

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MANOEL DE PONTES FERNANDES

OTIMIZAÇÃO POR FUNÇÕES REPRESENTÁVEIS
COMO A DIFERENÇA ENTRE FUNÇÕES
CONVEXAS COM APLICAÇÃO EM UM PROBLEMA
DE ARRANJO FÍSICO

João Pessoa

2012

MANOEL DE PONTES FERNANDES

OTIMIZAÇÃO POR FUNÇÕES REPRESENTÁVEIS COMO A
DIFERENÇA ENTRE FUNÇÕES CONVEXAS COM
APLICAÇÃO EM UM PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO

*Dissertação apresentada à Pós-Graduação de Engenharia de
Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de
Produção.*

Orientador: Anand Subramanian

Co-orientador: Roberto Quirino do Nascimento

João Pessoa

2012

Fernandes, Manoel de Pontes.

Otimização por funções representáveis como a diferença entre funções convexas com aplicação em um problema de Arranjo Físico.

Manoel de Pontes Fernandes. - João Pessoa: O autor, 2012.

Número de folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Paraíba. CT. Engenharia de Produção, 2012.

Manoel de Pontes Fernandes

Otimização por funções representáveis como a diferença
entre funções convexas com aplicação em um problema
de Arranjo Físico.

Dissertação apresentada à Pós-Graduação de Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção apresentado em Dezembro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Anand Subramanian

Orientador

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento

Co-orientador

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Lucídio Cabral dos Anjos Formiga

Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Artur Alves Pessoa

Examinador Externo

Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Examinador Externo

Universidade Federal da Paraíba

Ao meu pai, saudades do meu eterno mestre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Primeiramente a Deus, acima de todas as coisas;

Aos meus pais e irmãos, pela compreensão, amizade e amor incondicional;

À minha amada esposa, sempre ao meu lado em todos os momentos;

Aos meus filhos, Manuela e Carlos Eduardo, razão de minha vida;

Ao meu avô e minha avó, pelo elo de família e exemplo de vida;

Aos meus orientadores, Anand Subramanian e Roberto Quirino do Nascimento, pelo conhecimento passado, pela orientação, paciência e dedicação;

Aos professores e amigos Gilberto Farias de Sousa Filho, Ana Flávia Uzeda Macambira e Lucidio dos Anjos Formiga Cabral pelo conhecimento transmitido, apoio, estímulo e atenção oferecidos durante o período do mestrado.

Aos professores do PPGEF, pelo valioso conhecimento passado durante os últimos anos.

À todos os professores que passaram em minha vida, pela contribuição na minha formação.

Aos meus amigos do Laporte, em especial à Leandro, Abner, Roberta e Nádia, pela amizade sincera, os momentos de alegria e tudo de bom que acrescentaram em mim;

Aos meus amigos, em especial a Rodrigo e Jemerson, que direta ou indiretamente contribuíram em minha formação;

Ao PPGEF e seus funcionários, em especial a Bueno, Ana e Elizandra, pela atenção e competência;

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Manoel de Pontes Fernandes

RESUMO

Problemas de otimização onde cada uma das funções podem ser representadas como a diferença entre funções convexas é chamado de problema de otimização DC e representam uma grande gama de aplicações no mundo real. Neste trabalho é utilizado a Otimização DC para modelar e resolver o problema proposto de arranjo físico. Aqui será apresentada a teoria de otimização DC bem como algumas aplicações que serão tratadas mais detalhadamente, para uma melhor compreensão da teoria. Também é proposto um modelo para o Problema de Arranjo Físico (*layout*), modelado matematicamente, que é posteriormente representado como um problema de Otimização DC e, por último, é colocado na sua forma Canônica (CDC). Isto é feito porque esta estrutura DC é fechada em muitas das operações comumente encontradas em problemas de otimização, ao contrário de uma função convexa, que não preserva sua estrutura por uma simples multiplicação por escalar. Por fim, um algoritmo é proposto para resolver o problema de arranjo físico. Estes problemas são de grande importância na engenharia dada à realidade de que mudanças no arranjo físico são, geralmente, demoradas e custosas e podem até ser inviáveis, dependendo do projeto.

Assim, o objetivo do trabalho é resolver o problema proposto de arranjo físico colocado na forma CDC, através de um algoritmo, motivados devido à necessidade de otimização do uso do espaço, no sentido geral da palavra.

Palavras-chave: Otimização D.C., Problema Canônico DC (CDC), Problema de Arranjo Físico.

ABSTRACT

Programming problems which each function can be represented as a difference of two convex function are called DC programming problems and represent a wide range of applications. In this work, DC programming is used to model and solve the proposed layout problem. Here we present the theory of DC optimization problems and some applications which we will see with more details further for better understanding of the theory. Also is proposed a model for the layout problem, modeled mathematically, further represented as a DC optimization problem and finally, placed in its canonical form (CDC). It is done because the DC structure is closed in many operations commonly found in optimization problems, unlike a convex function, which does not preserve its structure by a simple scalar multiplication. Finally, an algorithm is proposed to solve the layout problem. These problems are of great importance in engineering because, in the real world, changes in the layout are usually costly, time consuming and may even be unfeasible, depending on the project.

Thus, the objective of this work is to solve the proposed layout problem put in the C.D.C. form, through an algorithm, motivated by the need for optimization of the use of the space, in the general sense of the word.

Keywords: D.C. Optimization, Canonical D.C. program (C.D.C.), layout program problem.

Lista de Figuras

1.1	Modelo de sistema de produção	2
1.2	Modelo de sistema de produção adaptado ao projeto	2
3.1	Região R que representa o arranjo físico de uma empresa qualquer	15
3.2	Exemplo de três máquinas no arranjo físico	15
4.1	Exemplo do teor. 4.28	34
7.1	Solução com 3 bolas de raios iguais	48
7.2	Influência da função objetivo na solução para três objetos	48
7.3	Três soluções com 10 bolas	52
7.4	Três soluções com 12 bolas	53
7.5	Solução com 14 bolas	54
7.6	Solução com 16 bolas	54

Lista de Tabelas

7.1	Resultados computacionais	51
-----	-------------------------------------	----

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Justificativa	6
1.2	Objetivos	8
1.2.1	Objetivo Geral	8
1.2.2	Objetivos Específicos	8
1.3	Organização da Dissertação	9
2	Revisão Bibliográfica	10
2.1	Problemas de Otimização DC com restrições	10
2.2	Problema Canônico de Otimização DC (CDC)	11
3	O problema de arranjo físico	14
3.1	O problema proposto de arranjo físico	14
3.2	Restrições e Função Objetivo	16
3.2.1	Restrições	16
3.2.2	Função Objetivo	18
3.2.3	Problema Modelo	18
4	Otimização DC	20
4.1	Introdução	20
4.1.1	O espaço das funções DC	22
4.2	Algumas Aplicações	24
4.2.1	Problema de Localização de Facilidades	24
4.2.2	Planejamento de Produção e transporte	25
4.3	Condições de Otimalidade	26

4.4	Problema Canônico DC (CDC)	29
4.4.1	Transformação de problemas DC na forma canônica CDC	29
4.4.2	Condições de Otimalidade para o Problema CDC	32
5	Formulação do problema de arranjo físico como um problema de Otimização DC	36
5.1	O Problema Modelo na forma CDC	36
5.2	Um algoritmo para o Problema Modelo de Arranjo Físico	38
6	Metodologia	43
6.1	Tipo da pesquisa	43
6.2	O estudo	44
6.2.1	Ambiente de estudo	44
6.2.2	População e amostra	44
6.3	Definição de variáveis	45
6.4	Instrumento de coleta de dados	45
6.5	Procedimentos de análise	46
7	Experimentos numéricos e análise	47
7.1	Problema com três objetos iguais e influência da Função Objetivo	47
7.2	Problema P01	49
7.3	Problema P02	50
7.4	Problema P03	51
8	Considerações Finais	55
8.1	Contribuições do Trabalho	55
8.2	Trabalhos Futuros	55
	Referências Bibliográficas	57

Capítulo 1

Introdução

O avanço da globalização nas últimas décadas estimulou o rápido desenvolvimento da indústria, que sofreu grandes mudanças e passou por inúmeros desafios. Com isto, veio o aumento da concorrência, modificações nas estratégias para manter as empresas competitivas e alterações no sistema produtivo.

As organizações precisaram oferecer produtos/serviços com baixo custo e com qualidade, um desafio que não pode ser conseguido sem um bom projeto de produção e um sistema de produção eficiente. Entenderemos aqui como sistema, um conjunto de partes que interagem entre si, com um objetivo comum, que atuam de acordo com os insumos (entrada - *input*) para produzir (por um processo de transformação) um resultado (saída - *output*).

Sistema de produção é a maneira pela qual se organizam a produção de bens e serviços, com diferentes características que dependem do que entra no sistema (insumos), do tipo de processo e da saída.

O resultado de qualquer produção (saída) passa por um processo de transformação, que se utiliza de recursos para modificar as inputs em outputs de bens ou serviço.

Os *inputs* podem ser classificados em dois tipos: os recursos de entrada a serem transformados e os recursos de transformação. Este segundo é composto dos recursos que agem sobre os de primeiro tipo e é composto pelas instalações e funcionários, que variam de acordo com a natureza da empresa.

O processo de transformação depende dos *inputs* transformados, e é definido com base nas estratégias da empresa. Estratégia aqui é quando uma empresa toma um conjunto de decisões, ao invés de outras, que comprometem um conjunto de ações, e estas comprometem

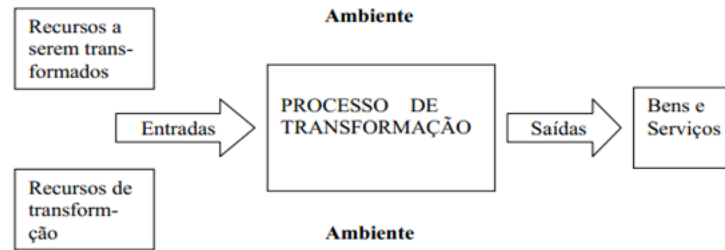


Figura 1.1: Modelo de sistema de produção

as ações subsequentes, definindo assim a direção a ser seguida. Essas decisões definem o posicionamento da empresa e a aproximam dos seus objetivos. Projetar é em si um processo de transformação. Observe abaixo que ele pode ser adequado ao diagrama acima, onde os inputs são geralmente informações, dados técnicos, equipamentos de teste, desenvolvimento e técnicos.

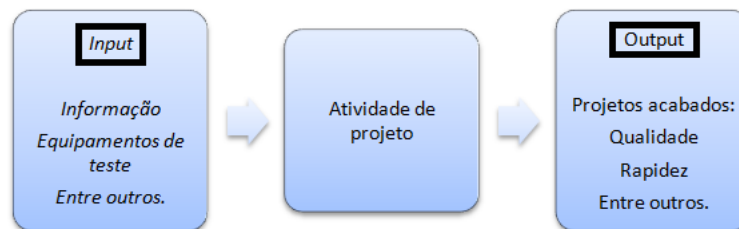


Figura 1.2: Modelo de sistema de produção adaptado ao projeto

Resumidamente, o projeto nasce com uma ideia geral do que poderia atender as necessidades da empresa, os objetivos e as decisões. Com o tempo, o conceito é apurado e o número de alternativas diminui, assim como as incertezas do projeto, chegando ao projeto acabado, onde se espera que esteja livre de erros.

Segundo Slack ET AL(2008), projeto: "é o processo conceitual através do qual algumas exigências funcionais de pessoas, individualmente ou em massa, são satisfeitas através do uso ou de um sistema que representa a tradução física de um conceito".

O Projeto de Produção é o guia da execução, é a atividade que molda o arranjo físico e o propósito da empresa. Essa importância fica evidenciada pelo fato de ser no projeto onde transformamos o conceito que se deseja em especificações do que se deve produzir, atendendo as necessidades dos clientes, detalhando a programação da produção, a distribuição de homens/máquinas dentro do arranjo físico, dentre outras, sendo o arranjo

físico o foco neste trabalho.

O arranjo físico é a maneira pela qual os recursos de transformação de uma operação produtiva encontram-se fisicamente dispostos dentro de uma instalação. Entendem-se aqui como recursos um centro de trabalho, um escritório, uma máquina, um departamento, entre outros. Veja que uma mudança no *layout* pode ser uma coisa demorada e/ou custosa, tanto em tempo quanto em dinheiro. Por exemplo, uma mudança no arranjo físico de um supermercado: o posicionamento das gôndolas são feitos pensando no fluxo do cliente dentro das instalações e sua mudança é, geralmente, um processo demorado, que pode gerar irritação por parte dos clientes, levar a perda de vendas e interrupção do fluxo. Por isso, há razões práticas pelas quais decisões sobre o *layout* são importantes: mudanças são difíceis e caras.

Os principais tipos de *layout*, de acordo com tipo de processo, são: arranjo físico posicional; arranjo físico por processo; arranjo físico celular; e, por último, arranjo físico por produto. De maneira resumida, define-se abaixo cada um dos tipos de arranjo físico [Slack ET AL, 2008].

Arranjo físico posicional: aquele em que os recursos transformados não se movem entre os recursos transformadores porque ou não podem ser movidos, a exemplo da construção de uma rodovia, ou por serem delicados demais para serem movidos, como pacientes em cirurgias delicadas (coração, por exemplo).

