

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

ROBERTA RIBEIRO GUEDES PEREIRA

**SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS VIA ANÁLISE
DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA**

João Pessoa

2012

ROBERTA RIBEIRO GUEDES PEREIRA

SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS VIA ANÁLISE DE
SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA

*Dissertação apresentado à Pós-Graduação de Engenharia de
Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de
Produção.*

Orientador: Dr. Jairo Rocha de Faria

João Pessoa

2012

P436s Pereira, Roberta Ribeiro Guedes

Segmentação de Imagens via Análise de Sensibilidade. / Roberta Ribeiro Guedes Pereira – João Pessoa, 2012.

77f. il.:

Orientador: Prof. Dr. Jairo Rocha de Faria

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção. Centro de Tecnologia - CT. Universidade Federal da Paraíba - UFPB.

1. Processamento de imagens digitais 2. Segmentação de Imagens 3. Derivada topológica 4. Análise de sensibilidade topológica I. Título.

BC/UFPB

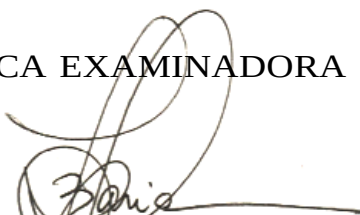
CDU: 658.5:004.383.5(043)

Roberta Ribeiro Guedes Pereira

Segmentação de Imagens via Análise de Sensibilidade Topológica

Dissertação apresentada à Pós-Graduação de Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção apresentado em abril de 2012.

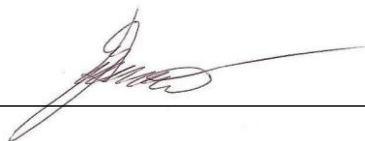
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jairo Rocha de Faria

Orientador

Universidade Federal da Paraíba



Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba



Prof. Dr. Leonardo Vidal Batista

Examinador Externo

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Waldir Leite Roque

Examinador Externo

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Ao meu avô, meu eterno exemplo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

À toda minha família, em especial minha mãe e meus irmãos, por serem tudo em minha vida;

Ao meu avô e minha avó *in memoriam*, por não terem medido esforços para me proporcionar uma boa educação;

Ao meu namorado, Jemerson, meu amor, minha fonte de tranquilidade e segurança;

Ao meu orientador, Jairo Rocha de Faria, pelo conhecimento passado, pela orientação, paciência e dedicação;

Aos professores Roberto Quirino do Nascimento e Lucidio dos Anjos Formiga Cabral pelo conhecimento transmitido e por todo apoio, estímulo e atenção oferecidos durante o período do mestrado.

Aos professores do PPGEF, pelo valioso conhecimento passado durante os últimos anos.

À todos os professores que passaram em minha vida, pois tiveram grande contribuição na minha formação.

Aos meus colegas do Laporte, que me permitiram trabalhar num ambiente extremamente amigável e respeitoso, em especial à Leandro, que acompanhou de perto as angústias e vitórias deste trabalho; à Nádia pela amizade e pela incomensurável ajuda com o Latex;

Aos meus queridos amigos que fiz no mestrado, que pretendo levar para toda vida, pelos momentos sensacionais que compartilhamos juntos, sem os quais eu seria menos feliz;

Ao PPGEF e seus funcionários, em especial Ana e Elizandra, por serem tão atenciosas, competentes e facilitarem enormemente minha vida;

À população brasileira, por financiar meus estudos através do programa CAPES.

Roberta Ribeiro Guedes Pereira

RESUMO

A segmentação é a fase do processamento de imagens onde a imagem de entrada é dividida em partes ou objetos constituintes. Em geral, a segmentação automática é uma das tarefas mais difíceis no processamento de imagem digital .

Neste trabalho é empregada a análise de sensibilidade topológica como técnica de segmentação. A ideia da segmentação de imagens via análise de sensibilidade topológica é considerar a mudança de classe de um pixel como perturbação infinitesimal não suave e, calcular a sensibilidade a esta perturbação através de um funcional de forma associado a esta perturbação. De fato, os algoritmos encontrados na literatura que utilizam a abordagem acima são baseados no funcional de Mumford-Shah cujo valor mínimo está associado à imagem segmentada. A derivada topológica é um campo escalar que fornece uma aproximação de primeira ordem do funcional associado a perturbação de cada pixel para cada uma das classes da segmentação. Assim, nos pixels onde a derivada topológica assume seus valores mais negativos a função custo irá diminuir e a mudança correspondente irá resultar numa segmentação melhor do que a anterior.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma análise comparativa entre quatro algoritmos de segmentação baseados em derivada topológica, sendo três deles extraídos da literatura: Topo-Shape 1, Topo-Shape 2 e Sdt-Discrete , e o último Topo-Shape3, novo algoritmo proposto. A construção deste algoritmo é motivada pela análise dos algoritmos anteriores e características limitantes encontradas, o que derivou resultados com maior qualidade e desempenho.

Palavras-chave: processamento de imagens digitais, segmentação de Imagens, derivada topológica, análise de sensibilidade topológica.

ABSTRACT

Segmentation is the phase of the image processing where the input image is divided into constituent parts or objects. In general, the automatic segmentation is one of the most difficult tasks in digital image processing.

In this work we used the topological sensitivity analysis as segmentation technique. The idea of segmentation of images via topological sensitivity analysis is to consider the class switching as an infinitesimal non-smooth perturbation of a pixel and calculate the sensitivity to this perturbation by a functional form associated with this disorder. In fact, the algorithms in the literature using the above approach are based on the Mumford-Shah functional whose minimum value is associated with the segmented image. The topological derivative is a scalar field that provides a first order approximation of the functional disorder associated with each pixel for each class of segmentation. Thus, in pixels where the topological derivative takes its most negative values ??will decrease the cost function and the corresponding change will result in better targeting than the previous.

This work aims to present a comparative analysis of four segmentation algorithms based on topological derivative, three of them taken from the literature: Top-Shape 1, Shape 2 and Top-Sdt-Discrete, and the last top-Shape3, a new algorithm. The construction of the last algorithm is motivated by the analysis of the previous algorithms and limiting characteristics found, and derived results with higher quality and performance.

Keywords: digital image processing, imagem segmentation, topological derivative, topological sensitivity analysis.

Lista de Figuras

1.1	objetivos e delimitações do trabalho.	4
2.1	representação matricial de uma imagem	5
2.2	etapas de um sistema de processamento de imagem	6
2.3	conceitos de vizinhanças	8
2.4	imagem segmentada com limiarização global	9
2.5	imagem segmentada utilizando detecção de bordas	10
2.6	máscara genérica 3×3	11
2.7	máscara para identificação de ponto	11
2.8	imagem segmentada utilizando segmentação por regiões	12
3.1	técnicas de otimização estrutural.	16
3.2	inserção de uma perturbação no domínio.	16
4.1	imagem da Lena.	32
4.2	imagem da Lena segmentada em 3 classes.	33
4.3	(a) Imagem original poluída com ruído gaussiano de variância 0.1. (b) Imagem segmentada sem o controle da medida das bordas ($\delta = 0$).	35
5.1	imagem teste IM01.	52
5.2	imagem teste IM02.	52
5.3	imagem teste IM03.	53
6.1	índice vs. $(\bar{\sigma}^2)$	56
6.2	tempo vs. $(\bar{\sigma}^2)$	57
6.3	iterações vs. $(\bar{\sigma}^2)$	57
6.4	imagem teste 2.	58

6.5	imagem teste 3.	59
6.6	imagem IM03 segmentada em 3 classes pelos algoritmos TS1 (a), TS2 (b), SD (c) e TS3 (d), respectivamente.	61
6.7	imagem IM03 segmentada em 4 classes pelos algoritmos TS1 (a), TS2 (b) e TS3 (c), respectivamente.	62

Lista de Tabelas

2.1	técnicas de segmentação por regiões.	12
5.1	nomenclatura dos algoritmos.	54
6.1	resultado da segmentação da imagem IM01.	56
6.2	resultados imagem IM02.	58
6.3	resultados da imagem IM03 em 3 classes.	60
6.4	resultados da imagem IM03 em 4 classes.	60
7.1	resultados imagem IM01 sem ruído.	65
7.2	resultados para a imagem IM01 com ruído gaussiano branco de variância 0.01 e 0.02	65
7.3	resultados para a imagem IM01 com ruído gaussiano branco de variância 0.03 e 0.04	66
7.4	resultados para a imagem IM01 com ruído gaussiano branco de variância 0.05 e 0.06	66
7.5	resultados para a imagem IM01 com ruído gaussiano branco de variância 0.07 e 0.08	66
7.6	resultados para a imagem IM01 com ruído gaussiano branco de variância 0.09 e 0.1	67

Sumário

1	Introdução	2
2	Fundamentos da Imagem	5
2.1	Imagem Digital	5
2.2	Processamento de imagem	6
2.3	Operações sobre a imagem	7
2.3.1	Vizinhança dos pixels	7
2.4	Segmentação	8
2.4.1	<i>Threshold</i> (limiarização)	9
2.4.2	Detecção de bordas	9
2.4.3	Segmentação de Regiões	12
3	Análise de sensibilidade topológica	15
3.1	Derivada Topológica	15
3.1.1	Estado da arte da Análise de Sensibilidade Topológica	17
4	Segmentação de Imagens via Análise de Sensibilidade Topológica	25
4.1	Derivada Topológica em Segmentação de Imagens	25
4.1.1	O funcional de Mumford-Shah e o problema de segmentação de imagens	26
4.1.2	A formulação do problema	27
4.1.3	Cálculo da Derivada Topológica	28
4.1.4	Sdt-Discrete	32
4.1.5	Algoritmo Topo-Shape 1	36
4.1.6	Algoritmo Topo-Shape 2	40

4.2	Algoritmo Topo-Shape 3	49
5	Metodologia	51
5.1	Tipo da pesquisa	51
5.2	Ambiente de estudo	51
5.3	População e amostra	52
5.4	Instrumento de coleta de dados	52
5.5	Definição de variáveis	53
5.6	Procedimentos de análise	53
6	Experimentos numérico e análise	55
6.1	Experimento 1	55
6.2	Experimento 2	57
6.3	Experimento 3	58
7	Conclusão	63
7.1	Contribuições do Trabalho	63
7.2	Trabalhos Futuros	63
7.3	Resultados numéricos do Experimento 1	65
	Referências Bibliográficas	77

Capítulo 1

Introdução

A automação é um sistema de controle pelo qual os mecanismos verificam seu próprio funcionamento, efetuando medições e correções, sem a necessidade da interferência do homem. Na produção industrial, a automação de atividades proporciona diversas vantagens como redução de perdas, diminuição de custo e maior desempenho [24]. Algumas atividades utilizam a visão do ser humano como uma ferramenta para sua realização. O sistema de visão humano é adaptado para funcionar em um mundo de variedades e mudanças, logo a repetição de tarefas causa monotonia e fadiga fazendo com que seu desempenho diminua. Além disso, a interpretação visual é subjetiva e variável podendo gerar resultados inadequados [103]. Nesse contexto, o processamento automático de imagens digitais recebe destaque podendo substituir atividades que necessitam da visão humana.

O desenvolvimento de um projeto industrial que utilize imagens supõe um razoável conhecimento inicial do produto e exige técnicas rápidas para atender processos em tempo real. Suponha, por exemplo, uma linha de produção onde as dimensões de uma peça metálica são verificadas através de análise da sua imagem. Precisamos conhecer as especificações das dimensões da peça, por exemplo, e é necessário rapidez para que o processo não se torne um gargalo. Uma vez que as especificações dos produtos são geralmente conhecidas, o uso da visão computacional na indústria tem tornado-se cada vez mais atrativa devido a evolução e redução de preços de tecnologias relacionadas ao processamento de imagem.

Em aplicações industriais que utilizam visão computacional, as imagens são capturadas, processadas, analisadas e a partir dos resultados obtidos o sistema realiza

tomadas de decisão que podem envolver, por exemplo: ação mais adequada de um robô (sistemas automáticos de navegação robótica) [28, 69], separação entre produtos de uma linha de produção a partir da sua identificação (reconhecimento de objetos), aceitação ou rejeição de produtos fora de conformidade (inspeção) [32, 92], detecção de defeitos para controle de qualidade (em produtos têxteis, chapas metálicas, produtos alimentícios, etc.) [26, 102], o reconhecimento de caracteres para fins de rastreabilidade da produção (que pode ser também aplicado no comércio ou em sistemas bancários), entre outras.

Na inspeção visual automática são utilizados aparelhos fotográficos e de filmagem para obtenção das imagens dos objetos que serão verificados. A imagem a ser avaliada é comparada a algum padrão pré-estabelecido. Esse processo comumente ocorre em três etapas [27]:

1. a aquisição das imagens;
2. localização dos objetos;
3. análise e medição dos objetos.

Se durante o processo a visão humana for utilizada como ferramenta, o processo é dito não automático. No entanto, como citado anteriormente, o fator humano pode ocasionar erros. Assim, é desejável que o processo seja totalmente realizado por máquina. Para a automação do método, é necessário que a partir das imagens que serão avaliadas (1), suprimir objetos que não são de interesse e realizar um pré-processamento na imagem, de forma a dar maior confiabilidade aos parâmetros a serem extraídos (2); em seguida, obter a identificação e dimensionamento de possíveis falha do objeto inspecionado (3). Para este objetivo, é necessário segmentar a imagem, ou seja, identificar as estruturas e objetos nela presentes.

Na segmentação, os objetos são localizados através de seus contornos ou através do agrupamento dos *pixels* que o compõe, formando regiões com *pixels* que possuem semelhança de algum atributo como, por exemplo, a intensidade do tom de cinza em uma imagem monocromática. A quantidade de regiões em que a imagem é segmentada vai depender do seu conteúdo, e a escolha do número adequado de regiões é essencial para uma segmentação de qualidade.

Por outro lado, otimização topológica ¹ é uma técnica que busca obter topologias

¹inicialmente, admitia-se apenas furos como perturbação, o que cunhou o termo *topológica*

ótimas através da avaliação de uma função custo a partir da inclusão de perturbações infinitesimais e não suaves no domínio de definição do problema, no operador ou em termos-fontes. Aplicada à segmentação de imagens apresenta, além de resultados de segmentação de qualidade, uma diminuição considerável do custo computacional, comparado a outros métodos existente na literatura [49, 59].

O trabalho de Sokolowski & Zochowski [95] estabeleceu as bases matemáticas da otimização topológica fornecendo uma expansão assintótica para um problema que admite uma perturbação infinitesimal não-suave. O principal termo desta expansão foi denominado derivada topológica [95], que fornece a sensibilidade do problema para a perturbação. Esta abordagem é denominada, portanto, análise de sensibilidade topológica. Nos trabalhos de Larrabide [59] e Hintermuller e Laurin [49], foram propostos algoritmos de segmentação de imagens que utilizam como base a análise de sensibilidade topológica, Sdt-Discrete e Topo-Shape 1 e 2, respectivamente. Apesar da semelhança de abordagem, a forma como a técnica é aplicada ao problema e implementada difere entre os algoritmos, o que produz resultados e limitações diferentes.

Como ilustrado na Figura 1.1, neste trabalho foi feita uma análise estrutural e uma comparação dos algoritmos Sdt-Discrete, Topo-Shape 1 e Topo-Shape 2. Além disso, foram levantadas características limitantes de cada um deles. Por fim, foram utilizadas algumas funcionalidades dos algoritmos para a proposição de um novo algoritmo, o Topo-Shape 3, a fim de obter melhores resultados e desempenho.

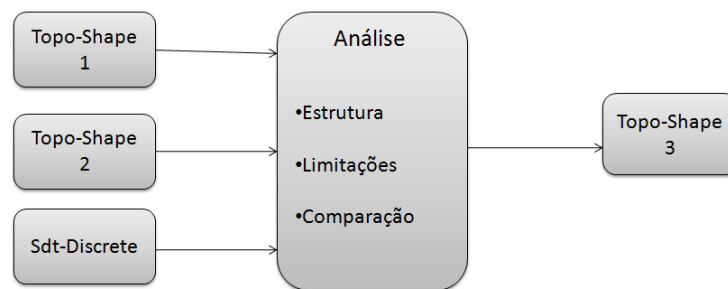


Figura 1.1: objetivos e delimitações do trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos da Imagem

2.1 Imagem Digital

A imagem digital pode ser considerada uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem e o correspondente valor do elemento da matriz identifica a intensidade $f(x, y)$ naquele ponto. No caso de imagem bidimensionais, os elementos da matriz são chamados de elementos de imagem ou *pixels*.

Pode-se observar na Figura 2.1 a representação matricial de uma imagem.

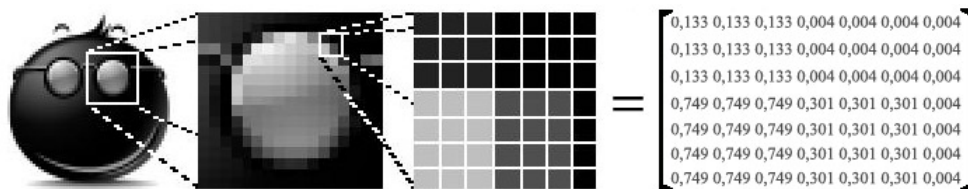


Figura 2.1: representação matricial de uma imagem

Neste trabalho, as imagens tratadas serão monocromáticas em escala de cinza, ou seja, cada valor da matriz quantificará o nível de cinza do seu respectivo *pixel*. No entanto, o trabalho pode ser facilmente estendido para outros padrões de coloração, como por exemplo, o padrão RGB, onde associado a cada *pixel* existem três valores que representam os níveis de vermelho, azul e verde.

2.2 Processamento de imagem

Os passos fundamentais necessários para executar uma tarefa de processamento de imagem são apresentados na Figura 2.2 [25].

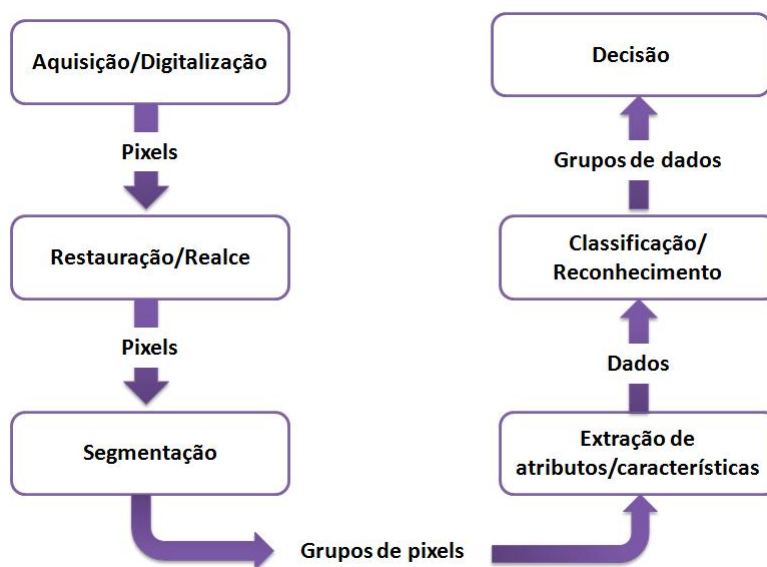


Figura 2.2: etapas de um sistema de processamento de imagem

O primeiro passo no processo é a aquisição da imagem. Nessa etapa, a imagem é capturada a partir de componentes físicos e digitalizada. Na digitalização, a imagem é amostrada e quantizada. A amostragem é referente ao número de pontos utilizados em uma imagem e a quantização refere-se à quantidade de níveis de cinza que podem ser atribuídos a cada ponto digitalizado.

