



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
- Mestrado - Doutorado -

ANÁLISE ESTÁTICA DE DUTOS ENTERRADOS PELO ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

Raimundo Aprício de Menezes Júnior

***Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do grau de Doutor***

M543a Menezes Junior, Raimundo Aprigio de.
Análise estática de dutos enterrados pelo acoplamento
entre o método dos elementos finitos e o método dos
elementos de contorno / Raimundo Aprigio de Menezes
Junior.-- João Pessoa, 2012.
208f. : il.
Orientador: Ângelo Vieira Mendonça
Tese (Doutorado) – UFPB/CT
1. Engenharia Mecânica. 2. Elementos finitos -
métodos. 3. Elementos de Contorno - métodos. 4.
AutoCad.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

RAIMUNDO APRIGIO DE MENEZES JUNIOR

**ANÁLISE ESTÁTICA DE DUTOS ENTERRADOS PELO
ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação de Engenharia mecânica da universidade federal da Paraíba como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Professor Dr. Ângelo Vieira Mendonça.

João Pessoa – Paraíba

Outubro, 2012

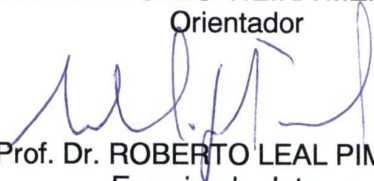
ANÁLISE ESTÁTICA DE DUTOS ENTERRADOS PELO ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

RAIMUNDO APRÍGIO DE MENEZES JÚNIOR

*Tese aprovada em 30 de outubro de 2012
Período letivo 2012.2*


Prof. Dr. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA
Orientador


Prof. Dr. ROBERTO LEAL PIMENTEL
Examinador Interno


Prof. Dr. JOÃO BOSCO DE AQUINO SILVA
Examinador Interno


Prof. Dr. ROMULO ADOLFO HERINGER FERREIRA
Examinador Externo


Prof. Dr. NORMANDO PERAZZO BARBOSA
Examinador Externo

DEDICATÓRIA

Para os amigos e familiares presentes e ausentes que incentivaram esta conquista pessoal.

Para minha Filha Júlia Albert de Menezes.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, poder eterno que concede através da fé a força necessária para superar os obstáculos presentes na sinuosa jornada de todo ser humano.

Ao Professor Dr. Ângelo Vieira Mendonça, por seus conselhos, companheirismo e paciente direcionamento durante os anos de orientação, desde a iniciação científica e continuados com a pós-graduação, em especial durante os trabalhos de elaboração da pesquisa que resultou nesta tese.

Estendo também meus agradecimentos a todos os Professores e funcionários que fazem o Laboratório de Ensaios Mecânicos de Estruturas (LABEME), ao Departamento de Engenharia Civil e Ambiental (DECA), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da Universidade Federal da Paraíba – UFPB e aos colegas de docência do Núcleo de Tecnologia da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, por contar com a amizade e auxílio sempre que foi necessário.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo importante apoio financeiro (advindo dos impostos pagos pelo povo Brasileiro), que me foi dado durante todos estes anos de pesquisa.

Muito Obrigado.

***“A mente que se abre para uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original”***

Albert Einstein

ANÁLISE ESTÁTICA DE DUTOS ENTERRADOS PELO ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

RESUMO

Neste trabalho aborda-se a análise da interação solo-estrutura para modelagem de problemas de dutos em regime estático através do acoplamento entre o método dos Elementos Finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC). A representação do duto homogêneo ou laminado é feita pelo MEF utilizando-se dois elementos finitos na forma de um painel cilíndrico: O primeiro foi desenvolvido a partir do modelo isotrópico homogêneo proposto inicialmente por Djoudi e Bahai, que utiliza a filosofia do modelo de deformações assumidas (Assumed Strain Based Model). O segundo foi proposto por Reddy e é baseado na teoria de camadas equivalentes discretas (Layerwise Theory). O solo é admitido ser um contínuo elástico infinito ou semi-infinito e modelado pelo MEC onde elementos de contorno especiais são propostos com superfície curva ou bordos curvos para representar a interação solo-estrutura principalmente nas superfícies de contato com o duto. Além da representação matemática do modelo da interação solo-estrutura, é proposta uma biblioteca DLL (Dynamic Link Library) escrita utilizando-se a filosofia de programação orientada a objetos (POO) para o processamento de problemas de interação solo estrutura e um ambiente amigável ao usuário construído a partir da biblioteca ObjectARX para customização do AutoCAD.

Palavras-chave: Elementos finitos, Elementos de Contorno, AutoCad.

STATIC ANALYSIS OF BURIED PIPES USING COUPLING BETWEEN FINITE ELEMENT METHOD AND BOUNDARY ELEMENT METHOD

ABSTRACT

This work deals with the analysis of soil-structure interaction modeling of pipeline problems in static behavior using the coupling between Finite Element Method (FEM) and Boundary Element Method (BEM). The representation of the pipe is made by MEF using two finite elements in the cylindrical panel: The first, formulated from the classical theory of cylindrical shells by assumptions of Donnel and initially proposed by Djoudi & Bahai, using the Assumed Strain Based Model. The second formulated from the theory of equivalent discrete layers (Layerwise Theory), proposed by J. N. Reddy. The soil is represented by elastic continuum infinite or semi-infinite and modeled using boundary elements with special curved surface, associated with cylindrical panel, used to represent the soil-structure interaction within the soil, especially at the contact surface with the pipe. Besides the mathematical representation of the model, this work propose a library DLL (Dynamic Link Library) written using the object-oriented programming (OOP) for processing soil structure interaction problems and a user-friendly environment built using the ObjectARX library for customizing AutoCAD.

Keywords: Finite Elements, Boundary Elements, AutoCad.

SUMÁRIO

RESUMO	VI
ABSTRACT	VII
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XVI
Capítulo I	1
1.1 – MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	1
1.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.3 – OBJETIVO DO TRABALHO	18
1.4 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	18
Capítulo II.....	20
2.1 – INTRODUÇÃO.....	20
2.2 – RELAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DE COMPÓSITOS LAMINADOS	20
2.2.1 - SIMETRIAS CONSTITUTIVAS.....	23
2.2.1.1 - MATERIAL MONOCLÍNICO	23
2.2.1.2 - MATERIAL ORTÓTROPO	23
2.2.1.3 - MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO	24
2.2.1.4 - MATERIAL ISOTRÓPICO.....	24
2.2.2 - ESTADO PLANO DE TENSÃO (EPT)	25
2.2.3 – TRANSFORMAÇÃO CONSTITUTIVA	26
2.3.1 – TEORIA DE CASCA CILÍNDRICA.....	34
2.3.2 – RELAÇÕES CINEMÁTICAS.....	38
2.3.3 – TEORIA DE CASCAS CILÍNDRICAS ABATIDAS.....	40
2.3.4 - SOLUÇÕES DO MEF EM CASCAS CILINDRICAS ABATIDAS	40
2.3.5 - TEORIA CLÁSSICA	41
2.3.6 - TEORIA DE CASCAS CILINDRICAS ABATIDAS DE DONNEL.....	41
2.3.7 - RELAÇÕES CINEMÁTICAS	42
2.3.8 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	43
2.3.9 – PROPOSTA DO ELEMENTO CYS LAMINADO	45
2.3.10 – VETOR NODAL EQUIVALENTE	54

2.3.12 - CAMPO DE DESLOCAMENTOS.....	65
2.3.13 - RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	66
2.3.14 - VARIAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	67
2.3.15 – MATRIZ DE RIGIDEZ	70
2.3.16 – VETOR NODAL EQUIVALENTE	75
Capítulo III.....	81
3.1– INTRODUÇÃO	81
3.2– RELAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA CLÁSSICA	82
3.3- PROBLEMAS FUNDAMENTAIS E SUAS SOLUÇÕES.....	88
3.3.1 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN.....	91
3.3.2 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN	92
3.4 – EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO (GLOBAL).....	98
3.4.1 - PONTOS DE CONTORNO.....	100
3.5 – EQUAÇÕES INTEGRAIS EM COORDENADAS LOCAIS	102
3.6 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	104
3.6.1 - DISCRETIZAÇÕES	105
3.7 – INTERPOLAÇÕES DA GEOMETRIA E VARIÁVEIS.....	108
3.7.1 – ELEMENTOS DE CONTORNO USUAIS	110
3.7.2 – ELEMENTOS DE CONTORNO ESPECIAIS.....	110
Capítulo IV	115
4.1– INTRODUÇÃO	115
4.2– INTERFACE SOLO-DUTO	123
4.3– INTERFACE SOLO-DUTO-RADIE.....	126
Capítulo V.....	133
5.1 – INTRODUÇÃO.....	133
5.2 –A PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS E O C++.....	134
5.3 – A NOVA BIBLIOTECA SAPROMS.DLL (VERSÃO V2.0.2012).....	135
5.4 – PROGRAMANDO OS ELEMENTOS FINITOS DO DUTO	136
5.4.1 – ELEMENTO FINITO DE CASCA CILINDRICA CYS	136
5.4.2 – ELEMENTO FINITO DE CASCA CILINDRICA RLS	137
5.5 – PROGRAMANDO OS ELEMENTOS DE CONTORNO DO SOLO.....	139
5.5.1 - ELEMENTO DE CONTORNO TRIANGULAR.....	139
5.5.2 - ELEMENTO PAINEL CILINDRICO	140

5.5.3 - ELEMENTO SETORIAL PLANO	141
5.5.4 - ELEMENTO DISCOIDE	142
5.5.5 - PROCESSOS DE INTEGRAÇÃO	142
5.5.6 - INTEGRAL NÃO SINGULAR.....	143
5.5.7 - INTEGRAL QUASE SINGULAR E QUASE HIPER-SINGULAR	143
5.5.8 - INTEGRAL SINGULAR.....	144
5.5.9 - ESQUEMA DO PROGRAMA DE ELEMENTOS DE CONTORNO	144
5.5.10 – ACOPLAMENTO MEC-MEF	146
5.6 – AMBIENTE AMIGÁVEL PARA MODELAGEM E ANÁLISE	147
5.6.1 – O SOFTWARE AUTOCAD E A BIBLIOTECA OBJECTARX.....	148
5.6.2 – CONTEÚDO DE UMA APLICAÇÃO OBJECTARX	151
5.6.3 – UTILIZANDO A BIBLIOTECA SAPROMS.DLL NO AUTOCAD	156
5.6.4 – UTILIZANDO O AMBIENTE AMIGÁVEL	157
5.6.4.1 – GERAÇÃO PARAMÉTRICA DO MODELO	157
5.6.4.2 – APLICANDO CONDIÇÕES DE CONTORNO E FORÇAS.....	159
5.6.4.3 – INFORMANDO PROPRIEDADES MECÂNICAS.....	162
5.6.4.4 – PROCESSAMENTO DA ANÁLISE NUMÉRICA.....	162
Capítulo VI	165
6.1 – INTRODUÇÃO.....	165
6.2 – EXEMPLOS DE ANÁLISE DE DUTOS	166
6.2.1 – CASCA CILINDRICA PINÇADA (PINCHED SHELL)	166
6.2.2 – TELHADO DE SCORDELIS (SCORDELIS ROOF).....	170
6.2.3 – CASCA CILINDRICA ORTÓTropa SOB PRESSÃO CONSTANTE	173
6.2.4 – TANQUE ESBELTO CHEIO	176
6.3 – EXEMPLOS DE ANÁLISE DO SOLO.....	179
6.3.1 – ANÁLISE DE UM SÓLIDO CÚBICO	179
6.3.2 – ANÁLISE DE UM SÓLIDO CILINDRICO	181
6.4.1 – ANÁLISE DE UM DUTO DE BAIXA PROFUNDIDADE	183
Capítulo VII.....	186
7.1 – OBSERVAÇÕES FINAIS.....	186
7.2 – PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	188
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	189

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Dutos Enterrados	3
Figura 2 - Classe Unidimensional.....	4
Figura 3 - Classe bidimensional.....	5
Figura 4 - Classe Tridimensional.....	6
Figura 5 - Discretização 1D do problema	7
Figura 6 - Discretização 2D do problema (a) MEF, (b) MEC	8
Figura 8 – Soluções Matemáticas.	9
Figura 9 – Casca Cilíndrica Laminada.....	21
Figura 10 - Lâmina no sistema de coordenadas Local do material e Global do problema	21
Figura 11 – Rotação positiva do sistema de eixos 0xy para o sistema 0123.....	30
Figura 12 – Relação R / L em Cascas Cilíndricas	35
Figura 13 – Elemento Diferencial de Casca Cilíndrica	36
Figura 14 – Esforços do regime de membrana.....	37
Figura 15 – Esforços do regime de flexão	37
Figura 16 – Sistema de Coordenadas da Casca Cilíndrica	43
Figura 17 – Detalhes geométricos das camadas no laminado	44
Figura 18 – Graus de Liberdade da casca	46
Figura 19 – Funções de Forma do Elemento de Casca Cilíndrica.	56
Figura 20 – Carregamento Hidrostático Radial.	59
Figura 21 – Carregamento Hidrostático Vertical.....	60
Figura 22 – Definições Peso Próprio Ortogonal.....	62
Figura 23 – Definições Peso Próprio Longitudinal.....	64
Figura 24 – Elemento de Casca Cilíndrica Laminada.....	65
Figura 25 – Graus de Liberdade do Elemento Finito Laminado (original de Kassegne) .	72
Figura 26 – Graus de Liberdade do Elemento Finito Laminado (re-ordenado).....	74
Figura 27 –Sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ	82
Figura 28 – Tetraedro de CAUCHY	84
Figura 29 – Definição das condições de contorno	88
Figura 30 – Definição das condições de contorno	89
Figura 31 – Efeito das fontes concentradas aplicadas em Ω^* : Solução fundamental.....	90

Figura 32 – Definição do problema fundamental de Kelvin.....	92
Figura 33 – Definição do problema fundamental de Mindlin.....	93
Figura 34 – Transformação de um ponto de contorno para o domínio.....	100
Figura 35 – (a) Região Infinita e (b) Região semi-infinita.....	102
Figura 36 – Transformação de um ponto de contorno para o domínio.....	103
Figura 37 - Sólidos discretizados por elementos de contorno:.....	105
Figura 38 - Tipologia de elementos e sistemas de coordenadas.....	109
Figura 39 - Elemento triangular.....	110
Figura 40 - O elemento de Contorno Cilíndrico	112
Figura 41 - O elemento de Contorno Setorial Plano.....	113
Figura 42 - O elemento de Contorno Discóide	113
Figura 43- Etapas do acoplamento MEC/MEF.....	115
Figura 44 – Forças de Interação do Problema Duto Enterrado.....	116
Figura 45- Solução de Mindlin.	117
Figura 46- Solução de Kelvin.	118
Figura 47 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento Finito CYS.....	124
Figura 48 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento Finito RLS.....	126
Figura 49 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento do Finito DKSt.....	127
Figura 50 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento do Finito CYS.....	128
Figura 51 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento do Finito RLS (Placa)....	131
Figura 52 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento Finito RLS (Duto).....	131
Figura 53 – Diagrama para seqüência de análise.	136
Figura 54 – Fluxograma da montagem das equações com base em SOUZA (2001).....	145
Figura 55 – Fluxograma Acoplamento	146
Figura 56 – Interface original do AutoCAD.....	148
Figura 57 – Menus customizados para interface com o AutoCAD.	149
Figura 58 – Interface customizada do AutoCAD.....	150
Figura 59 – Armazenamento de dados no AutoCAD.	152
Figura 60 – Integrando uma DLL no AutoCad.	156
Figura 61 – Função de modelagem paramétrica.....	158
Figura 62 – Gerando a Geometria no AutoCAD	158
Figura 63 – Modelagem paramétrica do conjunto solo-duto.....	159
Figura 64 – Menu pré-processamento.....	159

Figura 65 – Condições de contorno no Solo.....	160
Figura 66 – Diálogo de Carregamentos concentrados.....	161
Figura 67 – Carregamentos Aplicados no Solo	161
Figura 68 – Propriedades dos elementos.	162
Figura 69 – Menu processamento.....	162
Figura 70 – Opções de Processamento.	163
Figura 71 – Estatísticas da Estrutura.....	163
Figura 72 – Resultados da Análise da Estrutura - Deslocamentos.....	164
Figura 73 – Malha 2x2 no Octante A,B,C,D da Casca Cilíndrica Puncionada.....	166
Figura 74 – Casca Cilíndrica Puncionada no AutoCAD.....	167
Figura 75 – Casca Cilíndrica Puncionada Vistas Frontal e Lateral deformada.....	168
Figura 76 – Casca Cilíndrica Puncionada – Gráfico	168
Figura 77 – Octante da Casca Cilíndrica Simplesmente Apoiada.	170
Figura 78 – Casca Cilíndrica Simplesmente Apoiada no AutoCAD.....	171
Figura 79 – Casca Cilíndrica Simplesmente Apoiada – Gráfico	172
Figura 80 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Constante	173
Figura 81 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Constante no AutoCAD.	174
Figura 82 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Constante – Gráfico	175
Figura 83 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Hidrostática – Gráfico	177
Figura 84 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Hidrostática.	178
Figura 85 – Sólido (Cubo)	179
Figura 86 – Sólido (Cilindro)	181
Figura 87 – Duto Baixa Profundidade Pressurizado	183
Figura 88 – Duto Homogêneo Baixa Profundidade Pressurizado – Gráfico.....	184
Figura 89 – Duto Laminado Baixa Profundidade Pressurizado – Gráfico	185

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Calculo dos Elementos da Matriz de Rigidez do Elemento CYS.....	137
Tabela 2 – Calculo dos Elementos K11 e S11	138
Tabela 3 – Código fonte da integração no Elemento Triangular	139
Tabela 4 – Código fonte da integração no Elemento Cilindrico.....	140
Tabela 5 – Código fonte da integração no Elemento Setorial Plano	141
Tabela 6 – Código fonte da integração no Elemento Discoide.....	142
Tabela 7 - Funções Entry Point e dllMain.....	154
Tabela 8 – Função InitApplication, UnloadApplication e AddCommand.	155
Tabela 9 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica.....	166
Tabela 10 – Condições de Contorno do Octante A,B,C,D da Casca Cilíndrica.....	167
Tabela 11 – Deslocamento radial W(in) sob a carga P	169
Tabela 12 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica.....	170
Tabela 13 – Condições de Contorno do Octante A,B,C,D da Casca Cilíndrica.....	171
Tabela 14 – Deslocamento vertical W(in) em B.	172
Tabela 15 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica.....	173
Tabela 16 – Condições de Contorno da Casca Cilíndrica	174
Tabela 17 – Deslocamento radial máximo W(in).....	175
Tabela 18 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica.....	176
Tabela 19 – Condições de Contorno da Casca Cilíndrica	176
Tabela 20 – Deslocamento radial máximo W(in).....	177
Tabela 21 – Propriedades físicas do Cubo.....	179
Tabela 22 – Resultados da Análise do Sólido (Cubo)	180
Tabela 23 – Propriedades físicas do Cilindro.....	181
Tabela 24 – Resultados da Análise do Sólido (Cilindro)	182
Tabela 25 – Propriedades físicas do Acoplamento Solo-Duto	183
Tabela 26 – Resultados de Outros Autores.....	184
Tabela 27 – Duto Homogêneo Baixa Profundidade Pressurizado	184
Tabela 28 – Duto Laminado Baixa Profundidade Pressurizado	185

LISTA DE ABREVIATURAS

3D	Três Dimensões
DST	Discrete Shear Triangle
DKT	Discrete Kirchhoff Theory
CYS	DJoudi Cylindrical Shell
RLS	Reddy Cylindrical Laminated Shell
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão

LISTA DE SÍMBOLOS

u_1	Componentes de deslocamento na direção x
u_2	Componentes de deslocamento na direção y
u_3	Componentes de deslocamento na direção z
ε	Relação deformação/deslocamento
σ	Tensão em um elemento
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
δ_{ij}	Delta de Kronecker
D_f	Módulo de rigidez à flexão
φ	Distorção
Γ	Domínio do elemento
γ	Vetor das distorções
U	Energia de deformação
ζ, η	Coordenadas homogêneas
N	Vetor das funções de forma

Capítulo I

1.1 – MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

A indústria nos mais variados setores, tem nos últimos anos, devido a necessidade de implementação e melhorias na sua infraestrutura, impulsionado o crescimento da utilização de dutos enterrados e submersos, tais como oleodutos, gasodutos e assemelhados. Estas estruturas por estar interagindo com outros meios (solo, fluido, etc), apresentam alto grau de complexidade, o que exige uma atenção especial desde a fase de concepção até a sua operação propriamente dita. Se o campo de interesse do problema for restrito somente a etapa de projeto, ainda assim o número de parâmetros que interferem nas tomadas de decisões é grande. Assim, nas últimas décadas os projetistas têm usado algumas ferramentas de auxílio para produzir projetos de dutos enterrados mais eficientes. Uma das linhas importantes é baseada na experiência acumulada que estão geralmente descritas nas normatizações já estabelecidas. No entanto, isso não é suficiente, já que cada projeto tem suas particularidades. Então, em muitos casos um conjunto de testes experimentais é especificado para extrair alguns parâmetros de comportamento do duto enterrado (deslocamento do duto versus cota de assentamento, etc). No entanto, mesmo com o grande auxílio dos aparatos experimentais, ainda restam incógnitas que têm papel relevante no comportamento do problema que geralmente não são acessadas de forma criteriosa, tais como o estado de deformação e tensões no duto e

em suas interfaces com o solo. Assim, a terceira família de ferramentas que potencialmente podem se utilizadas são as técnicas de simulação numérica viabilizando a análise estrutural do problema. Existem muitas plataformas computacionais que são usualmente aplicadas à análise de dutos enterrados, no entanto, os modelos matemáticos nelas implementados são geralmente restritos ao espaço bidimensional. Se a região de análise da linha de duto for extensa, sem mudança expressiva no efeito vizinhança ao longo do comprimento do duto, os resultados da análise bidimensional geralmente não apresentam diferenças significativas quando comparada ao modelo Tridimensional. No entanto, nem sempre é possível garantir que a vizinhança da linha de duto permaneça inalterada, já que ela geralmente tem que atravessar regiões urbanas, cruzar rodovias, ferrovias, etc. Assim, o desenvolvimento e implementação de modelos tridimensionais para análise de dutos enterrados é indubitavelmente uma necessidade real para aperfeiçoamento dos projetos. Além disso, nas últimas décadas também pode ser notado uma intensa pesquisa para projeto/produção de materiais não homogêneos com alta relação resistência/peso (tais como os compósitos laminados) e sua utilização em elementos estruturais (principalmente na engenharia aeronáutica). Isso fez com que os modelos matemáticos baseados na mecânica dos compósitos fossem também implementados, no entanto, plataformas computacionais consolidadas envolvendo dutos de materiais não homogêneos infelizmente ainda não são uma realidade disponível para o projetista atual.

