



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica
-Mestrado-Doutorado-

**ANÁLISE DA CONDUÇÃO DE CALOR
TRANSIENTE UNI E BIDIMENSIONAL
SUBMETIDAS AS HARMÔNICAS TÉRMICAS NAS
CONDIÇÕES DE CONTORNO**

por

Igor Cavalcanti da Silveira

*Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da
Paraíba para obtenção do grau de Mestre.*

IGOR CAVALCANTI DA SILVEIRA

**ANÁLISE DA CONDUÇÃO DE CALOR
TRANSIENTE UNI E BIDIMENSIONAL
SUBMETIDAS AS HARMÔNICAS TÉRMICAS NAS
CONDIÇÕES DE CONTORNO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Profº Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

S587a *Silveira, Igor Cavalcanti da.*
Análise da condução de calor transiente uni e
bidimensional submetidas as harmônicas térmicas
nas condições de contorno / Igor Cavalcanti da
Silveira.-- João Pessoa, 2012.
71f. : il.
Orientador: Carlos Antônio Cabral dos Santos
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CT
1. Engenharia Mecânica. 2. Propriedades
Térmicas. 3. GITT. 4. Oscilação de temperatura.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

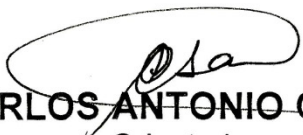
Análise da Condução de Calor Transiente Uni e Bidimensional Submetidas as Harmônicas Térmicas nas Condições de Contorno

por

Igor Cavalcanti da Silveira

Dissertação aprovada em 30 de Abril de 2012

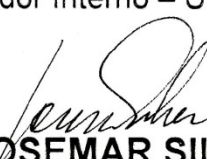
Período letivo 2012.1



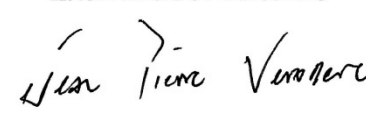
Prof. Dr. CARLOS ANTONIO CABRAL DOS SANTOS
Orientador – UFPB



Prof. Dr. FRANCISCO ANTONIO BELO
Examinador Interno – UFPB



Prof. Dr. JOSEMAR SILVEIRA
Examinador Externo – UFPB



Prof. Dr. JEAN PIERRE VERONESE
Examinador Externo – UFPB

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Maria Margareth dos Santos Cavalcante e Josemar Silveira por todo apoio, carinho e incentivos depositados em mim.

A toda a minha família, em especial a minha avó Marié e em memória de meu avô José Araujo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu bom e soberano Deus por todas as bênçãos que derramou sobre mim, apontando sempre o caminho certo.

A minha querida mãe, por todo zelo, carinho, cuidado e amor, em todas as fases da minha vida, que me fez engrandecer.

Ao meu pai, um grande homem, que me mostra diariamente o que é batalhar para conquistar o que é almejado, além de todas as conversas para passar um pouco de toda sua experiência.

A Ia (Maria), minha mãe preta, que em toda sua simplicidade e força de vontade, se faz de exemplo para como encarar a vida, e fazer dela algo que vale a pena.

Jamais poderia esquecer a minha fiel companheira, Lucyanna, por toda paciência, todo amor, carinho, por todas as conversas e incentivos, além dos estímulos para sempre continuar batalhando, além de toda a sua família.

Ao professor Cabral, não só pelos conhecimentos compartilhados, mas pelo seu companheirismo e amizade.

Aos professores Marinaldo, Jacques, Jean Pierre, Paulo e Belo, pelas ajudas, idéias e conversas.

Aos demais professores do PPGEM e funcionários, inclusive Hernani (o Solda), uma pessoa incrível, que aos poucos se tornou bastante querido, e Iolanda.

Aos colegas de mestrado, Alysson, Thiago, Mabel, Rafael Caluete, Diego Pato, Vinícius, Kleber (Shokovisk), em especial, Marcos César, Felix (Jimmy) e Pedro, grandes amigos, parceiros desde a graduação, em que vencemos várias etapas da nossa vida acadêmica juntos.

Aos amigos da UFPB, Vamberto, Daniel, Felipe (Doido), Alexander (Cipó), Felipinho, Diego (Smeagol), Vítor, Aline, Guto, Sinval, Tiaguera, Hermes, Robson, e aos que estão distante, mas sempre na lembrança, Weiber, Pedro Paulo (PP), Jaílton, Quéopes.

Aos meus eternos amigos Ary, Euler, Artur (Catito), Luiz, Léo, Raniery, Guilherme, Diogo, Chiquinho, meu grande irmão Júnior (Black) e Kant, companheiros de longas datas e muitas histórias.

A toda família do EJC, em especial meu querido amigo Renato (o Venta), os Bostas, e oito pessoas que durante um ano inteiro estiveram juntos e unidos comigo: Tony, Luciana, Vamberto, Sandrinha, Elinadja, Emily, Huan e Lucas.

O mais importante, agradeço a toda a minha família, meus tios, Marcone (tio Cone), Araújo, Magna, Marta, Márcia, Luzinete, Salete, Celso e Mozart. Aos meus queridos primos Saulo, Mozart Neto e Cristiane, com toda distância estão sempre comigo na lembrança, além de Mirella (Lelinha), Júlio, Steffano, Giovanni, Danilo, Thaise, João Vitor, Léo, Maria Vitória, Betinho, Kalilka e Charles. E aquela que todas as noites ora por mim, minha vó Marié, o pilar de toda essa família.

A Capes pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos que fizeram história na minha história, e que de certa forma contribuíram direta ou indiretamente para conclusão deste trabalho.

*Gatilho de Chronos, retome as rédeas da
criatura que tem domínio sobre o
criador.*

*“Bem vindo ao clube, celebrar o fim, seja feliz!
Bem vindo ao clube, é tudo e é a gora. Toda a intensidade que
sempre quis. Tudo o que quis”*

Dead Fish

ANÁLISE DA CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL SUBMETIDAS AS HARMÔNICAS TÉRMICAS NAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

RESUMO

As propriedades térmicas dos materiais são de vital importância para integridade de projetos mecânicos, principalmente de sistemas térmicos e os seus componentes. A simulação e determinação do campo de temperatura nos trazem a representação do comportamento térmico, isto é, fornece informações prévias de como a temperatura varia com a posição e o tempo em um determinado sólido, submetido a certas condições, caracterizando o material termicamente, implicando quais são as aplicações mais apropriadas para aquele objeto em estudo. Para a solução das equações diferenciais parciais que governam os problemas de difusão de calor no presente trabalho, foi empregada a técnica da transformada integral generalizada (GITT), tanto para o modelo unidimensional quanto o bidimensional, com oscilação de temperatura harmônica como condição de contorno, fornecendo o perfil de temperatura dos modelos em estudos. Estes foram simulados por um código computacional desenvolvido no Mathematica 8.0, e com os resultados obtidos foi feita uma análise de convergência com relação a temperatura observando o número de autovalores. Além da reprodução do modelo unidimensional pelo bidimensional, para validação de ambos, em que o número de Biot da condição de terceiro tipo da superfície lateral do cilindro do modelo bidimensional foi assumido zero; e comparação dos resultados obtidos pelo modelo com resultados experimentais.

Palavras-chave: Propriedades Térmicas, GITT, Oscilação de Temperatura.

ONE AND TWO DIMENSIONAL ANALYSIS OF HEAT CONDUCTION SUBJECTED TO HARMONIC VARIATION IN THE BOUNDARY CONDITIONS

ABSTRACT

The thermal properties of materials are vital to the integrity of mechanical designs, mainly of thermal systems and their components. The simulation and determination of temperature field brings the representation of the thermal behavior, i.e., provides previous information on how the temperature varies with position and time in a given solid, subject to certain conditions, characterizing thermically the material, implying what are applications most appropriate for that object under study. For the solution of partial differential equations governing heat diffusion problems in the present study, we used the generalized integral transform technique (GITT), both for the one-dimensional model as the two-dimensional with harmonic oscillating temperature as a boundary condition, providing the temperature profile of the models under study. These were simulated by a computer code developed in Mathematica 8.0, and with the results obtained, an analysis of convergence with respect to temperature observing the number of eigenvalues was done. The one-dimensional model was reproduced by two-dimensional model, assuming the Biot number equal zero of the condition of the third kind of cylinder lateral surface in two-dimensional model, for validation of both; and comparing the results of de model with the experimental results.

Keywords: Thermal Properties, GITT, Oscillating Temperature.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
1.1 MOTIVAÇÕES E OBJETIVOS	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.3 TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT).....	7
TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO	10
2.1 INTRODUÇÃO.....	10
2.1.1 Equação da Difusão de Calor	12
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL VIA GITT	14
3.1 Descrição do Problema Físico	14
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA	15
3.2.1 Adimensionalização.....	16
3.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	17
3.3.1 Procedimento de Solução	18
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE BIDIMENSIONAL VIA GITT	24
4.1 Descrição do Problema Físico	24
4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA	25
4.2.1 Adimensionalização.....	25
4.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	26
4.3.1 Procedimento de Solução	26
ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	38
5.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA.....	38
5.1.1 Convergência do modelo Unidimensional	38
5.1.2 Convergência do modelo Bidimensional.....	42

5.2 RESULTADOS UNIDIMENSIONAIS VERSUS BIDIMENSIONAIS	44
5.3 VALIDAÇÃO DO MODELO.....	47
CONCLUSÕES E SUGESTÕES	49
REFERÊNCIAS	51

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Volume de Controle Diferencial em Coordenadas Cilíndricas. Fonte: KREITH <i>et al</i> (2011).	13
Figura 3.1 – Desenho Esquemático do Problema Físico Unidimensional.	15
Figura 4.1 – Desenho Esquemático do Problema Físico Bidimensional.....	24
Figura 5.1 – Distribuição de Temperatura.	41
Figura 5.2 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 0,1$	45
Figura 5.3 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 0,2$	45
Figura 5.4 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 0,5$	46
Figura 5.5 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 1$	46
Figura 5.6 – Curva Experimental vs. Curva do Modelo.....	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 0$	39
Tabela 5.2 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 1$	39
Tabela 5.3 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 5$	40
Tabela 5.4 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 10$	40
Tabela 5.5 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 0$	42
Tabela 5.6 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 1$	43
Tabela 5.7 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 5$	43
Tabela 5.8 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 10$	44

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área
Bi	Número de Biot
c_p	Calor específico
$f(\tau)$	Condição de contorno transiente
F	Filtro
$\dot{g}$	Taxa de geração de energia volumétrica
G	Condição inicial do potencial filtrado do modelo unidimensional
h	Coeficiente de convecção
H	Segundo termo da Eq. (3.6) que independe de τ
J_0	Função de Bessel de 1ª espécie e ordem zero
k	Condutividade Térmica
l	Comprimento do cilindro
N	Integral de normalização
NT	Numero de Termos
t	Tempo
T	Temperatura
T_0	Temperatura inicial
T_∞	Temperatura ambiente
r_0	Raio externo
r	Coordenada dimensional radial

R	Coordenada adimensional radial
x	Coordenada dimensional
z	Coordenada dimensional longitudinal
Z	Coordenada adimensional longitudinal

Letras Gregas

A	Difusividade térmica
$\varnothing$	Coordenada angular
θ	Temperatura adimensional
τ	Tempo adimensional
Ω	Frequência adimensional
Δ	Variação
θF	Potencial filtrado
ψ	Autofunção
Λ	Autofunção
Γ	Autofunção
χ	Autovalores
μ	Autovalores
γ	Autovalores
ρ	Massa Específica

Sobrescritos e Subscritos

·	Referente à taxa
~	Referente à autofunção normalizada
r	Referência
1	Referente à superfície superior do cilindro
2	Referente à superfície lateral do cilindro
–	Referente à transformada
i	Termo para a série
j	Termo para a série
m	Termo para a série
n	Termo para a série
u	Termo para a série
v	Termo para a série

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÕES E OBJETIVOS

À medida que há um desenvolvimento tecnológico, a importância da engenharia de transferência de calor ganha bastante evidência. Por exemplo, no setor industrial, os cuidados com a transferência de calor são de grande relevância para a concepção de praticamente todos os processos, como também projeto de usinas térmicas e nucleares, incluindo geradores de vapor, fornos, motores de calor, condensadores e outros equipamentos de troca de calor. O mesmo é válido para áreas de vital importância como a de produção de energia, conversão, ou até mesmo um campo que está em expansão como a de controle do meio ambiente.

São inúmeras as áreas que se encontram aplicações da transferência de calor. Outros exemplos além dos já citados acima podem ser enunciados, para darmos maior ênfase a importância a engenharia térmica, que vai desde simples situações do dia-a-dia até construções de naves espaciais. Iniciando por componentes dos automóveis como conversores catalíticos, motores de combustão interna como exemplos. Em veículos espaciais, podemos citar os escudos de calor. Outros exemplos são unidades de refrigeração e ar condicionado, equipamentos eletrônicos, concepção de sistemas de refrigeração para motores elétricos, transformadores e geradores elétricos, aquecimento e refrigeração de líquidos em operações químicas, minimização de perdas de calor em construções através de melhorias das técnicas de isolamento, tratamento térmico de metais, a dispersão de poluentes atmosféricos.

