\end{aligned}
$$

Estatística

Número de variáveis : 7

Número de restrições: 14

Número de termos: 58

Grau de dificuldade: 50

Resultados

Solução

$t_1 = 1696.377577539705$

$t_2 = 53.557334182425$

$t_3 = 3019.649809092096$

$t_4 = 91.789692435628$

$t_5 = 94.876239992022$

$t_6 = 9.568285822002$

$t_7 = 150.919598357734$

Valor da função objetivo: 1213.109972529761

Número de iterações: 36

Problema 11 -[N. Mladenovic et al. GGP4],[DEMBO, R.S. Problema 4]

$$\begin{array}{rl} \textit{Minimizar} & 0.4t_1^{0.67}t_7^{-0.67} + 0.4t_2^{0.67}t_8^{-0.67} + 10.0 - 1.0t_1 - 1.0t_2 \\ s.a. & 0.0588t_5t_7 + 0.1t_1 \leq 1 \\ & 0.0588t_6t_8 + 0.1t_1 + 0.1t_2 \leq 1 \\ & 4t_3t_5^{-1} + 2t_3^{-0.71}t_5^{-1} + 0.0588t_3^{-1.3}t_7 \leq 1 \\ & 4t_4t_6^{-1} + 2t_4^{-0.71}t_6^{-1} + 0.0588t_4^{-1.3}t_8 \leq 1 \\ & 0.1 \leq t_i \leq 10, \{i = 1, \ldots, 8\} \end{array}$$

Estatística

Número de variáveis : 8

Número de restrições: 4

Número de termos: 16

Grau de dificuldade: 7

Resultados

Solução

$t_1 = 6.509986687967950$

$t_2 = 2.191708558419759$

$t_3 = 0.666084355156202$

$t_4 = 0.595618701685804$

$t_5 = 5.925075277166160$

$t_6 = 5.526475176059886$

$t_7 = 1.001742001599355$

$t_8 = 0.399531564496209$

Valor da função objetivo: 3.951248832495454

Número de iterações: 51

Problema 12 -[DEMBO, R.S. Problema 6]

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & 1.0t_{11} + 1.0t_{12} + 1.0t_{13} \\
\textit{s.a.} \quad & 1.262626t_8t_{11}^{-1} - 1.231059t_1t_8t_{11}^{-1} \leq 1 \\
& 1.262626t_9t_{12}^{-1} - 1.231059t_2t_9t_{12}^{-1} \leq 1 \\
& 1.262626t_{10}t_{13}^{-1} - 1.231059t_3t_{10}t_{13}^{-1} \leq 1 \\
& 0.034750t_2t_5^{-1} + 0.975000t_2 - 0.009750t_2^2t_5^{-1} \leq 1 \\
& 0.034750t_3t_6^{-1} + 0.975000t_3 - 0.009750t_3^2t6^{-1} \leq 1 \\
& 1.0t_1t_5^{-1}t_7^{-1}t_8 + 1.0t_4t_5^{-1} - 1.0t_4t_5^{-1}t_7^{-1}t_8 \leq 1 \\
& 0.002t_2t_9 + 0.002t_5t_8 + 1.0t_6 + 1.0t_5 - 0.002t_1t_8 - 0.002t_6t_9 \leq 1 \\
& 1.0t_2^{-1}t_3t_9^{-1}t_{10} + 1.0t_2^{-1}t_6 + 500.0t_9^{-1} - 1.0t_9^{-1}t_{10} - 500.0t_2^{-1}t_6t_9^{-1} \leq 1 \\
& 0.9t_2^{-1} + 0.002t_{10} - 0.002t_2^{-1}t_3t_{10} \leq 1 \\
& 1.0t_2t_3^{-1} \leq 1 \\
& 1.0t_1t_2^{-1} \leq 1 \\
& 0.002t_7 - 0.002t_8 \leq 1 \\
& 0.034750t_1t_4^{-1} + 0.975000t_1 - 0.009750t_1^2t_4^{-1} \leq 1 \\
& (0.1; 0.1; 0.9; 0.0001; 0.1; 0.1) \leq t_i \leq (1; 1; 1; 0.1; 0.9; 0.9), \{i = 1, 2, \ldots, 6\} \\
& (0.1; 0.1; 500; 0.1; 1; 0.0001; 0.0001) \leq t_i \leq (1000; 1000; 1000; 500; 150; 150; 150) \\
& \{i = 6, \ldots, 13\}
\end{aligned}
$$

Estatística

Número de variáveis : 13

Número de restrições: 13

Número de termos: 39

Grau de dificuldade: 25

Resultados

Solução

$t_1 = 0.8037726407722$

$t_2 = 0.9000000555112$

$t_3 = 0.9000551379076$

$t_4 = 0.0999997622381$

$t_5 = 0.1908369350639$

$t_6 = 0.7181373668481$

$t_7 = 574.0999520978187$

$t_8 = 74.1000476837105$

$t_9 = 500.0001945624306$

$t_{10} = 0.1014671832855$

$t_{11} = 20.2392802108532$

$t_{12} = 77.3364534688219$

$t_{13} = 0.0242609486008$

Valor da função objetivo: 97.599994628275937

Número de iterações: 97

Referências Bibliográficas

[1] AHUJA, R.K., MAGNANTI,T.L., ORLIN, J.B.; *Network Flows, theory, algorithms and applications* Prentice Hall, Upper Saddle RIver, New Jeersey 07458,1993.