Arranjo físico por processo: aquele em que os recursos transformadores dominam a decisão no *layout*. Estes recursos são mantidos juntos porque, assim, podem beneficiar o processo. Perceba que diferentes produtos/clientes com necessidades diferente farão roteiros diferentes na operação. Por exemplo, num hospital alguns processos são necessários para uma grande gama de diferentes pacientes como aparelhos de raio-X.

Já o arranjo físico celular é aquele em que os recursos transformados são selecionados para movimentar-se para uma parte específica da operação (célula), onde se encontram todos os recursos transformadores necessários. A própria célula, em si, pode ser arranjada segundo um layout por processo ou por produto. Continuando os exemplos dentro de um hospital, basta observamos que clientes que necessitam de atendimento em maternidade formam um grupo bem definido que, geralmente, não necessitam de atendimento de outras partes do hospital, e requerem cuidados específicos de maternidade.

O arranjo físico por produto (em fluxo ou em linha) são aqueles em que os recursos transformadores se encontram fixos, de acordo com a conveniência do recurso sendo transformado. Veja que aqui os roteiros são pré-definidos e percorrem uma sequência em que

coincide com a maneira em que os processos foram arranjados dentro do layout. Isto ocorre, por exemplo, em programas de vacinação em massa específicos, onde todos os clientes tem a mesma sequência de atividades.

Também podem ser feitos combinação desses tipos de arranjo físico, que são conhecidos como arranjos físicos mistos. Isso fica caracterizado em um hospital, pelos exemplos de diferentes naturezas de arranjo físico encontrados, alguns citados acima.

Obviamente, o projeto detalhado contém todas as informações sobre onde ficarão localizadas todas as instalações pertencentes a cada centro de trabalho, também onde ficará cada centro de trabalho quais tarefas serão executadas em cada um deles. E para um bom projeto de arranjo físico, algumas exigências devem ser satisfeitas, pois são necessárias a todas as operações das empresas - são elas: segurança, extensão e clareza de fluxo, acesso, uso do espaço, flexibilidade, entre outros.

Algumas das exigências acima citadas merecem uma atenção especial neste trabalho:

Extensão e clareza de fluxo são necessárias para canalizar a passagem de matérias e pessoas para atender os objetivos pré-definidos. Neste trabalho, estamos interessados em minimizar as distâncias das operações (a partir de agora, operações também podem significar ou máquinas ou centros de trabalho, de acordo com a natureza do que se deseja).

O acesso é necessário para que todas as máquinas e/ou equipamentos e/ou instalações estejam colocadas de forma a permitir a manutenção adequada ou manuseio pelo operador, quando necessário.

Sobre o uso do espaço, as máquinas devem ser arranjadas de maneira a permitir o uso adequado do espaço disponível para ela. Também será dada uma atenção especial a este item por, posteriormente, haver o interesse de minimizar o espaço ocupado. Às vezes, esse não é o interesse, principalmente em ambientes luxuosos, onde se quer usar ao máximo o ambiente disponível.

A flexibilidade é importante para que seja possível fazer mudanças quando necessário, pois é provável que a demanda varie e o arranjo físico deve ser projetado já com essas possíveis necessidades futuras.

No problema que será tratado neste trabalho, consideramos que temos um número finito de máquinas n , de $m \leq n$ tipos distintos, que devem ser colocadas em um arranjo físico de forma a ocupar o mínimo espaço possível, ou seja, para que sobre o maior espaço dentro desse layout. Levando em conta a classificação pelo tipo de processos, no problema apresentado, os recursos transformadores são os que determinam a organização do arranjo

físico, então o layout é por processo.

Estas máquinas devem ser dispostas satisfazendo algumas restrições e atendendo a particularidade de cada máquina/setor, para que se possa atender o espaço e que seja bem aproveitado. Vamos considerar que cada uma tem um tamanho próprio, que depende de seu tipo m , e que cada uma delas irá ocupar um espaço circular de raio r_m . Queremos também que nenhuma destas máquinas ocupe o mesmo espaço que qualquer outra.

Para ficarmos o mais próximo possível da realidade, vamos considerar que também há um espaço mínimo entre cada máquina, dada a importância do fluxo dentro do espaço e do acesso, para que um operário possa se locomover dentro do armazém e ao redor de todas elas, que será denominado por k (constante real). Desta última consideração, fica evidente outra: que as máquinas não podem estar encostadas nas paredes, pois isso impediria ou uma possível verificação, manutenção ou qualquer outra coisa de mesma natureza de impedimento.

Então, este trabalho tem a finalidade de tratar o problemas de arranjo físico como um problema de otimização e solucioná-lo através de Otimização DC.

1.1 Justificativa

Nos dias de hoje, qualquer melhora que é feita na organização, que traga uma melhoria no desempenho, é importante para que a empresa possa se manter no mercado. Um dos principais objetivos para isso deve ser um *layout* apropriado e vantajoso para o que se deseja produzir.

Um bom *layout* é fundamental para qualquer empresa, desde as de pequeno porte até uma multinacional. É no *layout* onde se encontra especificado onde cada máquina estará disposta, as distâncias entre elas para que se possa ter o fluxo desejado (desde pessoas até outras máquinas), as operações realizadas em cada máquina, dentre outros. Essa configuração das instalações estabelece as relações entre as várias atividades/operações da empresa.

A escolha deste *layout* pode trazer várias consequências, boas ou ruins. Uma simples alteração de um único equipamento pode impedir o bom fluxo dentro da instituição, mas pode também trazer uma diminuição dos custos e um consequente ganho para a empresa. Por exemplo, a mudança de uma mesa de posição pode impedir a passagem de outras pessoas e/ou máquinas, quebrando o fluxo ali existente.

Assim, percebe-se que o *layout* não pode ser feito baseado em suposições e opiniões. Faz-se necessário um estudo detalhado que leve em consideração as informações, especificações e características dos produtos, matérias e máquinas, características dos equipamentos, espaço necessário para montagem, movimentação do operador, manutenção, transporte e sequência das operações. Deste, apenas a última não terá implicação neste trabalho.

Também se faz necessário, dependendo do tipo de companhia, saber qual a variedade de produtos existentes, o número esperado de clientes que frequentarão o espaço e o(s) estoque(s), para que o público possa ser atendido da melhor maneira possível, visando aumentar as vendas.

Resumidamente, o que se deseja é atender o consumidor da melhor maneira, aumentar a produtividade e diminuir os custos. Para aplicação do *layout*, deve ser feita uma análise de posicionamento, observando os diversos aspectos operacionais e/ou comerciais, melhorando o acesso, espaço interno e circulação. É necessário ter uma estrutura adequada para que se produza com qualidade e, pelo estudo do layout, busca-se aproveitar melhor o espaço na organização para que os objetivos sejam alcançados.

Uma melhor ordenação de máquinas, homens, entre outros, influencia diretamente nos custos e pode causar também outros impactos negativos, quando mal conduzidos, como aumento do gasto de energia, visualização desfavorável, despende mais tempo para a produção do produto e, como consequência, tornar a empresa menos competitiva.

Portanto, vê-se que o estudo do layout é crucial para um sistema produtivo e para a competitividade da empresa, que influenciam diretamente o produto final e, diante disto, o presente trabalho visa um aprofundamento dos conhecimentos teóricos sobre o tema e aplicá-lo como prática administrativa para melhoramento de um sistema produtivo.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Resolver o problema proposto de arranjo físico usando um algoritmo através de otimização DC, para o problema em sua forma canônica.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar a teoria de funções DC;
- Formular o problema modelo de arranjo físico como um problema de otimização;
- Reescrever o problema modelo de arranjo físico como um problema de otimização DC;
- Reformular o problema de arranjo físico como um problema de Otimização D.C. na sua forma canônica (CDC);
- Implementar um Algoritmo para o problema de arranjo físico.

1.3 Organização da Dissertação

Após a introdução apresentada, esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos a revisão bibliográfica. Em seguida, no capítulo 3, é feita a descrição e formulação do problema de arranjo físico, proposto pelo nosso trabalho, como um problema de otimização, onde cada restrição e função objetivo são apresentadas e modeladas matematicamente. No capítulo 4, é mostrado os principais resultados teóricos sobre funções DC e otimização DC do problema geral de otimização DC e de sua forma Canônica (C.D.C.). Também são recuperadas as condições de otimalidade. No capítulo 5, o problema de interesse é tratado pela otimização DC e, por fim, é apresentado um algoritmo para encontrar sua solução. No capítulo 6, é apresentada formalmente a metodologia. Já no capítulo 7 são apresentados os Experimentos Computacionais para o problema de arranjo físico com 10, 12 e 14 objetos. Por fim, as Considerações Finais e as sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 8.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Esta dissertação tem como base o artigo do Horst e Thoai (1999) para se conhecer as abordagens básicas e representação de problemas de otimização DC em suas formas geral e canônica (CDC). Todos estes problemas gozam de algumas propriedades matemáticas especiais e suas aplicações motivaram algumas abordagens distintas para sua solução, discutidas a seguir.

2.1 Problemas de Otimização DC com restrições

Nesta secção vamos rever alguns problemas de Otimização DC, em que a região viável é um conjunto convexo e a função objetivo é a diferença entre duas funções convexas, aqui chamado de 'problema geral de otimização DC'. Problemas de Otimização DC tem um grande número de aplicações nas áreas de economia, engenharia e outros campos de aplicação, como podem ser visto nos artigos Tuy [43], Tuy [39] e Hoai [13]. Este tipo de problema cobre os problemas de otimização convexa padrão e minimização côncava. Isto porque a função objetivo destes problemas podem ser reescritas como a diferença entre 0 e a função convexa. De fato, qualquer problema de Otimização contínuo sobre um conjunto compacto pode ser transformado em um problema de Otimização DC [43].

Otimização DC tem uma estreita relação com problemas combinatórios. Assim, algumas técnicas de otimização DC podem ajudar no tratamento de uma grande classe de problemas de otimização global. A abordagem determinística na otimização DC já tem algumas décadas e muitos algoritmos foram propostos para tratar diferentes problemas DC. Nestes problemas, as condições de regularidades são geralmente assumidas satisfeitas a

priori, o que requer que ao menos uma solução ótima seja um ponto de cluster dos pontos interiores viáveis. Entretanto, nem todos os algoritmos assumem que essas condições valem, como em [20] onde foi estabelecido condições duais caracterizando otimalidade global para problemas de otimização DC - como as condições de otimalidade são dadas em termos de ξ -subdiferenciais - as condições de regularidade não são assumidas.

Uma outra abordagem é transformar o problema de otimização DC em um problema de minimização côncava. Desta maneira, muitos algoritmos já existentes para os problemas de minimização côncava podem ser usados para solucionar o problema de interesse, a exemplo de [34], assumindo que a região viável é um conjunto poliedral convexo. Esta abordagem transforma o problema geral de otimização DC em um problema de minimização côncava e aplica o método de aproximação externa para problemas de minimização côncava para solucioná-lo. Liu,[21] também transforma o problema de otimização DC num problema equivalente de minimização côncava. Eles fornecem três abordagens paralelas para problemas DC, aplicam-nas no problema e apresenta os resultados numéricos dos testes.

Outra abordagem é a dualidade dos problemas DC e as condições de otimalidade local. Nestes algoritmos são geradas duas sequências de candidatos a solução para os problemas primal e dual, que convergem para o solução ótima. Tao em [27] propôs em 1986 um algoritmo de sub-gradientes para resolver o problema DC, posteriormente melhorado e atualizado por Hoai An e Tao em [9], [10] e [12]. Ainda que estes algoritmos não pudessem garantir que a solução fornecida fosse a global para os problemas DC, eles quase sempre convergiam para a solução global quando dado um ponto inicial adequado.

Horst et al em [16] propuseram um algoritmo Branch and bound para solucionar o problema em questão. Este algoritmo combina os métodos de Branch and Bound e Outer Approximation. Sua principal vantagem é que apenas subproblemas lineares e problemas de minimização convexa invariáveis tem de ser resolvidos.

2.2 Problema Canônico de Otimização DC (CDC)

Os CDC's possuem a função objetivo linear e sua região viável é a intersecção de um conjunto de restrições convexas com uma restrição reversa convexa, ou seja, da forma $g(x) \geq 0$ onde g é convexa. Todos os problemas de otimização DC podem ser reduzidos a sua forma CDC, que tem uma estrutura matemática mais simples que a do problema geral de otimização DC. Assim, algoritmos para resolver o problema CDC dá um tratamento único

aos problema de otimização DC. Muitos algoritmos foram feitos para solucionar o problema CDC e são utilizadas as técnicas ou de Branch and Bound ou de Outer Approximation.

Tradicionalmente, são classificados em duas classes: primal ou dual.

Os primeiros algoritmos que utilizavam técnicas de planos de corte foram propostos em [34] e [33]. Neste último, Tuy introduziu o problema canônico e mostrou como qualquer problema DC pode ser reduzido a essa forma. O seu algoritmo considera apenas problemas limitados e consiste de duas fases: uma local e outra global. Ao final, ele prova que o algoritmo termina em uma solução α -ótima. Uma vez que este algoritmo requer uma solução inicial viável e isto pode não ser fácil de encontrar, ele fornece uma versão modificada de seu algoritmo em [40]. A estrutura foi a mesma do que foi mostrado em [33] e [34] mas, em particular, a fase inicial desaparece e o ponto inicial sequer necessita ser viável.

Thach em [30] desenvolveu um algoritmo de Outer Approximation para encontrar soluções viáveis para um sistema de equações e inequações não-lineares. Depois, Phong, Tao e Hoai An apresentaram uma adaptação do algoritmo de Thach para resolver o CDC. Uma abordagem mais geral foi proposta por Tuy em [33], cujo método cobre um grande número de algoritmos existentes.