Com tantos exemplos citados pode-se ver que os desafios para por em prática todas essas aplicações são enormes, e demasiadas são as limitações, tais como, conseguir uma maior miniaturização de computadores com alta performance, pois, a capacidade de remoção do calor gerado nos microprocessadores não é eficaz. Problemas de transferência de calor na escala macro, como exemplificado pelo aquecimento global, também oferecem enormes desafios. Enquanto a tecnologia avança, os engenheiros estão constantemente confrontando com a necessidade de maximizar ou minimizar as taxas de transferência de calor e, ao mesmo tempo manter a integridade do sistema.

A transferência de calor em geral ocorre em três formas, condução, convecção e radiação, e na maioria das situações reais, ela é consequência da combinação das mesmas.

O estudo dos fenômenos relativos a condução de calor ganham espaço na tecnologia moderna, e em várias outras áreas em crescimento de análise térmica. A especificação de temperaturas, fontes de calor, e fluxos de calor nas regiões do material em que a condução ocorre, dão origem a análise do campo da temperatura e as condições dos esforços térmicos. A importância de tais condições tem levado a um campo cada vez mais desenvolvido de análise em que formulações matemáticas sofisticadas e técnicas numéricas são utilizadas.

Um aumento da procura de soluções exatas e de referência para problemas de engenharia, como as equações diferenciais parciais parabólicas, possuindo particular importância na área de transferência de calor, que com os avanços tecnológicos, ganham mais complexidade e em curto espaço de tempo. É por isto, que as técnicas numéricas vêm ganhando evidência sobre os experimentos físicos e os métodos analíticos clássicos. Primeiro, que esta ocorrência se deve ao fator tempo, em que a experimentação geralmente demora muito, além de ser muito onerosa, pois para cada aparato experimental, novas despesas surgem para adaptação de novos equipamentos em virtude da nova situação do problema em análise. Segundo, o fato de que algumas restrições são evidenciadas pelos métodos analíticos tradicionais, sendo realizadas simplificações, estas que em algumas ocasiões, distanciam da realidade os modelos propostos, isso na tentativa de diminuir o trato matemático, sendo útil academicamente, mas com pouca utilidade na prática.

Por outro lado o estudo da computação focada em soluções analíticas, em certos casos pode proporcionar resultados mais exatos e rápidos, em que a utilização de técnicas puramente numéricas são menos indicadas. Outro inconveniente da aplicação de métodos puramente numéricos, é o fato de haver naturalmente uma perda sensível do problema físico em questão, além da demora de processamento, elevando o custo computacional, salientando que para se obter uma precisão numérica boa, é preciso uma malha com bastante número de pontos, inviabilizando determinadas soluções.

Por fim, o surgimento de computadores robustos, com maior velocidade na capacidade de processamento, facilitam bastante a simulação de problemas de transferência de calor devido aos avanços computacionais, minimizando o tempo de trabalho e possibilitando desta forma um menor custo.

Neste contexto, o presente trabalho lida com uma técnica híbrida, visando contribuir com uma avaliação mais precisa das propriedades térmicas dos materiais, fornecendo resultados de referência e subsídios para análise da técnica de oscilação térmica, fornecendo uma solução analítico-numérica para equações diferenciais parciais (EDP's), em que a aplicação da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT), para a solução de problemas de condução de calor uni e bidimensional transiente em coordenadas cilíndricas, com oscilação de temperatura harmônica na superfície inferior do cilindro, se faz presente para obtenção e análise do campo de temperatura do mesmo.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise da condução de calor a partir da determinação do campo de temperatura desempenha um papel de bastante relevância, pois é possível estudar as propriedades do material em questão e caracterizá-lo termicamente. Essas informações são de fundamental importância para fatores de projeto, para adequar que tipo de material deverá ser escolhido devido as solicitações mecânicas que este será submetido a determinada aplicação, trazendo características para dimensionamento da espessura de isolamento térmico para uma dada situação, localização das tensões térmicas, dos fluxos de calor, que tipo de tratamento térmico que deve ser aplicado ao material. São inúmeros os estudos em face da

condução de calor, com as mais variadas abordagens e técnicas de solução para os problemas que permeiam este campo da engenharia térmica.

Douglas e Rachford (1956) introduziram um método de diferenças finitas aplicado diretamente para problemas de condução de calor transiente bi e tridimensionais. O mesmo método foi aplicado indiretamente, como uma técnica de iteração, para problemas em regime permanente, utilizando o passo de tempo como parâmetro.

Frankel *et al* (1987) apresentaram uma formulação geral para a condução de calor hiperbólica unidimensional submetido a um fluxo de calor em um meio composto e também foi desenvolvida uma solução geral para um sistema tridimensional com coordenadas ortogonais, com base na formulação de fluxo. A técnica de transformada integral generalizada foi aplicada para obtenção da solução. A técnica foi aplicada sobre uma placa de duas regiões com uma fonte volumétrica pulsada com as superfícies exteriores isoladas.

Antaki (1996) aplicou a transformada de Laplace para obter uma solução para o campo de temperatura de um problema de condução de calor hiperbólica em uma placa semi-infinita com condições de contorno convectivas, envolvendo casos de aquecimento e arrefecimento da placa.

Mikhailov e Cotta (1997) utilizaram o Mathematica para resolver a equação de calor hiperbólica, apresentando a defasagem de fase e amplitude de oscilações de temperatura em uma placa submetida a um fluxo de calor harmônico.

Abdel-Hamid (1999) modelou a condução de calor caracterizada como de não-Fourier, em um meio finito, submetido a um fluxo de calor periódico, obtendo uma solução analítica com a utilização da técnica transformada integral finita. Também foi feito um paralelo entre o campo térmico oscilatório e a oscilação de sistemas térmicos e elétricos.

Monte (1999) analisou a resposta transiente unidimensional de um conduto composto de multicamadas de placas submetido a bruscas variações de temperatura do

fluido circundante. A solução foi obtida aplicando o método de separação de variáveis para a equação diferencial parcial de condução de calor, onde foi desenvolvido um novo tipo de relação de propriedade de ortogonalidade usado para se obter a solução final. Isto deu a relação entre os autovalores para as diferentes regiões e, em seguida, produziu uma equação transcendental para a determinação dos autovalores de uma maneira mais simples.

Regis *et al* (2000) descreveu a condução de calor transiente em uma barra de combustível nuclear, analisando por um método de parâmetro agrupado melhorado. A simetria circunferencial foi assumida com a transferência de calor através do espaço modelado por um coeficiente de transferência de calor. Para obter a temperatura média e fluxo de calor na direção radial foi utilizada a aproximação de Hermite. Melhorias significativas sobre a formulação clássica de parâmetros concentrados foram alcançadas.

Reis *et al* (2000), aplicou as ideias da chamada Abordagem à Equações Integrais Acopladas (CIEA) para o problema de propagação térmica unidimensional de onda em um meio sólido finito, levando a melhores formulações os acoplados diferenciais, através das aproximações pelos polinômios de Hermite para integrais. A aplicação da metodologia CIEA tornou possível reduzir a equação diferencial parcial que regula o problema da condução de calor hiperbólico para um sistema simples constituído por duas ou três equações diferenciais ordinárias para as temperaturas médias e de superfície. Para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias foi utilizado o método de Runge-Kuta foi usado.

Sadat (2004) fez a análise de um problema de condução de calor unidimensional transiente utilizando o método de perturbação. Mostrou que modelos simples de primeira ordem para o centro, para a superfície e temperatura média podem ser desenvolvidos para geometria cilíndrica, de placa e esférica.

Sadat (2006) apresentou para a condução de calor transiente, um modelo de segunda ordem, em uma placa, obtido através do método de perturbação. Foi mostrado que este modelo simples é preciso, mesmo para valores elevados do número de Biot numa região em torno do centro da placa.

Ge Su (2007) fez a representação da melhoria de parâmetros concentrados de modelos a condução de calor transiente em uma placa, com a condutividade térmica não sendo tratada como uma constante, possuindo uma dependência da temperatura. Os modelos foram obtidos através das aproximações de Hermite. O autor comparou a solução numérica com um modelo de ordem superior.

Cossali (2008) em seus estudos mostrou soluções analíticas para um cilindro homogêneo, desenvolvidas através da transformada de Fourier, para uma condução de calor periódica, fornecendo um campo de temperatura flutuante. As condições de contorno mais gerais foram consideradas para obtenção das soluções. Também foi proposto, soluções para placas cilíndricas compostas utilizando os formalismos do quadrupolo térmico, que facilitam a implementação numérica, aplicado a qualquer tipo de arranjo das placas compostas, com alto grau de complexidade.

Ostrogorsky (2008) para obtenção de uma solução analítica para a condução de calor transiente em esferas expostas a um ambiente a temperatura uniforme e números de Biot finitos, utilizou a transformada de Laplace. A solução explícita é válida durante variações iniciais, para números de Fourier $Fo < 0.3$.

Cole (2009), fez uma abordagem para geometrias cilíndricas submetidas a um aquecimento em regime permanente, sendo comparados a dados coletados de propriedades térmicas. A função de Green foi usada para fornecer uma família de expressões analíticas exatas da temperatura nos cilindros. Os cinco tipos de condições de contorno foram tratados em geometrias de uma, duas e três dimensões. Para melhorar a convergência em certas geometrias foram aplicadas formas alternativas da função de Green.

Monteiro *et al* (2009) fez o uso da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT) para analisar a equação de condução de calor hiperbólica em uma placa finita, sendo o problema conduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acoplado transiente. O resultado foi resolvido numericamente pelo método de Gear. Por fim, uma comparação também é feita com os resultados previamente relatados na literatura para casos particulares e com os produzidos por meio da aplicação do método da transformada de Laplace (MLP), e o método Gear para volumes finitos (FVGM).

Behera (2009) obteve várias soluções para diferentes problemas de condução de calor unidimensionais transientes. Para isso, ele adotou um modelo de parâmetros acoplados para verificar a variação do campo de temperatura tanto para uma geometria cilíndrica como uma em uma placa. Para resolver as equações de condução de calor transiente, foi utilizado o método de aproximação polinomial. As soluções obtidas em todos os casos foram em função da temperatura, o número de Biot, o parâmetro da fonte de calor e o tempo.

Teixeira *et al* (2009) estudaram o comportamento de materiais metálicos. Eles consideraram dependência de temperatura não linear negligenciando o acoplamento térmico-mecânico de deformação. Foi apresentada uma formulação do problema de condução de calor e estimaram o erro usando o método de elementos finitos para o caso de tempo contínuo com a propriedade dos materiais sofrendo dependência da temperatura.

1.3 TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

A Técnica Transformada Integral Generalizada concebida como um método híbrido, pois mescla a utilização de ferramentas analíticas e a aproximação numérica, se mostra uma ferramenta bastante eficaz na solução de equações diferenciais parciais não-lineares e fortemente acopladas.

Seu surgimento teve início com ÖZİŞIK e MURRAY (1974) com a introdução da Técnica Transformada Integral Clássica (CITT), desenvolvendo uma nova metodologia capaz de resolver problemas de difusão, que os métodos clássicos como a separação de variáveis não tinham capacidade.

O primeiro trabalho publicado (MIKHAILOV & ÖZİŞIK, 1984) formalizando a Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT), que postulava uma abordagem sistemática e unificada, sendo feita uma classificação definida a partir de vários problemas de transferência de calor e massa existentes, identificando sete classes, possuía o intuito de reduzir as limitações apresentadas pela Técnica Transformada Integral Clássica, trazendo

uma gama de soluções para problemas convectivos-difusivos, cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas.

Desde então a GITT tem avançado. COTTA (1993) publicou um livro com um apanhado, apresentando uma revisão dos formalismos clássicos, consolidando a Técnica da Transformada Integral Generalizada, sendo o trabalho mais abrangente e sistemático sobre o assunto, separado em cinco categorias:

Problemas com coeficientes da equação variáveis. Esse tipo classe possui aplicação em análise transiente de aletas com dissipação havendo dependência do tempo e desenvolvimento simultâneo de escoamento no interior de canais;

- Problemas com os coeficientes das condições de contorno variáveis. Algumas das aplicações podem ser exemplificadas como condução de calor com número de Biot dependente do tempo e convecção forçada no interior de dutos aletados externamente;
- Problemas com contornos variáveis. São exemplos de problemas com contorno variáveis os que envolvem mudança de fase e oxidação;
- Situações que envolvem difíceis problemas auxiliares. Várias são as aplicações que podem ser citadas para essa classe de problemas, como convecção forçada interna, transiente e periódica, transferência de calor em canais com escoamento com efeitos de condução axial, transferência de calor por convecção no interior de dutos retangulares, problemas de transferência de calor conjugados;
- Problemas não-lineares. Problemas de convecção não-linear e condução de calor com condutividade térmica variável.