Após obter uma imagem digitalizada, temos a etapa de restauração e realce. O realce tem por objetivo destacar detalhes da imagem que são de interesse para a análise ou que tenham sofrido alguma deteriorização. Quando a imagem encontra-se deteriorada, utilizam-se técnicas de restauração. A restauração busca compensar deficiências específicas geradas no momentos de aquisição, transmissão ou alguma etapa do processamento. Em Larrabide *et al.* [59], por exemplo, foi proposto um algoritmo baseado em análise de sensibilidade topológica para a restauração de imagens médicas.

O próximo passo é a segmentação. Definida em termos gerais, a segmentação divide uma imagem de entrada em partes ou objetos constituintes. Em geral, a segmentação automática é uma das tarefas mais difíceis no processamento de imagem digital [38]. A saída do estágio de segmentação é constituída por um grupo de *pixels*, correspondendo

tanto à fronteira de uma região como a todos os pontos dentro da mesma.

Na extração de atributos e características, utilizando imagens já segmentadas, torna-se possível obter dados relevantes ou atributos das regiões ou objetos destacados.

Uma vez que os descritores da imagem e dos objetos segmentados encontram-se disponíveis, passa-se à etapa seguinte, que consiste em distinguir objetos na imagem agrupando esses parâmetros de acordo com sua semelhança para cada região de *pixels* encontrada. Essa é a função dos processos de classificação e reconhecimento. No reconhecimento o objetivo é que os objetos sejam identificados como pertencentes a um mesmo grupo, e então sejam classificados em uma base de imagens.

Na fase de decisão, serão tomadas as decisões do sistema. Isso pode ser feito a partir de indagações simples a respeito de parâmetros extraídos dos objetos ou de algoritmos mais complexos de inteligência artificial.

2.3 Operações sobre a imagem

No processamento de imagens, estabelecer relações entre os *pixels* é essencial, principalmente para a fase de segmentação, pois os elementos são comparados para detecção de bordas que delimitam objetos e das regiões que os formam. Para isso, é necessário considerar a vizinhança de cada *pixel* da imagem, podendo-se, assim, efetuar operações com os valores de níveis de cinza.

2.3.1 Vizinhança dos pixels

Em geral, são consideradas três tipos de vizinhanças para o *pixel* p :

- a *vizinhança-de-4* representada por $N_4(p)$;
- a *vizinhança-de-8* representada por $N_8(p)$;
- a *vizinhança-de-8* representada por $N_8(p)$.

Um *pixel* p nas coordenadas (x, y) possui quatro vizinhos horizontais e verticais, e quatro vizinhos diagonais. A $N_4(p)$ na coordenada (x, y) é dado pelos vizinhos horizontais e verticais encontrados nas coordenadas: $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$ e $(x, y - 1)$. A $N_8(p)$ é formado pelos vizinhos diagonais do *pixel* da posição (x, y) . Os vizinhos diagonais

possuem coordenadas $(x + 1, y + 1)$, $(x + 1, y - 1)$, $(x - 1, y - 1)$ e $(x - 1, y + 1)$. A vizinhança-de-8 p é dada pelos vizinhos que compõe a $N_4(p)$ juntamente com o vizinhos diagonais $N_d(p)$ do *pixel*. Na Figura 2.3 [33] os quadrados em cinza mostram o conjunto de vizinhanças de um *pixel* p .

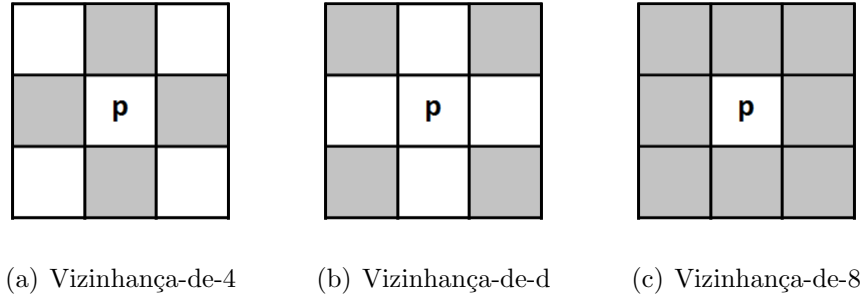


Figura 2.3: conceitos de vizinhanças

2.4 Segmentação

Como mencionado anteriormente, segmentação é um processo pelo qual uma imagem de entrada é particionada em estruturas com conteúdo relevante para uma aplicação desejada. As abordagens convencionais são baseadas nas propriedades básicas dos *pixels* da imagem, buscando detectar descontinuidade ou similaridades entre eles [38].

Na primeira abordagem, a mudança abrupta das intensidades dos *pixels* é o critério para o particionamento da imagem, identificando o contorno de um grupo de *pixels* com intensidade semelhante. Na segunda, procura-se agrupar os *pixels* que apresentam valores que obedeçam a um critério de semelhança para um conjunto de determinada característica. A seleção das características está relacionada ao domínio da aplicação e deve produzir um conjunto de regiões homogêneas.

As abordagens que originam a maioria das técnicas de segmentação são:

- *threshold* (limiarização);
- detecção de bordas;
- segmentação por regiões.

A seguir, serão apresentadas as definições, assim como algumas técnicas derivadas das mesmas.

2.4.1 *Threshold* (limiarização)

A limiarização é uma das técnicas mais simples de segmentação, consistindo na classificação dos *pixels* de uma imagem de acordo com a especificação de um ou mais limiares. A partir do limiar, a imagem é transformada em uma imagem binária. Por exemplo, em uma imagem onde os valores de níveis de cinza variam de 0 até 1, definindo-se um limiar 0.45, todos os *pixels* com intensidade acima desse valor receberão o valor 1, e os que estão abaixo receberão o valor nulo, como pode ser visto na Figura 2.4. A seleção correta do valor de limiar é crucial para que o processo de segmentação baseada na limiarização produza bons resultados.

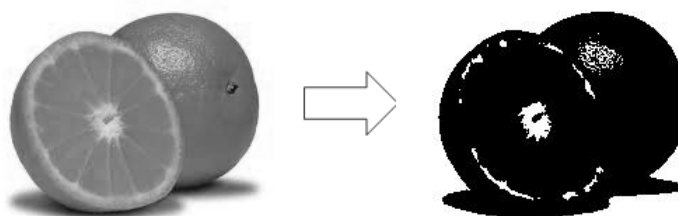


Figura 2.4: imagem segmentada com limiarização global

Quando um único valor de limiar é selecionado para segmentar toda a imagem, o processo é conhecido como limiarização global. Diversas técnicas foram desenvolvidas na literatura, como por exemplo, o particionamento do histograma. Em geral, a limiarização global não é adequada, pois as imagens podem conter variações nos níveis de cinza dos objetos e do fundo por causa da iluminação não-uniforme, ruídos, parâmetros do dispositivo de aquisição não-uniforme e outros fatores. Para essas situações, melhores resultados podem ser obtidos por meio de segmentação utilizando múltiplos valores de limiar. Esse processo é conhecido como limiarização local, tal que os valores de limiar podem variar sobre a imagem como uma função de suas características locais.

2.4.2 Detecção de bordas

O método de detecção de borda identifica o limite ou a fronteira entre duas regiões com propriedades relativamente distintas de nível de cinza, como pode ser visto na Figura 2.5. A ideia associada à maioria das técnicas clássicas para detecção de bordas é o cálculo de um operador local diferencial. A derivada de primeira ordem mede a taxa de variação de

uma função. Nas imagens esta variação é maior nas bordas e menor no interior das regiões. Assim podemos utilizar a magnitude da derivada primeira para a detecção de uma borda. A derivada de segunda ordem indica que há uma mudança de sinal na transição dos níveis de cinza, permitindo a localização das bordas em uma imagem. Computacionalmente, uma maneira comum de calcular derivadas de primeira e segunda ordem dos *pixels* é por meio da varredura da imagem por uma máscara.

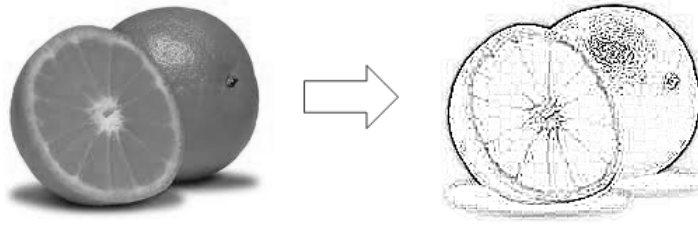


Figura 2.5: imagem segmentada utilizando detecção de bordas

As máscaras são matrizes em que cada posição está associada a um valor numérico w , chamado peso ou coeficiente (Figura 2.6). A aplicação da máscara com centro nas coordenadas (x, y) , sendo x a posição da coluna e y a posição de uma dada linha da imagem, consiste na substituição do valor do *pixel* na posição (x, y) por um novo valor, o qual depende dos valores dos *pixels* vizinhos e dos pesos da máscara. O procedimento envolve o cálculo da soma dos produtos dos coeficientes das máscaras pelos níveis de cinza da região delimitada pela máscara. Dessa forma, a resposta R da máscara posicionada em um ponto (x, y) da imagem é dada por:

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_n z_n = \sum_{i=1}^n w_i z_i \quad (2.1)$$

em que z_i é o nível de cinza do *pixels* da imagem correspondente com o coeficiente w_i da máscara. A resposta da máscara é definida em relação a uma posição específica da matriz. Se o valor de R for maior que o valor do limiar L estabelecido de acordo com a aplicação, então temos um ponto de borda.

Por exemplo, para a detecção de pontos isolados em uma imagem, pode-se aplicar a máscara h (Figura 2.7). É calculada a medida da diferença ponderada entre o ponto central e seus vizinhos. A ideia é que o nível de cinza de um ponto isolado será discrepante do nível de cinza de seus vizinhos.

$w1$	$w2$	$w3$
$w4$	$w5$	$w6$
$w7$	$w8$	$w9$

Figura 2.6: máscara genérica 3×3

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

Figura 2.7: máscara para identificação de ponto

Considerando a equação (2.1), se tivermos um *pixel* p onde a intensidade dos *pixels* da sua vizinhança-de-8 sejam iguais à de p , teremos $R = 0$. Se o valor da intensidade do *pixel* p for diferente da soma das intensidades dos *pixels* da sua vizinhança teremos $|R| > 0$. É natural definir um limiar L , tal que, se $|R| > L$, considera-se um ponto isolado.

Em síntese, pode-se definir pontos de borda seguindo os passos do Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Método para detecção de pontos de borda

Entrada: uma imagem, uma máscara de detecção de bordas e um limiar L

Saída: um ponto p de borda

Para cada *pixel* p da imagem faça

Obtenha a vizinhança equivalente às dimensões da máscara

Calcule o valor de R

Se o valor de $|R|$ for maior que o limiar L então

p é um ponto de borda

Diversos trabalhos como os de *Roberts* [85], *Prewitt* [84], *Sobel* [93], *Kirsch* [53], *Robinson* [86] e *Frei-Chen* [34] propuseram máscaras que utilizam o conceito da derivada primeira ordem. Já o uso da derivada segunda ordem para detectar pontos da borda demonstrou-se muito sensível a ruído. Portanto, é necessário filtrar o ruído antes da detecção de bordas, assim destacam-se os trabalhos de *Marr e Hildreth* [66], *Canny* [19] e de *Boie e Cox* [14].

Os métodos não produzem bons resultados se a imagem original apresentar regiões com pouco contraste ou bordas borradas e além disso apresentam a desvantagem de serem locais.

2.4.3 Segmentação de Regiões

Em contraste com os métodos já descritos, os métodos a seguir detectam regiões diretamente nas imagens, ao invés de encontrar as bordas que delimitam a região. *Pixels* que apresentam propriedades similares são agrupados para formar uma região (Figura 2.8).

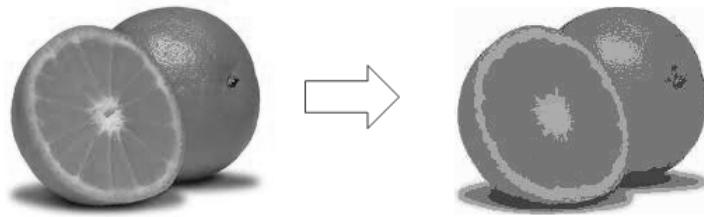


Figura 2.8: imagem segmentada utilizando segmentação por regiões

A Tabela 2.1 apresenta algumas técnicas que utilizam a abordagem de segmentação por regiões.

Técnica	Característica	Ref.
<i>Level sets</i>	Utilizam equações de evolução para achar o contorno das regiões	[65, 89]
<i>Bootstrap</i>	Extraí parâmetros a partir da segmentação feita por outro método	[10]
<i>k-means</i>	Agrupar <i>pixels</i> diminuindo a variação dos atributos inter-grupo	[78]
<i>Fuzzy C-means</i>	Utiliza uma função custo para produzir o agrupamento de <i>pixels</i>	[13]
<i>S_{DT}-Discrete</i>	Utiliza derivada topológica para segmentação em regiões	[59]
<i>Topo-Shape</i>	Utiliza derivada topológica e otimização de formas para segmentação	[49]

Tabela 2.1: técnicas de segmentação por regiões.

Os métodos *S_{DT}-Discrete* e *Topo-Shape* serão detalhados no capítulo 4.

Os principais métodos de segmentação baseada em regiões podem ser classificados em:

- crescimento de regiões;
- divisão de regiões;
- divisão e fusão de regiões;
- divisor de águas.

Crescimento de Regiões

Uma abordagem simples é iniciar a segmentação com um conjunto de *pixels* denominados sementes e, a partir dele, crescer as regiões anexando a cada semente *pixels* que possuam propriedades similares. O número de regiões no qual a imagem será segmentado é definido pelo número de sementes. Os *pixels* sementes podem ser escolhidos de maneira aleatória, determinístico ou selecionados pelo usuário. Duas dificuldades associadas ao crescimento de regiões são: a seleção de sementes que representem adequadamente as regiões de interesse, e a seleção de propriedades apropriadas para a inclusão de pontos nas várias regiões durante o processo de crescimento.

No critério de similaridade descrito por *Haralick* e *Shapiro* [46], uma região é definida como um conjunto de *pixels* conexos pela média do conjunto. Para cada novo *pixel* agregado a uma região, os valores da média e variância do conjunto de *pixels* da região são atualizados.

As técnicas de crescimento de regiões são pouco confiáveis quando a região segmentada está rodeada por outras com intensidade similar (pouco contraste)

Divisão de Regiões

A segmentação baseada na divisão de regiões inicia-se com regiões formadas por *pixels* da imagem e, recursivamente, subdivide as regiões não-homogêneas em áreas menores. Em muitos casos, a imagem inteira pode ser considerada como a região inicial. O processo de subdivisão termina quando todas as regiões satisfizerem a algum critério de similaridade [38].

Divisão e União de Regiões

Os procedimentos de crescimento e divisão de regiões podem ser combinados de modo a reunir as vantagens de ambas as técnicas. Os métodos de divisão e união de região são particularmente úteis para imagens complexas.

Uma abordagem alternativa é subdividir a imagem em um conjunto de regiões arbitrárias e disjuntas e, então, realizar a divisão e/ou união das regiões na tentativa de satisfazer as condições estabelecidas [81].

Segmentação por Divisor de Águas

Para o entendimento da técnica de segmentação por Divisor de Águas, deve-se interpretar a imagem a ser segmentada como sendo uma superfície topográfica, em que as intensidades dos *pixels* correspondem a valores de altitude ou elevação dos pontos. Dessa forma, o conjunto de *pixels* da imagem forma uma superfície composta por vales e picos com diversas elevações.

Um processo de imersão simula a inundação da superfície a partir de perfurações localizadas nas regiões mais baixas da superfície. À medida que a água penetra nessas regiões, conhecidas como mínimos regionais, vales são gradativamente inundados, formando bacias de retenção. Quando as águas de duas bacias vizinhas entram em contato, uma linha de contenção é criada entre essas bacias.

O processo de imersão continua até que toda a superfície esteja sob a água, tal que haverá uma linha de contenção delimitando cada bacia de retenção. Ao final do processo, um conjunto de linhas de contenção de águas é formado para evitar o transbordamento das águas entre diferentes bacias. Essas linhas definem o contorno dos objetos na imagem, e as bacias definem as regiões da imagem segmentada [38].

Capítulo 3

Análise de sensibilidade topológica

3.1 Derivada Topológica

Motivados por problemas de otimização de formas e de topologias, Sokolowski & Zokowski [95] introduziram o conceito de derivada topológica: um campo escalar definido sobre todo o domínio e que fornece a sensibilidade de um funcional de forma quando uma perturbação não suave é introduzida ao problema. A principal vantagem da derivada topológica é a de fornecer uma aproximação de primeira ordem para o funcional perturbado que só depende (através do domínio e das soluções das equações de estado e adjuntas) do problema não perturbado. Isto se traduziu em um baixo custo computacional no desenvolvimento de algoritmos de otimização topológica [95, 96], problemas inversos [97] e, posteriormente, na segmentação de imagens [5, 9, 47, 48, 49, 58, 60].

Embora a análise de sensibilidade topológica possa ser aplicada a problemas cujo domínio é perturbado com furos, inclusões, deformações não suaves na fronteira, ou ainda com a inclusão de termos-fonte; a otimização topológica, isto é, a necessidade de otimizar estruturas sem o conhecimento prévio de sua topologia, forneceu a motivação para o seu desenvolvimento e cunhou os termos gerais da teoria. No contexto de otimização estruturais, a otimização paramétrica a estrutura apresenta forma e topologia fixas, ou seja, as dimensões que variam na otimização da estrutura [100]. Na otimização de forma a estrutura apresenta forma variável e topologia fixa, ou seja, as variáveis são contornos no domínio cuja forma é alterada a cada iteração do processo de otimização [90]. De fato, a otimização topológica [12], além de mais geral que as otimizações paramétrica [100] e de forma [45], como se pode observar na Figura 3.1 [90], apresenta melhores resultados, já

que a introdução de furos permite buscar a solução de mínimo local (a melhor estrutura) em um conjunto mais geral e onde a topologia não é definida *a priori*.