Diante desse panorama, existem algumas lacunas no qual são exploradas neste trabalho, tais como o desenvolvimento de um modelo matemático e sua implementação em uma plataforma computacional para a análise tridimensional de problemas de dutos enterrados tratando-os como homogêneas ou não homogêneas.

1.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise de tensões da interação solo-estrutura é certamente um dos temas importantes da mecânica dos sólidos, e nas últimas décadas diversos pesquisadores têm se dedicado ao assunto. De um modo geral, esses problemas podem ser classificados em três grupos de acordo com a posição da estrutura em relação ao solo:

- **Estruturas Apoiadas**

Ocorrem quando a interface solo-estrutura é a superfície do solo (edifícios sobre sapatas, dutos de superfície, pavimentos rígidos em estradas, etc);

- **Estruturas Semi-Enterradas**

Ocorrem quando parte da estrutura encontra-se no interior do maciço do solo (edifícios sobre fundações profundas, muros de contenção, etc);

- **Estruturas Enterradas**

Ocorrem quando a estrutura está totalmente dentro do maciço de solo (túneis, dutos enterrados, abrigos antiaéreos, etc),vide (Figura 1).



Figura 1 - Dutos Enterrados

Devido ao alto grau de variabilidade do problema real de duto enterrados, sua solução exata é praticamente impossível. Dessa forma a representação matemática é feita a partir de modelos, que podem ser construídos com diferentes níveis de simplificações para se ter uma estimativa aceitável do campo de interesse. A partir da aplicação de princípios físicos, Equações Diferenciais Parciais (EDPs) governantes são estabelecidas para o problema idealizado no modelo. No problema de dutos enterrados existem três sub-sistemas que devem ser avaliados: o duto isolado, o solo isolado, e finalmente a interação duto-solo.

Neste contexto, o modelo matemático do sistema final do problema pode ficar composto por um conjunto de sub-modelos associados respectivamente ao duto, solo e suas interfaces, que pode ser agrupado em classes de acordo com a dimensionalidade:

- Classe unidimensional

Usualmente nesta classe de modelos, o duto é idealizado como um meio contínuo 1D, o solo admitido ser um sistema discreto de molas, e a interface é caracterizada pela ligação de cada mola na barra, vide Figura 2. Um dos problemas desse modelo está na obtenção de valores de rigidez K para as molas, que representam o solo de forma a reconstituir devidamente o contínuo. Em geral, esse modelo é empregado quando o foco do problema envolve o comportamento global da estrutura em grandes extensões da linha de duto.

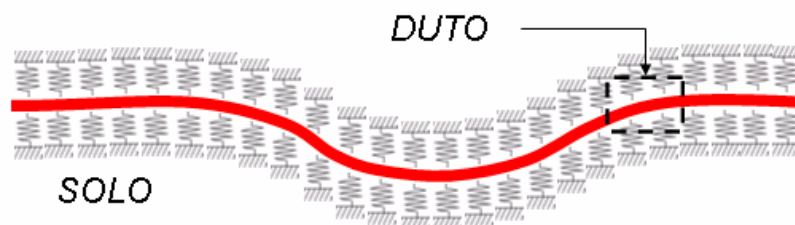


Figura 2 - Classe Unidimensional

- **Classe bidimensional**

A ideia na classe dos modelos 2D é assumir que o comportamento de toda a linha de duto enterrado pode ser representado pelo que ocorre no plano que contém uma das seções transversais do duto, vide Erro! A origem da referência não foi encontrada.. Neste caso, o solo é idealizado como um contínuo plano infinito ou semi-infinito e a seção transversal que caracteriza o duto é admitida ser um meio contínuo 1D curvo (anelar). Aqui, o interesse não é mais um comportamento global do problema, mas sim, um foco local da interação solo-estrutura, que em geral podem ser campos de tensões, deformações, etc. A restrição principal da classe de modelos 2D é a exigência de se ter repetitividade das condições geométrica e física do plano de observação (duto e vizinhança) para todos os planos que contém as demais seções da linha.

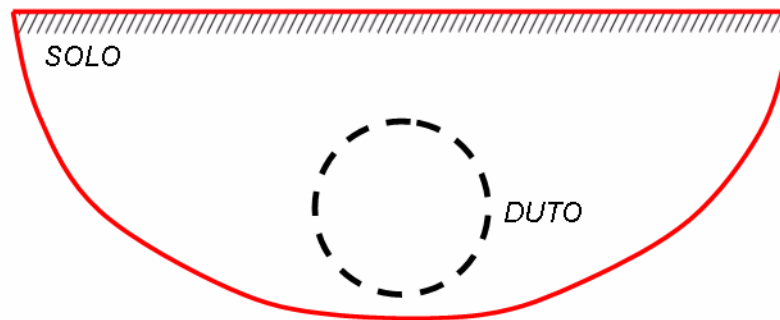


Figura 3 - Classe bidimensional

- **Classe tridimensional**

No caso da classe de modelos tridimensionais, o solo é assumido como um meio contínuo 3D infinito ou semi-infinito e o duto é representado um meio contínuo de superfície, que recaem em problemas denominados de cascas, vide Figura 4.

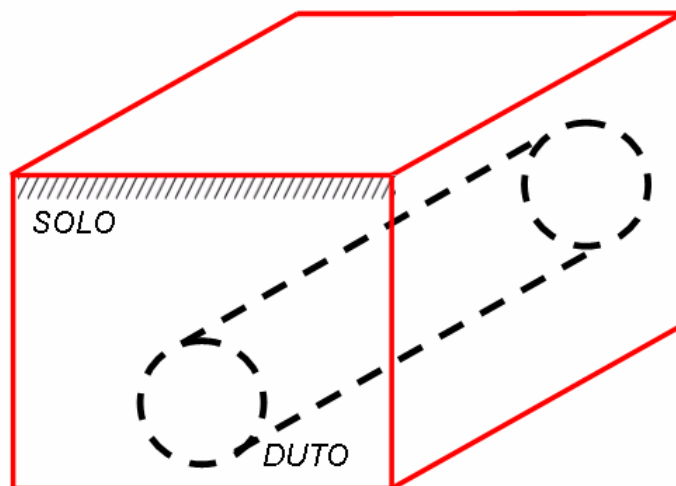


Figura 4 - Classe Tridimensional

Esta classe de modelos é sem dúvida a que representa o comportamento do duto enterrado de forma mais rigorosa podendo potencialmente ser aplicada a condições bem genéricas. No entanto, de uma forma geral, ela exige a manipulação de uma grande quantidade de informações, o que a torna ser efetivamente empregada em estudos detalhados da interação solo-estrutura em regiões da linha de duto na qual há mudanças sensíveis das condições geométricas/físicas.

Independentemente da classe de modelos utilizada, as suas equações governantes precisam ser resolvidas para se ter os campos de interesse (deslocamentos, tensões, etc) determinados. De um modo geral, estratégias de busca por soluções matemáticas para essas EDP podem ser sistematizadas de diversas formas, por exemplo como indicado na Figura 7. As soluções analíticas das equações governantes de dutos enterrados estão disponíveis para casos mais especiais de interação. Esse é o caso na classe unidimensional quando se admite o duto enterrado como uma barra infinita apoiada em base elástica, cujas soluções são encontradas nos trabalhos de BIOT (1937), HETENYI (1946). Já BURNS & RICHARD (1964) analisaram um sistema duto-solo submetido a pressões horizontais e verticais, usando os princípios da mecânica do contínuo, desenvolveram soluções fechadas (analíticas) para um modelo elástico bi-dimensional (estado de deformação plana). Tem-se ainda os trabalhos de HOEG(1968), MOORE(2000), DHAR(2004) que inseriram dentre outros efeitos a consideração do efeito da pressão

causada pelo empuxo de terra no modelo bidimensional e expressaram as soluções analíticas de forma mais suave que as técnicas empregadas por RICHARD(1964).

Existem muitos métodos semi-empíricos nos quais são obtidos pela incorporação de alguns fatores de correção nas soluções analíticas bidimensionais, que são calibrados experimentalmente. Dentre as técnicas semi-empíricas mais conhecidas tem-se: Método de Iowa SPANGLER(1941) e suas versões modificadas WATKINS e SPANGLER(1958), GREENWOOD e LANG(1990). Para discussões adicionais desses e outros métodos semi-empíricos bidimensionais recomenda-se os trabalhos de MOSER e FOLKMAN (2008), WATKINS e ANDERSON(1999). Contudo, nem sempre as soluções analíticas das EDPs de dutos estão disponíveis, de forma que uma alternativa é partir para a discretização do meio contínuo e sistematizar o problema discreto, obtendo-se soluções aproximadas via técnicas numéricas, dentre as quais tem-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Para o modelo unidimensional existem algumas soluções numéricas onde o duto é geralmente discretizado por elementos finitos 1D (barras) e o efeito da base elástica é introduzida no problema via energia potencial. Isso produz uma contribuição adicional na matriz de rigidez da estrutura. Convém notar que as soluções numéricas unidimensionais geralmente são empregadas para analisar grandes extensões da linha e cujo interesse principal da análise é o comportamento global do sistema solo-duto.

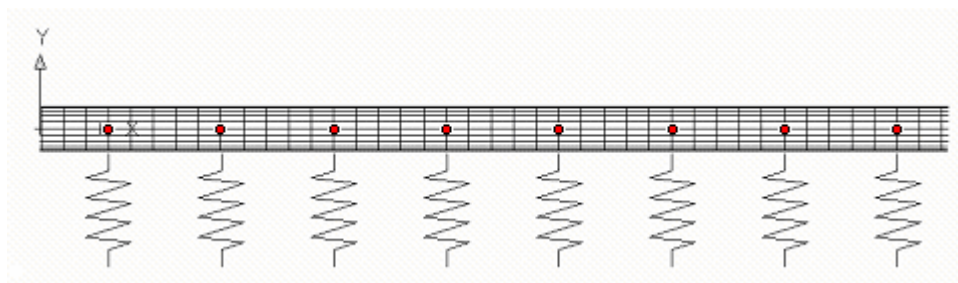


Figura 5 - Discretização 1D do problema

Para o modelo bidimensional existem diversas soluções numéricas em que ambos duto e solo são representados por meios contínuos: Elementos finitos, Elementos de contorno (FREITAS 2008) e Combinação MEC-MEF (VIEIRA 2009), vide Figura 6.

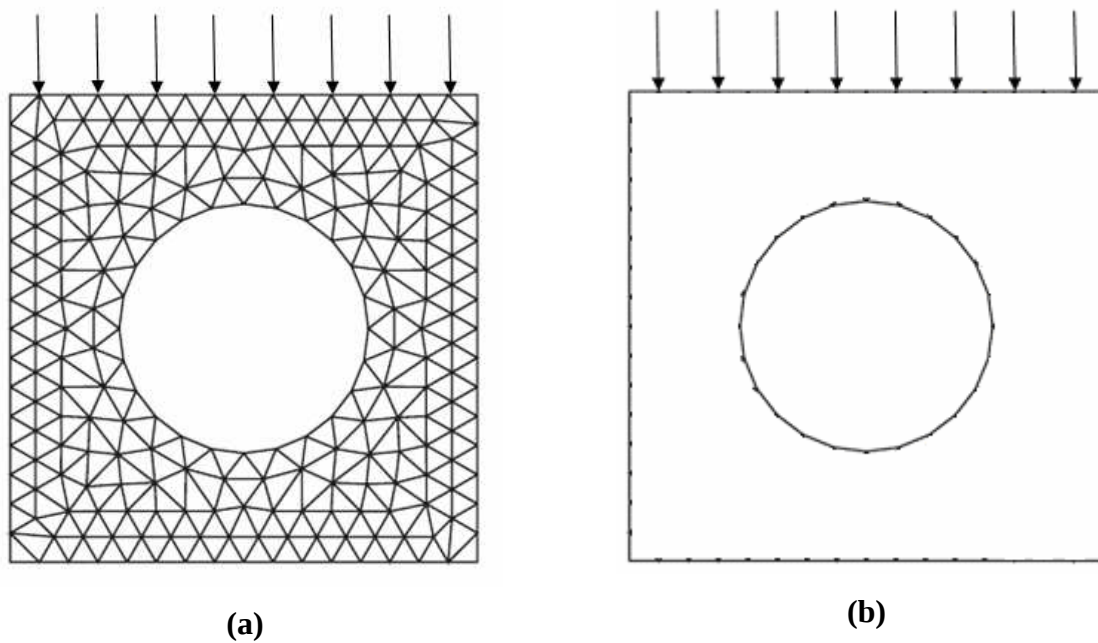


Figura 6 - Discretização 2D do problema (a) MEF, (b) MEC

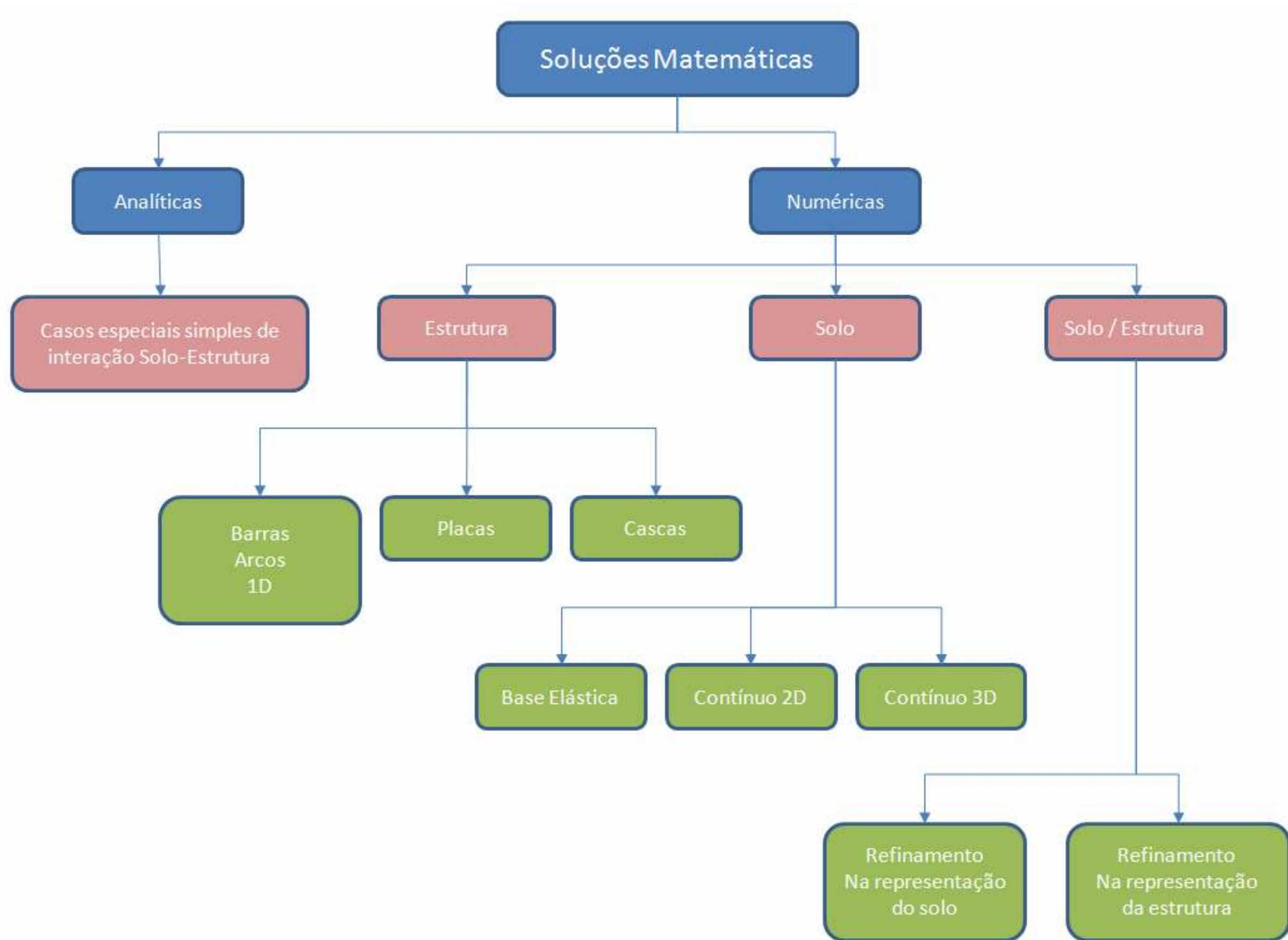


Figura 7 – Soluções Matemáticas.

Para análise numérica da classe de modelos tridimensionais, alguns trabalhos podem ser encontrados na literatura para cada um dos sub-sistemas envolvendo o duto isolado, o solo isolado e a interação solo-duto. Inicialmente é discutida a evolução de modelos numéricos para análise dutos isolados idealizados como cascas. O maior número de estudos de cascas que podem ser encontrados na literatura foi feito para cascas cilíndricas delgadas compostas de materiais homogêneos, elásticos e isotrópicos. Estas teorias, que são chamadas teorias clássicas (Classical Theory of Shells-CST), estão baseadas nas aproximações de LOVE (1927), e tem como maior desvantagem, não considerar o efeito do cisalhamento transversal, nem o efeito da tensão normal transversal. Assim sendo, com o intuito de preencher este espaço deixado pela teoria clássica, as teorias de cascas cilíndricas de maior ordem, fazem um refinamento da CST na modelagem para aplicações em cascas grossas, incorporando os efeitos da tensão normal transversal e as componentes da deformação por cisalhamento, obtendo resultados mais coerentes.