[2] ARENALES,M., ARMENTANO,V., MORABITO,R., YANASSE,H., *Pesquisa Operacional para cursos de Engenharia*, Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 2 reimpressão.

[3] BAZARAA, M .S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M.*Non linear programming: theory and algorithms.* 2 ed. United States: John Wiley Sons, Inc, 1993

[4] BEIGHTLER, C. S.; PHILLIPS, D. T. *Applied Geometric Programming.* John Wiley Sons: United States, 1976

[5] DEMBO, R.S., (1976), *A Set of Geometric Programming test problems and their Solutions*, Mathematical Programming 10, 192-213.

[6] DUFFIN, R. J.; PETERSON, E. L.; ZENER, C. M. *Geometric Programming.* New York: Wiley, 1967.

[7] GOLDBARG, M.C, Luna, H.P.L. *Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos*, 2ed. -Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

[8] HARTMAN,P.; *On Functions Representable as a Difference of Convex Functions*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.9, pp.707-713, 1959.

[9] HOAI AN, L.T.; TAO, P.D.; A continuous approach for globally solving linearly constrained quadratic zero-one programming problems , Optimization, 50, 93120, 2001.

[10] HORST, R.; PHONG,T.Q.; THOAI, N.V.; *On solving general reverse programming problems by a sequence of linear programs and line searches*, Ann. Oper. Res., 25,118, 1990.

[11] HORST, R.; PHONG,T.Q.; THOAI, N.V.; Vries, J.D.; *On solving a DC programming problem by a sequence of linear programs*, J. Global Optim., 2, 183203.1991.

[12] HORST, R.; THOAI, N.V.; BENSON, H.P.; *Concave minimization via conical pratitions and polyhedral outer approximation*, Math. Programming, 50, 259-274,1991.

[13] HORST, R.;THOAI, N.V.; *DC programming: Overview, Journal of Optimization Theory and applications*, vol 103, 1999.

[14] HORST, R.;PARDALOS, P. e THOAI, N., *Introduction To Global Optimization*, Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic publishers, 2a ed, 2000.

[15] LEONE, R.J.G. *Modelagem e Otimização de um Sistema de Telecomunicação sem fio e de uma Carteira de Investimentos*, Tese (doutorado) UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2004.

[16] LIMA JUNIOR, E.F. *Uma estratégia contínua para solução de problemas de localização.* Tese de doutorado,2006 (UFPB/CT/PPGEP).

[17] MARANAS C.D., FLOUDAS C.A., *Global Optimization in Generalized Geometric Programming*, Computers chem. Engng Vol. 21, No. 4, pp. 351-369, 1997 Copyright,1996 - Elsevier Science Ltda.

[18] MACAMBIRA, A.F.U.S.Recobrimento Elipsoidal Utilizando Esferas de Diferentes Raios Tese (doutorado) UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2012.

[19] MUTAPCIC, A.; KOH, K.; KIM, S.; VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. GGPLAB: A Simple Matlab Toolbox for Geometric Programming. Versão 1.00, [S. I.]: General Public License, 22 mai. 2006. Disponível em: http://www.http://stanford.edu/boyd/ggplab/.

[20] MLADENOVIC, N. et al. *General Variable Neighborhood Search for the Continuous Optimization*, European Journal of Operational Research 191 (2008) 753770.

[21] NASCIMENTO, R. Q., Métodos de Pontos Interiores para Programação Geométrica. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.

[22] NÓBREGA, N.P. *Aplicação de Programação Geométrica para Solução de Problemas de Estoques com Múltiplos Objetivos* João Pessoa: UFPB, PPGEP. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)

[23] PEIPING S., *Linearization method of global optimization for generalized geometric programming*, Applied Mathematics and Computation 162 (2005),no. 1, 353 370.

[24] PEIPING S. and HONGWEI J., *A new rectangle branch-and-pruning approach for generalized geometric programming*, Applied Mathematics and Computation 183 (2006), no. 2, 1027 1038.

[25] PEIPING S. and KECUN Z., *Global optimization of signomial geometric programming using linear relaxation*, Applied Mathematics and Computation 150 (2004), no. 1, 99 114.

[26] RIJCKAERT, M.J. and MARTENS, X.M., *Comparison of generalized geometric programming algorithms*, Journal of Optimization Theory and Applications 26 (1978), 205242, 10.1007/BF00933404.

[27] SILVA, S.N. *Problemas do caminho mais curto com restrições adicionais.* Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 2008. Dissertação (Mestrado)

[28] RAVINDRA K. AHUJA, Thomas L. MAGNANTI, and JAMES B. ORLIN (1993).textit Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications, Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 1993.

[29] TAHA, H. A.*Pesquisa Operacional: uma visão geral.* 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008

[30] TUY, H.; AL-KHAYYAL, F.; ZHOU, F.; A DC Optimization Method for Single Facility Location Problems J. Global Optim., 7: 209-227, 1995.

[31] TUY, H.;Convex Analysis and Global Optimization, Honai, Vietnam: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[32] TUY, H.;Canonical DC programming problem: Outer approximation methods revisited, Operations Research Letters 18, 99-106, 1995.

[33] YANG, H. H., BRICKER, D. L. (1996). Investigation of Path-Following Algoritms for Signomial Geometric Programming Problems. European Journal of Operational Research, 103:230241.