Uma outra abordagem é de resolver o CDC através de subproblemas de minimização côncava. Nghia e Hieu em [23] solucionaram o CDC desta forma. No que diz respeito a parte computacional, limites inferiores e superiores são sempre verificados e um esquema de Outer Approximation é usado.

Um dos primeiros algoritmos '*Cut and Split*' foi criado por Hillestad e Jacobsen [8] para resolver problemas reverso convexo, ou seja, CDC onde Ω é um poliedro. Enquanto que o algoritmo tenha resolvido um grande número de instâncias, sua propriedade de convergência não tinha sido provada até o trabalho de Tuy em [35], onde foi mostrado que se o algoritmo executa a etapa de biseção infinitamente então ao menos um ponto da sequência é o ótimo global.

Horst, Thoai e Benson em [17] propuseram um método combinado, primeiramente, para o problema de minimização côncava. Uma abordagem similar foi proposta posteriormente por Horst, Thoai e Phong em 1990 onde problemas CDC puderam ser resolvidos como uma sequência de problemas lineares e problema de minimização convexa univariados. Ainda que a abordagem seja similar a partição canônica e a abordagem AE para problemas de minimização côncava, este algoritmo é considerado diferente dos demais.

Nem todos os algoritmos existentes podem garantir a convergência. Uma tentativa de

resolver este problema foi dada em Thoai [31]. Este algoritmo é uma maneira modificada dos [33] e [34]. Entretanto, este algoritmo bem como sua forma modificada [15] não garantem convergir [40]. Ben Saad e Jacobsen também propuseram algoritmos de plano de corte [1] e [2] e seu contra exemplo foi dado em [3].

Na classe dos métodos duais, o algoritmo de anexação poliedral e o algoritmo dual CS/OA são os mais famosos. O primeiro foi proposto por Tuy [34] para problemas de minimização côncavo e posteriormente extendidos para problemas de otimização não-convexos mais gerais [36] e [37]. Este algoritmo usa o procedimento de AE no espaço polar. O método dual CS/OA foi primeiramente tratado por Tuy et al em [38] para resolver um problema equivalente a CDC. É, de fato, um algoritmo CS/OA no espaço polar.

Capítulo 3

O problema de arranjo físico

Nesta seção será discutido um problema de *layout* detalhadamente. A partir das limitações encontradas no problema real e do objetivo que se deseja na organização do arranjo físico, serão identificadas as restrições e a função objetivo, já que o problema será tratado como um problema de otimização, e o modelo do problema de arranjo físico será modelado matematicamente por um conjunto de equações/inequações.

3.1 O problema proposto de arranjo físico

O problema de interesse está na maneira em que n máquinas/operações podem ser dispostas dentro de um arranjo físico, satisfazendo as necessidades previamente estabelecidas e discutidas abaixo uma a uma. Logo, antes de tudo há a necessidade de se estabelecer a forma do arranjo físico e do espaço ocupado por cada máquina/operação. Daqui em diante, ao invés de máquina/operação substituiremos por objeto. Quando a palavra objeto tiver outra conotação, ela será esclarecida no texto.

Será considerado sempre, daqui em diante, que o layout é uma região retangular R do plano cartesiano ortogonal. Já os objetos ocuparão uma região circular.

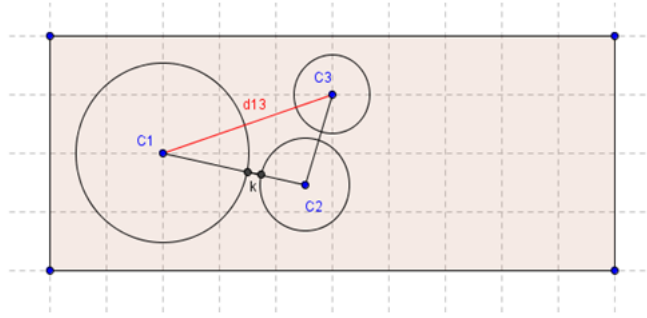


Figura 3.1: Região R que representa o arranjo físico de uma empresa qualquer

Num ambiente do mundo real, cada máquina ocupa uma região diferente, que depende da sua natureza. No modelo proposto é considerado que a região que uma única máquina irá ocupar será circular, de raio r_i , onde i refere-se a máquina $i = 1, 2, \dots, n$.

O centro da região que o objeto i ocupa será representado por c_i , para $i = 1, \dots, n$.

Uma máquina não pode ocupar o espaço de outra nem estar encostada nas "paredes" do arranjo físico, região R, para que não seja prejudicado nenhum funcionamento de qualquer natureza.

A título de ilustração, observe a figura a seguir, representando três máquinas dentro do arranjo físico.

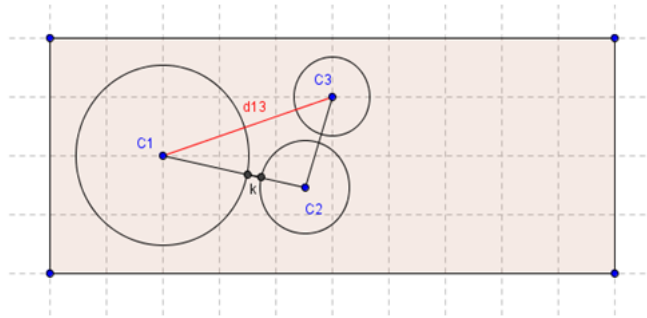


Figura 3.2: Exemplo de três máquinas no arranjo físico

Observando os círculos acima, onde cada um deles representa a região que ocupa cada máquina, observamos que há uma distância mínima entre todos os objetos. Abaixo, quando dizemos distância, entende-se que é a distância euclidiana entre os centros dos círculos e entende-se espaço pela diferença entre a distância de dois círculos pela soma de seus raios, representado por k .

- centros: c_1 , c_2 e c_3 .

- A distância entre os círculos 1 e 3 é representada pelo segmento d_{13} .
- k representa o espaço entre os círculos 1 e 2 (ou k_{12}), que deve ser no mínimo k_0 para que se possa operá-la ou permitir manutenções.

Com isso, o que se deseja é que todas as máquinas fiquem juntas umas das outras mas satisfazendo as restrições impostas pelo modelo, que serão melhor discutidas no tópico seguinte. A maneira que iremos considerar para classificar a proximidade entre as máquinas também será tratada posteriormente.

3.2 Restrições e Função Objetivo

Assim, as limitações serão tratadas formalmente a seguir. O problema é modelado matematicamente de acordo com as necessidades do problema proposto, e serão apresentadas cada restrição e a função objetivo detalhadamente.

3.2.1 Restrições

As restrições do problema surgem das necessidades mais básicas encontradas no mundo real. Em momento nenhum houve a preocupação de tratar das inúmeras possíveis restrições da realidade, mas sim tratar daquelas mais básicas e encontradas frequentemente em quase a totalidade de arranjos físicos, tanto no setor de produtos quanto de serviços.

O primeiro conjunto de restrições diz respeito ao fato de que nenhuma máquina, em nosso modelo, poderá ocupar o espaço de outra máquina. Mais ainda, nenhuma máquina poderá ficar encostada noutra ou nas bordas da região R . Isso porque, como já foi mencionado anteriormente, deve-se tratar separadamente cada objeto para aproximar-se ao máximo da realidade, quando possíveis alterações no *layout* são inviáveis após o primeiro arranjo dos objetos. Assim, a primeira restrição é:

$$\|c_i - c_j\| \geq r_i + r_j + k$$

$$i = 1, \dots, n-1 \text{ e } j = i+1, \dots, n$$

Isso porque se quer, no caso real, por exemplo, um funcionário ou um objeto de outra natureza possa se locomover ao redor de todas as máquinas, sem que seja necessário mudá-la

de local. Logo, o k , que aparece na restrição, controla exatamente qual o espaço mínimo que queremos entre todas as máquinas colocadas no espaço físico.

No modelo proposto, temos que garantir que cada máquina esteja realmente colocada em sua totalidade dentro do arranjo físico, o que remete as seguintes restrições:

$$\begin{aligned}x_i + r_i + k &\leq L_0 + L \\y_i + r_i + k &\leq H_0 + H \\r_i + k + L_0 &\leq x_i \\r_i + k + H_0 &\leq y_i \\i &= 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, n\end{aligned}$$

onde:

- $c_i = (x_i, y_i) \in R^2$ é o centro do objeto i ;
- L : comprimento do arranjo físico ;
- H : largura do arranjo físico ;
- L_0 : abscissa inicial do arranjo físico ;
- H_0 : ordenada inicial do arranjo físico ;
- k : distância entre dois objetos.

Das restrições apresentadas anteriormente, a primeira e a terceira garantem que um objeto não encoste nas paredes laterais do *layout*, e mais, garantem que ficarão afastadas o valor de k , enquanto que as outras duas fazem o mesmo que as anteriores para as paredes inferior e superior. Entende-se por parede as bordas da região R .

Outras restrições poderiam ser adicionadas ao problema, como a necessidade que dois ou mais objetos deveriam ficar a uma distância máxima ou mínima, além de serem obrigatoriamente vizinhos ou não. Mas estas e outras possibilidades não serão tratadas aqui neste trabalho.

3.2.2 Função Objetivo

Dada a necessidade de otimização do espaço físico, que acontece frequentemente no mundo real, o critério utilizado para medir essa proximidade foi a soma das distâncias euclidiana entre os centros dos objetos. Isto porque, atualmente, há uma tendência para espaços cada vez menores, que mesmo assim devem alocar todos os setores ou objetos necessários para a produção de bens ou serviços. Também pelo fato da necessidade de que seja reduzido o tempo e os movimento de locomoção de pessoas ou máquinas dentro do arranjo físico, fazendo com que o transporte ou a passagem de pessoas tenham seu fluxo normal, sem obstáculos que possam afetar negativamente este fluxo. Assim, utilizando o critério citado anteriormente, a função objetivo de nosso problema será:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \sum \sum \|c_i - c_j\| \\ & i = 1, \dots, n-1 \text{ e } j = i+1, \dots, n \end{aligned}$$

3.2.3 Problema Modelo

Logo, colocando o exposto como um problema de otimização, o problema fica na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \sum \sum \|c_i - c_j\| \\ & \text{s.a.} && \|c_i - c_j\| \geq r_i + r_j + k \\ & && x_i + r_i + k \leq L_0 + L \\ & && y_i + r_i + k \leq H_0 + H \\ & && r_i + k + L_0 \leq x_i \\ & && r_i + k + H_0 \leq y_i \end{aligned}$$

Para os objetivos do trabalho, iremos considerar que H_0 e L_0 são iguais a zero. Assim, o problema é reescrito como:

$$\text{Minimizar} \quad \sum \sum \|c_i - c_j\| \quad (3.1)$$

$$AF \quad s.a. \quad \|c_i - c_j\| \geq r_i + r_j + k \quad (3.2)$$

$$x_i + r_i + k \leq +L \quad (3.3)$$

$$y_i + r_i + k \leq +H \quad (3.4)$$

$$r_i + k \leq x_i \quad (3.5)$$

$$r_i + k \leq y_i \quad (3.6)$$

A fim de resolver o problema AF, descrito anteriormente, a técnica a ser utilizada neste trabalho é a Otimização DC, onde cada uma das restrições e função objetivo serão reescritas como a diferença de funções convexas e posteriormente o problema será colocado na forma padrão (CDC). Será necessário que ele satisfaça algumas condições que garantam uma solução, garantias estas que serão expostas no capítulo a seguir, assim como as propriedades que foram utilizadas para reescrever e encontrar a solução.

Capítulo 4

Otimização DC

Muitos problemas de otimização envolvem funções que podem ser expressadas como a *diferença entre duas funções convexas* (DC). Estes tipos de funções são uma parte interessante e importante da otimização não convexa, pelos seus aspectos teóricos e também pelo grande número de aplicações. Isto porque convexidade é uma propriedade que não é preservada com operações simples, como a multiplicação por escalar. Nas secções seguintes, serão apresentadas as propriedades das funções DC e definido o problema denominado de O Problema Geral de Otimização DC, ou simplesmente Problema de Otimização DC. Em seguida são mostrados alguns exemplos e sua modelagem. Posteriormente o problema de Otimização DC é colocado em sua forma canônica (CDC). Por fim, é apresentado o algoritmo de aproximação externa, baseado em Tuy [40] para o problema na forma CDC.

4.1 Introdução

Otimização DC é um campo interessante e importante em otimização não convexa. Isto porque além de sua forma cobrir muitas outras da literatura, como otimização convexa, ela goza de propriedades comumente encontradas na otimização, como multiplicação por escalar. Além disso, um grande número de funções podem ser representadas como a diferença entre funções convexas pois é sabido que toda função de classe C^2 tem uma representação como diferença entre duas funções convexas (DC), embora não haja uma representação geral dessa forma, bastando exibir uma representação DC qualquer. Nesta secção serão apresentadas as propriedades das funções DC e suas provas.

Definição 4.1 Uma função f definida em um conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é dita DC em X se, para todo $x \in X$, f pode ser expressada como $f(x) = p(x) - q(x)$ onde p, q são funções convexas em X . Uma função que é DC em $\mathbb{R}^n$ é chamada DC. A representação $f(x) = p(x) - q(x)$ é dita ser uma decomposição DC de f .