As cascas requerem geralmente uma manipulação matemática robusta, devido dentre outros fatores à complexidade de natureza geométrica. Quando a geometria da casca é formada por planos é natural que os efeitos de membrana e flexão sejam calculados independentemente usando elementos originalmente destinados para análise de cada um desses efeitos. No entanto, segundo BERGAN & FELIPPA (1985), quando a estrutura possui elementos co-planares ou com tendência a esse caso podem ocorrer problemas de compatibilização de graus de liberdade se o elemento finito de membrana possuir apenas graus de liberdade translacionais. Apesar disso vários pesquisadores, SYDENSTRICKER & LANDAU (1995), CHEN (1979), BATHE & HO (1981), FAFART et al. (1989), formularam elementos finitos de cascas planas com essa abordagem, por exemplo o elemento finito de membrana CST (Constant Stress Triangle), combinado com elementos de placa, tais como o DKT discutido em BATOZ et al.(1980) ou DST descrito em BATOZ & LARDEUR (1989) .

Além da abordagem de casca plana, outros elementos foram desenvolvidos de modo a representar as cascas por elementos curvos. HRENNIKOF & TEZCAN (1966), empregaram a forma curva na formulação de elemento de casca através de coordenadas polares. Entretanto, o método desses pesquisadores tem a desvantagem de não haver

acoplamento entre os efeitos de membrana e placa. De acordo com FULTON (1966), tal fato impede uma convergência mais acentuada dos elementos de casca cilíndrica em relação aos elementos de casca plana, mesmo quando é utilizada uma discretização com muitos elementos. As análises demonstraram que para haver convergência, os elementos exigem uma discretização refinada e por esse motivo tem sido dada atenção ao desenvolvimento de elementos com interpolação de maior ordem.

CANTIN & CLOUGH (1968), salientam que nenhum dos elementos desenvolvidos até então com base nas formas polinomiais para interpolação de u , v e w satisfazem a todos os modos de corpo rígido, desse modo eles introduziram termos contendo funções trigonométricas e desenvolveram elementos com seis graus de liberdade. Os resultados obtidos com esse elemento demonstraram que a inclusão de termos para representar os deslocamentos de corpo rígido permitiu uma convergência significativa.

Com a seqüência dos trabalhos para obter elementos com interpolação de alta ordem, COWPER et al. (1979), propuseram interpolações de terceira e quinta ordem para os deslocamentos produzidos por flexão no intuito de obter uma maior convergência de resultados. A obtenção de elementos de interpolação de alta ordem não é o único desafio a ser resolvido, pois os mesmos produzem matrizes de rigidez com largura de banda excessiva. Neste sentido surge a necessidade de incrementar recursos computacionais, pois o tempo de execução para a solução da equação de equilíbrio é maior quando utiliza-se este tipo de elemento. Uma outra estratégia está na adição de graus de liberdade internos no elemento, no entanto, tal possibilidade também aumenta a largura de banda da matriz tornando a análise demorada pelo mesmo motivo discutido anteriormente. Assim, o desenvolvimento de elementos com interpolação de alta ordem e a exclusão de graus de liberdade adicionais pode ser uma contribuição significativa para análise de cascas através do MEF. Um grupo de pesquisa apresentou uma família alternativa de elementos finitos para análise de cascas cilíndricas em que inicialmente interpolações são assumidas para as deformações e curvaturas de forma a atender as condições de compatibilidade de deformações e curvaturas. Só então, as funções de aproximação dos deslocamentos são obtidas pela integração das deformações interpoladas e pela imposição de atendimento das condições de movimento de corpo rígido. Essa família do MEF foi chamado de modelo baseado em deformações assumidas

(assumed strain-based model) e ASWELL & SABIR (1972), SABIR (1983), BULL (1984), SABIR et al.(1994) foram os primeiros trabalhos em análise de cascas cilíndricas profundas. Já DJOUDI & BAHAI (2002,2004) apresentaram uma extensão das ideias do modelo de Sabir para cascas cilíndricas abatidas empregando a teoria de de cascas de DONNEL (1933,1938). Esse elemento foi aplicado tanto para análise estática quanto para vibração de cascas cilíndricas.

Um outro ponto crítico da análise de cascas cilíndricas é quanto a constituição material do problema, isto é, se a análise refere-se a um problema não homogêneo. Os estudos de estruturas não homogêneas começaram a surgir no início da década de 60. Nesta época, então, foram desencadeados os primeiros estudos analíticos e experimentais do comportamento mecânico destes materiais. Como contribuições pioneiras e relevantes podem ser citadas aquelas dadas por HILL (1965), HASHIN; ROSEN (1964) e TSAI (1965). Os trabalhos iniciais tinham como objetivo central a caracterização dos materiais compostos. Os conceitos da micromecânica já eram empregados na tentativa de se obter modelos analíticos capazes de fornecer as propriedades macromecânicas dos materiais constituintes, ou seja, das fibras e da matriz.

A partir dos anos 80 o progresso na área dos modelos numéricos, especialmente daqueles que utilizam o método dos elementos finitos, foi bastante intenso. Neste período surgiram novas teorias de ordem superior para a análise de placas e cascas laminadas, (REDDY, 1984) e (LIBRESCU, 1987), e se intensificaram os modelos de falhas (HASHIN, 1980), (LEE, 1980), (ZHANG; EVANS, 1988) e (TOLSON; ZABARAS, 1991). Várias contribuições tratando de analisar elástica de tensões e flambagem térmicas de placas de materiais compostos foram também publicadas. WU; TAUCHERT (1980) apresentaram soluções analíticas para a análise de placas laminadas com esquemas de laminação simétricos e antissimétricos submetidas à carga térmica.

As teorias de cascas laminadas podem ser divididas em Teorias de Camadas Simples Equivalentes (TCSE), Teoria da Elasticidade Tridimensional e Métodos de Modelos Múltiplos. As duas últimas lidam com níveis de idealização mais robustos para os campos de tensões no interior e nas interfaces das camadas do Laminado. Já a família de teorias de camadas simples equivalentes despreza alguns aspectos dos campos de tensões e deformações, principalmente nas regiões de interface. As TCSE podem ainda ser sub-divididas em teorias de ordem zero (clássica), ordem um (inclusão da formação

por cortante) e ordem superiores (segunda e terceira). De um modo geral, esses sub-casos da TCSE descrevem a cinemática da rotação da seção transversal e a inclinação da superfície média.

Uma revisão de teorias usadas na análise de estruturas laminadas é apresentada em REDDY (1989), onde se discute a utilização de condições de simetria na análise dos modelos numéricos, comportamento não-linear geométrico e de laminados compósitos para diferentes condições de contorno. Com base nesta mesma teoria de placas espessas de Reissner-Mindlin, MENEZES & DEVLOO (2000) apresentaram a formulação de um elemento finito quadrilateral para cascas laminadas com possibilidade de aproximação de deslocamentos (translações e rotações) linear (4 nós) e quadrática (8 ou 9 nós). Os autores consideraram na análise que cada camada do laminado pode ser constituída de materiais ortotrópicos, proporcionando assim um comportamento anisotrópico para o conjunto. KLINKEL et al. (1999), apresentam a formulação de um elemento finito de casca 3D buscando a representação do comportamento anisotrópico também através da associação de camadas ortotrópicas sobrepostas.

Em FERREIRA et al. (2000), são encontrados estudos relacionados à utilização de elementos finitos baseados em deslocamentos para representação de cascas laminadas. Neste trabalho o autor introduziu conceitos de não-linearidade física e geométrica, sendo a formulação elastoplástica considerada segundo o critério de Huber-Mises para materiais anisotrópicos. FERREIRA et al. (2003), apresentaram uma formulação para laminados utilizando-se o método dos elementos sem malha e polinômios de ordem superior para consideração do cisalhamento, evitando-se assim a introdução de fatores de correção para a distribuição da cortante na espessura da placa.

Em FERREIRA et al. (2004) a teoria de laminados é utilizada para modelagem de placas e também de cascas novamente utilizando-se o método dos elementos sem malha. Nos trabalhos de RASTGAAR AAGAAH et al. (2003) e WOO et al. (2003) são apresentados desenvolvimentos utilizando-se a teoria de laminados, sendo que neste último aplica-se o critério de Huber-Mises para modelagem da plasticidade em materiais ortotrópicos.

Uma das famílias da teoria tridimensionais é a então conhecida como teoria Layerwise de REDDY (1984,1992). Nessa, o contínuo é inicialmente discretizado ao longo da espessura de cada lâmina e só então as equações são estabelecidas e discretizadas sobre a superfície da casca. Alguns pesquisadores sistematizaram o modelo Layerwise de Reddy em elementos finitos BARBERO et al.(1990), REDDY e SAVOIA(1992), KASSEGNE(1992), GEHARD et al.(1994).

Além da análise do duto isolado, tem-se também o estudo da interação solo-estrutura. Na representação tridimensional do solo usualmente tem sido soluções em elementos finitos ou elementos de contorno e a representação do duto em elementos finitos.

O método de elementos de contorno é uma ferramenta numérica que pode ser considerada eficiente para modelar o solo em problemas de interação com a estrutura. Como somente o contorno do domínio do problema é dividido em elementos, a análise fica reduzida em uma dimensão. Isto diminui o custo computacional envolvido na resolução de equações, além de simplificar o armazenamento de dados. Podem-se destacar três técnicas utilizadas mais frequentemente para o acoplamento MEC/MEF:

1 - Resolver isoladamente a parcela MEF do problema e então utilizar os resultados obtidos como condições de contorno na parcela MEC. A desvantagem de utilizar esta abordagem é a impossibilidade de se avaliar de forma completa como os subsistemas interagem entre si. Pois a parcela MEC não influi na parcela MEF. [BREBBIA e DOMINGUEZ (1992)].

2 – Representar as contribuições do MEF com uma formulação semelhante à do MEC, assim as equações algébricas resultantes das contribuições das duas técnicas são escritas em um único sistema algébrico compatibilizado que resolve simultaneamente os campos de interesse. [BREBBIA e GEORGIU (1979)].

3 - Representar as contribuições do MEC de forma semelhante à do MEF, aplicando então condições de compatibilidade de equilíbrio. Esta técnica tem as mesmas vantagens que a segunda, sendo menos custosa computacionalmente. [SWOBODA et. al. (1987)].

O primeiro trabalho a discutir o acoplamento MEC-MEF foi apresentado por ZIENKIEWICZ et al. (1977) e discutia o método das soluções de contorno como solução equivalente do MEF. LAETHEM et al. (1984) estudam a avaliação estática linear computacional de estruturas de fundação, enquanto WEARING & BURSTOW (1994) combinam o MEC e o MEF para análise bidimensional de tensões elastoplásticas e de problemas da mecânica da fratura elastoplástica bidimensional. Já MESQUITA e CODA (2000) estudam um pórtico plano apoiado sobre uma camada de solo infinita e visco-elástica.

Alguns trabalhos sobre acoplamento MEC/MEF abordam a interação entre grupos de estacas conectadas por placas flexíveis. Neste contexto MENDONÇA e PAIVA (2003) consideram um semi-espaço infinito elástico, linear e homogêneo, representado por equações integrais utilizando a solução fundamental de Mindlin. Cada estaca é representada por um único elemento finito reticular com três nós, e a força vertical cisalhante ao longo do fuste é aproximada por uma função quadrática. Na extremidade inferior da estaca a tensão é considerada constante ao longo da seção transversal, e um dos nós se localiza nesta extremidade. A placa é modelada pelo MEF utilizando dois tipos de elementos finitos planos, O DKT e o HSM. Em MENDONÇA e PAIVA (2000) modela-se a placa flexível também por equações integrais mas considerando as mesmas rígidas. Em ALMEIDA e PAIVA (2004) é proposta uma formulação para a análise da interação do solo com a estrutura na qual o solo, composto por uma ou mais camadas apoiadas em uma superfície de deslocamento nulo, é modelado pelo MEC em abordagem tridimensional. Estas sub-regiões simulam elementos de fundação tais como estacas, sapatas, tubulões, escavações ou túneis, podendo estes ultrapassar ou não as diferentes camadas de solo. Os pilares e vigas são representados por elementos reticulares e as lajes são consideradas diafragmas rígidos. O edifício pode ser apoiado em uma placa flexível, que é modelada por elementos finitos laminares. Para avaliar a interação da superestrutura modelada pelo MEF com a subestrutura formulada pelo MEC, é feito o acoplamento a partir das matrizes provenientes de ambos os sistemas. Os trabalhos de ALMEIDA e PAIVA (2007) e RIBEIRO et. al. (2005), estudam problemas complexos, tais como a interação de um edifício 3D, modelado pelo MEF, com um solo modelado pelo MEC. As vigas e pilares do edifício foram simulados com elementos de barra, enquanto as lajes foram modeladas com elementos de casca. Os resultados obtidos demonstraram a

coerência da formulação. Entre os trabalhos recentes, RIBEIRO (2009) apresenta um estudo de acoplamento solo-estrutura onde o solo é considerado formado por mais de um material sob forma de camadas estratificadas.

Em MANOLIS et al.(1995) é apresentada uma solução MEC-MEF para solução dinâmica de dutos enterrados. Nesse trabalho, o duto é modelado por um elemento cilíndrico quadrilateral com cinco graus de liberdade por nó desenvolvido por WEMPER et al.(1982) e para a cavidade do solo são utilizados elementos de contorno de superfície triangulares e quadrilaterais isoparamétricos.

Além do desenvolvimento das ferramentas matemáticas do cálculo de duto enterrado, um outro aspecto importante é tornar a manipulação de dados e análise de resultados mais amigáveis para o projetista. Com esse enfoque é que sistemas para projeto assistido por computador foram desenvolvidos para auxiliar a solução de problemas usuais em engenharia, dentre eles, a análise de estruturas. No início, foi considerado um substancial avanço, que permitiu a digitalização e o cálculo de grande parte dos projetos “convidando” os projetistas a se adequarem a esta nova tecnologia. No entanto, este sistema continuava não sendo produtivo devido à grande similaridade com os procedimentos do processo manual ou ainda devido à limitação da análise no espaço bidimensional. Com a chegada dos primeiros sistemas que permitiam a modelagem tridimensional e paramétrica a forma de conceber as etapas de análise do projeto mudou substancialmente.

Desse modo, os profissionais de engenharia tiveram que investir recursos e treinamentos para vencer a resistência às modificações que iriam ocorrer no modo de atuar na área de projetos. A versatilidade dos modelos tridimensionais é uma justificativa para todo o esforço investido na transição para o projeto assistido por computador principalmente no campo da análise estrutural. SPECK (2001) relata que o primeiro sistema de Computação Gráfica, denominado Sketchpad, foi desenvolvido no *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* em 1963. BOGADO (1997) afirma que até o início dos anos 80 a Computação Gráfica era um campo pequeno e especializado, principalmente devido ao alto custo dos equipamentos e da escassez de programas gráficos amigáveis e com preços acessíveis. Em 1982, surgiu o AutoCAD, um sistema 2D que trazia na sua concepção os princípios dos desenhos realizados em pranchetas. Apesar

de sua popularidade, este sistema apresentava limitações e não atendia convenientemente às necessidades dos projetistas (BOGADO, 1997). Com o surgimento das linguagens de programação orientadas a objetos o desenvolvimento de aplicações CAD foi impulsionado e permitiu a customização e criação de aplicativos dedicados para acelerar o processo de modelagem e cálculo de projetos permitindo que isso fosse feito pelo próprio usuário.

Uma das principais vantagens na utilização dos sistemas CAD está na interatividade com outras áreas. O modelo pode ser utilizado para calcular o seu volume, propriedades de massa e momentos de inércia, realizar montagens, verificar interferências, gerar desenhos de fabricação, simular o seu comportamento mecânico, prototipagem rápida, entre outros. Atualmente, os programas comerciais CAD são considerados essenciais para a concepção rápida de projetos. Um dos campos de aplicação destes aplicativos é a análise de estruturas. Existem diversos pacotes comerciais e acadêmicos disponíveis para as comunidades de engenharia que podem ser classificados em 2 grupos:

- a) Sistemas básicos de análise estrutural.
- b) Sistemas de análise estrutural e dimensionamento.

No primeiro grupo os aplicativos se limitam a determinar campos de deslocamentos e esforços. A maioria destes softwares de análise realiza seus cálculos incorporando modelagem matemática através de elementos finitos (MEF). Em problemas de análise estrutural, alguns softwares acadêmicos e comerciais, dentre eles ANSYS, NASTRAN, PATRAN, ABAQUS, SAP2000, são mencionados em RAMALHO (1990). No segundo grupo, os softwares de análise estrutural possuem uma grande quantidade de funções que além de analisarem o problema modelado podem também verificar critérios de acordo com normas brasileiras e/ou internacionais para materiais específicos como o concreto armado e o aço. Em alguns pacotes é disponibilizado utilitários de desenho CAD (Computer Aided Design) para as etapas de detalhamento estrutural tais como EBERICK, CYPECAD, TQS.

A maioria dos softwares mencionados pode manipular arquivos de outros formatos bastando para isso usar funções para importar ou exportar arquivos permitindo a comunicação durante os estágios de pré-processamento, processamento e pós-processamento, em contraste às estratégias de programação orientada a objetos usadas em conjunto com aplicativos de desenho como o AutoCad. SANTOS & DEVLOO (2001) descrevem a compatibilização entre ambiente de desenho e o software AutoCad e o método de elementos finitos (classes em C++ para problemas de pórticos e placas) usando a biblioteca ObjectArx.

1.3 – OBJETIVO DO TRABALHO

Esta tese tem como principais objetivos: a) Acoplamento entre o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura; b) Descrever a construção de uma biblioteca DLL (Dnamic Link Library) para análise de problemas de dutos laminados e um ambiente amigável ao usuário escritos em linguagem orientada ao objeto C++; c) realizar simulações numéricas para avaliação das técnicas empregadas.

1.4 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo II será feita uma revisão bibliográfica, tendo como base o estudo dos fundamentos da teoria clássica de cascas baseada nas hipóteses de DONNEL, bem como a formulação do elemento finito de casca cilíndrica homogênea CYS em regime estático. Segue-se a revisão com a teoria de camadas equivalentes discretas de REDDY (1993) (Layerwise Theory), e formulação de um elemento finito de casca cilíndrica laminada denominado RLS em regime estático. O Capítulo III terá como objetivo discutir a formulação do método de elementos de contorno no regime estático utilizando-se as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin. O capítulo IV descreve a interação solo-estrutura utilizando-se o acoplamento entre os métodos de elementos finitos e elementos de contorno, já no capítulo VI é discutida a construção de uma biblioteca DLL (Dinamic Link Library) para processamento de problemas de laminas e interação solo-estrutura e um ambiente amigável ao usuário escrito em linguagem C++ / ObjectARX para

customização do AutoCAD onde a este será acoplada à biblioteca DLL. O capítulo VI será dedicado a exemplos de análises e ao emprego do ambiente amigável. Por fim, o capítulo VII será reservado para conclusões do trabalho, sendo seguido pela bibliografia.

Capítulo II

MEF EM COMPÓSITOS LAMINADOS: CASCAS CILÍNDRICAS

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo será discutida a formulação de dois elementos finitos de casca cilíndrica laminada, onde o primeiro é denominado nesta tese de RLS é baseado na teoria de camadas discretas (Layerwise Theory) de REDDY(1984,1992) e o segundo elemento finito denominado de CYS (ao longo do texto) tem fundamentação na teoria de camadas equivalentes simples. Tanto os fundamentos da mecânica de compósitos laminados, quanto as equações que regem as cascas cilíndricas feitas desse material (vide Figura 8) e sua sistematização da representação algébrica baseados no método dos elementos finitos são apresentados a seguir.