Logo após (COTTA, 1998) foi realizada uma revisão da técnica para problemas difusivos e difusivos-convectivos.

A ideia básica por trás da Técnica Transformada Integral Generalizada (COTTA, 1993) consiste em (depois de encontrar o tipo de problema auxiliar de autovalor apropriado) transformar equação diferencial parcial original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias desacopladas que pode ser facilmente resolvida analiticamente, ou resolvido numericamente para problemas mais complexos.

A GITT possui uma gama de aplicações que envolvem soluções de problemas de engenharia (análise de reservatórios de petróleo, equipamentos termo-hidráulicos, na engenharia aeroespacial, de processos, nuclear, problemas térmicos em siderurgia, migração de rejeitos radiativos em solos, resfriamento de equipamentos eletrônicos), em que haja acoplamento, fornecendo controle automático de erro global, quando se faz um paralelo comparativo aos métodos numéricos, além de inúmeras vantagens que podem ser destacadas como segue abaixo (COTTA, 1993):

- Diminuição do tempo de processamento;
- Metodologia sistemática de solução;
- Aceleração da taxa de convergência numérica;
- Inexistência de malhas (fator que se acentua para os problemas multidimensionais);
- Obtenção de soluções *benchmark* (resultados de referência);
- Determinação numérica direta da função em um ponto (para valores definidos de tempo e espaço) sem necessidade de cálculo numérico de estados temporais anteriores ou de outros pontos do domínio do espaço;
- Versatilidade do método em se associar com outros, devido às suas características analítico-numéricas.

CAPÍTULO II

TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

2.1 INTRODUÇÃO

Fluxo de calor através de um sólido é denominado difusão térmica, ou simplesmente difusão ou condução (KREITH *et al*, 2011). A transferência de calor por condução é um processo de difusão, em que a energia térmica é transferida de um meio com temperatura mais elevada para uma região de temperatura mais amena, por meio de troca de energia intermolecular. O mecanismo físico que governa a condução de calor (INCROPERA *et al*, 2008) é dado pela interação entre as moléculas devido aos seus movimentos aleatórios, aos choques internos entre as partículas, movimentos de rotação e vibração, assim havendo a difusão de energia.

A taxa de calor pode ser estabelecida pela lei de Fourier, uma equação empírica, que estabelece uma relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura do objeto de análise, além de levar em consideração as características térmicas do material em questão, devido a uma propriedade térmica inerente ao mesmo, conhecida como condutividade térmica. A equação que descreve a lei de Fourier é dada pela seguinte expressão:

$$\dot{Q}_{cond} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad [W] \quad (2.1)$$

A relação acima, Eq. (2.1), indica que a taxa de calor por condução ocorre na direção da região de maior energia para a de menor, por isso o sinal negativo da expressão. A taxa de calor representa a difusão de calor por unidade de tempo, em que o gradiente de

temperatura e a direção do fluxo de calor são normais a área de transferência de calor, e k representa a condutividade térmica do material.

ÇENGEL (2006) define a condutividade térmica como a taxa de calor que é transferida através de unidade de espessura do material, por unidade de área e por unidade de diferença de temperatura. A condutividade térmica é uma propriedade intrínseca do material que nos traz informações da capacidade que o material possui em conduzir o calor. Materiais com alta condutividade térmica são conhecidos como condutores, podendo ser exemplificados pelo cobre, muito aplicado nos componentes dos ciclos de refrigeração, e em tubulações de unidades de condicionadores de ar. Já os isolantes térmicos, por sua vez, possuem baixa condutividade térmica, como exemplo, a lã de vidro pode ser citada, ou o próprio ar.

A condutividade térmica, abordada acima, no escopo das propriedades termofísicas dos materiais é classificada como uma propriedade de transporte. Também existem as propriedades termodinâmicas, estas determinam o estado de equilíbrio do sistema. Como exemplo, podem ser citados temperatura, pressão, volume específico, massa específica (ρ), calor específico (c_p). Na literatura, frequentemente é encontrado na análise da transferência de calor, o produto entre as duas últimas propriedades térmicas mencionadas anteriormente (ρc_p), é conhecido como capacidade calorífica volumétrica, sendo entendido fisicamente como a predisposição que o material possui em armazenar energia térmica.

Com a definição da condutividade térmica e da capacidade calorífica volumétrica, é possível introduzir outra propriedade termofísica, a difusividade, que é a relação entre a qualidade que um material possui em conduzir o calor e a predisposição que o mesmo consegue em armazenar a energia térmica. A partir daí temos a seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{\text{capacidade de conduzir}}{\text{capacidade de armazenar}} = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \quad [m^2/s] \quad (2.2)$$

A difusividade térmica representa a velocidade com a qual o calor se difunde através do material, devido às alterações de temperatura que são impostas. Um material que tem uma elevada condutividade térmica ou uma baixa capacidade calorífica,

obviamente, terá uma grande difusividade térmica, por consequência, mais veloz é a propagação de calor no meio. Quando a maior parte do calor é absorvida pelo material e uma pequena quantidade é conduzida, temos um baixo valor da difusividade térmica.

2.1.1 Equação da Difusão de Calor

A análise da condução de calor submetida a uma condição inicial e condições de contorno, fornece a distribuição de temperatura em um sistema sólido. Uma vez, obtendo a representação de como a temperatura se comporta no meio, tendo sua variação com a posição, isto é, havendo o conhecimento do campo de temperatura, a taxa de transferência de calor por condução pode ser avaliada em qualquer ponto pela aplicação da lei de Fourier.

Para um sólido (INCROPERA *et al*, 2008), o conhecimento do perfil de temperatura pode ser utilizado para a verificação da integridade da estrutura através da determinação de tensões térmicas, expansões e deflexões. A otimização da espessura de um isolante térmico, ou a compatibilidade entre revestimentos espaciais, adesivos, e a superfície a qual esses serão aplicados, são outras aplicações que podem ser destacadas mediante a utilização do campo de temperatura quando determinado.

Aplicando um balanço de energia local em qualquer posição do objeto de estudo, delimitando um volume de controle para análise, sujeito a condições de fronteira em que praticamente só haja transferência de calor por condução, representado pela Fig. (2.1), é possível determinar a equação diferencial da difusão de calor para obter-se a distribuição de temperatura.

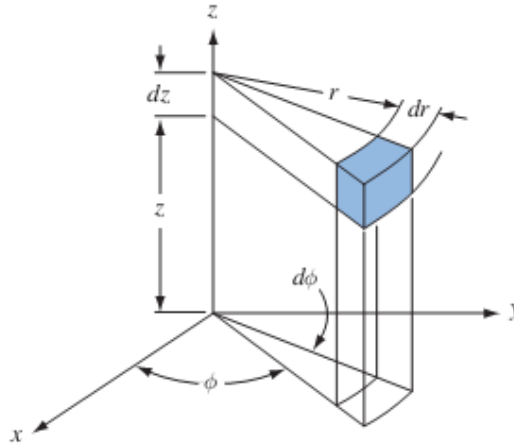


Figura 2.1 – Volume de controle diferencial em coordenadas cilíndricas. Fonte: KREITH *et al* (2011).

De maneira mais geral, para um sistema de coordenadas cilíndricas, a equação da difusão de calor fica da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

Fisicamente, os três primeiros termos do lado esquerdo da Eq. (2.2), representam a taxa da difusão de calor líquida por unidade de volume, para um determinado ponto ou a partir dele, calculado através da divergência do fluxo de calor, em um volume de controle, somados a uma taxa de geração de energia volumétrica. O termo da direita, nos trás informações relativas à taxa de variação de energia interna associado com a estocagem de energia líquida por unidade de volume.

Outro fator a ser observado na Eq. (2.2) é que tanto a condutividade (k), quanto à capacidade calorífica (ρc_p) são termos que dependem da temperatura, isto é, são sensíveis a variação de temperatura.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL VIA GITT

3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO

O problema físico considerado neste capítulo, para a proposição de uma solução, é dado por uma barra cilíndrica maciça de comprimento l e raio externo r_0 , que inicialmente se encontra a uma temperatura T_0 , e sua vizinhança com temperatura ambiente T_∞ .

A superfície inferior circular do cilindro está submetida a uma oscilação de temperatura. Na superfície superior é imposta uma condição de contorno convectiva.

A Fig. (3.1) é uma representação esquemática do problema físico a ser solucionado, com suas condições de contorno, em que o disco azul abaixo do cilindro cinza representa a oscilação térmica imposta na superfície inferior.

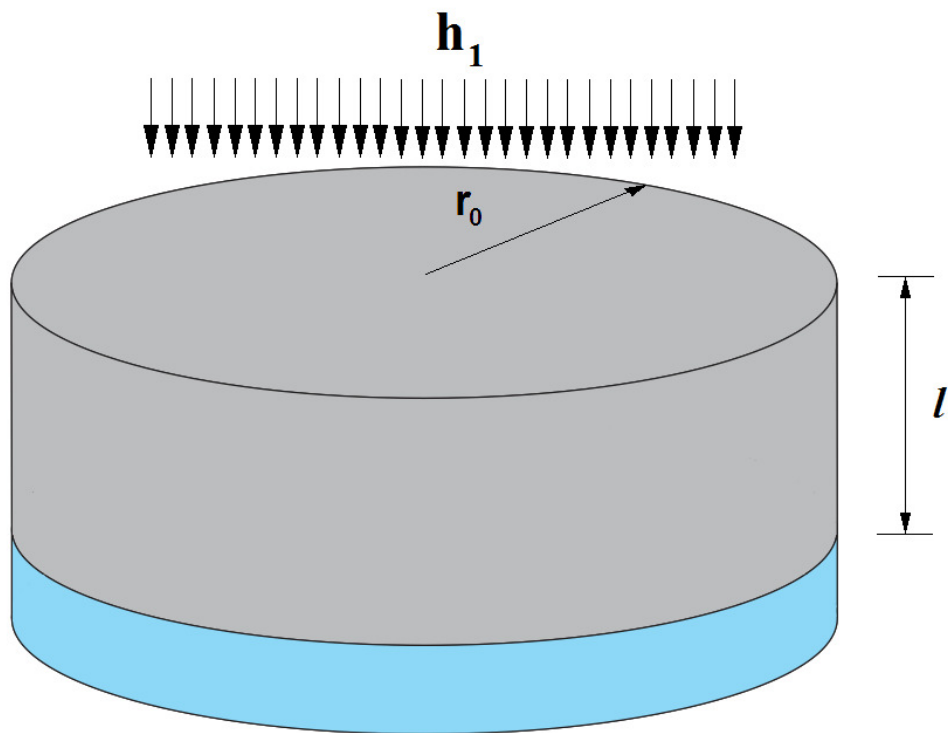


Figura 3.1 – Desenho esquemático do problema físico unidimensional.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A partir da observação do exposto na descrição do problema físico, temos a análise da condução de calor unidimensional na coordenada z , transiente, com oscilação harmônica de temperatura.

Também será levado em conta as seguintes considerações para o solução do problema em questão:

- Condutividade térmica constante;
- Capacidade calorífica constante;
- Sem geração de energia;
- Cilindro maciço homogêneo;
- Propriedades térmicas isotrópicas;
- Temperatura inicial uniforme;

- Sem efeitos radiativos.

Logo a equação da difusão de calor, Eq. (2.2), que toma a seguinte forma devido às simplificações assumidas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1a)$$

A Eq. (3.1a) é o modelo matemático que governa o problema da condução de calor descrito, junto com as seguintes condições de contorno e inicial:

$$T(0, t) = T_{\infty} + \Delta T(r) e^{i\omega t}; \quad (3.1b)$$

A Eq. (3.1b) representa a oscilação harmônica de temperatura imposta na superfície inferior da barra.

$$h_1(T - T_{\infty}) + k \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \text{para } z = l \quad (3.1c)$$

A Eq. (3.1c) é a condição de contorno do terceiro tipo, na superfície superior.

Ainda existe a condição de inicial em que a temperatura é uniforme em todo o cilindro e diferente da temperatura ambiente.

$$T(z, 0) = T_0 \neq T_{\infty} \quad (3.1d)$$

3.2.1 Adimensionalização

A prática da adimensionalização para solução de problemas de equações diferenciais parciais fornece subsídios para minimizar os erros, pois reduz o número de parâmetros das equações, evitando trabalhar com ordens de grandezas, melhorando o comportamento numérico da solução, além de que os grupos adimensionais facilitam a interpretação do comportamento físico e generalizam os resultados obtidos.