Definição 4.2 Um problema de otimização global é chamado um problema de programação DC se ele possui a forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_0(x) \\ \text{DC} \quad \text{s.a.} \quad & x \in X, \\ & f_i(x) \leq 0, (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Uma característica interessante da programação DC é que alguns problemas da forma 4.1 pode ser reduzido ao problema canônico de minimizar uma função linear sobre a intersecção de um conjunto convexo com o complementar de um conjunto convexo aberto. O complementar de um conjunto convexo aberto é usualmente descrito como uma restrição convexa reversa, e tem a forma

$$g(x) \geq 0 \tag{4.2}$$

onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa.

Definição 4.3 Um problema canônico DC (CDC) é um problema de otimização da forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^T x \\ \text{CDC} \quad \text{s.a.} \quad & x \in D \\ & g(x) \geq 0, (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo, e D é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$.

A seguir serão expostos algumas propriedades das funções DC, algumas aplicações e as condições de otimalidade para problemas de Otimização DC na suas formas geral e canônica.

4.1.1 O espaço das funções DC

Veremos que as funções DC são fechadas para muitas das operações comumente encontradas em otimização. As provas de alguns teoremas e propriedades que não foram mostradas em detalhes podem ser vistas em Horst [19].

Teorema 4.4 *Seja $f, f_i (i = 1, \dots, m)$ funções DC Então as seguintes funções também são DC:*

1. $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ para algum número real λ_i ;
2. $\max f_i(x)$ e $\min f_i(x)$ com $i = 1, \dots, m$;
3. $|f(x)|, f^+ := \max \{0, f(x)\}, f^- := \min \{0, f(x)\}$;
4. o produto $\prod_{i=1}^m f_i(x)$.

Prova 4.5 *Item 2: Seja $f_i = p_i - q_i, (i = 1, \dots, m)$ uma decomposição DC de f_i . Da igualdade*

$$f_i = p_i + \sum_{j=1, j \neq i}^m q_j - \sum_{j=1}^m q_j$$

segue que

$$\max f_i = \max \left\{ p_i + \sum_{j=1, j \neq i}^m q_j \right\} - \sum_{j=1}^m q_j \quad (4.4)$$

que é a diferença de duas funções convexas, desde que o máximo, assim como a soma de um número finito de funções convexas sejam funções convexas. A prova para $\min f_i(x)$ é similar.

Item 3: Seja $f = p - q$ com p, q convexas. Então temos, $|f| = 2 \max \{p, q\} - (p + q)$ que é uma decomposição DC de $|f|$. As afirmações f^+ e f^- segue de (2).

Item 4: Desde que $f_i = f^+ + f^-$, do ponto de vista de (3) pode-se reduzir a questão de encontrar uma decomposição DC para um produto de duas funções DC não negativa, $f_i = p_i - q_i$ com p_i e q_i não negativas e convexas, para $(i = 1, 2)$. Então

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 &= (p_1 - q_1) \cdot (p_2 - q_2) = \\ &= \frac{1}{2} [(q_1 + q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2] - \frac{1}{2} [(p_1 + q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2] \end{aligned}$$

é uma decomposição DC de $f_1 \cdot f_2$, desde que o quadrado de uma função não negativa convexa seja convexa. O resultado para $\prod_{i=1}^m f_i(x)$ segue por indução.

Teorema 4.6 *Toda função localmente DC é DC*

Prova 4.7 *A prova deste teorema foge do escopo do trabalho e pode ser vista em Hartman [7].*

Corolário 4.8 *Toda função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cuja segunda derivada parcial é contínua em todos os pontos é DC*

Prova 4.9 *Os elementos da Hessiana $\nabla^2 f$ de f são limitados em toda vizinhança fechada $B(x_0, \epsilon)$. Portanto, para $\mu > 0$ suficientemente grande, a função $f(x) + \mu\|x\|^2$ é convexa em $B(x_0, \epsilon)$ (desde que a Hessiana $\nabla^2 f(x) + 2\mu I$ é semidefinida positiva em $B(x_0, \epsilon)$ para μ suficientemente grande). Então $f(x) = (f(x) + \mu\|x\|^2) - \mu\|x\|^2$ é obviamente DC em $B(x_0, \epsilon)$ e por isso DC pelo Teorema 4.6.*

Corolário 4.10 *Toda função real contínua em um conjunto convexo compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ é o limite de uma sequência de funções DC que converge uniformemente em C .*

Corolário 4.11 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DC e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Então a composição $g \circ f$ é DC.*

Prova 4.12 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 = f(x_0)$. A função convexa $g(y)$ pode ser representada em alguma vizinhança $B(y_0, \epsilon_0)$ de y_0 como o supremo local de alguma família de funções afins, isto é, $g(y) = \sup_{i \in I} (a_i y + b_i)$ para $y \in B(y_0, \epsilon_0)$ onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, e I é um conjunto de índices tal que $s = \sup_{i \in I} |a_i| < \infty$. Seja $f(x) = p(x) - q(x)$, p, q convexas em alguma vizinhança $B(y_0, \epsilon_1)$ satisfazendo $f(B(y_0, \epsilon_1)) \subseteq B(y_0, \epsilon_0)$. Então, para $x \in B(y_0, \epsilon_1)$*

$$\begin{aligned} a_i f(x) + b_i &= b_i + a_i p(x) - a_i q(x) = \\ &= [b_i + (s + a_i) p(x) + (s - a_i) q(x)] - s(p(x) + q(x)) = \\ &= \tilde{p}_i(x) - \tilde{q}_i(x) \end{aligned}$$

Como $\tilde{p}_i$ e $\tilde{q}_i$ são convexas e $\tilde{q}_i(x) = s(p(x) + q(x))$ é independente de i . Segue que

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sup_{i \in I} (\tilde{p}_i(x) - \tilde{q}_i(x)) \\ &= \sup_{i \in I} \tilde{p}_i(x) - \tilde{q}_i(x) \\ &= \tilde{p}_i(x) - \tilde{q}_i(x), \text{ com } \tilde{p}_i \text{ convexa.} \end{aligned}$$

A função $g \circ f$ é localmente DC e por isso DC, pelo Teorema 4.6.

Teorema 4.13 O quadrado $d_M^2(x)$ da função distância é d.c. para algum subconjunto fechado não vazio M do $\mathbb{R}^n$

Prova 4.14 Tem-se

$$\begin{aligned} d_M^2(x) &= \inf\{\|x - y\|^2 : y \in M\} \\ &= \|x\|^2 + \inf\{-\|x\|^2 + \|x - y\|^2 : y \in M\} \\ &= \|x\|^2 - \sup\{\|x\|^2 - \|x - y\|^2 : y \in M\} \\ &= \|x\|^2 - \sup\{2x^T y - \|y\|^2 : y \in M\} \end{aligned}$$

A norma $p(x) = \|x\|^2$ é convexa e a função $q(x) := \sup\{2x^T y - \|y\|^2 : y \in M\}$ é o supremo local de uma família de funções afins e, portanto, convexa.

4.2 Algumas Aplicações

4.2.1 Problema de Localização de Facilidades

O problema de localização considerado por Tuy, Al-Khayyal, e Zhou [39] é o problema de localização com atração e repulsão, conhecido na literatura como o problema de Weber com atração e repulsão. Em localização de facilidades, uma facilidade deve ser construída em uma área M do plano para servir n usuários localizados nos pontos $a^j \in M$. Se a facilidade for localizada no ponto $x \in M$ então a atração da facilidade para o usuário j é $q_j(h_j(x))$, onde $h_j(x) = \|x - a^j\|$ é a distância euclidiana de x para a^j e $q_j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função convexa decrescente (quanto mais distante x está de a^j então menos atrativo ele é para o usuário j). O que se deseja determinar é a localização da facilidade (PLF) para maximizar o soma das atratividades, ou seja:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \sum_{j=1}^n q_j(h_j(x)) \\ \text{PLF} \quad \text{s.a.} & x \in M \end{array}$$

Em casos, por exemplo, onde se deseja colocar uma facilidade o mais distante possível das localizações dos usuários (a^j), sendo J_1 o conjunto dos pontos de atração e J_2 o conjunto de pontos de repulsão, deseja-se então maximizar a seguinte função

$$F(x) := \sum_{j \in J_1} q_j [h_j(x)] - \sum_{j \in J_2} q_j [h_j(x)]$$

Nas situações comumente encontradas, a escolha de $q_j [h_j(x)]$ é:

$$q_j [h_j(x)] = \begin{cases} \alpha_j - w_j \|x - a^j\| & \text{para } j \in J_1 \\ w_j e^{-\theta_j \|x - a^j\|} & \text{para } j \in J_2 \end{cases}$$

O $\alpha_j > 0$ é a atração máxima de um ponto $j \in J_1$ e θ_j é a velocidade de decaimento de repulsão do ponto $j \in J_2$ e $w_j > 0, \forall j$, é o peso do ponto a_j . O problema de Weber clássico ocorre quando temos $J_2 = \emptyset$.

4.2.2 Planejamento de Produção e transporte

Considere o problema ilustrativo de planejamento de produção e transporte(PPT): Um número q de fábricas produzem um certo tipo de produto para satisfazer a demanda $d_j, j = 1, \dots, m$ para m destinos (ou consumidores). O custo de produção é $g(y) = \sum g_i(y_i)$ quando a fábrica i produz y_i unidades (número finito) e cada $g_i(y_i)$ é um função côncava. O custo de produção é suposto linear e igual a c_{ij} para cada unidade enviada da fábrica i para o destino j . Uma função de penalização $h(z) = \sum h_j(z_j)$, para $i = 1, \dots, m$ é inserida para representar uma multa paga caso o destino j receba $z_j \neq d_j$ unidades. Assumi-se que cada h_j é não negativa e também convexa decrescente, no intervalo $[0, d_j]$ satisfazendo $h_j(d_j) = 0$. Assim, temos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + g(y) + h(z) \\ \text{PPT} \quad \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i, (i = 1, \dots, q) \\ & \sum_{i=1}^q x_{ij} = z_j, (j = 1, \dots, m) \\ & x_{ij} \geq 0 \forall i, j, y_i \geq 0, d_j \geq z_j \geq 0 \forall j \end{aligned}$$

Esse problema se torna um problema de Otimização DC quando os custos de transporte pelos arcos (i, j) são funções côncavas ou convexas da quantidade x_{ij} transportada.

4.3 Condições de Otimalidade

Considere um par de problemas de programação dados por:

$$\omega^*_\delta = \inf \{ \omega(z) : z \in Z, \psi(z) \leq \delta \} \quad (4.5)$$

$$\psi^*_\eta = \inf \{ \psi(z) : z \in Z, \omega(z) \leq \eta \} \quad (4.6)$$

onde $Z \subseteq \mathbb{R}^p$, $\delta, \eta \in \mathbb{R}$ e ω e ψ são funções finitas em $\mathbb{R}^p$. Seja Ω^*_δ e Ψ^*_η o conjunto das soluções ótimas dos problemas 4.5 e 4.6, respectivamene.

Definição 4.15 : Diz-se que os problemas 4.5 e 4.6 são recíprocos se $\Omega^*_\delta = \Psi^*_\eta$ (neste caso o princípio da reciprocidade é válido).

Proposição 4.16 : Se $Z = \mathbb{R}^p$, $\omega(z) = \|z\|$ e $\eta = \omega^*_\delta$, então o princípio da reciprocidade vale para alguma função contínua $\psi(z)$ sempre que $\{z \in Z : \psi(z) \leq \delta\} \neq \emptyset$

A prova se encontra em TIKHONOV (1980).

Proposição 4.17 : Assuma nos problemas 4.5 e 4.6 que $\eta = \omega^*_\delta$ e que $\psi^*_\eta = \delta$. Então o princípio da reciprocidade vale para todo conjunto Z e nas funções arbitrárias $\omega(z)$ e $\psi(z)$.

Prova 4.18 : Seja z^* seja uma solução ótima de 4.5. Então $z^* \in Z, \omega(z^*) = \omega^*_\delta = \eta$ e $\psi(z^*) \leq \delta = \psi^*_\eta$, que implica que z^* é solução ótima de 4.6. Então $\Omega^*_\delta \subseteq \Psi^*_\eta$. A relação $\Omega^*_\delta \supseteq \Psi^*_\eta$ é análoga.

A seguir será estabelecida as condições de otimalidade para o problema de otimização DC derivadas da proposição anterior. Antes disso, será introduzido o conceito de subconjunto robusto do $\mathbb{R}^p$.

Definição 4.19 : Seja $Z \subset \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, e $\delta \in \mathbb{R}$. O conjunto

$$S(Z, f, \delta) = \{z \in Z : f(z) \leq \delta\}$$

é dito robusto se

$$S(Z, f, \delta) = cl(\{z \in Z : f(z) < \delta\})$$

onde para cada conjunto S , $cl(S)$ é o fecho de S

Lema 4.20 : Se nos problemas 4.5 e 4.6 a função ω é convexa e a seguinte condição é satisfeita

$$\exists z^0 \in Z : \omega(z^0) < \omega^* \quad (4.7)$$

,

onde o conjunto $S(Z, \omega, \eta)$ é robusto para cada $\eta \geq \omega^*$.