2.2 – RELAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DE COMPÓSITOS LAMINADOS

Algumas propriedades que caracterizam os materiais compósitos laminados são fatores de complexidade no que tange ao potencial de aplicabilidade dos mesmos. Dentre as muitas propriedades, cita-se a heterogeneidade e a anisotropia. Do ponto de vista físico, estas propriedades indicam que, em um ponto no interior do compósito, as

características do material variam respectivamente com a posição e direção de observação.

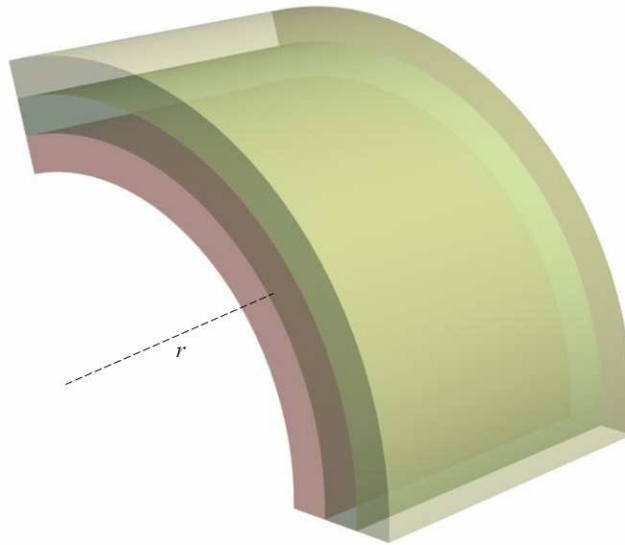


Figura 8 – Casca Cilíndrica Laminada

Seja (x,y,z) o sistema de coordenadas globais para escrever as equações governantes do laminado e (x_1, x_2, x_3) o sistema de coordenadas locais do material, correspondente a uma camada do laminado, tal que o eixo x_3 é paralelo ao eixo- z e o eixo $-x_1$ esta orientado a um ângulo de $+\theta$ do eixo- x , tal como mostra a Figura 9.

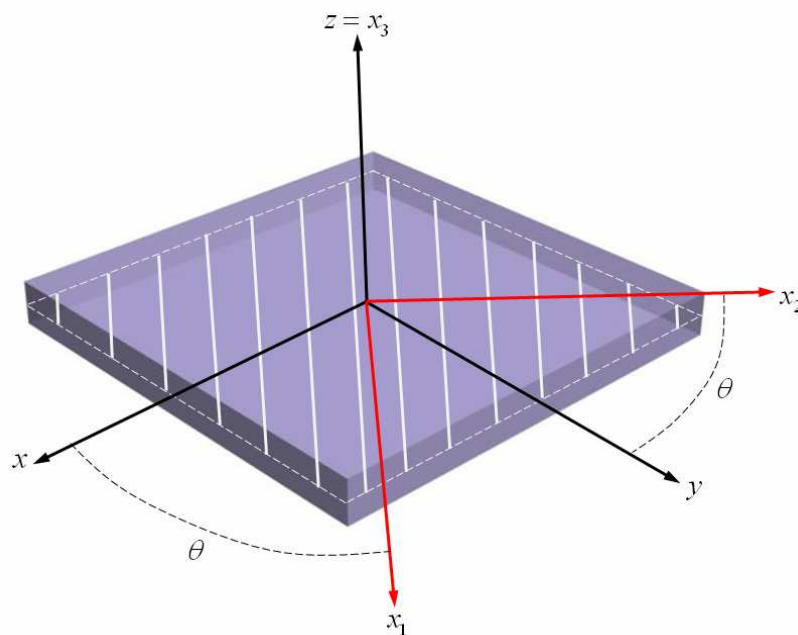


Figura 9 - Lâmina no sistema de coordenadas Local do material e Global do problema

No sistema de coordenadas locais do material em cada camada, as deformações e tensões são correlacionadas a partir das relações.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Onde a matriz de flexibilidade do material pode ser denominada de $[S]$.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}$$

As deformações e tensões são correlacionadas a partir de relações ditas constitutivas, obtidas pela inversão da equação (1) resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Onde a matriz de rigidez do material pode ser denominada de $[C]$ e $[C] = [S]^{-1}$.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{13} & C_{13} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

2.2.1 - SIMETRIAS CONSTITUTIVAS

Dependendo dos valores dos elementos da matriz constitutiva na equação (2), o material pode ser organizado em classes de simetrias constitutivas.

2.2.1.1 - MATERIAL MONOCLÍNICO

Em alguns materiais é possível definir um sistema de coordenadas locais cartesianas de tal forma que o número de constantes necessárias na definição da relação constitutiva seja reduzido. No caso de materiais monoclinicos, a matriz [C] definida na equação (2) fica:

$$[C_M] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2.1.2 - MATERIAL ORTÓTROPO

No caso do material apresentar simetria em relação a dois planos, 1-2 e 2-3, no sistema local, seu comportamento é dado por um modelo ortotrópico, cuja matriz de rigidez é dada por:

$$[C_o] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Convém notar que os materiais ortótropos requerem a determinação de menos constantes que os monoclinicos.

2.2.1.3 - MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO

Em alguns casos o material apresenta uma forma menos complexa que os ortótropos, já possuem isotropia de propriedades em um dos planos definidos . Neste caso, têm-se o material transversalmente isotrópico, de tal forma que a matriz de rigidez [C] passa para:

$$[C_{TI}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{22}-C_{23})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na representação das relações constitutivas de materiais compósitos fibrosos laminados, os modelos de material acima descritos possuem larga aplicação prática.

2.2.1.4 - MATERIAL ISOTRÓPICO

Uma outra simetria constitutiva ocorre quando o material apresenta propriedades mecânicas independentes das direções analisada, caracterizando o modelo

isótopo. A relação constitutiva neste caso, chamada de Lei de Hooke, depende apenas de duas constantes independentes:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{Onde: } C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

2.2.2 - ESTADO PLANO DE TENSÃO (EPT)

Considere que uma lamina no plano 1-2, esteja sob um Estado de Tensão EPT. Diz-se que um corpo está sob um estado de tensões plano se cada ponto está sujeito a tensões apenas num único plano, no caso o plano 1-2, isto é, apenas $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ são não nulos e

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_{23} = 0, \quad \tau_{31} = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \quad (7)$$

Usando estas relações, parte das componentes de deformação torna-se:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \quad \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{31} = 0 \quad (8)$$

Enquanto as demais ficam:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Ou na forma matricial

$$\{\varepsilon^I\} = [S]\{\sigma^I\} \quad (10)$$

Onde S é chamada de matriz de flexibilidade reduzida da lamina ortotrópica sob EPT, em relação aos eixos principais. Essa relação pode ser invertida resultando na relação tensão-deformação reduzida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Que ainda pode ser posta em forma matricial como:

$$\{\sigma^I\} = [Q]\{\varepsilon^I\} \quad (12)$$

Onde Q_{ij} são os termos da matriz de rigidez reduzida. Em termos das constantes de engenharia, os valores de Q_{ij} são obtidos invertendo a matriz em (9), o que produz:

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad (13)$$

Note que, agora, o comportamento de uma lamina ortotrópica carregada em seu próprio plano, isto é, sob um estado plano de tensões, é definido por apenas quatro constantes elásticas: E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} , além da relação de reciprocidade $\nu_{21} = \nu_{12} \left(\frac{E_2}{E_1} \right)$.

2.2.3 – TRANSFORMAÇÃO CONSTITUTIVA

Fazendo transformação de coordenadas do local para o global do material (vide Figura 9), o tensor de tensões $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{zz}$ no sistema de coordenadas (x, y, z) , correspondente as coordenadas do problema, pode ser representado em função das componentes de tensão $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{33}$ no sistema de coordenadas do material (x_1, x_2, x_3) como:

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m \quad (14)$$

Sendo T em (14) a matriz de transformação de coordenadas do sistema (x_1, x_2, x_3) , denotado pelo subíndice m , para o sistema (x, y, z) denotado pelo subíndice p .

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

Identicamente a equação (14) o tensor de deformações é dado por:

$$\{\varepsilon\}_p = [T]^T \{\varepsilon\}_m \quad (16)$$

Ou na forma inversa:

$$\{\varepsilon\}_m = [T]^T \{\varepsilon\}_p \quad (17)$$

Onde $[T]^T$ é dado por:

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

Substituindo (15) e (16) na equação (14) temos que:

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m = [T][C]\{\varepsilon\}_m = [T][C][T]^T\{\varepsilon\}_p \quad (19)$$

Onde $[C]$ é dada em (2). A equação (19) pode ser reescrita na forma:

$$\{\sigma\}_p = [\bar{C}]\{\varepsilon\}_p \quad (20)$$

Onde:

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad (21)$$

Ou ainda na forma explicita, a relação constitutiva de um material anisótropo genérico fica:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & \bar{C}_{15} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{25} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & \bar{C}_{35} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{46} \\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56} \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{64} & \bar{C}_{65} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Onde os valores dos coeficientes da matriz $[\bar{C}]$ são:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta - 4C_{16} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - 4C_{26} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{12} &= C_{12} \cos^4 \theta - 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad + 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{12} \sin^4 \theta \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{13} = C_{13} \cos^2 \theta - 2C_{36} \cos \theta \sin \theta + C_{23} \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{16} &= C_{16} \cos^4 \theta - (C_{11} - C_{12} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{26} - C_{16}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad + (2C_{66} + C_{12} - C_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{26} \sin^4 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{22} &= C_{22} \cos^4 \theta - 4C_{26} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad + 4C_{16} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{23} = C_{23} \cos^2 \theta - 2C_{36} \cos \theta \sin \theta + C_{13} \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{26} &= C_{26} \cos^4 \theta - (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{16} - C_{26}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&+ (C_{11} + C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{16} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{33} &= C_{33} \\
\bar{C}_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \cos \theta \sin \theta + C_{36} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
\bar{C}_{66} &= 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&+ 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
\bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta + 2C_{45} \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{45} &= C_{45} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (C_{55} - C_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{55} &= C_{55} \cos^2 \theta + C_{44} \sin^2 \theta - 2C_{45} \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{14} &= C_{14} \cos^3 \theta + (C_{15} + 2C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{24} - 2C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{25} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{15} &= C_{15} \cos^3 \theta - (C_{14} + 2C_{56}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{25} - 2C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{24} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{24} &= C_{24} \cos^3 \theta - (C_{25} + 2C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{14} - 2C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{15} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{25} &= C_{25} \cos^3 \theta - (2C_{56} - C_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{15} - 2C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{14} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{34} &= C_{34} \cos \theta + C_{35} \sin \theta \\
\bar{C}_{35} &= C_{35} \cos \theta + C_{34} \sin \theta \\
\bar{C}_{46} &= C_{46} \cos^3 \theta + (C_{56} + C_{14} - C_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{15} - C_{25} - C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta \\
&- C_{56} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{56} &= C_{56} \cos^3 \theta + (C_{15} + C_{25} - C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{24} - C_{14} - C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta \\
&+ C_{46} \sin^3 \theta
\end{aligned}$$

Em geral, os componentes mecânicos compostos são construídos pelo empilhamento de várias lâminas, determinando um laminado. Cada lamina é colocada com fibras orientadas em direção em direção diferente das demais. Assim, a análise do laminado precisa ser feita por um sistema de coordenadas que, em geral, não corresponde ao sistema principal de nenhuma das lâminas. Usa-se então dois sistemas: $0xyz$ e 0123 . O sistema global $0xyz$ é usado para definir os parâmetros do laminado. Cada lamina possui um sistema 0123 , com os eixos orientados nas direções principais de ortotropia do material.

Os dois sistemas são ilustrados na Figura 10. Numa lâmina reforçada por fibras unidirecionais, o eixo 1 é orientado ao longo das fibras e o eixo 3 na direção normal à lâmina. Uma vez que tem-se na seção anterior a relação tensão-deformação em relação ao sistema principal da lamina, torna-se então necessário obter a relação tensão-deformação em relação a um sistema $0xyz$ qualquer.

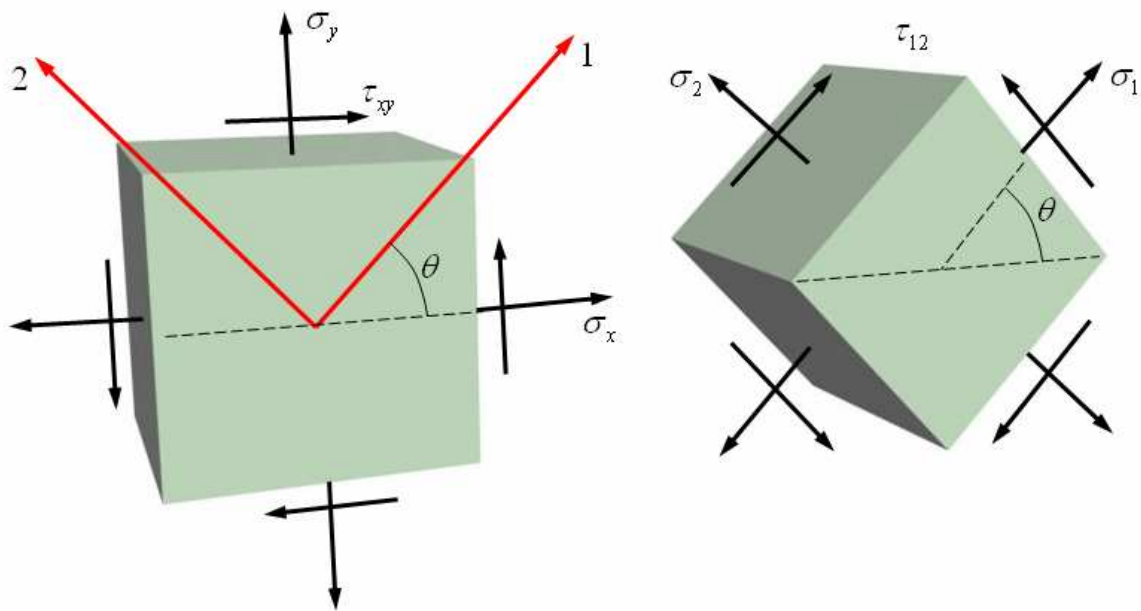


Figura 10 – Rotação positiva do sistema de eixos $0xy$ para o sistema 0123 .

Define-se matriz de transformação $[T_r]$ como a matriz que exprime a rotação de componentes do sistema $0xyz$ para o sistema 0123 , determinado pelo ângulo θ , conforme a Figura 10. Esta rotação plana é representada por:

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

A rotação é feita em torno do eixo z normal à lamina e não há transformação nessa direção. Por exemplo, dadas as componentes do vetor posição de um ponto P , com

componentes do vetor posição de um ponto P, com componentes $\{v^x\} = \{v_x, v_y\}^t$ nas direções 0xyz, suas componentes $\{v^l\} = \{v_1, v_2\}^t$, nas direções 0123, são dadas por $\{v^l\} = [T_r]^t \{v^x\}$. Prova-se que as componentes de tensões planas se transformam em uma rotação em torno do eixo z por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy2} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ou

$$[\sigma^x] = [T_r][\sigma^l][T_r]^t \quad (26)$$

Onde os índices x, 1 e t referem-se aos sistemas de eixos x-y e 1-2 e transposta de uma matriz, respectivamente. Efetuando-se as operações indicadas nesta equação e exprimindo os termos das matrizes $[\sigma^x]$ e $[\sigma^l]$ em colunas, denotadas por $\{\sigma^x\}$ e $\{\sigma^l\}$, tem-se a expressão da transformação plana das tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Ou

$$\{\sigma^x\} = [T]^{-1} \{\sigma^l\} \quad (28)$$

Onde $[T]$ é a matriz de transformação, dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (29)$$

A matriz inversa de $[T]$, isto é $[T]^{-1}$, é obtida simplesmente usando $-\theta$ em lugar de θ em $[T]$, o que resulta numa simples troca de sinais nos termos não-quadráticos em $\sin \theta$ fora da diagonal. As deformações transformam-se da mesma forma que as

tensões, desde que a deformação cisalhante $\gamma/2$ seja usada em vez da deformação γ .

Então:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\{\varepsilon^{x/2}\} = [T]^{-1} \{\varepsilon^{1/2}\}$$

As notações “x/2” e “1/2” são usadas para indicar que a deformação cisalhantes utilizada é $\gamma_{xy}/2$ ou $\gamma_{12}/2$, respectivamente, enquanto no resto do texto os sobrescritos x e 1 que se usa γ_{xy} e γ_{12} respectivamente. A equação (33) pode ser modificada com o uso de uma matriz $[R]$, definida por:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Pode-se então fazer:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\{\varepsilon^1\} = [T]^{-1} \{\varepsilon^{1/2}\}$$

O uso desta matriz $[R]$ é apenas uma maneira elegante de manipular algebricamente a aplicação deste “2” ou “1/2” nas definições das deformações cisalhantes. Isto se torna necessário porque, enquanto a transformação tensorial só é feita com $\gamma/2$, a lei de Hooke usa a deformação γ e aqui se utiliza ambas as relações simultaneamente. De forma similar, as deformações no sistema oxy também podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

$$\{\varepsilon^x\} = [R] \{\varepsilon^{x/2}\}$$

Com as relações acima obtidas, e a substituição das equações (31), (32) e (33), a relação reduzida (12) pode ser transformada pela seguinte sequência de operações:

$$\{\sigma^1\} = [Q] \{\varepsilon^1\} \quad (34)$$

$$\{\sigma^1\} = [Q][R] \{\varepsilon^{1/2}\}$$

$$\{\sigma^1\} = [Q][R][T] \{\varepsilon^{x/2}\}$$

$$\{\sigma^1\} = [Q][R][T][R]^{-1} \{\varepsilon^x\}$$

E transformando $\{\sigma^1\}$ tem-se

$$[T] \{\sigma^x\} = [Q][R][T][R]^{-1} \{\varepsilon^x\} \quad (35)$$

Porém, comparando-se as definições de $[T]$ e $[T]^{-1}$, nota-se que:

$$[R][T][R]^{-1} = [T]^{-t} \quad (36)$$

Então

$$\{\sigma^x\} = [T]^{-1} [Q][T]^{-t} \quad (37)$$

e obtém-se finalmente:

$$\{\sigma^x\} = [Q] \{\varepsilon^x\} \quad (38)$$

A relação tensão-deformação reduzida para o EPT é, então:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Onde as componentes da matriz podem ser obtidas de forma explicita efetuando-se as operações indicadas:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \end{aligned} \quad (40)$$

2.3.1 – TEORIA DE CASCA CILÍNDRICA

Casca cilíndrica pode ser definida como uma parte curva de um cilindro completo onde o seu contorno é definido por duas arestas longitudinais paralelas ao eixo do cilindro e por duas arestas transversais perpendiculares ao mesmo eixo. A casca cilíndrica possui curvatura definida apenas na direção circunferencial, já na axial o raio de curvatura é infinito. Quando o raio de curvatura circunferencial é constante, a casca é então considerada como circular. As cascas cilíndricas são divididas em três tipos de acordo com a relação entre o raio R e o seu comprimento L, GIBSON(1968):

- 1 – Cascas cilíndricas longas onde $R/L < 0,4$
- 2 – Cascas cilíndricas intermediárias onde $0,4 < R/L < 2,0$
- 3 – Cascas cilíndricas curtas onde $R/L > 2,0$

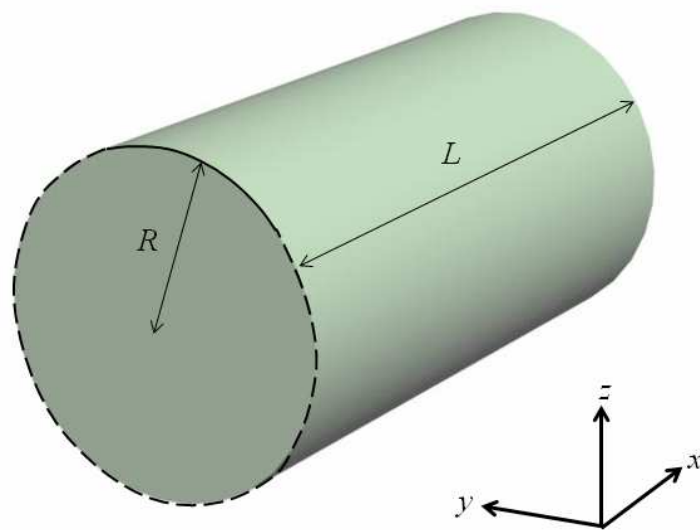


Figura 11 – Relação R / L em Cascas Cilíndricas

Nas cascas cilíndricas longas o carregamento produz forças internas de valor significativo ao longo da superfície. Estas forças internas usualmente são maiores que os valores obtidos em membranas. Os valores do modelo numérico não correspondem totalmente com valores obtidos de forma analítica. Na verdade, como a relação R/L diminui, o modelo analítico tende a se aproximar do modelo de uma viga com seção circular.