Serão admitidos os seguintes grupos adimensionais:

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T_r} \quad ; \quad R = \frac{r}{r_0} \quad ; \quad Z = \frac{z}{r_0} \quad ; \quad \tau = \frac{\alpha t}{r_0^2}$$

$$\Omega = \frac{\omega r_0^2}{\alpha} \quad ; \quad Bi = \frac{h r_0}{k} \quad ; \quad \Delta\theta = \frac{\Delta T(r)}{\Delta T_r}$$

Estes serão aplicados na Eq. (3.1a) e nas condições de contorno e inicial, Eq. (3.1b-d), para obtenção do modelo adimensional do problema exposto, como segue abaixo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.2a)$$

$$\theta(0, \tau) = \Delta\theta e^{i\Omega\tau} = f(\tau) \quad (3.2b)$$

$$Bi_1 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0; \quad \text{para} \quad Z = 1 \quad (3.2c)$$

$$\theta(Z, 0) = 1 \quad (3.2d)$$

3.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Em geral, para a aplicação da Técnica Transformada Integral Generalizada é realizado um procedimento com passos sequenciais sistematizados, que dependendo de alguns tipos de problemas, pode haver algumas etapas intermediárias, como por exemplo, a utilização de filtros para otimização e aceleração da convergência.

As cinco etapas básicas são descritas sequencialmente (COTTA, 1997).

- Escolha de um problema auxiliar de autovalor, que contenha o maior número de informações possível a cerca do problema original;
- Desenvolvimento do par Transformada-Inversa adequado;

- Transformação integral do problema original pela substituição da fórmula da inversa nos termos não transformáveis ou utilizando a abordagem do balanço integral;
- Resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através do truncamento da série em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, obtendo-se os potenciais transformados;
- Aplicação da fórmula inversa ao campo transformado para obter a solução do problema original.

As cinco etapas descritas acima serão observadas no procedimento de solução do problema.

3.3.1 Procedimento de Solução

Observando as condições de contorno e inicial, Eq. (3.2b-d), nota-se que elas não estão homogeneizadas para aplicação da GITT, e para isso será aplicado um filtro para uma melhor performance computacional, isto é, acelerar e otimizar a convergência do problema em questão. Para isto a equação para o campo de temperatura toma a seguinte forma:

$$\theta(Z, \tau) = \theta F(Z, \tau) + F(Z; \tau) \quad (3.3)$$

Sendo $F(Z; \tau)$ o filtro para homogeneizar as condições de contorno. Fazendo uma simplificação das Eq. (3.2a) e escrevendo em função de $F(Z; \tau)$, tanto o modelo adimensional quanto as condições de contorno, temos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = 0 \quad (3.4a)$$

$$F(0) = f(\tau) \quad (3.4b)$$

$$Bi_1 F + \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \quad \text{para } Z = 1 \quad (3.4c)$$

Integrando a Eq. (3.4) duas vezes e aplicando as condições de contorno, Eq. (3.4b-c), obtemos o filtro $F(Z)$.

$$F(Z; \tau) = f(\tau) \left[-\frac{Bi_1}{(1 + Bi_1)} \cdot Z + 1 \right] \quad (3.5)$$

Com o filtro determinado, para dar uma solução para o campo de temperatura, o próximo passo é obter $\theta F(Z, \tau)$. Para isso, a Eq. (3.3) será aplicada a Eq. (3.2a).

$$\frac{\partial^2 \theta F}{\partial Z^2} = \frac{\partial \theta F}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \quad (3.6a)$$

Em que:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = f'(\tau) \left[-\frac{Bi_1}{(1 + Bi_1)} \cdot Z + 1 \right] = f'(\tau) H(Z)$$

Do mesmo modo será feito para as condições de contorno e inicial, Eq. (3.2b-d).

$$\theta F(0, \tau) = 0 \quad (3.6b)$$

$$Bi_1 \theta F + \frac{\partial \theta F}{\partial Z} = 0, \quad \text{para } Z = 1 \quad (3.6c)$$

$$\theta F(Z, 0) = 1 - F(Z; 0) = G(Z) \quad (3.6d)$$

A GITT será aplicada, para se obter uma solução para a função $\theta F(Z, \tau)$, que por fim, será usada para determinação do campo de temperatura na barra.

3.3.1.1 Escolha do Problema de Autovalor

$$\frac{d^2\psi_i(Z)}{dZ^2} + \mu_i^2\psi_i = 0 \quad (3.7a)$$

$$\psi_i(0) = 0 \quad (3.7b)$$

$$Bi_1 \psi_i + \frac{d\psi_i}{dZ} = 0, \quad \text{para } Z = 1 \quad (3.7c)$$

A Eq. (3.7a) é um problema de Sturm-Liouville (BOYCE e DIPRIMA, 2010), em coordenadas retangulares, e juntamente com as condições de contorno, Eq. (3.7b) e (3.7c), possuem solução analítica (ÖZİŞIK, 1993), em que suas autofunções, normas e autovalores são dados respectivamente por:

$$\psi_i(Z) = \text{sen}(\mu_i Z) \quad (3.8)$$

$$N_i(\mu_i) = \int_0^1 \psi_i^2(Z) dZ = 2 \frac{(\mu_i^2 + Bi_1^2) + Bi_1}{\mu_i^2 + Bi_1^2} \quad (3.9)$$

$$\mu_i \cot(\mu_i) = -Bi_1 \quad (3.10)$$

E a Autofunção Normalizada é dada por:

$$\widetilde{\psi}_i(Z) = \frac{\psi_i(Z)}{N_i^{1/2}} \quad (3.11)$$

O Problema de autovalor acima definido na forma acima permite estabelecer o par de transformada.

3.3.1.2 Desenvolvimento do Par-Transformado

$$\theta F(Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(Z) \overline{\theta F}_i(\tau) \quad \text{Inversa} \quad (3.12a)$$

$$\overline{\theta F}_i(Z, \tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \theta F(Z, \tau) dZ \quad \text{Transformada} \quad (3.12b)$$

3.3.1.3 Transformação do Problema Principal Eq. (3.6a)

O problema representado pela Eq. (3.6a) é transformado através do seguinte operador:

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) dZ$$

Operando em ambos os lados da equação, temos:

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \frac{\partial^2 \theta F}{\partial Z^2} dZ = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \frac{\partial \theta F}{\partial \tau} dZ + \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) [f'(\tau) H(Z)] dZ \quad (3.13a)$$

Aplicando a Inversa, Eq. (3.12a), e problema de autovalor, Eq. (3.7a) temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(Z) \overline{\theta F}_j(\tau) \right] dZ &= \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(Z) \overline{\theta F}_j(\tau) \right] dZ \\ &+ \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) [f'(\tau) H(Z)] dZ \end{aligned} \quad (3.13b)$$

Organizando a Eq. (3.13b) pela propriedade de somatório.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\theta F}_j(\tau) \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j(Z)}{\partial Z^2} dZ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \overline{\theta F}_j(\tau)}{\partial \tau} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \tilde{\psi}_j(Z) dZ \quad (3.13c)$$

$$+ \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) [f'(\tau)H(Z)]dZ$$

Propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \tilde{\psi}_j(Z)dZ = \begin{cases} 0, se i \neq j \\ 1, se i = j \end{cases}$$

Substituindo o problema de autovalor, Eq. (3.7a) na derivada de segunda ordem, e aplicando a propriedade de ortogonalidade na Eq. (3.13c), temos:

$$-\mu_j^2 \overline{\theta F_j}(\tau) = \frac{\partial \overline{\theta F_j}(\tau)}{\partial \tau} + f'(\tau) \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) H(Z)dZ \quad (3.13d)$$

Para obter todo o problema transformado, falta ainda transformar a condição inicial, Eq. (3.6d). Será aplicado, o mesmo operador que foi utilizado para transformar a Eq. (3.6a), e a mesma propriedade de ortogonalidade e inversa.

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) \theta F(Z, 0)dZ = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Z) G(Z)dZ = \overline{\theta F_i}(0) \quad (3.13e)$$

O problema transformado foi desenvolvido, sendo representado pelas Eq. (3.13d) e (3.13e). A Eq. (3.13d) é uma EDO linear de 1ª ordem unidimensional transiente, que possui solução analítica.

3.3.1.4 Solução do Problema Transformado

O problema transformado possui solução analítica, representada pela expressão abaixo:

$$\overline{\theta F_i}(\tau) = \left[\overline{\theta F_i}(0) - H(Z) \int_0^\tau f'(\tau) e^{\mu_i^2 \tau} d\tau \right] e^{-\mu_i^2 \tau} \quad (3.14)$$

3.3.1.5 Recuperação do Potencial Original

Será utilizada a inversa, Eq. (3.12a), para obter-se a expressão da função $\theta F(Z, \tau)$. Substituindo a Eq. (3.14).

$$\theta F(Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(Z) \left[\overline{\theta F}_i(0) - H(Z) \int_0^{\tau} f'(\tau) e^{\mu_i^2 \tau} d\tau \right] e^{-\mu_i^2 \tau} \quad (3.15)$$

Por fim, para obtenção da solução que representa o campo de temperatura do problema abordado, a Eq. (3.15) e a Eq. (3.5), serão substituídas na Eq. (3.3), para explicitar a expressão que representa o comportamento da temperatura na barra em questão.

$$\begin{aligned} \theta(Z, \tau) = & \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(Z) \left[\overline{\theta F}_i(0) - H(Z) \int_0^{\tau} f'(\tau) e^{\mu_i^2 \tau} d\tau \right] e^{-\mu_i^2 \tau} \\ & + f(\tau) \left[-\frac{Bi_1}{(1 + Bi_1)} \cdot Z + 1 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE BIDIMENSIONAL VIA GITT

4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO

O problema físico considerado neste capítulo é o mesmo do anterior, possuindo a mesma montagem. A diferença agora, é que serão considerados os efeitos convectivos na superfície lateral do aparato, tornando o problema bidimensional.

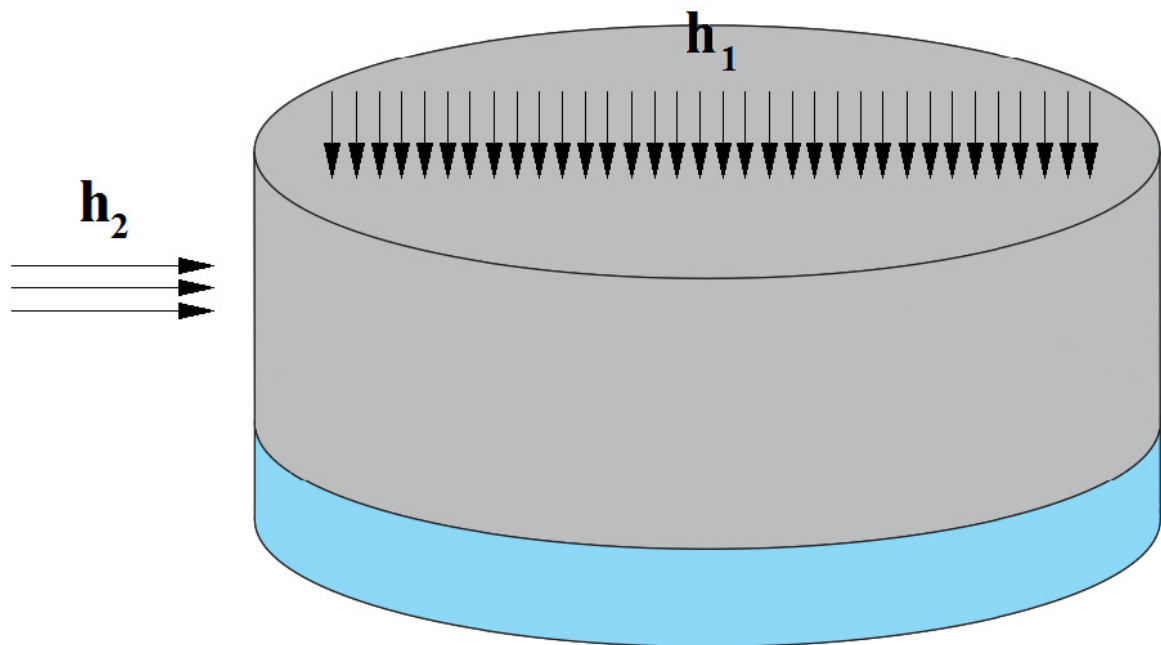


Figura 4.1 – Desenho esquemático do problema físico bidimensional.

4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A análise feita para o problema abordado em questão neste capítulo é representado por uma condução de calor bidimensional em coordenadas cilíndricas (r, z) , transiente, com oscilação harmônica de temperatura.

As mesmas considerações do Capítulo II serão admitidas para a solução do problema, bidimensional.