Prova 4.21 : De 4.7 e da convexidade de ω , segue que para cada $\eta \geq \omega^*$ é válido

$$cl(\{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) < \eta\}) = \{z \in \mathbb{R}^n : \omega(z) \leq \eta\} \text{ e}$$

$$Z \cap \{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) < \eta\} \neq \emptyset. \text{ Segue que}$$

$$cl(\{z \in Z : \omega(z) < \eta\}) = cl(Z \cap \{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) < \eta\})$$

$$\subseteq Z \cap cl(Z \cap \{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) < \eta\})$$

$$= Z \cap cl(Z \cap \{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) \leq \eta\})$$

$$= S(Z, \omega, \eta)$$

Para mostrar a relação $\supseteq$, seja

$$z^1 \in S(Z, \omega, \eta) = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) \leq \eta\}$$

e seja (z^0, z^1) e $[z^0, z^1]$ os segmentos aberto e fechado, respectivamente. Então

$$(z^0, z^1) \subset Z \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \omega(z) < \eta\}$$

e portanto

$$[z^0, z^1] \subset cl(Z \cap \{z \in \mathbb{R}^p : \omega(z) < \eta\})$$

isto é

$$z^1 \in cl(\{z \in Z : \omega(z) < \eta\})$$

Considerando um caso especial do problema 4.5

$$\omega^*_\delta = \inf \{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) \leq 0\} \quad (4.8)$$

A seguinte condição de otimalidade para o problema 4.8 é um corolário da Proposição 4.17.

Proposição 4.22 : *Assuma que no problema 4.8 a função ω é convexa, o conjunto $S(Z, \psi, 0) = \{z \in Z : \psi(z) \leq 0\}$ é robusto e a condição 4.7 é satisfeita. Então o ponto viável z^* de 4.8 é uma solução ótima se e somente se*

$$0 = \inf \{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) \leq \omega(z^*)\} \quad (4.9)$$

Prova 4.23 : *Como $\omega(z^*) \geq \omega^*$, segue que o conjunto $S(Z, \omega, \omega(z^*))$ é robusto, pelo lema 4.20. Portanto,*

$$\inf \{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) \leq \omega(z^*)\} = \inf \{\psi(z) : z \in Z, \omega(z) < \omega(z^*)\} = 0$$

que implica, no ponto de vista a robustez do conjunto $S(Z, \psi, 0)$, que

$$\omega(z^*) \leq \inf \{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) < 0\} = \inf \{\omega(z) : z \in Z, \psi(z) \leq 0\} = \omega^*$$

Então, em 4.8 e 4.9 são recíprocos.

Uma importante classe de problemas de otimização d.c. é a seguinte

$$\omega^* = \inf \{g(x) - h(x) : x \in X\} \quad (4.10)$$

onde g e h são duas funções convexas em $\mathbb{R}^n$ e X é um subconjunto fechado convexo do $\mathbb{R}^n$. O resultado seguinte fornece uma condição de otimalidade para o problema 4.10

Proposição 4.24 : *Assuma que o problema 4.10 tem solução. Então o ponto $x^* \in X$ é uma solução ótima se e somente se existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que*

$$0 = \inf \{-h(x) + t : x \in X, t \in \mathbb{R}, g(x) - t \leq g(x^*) - t^*\} \quad (4.11)$$

Prova 4.25 : *Usando uma variável adicional t , temos*

$$\omega^* = \inf \{g(x) - t : x \in X, t \in \mathbb{R}, -h(x) + t \leq 0\} \quad (4.12)$$

$x^ \in X$ é uma solução ótima de 4.10 se e somente se existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que (x^*, t^*) é uma solução ótima de 4.12. Seja $p = n + 1, Z = X \times \mathbb{R}, \omega(z) = g(x) - t$ e $\psi(z) = -h(x) + t$. Então as condições da proposição 4.22 são satisfeitas e os problemas 4.12 e 4.11 são recíprocos.*

4.4 Problema Canônico DC (CDC)

O problema canônico CDC, já definido, possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^T x \\ \text{CDC} \quad & \text{s.a.} \quad x \in D \\ & g(x) \geq 0, (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo, e D é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$.

Na secção a seguir veremos como um problema na forma DC é transformado na sua forma CDC.

4.4.1 Transformação de problemas DC na forma canônica CDC

Neste trabalho, o problema CDC:

$$\min \{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\},$$

onde c é uma função linear, D é um subconjunto convexo fechado do $\mathbb{R}^n$ e g é uma restrição reversa convexa.

Teorema 4.26 : *Todo problema de Otimização DC é equivalente a um problema na forma CDC em $\mathbb{R}^{n+2}$.*

Prova 4.27 *Considere o problema de Otimização DC na forma:*

$$\min \{f_0(x) : x \in D, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

onde cada $f_i(x)$ possui uma decomposição DC e D é um subconjunto convexo fechado do $\mathbb{R}^n$.

O problema acima pode ser escrito na forma

$$\min \{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\},$$

onde c é uma função linear e g é uma função convexa e a restrição $g(x) \geq 0$ é reversa convexa. Façamos da seguinte maneira, primeiramente utilizando uma variável adicional x_{n+1} , reescrevemos o problema anterior como

$$\min \{x_{n+1} : x_{n+1} \in \mathbb{R}, x \in D, f_0(x) - x_{n+1} \leq 0, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

Em seguida, definimos a função

$$f(x, x_{n+1}) = \max \{f_0(x) - x_{n+1}, f_i(x), i = 1, \dots, m\}$$

Seja $f(x, x_{n+1}) = g(x, x_{n+1}) - h(x, x_{n+1})$ a decomposição do máximo vista anteriormente. Adicionando mais uma variável, x_{n+2} , e escolhendo

$$\begin{aligned} z &= (x, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; \\ Z &= \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : x \in D, g(x, x_{n+1}) - x_{n+2} \leq 0\}; \\ g(z) &= h(x, x_{n+1}) - x_{n+2}. \end{aligned}$$

Obtemos então o problema

$$\min \{x_{n+1} : z \in Z, g(z) \geq 0\}$$

Ou seja, minimizar uma função linear sobre um conjunto convexo e uma restrição reversa convexa, chegando assim na forma CDC.

A seguir, um exemplo de um problema transformado na forma CDC é exposto para melhor entendimento da teoria.

Exemplo: Considere o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned}
& \min (x_1^4 + x_2 + x_3) - (x_1 + x_2^2 - x_3) \\
& \text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, 5 \\
& (x_1 - x_2 - 1, 2)^2 + x_3 \leq 4, 4 \\
& x_1 \geq 1, 4 \\
& x_2 \geq 1, 6 \\
& x_3 \geq 1, 8
\end{aligned}$$

Primeiramente, vamos colocá-lo na forma de um problema de otimização DC. Sendo assim, adicionando uma nova variável $x_4 \in \Re$, reescrevemos o problema como

$$\begin{aligned}
& \min x_4 \\
& \text{s.a. } (x_1^4 + x_2 + x_3) - (x_1 + x_2^2 - x_3 + x_4) \leq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - 6, 5 \leq 0 \\
& (x_1 - x_2 - 1, 2)^2 + x_3 - 4, 4 \leq 0 \\
& 1, 4 - x_1 \leq 0 \\
& 1, 6 - x_2 \leq 0 \\
& 1, 8 - x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Adicionando uma nova variável $x_5 \in \Re$, reescrevemos novamente o problema como

$$\begin{aligned}
& \min x_4 \\
& \text{s.a. } (x_1^4 + x_2 + x_3) \leq x_5 \leq (x_1 + x_2^2 - x_3 + x_4) \\
& x_1 + x_2 + x_3 - 6, 5 \leq 0 \\
& (x_1 - x_2 - 1, 2)^2 + x_3 - 4, 4 \leq 0 \\
& 1, 4 - x_1 \leq 0 \\
& 1, 6 - x_2 \leq 0 \\
& 1, 8 - x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

E então o problema fica na seguinte forma CDC:

$$\begin{aligned}
& \min x_4 \\
& \text{s.a. } (x_1 + x_2^2 - x_3 + x_4) - x_5 \geq 0 \\
& (x_1^4 + x_2 + x_3) - x_5 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - 6, 5 \leq 0 \\
& (x_1 - x_2 - 1, 2)^2 + x_3 - 4, 4 \leq 0
\end{aligned}$$

$$1,4 - x_1 \leq 0$$

$$1,6 - x_2 \leq 0$$

$$1,8 - x_3 \leq 0$$

Ou seja, $\min \{x_4 : \max \{h_i\} \leq 0, g(X) \geq 0\}$.

4.4.2 Condições de Otimalidade para o Problema CDC

Considerando o problema canônico d.c. (CDC) com o conjunto viável $F = \{x \in D : g(x) \geq 0\}$. Assumindo que F é não vazio, é possível ver que $F = \emptyset$ pode ser detectado frequentemente pelos algoritmos. Na sequência, é possível ver que o problema CDC cumpre algumas das hipóteses naturais adicionais seguintes. Suponha que:

(H_1) D é compacto e $\text{int}D \neq \emptyset$.

(H_2) existe um ponto $x^0 \in D$ satisfazendo $g(x^0) < 0$ e $c^T x^0 < \min \{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\}$.

(H_3) $F = \text{cl}(\text{int}F)$

A suposição (A_2) significa que a restrição convexa reversa $g(x) \geq 0$ é essencial, porque, se (A_2) não satisfaz, o problema (CDC) deve ser equivalente ao problema de minimização convexo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{s.a.} & x \in D \end{array}$$

A terceira propriedade, é a robustez do conjunto viável $F = \{x \in D : g(x) \geq 0\}$ de (CDC).

Isto significa, em particular, que é excluído o caso onde a intersecção dos conjuntos $\{x : g(x) \geq 0\}$ e D é uma parte da fronteira de D .

A critério de ilustração, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2: Seja $D = \{(x_1, x_2) : \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \leq 1, \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \leq 1\}$ e os problemas:

- (1) - $\min \left\{ -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{2}x_2 : x \in D, g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 7 \geq 0 \right\}$ e;
 (2) - $\min \left\{ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{10}x_2 : x \in D, g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 \geq 0 \right\}$.

Enquanto que no problema (1) as condições H1 - H3 são satisfeitas, vê-se que no problema (2) a condição H2 não é.

Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ e seja ∂A a fronteira do conjunto $A \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.28 : *No problema CDC, assuma que D é limitado, F é não vazio e a restrição convexa reversa $g(x) \geq 0$ é essencial. Então existe uma solução ótima na intersecção $\partial D \cap \partial G$ que são as fronteiras de D e G .*

Prova 4.29 : *Como D é limitado e F é não vazio, existe uma solução ótima. Primeiro, vamos mostrar que toda solução ótimo deve estar em ∂G : suponha que existe uma solução ótima $\bar{x}$ para CDC não em ∂G . Desde que a restrição convexa reversa é essencial, existe um ponto x^0 satisfazendo $g(x^0) < 0$ e $c^T x^0 < c^T \bar{x}$. O segmento de linha aberto $(x^0, \bar{x})$ intercepta a fronteira do conjunto convexo G num ponto*

$$\hat{x} = \lambda x^0 + (1 - \lambda)\bar{x}, \lambda \in (0, 1)$$

que é viável e satisfaz

$$c^T \hat{x} = \lambda c^T x^0 + (1 - \lambda)c^T \bar{x} \leq \lambda c^T \bar{x} + (1 - \lambda)c^T \bar{x} = c^T \bar{x}$$

Isto contradiz a otimalidade de $\bar{x}$.

Agora seja $\bar{x} \in \partial G$ uma solução ótima. O conjunto convexo fechado G e tem um hiperplano suporte H em $\bar{x}$ tal que $K = H \cap D$ com conjunto compacto convexo D é um conjunto compacto convexo satisfazendo $\bar{x} \in K \subset F$. Portanto, $\min \{c^T x : x \in K\}$ é atingido no ponto extremo v de K que deve ser o ponto de fronteira de D . Além disso, $\bar{x} \in K \subset F$ implica $c^T v = c^T \bar{x}$, isto é, v é uma solução ótima de CDC e portanto, como mostrado acima, deve ser ao ponto de fronteira de G .

Exemplo 3: Para ilustrar o teorema acima, considere $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4, x_2 \geq 0\}$, $g(x_1, x_2) = (\sqrt{3} - 1)x_1^2 - x_2 + 1$. Temos $\partial D \cap \partial G = \{(-1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3})\}$ então cada função linear $c_1 x_1 + c_2 x_2$ que atinge seu

mínimo sobre D é um ponto que viola a restrição reversa convexa $g(x_1, x_2) \geq 0$ deve ser minimizado sobre $D \cap \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \geq 0\}$ em um dos pontos $(-1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3})$.

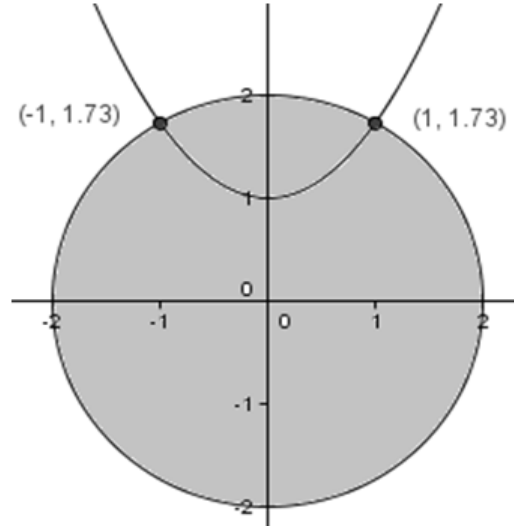


Figura 4.1: Exemplo do teor. 4.28

Proposição 4.30 : (Condição de otimalidade necessária) No problema CDC, sejam as hipóteses, H_1 e H_2 satisfeitas. Então toda solução ótima $\bar{x}$ de CDC satisfaz

$$\max \{g(x) : x \in D, c^T x \leq c^T \bar{x}\} = 0 \quad (4.13)$$

Prova 4.31 : Do teorema 4.28 temos que $g(\bar{x}) = 0$, e por isso $\max \{g(x) : x \in D, c^T x \leq c^T \bar{x}\} \geq 0$. Mas $\max \{g(x) : x \in D, c^T x \leq c^T \bar{x}\} > 0$ é impossível porque um ponto $\hat{x} \in D$ satisfazendo $g(\hat{x}) > 0, c^T \hat{x} \leq c^T \bar{x}$ deve ser uma solução ótima de CDC, desde $\bar{x}$ seja ótimo. Isto portanto implica que $g(\hat{x}) = 0$ pelo teorema 4.28.