Nas cascas cilíndricas curtas o carregamento produz esforços internos que estão restritos à superfície longitudinal, neste caso a relação R/L aumenta e então assume-se que o modelo comporta-se como um problema de membrana. Além disso, outra classificação para cascas cilíndricas pode ser feita em relação a algumas restrições adicionais nas teorias de cascas devido a amplitude do raio de curvatura, a saber:

- Cascas cilíndricas profundas, se o raio de curvatura for pequeno (não requer alterações na teoria de cascas original);

- Cascas cilíndricas abatidas, se o raio for suficientemente grande (algumas restrições no campo de deslocamentos e de esforços aliviam a complexidade da teoria de casca original)

Inicialmente são abordadas as equações governantes da teoria de casca cilíndrica clássica e então devido à importância da teoria de cascas cilíndricas abatidas, suas equações governantes são obtidas pela imposição de simplificações da teoria clássica. Os esforços atuantes em um elemento diferencial de casca cilíndricas estão indicados nas figuras seguintes.

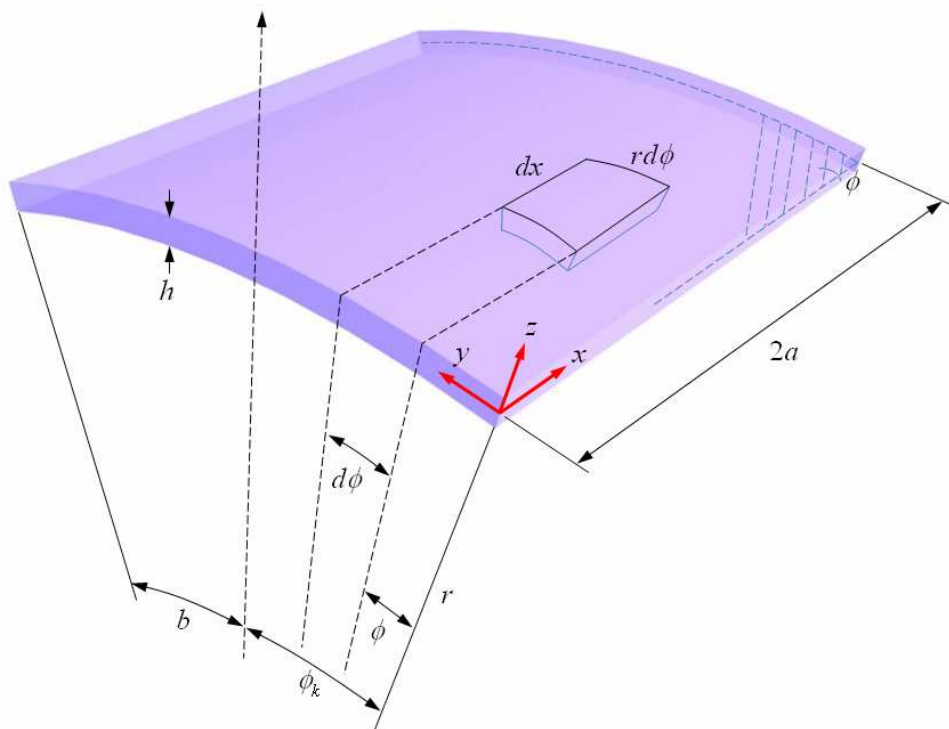


Figura 12 – Elemento Diferencial de Casca Cilindrica

Os esforços de membrana podem ser visualizados na Figura 13.

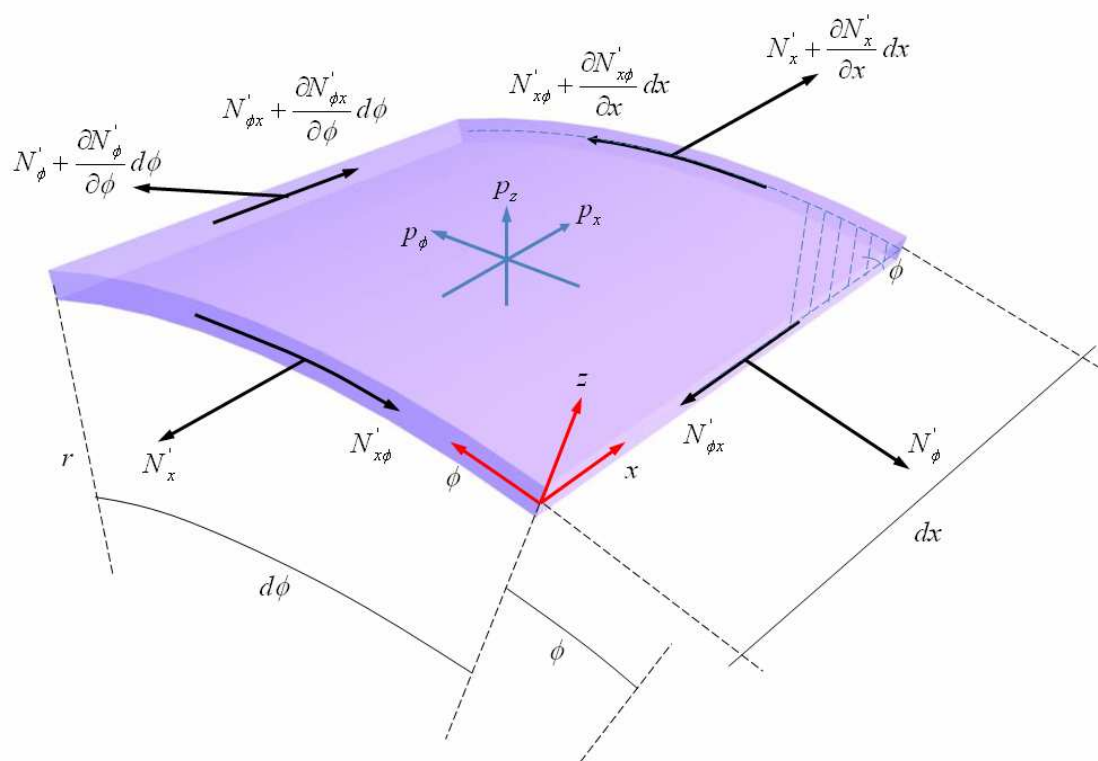


Figura 13 – Esforços do regime de membrana

Para o caso da flexão tem-se:

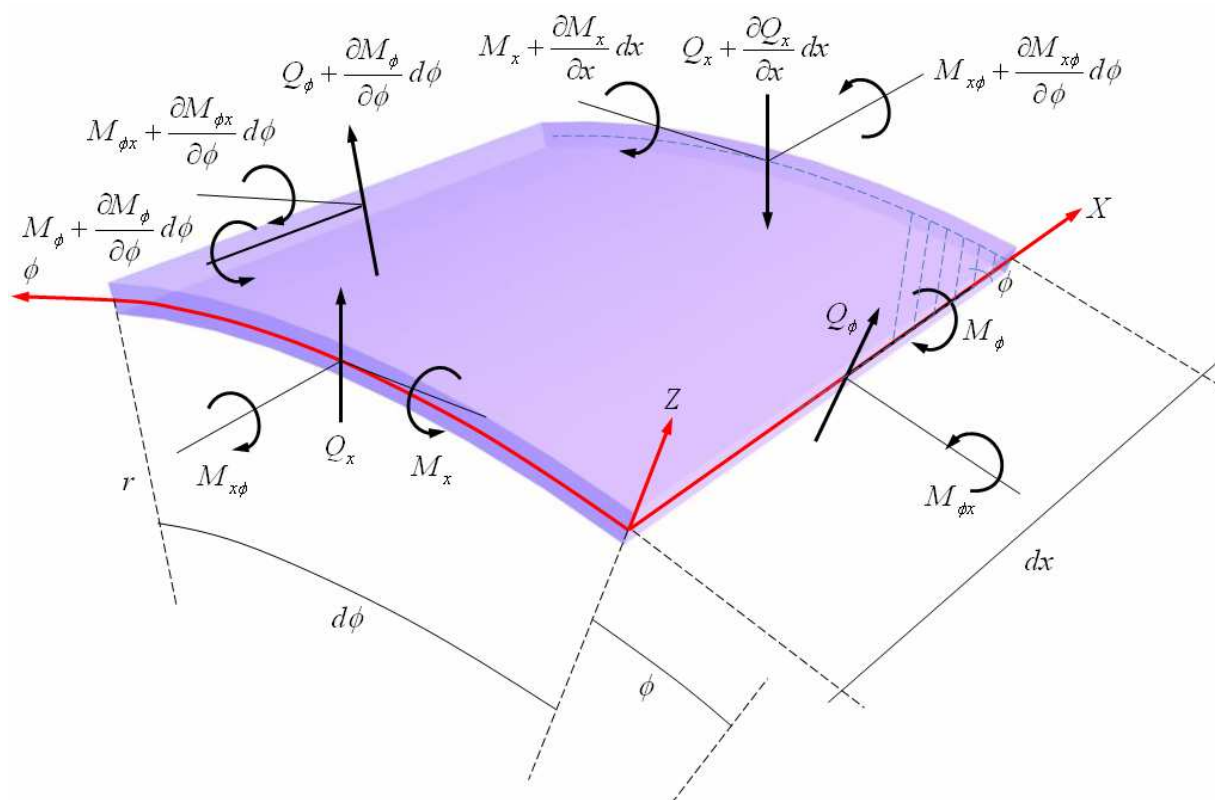


Figura 14 – Esforços do regime de flexão

Segundo BILLINGTON (1968), após aplicar as leis da estática clássica nos esforços de flexão indicada na Figura 14 e membrana na Figura 13, as seguintes equações de equilíbrio podem ser escritas para cascas cilíndricas.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot r + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} + p_x \cdot r = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} \cdot r + Q_\phi + p_\phi \cdot r = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot r + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} \cdot r + N_\phi + p_z \cdot r = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} \cdot r + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} \cdot r - Q_\phi \cdot r = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot r + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} \cdot r - Q_x \cdot r = 0 \quad (45)$$

Onde $N_x, N_\phi, N_{\phi x}$ são os esforços de membrana; $M_x, M_\phi, M_{\phi x}, Q_x, Q_\phi$ são os esforços de flexão; p_x, p_ϕ, p_z são as ações aplicadas nas direções axiais (x, ϕ) e radial z ; r é o raio da casca.

2.3.2 – RELAÇÕES CINEMÁTICAS

A teoria de cascas cilíndricas clássicas é desenvolvida admitindo-se algumas hipóteses:

- Os deslocamentos e deformações em regime de campos suaves;
- Seções transversais planas, inicialmente normais a superfície média da casca, após a deformação permanecem planas e normais à superfície deformada da casca.

As deformações do problema de membrana, no sistema cartesiano escritas em (2) quando escritas no sistema de referência cilíndrico ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (46)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\partial u}{r \partial \phi} + \frac{w}{r} \quad (47)$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{\partial u}{r \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (48)$$

Onde u e v são deslocamentos axiais na direção x e na direção circunferencial ϕ ; w é o deslocamento na direção radial e normal à superfície da casca. Já no problema de flexão, a curvatura da superfície média é expressa a partir das derivadas das rotações médias:

$$X_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (49)$$

$$X_\phi = \frac{\partial \phi_\phi}{r \partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \quad (50)$$

Já os empenamentos de superfície média de casca são dados por:

$$X_{x\phi} = \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \phi} + \frac{1}{2r} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (51)$$

Derivando as equações de equilíbrio , obtem-se:

$$\frac{\partial Q_\phi}{r \partial \phi} = \frac{\partial^2 M_\phi}{r^2 \partial \phi^2} - \frac{\partial^2 M_{x\phi}}{r \partial x \partial \phi} \quad (52)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{\phi x}}{r \partial x \partial \phi} \quad (53)$$

2.3.3 – TEORIA DE CASCAS CILÍNDRICAS ABATIDAS

A teoria de cascas cilíndricas abatidas pode ser obtida a partir da teoria de cascas cilíndricas pela introdução de duas hipóteses de DONNEL(1933, 1938).

a) O esforço cortante na direção radial é desprezado ($Q_\phi = 0$)

Assim, as equações de equilíbrio dadas em (41) e (44) passa a ser reescritas como:

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} \cdot r + p_\phi \cdot r = 0 \quad (54)$$

$$-\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} \cdot r + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} \cdot r = 0 \quad (55)$$

b) A contribuição dos deslocamentos no plano médio (u e v) na deformação de flexão são desprezados. Essa hipótese reduz as relações cinemáticas (50) e (51) a:

$$X_\phi = \frac{\partial \phi_\phi}{r \partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \quad (56)$$

$$X_{x\phi} = \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \phi} \quad (57)$$

2.3.4 - SOLUÇÕES DO MEF EM CASCAS CILÍNDRICAS ABATIDAS

As teorias de cascas laminadas podem ser divididas em Teorias de Camadas Simples Equivalentes (TCSE), Teoria da Elasticidade Tridimensional e Métodos de Modelos Múltiplos. As duas últimas lidam com níveis de idealização mais robustos para os campos de tensões no interior e nas interfaces das camadas do Laminado. Já a família de teorias de camadas simples equivalentes despreza alguns aspectos dos campos de

tensões e deformações, principalmente nas regiões de interface. As TCSE podem ainda ser sub-divididas em teorias de ordem zero (clássica), ordem um (inclusão da formação por cortante) e ordem superiores (segunda e terceira). De um modo geral, esses sub-casos da TCSE descrevem a cinemática da rotação da seção transversal e a inclinação da superfície média.

2.3.5 - TEORIA CLÁSSICA

A Teoria Clássica dos Laminados (TCL) baseia-se nas conhecidas hipóteses cinemáticas de Kirchhoff (análogas àquelas do estudo de placas de Kirchhoff) segundo as quais uma linha reta e perpendicular à superfície média indeformada, também conhecida como superfície de referência, permanece reta e perpendicular a esse plano e não se alonga na direção. Essa idealização também tem sido utilizada em cascas. Outras hipóteses adicionais são:

- a) A espessura do laminado é muito pequena comparada com suas outras dimensões;
- b) As camadas do laminado estão perfeitamente aderidas;
- c) O laminado e as lâminas são elástico-lineares;
- d) As tensões e deformações transversas (na direção da espessura) são desprezíveis;
- e) O laminado está sujeito apenas a pequenos deslocamentos.

2.3.6 - TEORIA DE CASCAS CILÍNDRICAS ABATIDAS DE DONNEL

As equações governantes (cinemática e equilíbrio) do painel cilíndrico pelo modelo da teoria de cascas cilíndricas abatidas de DONNEL (1938) requer hipóteses adicionais:

- a) Lâmina com única curvatura finita;
- b) O esforço cortante na direção radial é desprezado ($Q_y = 0$);

c) A contribuição dos deslocamentos no plano médio (u e v) na deformação de flexão é desprezada.

2.3.7 - RELAÇÕES CINEMÁTICAS

As relações entre os deslocamentos e as deformações em coordenadas cilíndricas (Figura 15) ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w}{r}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (58)$$

$$X_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad X_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad X_{xz} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

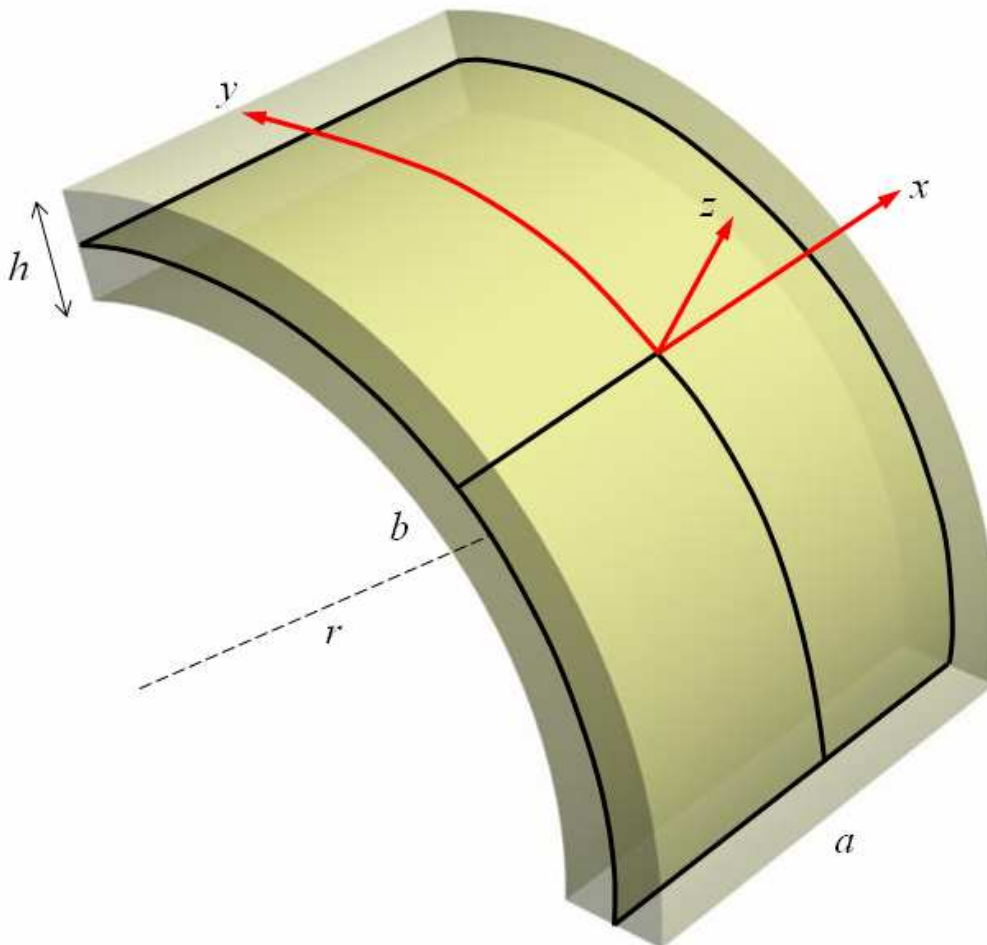


Figura 15 – Sistema de Coordenadas da Casca Cilíndrica

2.3.8 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Admitindo-se um material laminado ortótropo, as relações constitutivas de tensão e deformação ficam:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z\}, & \{\chi\}^T &= \{\chi_x & \chi_y & \chi_z\} \\ \{N\}^T &= \{N_x & N_y & N_{xy}\}, & \{M\}^T &= \{M_x & M_y & M_z\} \end{aligned}$$

Onde as sub-matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ são dadas por:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & V_{66} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, [Q^k] = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}$$

As constantes $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, Q_{ij}^k$ são dadas por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{camadas}} (h_k - h_{k-1}) Q_{ij}^k, B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{camadas}} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_{ij}^k, C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_{camadas}} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_{ij}^k \quad (60)$$

Onde h_k e Q_{ij}^k são a espessura e as componentes das propriedades mecânicas da k-ésima lâmina do compósito no sistema x,y, que podem ser obtidas a partir da transformação do sistema principal de ortótropa $\bar{x}, \bar{y}$, pela relação:

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \bar{Q}_{11}^k \cos^4 \theta_k + 2(\bar{Q}_{12}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{22}^k \sin^4 \theta_k \\ Q_{12}^k &= (\bar{Q}_{11}^k + \bar{Q}_{22}^k - 4\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{12}^k (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \end{aligned}$$

$$Q_{22}^k = \bar{Q}_{11}^k \sin^4 \theta_k + 2(\bar{Q}_{12}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \bar{Q}_{22}^k \cos^4 \theta_k$$

$$Q_{16}^k = (\bar{Q}_{11}^k - \bar{Q}_{12}^k - 2\bar{Q}_{66}^k) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (\bar{Q}_{12}^k - \bar{Q}_{22}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k$$

$$Q_{26}^k = (\bar{Q}_{11}^k - \bar{Q}_{12}^k - 2\bar{Q}_{66}^k) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (\bar{Q}_{12}^k - \bar{Q}_{22}^k + 2\bar{Q}_{66}^k) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k$$

com:

$$\bar{Q}_{11}^k = \frac{\bar{E}_1^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k}, \bar{Q}_{12}^k = \frac{\bar{\nu}_{12}^k \bar{E}_2^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k} = \frac{\bar{\nu}_{21}^k \bar{E}_1^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k}, \bar{Q}_{22}^k = \frac{\bar{E}_2^k}{1 - \bar{\nu}_{12}^k \bar{\nu}_{21}^k}, \bar{Q}_{66}^k = \bar{G}_{12}^k$$

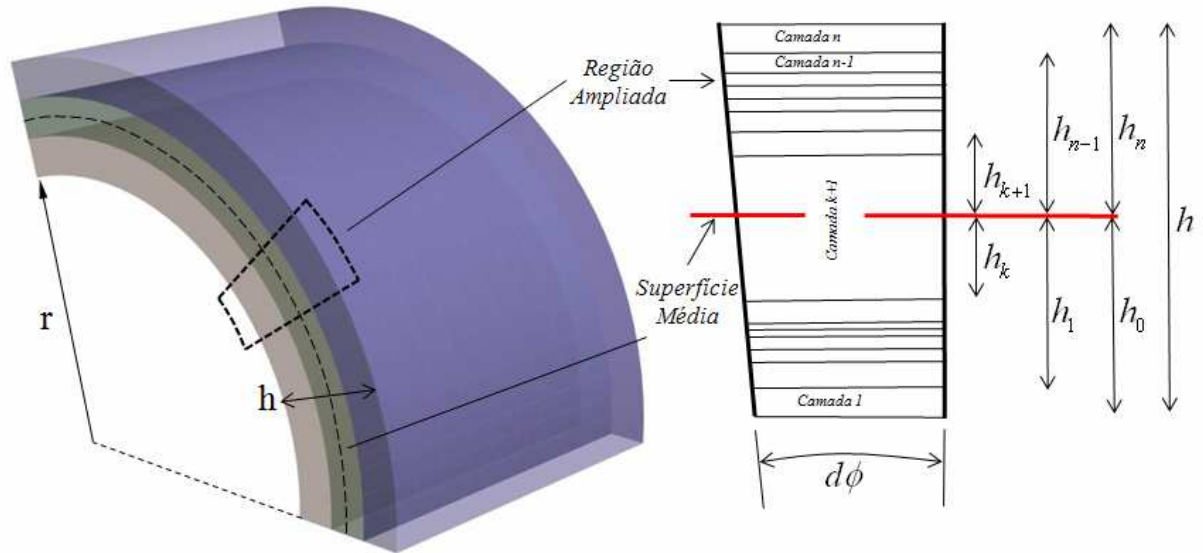


Figura 16 – Detalhes geométricos das camadas no laminado

O funcional de energia potencial da casca é dado por

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\psi\}^T [D] \{\psi\} dA \quad (61)$$

2.3.9 – PROPOSTA DO ELEMENTO CYS LAMINADO

Como contribuição desta tese, é desenvolvido um elemento finito de casca cilíndrica para materiais compostos, em que são adotadas as mesmas interpolações para os campos de deslocamentos e deformações utilizadas por (Djoudi e Bahai, 2003) (no elemento finito de casca cilíndrica (CYS) para materiais homogêneos e isotrópicos). Esse elemento possui quatro nós com 5 graus de liberdade (mecânicos) por nó, sendo três translações (u, v, w) e duas rotações ($\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$), vide Figura 17. (Convém notar que os graus de liberdade dos nós j e l não foram indicados para não saturar a figura), por isso as funções de forma possuem 20 constantes independentes.

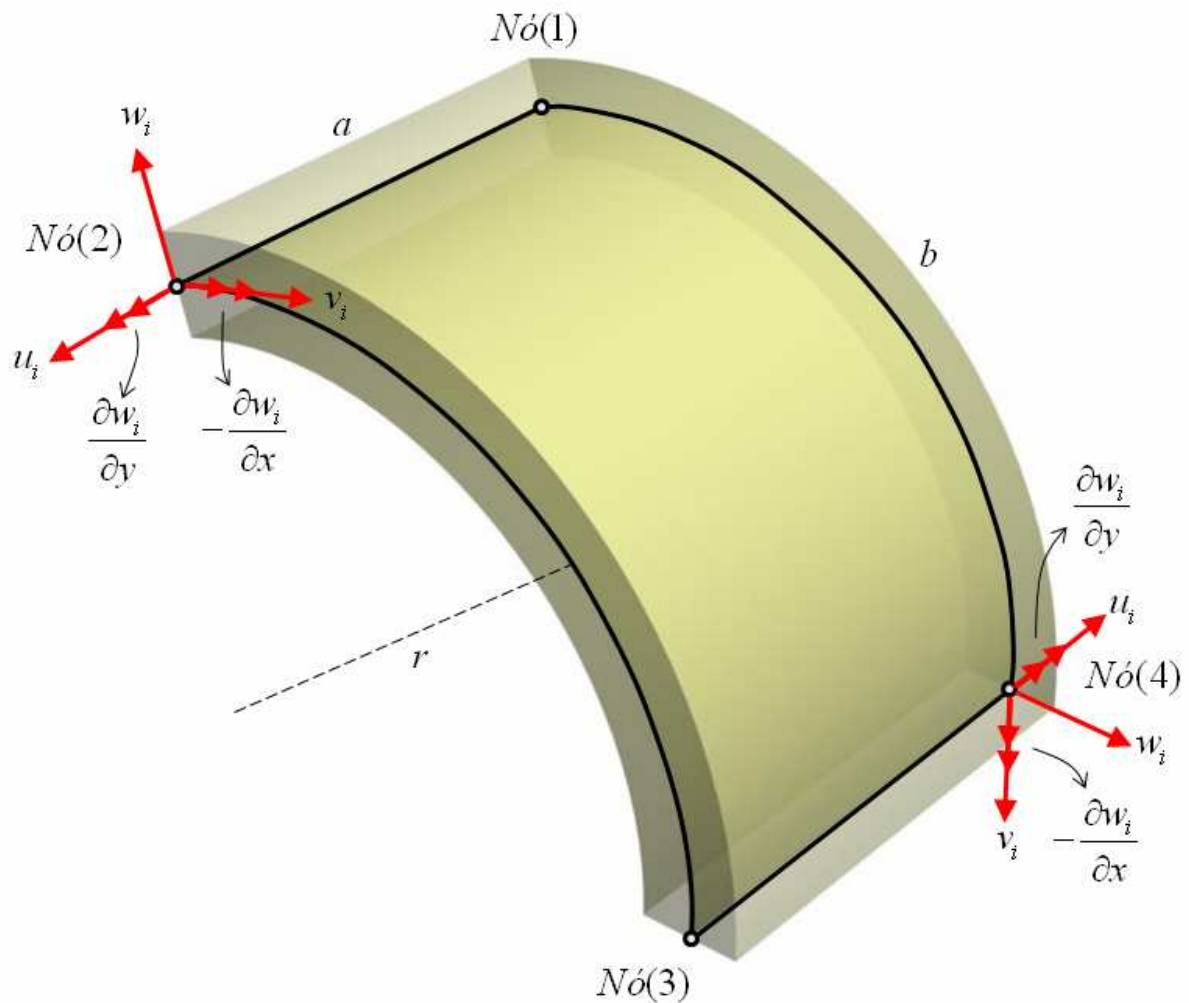


Figura 17 – Graus de Liberdade da casca

O elemento finito CYS é baseado na filosofia do modelo de deformações assumidas. Esta técnica baseia-se na adoção de equações complementares à deformação, e só então, o campo de deslocamentos é determinado. Assim, as deformações de casca ficam:

$$\varepsilon_x = a_7 + a_8 y \quad (62)$$

$$\varepsilon_y = a_9 + a_{10}x - 1/r(a_{12}x^2/2 + a_{13}x^3/6 + a_{14}yx^2/2 + a_{15}yx^3/6)$$

$$\gamma_{xy} = a_{11} - (a_{10}y)$$

$$X_x = a_{12} + a_{13}x + a_{14}y + a_{15}yx$$

$$X_y = a_{16} + a_{17}x + a_{18}y + a_{19}xy$$

$$X_{xy} = a_{20} + (2a_{14}x + a_{15}x^2 + 2a_{17}y + a_{19}y^2)$$

Então, a partir da integração das “deformações assumidas”, e o compute dos movimentos de corpo rígido, os deslocamentos e rotações podem ser escritos como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [G_{11}(x, y)]\{\hat{a}\} + [G_{12}(x, y)]\{\hat{\hat{a}}\} = [Z]\{a\} \quad (63)$$

$$\begin{Bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = [G_{21}(x, y)]\{\hat{a}\} + [G_{22}(x, y)]\{\hat{\hat{a}}\} \quad (64)$$

com:

$$\{\hat{a}\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{10}\}, \quad \{\hat{\hat{a}}\}^T = \{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{20}\},$$

$$[G_{11}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & y & x & x \cdot y & 0 & -y \\ -\frac{y}{r} & -x \cdot \frac{y}{r} & \frac{-y^2}{2r} & 0 & 1 & -x & 0 & \frac{-x^2}{2} & y & x \cdot y \\ 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[G_{12}(x, y)] = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-y^4}{24r} & 0 & \frac{-y^5}{120r} & \frac{-y^3}{12r} \\ \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y^3}{6r} & \frac{y^3x}{6r} & \frac{y^4}{24r} & \frac{y^4}{24r} & x \cdot \frac{y^2}{4r} \\ 1 & -x \cdot \frac{y}{2} & \frac{-y^3}{6} & -x^2 \cdot \frac{y}{2} & -x^3 \cdot \frac{y}{6} & \frac{-y^2}{2} & -x \cdot \frac{y^2}{2} & \frac{-y^3}{6} & \frac{-x \cdot y^3}{6} & -x \cdot \frac{y}{2} \end{pmatrix},$$

$$[G_{21}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[G_{22}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & -x & \frac{-x^2}{2} & -x \cdot y & \frac{-(x^2 \cdot y)}{2} & 0 & \frac{-y^2}{2} & 0 & \frac{-y^3}{6} & \frac{-y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x^2}{2} & \frac{-x^3}{6} & -y & -x \cdot y & \frac{-y^2}{2} & \frac{-(x \cdot y^2)}{2} & \frac{-x}{2} \end{pmatrix},$$

Os deslocamentos da casca em (63) e (64), na forma matricial, ficam:

$$\{\delta\}^T = \left\{ u \quad v \quad w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} = [G_u] \{a_i\} \quad (65)$$

Onde:

$$[G_u] = \begin{bmatrix} G_{11}(x, y) & G_{12}(x, y) \\ G_{21}(x, y) & G_{22}(x, y) \end{bmatrix} \quad (66)$$

Quando as coordenadas de cada nó são substituídas na Equação (65) então:

$$\{\delta_e\} = [C_d] \{a_i\} \quad (67)$$

$$\text{Onde: } \{\delta_e\}^T = \left\{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad u_k \quad v_k \quad w_k \quad \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad u_l \quad v_l \quad w_l \quad \frac{\partial w_l}{\partial x} \quad \frac{\partial w_l}{\partial y} \right\}$$

E escrevendo a matriz $[C_d]$ em função de (66) obtem-se as seguintes equações:

Submatriz $[C_{d11}]$

$$[C_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & b & a & a \cdot b & 0 & -b \\ \frac{-b}{r} & -a \cdot \frac{b}{r} & \frac{-b^2}{2r} & 0 & 1 & -a & 0 & \frac{-a^2}{2} & b & a \cdot b \\ 1 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & b & -a & -a \cdot b & 0 & -b \\ \frac{-b}{r} & a \cdot \frac{b}{r} & \frac{-b^2}{2r} & 0 & 1 & a & 0 & \frac{a^2}{2} & b & -a \cdot b \\ 1 & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Submatriz $[C_{d12}]$

$$[C_{d12}] = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b^4}{24r} & 0 & \frac{-b^5}{120r} & \frac{-b^3}{12r} \\ \frac{-a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b^3}{6r} & \frac{b^3 \cdot a}{6r} & \frac{b^4}{24r} & \frac{b^4}{24r} & -a \cdot \frac{b^2}{4r} \\ 1 & a \cdot \frac{b}{2} & -\frac{b^3}{6} & a^2 \cdot \frac{b}{2} & a^3 \cdot \frac{b}{6} & \frac{-b^2}{2} & a \cdot \frac{b^2}{2} & \frac{-b^3}{6} & \frac{a \cdot b^3}{6} & a \cdot \frac{b}{2} \\ 0 & a & \frac{a^2}{2} & a \cdot b & \frac{a^2 \cdot b}{2} & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & \frac{b^2}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{6} & a & a \cdot b & \frac{b^2}{2} & \frac{a \cdot b^2}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b^4}{24r} & 0 & \frac{-b^5}{120r} & \frac{-b^3}{12r} \\ \frac{-a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b^3}{6r} & -\frac{b^3 \cdot a}{6r} & \frac{b^4}{24r} & \frac{b^4}{24r} & -a \cdot \frac{b^2}{4r} \\ 1 & a \cdot \frac{b}{2} & -\frac{b^3}{6} & a^2 \cdot \frac{b}{2} & a^3 \cdot \frac{b}{6} & \frac{-b^2}{2} & a \cdot \frac{b^2}{2} & \frac{-b^3}{6} & \frac{a \cdot b^3}{6} & a \cdot \frac{b}{2} \\ 0 & a & \frac{a^2}{2} & a \cdot b & \frac{a^2 \cdot b}{2} & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & \frac{b^2}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{6} & b & a \cdot b & \frac{b^2}{2} & \frac{a \cdot b^2}{2} & \frac{a}{2} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Submatriz $[C_{d21}]$

$$[C_{d21}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & -b & -a & a \cdot b & 0 & b \\ \frac{b}{r} & -a \cdot \frac{b}{r} & \frac{b^2}{2r} & 0 & 1 & a & 0 & \frac{a^2}{2} & -b & a \cdot b \\ 1 & -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & -b & a & -a \cdot b & 0 & b \\ \frac{b}{r} & a \cdot \frac{b}{r} & \frac{b^2}{2r} & 0 & 1 & a & 0 & \frac{a^2}{2} & -b & -a \cdot b \\ 1 & a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Submatriz $[C_{d22}]$

$$[C_{d22}] = \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b^4}{24r} & 0 & \frac{b^5}{120r} & \frac{b^3}{12r} \\ -\frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b^3}{6r} & \frac{b^3 \cdot a}{6r} & -\frac{b^4}{24r} & -\frac{b^4}{24r} & a \cdot \frac{b^2}{4r} \\ 1 & a \cdot \frac{b}{2} & -\frac{b^3}{6} & a^2 \cdot \frac{b}{2} & a^3 \cdot \frac{b}{6} & \frac{b^2}{2} & -a \cdot \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{6} & -\frac{a \cdot b^3}{6} & -a \cdot \frac{b}{2} \\ 0 & a & \frac{a^2}{2} & -a \cdot b & \frac{(a^2 \cdot b)}{2} & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & \frac{b^3}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{6} & b & -a \cdot b & -\frac{b^2}{2} & -\frac{a \cdot b^2}{2} & -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b^4}{24r} & 0 & \frac{b^5}{120r} & \frac{b^3}{12r} \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b^3}{6r} & -\frac{b^3 \cdot a}{6r} & \frac{b^4}{24r} & \frac{b^4}{24r} & a \cdot \frac{b^2}{4r} \\ 1 & -a \cdot \frac{b}{2} & \frac{b^3}{6} & a^2 \cdot \frac{b}{2} & a^3 \cdot \frac{b}{6} & -\frac{b^2}{2} & -a \cdot \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{6} & \frac{a \cdot b^3}{6} & a \cdot \frac{b}{2} \\ 0 & -a & -\frac{a^2}{2} & a \cdot b & \frac{(a^2 \cdot b)}{2} & 0 & -\frac{b^2}{2} & 0 & \frac{b^3}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{6} & b & a \cdot b & -\frac{b^2}{2} & -\frac{a \cdot b^2}{2} & -\frac{a}{2} \end{bmatrix} \quad (71)$$

As constantes (a_i) podem ser obtidas de:

$$\{a_i\} = [C_d]^{-1} \{\delta_e\} \quad (72)$$

A partir das equações (67) e (72) os deslocamentos e rotações de interesse podem ser escritos em função dos graus de liberdade do elemento resultando em:

$$\{a_i\} = [C_d]^{-1} \{\delta_e\} \quad (73)$$

O vetor das deformações e curvaturas $[\psi]$ pode ser escrito em função dos graus de liberdade pela aplicação das relações Equação (61) de uma forma apropriada nas linhas do vetor $\{\delta\}$ dado em (73), resultando em:

$$\{\psi\} = [B_u][a_i] \quad (74)$$

$$\{\psi\} = [B_u][C_d]^{-1} \{\delta_e\} \quad (75)$$

Introduzindo-se a Equação (73) e a Equação (75) na Equação (61), a energia potencial fica:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_{uu}] \{\delta_e\} \quad (76)$$

Onde a matriz de rigidez da casca fica:

$$[K_{uu}] = \int_A [C_d^{-1}]^T [B_u]^T [D][B_u][C_d^{-1}] dA \quad (77)$$

O cálculo das integrais da Equação (77) resulta em:

$$[K_{uu}] = [C_d^{-1}]^T \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [B_u]^T [D][B_u] dx dy \right\} [C_d^{-1}] = [C_d^{-1}]^T [Q] [C_d^{-1}] \quad (78)$$

Os valores explícitos da matriz Q na Equação (78) podem ser calculados computando as contribuições dos efeitos de membrana e de flexão conforme discutido a seguir:

$$[Q] = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [B_m]^T [B_b]^T \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B_b] \end{bmatrix} dx dy \quad (79)$$

As matrizes B_m e B_b em (79) são obtidas a partir da Equação (80) isto é:

$$[\Psi_m] = [B_{m1} B_{m2}] \begin{Bmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a} \end{Bmatrix}, \quad [\Psi_b] = [B_{b1} B_{b2}] \begin{Bmatrix} \bar{\bar{a}}_0 \\ \bar{\bar{a}} \end{Bmatrix} \quad (80)$$

Com:

$$[B_{m2}] = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2r & -x^3/6r & -yx^2/2r & -yx^3/6r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_{b2}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{a}_0\}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}$$

$$\{\bar{a}\}^T = \{a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16} \ a_{17} \ a_{18} \ a_{19} \ a_{20}\}$$

$$\{\bar{\bar{a}}_0\}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11}\}$$

$$\{\bar{\bar{a}}\}^T = \{a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16} \ a_{17} \ a_{18} \ a_{19} \ a_{20}\}$$

Após a integração da equação (79) seguida da superposição dos termos dos efeitos de membrana e de flexão, os elementos não nulos da matriz $[Q]$ são obtidos.