A equação da difusão de calor, Eq. (2.2), toma a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1a)$$

Com as seguintes condições de contorno e inicial:

$$T(r, 0, t) = T_{\infty} + \Delta T(r) e^{i\omega t}; \quad (4.1b)$$

$$h_1(T - T_{\infty}) + k \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \text{para } z = l \quad (4.1c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad (4.1d)$$

$$h_2(T - T_{\infty}) + k \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad \text{para } r = r_0 \quad (4.1e)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \neq T_{\infty} \quad (4.1f)$$

4.2.1 Adimensionalização

Serão admitidos os mesmos grupos adimensionais, e serão aplicados nas Eq. (4.1a) à (4.1f), com isso, será explicitado o modelo adimensional para o problema bidimensional.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (4.2a)$$

$$\theta(R, 0, \tau) = \Delta \theta e^{i\Omega \tau} = f(\tau) \quad (4.2b)$$

$$Bi_1 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0; \quad \text{para } Z = 1 \quad (4.2c)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Z, \tau)}{\partial R} = 0 \quad (4.2d)$$

$$Bi_2 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0; \quad \text{para } R = 1 \quad (4.2e)$$

$$\theta(R, Z, 0) = 1 \quad (4.2f)$$

4.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

As cinco etapas básicas serão seguidas novamente, e agora mais de uma vez, pois o problema não é mais unidimensional.

4.3.1 Procedimento de Solução

Observando as condições de contorno e inicial, Eq. (4.2b) à (4.2f), nota-se que o problema não está homogeneizado para aplicação da GITT, e para isso será aplicado um filtro para solução do problema. Portanto o campo de temperatura segue com a seguinte expressão.

$$\theta(R, Z, \tau) = \theta F(R, Z, \tau) + F(R, Z) \quad (4.3)$$

$F(R, Z)$ é o filtro para homogeneizar as condições de contorno. Fazendo uma simplificação da Eq. (4.2a) e escrevendo em função de $F(R, Z)$, e também as condições de contorno, temos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial F}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = 0 \quad (4.4a)$$

$$F(R, 0) = f(\tau) \quad (4.4b)$$

$$Bi_1 F + \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \quad \text{para } Z = 1 \quad (4.4c)$$

$$\frac{\partial F(0, Z, \tau)}{\partial R} = 0 \quad (4.4d)$$

$$Bi_2 \theta + \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0; \quad \text{para } R = 1 \quad (4.4e)$$

Para obtenção do filtro, a GITT terá de ser aplicada.

4.3.1.1a Escolha do problema de Autovalor

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{\Lambda_u(R)}{dR} \right] + \chi_u^2 \Lambda(R)_u = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{d\Lambda_u(0)}{dR} = 0 \quad (4.5b)$$

$$Bi_2 \Lambda_u + \frac{d\Lambda_u}{dZ} = 0; \quad \text{para } R = 1 \quad (4.5c)$$

A Eq. (4.5a) é um problema de Sturm-Liouville, em coordenadas cilíndricas, e juntamente com as condições de contorno, Eq. (4.5b) e (4.5c), possuem solução analítica

(ÖZİŞIK, 1993), em que suas autofunções, normas e a autocondição são dados respectivamente por:

$$\Lambda_u(R) = J_0(\chi_u R) \quad (4.6)$$

$$N_u(\chi_u) = \frac{J_0^2(\chi_u)}{2} \frac{(Bi_2^2 + \chi_u^2)}{\chi_u^2} \quad (4.7)$$

$$\chi_u J_0'(\chi_u) + Bi_2 J_0(\chi_u) = 0 \quad (4.8)$$

$$\tilde{\Lambda}_u(R) = \frac{\Lambda_u(R)}{N_u^{1/2}} \quad (4.9)$$

O Problema de autovalor acima definido na forma acima permite estabelecer o par de transformada.

4.3.1.2a Desenvolvimento do Par-Transformado

$$F(R, Z) = \sum_{u=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_u(R) \bar{F}_u(Z) \quad \text{Inversa} \quad (4.10a)$$

$$\bar{F}_u(Z) = \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) F(R, Z) dR \quad \text{Transformada} \quad (4.10b)$$

4.3.1.3a Transformação do Problema Principal Eq. (4.4a)

O problema do filtro representado pela Eq. (4.4a) é transformado através do seguinte operador:

$$\int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) dR$$

Operando em ambos os lados da equação.

$$\int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial F}{\partial R} \right) dR + \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} dR = 0 \quad (4.11a)$$

Fazendo uso da fórmula da inversa, Eq. (4.10a), na Eq. (4.11a).

$$\begin{aligned} & \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \sum_{v=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_v(R) \bar{F}_v(Z) \right) dR \\ & + \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \sum_{v=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_v(R) \bar{F}_v(Z) dR = 0 \end{aligned} \quad (4.11b)$$

Organizando a Eq. (4.11b).

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{\infty} \bar{F}_v(Z) \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \tilde{\Lambda}_v(R)}{\partial R} \right) dR \\ & + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \bar{F}_v(Z)}{\partial Z^2} \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \tilde{\Lambda}_v(R) dR \end{aligned} \quad (4.11c)$$

Propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) \tilde{\Lambda}_v(R) dR = \begin{cases} 0, & \text{se } u \neq v \\ 1, & \text{se } u = v \end{cases}$$

Utilizando a equação do problema de autovalor, Eq. (4.5a), e aplicando a propriedade de ortogonalidade.

$$-\chi_u^2 \bar{F}_v(Z) + \frac{\partial^2 \bar{F}_v(Z)}{\partial Z^2} = 0 \quad (4.11d)$$

Também é necessário transformar as condições de contorno, Eq. (4.4b) e (4.4c). Os procedimentos para transformação das condições de contorno são os mesmos utilizados para a Eq. (4.4a). Com isso as condições transformadas são:

$$\bar{F}_v(0) = f(\tau) \int_0^1 R \tilde{\Lambda}_u(R) dR \quad (4.11e)$$

$$Bi_1 \bar{F}_v + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial Z} = 0 \quad \text{para } Z = 1 \quad (4.11f)$$

Logo temos o problema transformado do filtro, representado pelas Eq. (4.11d) à (4.11f).

4.3.1.4a Solução do Problema Transformado

O problema transformado possui solução analítica, representado pela seguinte expressão:

$$\bar{F}_v(Z) = c_1 e^{\chi_u Z} + c_2 e^{-\chi_u Z} \quad (4.12)$$

Em que:

$$c_1 = \frac{\bar{F}_v(0)(-Bi_1 + \chi_u)}{-Bi_1 + Bi_1 e^{2\chi_u} + \chi_u + \chi_u e^{\chi_u}}$$

$$c_2 = \bar{F}_v(0) - c_1$$

4.3.1.5a Recuperação do Potencial Original

A Eq. (4.12) será substituída na inversa, Eq. (4.10a), para termos a representação do filtro $F(R, Z)$.

$$F(R, Z) = \sum_{u=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_u(R) [c_1 e^{\chi_u Z} + c_2 e^{-\chi_u Z}] \quad (4.13)$$

Com o filtro determinado, as condições de contorno são homogeneizadas e podemos determinar a função $\theta F(R, Z, \tau)$, para obtermos o perfil de temperatura do problema em questão. Para a definição de $\theta F(R, Z, \tau)$, a Eq. (4.3a), será substituída na Eq. (4.2).

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta F}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta F}{\partial Z^2} = \frac{\partial \theta F}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \quad (4.14a)$$

Em que:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = f'(\tau) H(R, Z)$$

E as condições de contorno são as seguintes:

$$\theta F(R, 0, \tau) = 0 \quad (4.14b)$$

$$Bi_1 \theta F + \frac{\partial \theta F}{\partial Z} = 0; \quad \text{para } Z = 1 \quad (4.14c)$$

$$\frac{\partial \theta F(0, Z, \tau)}{\partial R} = 0 \quad (4.14d)$$

$$Bi_2 \theta F + \frac{\partial \theta F}{\partial Z} = 0; \quad \text{para } R = 1 \quad (4.14e)$$

$$\theta(R, Z, 0) = 1 - F(R, Z; 0) \quad (4.14f)$$

Novamente a GITT será aplicada, para se obter uma solução para a função $\theta F(R, Z, \tau)$, que por fim, será usada para determinação do campo de temperatura no cilindro.

4.3.1.1b Escolha do Problema de Autovalor

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{\psi_i(R)}{dR} \right] + \mu_i^2 \psi_i(R) = 0 \quad (4.15a)$$

$$\frac{d\psi_i}{dZ}(0) = 0 \quad (4.15b)$$

$$Bi_1 \psi_i + \frac{d\psi_i}{dZ} = 0, \quad \text{para } R = 1 \quad (4.15c)$$

A Eq. (4.15a) é um problema de Sturm-Liouville, em coordenadas cilíndricas, e juntamente com as condições de contorno, Eq. (4.15b) e (4.15c), possuem solução analítica (ÖZİŞİK, 1993), em que suas autofunções, normas e a autocondição são dados respectivamente por:

$$\psi_i(R) = J_0(\mu_i R) \quad (4.16)$$

$$N_i(\mu_i) = \frac{J_0^2(\mu_i)}{2} \frac{(Bi_2^2 + \mu_i^2)}{\mu_i^2} \quad (4.17)$$

$$\mu_i J_0'(\mu_i) + Bi_2 J_0(\mu_i) = 0 \quad (4.18)$$

$$\tilde{\psi}_i(R) = \frac{\psi_i(R)}{N_i^{1/2}} \quad (4.19)$$

O Problema de autovalor acima definido na forma acima permite estabelecer o par de transformada.

4.3.1.2b Desenvolvimento do Par-Transformado

$$\theta F(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(R) \overline{\theta F_i}(Z, \tau) \quad \text{Inversa} \quad (4.20a)$$

$$\overline{\theta F}_i(Z, \tau) = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \theta F(Z, \tau) dR \quad \text{Transformada} \quad (4.20b)$$

4.3.1.3b Transformação do Problema Principal Eq. (4.14a)

O problema representado pela Eq. (4.14a) é transformado através do seguinte operador:

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) dR$$

Operando em ambos os lados da equação, temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta F}{\partial R} \right) dR + \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial^2 \theta F}{\partial Z^2} dR \\ &= \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta F}{\partial \tau} dR + \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) [f'(\tau) H(R, Z)] dR \end{aligned} \quad (4.21a)$$

Aplicando a Inversa, Eq. (4.20a), e problema de autovalor, Eq. (4.15a) temos e organizando a Eq. (4.21a) pela propriedade de somatório:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} -\mu_i^2 \overline{\theta F}_j(Z, \tau) \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \overline{\theta F}_j(Z, \tau)}{\partial Z^2} \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \overline{\theta F}_j(Z, \tau)}{\partial \tau} \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR \\ &+ \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) [f'(\tau) H(R, Z)] dR \end{aligned} \quad (4.21b)$$

Propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade na Eq. (4.21b), temos:

$$-\mu_i^2 \overline{\theta F}_i(Z, \tau) + \frac{\partial^2 \overline{\theta F}_i(Z, \tau)}{\partial Z^2} = \frac{\partial \overline{\theta F}_i(Z, \tau)}{\partial \tau} + \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) [f'(\tau) H(R, Z)] dR \quad (4.21c)$$

Para obter todo o problema transformado, falta ainda transformar as condições de contorno, Eq. (4.14b) e (4.14c), e inicial, Eq. (4.14f). Será aplicado, o mesmo operador que foi utilizado para transformar a Eq. (4.14a), e a mesma propriedade de ortogonalidade e inversa.

$$\overline{\theta F}_i(0, \tau) = 0 \quad (4.21d)$$

$$Bi_1 \overline{\theta F}_i + \frac{\partial \overline{\theta F}_i}{\partial Z} = 0; \quad \text{para } Z = 1 \quad (4.21e)$$

$$\overline{\theta F}_i(Z, 0) = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) [1 - F(R, Z; 0)] dR \quad (4.21f)$$

O problema transformado foi desenvolvido, sendo representado pelas Eq. (4.21c) à (4.21f). A Eq. (4.21c) é uma EDP 2ª ordem bidimensional transiente. Logo, a GITT será aplicada novamente.

4.3.1.1c Escolha do Problema de Autovalor

$$\frac{\partial^2 \Gamma_m(Z)}{\partial Z^2} + \gamma_m^2 \Gamma(Z) = 0 \quad (4.22a)$$

$$\Gamma(0) = 0 \quad (4.22b)$$

$$Bi_1 \Gamma_m + \frac{d\Gamma_m}{dZ} = 0, \quad \text{para } Z = 1 \quad (4.22c)$$

A Eq. (4.22a) é um problema de Sturm-Liouville, e juntamente com as condições de contorno, Eq. (4.22b) e (4.22c), possuem solução analítica (ÖZİŞIK, 1993), em que suas autofunções, normas e autovalores são dados respectivamente por:

$$\Gamma_m(Z) = \text{sen}(\gamma_m Z) \quad (4.23)$$

$$N_m(\gamma_m) = 2 \frac{(\gamma_m^2 + Bi_1^2) + Bi_1}{\gamma_m^2 + Bi_1^2} \quad (4.24)$$

$$\gamma_m \cot(\gamma_m) = -Bi_1 \quad (4.25)$$

E a Autofunção Normalizada é dada por:

$$\tilde{\Gamma}_m(Z) = \frac{\Gamma_m(Z)}{N_i^{1/2}} \quad (4.26)$$

O Problema de autovalor acima definido na forma acima permite estabelecer o par de transformada.