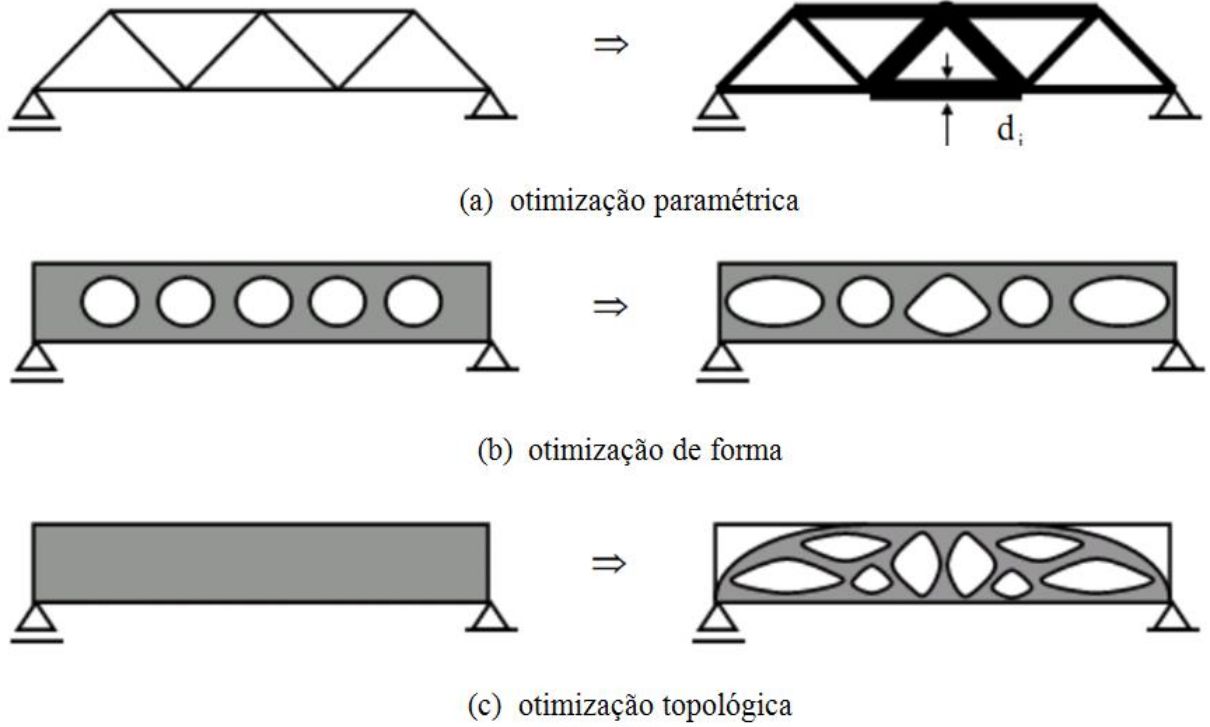


Figura 3.1: técnicas de otimização estrutural.

Seguindo o desenvolvimento histórico, considera-se um domínio perturbado com a nucleação de um furo. Seja um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto e limitado e $\mathfrak{S}_\Omega(u)$ uma função $\mathfrak{S} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, que depende de u , através da solução de uma equação de estado definida sobre Ω . Seja $\Omega_\epsilon = \Omega / \bar{W}_\epsilon(\hat{x})$ o domínio perturbado com a introdução de um furo dado pela bola $\bar{W}_\epsilon(\hat{x})$ de centro no ponto $\hat{x}$ e de raio ϵ (Figura 3.2) [59].

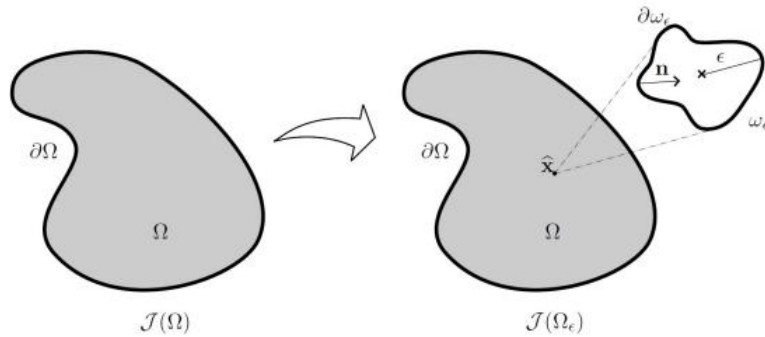


Figura 3.2: inserção de uma perturbação no domínio.

A análise de sensibilidade topológica fornece uma expansão assintótica-topológica

para o funcional definido sobre o domínio perturbado, dada por,

$$\mathfrak{S}_{\Omega_\epsilon}(u_\epsilon) = \mathfrak{S}_\Omega(u) + f(\epsilon)\mathcal{T}\mathfrak{S} + o(f(\epsilon)), \quad (3.1)$$

onde $f(\epsilon)$ é uma função não negativa, tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon) \rightarrow 0$; $\mathcal{T}\mathfrak{S}$ é a derivada topológica e $o(f(\epsilon))$ é tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(f(\epsilon))}{f(\epsilon)} = 0$.

Embora essa expansão assemelhe-se a uma expansão de Taylor e a derivada topológica possa ser redefinida formalmente pela expressão:

$$\mathcal{T}\mathfrak{S} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathfrak{S}_{\Omega_\epsilon}(u_\epsilon) - \mathfrak{S}_\Omega(u)}{f(\epsilon)}, \quad (3.2)$$

deve-se notar que os domínios Ω_ϵ e Ω não apresentam a mesma topologia, e o cálculo da derivada acima não pode ser efetuado de maneira clássica através de um domínio de referência difeomorfo à Ω e Ω_ϵ . De fato, a falta de existência de um difeomorfismo entre Ω e Ω_ϵ foi o principal entrave para o desenvolvimento de uma metodologia para o cálculo da derivada topológica, até o desenvolvimento do *domain-truncation method* por Garreau *et al.* [36] e o *topological-shape sensitivity method*, por Novotny *et al.* [74]. Em particular, essa última abordagem estabeleceu formalmente a conexão entre a análise de sensibilidade à mudança de forma clássica e a análise de sensibilidade topológica resultando em uma metodologia mais simples e geral para o cálculo da derivada topológica, como pode ser observado na análise realizada por Feijóo *et al.* [30].

3.1.1 Estado da arte da Análise de Sensibilidade Topológica

Para que este trabalho fique auto-contido, nesta seção será reproduzido o estado da arte da análise de sensibilidade topológica realizado em [87] e atualizada a partir do ano de 2007.

- Sokolowski & Zochowski 1999 [95]. O conceito de derivada topológica é formalmente definido pela primeira vez. Em particular, no referido trabalho a derivada topológica é calculada para funcionais arbitrários e apresentam-se exemplos para equações elípticas em calor e elasticidade plana, considerando-se em cada caso a condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo. Neste trabalho se conclui que a derivada topológica é uma ferramenta que pode ser aplicada em problemas de otimização de estruturas mecânicas.

- Sokolowski & Zochowski 1999 [97]. A derivada topológica é calculada para uma função custo associada a um problema de Laplace tridimensional. Observou-se a potencialidade da aplicação dos resultados obtidos na otimização em problemas difusivos ou de transferência de calor, bem como para soluções numéricas de problemas inversos de identificação de inclusões.
- Céa *et al.* 2000 [23]. O conceito de derivada topológica foi generalizado para domínios perturbados por furos com condição de contorno de Dirichlet prescrita em sua fronteira. Observa-se que a derivada topológica fornece uma justificativa matemática para um algoritmo de otimização que fora introduzido por Jan Céa, já em 1973, e são obtidas algumas condições de otimalidade usando-se simultaneamente os gradientes clássico e topológico. Finalmente, apresentam-se alguns exemplos de aplicações em Mecânica e Eletromagnetismo.
- Garreau *et al.* 2001 [36]. Propõe uma técnica para o cálculo da derivada topológica, denominada *domain truncation method*, a qual é aplicada ao problema de elasticidade, com funcionais gerais e furos de forma arbitrária onde são impostas condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet homogêneas em sua fronteira.
- Guillaume & Sid Idris 2002 [39]. Fornece uma extensão do *domain truncation method* para furos de forma arbitrária, considerando-se diversas funções custo associadas ao problema de Poisson com condições de Neumann e Dirichlet homogêneas na fronteira do furo. Entretanto, a metodologia supracitada tem como principal inconveniente a introdução de um parâmetro artificial R , que permanece na expressão geral de sensibilidade topológica (vide, por exemplo, Amstutz 2003 [5]).
- Novotny *et al.* 2003 [74]. Neste trabalho, é proposta uma definição alternativa para a derivada topológica que permite o estabelecimento da relação entre os conceitos de análise de sensibilidade topológica e análise de sensibilidade na mudança de forma. Este resultado tem como consequência direta o desenvolvimento de uma nova metodologia, denominada *topological-shape sensitivity method*, para o cálculo da derivada topológica através dos métodos clássicos da análise de sensibilidade à mudança de forma. Os resultados obtidos são utilizados na otimização de diversos componentes mecânicos.

- Feijóo *et al.* 2003 [30]. Fornece uma análise comparativa entre o *topological-shape sensitivity method* e o *domain truncation method*, mostrando que, embora ambas metodologias sejam equivalentes, a primeira resulta mais simples e, até então, mais geral.
- Lewinski & Sokolowski 2003 [62]. Apresenta uma visão geral do problema de variação da energia elástica devido ao surgimento de pequenas cavidades nos sólidos elásticos, obtendo com a derivada topológica os mesmos resultados fornecidos por Mazja *et al.* 1991 [68] e por Nemat-Nasser & Hori 1993 [77], para furo elíptico na cavidade esférica do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- Samet *et al.* 2003 [88]. Considera a equação de Helmholtz com condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira do furo.
- Sokolowski 2003 [94]. Apresenta novas condições de otimalidade para uma classe de problemas em otimização de forma.
- Novotny 2003 [73]. É a primeira tese de doutorado defendida na área. Desenvolve o *topological-shape sensitivity method* e realiza a sensibilidade topológica em diversos problemas de engenharia: condução estacionária de calor em sólidos rígidos considerando condições de contorno de Neumann, Robin e Dirichlet na fronteira do furo; elasticidade linear em estado plano de tensões e deformações; flexão elástica linear de placas de Kirchhoff; torção de barras sujeitas à fluência estacionária (problema p -Poisson) e, finalmente, no problema de Poisson em um domínio perturbado por uma inclusão com propriedades distintas do meio.
- Amstutz 2003 [2]. Nesta tese de doutorado são fornecidas fórmulas de desenvolvimento assintótico topológico para vários problemas de interesse. Em particular, aplicam-se os resultados obtidos na localização de trincas considerando o problema de Laplace 2D; no problema de Helmholtz 2D com condição de Dirichlet em um furo circular, condição de Neumann em um furo de forma arbitrária ou uma trinca e inserção de inclusões; estuda a sensibilidade para problemas não-lineares com condição de Dirichlet e furo de forma arbitrária. Finalmente considera a análise de sensibilidade topológica para o problema de Navier-Stokes.

- Nazarov & Sokolowski 2003 [71]. Utilizam os métodos *matched* e *compound* na construção das expansões assintóticas de funcionais de volume e superfície.
- Nazarov & Sokolowski 2004 [72]. Calcula a expansão assintótica da solução e do funcional energia correspondente ao problema de Poisson para uma perturbação associada a formação de um ligamento.
- Feijóo 2004 [30]. A derivada topológica foi calculada para o problema de Helmholtz em um meio infinito, sendo o resultado empregado na resolução do problema inverso do espalhamento.
- Feijóo *et al.* 2004 [31]. Calcula a derivada topológica da energia potencial total no problema de elasticidade 2D através da aplicação do *topological-shape sensitivity method*.
- Guillaume & Sid Idris 2004 [40]. Aplica a análise de sensibilidade para a equação de Stokes considerando funcionais custos gerais e furos de forma arbitrária. Também ilustram o uso da derivada topológica em problemas de otimização.
- Burger *et al.* 2004 [17]. Utiliza a informação dada pela derivada topológica para se obter um parâmetro de determinação das curvas iniciais para a técnica de *level-sets*. Observa-se mediante a análise de alguns testes numéricos que a aplicação da derivada topológica permite a solução de problemas mais gerais do que os tratados pela técnica de *level-set* padrão.
- Labanowski 2004 [56]. Nessa dissertação de Mestrado é realizada uma análise comparativa entre os métodos de otimização topológica SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*), ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e TSA (*Topological Sensitivity Analysis*)
- Amstutz 2005 [6]. É o primeiro resultado em análise de sensibilidade topológica para um caso não-linear, onde se calcula a derivada topológica para equações de Navier-Stokes no caso estacionário e fluido incompressível e uma condição de não deslizamento no contorno de um obstáculo de forma arbitrária.
- Amstutz *et al.* 2005 [4]. As técnicas de gradiente topológico são aplicadas para a identificação de trincas em um domínio bidimensional, considerando a equação

de estado de Laplace e o critério de Khon-Vogelius como função custo R (Khon & Vogelius 1987 [55]).

- Sokolowski & Zochowski 2005 [98]. Aplica a análise de sensibilidade topológica em problemas de contato.
- Sokolowski & Zochowski 2005 [99]. Calcula a derivada topológica para uma classe de funcionais de forma para problemas de obstáculo.
- Novotny *et al.* 2005 [75]. O *topological-shape sensitivity method* é aplicado para o cálculo da derivada topológica no problema flexão de placas elásticas utilizando o modelo cinemático de Kirchhoff.
- Masmoudi *et al.* 2005 [67]. Estuda a sensibilidade topológica para a equação de Maxwell tridimensional quando o domínio é perturbado com a introdução de um pequeno objeto dielétrico ou metálico e aplicam os resultados obtidos no problema inverso de identificação de propriedades eletromagnéticas.
- Guinzani 2006 [41]. Nessa dissertação de Mestrado, o problema inverso da condutividade é tratado sob a ótica da análise de sensibilidade topológica e desenvolve-se um método iterativo de reconstrução.
- Guzina & Bonnet 2006 [43] e Bonnet 2006 [16] a derivada topológica foi calculada no problema de acústica respectivamente no domínio da frequência e do tempo, permitindo sua aplicação no problema inverso do espalhamento.
- Amstutz & Andrä 2006 [5]. A questão da aplicação da derivada topológica no método de *level-set* é retomada neste trabalho. É desenvolvido um novo algoritmo onde se propõe uma generalização do conceito da derivada topológica e uma nova equação de evolução que evita o uso de parâmetros arbitrários para se construir as correções nas iterações sucessivas.
- Amstutz 2006 [7]. Fornece o cálculo da derivada topológica para uma classe de problemas não-lineares. Em particular, trata da equação de Navier-Stokes e da versão não-linear da equação de Helmholtz.
- Auroux *et al.* 2006 [9]. Calcula a expansão assintótica topológica para um problema associado à restauração e classificação de imagens.

- Larrabide 2007 [59]. Nesta tese de doutorado estuda-se a restauração e segmentação de imagens médicas e sua aplicação na modelagem do sistema cardiovascular humano, utilizando a derivada topológica para este fim. Em particular, define-se uma versão discreta da derivada topológica que possibilita um menor custo computacional que os algoritmos baseados na definição clássica.
- Belaid *et al.* 2007 [11]. Aplica o gradiente topológico para os problemas de restauração de imagens e de detecção de borda.
- Giusti *et al.* 2007 [37]. Propõem um método de otimização topológica associada a criação de uma inclusão no problema de elasticidade linear bidimensional em que se destaca a possibilidade de se colocar e retirar material simultaneamente em cada passo do algoritmo.
- Guzina & Chikichev 2007 [44]. Fornece uma extensão do conceito de derivada topológica e indica possibilidades de aplicações em diagnósticos médicos, sobretudo na identificação de câncer de mama.
- Novotny *et al.* 2007 [76]. Apresenta o cálculo da derivada topológica no problema de elasticidade linear tridimensional, que possibilita a otimização topológica de estruturas tridimensionais.
- Rocha de Faria 2007 [87]. Nesta tese de doutorado mais um termo na expansão assintótica topológica foi considerado, denominado derivada topológica de segunda ordem. Assim, foi possível obter estimativas mais precisas para o valor da função custo e melhores direções de descida em problemas de otimização.
- Bojczuk & Mróz 2008 [15]. Aplicou a análise de sensibilidade topológica ao problema de otimização de placas em flexão.
- Carpio & Rapún 2008 [21]. Propôs uma estratégia utilizando derivada topológica para reconstruir espalhadores enterrados em um meio onde a radiação é governada por problemas de transmissão Helmholtz. O problema do espalhamento foi reformulado como um problema de otimização de formas tendo a equação de Helmholtz como uma restrição e o espalhamento como uma variável.

- Fulmaski *et al.* 2008 [35]. Resolve uma classe de problemas de otimização de forma utilizando o método level set combinado com derivada topológica.
- Khludnev *et al.* 2008 [54]. Neste trabalho, os autores abordam o problema de topologias que apresentam falhas ou quebras. É proposto um *framework* para análise de sensibilidade para corpos elásticos.
- Malcolm & Guzina 2008 [64]. Utilizou a derivada topológica para resolver problemas de espalhamento de campos acústicos transientes. Ilustra a utilidade do métodos proposto através da reconstrução geométrica dos obstáculos penetráveis.
- Pereira & Bittencourt 2008 [82]. Aplicou a análise de sensibilidade topológica em problemas de elasticidade de grande deformação baseado na formulação Lagrangiana total.
- Iguernane *et al.* 2009 [52]. Este trabalho apresenta a derivada topológica para problemas denominados de valores de contorno para equações elípticas semilineares. Divide-se em duas contribuições principais, uma análise assintótica da classe de problemas de valores de contorno para equações lineares de segunda ordem, e uma prova da convergência da aproximação de elementos finitos para a derivada topológica.
- Hintermuller & Laurin 2009 [49]. Segmenta imagens utilizando um algoritmo que combina análise de sensibilidade topológica e análise de sensibilidade à mudança de formas. Além disso, propõe uma generalização do funcional de Mumford-Shah para segmentação de imagens modulares.
- Hlaváček *et al.* 2009 [51]. Este trabalho utilizou o conceito de derivada topológica para propor uma nova abordagem para derivação no pior cenário e métodos de cenários de alcance máximo.
- Cardone *et al.* 2010 [20]. Trata de uma análise assintótica dos problemas de valores de contorno para modelos acoplados. Em particular, é tratada a otimização de forma de corpos pizoelétricos, sendo necessário considerar o acoplamento que há entre a parte mecânica que tomam a forma de elasticidade, e a parte elétrica que descreve o eletromagnetismo dos corpo

- Amstutz [3] 2010. Este trabalho propõe um método utilizando derivada topológica para otimização de topologias sujeito a restrições de caso pontuais.
- Canelas et al. [18] 2011. Propôs um novo método para resolução do problema inverso de fundição eletromagnética. O problema foi modelado como um problema de otimização, e a derivada topológica é utilizada para localizar a posição correta de novos fios.
- Machado *et al.* [63] 2011. Utilizou derivada topológica no processamento de imagens como um pré-processamento para a etapa de segmentação. A derivada topológica junto com um filtro *low-pass* obtêm uma aproximação das bordas de interesse.
- Patel *et al.* [80] 2011. Neste trabalho, foi aplicado um algoritmo de segmentação de imagem que utiliza que combina a derivada topológica contínua e discreta para detecção de câncer de mama em mamografias.
- Silve *et al.* [91] 2011. Propôs um método para localização de falhas utilizando derivada topológica, que oferece vantagens computacionais em relação aos métodos de elementos finitos existentes da literatura.
- Ammari *et al.* [1] 2012. Este trabalho apresentou um algoritmo de detecção de anomalias baseado em derivada topológica.
- Hintermuller *et al.* [50] 2012. Foi utilizado a expansão topológica de segunda ordem para o problema impendência de tomografia, mostrando a relevância destes termos não locais.
- Park & Ma [79] 2012. Apresenta um algoritmo que utiliza análise de sensibilidade topológica para detectar falhas de um material homogêneo através de suas imagens eletromagnéticas .