$$Q(7,7) = 4A_{11}ab, \quad (81)$$

$$Q(7,9) = 4A_{12}ab,$$

$$Q(7,11) = 4A_{16}ab,$$

$$Q(7,12) = -(2/3)A_{12}a^3b/r - 4B_{11}ab,$$

$$Q(7,15) = -4B_{16}a^3b/3,$$

$$Q(7,16) = -4B_{12}ab$$

$$Q(7,19) = -4B_{16}ab^3/3,$$

$$Q(7,20) = -4B_{16}ab,$$

$$Q(8,8) = 4A_{11}ab^3/3,$$

$$Q(8,10) = -2A_{16}ab^3/3$$

$$Q(8,14) = -(2/9)A_{12}a^3b^3/r - 4B_{11}ab^3/3,$$

$$Q(8,17) = -8B_{16}ab^3/3,$$

$$Q(8,18) = -4B_{12}ab^3/3$$

$$Q(9,9) = 4A_{22}ab,$$

$$Q(9,11) = 4A_{26}ab,$$

$$Q(9,12) = -(2/3)A_{22}a^3b/r - 4B_{12}ab,$$

$$Q(9,15) = -4B_{26}a^3b/3,$$

$$Q(9,16) = -4B_{22}ab,$$

$$Q(9,19) = -4B_{26}ab^3/3,$$

$$Q(9,20) = -4B_{26}ab,$$

$$Q(10,10) = (4/3)A_{22}a^3b/3 + 4A_{66}ab^3/3,$$

$$Q(10,13) = -(2/15)A_{22}a^5b/r - 4B_{12}a^3b/3,$$

$$Q(10,14) = -8B_{26}a^3b/3 + 4B_{16}ab^3/3 + 2A_{26}a^3b^3/(9r),$$

$$Q(10,17) = -4B_{22}a^3b/3 + 8B_{66}ab^3/3,$$

$$Q(10,18) = 4B_{26}ab^3/3,$$

$$Q(11,11) = 4A_{66}ab,$$

$$Q(11,12) = -2A_{26}a^3b/(3r) - 4B_{16}ab,$$

$$Q(11,15) = -4B_{66}a^3b/3,$$

$$Q(11,16) = -4B_{26}ab,$$

$$Q(11,19) = -4B_{66}ab^3/3,$$

$$Q(11,20) = -4B_{66}ab$$

$$Q(12,12) = 4C_{11}ab + A_{22}a^5b/(5r^2) + 4B_{12}a^3b/(3r),$$

$$Q(12,15) = 4C_{16}a^3b/3 + 2B_{26}a^5b/(5r),$$

$$Q(12,16) = 4C_{12}ab + 2B_{12}a^3b/(3r),$$

$$Q(12,19) = 2B_{26}a^3b^3/(9r) + 4C_{16}ab^3/3,$$

$$Q(12,20) = 2B_{26}a^3b/(3r) + 4C_{16}ab,$$

$$Q(13,13) = (4/3)C_{11}a^3b + A_{22}a^7b/(63r^2) + 2B_{12}a^5b/(15r),$$

$$Q(13,14) = 8C_{16}a^3b/3 + 4B_{26}a^5b/(15r),$$

$$Q(13,17) = (4/3)C_{12}a^3b + 2B_{22}a^5b/(15r),$$

$$Q(14,14) = (4/3)C_{11}ab^3 + (16/3)C_{66}a^3b + A_{22}a^5b^3/(15r^2) + 4B_{12}a^3b^3/(9r),$$

$$Q(14,17) = (8/3)ab(C_{16}b^2 + C_{26}a^2) + 4B_{26}a^3b^3/(9r),$$

$$Q(14,18) = 2B_{22}a^3b^3/(9r),$$

$$Q(15,15) = (4/9)C_{11}a^3b^3 + (4/5)C_{66}a^5b + A_{22}a^7b^3/(189r^2) + 4B_{12}a^5b^3/(45r),$$

$$Q(15,16) = 4C_{26}a^3b/3, \quad Q(15,19) = (4/9)C_{12}a^3b^3 + (4/9)C_{66}a^3b^3 + 2B_{22}a^5b^3/(45r),$$

$$Q(15,20) = (4/3)C_{66}a^3b,$$

$$Q(16,16) = 4C_{22}ab,$$

$$Q(16,19) = 4C_{26}ab^3/3,$$

$$Q(16,20) = 4C_{26}ab,$$

$$Q(17,17) = (16/3)C_{66}ab^3 + (4/3)C_{22}a^3b,$$

$$Q(17,18) = (8/3)C_{26}ab^3,$$

$$Q(18,18) = (4/3)C_{22}ab^3,$$

$$Q(19,19) = (4/9)C_{22}a^3b^3 + (4/5)C_{66}ab^5,$$

$$Q(19,20) = (4/3)C_{66}ab^3,$$

$$Q(20,20) = 4C_{66}ab,$$

Onde as constantes $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, Q_{ij}^k$ são dadas em (60):

O sistema algébrico do problema da casca cilíndrica pode ser obtido pelo acúmulo das contribuições de todos os elementos finitos, resultando em:

$$[K_{uu}]\{U\} = \{F_u\} \quad (82)$$

Onde $\{U\}, \{F_u\}$ são os vetores de deslocamento e forças da estrutura, que reúne as contribuições de todos elementos finitos de cascas cilíndricas.

2.3.10 – VETOR NODAL EQUIVALENTE

Nesta seção é mostrada uma contribuição original desse projeto. Aqui são deduzidos os vetores nodais equivalentes de carregamentos uniformemente, linearmente distribuídos e do peso próprio para o elemento finito CYS. Assim, como resultado desta Tese é fechada uma lacuna até então pendente na formulação original do CYS apresentada por Djoudi & Bahai. O vetor nodal consistente é obtido através do trabalho realizado pelo carregamento externo que pode ser expresso por:

$$W = \int_A (p_x u + p_y v + p_z w) dA = \int_A \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} dA \quad (83)$$

Já os carregamentos externos devido à distribuição linear e ao peso próprio devem ser tratados de maneira distinta. No primeiro caso, por ser linear, sua representação matricial fica:

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = [R] \{\hat{p}\} \quad (84)$$

Onde a matriz $[R]$ depende do tipo de distribuição das pressões no elemento cujos valores nodais são:

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\}$$

Substituindo-se o vetor de forças na forma em (84) e o vetor de deslocamentos escrito em (63) na expressão do trabalho externo em (83) fica:

$$W = \int_A \{\delta_e\}^T [C_d]^{-T} [Z]^T [R] dA \{\hat{p}\} = \{\delta_e\}^T [C_d]^{-T} [A] \{\hat{p}\} = \{\delta_e\}^T \{F\} \quad (85)$$

Onde :

$$[A] = \int_A [Z]^T [R] dA$$

Ou a partir de uma comparação termo a termo em (85), conclui-se que o vetor nodal equivalente $\{F\}$ é dado por:

$$\{F\} = [C_d]^{-T} \{P\} \quad (86)$$

Onde: $\{P\} = [A] \{\hat{p}\}$

Se a distribuição de pressões for linear no domínio do elemento CYS, então a matriz $[R]$ em (84) fica:

$$[R] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Sendo as funções interpoladoras N_i dadas por:

$$N_1 = (1 + x/a)(1 + y/b)/4; \quad (88)$$

$$N_2 = (1 - x/a)(1 + y/b)/4;$$

$$N_3 = (1 - x/a)(1 - y/b)/4;$$

$$N_4 = (1 + x/a)(1 - y/b)/4$$

Com “a” denotando o semi-comprimento e “b” o semi-arco do elemento (Figura 17).

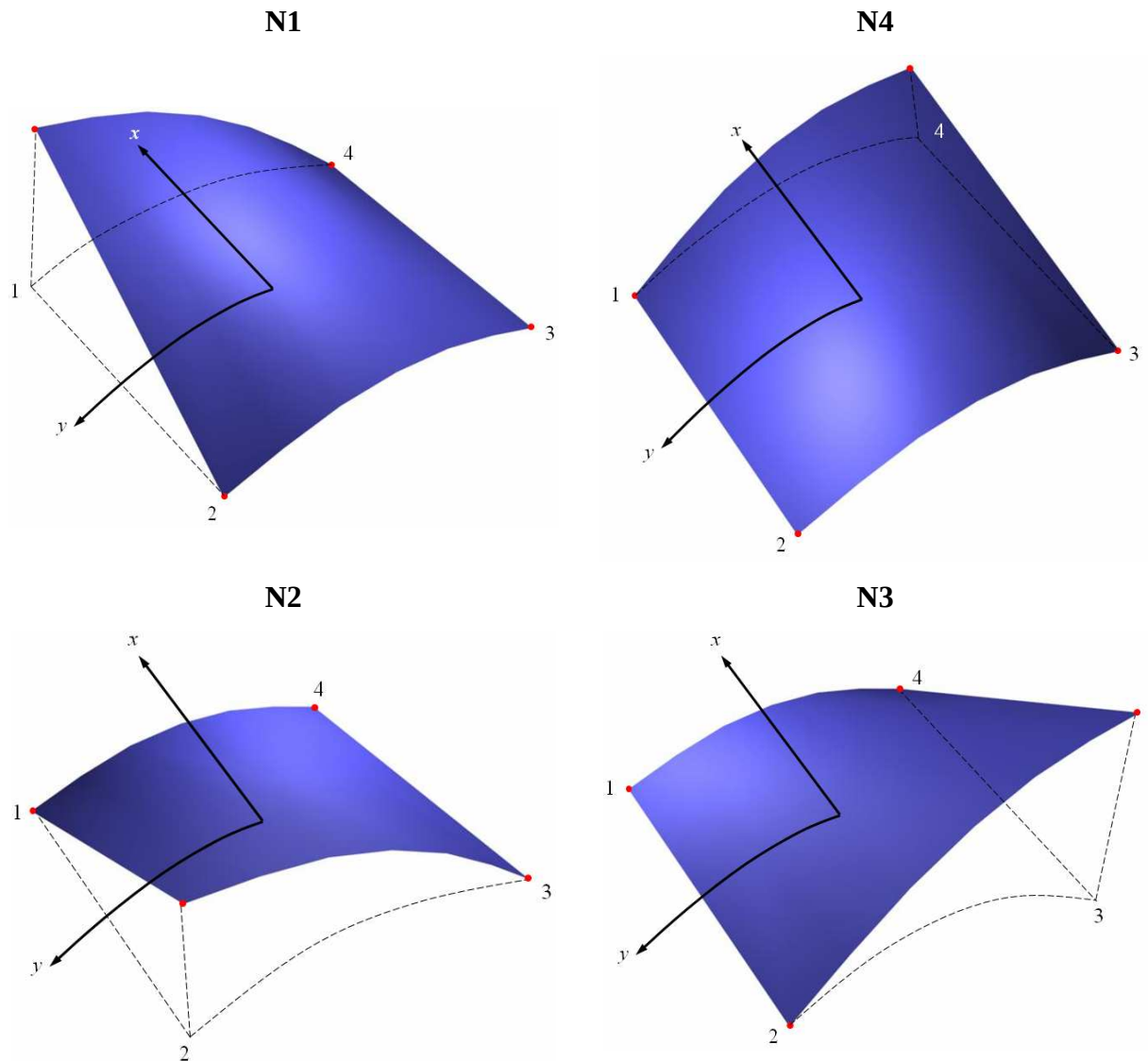


Figura 18 – Funções de Forma do Elemento de Casca Cilíndrica.

Após o cálculo da integral que forma a matriz $[A]$ particionada em (85) resulta nos valores explícitos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{3 \cdot r} & 1 & 0 & -\frac{b}{3 \cdot r} & 1 & 0 & \frac{b}{3 \cdot r} & 1 & 0 & \frac{b}{3 \cdot r} & 1 \\ \frac{b^2}{6 \cdot r} & \frac{a \cdot b}{9 \cdot r} & \frac{a}{3} & \frac{b^2}{6 \cdot r} & \frac{a \cdot b}{9 \cdot r} & -\frac{a}{3} & \frac{b^2}{6 \cdot r} & -\frac{a \cdot b}{9 \cdot r} & -\frac{a}{3} & \frac{b^2}{6 \cdot r} & -\frac{a \cdot b}{9 \cdot r} & \frac{a}{3} \\ 0 & -\frac{b^2}{6 \cdot r} & \frac{b}{3} & 0 & -\frac{b^2}{6 \cdot r} & \frac{b}{3} & 0 & -\frac{b^2}{6 \cdot r} & -\frac{b}{3} & 0 & -\frac{b^2}{6 \cdot r} & -\frac{b}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{b}{3} & -\frac{a}{3} & 0 & -\frac{b}{3} & \frac{a}{3} & 0 & -\frac{b}{3} & \frac{a}{3} & 0 & -\frac{b}{3} & -\frac{a}{3} & 0 \\ \frac{a}{3} & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 0 & 0 & -\frac{a}{3} & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 0 & 0 \\ \frac{a \cdot b}{9} & -\frac{a^2}{6} & 0 & -\frac{a \cdot b}{9} & -\frac{a^2}{6} & 0 & \frac{a \cdot b}{9} & -\frac{a^2}{6} & 0 & \frac{a \cdot b}{9} & -\frac{a^2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{b}{3} & 0 & 0 & \frac{b}{3} & 0 & 0 & -\frac{b}{3} & 0 & 0 & -\frac{b}{3} & 0 \\ -\frac{b^2}{6} & \frac{a \cdot b}{9} & 0 & -\frac{b^2}{6} & -\frac{a \cdot b}{9} & 0 & -\frac{b^2}{6} & \frac{a \cdot b}{9} & 0 & -\frac{b^2}{6} & \frac{a \cdot b}{9} & 0 \end{bmatrix}$$

(89)

E sua segunda parte.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{b}{6} & \frac{a}{6} & 0 & \frac{b}{6} & -\frac{a}{6} & 0 & -\frac{b}{6} & -\frac{a}{6} & 0 & -\frac{b}{6} & \frac{a}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2}{6} & 0 & 0 & -\frac{a}{3} & \frac{b^2}{6 \cdot r} & -\frac{a \cdot b}{9 \cdot r} & -\frac{a}{3} & \frac{b^2}{6 \cdot r} & 0 & -\frac{a^2}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{a^3}{30} & 0 & 0 & \frac{b}{3} & 0 & -\frac{b^2}{6 \cdot r} & -\frac{b}{3} & 0 & 0 & -\frac{a^3}{30} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2 \cdot b}{18} & 0 & 0 & -\frac{a^2 \cdot b}{18} & 0 & 0 & \frac{a^2 \cdot b}{18} & 0 & 0 & \frac{a^2 \cdot b}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{a^3 \cdot b}{90} & 0 & 0 & \frac{a^3 \cdot b}{90} & 0 & 0 & -\frac{a^3 \cdot b}{90} & 0 & 0 & \frac{a^3 \cdot b}{90} \\ 0 & \frac{b^3}{30 \cdot r} & -\frac{b^2}{6} & 0 & \frac{b^3}{30 \cdot r} & -\frac{b^2}{6} & 0 & -\frac{b^3}{30 \cdot r} & -\frac{b^2}{6} & 0 & -\frac{b^3}{30 \cdot r} & -\frac{b^2}{6} \\ -\frac{b^4}{120 \cdot r} & \frac{a \cdot b^3}{90 \cdot r} & -\frac{a \cdot b^2}{18} & -\frac{b^4}{120 \cdot r} & \frac{a \cdot b^3}{90 \cdot r} & \frac{a \cdot b^2}{18} & -\frac{b^4}{120 \cdot r} & \frac{a \cdot b^3}{90 \cdot r} & \frac{a \cdot b^2}{18} & -\frac{b^4}{120 \cdot r} & \frac{a \cdot b^3}{90 \cdot r} & -\frac{a \cdot b^2}{18} \\ 0 & \frac{b^4}{120 \cdot r} & -\frac{b^3}{30} & 0 & \frac{b^4}{120 \cdot r} & -\frac{b^3}{30} & 0 & \frac{b^4}{120 \cdot r} & -\frac{b^3}{30} & 0 & \frac{b^4}{120 \cdot r} & -\frac{b^3}{30} \\ -\frac{b^5}{840 \cdot r} & \frac{a \cdot b^4}{360 \cdot r} & -\frac{a \cdot b^3}{90} & -\frac{b^5}{840 \cdot r} & \frac{a \cdot b^4}{360 \cdot r} & \frac{a \cdot b^3}{90} & -\frac{b^5}{840 \cdot r} & \frac{a \cdot b^4}{360 \cdot r} & -\frac{a \cdot b^3}{90} & -\frac{b^5}{840 \cdot r} & \frac{a \cdot b^4}{360 \cdot r} & \frac{a \cdot b^3}{90} \\ -\frac{b^3}{60 \cdot r} & \frac{a \cdot b^2}{36 \cdot r} & -\frac{a \cdot b}{18} & -\frac{b^3}{60 \cdot r} & \frac{a \cdot b^2}{36 \cdot r} & \frac{a \cdot b}{18} & -\frac{b^3}{60 \cdot r} & \frac{a \cdot b^2}{36 \cdot r} & -\frac{a \cdot b}{18} & -\frac{b^3}{60 \cdot r} & \frac{a \cdot b^2}{36 \cdot r} & \frac{a \cdot b}{18} \end{bmatrix}$$

(90)

Para o caso de pressão uniforme em cada uma das direções, então o vetor em (87)
toma a seguinte forma:

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\} \quad (91)$$

Onde:

$$\hat{p}_{x1} = \hat{p}_{x2} = \hat{p}_{x3} = \hat{p}_{x4} = \hat{p}_x$$

$$\hat{p}_{y1} = \hat{p}_{y2} = \hat{p}_{y3} = \hat{p}_{y4} = \hat{p}_y$$

$$\hat{p}_{z1} = \hat{p}_{z2} = \hat{p}_{z3} = \hat{p}_{z4} = \hat{p}_z$$

Onde os valores explícitos dos subvetores de $\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix}$:

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} 4abp_z \\ 2ab^3p_x/(3r) \\ -2ab^3p_y/(3r) \\ 4abp_x \\ 4abp_y \\ 0 \\ 0 \\ -2a^3bp_y/3 \\ 0 \\ -2ab^3p_x/3 \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a^3bp_z/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2ab^3p_z/3 \\ -ab^5p_x/(30r) \\ ab^5p_y/(30r) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (92)$$

Para o caso de aplicações de pressões hidrostáticas radiais na casca, o problema pode ser dividido para o caso do eixo longitudinal na Horizontal ou na Vertical. No primeiro caso, o vetor de pressões distribuídas fica:

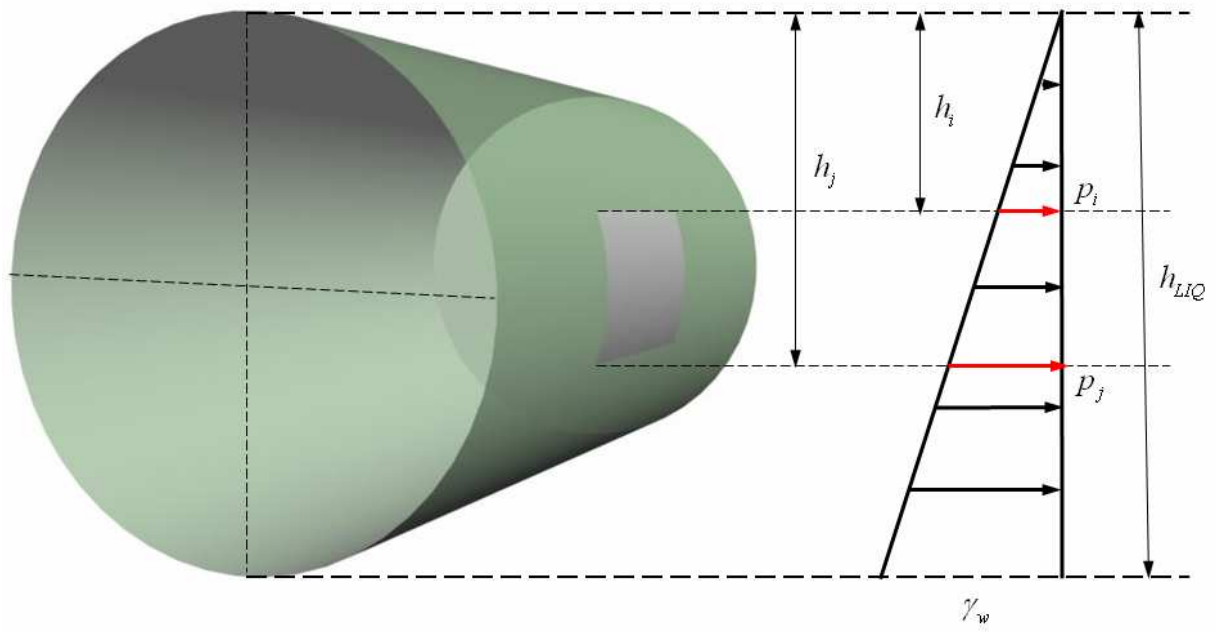


Figura 19 – Carregamento Hidrostático Radial.