Proposição 4.32 : (Condição de otimalidade suficiente) Assuma que no problema CDC o conjunto viável F é robusto (condição H_3 é satisfeita) e que o ponto x^0 satisfazendo $g(x^0) < 0$ existe. Seja $\bar{x} \in F$ e $S \supseteq F$ tal que

$$\max \{g(x) : x \in S, c^T x \leq c^T \bar{x}\} = 0 \quad (4.14)$$

Então $\bar{x}$ é uma solução ótima de CDC

Prova 4.33 : Assuma que o ponto $\bar{x} \in F$ satisfaz $c^T \hat{x} < c^T \bar{x}$. Então existe uma bola aberta B em torno de $\hat{x}$ tal que $c^T x < c^T \bar{x}$ para todo $x \in B$. Como F é robusto, existe uma

sequência $\{x_q\} \subset \text{int}(F)$ convergindo para $\hat{x}$. Convexidade de g e $g(x^0) < 0$ implica que $\text{int}(F) \subseteq \{x : g(x) > 0\}$. Isto segue que existe um índice q_0 tal que $x_{q_0} \in \text{int}(F) \cap B$, isto é, temos um ponto viável satisfazendo $g(x_{q_0}) > 0$ e $c^T x_{q_0} < c^T \bar{x}$. Isto contradiz 4.14.

No capítulo a seguir, a teoria aqui apresentada é utilizada para reescrever o problema de arranjo físico e encontrar uma solução ótima para o problema.

Capítulo 5

Formulação do problema de arranjo físico como um problema de Otimização DC

Neste capítulo, o problema de interesse deste trabalho é reescrito na forma CDC, apresentada anteriormente, e posteriormente é proposto um algoritmo para encontrar sua solução.

5.1 O Problema Modelo na forma CDC

Nesta secção vamos reescrever o problema AF na forma CDC, detalhada na secção 4.4.1, e o chamaremos de AFCDC. Para tal, primeiramente reescreveremos AF como um problema de otimização DC. Depois, utilizaremos a decomposição DC do máximo, definida na equação 4.4, para reescrever as restrições do tipo 3.2 (no problema AF) como uma única restrição. Assim, temos que o problema AF pode ser reescrito como:

$$\text{Minimizar} \quad \sum \sum \|c_i - c_j\| \quad (5.1)$$

$$\text{AFDC} \quad \text{s.a.} \quad \max \left\{ (r_i + r_j + k) + \sum_{k \neq i}^{n-1} \sum_{l \neq j, l=K+1}^n \|(x_k, y_k) - (x_l, y_l)\| \right\} \\ - \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| \leq 0 \quad (5.2)$$

$$x_i + r_i + k_0 - L_0 - L \leq 0 \quad (5.3)$$

$$y_i + r_i + k_0 - H_0 - H \leq 0 \quad (5.4)$$

$$r_i + k_0 + L_0 - x_i \leq 0 \quad (5.5)$$

$$r_i + k_0 + H_0 - y_i \leq 0 \quad (5.6)$$

Para que o problema AFDC possa ser reescrito como um problema CDC, primeiramente vamos adicionar uma variável t . Assim:

$$\text{Minimizar} \quad t \quad (5.7)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t \leq 0 \quad (5.8)$$

$$\max \left\{ (r_i + r_j + k) + \sum_{k \neq i}^{n-1} \sum_{l \neq j, l=K+1}^n \|(x_k, y_k) - (x_l, y_l)\| \right\} \\ - \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| \leq 0 \quad (5.9)$$

$$x_i + r_i + k - L \leq 0 \quad (5.10)$$

$$y_i + r_i + k - L \leq 0 \quad (5.11)$$

$$r_i + k_0 + L - x_i \leq 0 \quad (5.12)$$

$$r_i + k_0 + H - y_i \leq 0 \quad (5.13)$$

Adicionando uma segunda variável t_2 , reescrevemos a restrição 5.9 como:

$$\text{Minimizar} \quad t \quad (5.14)$$

$$\text{AFCDCs.a.} \quad \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2 \geq 0 \quad (5.15)$$

$$\max \left\{ (r_i + r_j + k) + \sum_{k \neq i}^{n-1} \sum_{l \neq j, l=K+1}^n \|(x_k, y_k) - (x_l, y_l)\| \right\} - t_2 \leq 0 \quad (5.16)$$

$$\sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t \leq 0 \quad (5.17)$$

$$x_i + r_i + k - L \leq 0 \quad (5.18)$$

$$y_i + r_i + k - L \leq 0 \quad (5.19)$$

$$r_i + k_0 + L - x_i \leq 0 \quad (5.20)$$

$$r_i + k_0 + H - y_i \leq 0 \quad (5.21)$$

Logo, o problema AFCDC representa o problema de AF reescrito na forma canônica,

$$\min \left\{ t : z \in Z, \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2 \geq 0 \right\}, \text{ onde:}$$

$$z = (x, t, t_2) \in \mathfrak{R}^{n+2}$$

$$Z = \{ z = (x, t, t_2) \in \mathfrak{R}^{n+2} : x \in D, z \text{ satisfazendo } 5.16, \dots, 5.21 \} \quad (5.22)$$

$$g(z) = \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2.$$

Na seção a seguir será mostrado como foi resolvido o Problema AFCDC definido anteriormente e como o algoritmo proposto resolve o nosso problema.

5.2 Um algoritmo para o Problema Modelo de Arranjo Físico

Nesta seção será mostrado detalhadamente como foi resolvido o problema de otimização AFCDC satisfazendo as condições de otimalidade apresentadas no capítulo 4, seção 4.4. Também é proposto um algoritmo para resolver o problema AFCDC.

Foi visto que problema AFCDC pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \quad c^T z \quad (5.23)$$

$$\text{AFCDC} \quad \text{s.a.} \quad \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2 \geq 0 \quad (5.24)$$

$$z \in Z \quad (5.25)$$

Onde Z é o conjunto dos $z = (x, t, t_2) \in \mathbb{R}^{n+2}$ que satisfazem as restrições 5.16 a 5.21.

A restrição 5.24 é essencial, ou seja, $\exists z^0 \in Z$ tal que $\sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2 \leq 0$ e $c^T z^0 = t^0 < \min \left\{ t : z \in Z, \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2 \geq 0 \right\}$.

A partir do problema AFCDC definimos dois problemas, repectivamente denominados de AFCDC1 e AFCDC2. O primeiro é definido como:

$$\text{Minimizar} \quad t \quad (5.26)$$

$$\text{AFCDC1 s.a.} \quad \max \left\{ (r_i + r_j + k) + \sum_{k \neq i}^{n-1} \sum_{l \neq j, l=K+1}^n \|(x_k, y_k) - (x_l, y_l)\| \right\} - t_2 \leq 0 \quad (5.27)$$

$$\sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t \leq 0 \quad (5.28)$$

$$x_i + r_i + k - L \leq 0 \quad (5.29)$$

$$y_i + r_i + k - L \leq 0 \quad (5.30)$$

$$r_i + k_0 + L - x_i \leq 0 \quad (5.31)$$

$$r_i + k_0 + H - y_i \leq 0 \quad (5.32)$$

A estratégia para resolver o problema AFCDC é descrita a seguir.

Primeiramente, é resolvido o problema AFCDC1 para encontrar uma solução $\bar{z}$ que satisfaça a hipótese H2, ou seja, encontrar um ponto essencial. Em posse dessa solução, defini-se o problema AFCDC2 como:

$$\text{Maximizar} \quad \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2 \quad (5.33)$$

$$\text{AFCDC2} \quad \text{s.a.} \quad c^T z \leq c^T \bar{z} + C \quad (5.34)$$

$$z \in Z \quad (5.35)$$

Reescrevemos o problema AFCDC2 da seguinte forma, apenas para facilitar a visualização e compreensão da solução: Seja $g(z) = \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| - t_2$ e $f(z) = c^T z$. AFCDC2 é então reescrito:

$$\text{Maximizar} \quad g(z) \quad (5.36)$$

$$\text{AFCDC2} \quad \text{s.a.} \quad f(z) \leq f(\bar{z}) + C_k \quad (5.37)$$

$$z \in Z \quad (5.38)$$

O problema AFCDC possui solução global $z^* = (x, t, t_2)^*$ quando o problema AFCDC2 possui solução ótima z^* e $g(z^*) = 0$, satisfazendo a condição suficiente de otimalidade.

A estratégia utilizada para resolver esse problema é a atualização de C_k para se encontrar z_k^* satisfazendo $g(z_k^*) = 0$.

Por outro lado, caso a atualização de C_k me forneça uma solução z_k^* onde $g(z_k^*) < 0$, atualizamos o valor C_k para C_{k+1} de modo que $C_{k+1} > C_k$. Caso a atualização de C_k me forneça uma solução z_k^* onde $g(z_k^*) > 0$, atualizamos o valor C_k para C_{k+1} de modo que $C_{k+1} < C_k$. Essa atualização de C_k é feita manualmente, por valores inicialmente arbitrários. A partir dos valores arbitrários C_1 e C_2 que me forneçam soluções z_1^* e z_2^* , respectivamente com $g(z_1^*) < 0$ e $g(z_2^*) > 0$, C_k é escolhido entre os valores C_1 e C_2 de modo que se obtenha $g(z_k^*) = 0$.

Embora essa atualização não tenha sido colocada automaticamente pelo algoritmo, a escolha de C_k era criteriosa, da seguinte forma: $C_{k+1} = \frac{1}{p_k} C_k$ onde $p_k = 1 + w_k$ e

$$w_k = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } g_k \geq \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \text{se } g_k \leq \frac{-1}{4} \\ g_k & \text{se } \frac{-1}{4} < g_k < \frac{1}{4} \end{cases} \quad (5.39)$$

A solução z_k^* fornece a disposição final de cada uma das bolas (objetos) no arranjo físico, onde os centros de cada um é dado por $c_i = (x_{2n-1}^*, x_{2n}^*)$, para $i = 1, \dots, n$.

Assim, resolver AFCDC é equivalente a resolver AFCDC2, com $\bar{z}$ solução de AFCDC1. O algoritmo AAF a seguir foi proposto para resolver o problema AFCDC. Os raios das bolas foram escolhidos arbitrariamente para os casos estudados e tanto a apresentação desses dados e uma melhor discussão sobre cada um deles está no capítulo seguinte.

Algoritmo AAF

Dados $\epsilon > 0$, n° Objetos $n = n_0$, Raios $R = (r_1, \dots, r_{n_0})$, $C = C_0$

Resolva o problema

AFCDC1: $\min = \{t : z \in Z\}$ sendo $\bar{z}$ sua solução, Z definido em 5.22

Faça $k = 0$, $C = C_0$

Enquanto $|g(\bar{z})| > \epsilon$

Resolva o problema

AFCDC2: $\max = \{g(z) : z \in Z, f(z) \leq f(\bar{z}) + C_k\}$ com z_k^* sua solução

Se

$|g(z_k^*)| < \epsilon$, pare. z_k^* é solução de AFCDC

Caso contrário, atualize C_k da seguinte forma

$g(z_k^*) > \epsilon$, diminua $C_{k+1} = \frac{1}{p_k} C_k$

$g(z_k^*) < -\epsilon$, aumente $C_{k+1} = \frac{1}{p_k} C_k$

$k = k + 1$

Fim do enquanto

Fim do AAF

O valor da constante C ainda não é modificado automaticamente e deve ser escolhido

inicialmente, conforme discutido anteriormente. A escolha deste valor para C foi sendo atualizado manualmente para valores onde $g(z)$ se tornasse o mais próximo de zero quanto fosse possível, mas sempre positivo, garantindo assim a viabilidade da solução encontrada, embora com um pequeno erro que pode ser interpretado e visto na solução por um afastamento maior entre alguns objetos do que o mínimo necessário (que seria obtido quando $g(z) = 0$).

A metodologia utilizada, em seu sentido formal, é apresentado no capítulo seguinte. Uma breve análise é feita no capítulo 7, onde também são apresentadas as imagens das soluções encontradas para o problema AFCDC e uma tabela-resumo com as respectivas melhores soluções encontradas para cada um dos quatro casos, com 10, 12, 14 e 16 objetos.

Capítulo 6

Metodologia

Este capítulo define os aspectos metodológicos que concernem esta pesquisa. Em particular, apresenta-se os aspectos formais que a regem do ponto de vista de metodologia, em seguida, definem-se os passos que permitem a reprodução deste trabalho em sua totalidade.

6.1 Tipo da pesquisa

Numa definição formal desta pesquisa, pode-se descrevê-la como de natureza aplicada. A perspectiva aplicada deste trabalho fica evidente quando analisam-se os objetivos do trabalho, bem como os estudos de caso investigados. Mais especificamente, trata-se da proposição de um algoritmo que minimize a soma das distâncias entre objetos organizados em um arranjo físico. Nesse trabalho, os objetos são circulares, em quantidade fixa, de raios variados, e estão dispostos em uma região retangular de tamanho conhecido e capaz de comportá-los, mesmo organizados de forma viável mas não ótima. Este problema pode ser instanciado de diferentes maneiras no cotidiano de indústrias e empresas, a exemplo do projeto de arranjo físico.