Capítulo 4

Segmentação de Imagens via Análise de Sensibilidade Topológica

4.1 Derivada Topológica em Segmentação de Imagens

A característica mais notável da derivada topológica é que ela fornece a variação de uma função custo com respeito a uma perturbação não suave e infinitesimal com um custo muito baixo do ponto de vista computacional. Os primeiros trabalhos de derivada topológica aplicada ao processamento de imagem surgiram no esforço de restaurar as imagens digitais (Belaïd [11] e Larrabide[57, 58]). Logo após, Larrabide *et al.* [60, 61] e Hintermüller *et al.*[48, 49] aplicaram a técnica na segmentação de imagens. Auroux [9], He & Osher [47] e Amstutz [5] classificaram imagens estabelecendo uma relação entre a derivada topológica e outras técnicas amplamente utilizadas em processamento de imagens.

A ideia da segmentação de imagens via análise de sensibilidade topológica é calcular a sensibilidade a pequenas perturbações de uma medida ou função custo associada a uma segmentação específica da imagem. Ou seja, para uma dada segmentação da imagem teremos um valor associado a este estado obtido através da função custo. De fato, o trabalho de Mumford-Shah [70] de 1989 é considerado um divisor de águas na teoria de segmentação de imagem por regiões e restabelece o problema de segmentação como um problema de minimização não-suave. Em geral, a função custo utilizada na segmentação

de imagens via análise de sensibilidade topológica é baseada neste funcional. A seguir, considerando-se a perturbação infinitesimal e não suave dada pela mudança de um *pixel* de uma região como sendo de uma classe de segmentação distinta de seus vizinhos, a derivada topológica irá fornecer a aproximação de primeira ordem da função custo. Se a derivada topológica for negativa, a função custo será decrescente e teremos uma segmentação melhor que a anterior.

Nas próximas subseções serão apresentados os algoritmos de Hintermuller & Laurin (Topo-Shape 1 e 2) e de Larrabide (Sdt-discrete). Para isso, em um primeiro momento serão mostrados os fundamentos em comum para os três algoritmos:

- a função custo baseada no funcional de Mumford-Shah,
- formulação do problema,
- cálculo da derivada topológica.

Em seguida, serão apresentados os pseudos-códigos com destaque para as características particulares de cada algoritmo. São elas:

- inicialização,
- condição de parada,
- manipulação das classes,
- correção das bordas.

4.1.1 O funcional de Mumford-Shah e o problema de segmentação de imagens

Como acima mencionado, o funcional de Mumford-Shah [70] trata a segmentação de imagens como um problema de mínimo. Obter a segmentação u da imagem original f , consiste em minimizar

$$\mathcal{J}_\delta(u, \Gamma) = \int_{\Omega} (f - u)^2 + \mu \int_{\Omega/\Gamma} |\nabla u|^2 + \delta \mathcal{H}^1(\Gamma), \quad (4.1)$$

onde Ω é o domínio da imagem, Γ são as bordas das regiões de uma segmentação da imagem, $|\nabla u|^2$ é o gradiente de u e $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ é a medida Hausdorff da fronteira. Os

parâmetros μ e δ penalizam os desvios de homogeneidade e comprimento das bordas das regiões, respectivamente. Abaixo segue a interpretação de cada termo do funcional.

- Primeiro termo $(\int_{\Omega}(f - u)^2)$: este termo mede se a segmentação u é uma boa aproximação de f . Quanto mais a segmentação u se aproxima de f , menor será a contribuição deste termo para o valor do funcional.
- Segundo termo $(\mu \int_{\Omega/\Gamma} |\nabla u|^2)$: calcula a variação de u dentro de cada sub-região aberta. Quanto mais homogêneas forem as intensidades de cinza no interior das regiões, menor será a contribuição deste termo para o funcional.
- Terceiro termo $(\delta \mathcal{H}^1(\Gamma))$: calcula o comprimento das fronteiras das regiões. Quanto maior o comprimento das fronteiras, maior será a contribuição deste termo para o valor do funcional.

Chan & Vese [101] formularam um modelo, a partir do funcional de Mumford-Shah, considerando que o interior das regiões é constante por partes, como é usual em segmentação de imagens, logo $\nabla u = 0$ em cada sub-região. Assim, o funcional fica reduzido a

$$\mathcal{J}_{\delta}(u, \Gamma) = \int_{\Omega} (f - u)^2 + \delta \mathcal{H}^1(\Gamma). \quad (4.2)$$

Este funcional modificado motivou o funcional utilizado neste trabalho.

4.1.2 A formulação do problema

Inicialmente, desconsidera-se o termo de tratamentos das bordas ($\delta = 0$), pois ele induz uma singularidade no cálculo da derivada topológica [49]. Assim, temos o seguinte funcional simplificado

$$\mathcal{J}_{\delta}(u, \Gamma) = \int_{\Omega} (f - u)^2. \quad (4.3)$$

A segmentação u é definida como

$$u(x) = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{\Omega_i}, \quad (4.4)$$

onde c_i é o valor do tom de cinza no segmento Ω_i , m é um inteiro correspondente ao número de classes da segmentação e χ_{Ω_i} é a função característica de Ω_i , tal que

$$\chi_{\Omega_i} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.5)$$

As diferentes classes são denotadas por c_i e seu domínio correspondente por Ω_i , $i \in \{1, \dots, m\}$. Assim, pode-se escrever a partição de Ω como

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \bar{\Omega}_i \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j;$$

Observa-se que a minimização da forma quadrática dada em (4.3) corresponde a minimizar em cada sub-região Ω_i . Isto é

$$\min_u \mathcal{J}_\delta(u, \Gamma) \Rightarrow \min_u g(u) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} (f - u)^2 dx. \quad (4.6)$$

Portanto, o funcional modificado em termos de Ω_i

$$\mathcal{J}_0(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) = \mathcal{J}_0(u, \Gamma) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} (f(x) - c_i)^2 dx. \quad (4.7)$$

Finalmente, o problema de segmentação como um problema de minimização do funcional de Mumford-Shah é dado por ¹

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathcal{J}_\delta(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} (f(x) - c_i)^2 dx \\ \text{s.a.} \quad & \Omega = \bigcup_{i=1}^m \bar{\Omega}_i \\ & \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j; \\ & \Omega_i \text{ é mensurável } \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.1.3 Cálculo da Derivada Topológica

Considere $\rho > 0$ e $x_0 \in \Omega_i$. Então $B(x_0, \rho)$ denota a bola aberta de raio ρ e centro em x_0 . A derivada topológica $\mathcal{T}_{i,j}$ de $\mathcal{J}_\delta$ em x_0 definida como

$$\mathcal{J}_\delta(\Omega_1, \dots, \Omega_i \setminus B_\rho, \dots, \Omega_j \cup B_\rho, \dots, \Omega_m) = \mathcal{J}_\delta(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) + \pi \rho^2 \mathcal{T}_{i,j}(x_0) + o(\rho^2), \quad (4.9)$$

fornece um critério para a remoção de uma pequena bola de Ω_i e sua incorporação em Ω_j . De fato, nos pontos onde $\mathcal{T}_{i,j}$ é negativo, o funcional decresce para um ρ suficientemente pequeno. Portanto, define-se uma matriz de valores $\mathcal{T}$ contendo as derivadas topológicas para todos os casos possíveis:

$$\mathcal{T} := \{\mathcal{T}_{i,j}\}_{(i,j) \in \{1, \dots, m\}^2}, \quad (4.10)$$

¹Segundo [48], o problema (4.8) admite uma solução ótima $\{\Omega_i^*\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$.

isto é, todas as possíveis mudanças de uma classe i para outra classe j . Observando a equação (4.9), vemos que $\mathcal{T}_{i,i} \equiv 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Em seguida, será calculada a derivada topológica $\mathcal{T}_{i,j}$ para $i \neq j$. Assumindo $|\Omega_i| > 0$, calcula-se primeiro a expansão para c_i no caso onde nós removemos material de Ω_i :

$$\begin{aligned}
c_i(\Omega_i/B_\rho) - c_i(\Omega_i) &= \frac{1}{|\Omega_i/B_\rho|} \int_{\Omega_i/B_\rho} f(x) dx - \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f(x) dx \\
&= \frac{1}{|\Omega_i| - |B_\rho|} \left(\int_{\Omega_i} f(x) dx - \int_{B_\rho} f(x) dx \right) - \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f(x) dx \\
&= \frac{1}{|\Omega_i| - |B_\rho|} \left(|\Omega_i| c_i(\Omega_i) - \int_{B_\rho} f(x) dx \right) - c_i(\Omega_i) \\
&= c_i(\Omega_i) \left(\frac{|\Omega_i|}{|\Omega_i/B_\rho|} - 1 \right) - \frac{1}{|\Omega_i/B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \\
&= c_i(\Omega_i) \left(\frac{|\Omega_i|}{|\Omega_i| - |B_\rho|} - 1 \right) - \frac{1}{|\Omega_i/B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \\
&= c_i(\Omega_i) \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i/B_\rho|} - \frac{1}{|\Omega_i/B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{|\Omega_i/B_\rho|} = \frac{1}{|\Omega_i|} \left(\frac{|\Omega_i|}{|\Omega_i| - |B_\rho|} \right) = \frac{1}{|\Omega_i|} \left(1 + \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i| - |B_\rho|} \right) = \frac{1}{|\Omega_i|} + \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i| |\Omega_i/B_\rho|}, \tag{4.12}$$

donde,

$$\begin{aligned}
c_i(\Omega_i/B_\rho) - c_i(\Omega_i) &= c_i(\Omega_i) \left(\frac{|B_\rho|}{|\Omega_i|} + \frac{|B_\rho|^2}{|\Omega_i| |\Omega_i/B_\rho|} \right) - \left(\frac{1}{|\Omega_i|} + \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i| |\Omega_i/B_\rho|} \right) \int_{B_\rho} f(x) dx \\
&= \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i|} \left(c_i(\Omega_i) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right) \\
&\quad + \frac{|B_\rho|^2}{|\Omega_i| |\Omega_i/B_\rho|} \left(c_i(\Omega_i) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

A expansão para c_i quando adicionamos material em Ω_j depende do valor de $|\Omega_j|$.

Se $|\Omega_j| > 0$, então escrevemos:

$$\begin{aligned}
c_j(\Omega_j \cup B_\rho) - c_j(\Omega_j) &= \frac{1}{|\Omega_j \cup B_\rho|} \int_{\Omega_j \cup B_\rho} f(x) dx - \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} f(x) dx \\
&= \frac{1}{|\Omega_j| + |B_\rho|} \left(\int_{\Omega_j} f(x) dx + \int_{B_\rho} f(x) dx \right) - \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} f(x) dx \\
&= \frac{1}{|\Omega_j| + |B_\rho|} \left(|\Omega_j| c_j(\Omega_j) + \int_{B_\rho} f(x) dx \right) - c_j(\Omega_j) \\
&= c_j(\Omega_j) \left(\frac{|\Omega_j|}{|\Omega_j| + |B_\rho|} - 1 \right) + \frac{1}{|\Omega_j \cup B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \\
&= c_j(\Omega_j) \left(\frac{|\Omega_j|}{|\Omega_j| + |B_\rho|} - 1 \right) + \frac{1}{|\Omega_j \cup B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \\
&= -\frac{|B_\rho|}{|\Omega_j \cup B_\rho|} c_j(\Omega_j) + \frac{1}{|\Omega_j \cup B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{|\Omega_j \cup B_\rho|} = \frac{1}{|\Omega_j|} \left(\frac{|\Omega_j|}{|\Omega_j \cup B_\rho|} \right) = \frac{1}{|\Omega_j|} \left(1 - \frac{|B_\rho|}{|\Omega_j| + |B_\rho|} \right) = \frac{1}{|\Omega_j|} - \frac{|B_\rho|}{|\Omega_j| |\Omega_j \cup B_\rho|}. \tag{4.15}$$

Então,

$$\begin{aligned}
c_j(\Omega_j \cup B_\rho) - c_j(\Omega_j) &= c_j(\Omega_j) \left(-\frac{|B_\rho|}{|\Omega_j|} + \frac{|B_\rho|^2}{|\Omega_j| |\Omega_j \cup B_\rho|} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{|\Omega_j|} - \frac{|B_\rho|}{|\Omega_j| |\Omega_j \cup B_\rho|} \right) \int_{B_\rho} f(x) dx \\
&= -\frac{|B_\rho|}{|\Omega_j|} \left(c_j(\Omega_j) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right) \\
&\quad + \frac{|B_\rho|^2}{|\Omega_j| |\Omega_j \cup B_\rho|} \left(c_j(\Omega_j) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Caso contrário, se $|\Omega_j| = 0$, nós tem-se

$$c_j(\Omega_j \cup B_\rho) = |B_\rho|^{-1} \int_{B_\rho} f(x) dx. \tag{4.17}$$

Para obter a sensibilidade do domínio com a perturbação inserida, calcula-se a diferença entre os funcionais do domínio perturbado e do domínio original.

Se $|\Omega_j| \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\Omega_1, \dots, \Omega_i \setminus B_\rho, \dots, \Omega_j \cup B_\rho, \dots, \Omega_m) - \mathcal{J}(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) \\
&= \int_{\Omega_j \cup B_\rho} (f(x) - c_j(\Omega_j \cup B_\rho))^2 dx + \int_{\Omega_i \setminus B_\rho} (f(x) - c_i(\Omega_i \setminus B_\rho))^2 dx \\
&\quad - \int_{\Omega_j} (f(x) - c_j(\Omega_j))^2 dx - \int_{\Omega_i} (f(x) - c_i(\Omega_i))^2 dx. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Considerando as expansões para $c_i(\Omega_i \setminus B_\rho)$ e $c_j(\Omega_j \cup B_\rho)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_\delta(\Omega_1, \dots, \Omega_i \setminus B_\rho, \dots, \Omega_j \cup B_\rho, \dots, \Omega_m) - \mathcal{J}_\delta(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) \\
&= \int_{B_\rho} [(f(x) - c_j(\Omega_j))^2 - (f(x) - c_i(\Omega_i))^2] dx \\
&+ 2 \frac{|B_\rho|}{|\Omega_j|} \left(c_j(\Omega_j) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right) \int_{\Omega_j} (f(x) - c_j(\Omega_j)) dx \\
&- 2 \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i|} \left(c_i(\Omega_i) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right) \int_{\Omega_j} (f(x) - c_i(\Omega_i)) dx + O(|B_\rho|). \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Observa-se que

$$\int_{\Omega_i} (f(x) - c_i(\Omega_i)) dx = \int_{\Omega_j} (f(x) - c_j(\Omega_j)) dx = 0. \quad (4.20)$$

Além disso,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |B_\rho| = 0. \quad (4.21)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_\delta(\Omega_1, \dots, \Omega_i \setminus B_\rho, \dots, \Omega_j \cup B_\rho, \dots, \Omega_m) - \mathcal{J}_\delta(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) \\
&= [(f(x_0) - c_j(\Omega_j))^2 - (f(x_0) - c_i(\Omega_i))^2] + O(|B_\rho|), \quad (4.22)
\end{aligned}$$

onde foi utilizado o teorema do valor médio para integrais. Assim,

$$\mathcal{T}_{i,j}(x_0) = (f(x_0) - c_j(\Omega_j))^2 - (f(x_0) - c_i(\Omega_i))^2 \quad (4.23)$$

para todos $x_0 \in \Omega$.

No caso onde $|\Omega_j| = 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_\delta(\Omega_1, \dots, \Omega_i \setminus B_\rho, \dots, \Omega_j \cup B_\rho, \dots, \Omega_m) - \mathcal{J}_\delta(\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}) \\
&= \int_{B_\rho} (f(x) - c_j(\Omega_j \cup B_\rho))^2 dx + \int_{\Omega_i \setminus B_\rho} (f(x) - c_i(\Omega_i \setminus B_\rho))^2 dx - \int_{\Omega_i} (f(x) - c_i(\Omega_i))^2 dx \\
&= \int_{B_\rho} [(f(x) - c_j(\Omega_j \cup B_\rho))^2 - (f(x) - c_i(\Omega_i))^2] dx \\
&- 2 \frac{|B_\rho|}{|\Omega_i|} \left(c_i(\Omega_i) - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(x) dx \right) \int_{\Omega_i} (f(x) - c_i(\Omega_i)) dx + O(|B_\rho|). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Como $|B_\rho| \rightarrow 0$ para $\rho \rightarrow 0$, uma vez que $c_j(\Omega_j \cup B_\rho) = |B_\rho|^{-1} \int_{B_\rho} f(x) dx \rightarrow f(x_0)$ para todo $x_0 \in \Omega$, obtemos

$$\mathcal{T}_{i,j}(x_0) = -(f(x_0) - c_i(\Omega_i))^2, \quad (4.25)$$

para todos $x_0 \in \Omega$.

4.1.4 Sdt-Discrete

O algoritmo Sdt-Discrete foi apresentado no trabalho de Larrabide [59] utilizando uma versão discreta da derivada topológica. Neste trabalho, o algoritmo foi testado e comparado a outros algoritmos de segmentação, a saber, *K-means*, *Fuzzy C-means*, Crescimento de Regiões e *BootStrap*, e mostrou resultados de segmentação melhor qualidade, particularmente para imagens bastante poluídas por ruído (foi considerado ruído gaussiano branco de até 0.1 de variância).

Durante a realização do experimento numérico apresentado no Capítulo 6, foi encontrado uma limitação do algoritmo Sdt-discrete. Para segmentação de imagens com pouco contraste, onde classes possuem níveis de cinza próximos, o algoritmo poderá entrar em *loop* infinito, como será explicado no tópico **Manipulação das Intensidades das Classes** desta subseção. Por exemplo, na imagem da Lena (Figura 4.1), o algoritmo segmenta a imagem em 3 classes (Figura 4.2). No entanto, o algoritmo mostrou-se incapaz de segmentar a mesma imagem para 4 classes.



Figura 4.1: imagem da Lena.

Inicialização

A inicialização das classes é dada por

$$c_i^{(0)} = \min(f) + i \frac{(\max(f) - \min(f))}{m + 1} \quad (4.26)$$

para $i = 1, \dots, m$.



Figura 4.2: imagem da Lena segmentada em 3 classes.

A segmentação u inicial utilizada é dada por

$$u = c_i \chi_{\Omega} \quad (4.27)$$

ou seja, é definida de forma que todos os elementos da imagem fazem parte da primeira classe.

Condição de Parada

Foi adotado o critério $\mathcal{T}_{min} < 0$, onde $\mathcal{T}_{min} = \min \mathcal{T}_u$. No entanto outros critérios poderiam ser adotados, como por exemplo se em duas iterações consecutivas a função custo decresce menos do que uma determinada tolerância pré estabelecida.

Manipulação das Intensidades das Classes

Larrabide [59] propôs uma técnica para ajustar os valores das classes. A ideia é reajustar os valores ao final de cada iteração. O Algoritmo 2 é apresentado abaixo.