4.3.1.2c Desenvolvimento do Par-Transformado

$$\overline{\theta F_i}(Z, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_m(Z) \overline{\theta F_{im}}(\tau) \quad \text{Inversa} \quad (4.27a)$$

$$\overline{\theta F_{im}}(\tau) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \overline{\theta F_i}(Z, \tau) dZ \quad \text{Transformada} \quad (4.27b)$$

4.3.1.3c Transformação do Problema Principal Eq. (4.21c)

O problema representado pela Eq. (4.21c) é transformado através do seguinte operador:

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) dZ$$

Operando em ambos os lados a equação.

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \mu_i^2 \overline{\theta F}_i(Z, \tau) dZ + \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \frac{\partial^2 \overline{\theta F}_i(Z, \tau)}{\partial Z^2} dZ \\ & = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \frac{\partial \overline{\theta F}_i(Z, \tau)}{\partial \tau} dZ + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \tilde{\psi}_i(R) [f'(\tau) H(R, Z)] dR dZ \end{aligned} \quad (4.28a)$$

Seguindo os mesmos passos feitos nas transformações anteriores. Aplicando a inversa, Eq. (4.27a), problema de autovalor, Eq. (4.22a), organizando a equação pela propriedade de somatório e inserindo a propriedade de ortogonalidade, na Eq. (4.28a), temos:

$$-(\mu_i^2 + \gamma_m^2) \overline{\overline{\theta F}}_{im}(\tau) = \frac{\partial \overline{\overline{\theta F}}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \tilde{\psi}_i(R) [f'(\tau) H(R, Z)] dR dZ \quad (4.28b)$$

Em que:

$$\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \tilde{\psi}_i(R) [f'(\tau) H(R, Z)] dR dZ = P(\tau)$$

Transformando a condição inicial, Eq. (4.21f), para obter o problema transformado.

$$\overline{\overline{\theta F}}_{im}(0) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(Z) \tilde{\psi}_i(R) [1 - F(R, Z; 0)] dR dZ \quad (4.28c)$$

4.3.1.4c Solução do Problema Transformado

O problema transformado, representado pelas Eq. (4.28b) e (4.28c), é uma EDO linear de 1ª ordem e possui solução analítica, representada pela expressão abaixo:

$$\overline{\overline{\theta F}}_{im}(\tau) = \left[\overline{\overline{\theta F}}_{im}(0) - \int_0^\tau P(\tau) e^{(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} d\tau \right] e^{-(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} \quad (4.29)$$

4.3.1.5c Recuperação do Potencial Original

Serão utilizadas as inversas, Eq. (4.20a) e Eq. (4.27a), para obter-se a expressão da função $\theta F(R, Z, \tau)$. A Eq. (4.29) será aplicada na Eq. (4.27a) e esta na Eq. (4.20a) sucessivamente.

$$\overline{\overline{\theta F}}_i(Z, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_m(Z) \left[\overline{\overline{\theta F}}_{im}(0) - \int_0^\tau P(\tau) e^{(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} d\tau \right] e^{-(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \theta F(R, Z, \tau) &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\Gamma}_m(Z) \left[\overline{\overline{\theta F}}_{im}(0) - \int_0^\tau P(\tau) e^{(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} d\tau \right] e^{-(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por fim, para obtenção da solução que representa o perfil de temperatura do problema bidimensional, a Eq. (4.13) e a Eq. (4.31), serão substituídas na Eq. (4.3), para explicitar a expressão que representa o comportamento da temperatura na barra em questão.

$$\begin{aligned} \theta(R, Z, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\Gamma}_m(Z) \left[\overline{\overline{\theta F}}_{im}(0) - \int_0^\tau P(\tau) e^{(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} d\tau \right] e^{-(\mu_i^2 + \gamma_m^2)\tau} \\ &+ \sum_{u=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_u(R) [c_1 e^{\chi_u Z} + c_2 e^{-\chi_u Z}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES

O desenvolvimento do trabalho teve o foco em desenvolver expressões, a partir da equação de difusão de calor, que representassem o comportamento da temperatura em uma barra cilíndrica submetida a uma oscilação de temperatura harmônica em sua superfície inferior. Para obtenção do campo de temperatura (θ) foi aplicada a técnica transformada integral generalizada (GITT).

Para solução do campo de temperatura e visualização dos resultados, o modelo matemático, que representa o fenômeno físico, foi implementado para simulação do problema proposto um código computacional no software Mathematica 8.0.

5.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

5.1.1 Convergência do modelo Unidimensional

Para o problema unidimensional foi feita a análise de convergência para o tempo $\tau = 0, 1, 5$ e 10 . Para $\tau = 0$, que representa a condição inicial do problema, é esperado que o campo de temperatura (θ) para qualquer posição (Z) forneça o valor por volta de 1, como é representado pela Tab. (5.1).

As constantes para modelagem do problema, número de Biot (Bi), frequência adimensional (Ω), foram assumidos os valores de 0,5 e 5 respectivamente.

A Tab. (5.1) mostra a convergência da temperatura ao longo do eixo Z da barra para $\tau = 0$. Observando-a, constata-se que os valores da temperatura para convergir ficam oscilando através de 1, considerando que para 30 autovalores a maioria dos termos, com exceção para $Z = 1$, já haviam convergido levando em conta 4 casas decimais, devido ao comportamento dos valores expressos na Tab. (5.1)

Tabela 5.1 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 0$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,1	1,012570	1,001980	1,000010	0,999999	1,000000	1,000000
0,2	1,023600	0,999863	0,999982	0,999998	0,999999	1,000000
0,3	1,031590	0,997833	1,000030	0,999996	1,000000	1,000000
0,4	1,035160	1,000340	0,999952	0,999994	0,999998	0,999999
0,5	1,033060	1,002640	1,000070	0,999990	1,000000	0,999999
0,6	1,024240	0,999202	0,999882	0,999984	0,999995	0,999998
0,7	1,007880	0,996305	1,000210	0,999972	1,000010	0,999996
0,8	0,983403	1,002380	0,999578	0,999939	0,999981	0,999992
0,9	0,950516	1,006260	1,001200	0,999789	1,000070	0,999969
1	0,909203	0,979849	0,989882	0,994936	0,996623	0,997467

Tabela 5.2 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 1$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	0,283662	0,283662	0,283662	0,283662	0,283662	0,283662
0,1	0,168136	0,104935	0,101302	0,101974	0,101841	0,101889
0,2	0,056177	-0,040262	-0,037517	-0,037865	-0,037905	-0,037915
0,3	-0,048766	-0,142817	-0,142183	-0,141835	-0,141889	-0,141872
0,4	-0,143481	-0,214289	-0,215767	-0,215982	-0,216004	-0,216010
0,5	-0,225101	-0,265583	-0,266171	-0,265934	-0,265969	-0,265957
0,6	-0,291199	-0,298121	-0,296551	-0,296714	-0,296730	-0,296734
0,7	-0,339868	-0,312767	-0,312787	-0,312596	-0,312624	-0,312615
0,8	-0,369791	-0,315819	-0,316878	-0,317018	-0,317032	-0,317036
0,9	-0,380279	-0,312534	-0,312707	-0,312534	-0,312559	-0,312551
1	-0,371296	-0,301980	-0,300661	-0,300794	-0,300807	-0,300811

Observando a Tab. (5.2), para $\tau = 1$, é notório a convergência com 30 autovalores para quatro casas decimais, uma quantidade de termos aceitável.

Adiante será observado como se comporta a convergência para os demais tempos adimensionais.

Tabela 5.3 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 5$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	0,991203	0,991203	0,991203	0,991203	0,991203	0,991203
0,1	0,828395	0,810295	0,809745	0,809839	0,809821	0,809827
0,2	0,669952	0,640759	0,641169	0,641119	0,641113	0,641112
0,3	0,520092	0,489130	0,489238	0,489287	0,489280	0,489282
0,4	0,382744	0,357214	0,356984	0,356953	0,356950	0,356949
0,5	0,261417	0,245556	0,245464	0,245498	0,245493	0,245495
0,6	0,159081	0,155182	0,155424	0,155401	0,155398	0,155398
0,7	0,078066	0,086490	0,086491	0,086518	0,086514	0,086515
0,8	0,019986	0,038498	0,038330	0,038310	0,038308	0,038308
0,9	-0,014317	0,010013	0,009987	0,010012	0,010009	0,010010
1	-0,024800	0,000569	0,000773	0,000754	0,000752	0,000752

Tabela 5.4 – Análise de convergência para o modelo unidimensional com $\tau = 10$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	0,964966	0,964966	0,964966	0,964966	0,964966	0,964966
0,1	0,795649	0,769616	0,768577	0,768763	0,768726	0,768739
0,2	0,630945	0,589755	0,590535	0,590438	0,590427	0,590424
0,3	0,475313	0,432820	0,433012	0,433109	0,433094	0,433099
0,4	0,332905	0,298845	0,298416	0,298356	0,298350	0,298348
0,5	0,207429	0,186777	0,186606	0,186672	0,186662	0,186665
0,6	0,102024	0,097387	0,097839	0,097794	0,097790	0,097789
0,7	0,019154	0,030934	0,030932	0,030985	0,030978	0,030980
0,8	-0,039476	-0,014398	-0,014708	-0,014747	-0,014751	-0,014752
0,9	-0,072976	-0,040479	-0,040528	-0,040480	-0,040487	-0,040484
1	-0,081301	-0,047608	-0,047226	-0,047263	-0,047267	-0,047268

Para as Tab. (5.3) e (5.4), observa-se o mesmo comportamento descrito para a Tab. (5.2), convergindo para 20 termos com quatro casas decimais.

Para um melhor entendimento do fenômeno físico que ocorre na barra cilíndrica será apresentado um gráfico representando o campo de temperatura por toda a superfície do cilindro, ao longo do tempo (τ), utilizando apenas os valores reais de θ , sendo obedecidas as condições de contorno impostas ao problema.

Observando a Fig. (5.1), podem ser verificadas as condições de contorno e inicial, Eq. (3.2b) e (3.2d), que foram utilizadas para a solução do problema no Capítulo III. A condição inicial sendo representada pela reta, com $\theta = 1$, em $\tau = 0$, para qualquer Z . A oscilação térmica também é facilmente observada, como por exemplo, escolhendo arbitrariamente $Z = 1$ (poderia ser qualquer outro valor de Z , pois o comportamento oscilatório é por toda barra, havendo apenas a variação da amplitude da temperatura), e com a variação de τ , o perfil ondulatório é visto na face frontal da figura. Por fim, o decaimento da temperatura ao longo de Z nos trás as informações inerentes a convecção imposta em $Z = 1$.

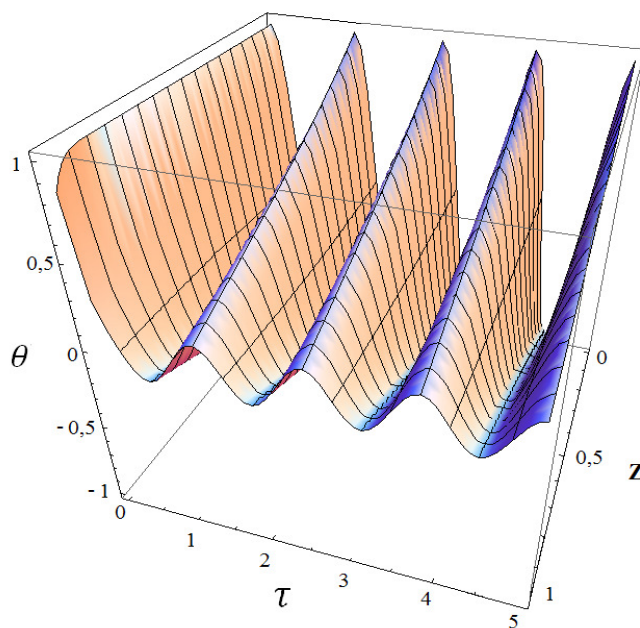


Figura 5.1 – Distribuição de temperatura.

5.1.2 Convergência do modelo Bidimensional

O desenvolvimento da simulação para o modelo bidimensional foi utilizado os mesmos valores das constantes que foram aplicadas no problema unidimensional.

Para a condição de contorno de terceiro tipo (convecção) na superfície lateral do cilindro, o número de Biot (Bi_2) foi determinado como igual a zero, assim induzindo um isolamento térmico, nessa superfície, isto é, um fluxo de calor nulo, aproximando a solução do campo de temperatura do problema bidimensional para uma representação do campo de temperatura unidimensional.

Do mesmo modo a Tab. (5.5), mostra a convergência da temperatura ao longo do eixo do cilindro, variando a coordenada Z , para $\tau = 0$, pois é a condição inicial do problema, e para qualquer posição a temperatura $\theta(R, Z, 0) = 1$.