Adicionalmente, no que tange a abordagem do problema, define-se este trabalho como uma pesquisa quantitativa, uma vez que a análise dos resultados do algoritmo será realizada através da quantificação por métrica numérica. Neste trabalho, a métrica utilizada mensura a soma de distâncias, de centro a centro, entre cada um dos pares distintos de objetos dispostos em um arranjo físico. De forma direta, esta métrica reflete a proximidade dos objetos. Indiretamente, reflete também a minimização do espaço utilizado. Observa-se que não é objetivo desta métrica mensurar o espaço não utilizado.

Quanto ao objetivo do trabalho, esta pesquisa possui caráter exploratório, uma vez que visa tornar o problema mais explícito, visa aprimorar ideias com a descoberta e experimentação de intuições, bem como ser flexível na consideração dos resultados. Este caráter exploratório se sobrepõe ao caráter descritivo, que visa elucidar características de populações ou fenômenos; bem como ao caráter explicativo, que almeja explicar o porquê da dinâmica de fenômenos.

Por fim, no que se refere aos procedimentos técnicos utilizados para desenvolver a pesquisa, pode-se afirmar que essa é caracterizada como bibliográfica, devido ao fato de recuperar o conhecimento científico acerca do problema e utilizar-se deste para melhor fundamentá-la. Ainda, trata-se também de um estudo de caso, visto que cenários específicos são utilizados, a fim de prover fonte de evidência para a avaliação final do trabalho. O estudo de caso previsto neste trabalho dá conta do problema de arranjo físico para um número n de objetos circulares, onde $n \in \{10, 12, 14, 16\}$, e com raios r distintos.

6.2 O estudo

6.2.1 Ambiente de estudo

Uma vez que se almeja verificar a qualidade de uma solução algorítmica para o problema descrito, um ambiente virtual foi utilizado. Assim, foi escolhido MATLAB (MATrix LABoratory) e seu toolbox de otimização para problemas não-lineares com restrições, o `fmincon`, devido a sua flexibilidade e o grande número de recursos, muito embora tenha suas limitações, como todo recurso tecnológico.

6.2.2 População e amostra

Dada a infinidade de objetos que possamos alocar na região retangular de interesse, trataremos neste trabalho de quatro quantidades que achamos suficiente, à saber, 10, 12, 14 e 16 objetos com raios distintos, porque não há interesse em se considerar um número exaustivo de problemas. Assim, foram tratados os seguintes problemas, que chamamos de:

P01 - 10 objetos distintos, com o raio r_i de cada objeto i igual coordenada i do vetor de raios $r = [9 \ 5 \ 3 \ 4 \ 6 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 2]$;

P02 - 12 objetos distintos, com o raio r_i de cada objeto i igual coordenada i do vetor de raios $r = [9\ 5\ 3\ 4\ 6\ 4\ 4\ 2\ 2\ 2\ 1\ 3]$;

P03 - 14 objetos distintos, com o raio r_i de cada objeto i igual coordenada i do vetor de raios $r = [9\ 5\ 3\ 4\ 6\ 4\ 4\ 2\ 2\ 2\ 1\ 3\ 7\ 1]$.

P04 - 14 objetos distintos, com o raio r_i de cada objeto i igual coordenada i do vetor de raios $r = [9\ 5\ 3\ 4\ 6\ 4\ 4\ 2\ 2\ 2\ 1\ 3\ 7\ 1\ 6\ 6]$.

Os raios de cada objeto foram escolhidos aleatoriamente mas com a intenção que houvesse ao menos dois objetos de raios iguais e também uma diferença considerável (9 vezes) do maior para o menor objeto. Essa diferença também foi aleatório, ou seja, não intencional, apenas determinada pelo tamanho da maior comparada com a menor. A medida que aumentamos o número de objetos de n para $n+2$ optou-se por manter os raios das n bolas anteriores.

6.3 Definição de variáveis

As variáveis utilizadas para análise foram:

- soma das distâncias entre os objetos,
- desempenho do algoritmo.

Assim, a soma das distâncias entre os objetos foi utilizada para mensurar e qualificar a maneira em que foram dispostos os objetos no arranjo físico, sendo melhor aquela que obtiver a menor soma. Para quantificar o desempenho do algoritmo, o número de iterações do *loop* principal também foi verificado.

6.4 Instrumento de coleta de dados

A cada simulação feita para cada um dos problemas de P01 a P04, um relatório e uma figura foram emitidos, informando no relatório os dados numéricos relacionados a cada variável analisada e, na imagem, a disposição dos objetos no arranjo físico, representados por regiões circulares de raio fixo pré-definido, sendo aquele que apresentar o valor mais próximo de zero para $g(x)$ considerado o melhor arranjo físico para o problema AFCDC.

6.5 Procedimentos de análise

Os três problemas descritos anteriormente foram implementados com o algoritmo por nós proposto, adaptado ao modelo do problema de nosso trabalho do algoritmo proposto por [19]. A cada teste realizado, são analisadas as características mais relevantes. São elas:

- soma das distâncias entre os objetos;
- número de iterações;
- disposição dos objetos no arranjo físico;

Capítulo 7

Experimentos numéricos e análise

Como previamente mencionado, neste capítulo serão analisados os relatórios do algoritmo para os quatro problemas P01, P02, P03 e P04. Os resultados são apresentados para cada um deles mais uma figura para cada problema. Para os problemas P01 e P02, apenas para exemplificação e visualização da solução, são mostradas três imagens de três soluções distintas, respectivamente nas Figuras 6.3 e 6.4, geradas no MatLab. Também foi testado o caso chamado de trivial, com apenas três objetos em que todos eles tem o mesmo raio e também verificou-se a influência da função objetivo para a solução do problema. Por fim apresentamos a tabela com os melhores resultados obtidos nos testes para os problemas P01, P02, P03 e P04. O tempo computacional não foi utilizado como critério para avaliar o desempenho do algoritmo, geralmente demorando um minuto ou mais para solucionar as instâncias utilizadas.

7.1 Problema com três objetos iguais e influência da Função Objetivo

Podemos observar, pela figura e pelos teste feitos que, nos casos onde os raios são todos iguais, há uma tendência em se dispor os objetos de maneira que os centros de cada um deles formam um triângulo equilátero (ver figura 6.1). Isso acontece devido a função objetivo querer minimizar a soma das distâncias. Poderia ser diferente, caso o objetivo fosse minimizar a soma das distâncias de todas as outras bolas com relação a uma única (ver figura 6.2(A) e (B)). Isso fica evidente caso que consideramos três objetos num arranjo físico - se

o objetivo fosse esse último, qualquer que fosse a posição das outras bolas ao redor daquela que se deseja minimizar as distâncias satisfaria o problema e seria uma solução ótima global - evidenciando a diferença entre essas duas funções objetivos nas soluções do problema.

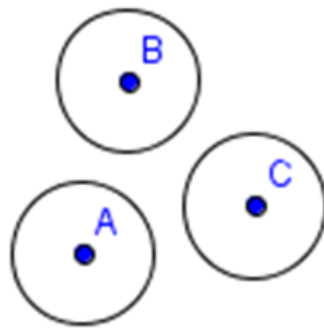


Figura 7.1: Solução com 3 bolas de raios iguais

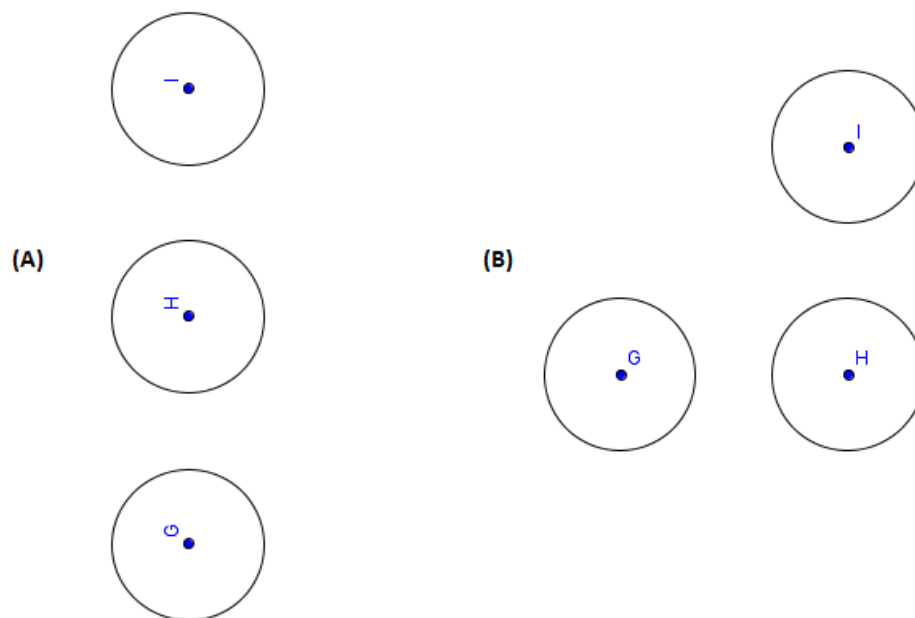


Figura 7.2: Influência da função objetivo na solução para três objetos

7.2 Problema P01

O primeiro experimento realizado utilizou 10 objetos de raios distintos e também de raios iguais. A seguir, observa-se a disposição dos objetos nas figuras, que representam a solução do algoritmo implementado para o problema com 10 objetos.

Outra tendência verificada, nos casos de raios distintos, é a de se dispor as bolas de menor raio na parte central da solução. Isso justifica-se porque, caso colocássemos a bola de maior raio no centro, estaríamos aumentando a distância entre as outras bolas, que estariam dispostas ao redor daquela de maior raio, o que não se quer. Assim, observando por outro lado, essa tendência coloca as bolas de maior raio nas bordas do arranjo físico e ao redor das bolas de menor raio.

7.3 Problema P02

O segundo experimento realizado utilizou 12 objetos de raios distintos e iguais. A seguir, observa-se a disposição dos objetos nas figuras, que representam a solução do algoritmo implementado para o problema P02.

Assim como no problema P01, observa-se que as tendências da disposição dos objetos de raios iguais e distintos verificam-se também para o problema P02.

7.4 Problema P03

No último experimento realizado, utilizou-se 14 objetos de raios distintos e iguais. A seguir, observa-se a disposição dos objetos na figura, que representam a solução do algoritmo implementado para o problema P03. Também é colocados a figura do melhor resultado para o problema de arranjo físico com 16 bolas.

Assim como nos problemas P01 e P02, observa-se que as tendências da disposição dos objetos de raios iguais e distintos verificam-se também para o problema P03.

Por fim, abaixo segue a tabela com os melhores resultados obtidos na implementação para cada um dos problemas anteriores mais um caso para 16 objetos (P04), apresentando também o n° de iterações, valor da função objetivo e o valor da constante C para cada problema.

Resultados computacionais				
n° objetos	n° iter	Val. F.O.	Val. de C	Val. de $g(x)$
10	10	1.1155×10^5	3.1	0.3275
12	30	1.5875×10^5	2.7	0.0018
14	60	3.8896×10^5	6.0	0.0316
16	10	4.9125×10^5	5.1	0.6096

Tabela 7.1: Resultados computacionais

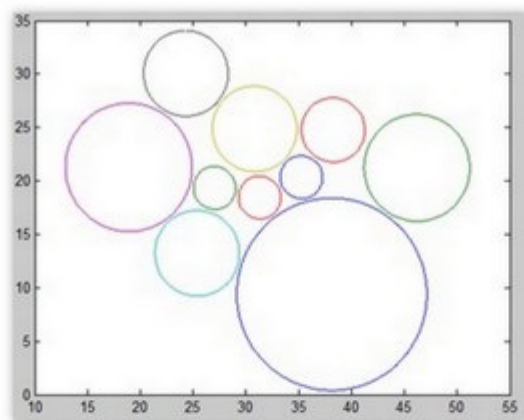
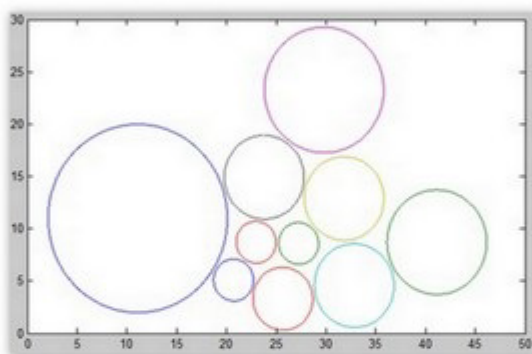
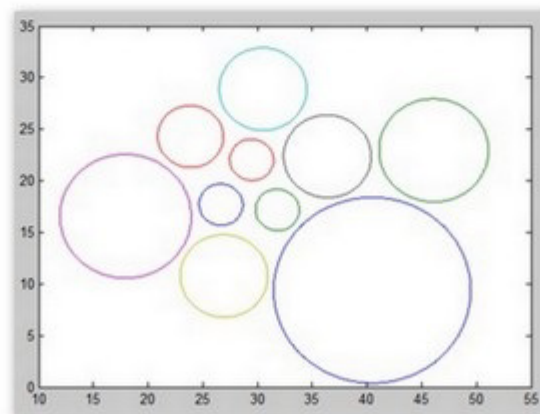
**(A)****(B)****(C)**