Algoritmo 2 Otimização dos valores das classes
Entrada: Uma imagem de entrada $f \in F$, o conjunto de classe C , uma imagem segmentada na iteração i , $u \in U$.

Saída: O novo conjunto de classe C^*

$$C^* = []$$

for $c \in C$ **do**

```

for -1 a 1 do
    escolher  $C^i = (C = \{c\}) \cup \{c + i\}$ 
    criar  $u^i$  fazendo em  $u$  a substituição  $C \rightarrow C^i$ 
    calcular  $j^i = \mathcal{J}_\delta(u^i)$ 
end for
 $c^{\min} = c + i$  sendo  $i = \min_i(j^i)$ 
 $C^* = C^* \cup c^{\min}$ 
end for

```

De acordo com a análise realizada no Capítulo 6, esta rotina de manipulação de classes é uma limitação para alguns casos de segmentação, como foi citado no início desta seção, fazendo com que o algoritmo entre em *loop* infinito. A cada iteração do *loop* principal do algoritmo Sdt-Discrete os valores das classes são atualizados devido aos *pixels* que são adicionados/removidos das classes, este valor representa todos os pixels dentro da classe. Na rotina de manipulação de valores das classes de Larrabide [59], a cada iteração são testados três valores no funcional: o atual, o valor atual incrementado de 1 e o valor atual decrementado de 1. O valor que obtiver o melhor resultado no funcional será o valor escolhido como representante da classe. Durante os experimentos foi observado que quando as imagens apresentam pouco contraste, alguns elementos da imagem ficam oscilando entre as classes, fazendo com que o algoritmo entre em *loop* infinito.

Correção das Bordas

Este algoritmo e os demais abordados consideraram $\delta = 0$ no funcional de Mumford-Shah, ou seja, não existe controle na medida das bordas de cada região, assim segmentações com bordas muito irregulares são permitidas, o que é não desejável, em geral. Na figura (4.3) pode-se observar o resultado da segmentação considerando $\delta = 0$. A figura (a) foi poluída artificialmente com ruído gaussiano para variância de 0.1. O resultado da segmentação, na figura (b), mostra um grande número de pequenas regiões em toda a imagem, que faz com que a segmentação perca qualidade.

Logo, para obter resultados com bordas mais suaves, foi proposto um novo funcional, resultado da soma convexa da versão discreta do funcional original e de um termo para correção das bordas, dado por:

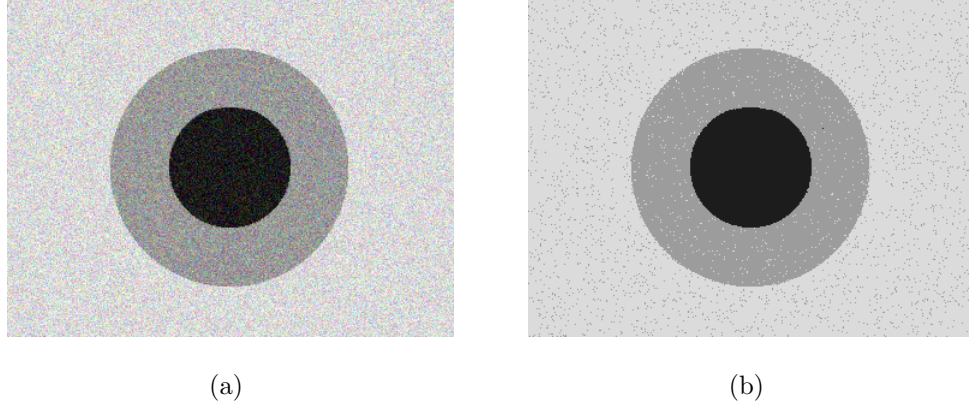


Figura 4.3: (a) Imagem original poluída com ruído gaussiano de variância 0.1. (b) Imagem segmentada sem o controle da medida das bordas ($\delta = 0$).

$$F_u = \theta \mathcal{J}_\delta(u) + (1 - \theta)B(u), \text{ com } \theta \in [0, 1], \quad (4.28)$$

onde o termo $B(u)$ é um funcional associado aos contornos entre as regiões.

Este funcional é definido como:

$$B(u) = \frac{1}{4n} \sum_s \sum_p \chi(u^s, u^p) \quad (4.29)$$

onde n representa o número de dimensões da imagem, $\chi(u^s, u^p)$ é uma função característica do contorno entre um pixel s e seu vizinho p (ela assume o valor um quando $u^s \neq u^p$ e zero caso contrário) e θ é um parâmetro que controla a contribuição de cada termo na função F_u .

Ao se perturbar o valor de u em um determinado elemento da imagem p mudando o valor de sua classe de c^i para algum $c_j \in C$ obtém-se uma nova imagem perturbada u_T . Logo, F_{u_T} é dada por

$$F_{u_T} = \theta \mathcal{J}_\delta(u_T) + (1 - \theta)B(u_T), \quad (4.30)$$

onde $\mathcal{J}_\delta(u_T)$ e $B(u_T)$ podem ser reescritas como

$$\mathcal{J}_\delta(u_T) = \mathcal{J}_\delta(u) - (f^s - u^s)^2 + (f^s - c_i)^2, \quad (4.31)$$

e

$$B(u_T) = B(u) - \frac{1}{4n} \sum_p [\chi(u^s, u^p) - \chi(c_i, u^p)] \quad (4.32)$$

dado que u_T é igual a u em todos os pontos exceto em um elemento s onde toma o valor $c_i \in C$

A variação total do funcional F devido a uma perturbação no elemento s da classe c_i para uma classe c_j da imagem será chamada $\mathcal{T}(i, j)$ e é dado por

$$\mathcal{T}(i, j) = F(u_T) - F(u), \quad (4.33)$$

ou seja,

$$\mathcal{T}(i, j) = \theta[(f^s - u^s)^2 - (f^s - c_i)^2] + (1 - \theta) \frac{1}{4n} \sum_p [\chi(u^s, u^p) - \chi(c_i, u^p)] \quad (4.34)$$

para $u_T^s = c_i, c_i \in C, i = 1, \dots, N_c$

Pseudocódigo

Algoritmo 3 S_{DT} -Discrete um método de segmentação de imagens baseado na derivada topológica

Entrada: Uma imagem de entrada $f \in F$, o conjunto de classes C , uma segmentação inicial $u \in U$ e os parâmetros θ e $\sigma \in (0, 1)$.

Saída: A imagem segmentada $u^* \in U$

normalizar a imagem f e os valores das classes ao intervalo $[0; 1]$

while $\mathcal{T}_{min} < 0$ **do**

 calcular $D_T^{\hat{}}(s)$ e $\hat{c}_i$ em cada elemento s da imagem

 avaliar $\mathcal{T}_{min} = \min_s \mathcal{T}(i, j); \mathcal{T}(i, j) < 0$

 em cada elemento s da imagem escolher $u^s = \hat{c}_i$, se $\mathcal{T}(i, j) \leq \sigma \mathcal{T}_{min}$

end while

$u^* = u$

4.1.5 Algoritmo Topo-Shape 1

Os algoritmos Topo-Shape 1 e 2 foram propostos por Hintermuller & Laurin [49], utilizando análise de sensibilidade topológica para segmentação de imagens e análise de sensibilidade à mudança de formas para a minimização das bordas. O algoritmo foi comparado ao algoritmo *Level Set* e mostrou resultados de melhor qualidade.

Uma limitação dos algoritmos é a falta da correção de bordas, pois como veremos adiante o funcional de Mumford-Shah não pode ser tratado via análise de sensibilidade à mudança de formas do ponto de vista do contínuo.

Pseudocódigo

A seguir, é apresentado o pseudocódigo do algoritmo Topo-Shape1.

Algoritmo 4 Topo-Shape 1

Entrada: $\Omega, f, m, \gamma, \mu_t$

Saída: $\Omega_i, c_i, i = 1, \dots, m$

Inicialização: Faça $\Omega_1^{(0)} := \Omega$ e, assim, $c_1^{(0)} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(x) dx$. Faça $l := 0$.

for $i = 1, \dots, m - 1$ **do**

for $k = 1, \dots, m - 1$ **do**

 Calcule $c_k^{(0)} = |\Omega_k^{(0)}|^{-1} \int_{\Omega_k^{(0)}} f(x) dx$.

 Calcule $\mathcal{T}_{k,i+1}^{(0)}(x_0) = -(f(x_0) - c_k^{(0)})^2$.

 Inicialize $\Omega_{i+1}^{(0)}$ usando (4.37), e atualiza $\Omega_k^{(0)}$ usando

$$\Omega_k^{(0)} = \Omega_k^{(0)} \setminus \left\{ x_0 \in \Omega_k^{(0)} \mid \mathcal{T}_{k,i+1}^{(0)}(x_0) < \gamma \min_{y \in \Omega_k^{(0)}} \mathcal{T}_{k,i+1}^{(0)}(y) \right\}.$$

end

end

while $\sum_{i,j=1}^m \|\mathcal{T}_{i,j}^{(l)}\|_2 > \mu_t(1 + \sum_{i,j=1}^m \|\mathcal{T}_{i,j}^{(0)}\|_2)$

 Faça $\Omega_k^{(l+1)} = \Omega_k^{(l)} \forall k \in \{1, \dots, m\}$

for $i = 1, \dots, m$ **do**

 Calcule $\mathcal{T}_{i,j}^{(l+1)}$ para todo $x_0 \in \Omega_i^{(l)}$ e para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

 Defina $\mathcal{T}_i^{(l+1)}(x_0) = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \mathcal{T}_{i,j}^{(l+1)}(x_0)$

 Determine os conjuntos

$$A_i^{(l+1)} = \left\{ x_0 \in \Omega_i^{(l)} \mid \mathcal{T}_i^{(l+1)}(x_0) < \gamma \min_{y \in \Omega_i^{(l)}} \mathcal{T}_i^{(l+1)}(y) \right\}$$

$$\Omega_i^{(l+1)} = \Omega_i^{(l+1)} \setminus A_i^{(l+1)}$$

for $j = 1, \dots, m, j \neq i$ **do**

$$\Omega_j^{(l+1)} = \Omega_j^{(l+1)} \cup \left\{ x_0 \in A_i^{(l+1)} \mid \mathcal{T}_{i,j}^{(l+1)}(x_0) = \mathcal{T}_i^{(l+1)}(x_0) \right\}$$

$$A_i^{(l+1)} = A_i^{(l+1)} \setminus \left\{ x_0 \in A_i^{(l+1)} \mid \mathcal{T}_{i,j}^{(l+1)}(x_0) = \mathcal{T}_i^{(l+1)}(x_0) \right\}$$

end

end

```

for  $i = 1, \dots, m$  do
    If  $|\Omega_i^{l+1}| \neq 0$ 
         $c_k^{(l+1)} = |\Omega_i^{(l+1)}|^{-1} \int_{\Omega_i^{(l+1)}} f(x) dx.$ 
    Else
         $c_k^{(l+1)} = 0.$ 
    end
     $l = l+1$ 
end

```

Inicialização

Para iniciar o algoritmo é necessário inicializar cada domínio Ω_i para todo $1 < i < m$. Além disso, a intensidade inicial de cinza de cada classe associada aos domínios também precisam ser definida.

Para a inicialização dos domínios é definido $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_i = \emptyset$ para todo $i > 1$. Então, o próximo domínio Ω_2 é determinado através do cálculo da derivada topológica $\mathcal{T}_{1,2}$. Assim,

$$\Omega_2 = \{x_0 \in \Omega_1 | \mathcal{T}_{1,2}(x_0) < 0\}. \quad (4.35)$$

Uma vez que a derivada topológica é apenas um critério local, muda-se o domínio Ω_1 somente quando a derivada topológica é suficientemente negativa. A fim de fazer isso, é fixada previamente uma tolerância $0 \leq \gamma \leq 1$. Então,

$$\Omega_2 = \left\{ x_0 \in \Omega_1 | \mathcal{T}_{1,2}(x_0) < \gamma \min_{y \in \Omega_1} \mathcal{T}_{1,2}(y) \right\}. \quad (4.36)$$

Uma vez que os conjuntos Ω_k , $k = 1, \dots, i < m$ são inicializados, é definido

$$\Omega_{i+1} = \bigcup_{k=1}^i \left\{ x_0 \in \Omega_k | \mathcal{T}_{k,i+1}(x_0) < \gamma \min_{y \in \Omega_k} \mathcal{T}_{k,i+1}(y) \right\}. \quad (4.37)$$

Para a definição das intensidades de cinza iniciais $c_i^{(0)}$ é utilizado (??). Então tem-se $c_1^{(0)} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(x) dx$ para o domínio $\Omega_1^{(0)}$. Para cada novo domínio $\Omega_i^{(0)}$ inicializado, calcula-se $c_k^{(0)} = |\Omega_k^{(0)}|^{-1} \int_{\Omega_k^{(0)}} f(x) dx$.

Condição de Parada

Após a inicialização, os domínios são modificados de acordo com suas derivadas topológicas entre todos os m domínios existentes. Idealmente, a convergência é alcançada

quando todas as derivadas topológicas são zero. No entanto, para fins numéricos, o critério de parada utilizado é

$$\sum_{i,j=1}^m \|T_{i,j}^{(l)}\|_2 \leq \mu_t \left(1 + \sum_{i,j=1}^m \|T_{i,j}^0\|_2 \right), \quad (4.38)$$

onde $\|T_{i,j}^{(l)}\|_2$ é a norma-L2 de $T_{i,j}^{(l)}$ e $0 < \mu_t \leq 1$ denota a tolerância especificada pelo usuário para parar o algoritmo.

Manipulação das Intensidades das Classes

Pode-se notar que o resultado da segmentação depende dos valores das intensidades das classes, quanto mais próximo dos valores reais da imagem estiverem dos valores das classes, melhor será o resultado da segmentação.

As intensidades das classes são atualizadas sempre que os domínios relacionados também são atualizados. Utilizando (??), a cada iteração do *loop* principal temos as atualizações

$$c_i = \begin{cases} |\Omega_i|^{-1} \int_{\Omega_i} f(x) dx & \text{se } \Omega_i \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.39)$$

Correção das bordas

Vamos considerar o funcional de Mumford-Shah modificado:

$$\mathcal{J}_\delta(u, \Gamma) = \int_{\Omega} (f - u)^2 dx + \delta \mathcal{H}^1(\Gamma), \quad (4.40)$$

Este funcional não pode ser tratado do ponto de vista da Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma².

De fato, para se analisar uma perturbação do funcional, além da perturbação infinitesimal dada pela mudança de classe de pixels, deve-se observar a perturbação que acontece na medida da fronteira. Do ponto de vista do contínuo, esta abordagem quando aproximada por uma mudança suave na fronteira remete às ferramentas da Mecânica do Contínuo (uma referência já considerada clássica é o livro do M.E. Gurtin, de 1981 [42]).

No que se segue será introduzido Teorema do Transporte de Reynolds.

²No trabalho de Novotny [73] foi demonstrada a equivalência entre os métodos *topological-Shape Sensitivity Method* e *Truncated Domain Method* para o cálculo da derivada topológica.

Teorema do Transporte de Reynolds

Seja Φ um campo espacial (escalar ou vetorial) suave definido sobre Ω . Então para qualquer parte $\mathcal{P} \in \Omega$ e parâmetro $\tau \in (0, \infty)$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\mathcal{P}_\tau} \Phi_\tau dV_\tau \Big|_{\tau=0} = \int_{\mathcal{P}_\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_\tau \Big|_{\tau=0} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\partial \mathcal{P}_\tau} \Phi_\tau dV_\tau \Big|_{\tau=0} = \int_{\partial \mathcal{P}_\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi \Big|_{\tau=0} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v}_{\partial \mathcal{P}_\tau} \right) d\sigma \quad (4.42)$$

onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidades da mudança de forma, $\mathbf{n}$ é o campo de vetores normais unitários e Φ_τ é dado por $\Phi_\tau = \Phi + \tau \mathbf{v}$.

Prova 4.1 *vide [42].*

Note-se então que, o campo espacial Φ , neste caso, é dado por $(f - u)^2$, que é descontínuo. Assim, diante desta limitação, o controle da fronteira utilizado neste trabalho advém da variação total do funcional na versão discreta, como introduzido por Larrabide [59].

Outra abordagem, poderia ser através de *level sets* como utilizada em [49], por exemplo, mas que foge aos propósitos deste trabalho focado na análise de sensibilidade topológica.

4.1.6 Algoritmo Topo-Shape 2

O algoritmo Topo-Shape 2 foi derivado do algoritmo Topo-Shape 1. Ele não utiliza diretamente o conceito de derivada topológica, porém ao final da apresentação do algoritmo será mostrado um teorema que comprova a equivalência conceitual entre os dois algoritmos. Na prática, podemos verificar que o algoritmo Topo-Shape 2 é muito mais rápido do que o Topo-Shape 1, como iremos apresentar através de exemplos no capítulo 5.

Para a atualização dos domínios, é necessário a média aritmética das intensidades de cinza de duas classes subsequentes, definida por

$$d_i = \frac{c_{i-1} + c_i}{2}, \forall i \in \{2, \dots, m\}. \quad (4.43)$$

Cada domínio Ω_i conterá os elementos da imagem cujo o valor das intensidades estejam dentro do intervalo $[d_i, d_{i+1}]$, dado por

$$\Omega_i^{(l+1)} = \left\{ x \in \Omega \mid d_i^{(l)} < f(x) \leq d_{i+1}^{(l)} \right\}, \forall i \in 1, \dots, m. \quad (4.44)$$

Pseudocódigo

Algoritmo 5 Topo-Shape 2

Entrada: Ω, f, m

Saída: $\Omega_i, c_i, i = 1, \dots, m$

Inicialização: Inicialize $c_i^{(0)}, i \in 1, \dots, m$ tal que $\min(f) \leq c_1^{(0)} < \dots < c_i^{(0)} < \dots < c_m^{(0)} \leq \max(f)$. Faça $l = 0$ e $\Omega_i^{(0)} = \emptyset \forall i \in 1, \dots, m$.

while $[(l > 0 \text{ e } |\Omega_i^{(l)} \Delta \Omega_i^{(l-1)}| > 0 \text{ ou } l = 0)]$

Faça $d_1^{(l)} < 0, d_{m+1}^{(l)} = \max(f)$.

Calcule $d_i^{(l)}, i \in \{2, \dots, m\}$, faça $\Omega_i^{(l+1)} = \{x \in \Omega | d_i^{(l)} < f(x) \leq d_{i+1}^{(l)}\} \forall i \in 1, \dots, m$

for $k = 1, \dots, m$

if $|\Omega_k^{(l+1)}| > 0$

Atualize $c_k^{l+1} = |\Omega_k^{(l+1)}|^{-1} \int_{\Omega_k^{(l+1)}} f(x) dx$

else

Escolha um $c_k^{(l+1)}$ arbitrário fora do intervalo $[d_{k-1}^{(l)}, d_k^{(l)}]$

end

end

Faça $l = l+1$

end

Inicialização

Neste algoritmo, os domínios iniciam vazios ($\Omega_i^{(0)} = \emptyset$). Para inicialização da intensidades das classes, é usado

$$c_i^{(0)} = \min(f) + i \frac{(\max(f) - \min(f))}{m + 1} \quad (4.45)$$

para $i = 1, \dots, m$.