Tabela 5.5 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 0$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,1	1,012570	1,001980	1,000010	0,999999	1,000000	1,000000
0,2	1,023600	0,999863	0,999982	0,999998	0,999999	1,000000
0,3	1,031590	0,997833	1,000030	0,999996	1,000000	1,000000
0,4	1,035160	1,000340	0,999953	0,999994	0,999998	0,999999
0,5	1,033060	1,002640	1,000070	0,999990	1,000000	0,999999
0,6	1,024240	0,999202	0,999882	0,999984	0,999995	0,999998
0,7	1,007880	0,996305	1,000210	0,999972	1,000010	0,999996
0,8	0,983403	1,002380	0,999578	0,999939	0,999981	0,999992
0,9	0,950516	1,006260	1,001200	0,999789	1,000070	0,999969
1	0,909203	0,979849	0,989882	0,994936	0,996623	0,997467

Verifica-se pela Tab. (5.5) que a convergência para o modelo bidimensional para quatro casas decimais ocorre com 30 autovalores (com exceção para o valor de $Z = 1$), ou seja, com relação ao modelo unidimensional apresentou a mesma taxa de convergência.

Do mesmo modo que foi feito para o modelo unidimensional, serão apresentadas as tabelas com $\tau = 1, 5$ e 10, para o modelo bidimensional, expressando os valores da temperatura (θ).

Tabela 5.6 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 1$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	0,283662	0,283662	0,283662	0,283662	0,283662	0,283662
0,1	0,185167	0,145289	0,142891	0,143339	0,143251	0,143282
0,2	0,089666	0,029533	0,031360	0,031129	0,031102	0,031095
0,3	0,000054	-0,057344	-0,056948	-0,056716	-0,056751	-0,056740
0,4	-0,080972	-0,122802	-0,123780	-0,123924	-0,123939	-0,123943
0,5	-0,151005	-0,173663	-0,174026	-0,173867	-0,173891	-0,173883
0,6	-0,208008	-0,210328	-0,209296	-0,209405	-0,209416	-0,209419
0,7	-0,250382	-0,232847	-0,232897	-0,232768	-0,232787	-0,232781
0,8	-0,277018	-0,244722	-0,245390	-0,245485	-0,245495	-0,245497
0,9	-0,287340	-0,248377	-0,248463	-0,248342	-0,248359	-0,248354
1	-0,281318	-0,242072	-0,241267	-0,241365	-0,241375	-0,241378

Tabela 5.7 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 5$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	0,991203	0,991203	0,991203	0,991203	0,991203	0,991203
0,1	0,848926	0,837679	0,837317	0,837380	0,837367	0,837372
0,2	0,710323	0,692350	0,692623	0,692590	0,692586	0,692585
0,3	0,578945	0,560167	0,560234	0,560267	0,560262	0,560264
0,4	0,458100	0,442926	0,442774	0,442753	0,442751	0,442751
0,5	0,350741	0,341597	0,341540	0,341562	0,341559	0,341560
0,6	0,259369	0,257446	0,257605	0,257589	0,257588	0,257587
0,7	0,185944	0,191269	0,191264	0,191283	0,191280	0,191281
0,8	0,131825	0,142889	0,142783	0,142769	0,142768	0,142768
0,9	0,097722	0,111934	0,111922	0,111939	0,111937	0,111937
1	0,083671	0,098370	0,098495	0,098481	0,098480	0,098480

Observando os valores do campo de temperatura das Tab. (5.6) e (5.7) desenvolvido para o modelo bidimensional, possuem a mesma taxa de convergência que foi apresentada para os valores do modelo unidimensional, convergindo com 20 termos,

sendo considerada uma taxa de convergência razoável, para uma precisão de quatro casas decimais. O mesmo comportamento é observado para a Tab. (5.10), que segue logo abaixo, para $\tau = 10$.

Tabela 5.8 – Análise de convergência para o modelo bidimensional com $\tau = 10$.

Z	NT = 1	NT = 5	NT = 10	NT = 20	NT = 30	NT = 40
0	0,964966	0,964966	0,964966	0,964966	0,964966	0,964966
0,1	0,817348	0,801085	0,800399	0,800523	0,800498	0,800507
0,2	0,673613	0,648145	0,648663	0,648599	0,648591	0,648590
0,3	0,537515	0,511691	0,511812	0,511876	0,511866	0,511869
0,4	0,412548	0,392341	0,392058	0,392018	0,392013	0,392012
0,5	0,301835	0,290027	0,289922	0,289966	0,289959	0,289961
0,6	0,208018	0,205890	0,206187	0,206157	0,206154	0,206153
0,7	0,133170	0,140676	0,140664	0,140699	0,140694	0,140696
0,8	0,078727	0,093720	0,093525	0,093498	0,093496	0,093495
0,9	0,045438	0,064333	0,064308	0,064342	0,064337	0,064339
1	0,033341	0,052731	0,052965	0,052937	0,052935	0,052934

Com as tabelas expressas, para ambos os modelos, unidimensional e bidimensional, e para o tempo $\tau = 0, 1, 5$ e 10 , podemos comparar os resultados obtidos como solução para o campo de temperatura, e gerar gráficos dos resultados unidimensionais versus bidimensionais.

5.2 RESULTADOS UNIDIMENSIONAIS VERSUS BIDIMENSIONAIS

Agora serão plotados gráficos da temperatura ao longo do tempo, superpondo as curvas unidimensionais contra as bidimensionais, para observação do comportamento de ambos os modelos desenvolvidos.

BEJAN (1993), afirma que para um disco, se sua espessura é muito menor do que o raio do cilindro, o problema pode ser tratado como unidimensional. Da mesma forma BHATTACHARYA *et al* (2006), para otimização de seu experimento, relata que a teoria

da transferência de calor por condução requer que a relação entre o diâmetro e a espessura deve ser muito maior que 1, para que o modelo seja considerado unidimensional.

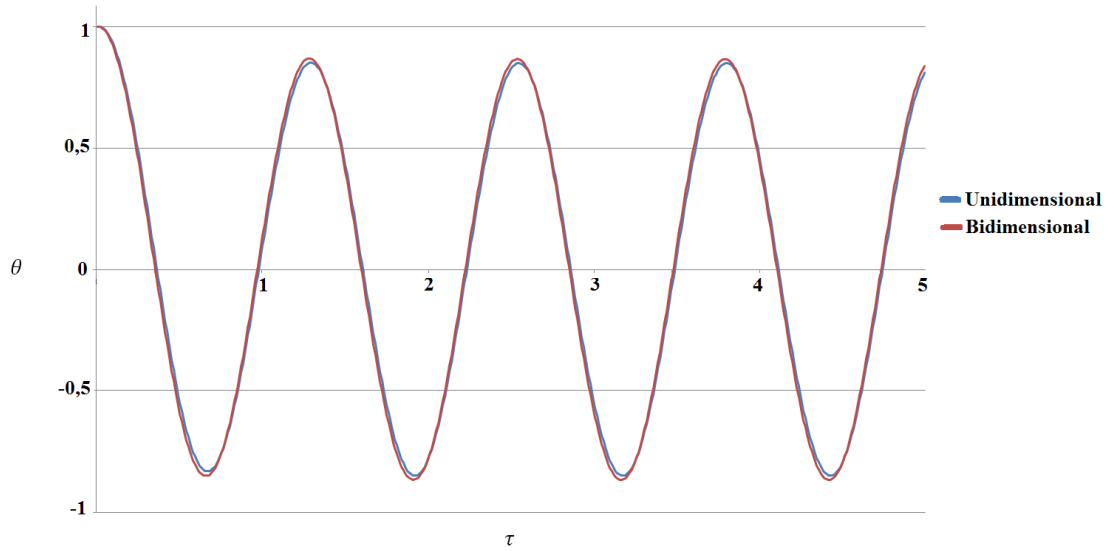


Figura 5.2 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 0,1$.

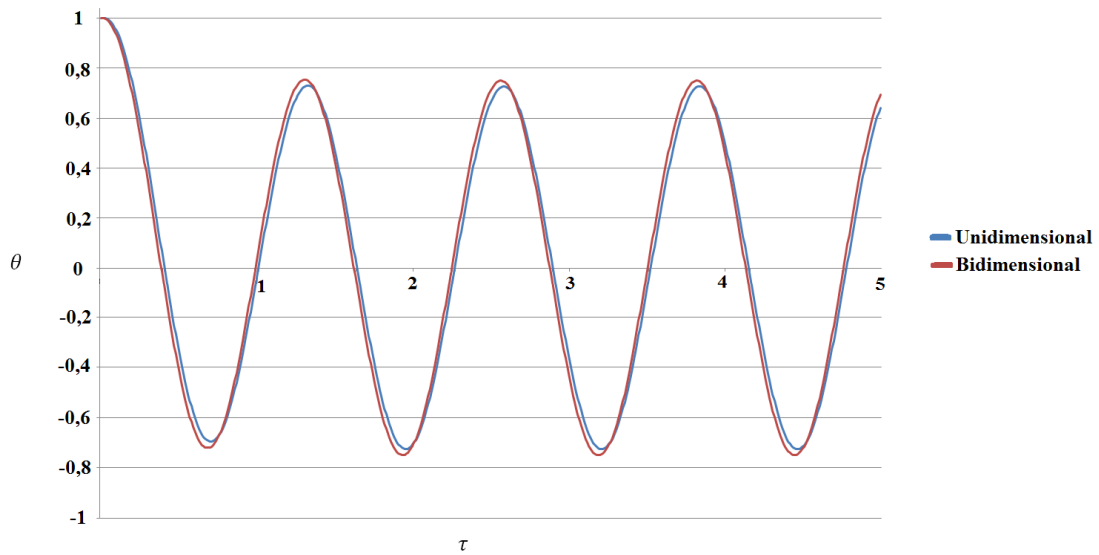


Figura 5.3 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 0,2$.

Observando a Fig. (5.2) e comparando-a com a Fig. (5.3), já é notável um leve deslocamento da curva unidimensional com relação a bidimensional, confirmando a teoria relatada acima, já que Z é uma relação entre a espessura e o raio do cilindro.

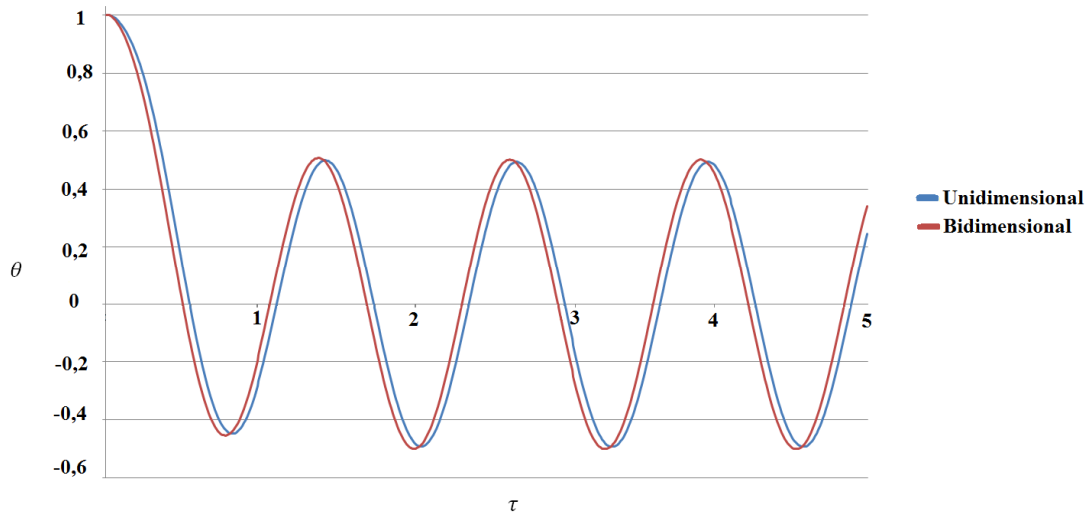


Figura 5.4 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 0,5$.