Figura 7.3: Três soluções com 10 bolas

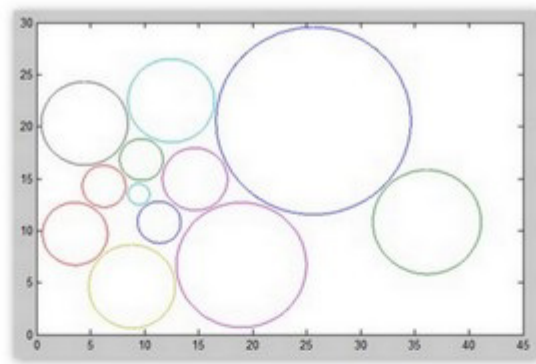
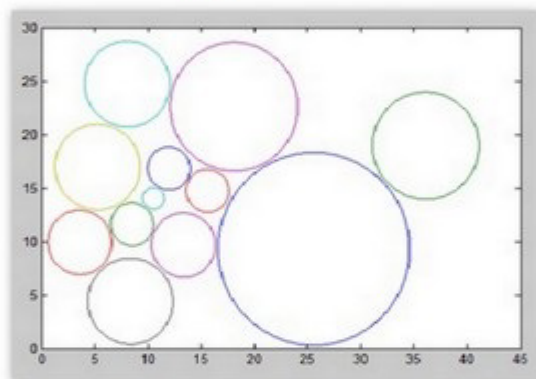
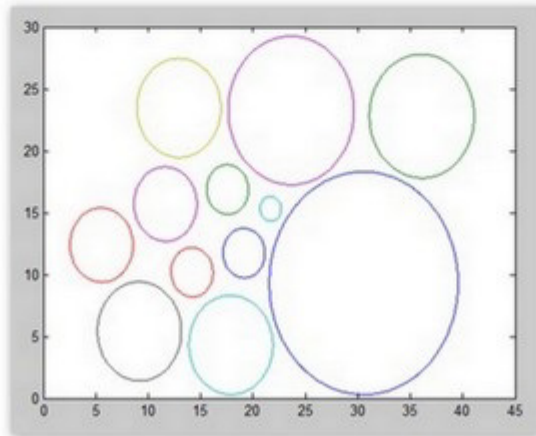
**(A)****(B)****(C)**

Figura 7.4: Três soluções com 12 bolas

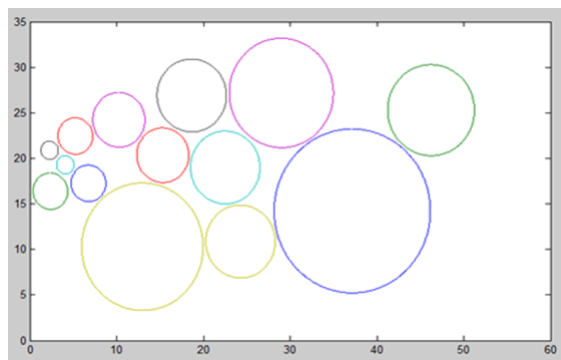


Figura 7.5: Solução com 14 bolas

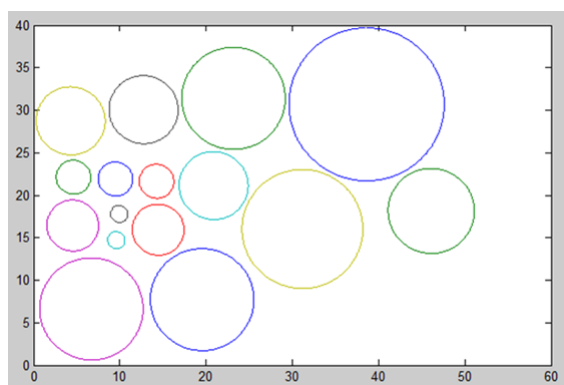


Figura 7.6: Solução com 16 bolas

Capítulo 8

Considerações Finais

8.1 Contribuições do Trabalho

Neste trabalho foi formulado o problema de arranjo físico como um problema de otimização. Em seguida, o problema foi colocado na forma CDC e um algoritmo foi implementado em MatLab para solucioná-lo, com o auxílio da ferramenta fmincon. Assim, os objetivos do trabalho foram alcançados.

De fato, o algoritmo implementado foi capaz de solucionar o problema rapidamente e com qualidade, ou seja, com poucas iterações os objetos ficaram dispostos muito próximos uns dos outros, isto considerando os nossos parâmetros, anteriormente discutidos, para classificar e diferenciar as soluções encontradas, e não o tempo computacional. Assim, além da formulação de um problema comum no mundo real, este trabalho fornece dados que podem posteriormente ser usados para comparação dos resultados, como o número de iterações e a qualidade da disposição dos objetos no arranjo físico.

8.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, propõe-se:

- Sugestão 1; Os objetos que ficam dispostos no arranjo físico foram representados por regiões circulares. Assim, a primeira sugestão é a de representar os objetos por outra métrica para que se possa ter a maior representação possível da realidade, já que sabemos que muitos *layout's* tem seus objetos de outras formas além da circular, como

a quadrada.

- Sugestão 2; Alterar a representação dos objetos para outra métrica. Esperamos assim nos aproximarmos mais dos problemas reais, onde há objetos que ocupam diferentes regiões além da circular.
- Sugestão 3; Estabelecer dependência entre os objetos no layout para que duas ou mais máquinas devam estar mais próximas ou mais distantes umas das outras, também para nos aproximarmos mais dos problemas reais.
- Sugestão 4; Por último, outra proposta é a de tratar o problema como um problema de Programação Geométrica. Esperamos assim que a convergência do algoritmo seja mais rápida e forneça melhores soluções.
- Sugestão 5; automatizar a atualização do valor 'C'.

Bibliografia

- [1] BEN SAAD, S.; JACOBSEN, S.E.; *A level set algorithm for a class of reverse convex programs*, Ann. Oper. Res., 25, 19-42, 1990.
- [2] BEN SAAD, S.; JACOBSEN, S.E.; *A new cutting plane algorithm for a class of reverse convex 0-1 integer programs*, Recent advances in global optimization, Princeton University Press, Princeton, NJ., 152-164, 1992.
- [3] BEN SAAD, S.; JACOBSEN, S.E.; *Comments on a reverse convex programming algorithm*, J. Global Optim., 5, 95-96, 1994.
- [4] BLANQUERO, R.; CARRIZOSA, E.; *On the norm of a DC function*, J. Glob. Optim. 48:209-213, 2010.
- [5] CHEN, P.; HANSEN, P.; JAUMARD, B.; TUY, H., *Solution of the multisource Weber and Conditional Weber Problems by DC Programming*, Cahierdu GERADG,92-35,Escola politécnica, Montreal, Quebec,Canada,1992.
- [6] GIL, A. C; *Métodos e técnicas da pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2006.
- [7] HARTMAN,P.; *On Functions Representable as a Difference of Convex Functions*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.9, pp.707-713, 1959
- [8] HILLESTAD, R.J.; JACOBSEN, S.E.; *Linear programs with an additional reverse convex constraint*, Appl. Math. Optim., 6, 257-269, 1980.
- [9] HOAI AN, L.T.; TAO, P.D.; *Solving a class of linearly constrained indefinie quadratic problems by DC algorithms*, J. Global Optim., 11, 253-285, 1997.
- [10] HOAI AN, L.T.; TAO, P.D.; *A continuous approach for globally solving linearly constrained quadratic zero-one programming problems*, Optimization, 50, 93-120, 2001.

- [11] HOAI AN, L.T.; TAO, P.D.; *DC programming approach for multicommodity network optimization problems with step increasing cost functions*, Journal of Global Optimization 22: 205-232, 2002
- [12] HOAI AN, L.T.; TAO, P.D.; *The DC(difference of convex functions) programming and DCA revisited with DC models of real world nonconvex optimization problems*, Ann. Oper. Res., 133, 23-46, 2005.
- [13] HOAI AN, L.T.; TAO, P.D.; *DC Programming and DCA for Nonconvex Optimization: Theory, Algorithms and Applications*, MAMERN09:3rd International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources Pau, France, June 8-11, 2009
- [14] HONGGANG, X.; CHENGXIAN, X.; *A branch and bound algorithm for solving a class of DC programming*, Applied Mathematics and Computation, PR China, 165, 291-302, 2005.
- [15] HORST, R.; PHONG,T.Q.; THOAI, N.V.; *On solving general reverse programming problems by a sequence of linear programs and line searches*, Ann. Oper. Res., 25, 1-18, 1990.
- [16] HORST, R.; PHONG,T.Q.; THOAI, N.V.; Vries, J.D.; *On solving a DC programming problem by a sequence of linear programs*, J. Global Optim., 2, 183-203. 1991.
- [17] HORST, R.; THOAI, N.V.; BENSON, H.P.; *Concave minimization via conical partitions and polyhedral outer approximation*, Math. Programming, 50, 259-274, 1991.
- [18] HORST, R.;THOAI, N.V.; *DC programming: Overview, Journal of Optimization Theory and applications*, vol 103, 1999.
- [19] HORST, R.;PARDALOS, P. e THOAI, N., *Introduction To Global Optimization*, Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic publishers, 2^aed, 2000.
- [20] JEYAKUMAR, V. e GLOVER, B.M.; *Characterizing global optimality for DC optimization problems under convex inequality constraints*, J. Global Optimzation, 8, 171-187, 1996.

- [21] LIU, S.M., PAPAVALASSILOPOULOS, G.P.; *Algorithms for globally solving D.C. minimization problems via concave programming*, Proceedings of the American Control Conferences, Seattle, Washington, 1995.
- [22] MOSHIRVAZIRI,.; *Construction of Test Problems for Concave Minimization Under Linear and Nonlinear Constraints*, Journal of optimization: theory and applications; Vol.98,No.1,pp.83-108, 1998.
- [23] NGHIA, M.D.; HIEU, N.D.; *A method for solving reverse convex programming problems*, Acta Math. Vietnam, 11, 241-252, 1986.
- [24] PHONG, T. Q.; *An algorithm for solving general D.C. programming problems*, Operations Research Letters 15, 73-79, 1994.
- [25] ROCKAFELLAR, R. T.; *Convex Analysis*; Princeton, NJ : Princeton University Press, 1970.
- [26] SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R.; *Administração da Produção*; São Paulo: Atlas, 2008.
- [27] TAO, P.D.; *Algorithms for Solving a Class of Nonconvex Optimization Problems. Methods of Subgradients*, Mathematics for Optimization, Fermat Days, 85. Elsevier Science Publishers, B.V. North- Holland, 1986.
- [28] TAO, P.D.; HOAI AN, A.T.; *A D.C. Optimization Algorithm For Solving The Trust-Region Subproblem*, J. OPTIM, Vol. 8, No. 2, pp. 476-505, May 1998
- [29] TAO, P.D.; HOAI AN, L.T.; *Convex analysis approach to DC Programming: Theory, algorithms and applications*, Acta Mathematica Vietnamica, Volume 22, Number 1, pp. 289-355, 1997.
- [30] THACH, P.T.; *DC sets, DC functions and nonlinear equations*, Math. Program, 58, 415-428, 1993.
- [31] THOAI, N.V.; *A modified version of Tuy's method for solving DC programming problems*, Optimization, 19, 665-674, 1988.

- [32] THOAI, N.V.; *On Tikhonov's Reciprocity Principle and Optimality Conditions in DC Optimization*; Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.25, pp.673-678, 1998.
- [33] TUY, H.; *A general deterministic approach to global optimization via DC programming*, in J.B. Hiriart-Urruty (ed.) FERMAT Days 85: Mathematics for Optimization, North-Holland, Amsterdam, 273-303, 1986.
- [34] TUY, H.; *Global minimization of a difference of two convex functions*, Math. Programming Studies, 30, 150-182, 1987.
- [35] TUY, H.; *Normal conical algorithm for concave minimization over polytopes*, Math. Programming, 51, 229-245, 1991.
- [36] TUY, H.; *Polyhedral annexation, dualization and dimension reduction technique in global optimization*, J. Global Optim., 1, 229-244, 1991.
- [37] TUY, H.; *The complementary convex structure in global optimization*, J. Global Optim., 2, 21-40, 1992.
- [38] TUY, H.; MIGDALAS, A.; VARBRAND, P.; *A quasiconcave minimization method for solving linear two-level programs*, J. Global Optim., 4, 243-263, 1994.
- [39] TUY, H.; AL-KHAYYAL, F.; ZHOU, F.; *A DC Optimization Method for Single Facility Location Problems* J. Global Optim., 7: 209-227, 1995.
- [40] TUY, H.; *Canonical DC programming problem: Outer approximation methods revisited*, Operations Research Letters 18, 99-106, 1995.
- [41] TUY, H.; *A General Reciprocity Theorem With Application to Mathematical Programming*, Institute of Mathematics, Bo Ho, Hanoi, Vietnam.
- [42] TUY, H.; AL-KHAYYAL, F. e ZHOU, F.; *A D.C. Optimization Method for Single Facility Location Problems*, Journal of Global Optimization 7: 209-227, 1995.
- [43] TUY, H.; *DC optimization: theory, methods and algorithms*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.149-216, 1995.

- [44] TUY, H.; *Counter-Examples to Some Results on D.C. Optimization*, Institute of Mathematics, Bo Ho, Hanoi, Vietnam
- [45] TUY, H.; *Convex Analysis and Global Optimization*, Hanoi, Vietnam: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [46] ZHANG, Q.; *Outer Approximation Algorithms for DC programs and beyond*, Tese PhD, Universidade de Pisa, 2008.