No que se segue, é assumido que

$$\min(f) \leq c_1^{(0)} < \dots < c_i^{(0)} < \dots < c_m^{(0)} \leq \max(f) \quad (4.46)$$

Condição de Parada

Para a definição da condição de parada, precisamos da definição de diferença simétrica de dois conjunto A e B, isto é

$$A\Delta B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B).$$

onde o sobrescrito C refere-se ao complemento no respectivo conjunto.

Sendo l o número de iterações do algoritmos, o *loop* continua enquanto $l > 0$ e $|\Omega_i^{(l)} \Delta \Omega_i^{(l-1)}| > 0$. Observe que a diferença simétrica aplicada os domínios da iteração passada e atual, garante que o algoritmo só irá parar quando não houver mudança em todos os domínios de uma iteração para outra.

Manipulação das Intensidades das Classes

Ao final de cada iteração, os valores das classes são atualizados. Se o domínio Ω_i não for vazio, então a classe é atualizada usando

$$c_i = |\Omega_i|^{-1} \int_{\Omega_i} f(x) dx$$

Se o domínio Ω_i for vazio, então é escolhido um valor arbitrário para c_i fora do intervalo $[d_{i-1}, d_i]$.

Relação Topo-Shape 1 e Topo-Shape 2

A seguir, iremos apresentar alguns resultados preliminares que servirão para comparar o algoritmo Topo-Shape 1 com o algoritmo Topo-Shape 2

Lema 4.2 *Defina*

$$\mathcal{T}_{i,j}(x) := (f(x) - c_j)^2 - (f(x) - c_i)^2, \forall_{i,j} \in \{1, \dots, m\}, \forall x \in \Omega. \quad (4.47)$$

Então

$$\mathcal{T}_{i,j}(x) = \mathcal{T}_{i,k}(x) + \mathcal{T}_{k,j}(x). \quad (4.48)$$

Prova

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i,k}(x) + \mathcal{T}_{k,j}(x) &= [(f(x) - c_k)^2 - (f(x) - c_i)^2] + [(f(x) - c_j)^2 - (f(x) - c_k)^2] \\ &= \mathcal{T}_{i,j}(x). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Note que, são corolários imediatos $\mathcal{T}_{i,i} = 0$ e $\mathcal{T}_{i,j} = -\mathcal{T}_{j,i}$

Lema 4.3 *Seja $\mathcal{T}_{i,j}$ definida como no lema anterior. Então*

$$\mathcal{T}_{i,j} < 0 \iff \begin{cases} \text{ou } c_i < c_j \text{ e } f(x) > \frac{c_i + c_j}{2} \\ \text{ou } c_i > c_j \text{ e } f(x) < \frac{c_i + c_j}{2} \end{cases}$$

Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i,j}(x) &= (f(x) - c_j + f(x) - c_i)(f(x) - c_j - [f(x) - c_i]) \\ &= (2f(x) - c_i - c_j)(c_i - c_j). \end{aligned}$$

Assim, para que $\mathcal{T}_{i,j} < 0$ os termos do produto têm que apresentar sinais opostos.

Então, se $c_i - c_j < 0$, $2f(x) - c_i - c_j > 0$, isto é, se

$$c_i < c_j \text{ então } f(x) > \frac{c_i + c_j}{2}, \quad (4.50)$$

por outro lado, se

$$c_i > c_j \text{ então } f(x) < \frac{c_i + c_j}{2}. \quad (4.51)$$

Lema 4.4 *Seja $x \in \Omega_k$ e p o menor inteiro positivo tal que*

$$\mathcal{T}_{k,p}(x) = \min_{l \in \{1, \dots, m\}} \mathcal{T}_{k,l}(x), \quad (4.52)$$

e assumamos que $\min(f) \leq c_1^{(0)} < \dots < c_i^{(0)} < \dots < c_m^{(0)} \leq \max(f)$. Então

$$d_p < f(x) < d_{p+1}. \quad (4.53)$$

Reciprocamente, se $f(x)$ satisfaz (4.53) para algum $\hat{p}$. Então

$$\mathcal{T}_{k,\hat{p}}(x) = \min_{l \in \{1, \dots, m\}} \mathcal{T}_{k,l}(x). \quad (4.54)$$

Prova

Se $p = m$, então (como definido no Algoritmo 2)

$$f(x) \leq \max f = d_{p+1}. \quad (4.55)$$

Suponha $p < m$. Assuma que $f(x) > d_{p+1}$

Pelo lema 4.2,

$$\mathcal{T}_{k,p}(x) + \mathcal{T}_{p,p+1}(x) = \mathcal{T}_{k,p+1}(x). \quad (4.56)$$

Pelo lema 4.3,

$$\mathcal{T}_{p,p+1}(x) < 0. \quad (4.57)$$

Então,

$$\mathcal{T}_{k,p+1}(x) < \mathcal{T}_{k,p}(x). \quad (4.58)$$

o que é um absurdo, visto que p é o menor inteiro que satisfaz (4.52). Logo, a hipótese $f(x) > d_{p+1}$ é falsa e portanto, $f(x) \leq d_{p+1}$

Consideremos agora a segunda desigualdade.

Se $p = 1$ (pelo Algoritmo 2). Define-se $d_1 < 0$. Como

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow d_1 < 0 \leq f(x). \quad (4.59)$$

Assuma que $f(x) \leq d_p$ e $p > 1$:

i) Se

$$f(x) < d_p = \frac{c_{p-1} + c_p}{2}, \quad (4.60)$$

pelo lema 4.2

$$T_{k,p} + T_{p,p-1}(x) = T_{k,p-1}(x), \quad (4.61)$$

pelo lema 4.3

$$T_{p,p-1} < 0 \quad (4.62)$$

Então,

$$T_{k,p-1} < T_{k,p} \quad (4.63)$$

Tal conclusão é um absurdo, visto que p é o menor inteiro que satisfaz (4.52). Logo, a hipótese $f(x) < d_p$ é falso. Então, $f(x) > d_{p+1}$, $p > 1$

ii) Se

$$f(x) = d_p = \frac{c_{p-1} + c_p}{2}, \quad (4.64)$$

pelo lema 4.2

$$\begin{aligned} T_{p,p-1} &= (f(x) - c_{p-1})^2 - (f(x) - c_p)^2 \\ &= \left(\frac{c_{p-1}}{2} + \frac{c_p}{2} - c_{p-1} \right)^2 - \left(\frac{c_{p-1}}{2} + \frac{c_p}{2} - c_p \right)^2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$= \left(\frac{c_p}{2} - \frac{c_{p-1}}{2} \right)^2 - \left(\frac{c_{p-1}}{2} - \frac{c_p}{2} \right)^2 = 0. \quad (4.66)$$

Temos

$$T_{k,p}(x) + T_{p,p-1}(x) = T_{k,p-1}(x). \quad (4.67)$$

Como

$$T_{p,p-1}(x) = 0. \quad (4.68)$$

Então

$$T_{k,p}(x) = T_{k,p-1}(x). \quad (4.69)$$

Tal conclusão é um absurdo, visto que p é o menor inteiro que satisfaz (4.52).

Logo, a hipótese $f(x) = d_p$ é falso.

Então, $d_p < f(x) < d_{p+1}$, $p > 1$.

Recíproca

Assuma que $d_{\hat{p}} < f(x) < d_{\hat{p}+1}$ para algum $1 < \hat{p} < m$

(Note que $\hat{p} = 1$, $d_{\hat{p}} < 0$ e $\hat{p} = m$, $f(x) = \max f(x) < d_{m+1}$.)

Seja $q > \hat{p} + 1 \longrightarrow c_q \geq c_{\hat{p}+1}$, então $f(x) < d_{\hat{p}+1} = \frac{c_{\hat{p}} + c_{\hat{p}+1}}{2} \leq \frac{c_{\hat{p}} + c_q}{2}$.

Pelo lema 4.3 temos

$$T_{q,\hat{p}}(x) \leq 0. \quad (4.70)$$

Logo,

$$T_{\hat{p},q}(x) \geq 0. \quad (4.71)$$

Pelo lema 4.2

$$T_{k,\hat{p}}(x) + T_{\hat{p},q}(x) = T_{k,q}(x). \quad (4.72)$$

Logo

$$T_{k,q}(x) \geq T_{k,\hat{p}}(x). \quad (4.73)$$

Analogamente, se $q < \hat{p} - 1$

$$f(x) > d_{\hat{p}} \geq \frac{c_{\hat{p}} + c_q}{2}. \quad (4.74)$$

Pelo lema 4.3, temos

$$T_{q,\hat{p}} \leq 0. \quad (4.75)$$

Logo

$$T_{\hat{p},q} \geq 0. \quad (4.76)$$

Pelo lema 4.2, temos

$$T_{k,\hat{p}}(x) + T_{\hat{p},q}(x) = T_{k,q}(x). \quad (4.77)$$

Logo

$$T_{k,q}(x) > T_{q,p}(x). \quad (4.78)$$

Então

$$T_{k,\hat{p}}(x) = \min_{l=\{1,\dots,m\}} T_{k,l}. \quad (4.79)$$

A seguir, é apresentado um teorema que prova a equivalência dos algoritmos 4 e 5 (Topo-Shape 1 e Topo-Shape 2).

Teorema 4.5 *Seja $l \geq 1$. Assuma que $\Omega_i^{(0)}$ $i = \{1, \dots, m\}$ e $\min(f) < c_1^{(0)} < \dots < c_m^{(0)} < \max(f)$ são dados. Assuma também que $\hat{l}_k^{(x)} = \arg \min T_{k,l}(x)$ é único $\forall x \in \Omega$ e $k \in \{1, \dots, m\}$.*

Então, após uma iteração do loop principal do algoritmo Topo-Shape 1, temos

$$\begin{aligned} \Omega_k^{(m)} &= \left(\left\{ x \in \Omega \mid d_k^{(l)} < f(x) \leq d_{k+1}^{(l)} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cup \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid f(x) = d_k^{(0)} \right\} \setminus \left\{ x \in \Omega_{k+1}^{(l)} \mid f(x) = d_{k+1}^{(l)} \right\} \right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Demonstração

No algoritmo Topo-Shape 1, $A_k^{(l+1)}$ é definida

$$A_k^{(l+1)} = \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid T_k^{(l+1)} < \delta \min_{y \in \Omega_k^{(l)}} \mathcal{T}_k^{(l+1)}(y) \right\}. \quad (4.82)$$

Como $\delta = 0$

$$A_k^{(l+1)} = \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid T_k^{(l+1)} < 0 \right\} \quad (4.83)$$

que pode ser escrita como

$$A_k^{(l+1)} = \bigcup_{j=1}^m B_{k,j}^{(l+1)}, \quad (4.84)$$

onde

$$B_{k,j}^{(l+1)} = \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid d_j^{(l)} < f(x) \leq d_{j+1}^{(l)} \text{ e } T_k^{(l+1)}(x) < 0 \right\}. \quad (4.85)$$

De fato,

$$B_{k,j}^{(l+1)} \subset A_k^{(l+1)}, \quad (4.86)$$

então

$$\bigcup_{j=1}^k B_{k,j} \subset A_k^{(l+1)} \quad (4.87)$$

Temos que mostrar que

$$A_k^{(l+1)} \subset \bigcup_{j=1}^k B_{k,j}. \quad (4.88)$$

Seja

$$x \in A_k^{(l+1)} \text{ então } x \in \Omega_k^{(l)} \quad (4.89)$$

e

$$\mathcal{T}_k^{(l+1)} < 0 \text{ segue que } T_k^{(l+1)} = \min_{s \in \{1, \dots, m\}} T_{k,s}(x) < 0. \quad (4.90)$$

Pelo lema 4.4, seja $\hat{p}$ tal que $T_{k,\hat{p}}^{(l+1)}(x) = T_k^{(l+1)}(x)$ logo, $d_{\hat{p}} < f(x) < d_{\hat{p}+1}$, $\hat{p} \in \{1, \dots, m\}$

Logo, $x \in B_{k,\hat{p}}^{(l+1)}$ donde $x \in \bigcup_{i=1}^m B_{k,i}^{(l+1)}$ que implica, finalmente, que $A_k^{(l+1)} \subset \bigcup B_{k,j}^{(l+1)}$

Diferentes casos para $B_{k,j}^{(l+1)}$

1º **caso**, $k = j$

$$d_k^{(l)} < f(x) < d_{k+1}^{(l)} = \frac{c_k + c_{k+1}}{2} \quad (4.91)$$

Pelo lema 4.4, segue-se que

$$\mathcal{T}_{k,k}^{(l+1)} = \min T_{k,s}^{(l+1)}(x) = 0 \Leftrightarrow T_k^{(l+1)} = 0. \quad (4.92)$$

Logo, se $k = j$, tem-se que $B_{k,j}^{(l+1)} = \emptyset$

2º **caso**: Se $k > j + 1$, então

$$c_k^{(l)} > c_{j+1}^{(l)} \quad (4.93)$$

De fato, tem-se

$$f(x) \leq d_{j+1}^{(l)} = \frac{c_j + c_{j+1}}{2} < \frac{c_j^{(l)} + c_k^{(l)}}{2} \quad (4.94)$$

Pelo lema 4.3

$$\mathcal{T}_{k,j}^{(l+1)}(x) < 0 \text{ se, e somente se } \mathcal{T}_k^{(l+1)} \leq \mathcal{T}_{k,j}^{(l+1)} < 0 \text{ se, e somente se } \mathcal{T}_k^{(l+1)}(x) \leq 0 \quad (4.95)$$

Logo,

$$B_{j,k}^{(l+1)} = \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid d_j^{(l)} \leq f(x) \leq d_{j+1}^{(l)} \right\} \quad (4.96)$$

3º **caso:** Se $k = j + 1$

Tem-se que,

$$f(x) < d_{j+1}^{(l)} \text{ que implica que } \frac{c_j^{(l)} + c_{j+1}^{(l)}}{2} = \frac{c_j^{(l)} + c_k^{(l)}}{2}. \quad (4.97)$$

Pelo lema 4.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x)^{(l+1)} &< 0, \quad \text{donde} \quad \mathcal{T}_k^{(l+1)}(x) < 0 \\ \text{ou, } f(x) = d_{j+1}^{(l)} &= \frac{c_j^{(l)} + c_{j+1}^{(l)}}{2}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{k,j}^{(l+1)}(x) &= (f(x) - c_j)^2 - (f(x) - c_k)^2 \\ &= f(x)^2 - 2f(x)c_j + c_j^2 - f(x)^2 + 2f(x)c_k - c_k^2 \\ &= 2f(x)(c_k - c_j) \\ &\quad - c_k^2 + c_j^2 \\ &= 2 \left(\frac{c_j + c_k}{2} (c_k - c_j) \right) (c_k - c_j) + (c_j + c_k)(c_j - c_k) - (c_j + c_k)(c_j - c_k) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{j+1,j}^{(l+1)}(x) &= 0 \\ &= \min \mathcal{T}_{(j+1),j}^{(l+1)} - \mathcal{T}_k^{(l+1)} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Logo,

$$f(x) \neq d_{j+1}^{(l)}. \quad (4.101)$$

Neste caso,

$$B_{k,j}^{(l+1)} = \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid d_k^{(l)} < f(x) < d_{k+1}^{(l)} \right\}. \quad (4.102)$$

4º **caso:** $K > j - 1$

Temos que,

$$d_j^{(l)} < f(x) \leq d_{j+1}^{(l)} \quad (4.103)$$

Assim,

$$f(x) > d_j^{(l)} = \frac{c_{j-1}^{(l)} + c_j^{(l)}}{2} \geq \frac{c_k^{(l)} + c_j^{(l)}}{2} \quad (4.104)$$

Pelo lema 4.3,

$$\mathcal{T}_{k,j}^{(l+1)}(x) < 0 \text{ que implica em } T_k^{(l+1)} < 0, \quad (4.105)$$

Portanto,

$$B_{k,j}^{(l)} = \left\{ x \in \Omega_k^{(l)} \mid d_k^{(l)} < f(x) \leq d_{k+1}^{(l)} \right\}. \quad (4.106)$$

Após uma iteração no algoritmo

$$\begin{aligned} \Omega_k^{(l+1)} &= \Omega_k^{(l)} \setminus A_k^{(l+1)} \cup \left\{ \bigcup_{i=1, i \neq k}^m \left\{ x \in A_k^{(l+1)} \mid \mathcal{T}_k^{(l+1)}(x) = \mathcal{T}_i^{(l+1)}(x) \right\} \right\} \\ &= (\Omega_k^{(l)} \setminus A_k^{(l+1)}) \cup \left[\left(\bigcup_{i=1, i \neq k}^m A_k^{(l+1)} \right) \cap \left(\bigcup_{i=1, i \neq k}^m \left\{ x \in \Omega_i^{(l)} \mid \mathcal{T}_{i,j}^{(l+1)}(x) = \mathcal{T}_i^{(l+1)}(x) \right\} \right) \right] \\ &= (\Omega_k^{(l)} \setminus A_k^{(l+1)}) \cup \left(\bigcup_{i=1, i \neq k}^m \bigcup_{i=1}^m B_{j,k}^{(l+1)} \right) \end{aligned}$$

Após uma iteração é comprovado que os algoritmos continuam equivalentes.

4.2 Algoritmo Topo-Shape 3

Nesta seção é mostrado o algoritmo Topo-Shape 3, resultado da união de algumas rotinas dos outros algoritmos já citados nesta seção. Foram analisadas algumas características limitantes de cada algoritmo para a construção do Topo-Shape 3, e assim, verificou-se que:

- o problema de *loop* infinito do *Sdt-discrete* na segmentação de Lena com 4 classes, devia-se ao fato de sua condição de parada e manipulação das classes;
- os algoritmos Topo-Shape 1 e Topo-Shape 2 não apresentavam solução para correção das bordas, já que o termo associado à medida Hausdorff no funcional de Mumford-Shah cria uma descontinuidade na derivada topológica.
- o algoritmo Topo-Shape 2 não utiliza o conceito direto de derivada topológica, impossibilitando a adição de mais um termo a função custo para correção das bordas.

Diante do exposto, utilizou-se o algoritmo Topo-Shape 1 modificado com as correções de bordas do Sdt-Discrete, o qual denominou-se Topo-Shape 3.

Capítulo 5

Metodologia

5.1 Tipo da pesquisa

Numa definição formal desta pesquisa, pode-se descrevê-la como de natureza bibliográfica e aplicada, com objetivos que a caracterizam como explicativa e cuja abordagem de análise de resultados é quantitativa.

A natureza da pesquisa caracteriza-se como bibliográfica devido ao fato de recuperar o conhecimento científico sobre o problema, a saber:

- Larrabide I., 2008. [59]
- Hitermuller M. & Laurin A., 2009 [49]

A natureza aplicada da pesquisa dá-se pela predominância de um cenário de experimentação que visa concretizar o objetivo do trabalho fazendo uso de cenários reais, a saber, uso de *benchmarks* reconhecidos.

Considera-se a análise dos resultados quantitativa, pois as variáveis utilizadas para a avaliação dos algoritmos foram quantificadas através de métricas (ver seção 5.5).