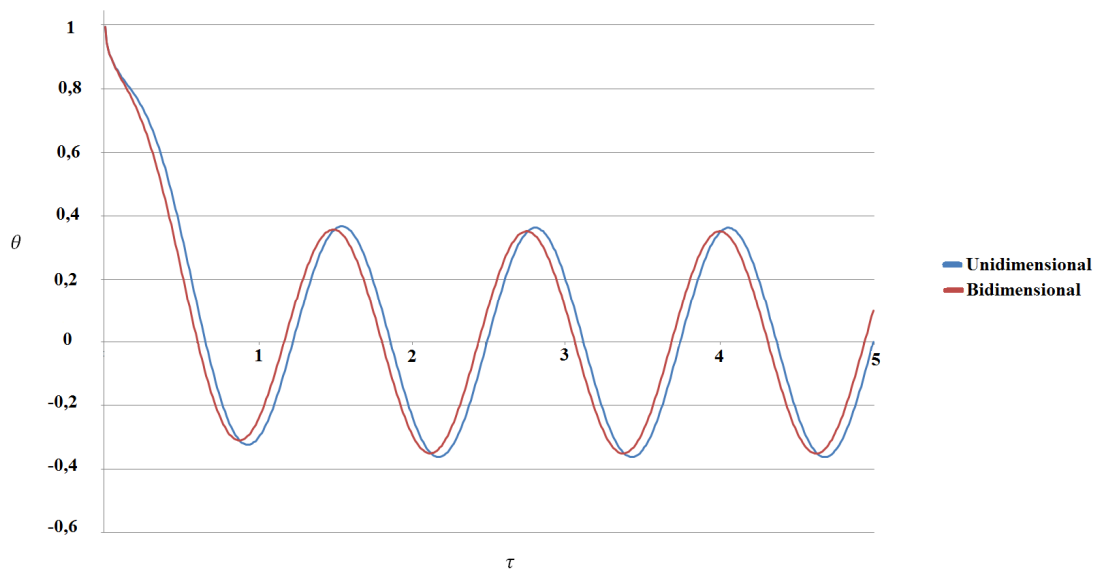


Figura 5.5 – Curva θ vs. τ , unidimensional vs. bidimensional para $Z = 1$.

À medida que se aumentou a espessura do disco com relação ao raio foi notório o afastamento dos resultados do modelo unidimensional em virtude do bidimensional,

confirmando a teoria de que a aplicação da condução unidimensional só deve ser utilizada para quando a espessura da placa seja bem menor do que a distancia até o centro da mesma.

Também foi possível observar uma diminuição da amplitude com a variação de Z, isso devido ao fato da condição de contorno do 3º tipo imposta na superfície superior da placa.

Por fim, para validação do modelo desenvolvido, os resultados teóricos obtidos neste trabalho serão comparados com os resultados experimentais aferidos por BHATTACHARYA *et al* (2006).

5.3 VALIDAÇÃO DO MODELO

Para validação do modelo bidimensional, com o intuito de se obter a representação dos resultados obtidos no experimento do referido autor, foram utilizados os mesmos parâmetros:

$$k = 0,6 \frac{W}{m K} \quad ; \quad \rho = 998,4 \frac{kg}{m^3} \quad ; \quad c_p = 4,183 \frac{kJ}{kg K} ;$$

$$l = 5 mm \quad ; \quad t_p = 1024 s \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{t_p}$$

Os resultados obtidos pelo modelo foram sobrepostos em mesma escala nos resultados experimentais obtidos por BHATTACHARYA *et al* (2006), nos fornecendo a Fig. (5.6). A curva representada por diversos pontos dispersos em vermelho, azul e verde, são os dados de aquisição experimental, onde o próprio autor afirma não haver mudança de fase, como se observa pelo gráfico. A curva em verde limão foi a obtida pelo modelo matemático bidimensional simulado no Mathematica, para a mesma posição em $z = 0$. Logo é possível observar que o resultado é bastante satisfatório, pois, foi obtido mesma amplitude, fase e período que os dados experimentais expostos, ou seja, validando o modelo bidimensional desenvolvido neste trabalho.

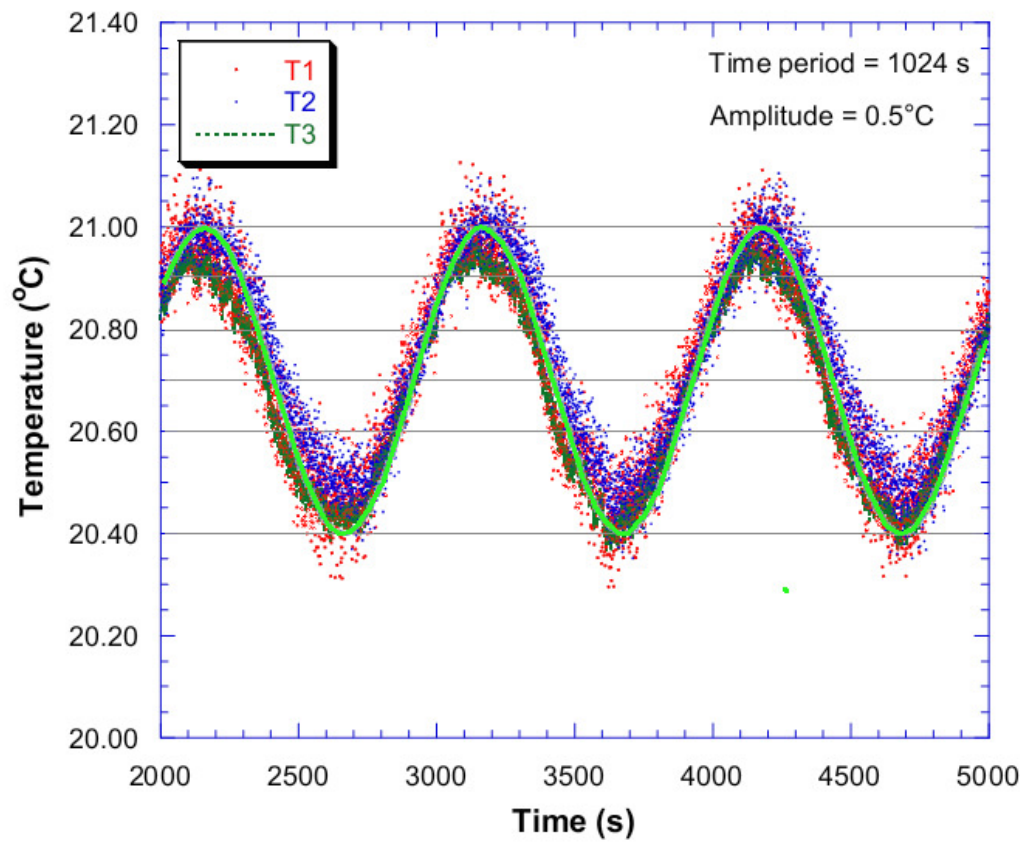


Figura 5.6 – Curva experimental vs. curva do modelo.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho teve como objetivo analisar a equação diferencial da difusão de calor, submetido a uma condição de contorno em que a temperatura sofre oscilações harmônicas, para determinação do seu perfil através da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT), e os resultados obtidos, sendo resultados de referência, fornecem subsídios e contribuem como parâmetros comparativos para a técnica de oscilações térmicas.

A aplicação da técnica transformada integral para obtenção do campo de temperatura unidimensional quanto o bidimensional se mostrou uma ferramenta bastante eficaz, pois o perfil de temperatura foi desenvolvido com êxito após a modelagem ser simulada computacionalmente, em que todas as condições de contorno impostas ao problema são visivelmente atendidas.

Para avaliar o modelo unidimensional com relação ao bidimensional, reproduzindo o comportamento do primeiro por uma aproximação do segundo, assumindo o número de Biot igual à zero, na condição de contorno do terceiro tipo na superfície lateral do cilindro, induzindo a um fluxo de calor nulo na parede, foi possível concluir, que o modelo unidimensional só é aplicável para discos muito finos, ou seja, a espessura do cilindro deve representar 10 % do raio do mesmo, de outra forma é aconselhável aplicar o modelo bidimensional, pois caso contrário verifica-se um distanciamento dos resultados considerável, devido ao fato de que modelo bidimensional possui maiores informações inerentes ao problema físico do que o unidimensional.

O mais importante deste trabalho se observa com a sobreposição dos resultados, os experimentais com os teóricos, que nos mostram que o modelo desenvolvido foi validado, devido a semelhança das curvas do campo de temperatura para $z = 0$, apresentando mesma amplitude, período e fase, utilizando os mesmo parâmetros que foram aplicados do aparato experimental.

Como sugestão para possíveis trabalhos futuros, para dar continuidade a mesma linha de pesquisa, pode ser desenvolvido um aparato experimental para reprodução do fenômeno e fazer uma melhor análise, podendo ser estendido para aplicação do método inverso e também caracterizar termicamente, determinando algumas propriedades como condutividade, difusividade, de algum material que seja de interesse para estudo.

Outro ponto importante seria o desenvolvimento de um modelo tridimensional do mesmo fenômeno, para ver como seria o comportamento da temperatura e se haveria semelhança com os resultados obtidos mesmo em uma configuração diferente do aparato experimental. E também, verificar o estudo para generalização de filtros para as soluções, verificando se haveria uma melhora na taxa de convergência dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-HAMID, Bishri, 1999, “Modelling non-Fourier Heat Conduction With Periodic Thermal Oscillation Using the Finite Integral Transform”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. (23), pp. 899-914.
- ANTAKI, Paul J., 1996, “Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi-infinite slab with surface convection”, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 40, n. 13 (Out), pp. 3247-3250.
- BEHERA, Pritinika, 2009, “Analysis of Transient Heat Conduction in Different Geometries”, Ms.D dissertation, National Institute of Technology, Rourkela, Orissa, India.
- BEJAN, Adrian, 1993, *Heat Transfer*, New York, John Wiley & Sons.
- BHATTACHARYA, P., NARA, S., VIJAYAN, P., TANG, T., LAI, W., PHELAN, P.E., PRASHER, R.S., SONG, D.W., WANG, J., 2006, “Characterization of the temperature oscillation technique to measure the thermal conductivity of fluids”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 2950–2956.
- BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C., 2010, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 9ª ed. Rio de Janeiro, LTC.
- ÇENGEL, Yunus A., 2006, *Transferência de Calor e Massa*, 3ª ed., McGraw-Hill.
- COLE, Kevin D., 2009, "Steady-Periodic Heating of a Cylinder", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 131, n. 9 (Set).

- COSSALI, G.E., 2008, “Periodic Heat Conduction in a solid Homogeneous Finite Cylinder”, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, pp. 722–732.
- COTTA, R. M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, Boca Raton, FL, EUA, CRC Press.
- COTTA, R. M., 1997, *Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*, New York, John Wiley & Sons.
- COTTA, R. M., 1998, *The Integral Transforms Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering*, New York, Begell House.
- DOUGLAS JR., J., RACHFORD JR., H. H., 1956, “On The Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two a Three Space Variables”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 82, n. 2 (Jul), pp. 421-439.
- FRANKEL, J. I., VICK, Brian, M. N. ÖZİŞİK, 1986, “General Formulation and Analysis of Hyperbolic Heat Conduction in Composite Media”, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 30, n. 7 (Out), pp. 1293-1305.
- GE SU, ZHENG TAN, JIAN SU, 2007, “Improved Lumped Models for Transient Heat Conduction in a Slab with Temperature-Dependent Thermal Conductivity”, *Applied Mathematical Modelling*, pp. 274–283.
- INCROPERA, Frank P., DE WITT, David P., BERGMAN, Theodore L., LAVINE, Adrienne S., 2008, *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*, 6ª ed. LTC.
- KREITH, Frank, MANGLIK, Raj M., BOHN, Mark S., 2011, *Principles of Heat Transfer*, 7th ed., Cengage Learning.

- MIKHAILOV, M. D., COTTA, R. M., 1997, “Steady-Periodic Hyperbolic Heat Conduction in a Finite Slab”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, n. 5, pp. 725-731.
- MIKHAILOV, M. D. e ÖZİŞİK, M. N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, New York, John Wiley.
- MONTE, F. de, 1999, “Transient Heat Conduction in One-Dimensional Composite Slab. A ‘Natural’ Analytic Approach”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3607-3619.
- MONTEIRO, Evaldiney R., MACÊDO, Emanuel N., QUARESMA João N.N., COTTA, Renato M., “Integral Transform Solution for Hyperbolic Heat Conduction in a Finite Slab”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 297 –303.
- OSTROGORSKY, A. G., “Transient Heat Conduction in Spheres for $Fo < 0.3$ and Finite Bi ”, *Heat Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 1557–1562.
- ÖZİŞİK, M. Necati, 1993, *Heat Conduction*, 2nd ed., Jonh Wiley & Sons.
- ÖZİŞİK, M. N., MURRAY, R. L., 1974. “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions Parameters”, *Journal Heat Transfer*, Vol. 96, pp. 48-51.
- REGIS, Clarissa R., COTTA, Renato M., JIAN SU, 2000, “Improved Lumped Analysis of Transient Heat Conduction in a Nuclear Fuel Rod”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, n. 3, pp. 357-366.
- REIS, M. C. L., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., “Improved Lumped-Differential Formulations in Hyperbolic Heat Conduction”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, n. 7, pp. 965-974.

SADAT, H., 2004, “A General Lumped Model for Transient Heat Conduction in One-Dimensional Geometries”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, pp. 567–576.

SADAT, H., 2006, “A Second Order Model for Transient Heat Conduction in a Slab with Convective Boundary Conditions”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 26, pp. 962–965.

TEIXEIRA M.G., RINCON, M.A., LIU, I.-S., “Numerical Analysis of Quenching – Heat Conduction in Metallic Materials”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, pp. 2464–2473.