5.2 Ambiente de estudo

Uma vez que se almeja verificar a qualidade de uma solução algorítmica para o problema descrito, um ambiente virtual foi utilizado. Em particular, foi escolhido MATLAB (MATrix LABoratory) e seu toolbox de processamento de imagens, devido a sua robustez, flexibilidade e o grande número de recursos.

5.3 População e amostra

A população de imagem digitais pode ser considerada virtualmente infinita, não havendo portanto interesse em considerar uma experimentação que a tomasse em conta por inteiro. Desta forma, convencionou-se a utilização de três imagens teste que compõem *benchmarks* utilizados em trabalhos anteriores [59, 49], que foram chamadas de IM01, IM02 e IM03. A imagem IM01 corresponde a figura dos círculos concêntricos, vista em Figura 5.1. A partir desta, outras 10 imagens de testes foram geradas inserindo-se ruído gaussiano branco, com variâncias entre 0.01 e 0.1.

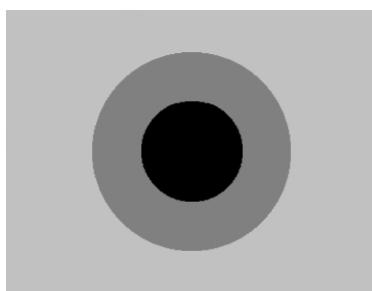


Figura 5.1: imagem teste IM01.



Figura 5.2: imagem teste IM02.

A terceira imagem utilizada foi a de Lena, que pode ser vista na Figura 5.3.

5.4 Instrumento de coleta de dados

A cada simulação um relatório foi emitido informando os dados numéricos relacionados a cada variável analisada.



Figura 5.3: imagem teste IM03.

5.5 Definição de variáveis

As variáveis utilizadas para análise foram:

- qualidade da segmentação,
- desempenho do algoritmo.

A métrica utilizada para quantificar a qualidade de segmentação, foi o Índice de Tanimoto. Este índice é calculado como

$$I(A_1, A_2) = \frac{n(A_1 \cap A_2)}{n(A_1 \cup A_2)}, \quad (5.1)$$

ou seja, o quociente entre a quantidade de *pixels* da interseção da região A_1 na imagem original e a região (correspondente) A_2 na imagem segmentada, e a quantidade de *pixels* na união de ambas as regiões. O valor ótimo é 1.

Para quantificar o desempenho do algoritmo, foi medido o tempo de segmentação em segundos e número de iterações do *loop* principal.

5.6 Procedimentos de análise

Foram testados os 3 algoritmos apresentados no Capítulo 4 mais uma hibridização dos algoritmos com as características que se mostraram mais vantajosas de cada um.

Abaixo é apresentada a nomenclatura utilizada nos testes dos algoritmos da bibliografia principal, bem como o Topo-Shape 3 que é proposto neste trabalho

Algoritmo	Nomenclatura	Ref.
<i>Topo Shape 1</i>	TS1	[49]
<i>Topo Shape 2</i>	TS2	[49]
<i>Sdt-Discrete</i>	SD	[59]
<i>Topo-Shape 3</i>	TS3	-

Tabela 5.1: nomenclatura dos algoritmos.

A cada teste realizado, são analisadas as características mais relevantes dos algoritmos. São elas:

- inicialização,
- condição de parada,
- manipulação das classes,
- correção das bordas.

Capítulo 6

Experimentos numérico e análise

Como previamente mencionado, neste capítulo serão analisados os algoritmos SDt-Discrete, Topo-Shape 1, Topo-Shape 2, Sdt-Discrete e Topo-Shape 3. Os resultados em relação a qualidade e desempenho são apresentados, assim como a comparação dos resultados de cada algoritmo.

6.1 Experimento 1

O primeiro experimento realizado utilizou a imagem IM01 e as imagens poluídas artificialmente, como descrito no Capítulo 5

Na Tabela 6.1 pode-se observar alguns resultados da segmentação da imagem. Na primeira coluna, tem-se o resultado para imagem sem ruídos, na segunda coluna, o resultado para imagem poluída com ruído gaussiano branco de variância ($\bar{\sigma}^2$) 0.05, e finalmente na terceira, a imagem poluída com ruído de variância ($\bar{\sigma}$) 0.1.

As tabelas com os resultados numéricos, encontra-se disponível do Apêndice. Para sintetizar os resultados, foram gerados gráficos para cada uma das métricas avaliadas no experimento. Na figura 6.1 podemos observar o gráfico relativo a métrica do Índice de Tanimoto.

Diante do exposto, pode-se observar que a qualidade da segmentação das imagens para os algoritmos TS1 e TS2 decresce com o aumento do nível do ruído, já para o algoritmo Sdt e TS3, a qualidade da imagem permanece próximo do máximo. Isso deve-se ao fato de que o algoritmo TS1 e TS2 não têm controle das bordas, tornando o algoritmo sensível a imagens ruidosas.

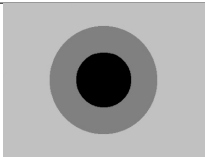
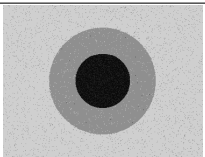
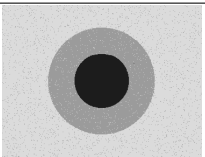
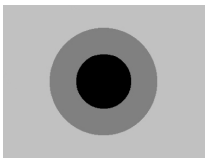
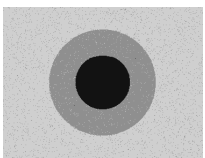
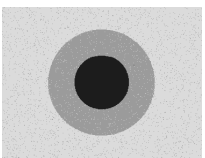
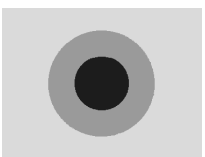
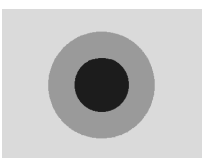
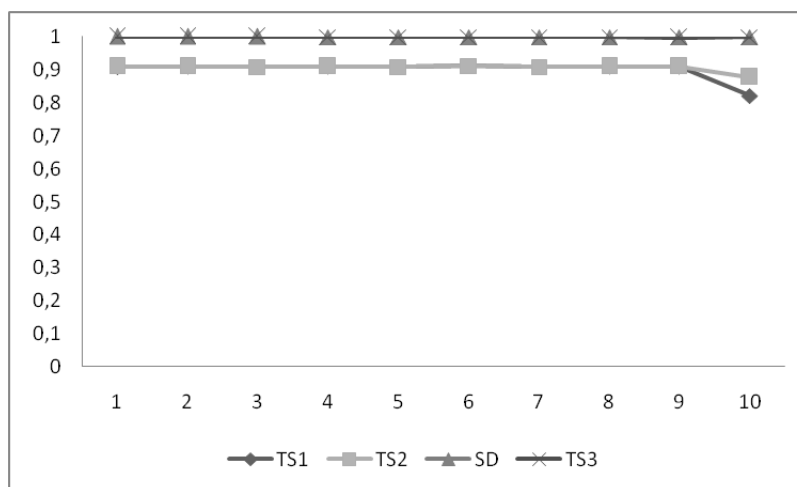
σ^2		0	0.05	0.1
Algoritmo	<i>TS1</i>			
	<i>TS2</i>			
	<i>SD</i>			
	<i>TS3</i>			

Tabela 6.1: resultado da segmentação da imagem IM01.

Figura 6.1: índice vs. (σ^2)

Na figura 6.2, pode-se observar o gráfico relativo ao tempo de execução do algoritmo.

Analisando o gráfico, observa-se que os algoritmos TS1 e TS2 apresentam desempenho superior aos algoritmos Sdt e TS3. Isso também deve-se ao fato dos algoritmos Sdt e TS3 apresentarem controle de bordas, o que aumento a complexidade

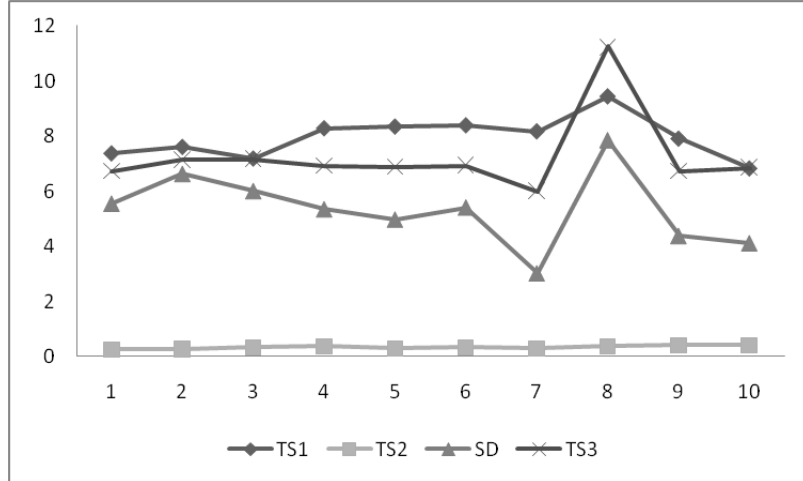


Figura 6.2: tempo vs.(\bar{\sigma}^2)

algorítmica e o tempo de execução dos mesmo.

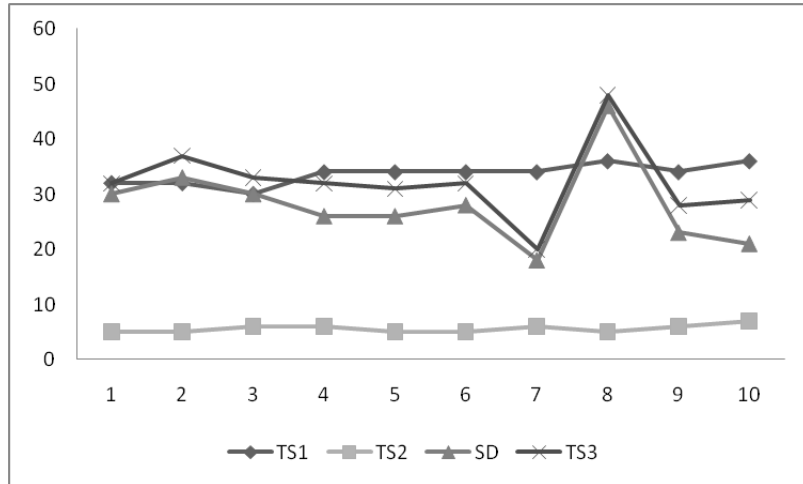


Figura 6.3: iterações vs.(\bar{\sigma}^2)

6.2 Experimento 2

O segundo experimento realizado foi com a imagem IM02, utilizada no trabalho de Hintermuller & Laurin [49], vista na imagem abaixo.

Os resultados obtidos no experimento encontram-se exibidos na tabela abaixo.

Este experimento mostra que todos os algoritmos conseguem distinguir os elementos da imagem, mesmo quando os elementos possuem nível próximo de cinza. Como a imagem possui elementos bem definidos e não contém ruído, os algoritmos TS1 e TS2



Figura 6.4: imagem teste 2.

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	1	10.6237	4
<i>TS2</i>	1	0.6708	3
<i>SD</i>	1	26.9882	37
<i>TS3</i>	1	31.2563	40

Tabela 6.2: resultados imagem IM02.

são os mais indicados devido ao melhor desempenho em relação ao tempo.

Existe uma consideração importante sobre o algoritmo SD. A segmentação da imagem utilizando o algoritmo SD entrou em loop infinito devido a manipulação de classes. Assim, para esse experimento o algoritmo foi utilizado sem a otimização dos valores das classes. No Capítulo ?? esse problema é mostrado com mais detalhes.

6.3 Experimento 3

No experimento 3, foi utilizada a imagem de Lena IM03 (Figura 6.5).

Neste experimento, foi realizado a variação do número de classes, segmentando a imagem em 3 e 4 classes. Para fins de avaliação de qualidade foram mostradas as imagens segmentadas que são suficientes para propósitos deste trabalho.

A Tabela 6.3 mostra os resultado da segmentação da imagem com 3 classes. Pode-se observar na Figura 5.1 que os algoritmos TS1 e TS2, por não terem controle das bordas, apresentam segmentação de menor qualidade. Já as segmentações dos algoritmos SD e



Figura 6.5: imagem teste 3.

TS3, apesar de menor desempenho computacional, apresentam qualidade superior.

A Tabela 6.4 mostra os resultado da segmentação da imagem com 4 classes. Note que o algoritmo SD não consegue terminar a segmentação. Os resultados sa segmentação podem ser vistos na Figura ???. O algoritmo TS1 e TS2 apesar de ter melhor desempenho computacional apresentam resultado de menor qualidade.

Diante do exposto, pode-se concluir sobre o algoritmo TS3:

- mostrou-se mais robusto do que o algoritmo Sdt-Discrete, pois conseguiu gerar segmentações de todas as imagens dos experimentos, ao contrário do Sdt-Discrete. Além disso, apresentou resultados de melhor qualidade de segmentação no experimento 3, onde a divisão entre as classes não da imagem não é trivial;
- em relação aos algoritmo TS1 e TS2, mostrou resultados maior qualidade de segmentação para imagens ruidosas, porém pior tempo computacional. Isso deve-se ao fato do algoritmo TS3 apresentar controle de bordas, o que gera melhores resultados de segmentação, mas aumenta a complexidade do algoritmo.

Algoritmo	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	75.8945	44
<i>TS2</i>	2.6676	14
<i>SD</i>	129.5588	179
<i>TS3</i>	182.9453	201

Tabela 6.3: resultados da imagem IM03 em 3 classes.

Algoritmo	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	39.8427	32
<i>TS2</i>	2.7300	14
<i>SD</i>	-	-
<i>TS3</i>	275.4324	314

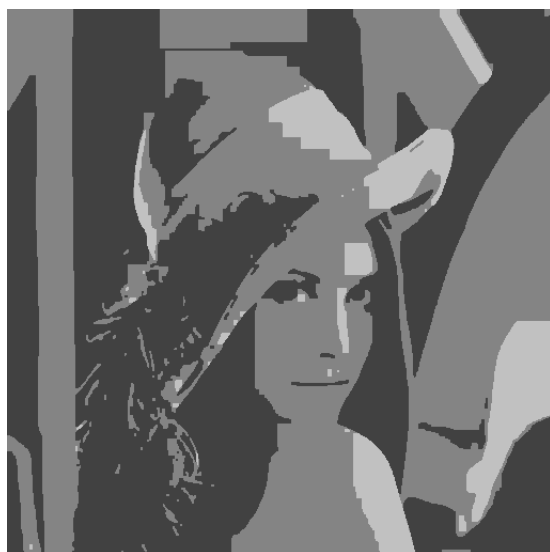
Tabela 6.4: resultados da imagem IM03 em 4 classes.



(a) TS1



(b) TS2



(c) SD



(d) TS3

Figura 6.6: imagem IM03 segmentada em 3 classes pelos algoritmos TS1 (a), TS2 (b), SD (c) e TS3 (d), respectivamente.



(a) TS1



(b) TS2



(c) TS3

Figura 6.7: imagem IM03 segmentada em 4 classes pelos algoritmos TS1 (a), TS2 (b) e TS3 (c), respectivamente.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Contribuições do Trabalho

Neste trabalho, foi feita uma análise dos algoritmos Sdt-Discrete e Topo-Shape 1 e 2. Foram descritas as técnicas e algumas limitações dos algoritmos, o que serviu de base para proposição de um novo algoritmo, o TS3. De fato, no algoritmos TS1 não é possível realizar a análise de sensibilidade topológica associada ao terceiro termo do funcional de Mumford-Shah, a medida Hausdorff da fronteira, pois foi verificado que este termo causa uma descontinuidade na derivada topológica. O algoritmo TS2 demonstra-se equivalente ao TS1. Por outro lado, embora o Sdt-discrete tenha se mostrado muito eficiente em comparação com outros algoritmos da literatura, ele não foi capaz de segmentar imagens com pouco contraste, como, por exemplo, a imagem de Lena com 4 classes de segmentação. Assim, o TS3 agregou a inicialização e manipulação das classes e a condição de parada do TS1 ao termo de controle de bordas do Sdt-discrete, o que resultou em um algoritmo de segmentação de imagens via análise de sensibilidade topológica mais robusto.

7.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros,propõe-se:

- aplicar o algoritmo TS3 a algum problema de detecção de falhas em equipamentos mecânicos. Um exemplo importante e que motivou esse estudo no âmbito do Engenharia de Produção é a identificação de fraturas em cascos de navio FPSO (*Floating Production Storage and Offloading*) que são navios petroleiros de casco

simples adequadamente convertidos a fim de armazenar e produzir petróleo e gás natural, como uma unidade de flutuação estacionária. Estes navios são utilizados em locais de produção distantes da costa com inviabilidade de ligação por oleodutos ou gasodutos. Normalmente, devem permanecer por mais de 20 anos em uma mesma localização [22], operando em um ambiente complexo e hostil. O contínuo carregamento e descarregamento, as cargas de ondas variáveis, o ambiente marinho salino, entre outros fatores, fazem com que os navios FPSO sejam expostos à fadiga, à degradação e ao processo corrosivo, podendo provocar danos nos seus cascos. Tais danos se não forem identificados e reparados causam acidentes que podem ocasionar perdas de vidas e de produção, desastres ambientais e colapso da estrutura. Dessa forma, é importante a realização da manutenção preventiva destas unidades, inspecionando periodicamente a fim de assegurar sua integridade estrutural, minimizando o risco para o ambiente, trabalhadores e meio ambiente. Uma das principais técnicas de manutenção preventiva utilizada, devido à facilidade do método, baixo custo e rapidez, é a inspeção visual, que consiste na utilização de aparelhos fotográficos e de filmagem para monitorar cabos, dutos e equipamentos e garantir sua segurança. A segmentação de imagens é um fator muito importante na automatização deste processo, o que evita a fadiga de operadores humanos, além de possibilitar a identificação automática das falhas, reduzindo o custo da inspeção;

- implementar o TS3 em hardware a fim de obter maior desempenho na automatização;
- finalmente, outra proposta a ser explorada é a utilização de uma segmentação que não seja constante por partes, ou seja, dentro das classes os pixels podem ter valores da tonalidade de cinza diferentes, (como usualmente adotada na literatura) e assim, utilizar o segundo termo do funcional de Mumford-Shah no processo. Para tanto, será necessário o cálculo da derivada topológica considerando mais este termo.

Referências Bibliográficas

- [1] AMMARI, H.; *et al.* **Stability and Resolution Analysis for a Topological Derivative Based Imaging Functional.** Society for Industrial and Applied Mathematics, 50:48-76, 2012.
- [2] AMSTUTZ, S. **Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique.** PhD Thesis, Intitut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 2003.
- [3] AMSTUTZ, S. **A penalt method for topology optimization subject to a pointwise state constraint.** ESAIM: Control, Optimisation and Calculus os Variations, 16(03):523-544, 2010.
- [4] AMSTUTZ, S.; HORCHANI, I.; MASMOUDI M. **Crack detection by the topological gradient method.** Control and Cybernetics, 34(1):81-101, 2005.
- [5] AMSTUTZ, S.; ANDRÄ, H. **A new algorithm for topology optimization using a level-set method,** Journal of Computational Physics, 206(2), p. 573-588, 2006.
- [6] AMSTUTZ, S. **The topological asymptotic for the Navier-Stokes equation.** ESAIM:Control, Optimisation and Calculus of Variations, 11(3):401-425, 2005.
- [7] AMSTUTZ, S. **Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE systems.** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 85(4):540-557, 2006.
- [8] AMSTUTZ, S., et. al. **Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstrutres**

- [9] AUROUX, D., et al. **Imagem restoration and classification by topological asymptotic expansion**, Variational Formulation in Mechanics: Theory and Applications -CIMNE, Barcelona, Spain, 2006.
- [10] BANGA, C.; GHORBEL, F. **Optimal Bootstrap sampling for fast image segmentation: application to retine image**. In IEEE ICASP 93, volume 5, p. 638-641, Minneapolis, USA, 1993.
- [11] BELAID, L. J., et al., **Application of the topological gradient to image restoration and edge detection**. To appear on Special Issue on "Shape and Topological Sensitivity Analysis: Theory and Applications" of the Engineering Analysis with Boundary Element Journal, 2007.
- [12] BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. **Generation Optimal topologies in structural desing using a homogenization method**, Comput Methods Appl. Mech. Eng, 71:197-224, 1988.
- [13] BEZDEK, J. C. **Pattern Recognition with fuzzy Objective Function Algorithms**. Plenum Press, New York, 1981.
- [14] BOIE, R. A.; COX, I. J. **Two Dimensional Optimum Edge Detection Using Matched and Wiener Filters for Machine Vision**. Proceeding of Internacional Conference on Computer Vision, Londres, Reino Unido, p.450-456, 1987.
- [15] BOJCZUK, D.; MRÓZ, Z. **Topological sensitivity derivative and finite topology modifications: applications to optimazations of plates in bending**. Struct Multidisc Optim, 39:1-15, 2008.
- [16] BONNET, M. **Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain**. Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng. 195:5239-5254, 2006.
- [17] BURGER, M.; HACKL, B.; RING, W. **Incorporation topological derivatives into level set methods**. Journal of Computational Physics, 1(194):344-362, 2004.
- [18] CANELAS, A., NOVOTNY A., ROCHE J. **A new method for inverse electromagnetic casting problems based on the topological derivative**. Journal of Computational Physics, 230(9), p. 3570-3588, 2011.

- [19] CANNY, J. **A Computational Approach To Edge Detection**. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6):679-698, 1986.
- [20] CARDONE, G., *et al.* **Asymptotic analysis, polarization matrices and topological derivatives for piezoelectric materials with small voids**, 48(6):3925-3961, 2010.
- [21] CARPIO, A.; RAPÚN, L. **Topological Derivative Based Methods for Non-Destructive Testing**. Numerical Mathematics and Advanced Applications. 2(12):687-694, 2008.
- [22] CARVALHO, A.A., *et al.* **Inspeção submarina: perspectivas e avanços**. Revista Tecnologia, Fortaleza, v.30 n.2, p 198-209, 2009.
- [23] CEA, J., *et al.* **The Shape and Topological Optimizations Connnection**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188(4):713-726, 2000.
- [24] COFFEY, D.; THORNLEY, C. **Automation, motivation and lean production reconsidered**. Assembly Automation 26/2. Emerald Group 98103, [ISSN 0144-5154], 2006.
- [25] CONCI, A., *et al.* **Computação Gráfica: Teoria e Prática - Segunda Edição**. Editora Elsevier, 2008.
- [26] CONNERS, R. W., *et al.* **Identifying and locating surface defects in wood: Part of an automated lumber processing system**, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 5, pp. 573-583, Nov. 1983.
- [27] DAVIES, E. R. **Machine Vision: Theory, Algorithms e Practicalities**. Editor Elsevier, Terceira edição, 1990.
- [28] DELFINO, A.; LETA, F. R. **Construção de um veículo robótico a partir de visão computacional**. V Seminário Fluminense de Engenharia. Niteroi, RJ, Brasil, 2007.
- [29] FEIJÓO, G. R. **A new method in inverse scattering based on the topological derivative**. Inverse Problems, 20(6):1819-1840, 2004.

- [30] FEIJÓO, R. A.; NOVOTNY, A. A.; TAROCO, E.; PADRA, C. **The topological derivative for the poisson's problem.** Mathematical Models in Applied Sciences,13-12:1-20, 2003.
- [31] FEIJÓO, R. A.; NOVOTNY, A. A.; TAROCO, E.; PADRA, C. **The Topological-shape Sensitivity Method and its Applications in 2D Elasticity.** Journal of Computational Methods in Science and Engineering , 2005.
- [32] FELICIANO, F. F.; SOUZA, I. **Visão Computacional aplicado a metrologia dimensional automatizada: uma consideração sobre a exatidão.** ENGEVISTA, v.7(2), p.38-50, dezembro, 2005.
- [33] FILHO, O. M.; NETO, H. V. **Processamento Digital de Imagens.** Rio de Janeiro:Brasport, p.25-189. 1999.
- [34] FREI, W.; CHEN, C. **Fast boundary detection: A generalization and a new algorithm.**IEEE Trans. Computers , pages 988-998, 1977.
- [35] FULMANSKI, P.; LAURIN, A.; SCHEID, J., SOKOLOWSKI, J. **Level set method with topological derivative in shape optimization.** International Journal of Computer Mathematics, v.85(10), p.1491-1514, 2008.
- [36] GARREAU, et al. **The Topological Asymptotic for PDE System: The Elasticity Case** SIAM Journal on Control and Optamization. 39:1756-1778,2001.
- [37] GIUSTI, S.M.; NOVOTNY A.A.; FEIJÓO, R. A.; TAROCO, E.; PADRA, C.; **Configuration Sensitivity Analysis Two-dimensional Linear Elasticity Problem.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 2007.
- [38] GONZALEZ, C. R.; WOODS, R. E. **Digital Image Processing - Second Edition.** Prentice Hall, 2001.
- [39] GUILLAUME, P.; SID IDRIS, K. **The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem** SIAM Journal on Control and Optimization. 41(4):1042-1072. 2002.
- [40] GUILLAUME, P.; SID IDRIS K. **Topological sensitivity and shape optimization for the stokes equations.** SIAM J. Control Optim., 43(1):1=31, 2004.

- [41] GUINZANI, T. F. **Análise de sensibilidade topológica aplicada em problemas inversos de condutividade.** Dissertação de Mestrado, EMS- UFSC, Florianópolis- SC, 2006.
- [42] GURTIN, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics.** Mathematics in Science and Engineering vol.158. Academic Press,1981.
- [43] GUZINA, B.B.; BONNET, M. **Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics.** Inverse Problems. 22:1761-1785, 2006.
- [44] GUZINA, B.B.; CHIKICHEV, I. **From Imaging to material characterization: a generalized concept of topological sensitivity,** Journal of The Mechanics and Physics of Solids. 55:245-279, 2007.
- [45] HAFTKA, R. T.; GRANDHI, R. U. **Structural Shape Optimization - A Survey,** Computer MEthods in Applied Mechanics and Engineering, v.57, p.91-106, 1986.
- [46] HARALICK R.; SHAPIRO L. **Computer and Robot Vision,** Addison-Wesley Publishing Company, NY, v. 2, 1993.
- [47] HE, L.; OSHER e S. **Solving the chan-vese model by multiphase level set algorithm based on the topological derivative,** Technical Report 56, UCLA - CAM, 2006.
- [48] HINTERMÜLER, M. **Fast level set based algorithms usind shape and topological sensitivity.** Control and Cybernetics, 34(1):305-324, 2005.
- [49] HINTERMÜLLER, M.; LAURAIN, A. **Multiphase Image Segmentation and Modulation Recovery Based on Shape and Topological Sensitivity,** Journal Mathematical Imaging and Vision, 35(1), p. 1-22, 2009.
- [50] HINTERMÜLLER, M.; LAURIN, A.; NOVOTNY, A. **Second-order topological expansion for electrical impedance tomography,** Advances in Computational Mathematics, 36(2), p.235-265, 2012.

- [51] HLAVÁČEK, I., et al. **On topological derivatives for elastic solids with uncertain input data.** Journal Optimization Theory and Applications, 141(3):569-595, 2009.
- [52] IGUERNANE, M., et al. **Topological derivatives for semilinear elliptic equations** Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 19(2):191-205, 2009.
- [53] KIRSCH, R. **Computer determination of the constituent structures of biomedical images.** Computers and Biomedical Research , 4(3):315-328, 1971.
- [54] KHLUDNEV, A., et al. **Shape and topological sensitivity analysis in domains with cracks.** Applications of Mathematics 55(6):433-469, 2008.
- [55] KOHN, R.; VOGELIUS, M. **Relaxation of a variational method for impedance computed tomography.** Comm. Pure Appl.Math. 40(6):745-777, 1987.
- [56] LABANOWSKI, A. **Análise Comparativa de Métodos de Otimização Topológica em Elasticidade 2D e 3D.** Dissertação de Mestrado, EMC-UFSC - Florianópolis - SC, 2004.
- [57] LARRABIDE, I., et al. **A medical image enhancement algorithm based on topological derivative and anisotropic diffusion.** In Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2005 - Guarapari, Espírito Santo, Brazil, 2005.
- [58] LARRABIDE, I., et al. **Topological derivative as a tool for image processing: Image segmentation.** Technical Report 15/2006, LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, 2006.
- [59] LARRABIDE, I. **Processamento de imagens via Derivada Topológica e suas Aplicações na modelagem e simulação computacional do Sistema Cardiovascular Humano,** Ph.D thesis, LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, 2007.
- [60] LARRABIDE, I., et al. **Configurational derivative as a tool for image segmentation** In Proceedings of the ECCM 2006. LNEC - Lisbon, Portugal 5th-

9th June. European Committee of Computational Solid and Structural Mechanics = ECCSM, 2006.

- [61] LARRABIDE, I., et al. **An image segmentation method based on a discrete version of the topological derivative**, In World Congress Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005.
- [62] LEWINSKI, T.; SOKOLOWSKI, J. **Energy change due to the appearance of cavities in elastic solids**. International Journal of Solids and Structures. 40:1765-1803, 2003.
- [63] MACHADO, D. A.; GIRALDI, G.; NOVOTNY, A. A. **Multi-object segmentation approach based on topological derivative and level set method**. Integrated Computer-Aided Engineering, 18(4), p. 301-311, 2011.
- [64] MALCOLM, A.; GUZINA, B. **On the topological sensitivity of transient acoustic fields**. Wave Motion, v.45(6), p.821-834, 2008.
- [65] MALLADI, R.; SETHIAN, J.A. **Level set methods for curvature flow, image enhancement, and shape recovery in medical images**. In Proc. Of Conf. on Visualization and Mathematics, p. 329-345, Germany, 1997.
- [66] MARR, D.; HILDRETH, E. **Theory of edge detection**. In Proceedings of the Royal Society London, volume 207, pages 187-217, 1980.
- [67] MASMOUDI, M.; POMMIER, J.; SAMET, B. **The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications**. Inverse Problems. 21:547-564, 2005.
- [68] MAZJA, W. G., et al. **Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten I: Störungen isolierter Randsingularitäten**. Akademie-Verlag, Berlin 1991. (English Translation, Kluwer, 2000).
- [69] MENEGALDO, L.L., et al. **SIRUS: A mobile robot for Floating Production Storage and Offloading (FPSO) ship full inspection**. Industrial Electronics, IEEE Transactions on, v.56, p. 3717 - 3722 , 2009.

- [70] MUMFORD, D.; SHAH, J. **Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems**, Communications on Pure and Applied Mathematics, 42:577-684, 1989.
- [71] NAZAROV, S. A.; SOKOLOWSKI, J. **Asymptotic analysis of shape functionals**. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 82(2):125-196, 2003.
- [72] NAZAROV, S. A.; SOKOLOWSKI, J. **The topological derivative of the dirichlet integral due to formation of a thin ligament**. Siberian Math. J., 45(2):341-355, 2004.
- [73] NOVOTNY, A. A. **Análise de Sensibilidade Topológica**. Teste de doutorado. LNCC-MCT, PETrópolis, Brasil.
- [74] NOVOTNY, A.A.; FEIJÓO, R.A.; PADRA, C.; TAROCO E. **Topological Sensitivity Analysis**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192:803-829, 2003.
- [75] NOVOTNY, A.A.; FEIJÓO, R.A.; PADRA, C.; TAROCO, E. **Topological Sensitivity Analysis applied to topology design of Kirchhoff plate bending problem**, Control and Cybernetics, 34(1):339-361, 2005.
- [76] NOVOTNY, A.A.; FEIJÓO, R.A.; PADRA, C.; TAROCO, E., **Topological Sensitivity Analysis for Three-dimensional Linear Elasticity Problem**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007.
- [77] NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials**. North-Holland, Amsterdam. 1993.
- [78] PAPPAS, T. N. **An adaptive clustering algorithm for image segmentation**. IEEE Transaction on Signal Processing, 40:901-914, 1992.
- [79] PARK, W.; Ma, V. **A Topological Derivative Based Non-Iterative Electromagnetic Imaging of Perfectly Conducting Cracks**. Journal of The Korea Electromagnetic Engineering Society, 12(1), p.1-134, 2012.
- [80] PATEL, B. C.; SINHA, G. R.; THAKUR, K. **Early Detection of Breast Cancer using a Modified Topological Derivative Based Method**. Internacional Journal of Pure and Applied Sciences and Technology. 7(1), p.75-80, 2011.

- [81] PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R. **Análise de Imagens Digitais - Princípios, Algoritmos e Aplicações**. Thomson Learning. São Paulo, 2008.
- [82] PEREIRA, C.; BITTENCOURT, M. **Topological sensitivity analysis in larger deformation problems**. Structural and Multidisciplinary Optimazation. 37(2)149-163, 2008.
- [83] PETRAGLIA, A.; PETRAGLIA, M. **Sistema de Aquisição e Processamento de Sinais para Ensaios não Destrutivos**. Rio de Janeiro, COPPETEC, 1995.
- [84] PREWITT, J. M. S. **Picture Processing and Psychopictorics**, pages 75-149. Academic Press, New York, 1970.
- [85] ROBERTS, L. G. **Optical and Electrooptical Information processing**. chapter Machine perception of three-dimensional solids, pages 159-197. MIT Press, 1965.
- [86] ROBINSON, G. S. **Edge detection by compass gradient masks**. Computer Graphics and Image Processing, 6(5):492-501, 1977.
- [87] ROCHA DE FARIA, J. **Análise de Sensibilidade Topológica de Segunda Ordem**, Ph.D tesis, LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, 2007.
- [88] SAMET, B., et al. **The topological asymptotic for the Helmholtz equation**. SIAM Journal on Control and Optimization, 42(5):1523-1544, 2003.
- [89] SETHIAN, J.A. **Level Set Methods and Fast Marching Methods**. Cambridge University Press, 1999.
- [90] SILVA, M. C. **Aplicação do método da otimização topológica para o projeto me mecanismo flexíveis menos suscetíveis à ocorrência de dobradiças**. Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.
- [91] SILVA, M.; GEUBELLE, P.; TORTORELLI, D. **Energy release rate approximation for small surface-breaking cracks using the topological derivative**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59(5), p.925-939, 2011.

- [92] SHENN, H. T., et al. **Ultra-sonic imaging system for in-process fabric defect detection** U.S. Patent 5 665 907, Sept. 1997.
- [93] SOBEL, I. **Machine Vision for Three-Dimensional Scenes**, pages 376-379. H. Freeman Editor, 1990.
- [94] SOKOLOWSKI, J. **Optimality conditions for simultaneous topology and shape optimization.** , SIAM Journal on Control Optimization, 42(4):1198-1221, 2003.
- [95] SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. **On the topological derivative in shape optimization**, SIAM Journal on Control Optimization, 37(4):1251-1272, 1999.
- [96] SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. **Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis**, Springer-Verlag, 1992.
- [97] SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. **Topological Derivative for Elliptic Problems**, Inverse Problems, 15:123-134, 1999.
- [98] SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. **Modelling of topological derivative for contact problems.** Numerische Mathematik, 102:14-179, 2005.
- [99] SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. **Topological derivative for obstacle problems.** In IFIP Proceedings, 2005.
- [100] VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design: With applications**, McGraw - Hill, New York, 1984.
- [101] VESE, L. A.; CHAN, T. F **A multiphase level set framework for image segmentation using Mumford and Shah model**, Int. J. Comput., V. 50, 271-293, 2002.
- [102] YOUNG, E. *Use of line scan cameras and a DSP processing system for high-speed wood inspection* Proc. SPIE, vol. 2597, pp. 259264, Oct. 1995.
- [103] ZHENG, H., et al. **Automatic inspection of metallic surface defects using genetic algorithms.** Journal of Materials Processing Technology, v. 125-126, p. 427 - 433, 2002.

Apêndice

Resultados numéricos do Experimento 1

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	1	5.6472	24
<i>TS2</i>	1	0.1716	3
<i>SD</i>	1	3.0108	18
<i>TS3</i>	1	3.7234	20

Tabela 7.1: resultados imagem IM01 sem ruído.

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações		Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	0.9079	7.3632	32		0.9100	7.5972	32
<i>TS2</i>	0.9106	0.2496	5		0.9100	0.2652	5
<i>SD</i>	1	5.5380	30		0.9998	6.6144	33
<i>TS3</i>	1	6.7143	32		0.9999	7.1432	37

Tabela 7.2: resultados para a imagem IMO1 com ruído gaussiano branco de variância 0.01 e 0.02

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações		Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	0.9088	7.1760	30		0.9106	8.2681	34
<i>TS2</i>	0.9086	0.3276	6		0.9106	0.3588	6
<i>SD</i>	0.9998	5.9904	30		0.9992	5.3322	26
<i>TS3</i>	0.9999	7.1632	33		0.9996	6.9215	32

Tabela 7.3: resultados para a imagem IMO1 com ruído gaussiano branco de variância 0.03 e 0.04

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações		Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	0.9090	8.3305	34		0.9109	8.3773	34
<i>TS2</i>	0.9090	0.2964	5		0.9109	0.3276	5
<i>SD</i>	0.9995	4.9608	26		0.9994	5.3976	28
<i>TS3</i>	0.9993	6.8832	31		0.9994	6.9327	32

Tabela 7.4: resultados para a imagem IMO1 com ruído gaussiano branco de variância 0.05 e 0.06

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações		Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	0.9087	8.1589	34		0.9099	9.4235	36
<i>TS2</i>	0.9087	0.2808	6		0.9099	0.3588	5
<i>SD</i>	0.9990	3.0108	18		0.9990	7.8349	46
<i>TS3</i>	0.9989	5.9912	20		0.9990	11.2009	48

Tabela 7.5: resultados para a imagem IMO1 com ruído gaussiano branco de variância 0.07 e 0.08

Algoritmo	Índice	Tempo	Iterações		Índice	Tempo	Iterações
<i>TS1</i>	0.9092	7.8937	34		0.8213	6.8172	36
<i>TS2</i>	0.9097	0.4052	6		0.8781	0.4056	7
<i>SD</i>	0.9983	4.3680	23		0.9975	4.1028	21
<i>TS3</i>	0.09987	6.7234	28		0.9984	6.8563	29

Tabela 7.6: resultados para a imagem IMO1 com ruído gaussiano branco de variância 0.09 e 0.1