Cujo vetor pode ser representado por.

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\} \quad (93)$$

Onde:

$$\hat{p}_{x1} = \hat{p}_{x2} = \hat{p}_{x3} = \hat{p}_{x4} = 0$$

$$\hat{p}_{y1} = \hat{p}_{y2} = \hat{p}_{y3} = \hat{p}_{y4} = 0$$

$$\hat{p}_{z1} = \hat{p}_{z2} = \gamma_w \cdot h_i$$

$$\hat{p}_{z3} = \hat{p}_{z4} = \gamma_w \cdot h_j$$

Sendo:

$$h_i = \gamma_w \{h_{liq} - R[1 + \cos(\theta_0 - \theta)]\}$$

$$h_j = \gamma_w \{h_{liq} - R[1 + \cos(\theta_0 + \theta)]\}$$

$$\{P_1\} = \gamma_w \begin{Bmatrix} 2(h_i - h_j) \\ 0 \\ 2b(h_i - h_j) \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = \gamma_w \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{a^2(h_i + h_j)}{3} \\ 0 \\ \frac{a^2b(h_i - h_j)}{9} \\ 0 \\ \frac{b^2(h_i + h_j)}{3} \\ 0 \\ \frac{a^2(h_i - h_j)}{3} \\ 0 \\ \frac{b^3(h_i - h_j)}{15} \end{Bmatrix} \quad (94)$$

No segundo caso, quando o eixo da casca é vertical então.

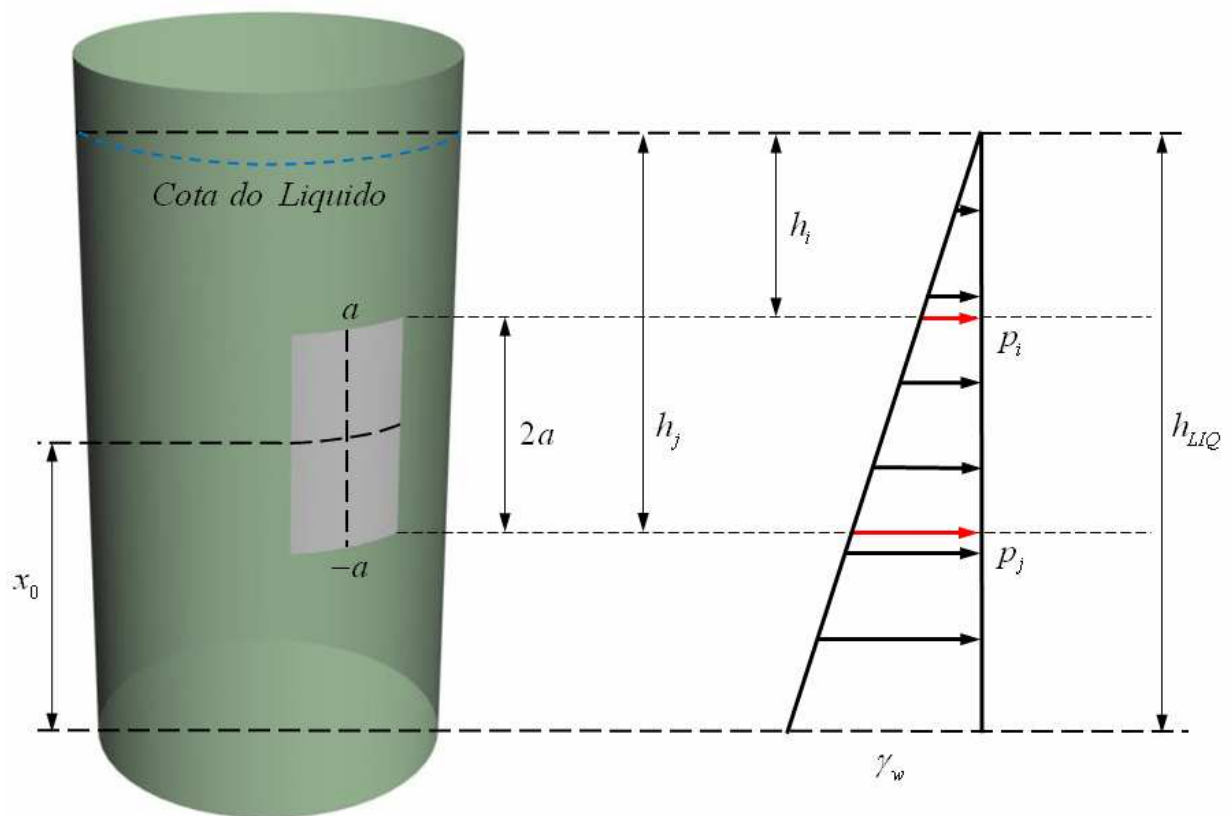


Figura 20 – Carregamento Hidrostático Vertical.

(95)

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\}$$

Onde:

$$\hat{p}_{x1} = \hat{p}_{x2} = \hat{p}_{x3} = \hat{p}_{x4} = 0$$

$$\hat{p}_{y1} = \hat{p}_{y2} = \hat{p}_{y3} = \hat{p}_{y4} = 0$$

$$\hat{p}_{z1} = \hat{p}_{z4} = \gamma_w \cdot x_i$$

$$\hat{p}_{z2} = \hat{p}_{z3} = \gamma_w \cdot x_j$$

Sendo:

$$x_i = h_{LIQ} - (x_0 + a)$$

$$x_j = h_{LIQ} - (x_0 - a)$$

O seu vetor pode ser representado por.

$$\{P_1\} = \gamma_w \left\{ \begin{array}{c} \frac{2(h_i + h_j)}{2a(h_i - h_j)} \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \{P_2\} = \gamma_w \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{a^2(h_i + h_j)}{3} \\ -\frac{a^3(h_i - h_j)}{15} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b^2(h_i + h_j)}{3} \\ -\frac{ab^2(h_i - h_j)}{9} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (96)$$

O efeito da ação do Peso Próprio da casca pode ser dividida em duas etapas. Na primeira, assume-se que o eixo longitudinal da casca é ortogonal a gravidade, então a matriz $[R]$ em (84) toma a seguinte forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y/r + \theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(y/r + \theta_0) \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$\{\hat{p}\}^T = \{0 \quad g \quad g\}$$

Onde $g = \gamma \cdot h$, sendo γ =Peso Específico e h =espessura da casca. Os símbolos em (97) estão indicados na Figura 21.

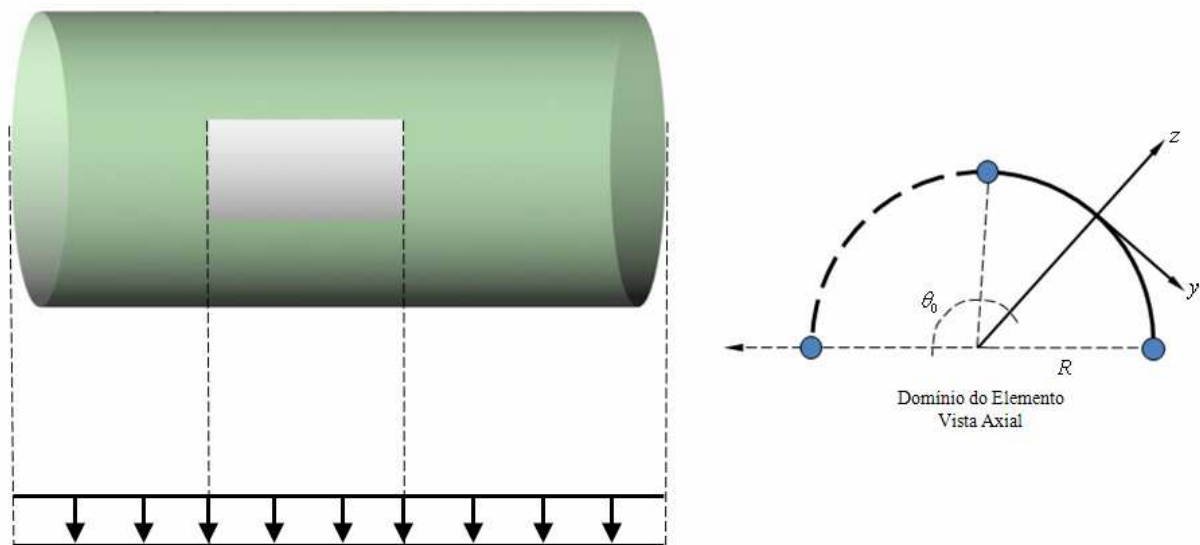


Figura 21 – Definições Peso Próprio Ortogonal

Se (97) for substituída em (85), e o calculo da matriz $[A]$ for efetuado então o

vetor $\{P\} = \left\{ \begin{matrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{matrix} \right\}$ é dado por:

$$[P_1] = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1 \cdot g \\ 0 \\ f_2 \cdot g \\ 0 \\ (f_3 + f_5) \cdot g \\ \frac{a \cdot b^5 \cdot p_x}{30 \cdot R} \\ (f_4 + f_6) \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = \begin{Bmatrix} (p_1 + p_7) \cdot g \\ \frac{2 \cdot a \cdot b^3 \cdot p_x}{3 \cdot R} \\ (p_2 + p_6) \cdot g \\ p_x \\ p_3 \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ p_5 \cdot g \\ p_4 \cdot g \\ \frac{2 \cdot a \cdot b^3 \cdot p_x}{3} \end{Bmatrix} \quad (98)$$

Onde os fatores f_1 a f_6 e p_1 a p_6 são dados por

$$f_1 = -2Ra^3 \sin(\theta) \sin(b/3r);$$

$$f_2 = \left[2ra^3(b + r \sin(b/r))/3 \right] + 4ra^3b(b \sin^2(b/2r) + \sin^2(\theta/2) - 2)/3 +$$

$$[4ra^3 \cos^2(\theta/2)(2b \sin^2(b/2r) - 2b + r \sin(b/r))]/3$$

$$f_3 = 2r \sin(\theta) [2br(2 \sin^2(b/(2r)) - 1) + (2r^2 - b^2) \sin(b/r)]$$

$$f_4 = r \cos(\theta) 2a \left[-3r(b^2 - 2r^2) \sin(b/r) + b(b^2 - 6r^2) \cos(b/r) \right] / 3$$

$$f_5 = \sin(\theta) 2a \left[-3r(b^2 - 2r^2) \sin(b/r) + b(b^2 - 6r^2) \cos(b/r) \right] / 3$$

$$f_6 = \cos(\theta) a \left[(b^4 - 12b^2r^2 + 24r^2) \sin(b/r) + 4br(b^2 - 6r^2) \cos(b/r) \right] / 6$$

$$p_1 = 4a \sin(\theta) [r \sin(b/r) - b \cos(b/r)], \quad p_3 = 4ra \cos(\theta) \sin(b/r),$$

$$p_2 = -2a \cos(\theta) [(b^2 - 2r^2) \sin(b/r) + 2rb \cos(b/r)],$$

$$p_4 = 4r \sin(\theta) [b(2 \cos^2(b/r) - 1) - r \sin(b/r)], \quad p_5 = 4ra^3 \cos(\theta) \sin(b/(3r))$$

$$p_6 = 4ra \cos(\theta) [r \sin(b/r) - b \cos(b/r)], \quad p_7 = 4ra \sin(\theta) \sin(b/r)$$

Se o eixo longitudinal da casca for paralelo ao da gravidade então o vetor $\{P\}$

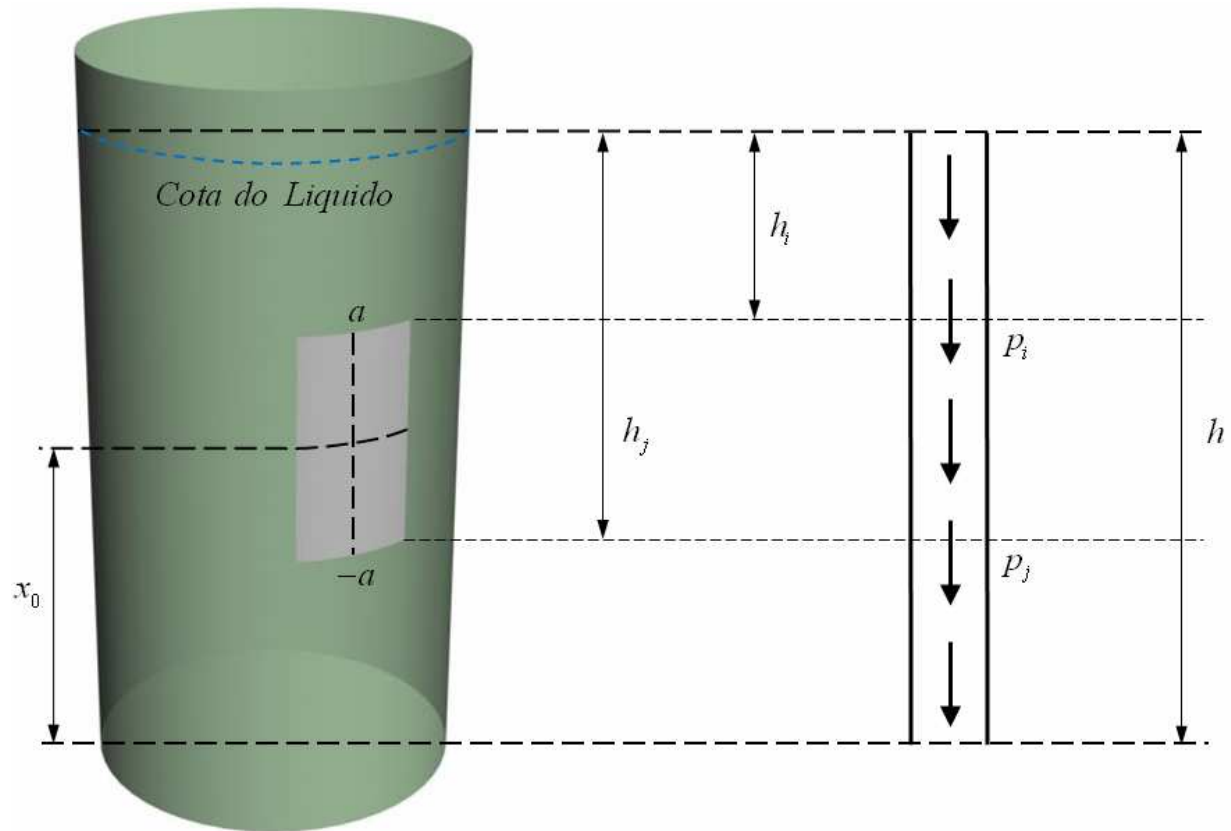


Figura 22 – Definições Peso Próprio Longitudinal

O vetor pode ser representado por.

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2ab^3g/(3r) \\ 0 \\ 4ab \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2ab^3g/3 \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -ab^5 \cdot g/(30r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (99)$$

2.3.11 – O ELEMENTO FINITO RLTS LAMINADO

Nesta seção será brevemente descrita uma formulação conhecida do elemento finito de casca cilíndrica laminada, baseada na teoria Layerwise de REDDY(1984,1992), e sistematizado por alguns pesquisadores BARBERO et al.(1990), REDDY e

SAVOIA(1992), KASSEGNE(1992), GEHARD et al.(1994). A casca cilíndrica laminada é formada pelo empilhamento de camadas ortotrópicas e de espessuras iguais ou diferentes, sendo constituída de materiais que apresentam ângulos de orientação distintos para as fibras. Seja uma Casca Cilíndrica de comprimento L , espessura h e superfície média indeformável de raio R , com $h \ll R$. A representação básica do elemento e a interpolação do contínuo é demonstrada na Figura 23.

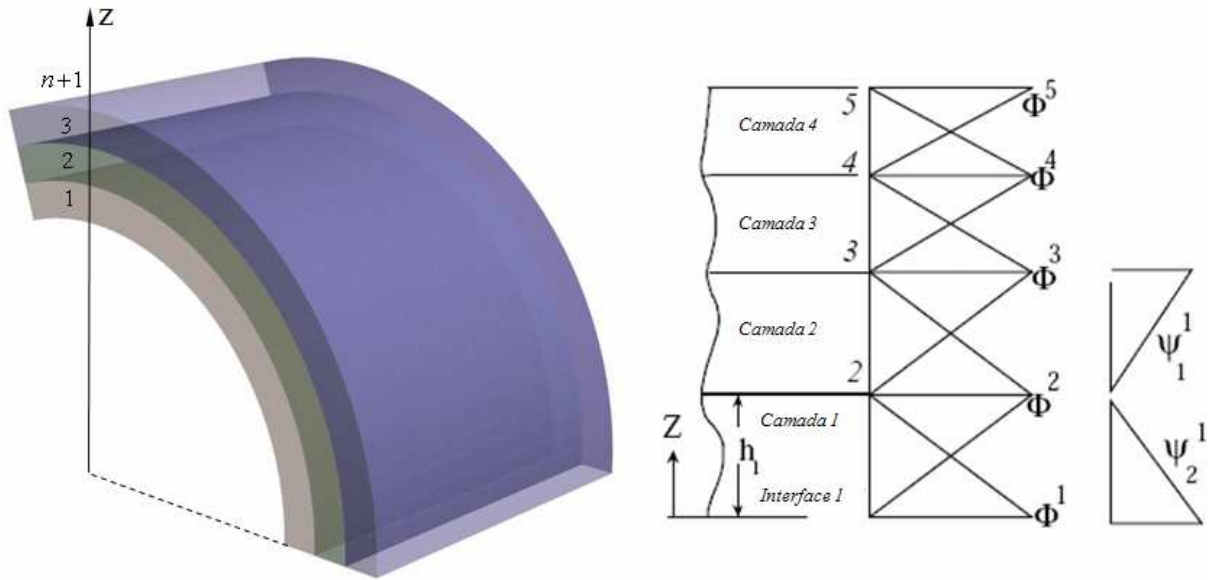


Figura 23 – Elemento de Casca Cilíndrica Laminada

2.3.12 - CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Segundo KASSEGNE(1992), a variação dos campos de deslocamentos (u, v, w) em um ponto genérico (x, y, z) em uma lamina da Casca Cilíndrica Laminada é aproximada pelas seguintes funções de interpolação linear Lagrangiana.

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(x, y) \Phi^i(z) \quad (100)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n+1} v_i(x, y) \Phi^i(z)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i(x, y) \Phi^i(z)$$

Onde n é o número de camadas na Casca Cilíndrica, u , v e w são os valores nodais dos deslocamentos, para cada camada, na direção x , y e z respectivamente e Φ_i são as funções de interpolação linear Lagrangiana ao longo da espessura. As funções de interpolação linear são dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi^i(z) &= \psi_1^{(1)}(z) & z_1 \leq z \leq z_2 & \quad (101) \\ \Phi^i(z) &\begin{cases} \psi_2^{(i-1)}(z) = \frac{z - z_{i-1}}{h_{i-1}} & z_{i-1} \leq z \leq z_i \\ \psi_1^{(i)}(z) = \frac{z_i - z}{h_i} & z_i \leq z \leq z_{i+1} \end{cases} & (i = 2 \dots n) \\ \Phi^n(z) &= \psi_2^{(n)}(z), & z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ \psi_1^{(k)} &= 1 - \frac{\bar{z}}{h_k}, & \psi_2^{(k)} = \frac{\bar{z}}{h_k}, & 0 \leq \bar{z} \leq h_k \end{aligned}$$

Onde h é a espessura da camada i , a aproximação dos campos é feita por ψ_i^j , que são funções interpeladoras de Lagrange associadas com o nó j da camada i , em que $j=1,2$ para interpolação linear através da espessura e $j=1,2,3$ para interpolação quadrática através da longitude.

2.3.13 - RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Embora, no modelo de KASSENE (1992) esteja previsto grandes efeitos de não linearidades geométricas na descrição das relações cinemáticas, neste trabalho os efeitos não lineares foram negligenciados, uma vez que o objetivo final é o estudo da interação solo-duto em regime linear. Assim as equações deformação-deslocamento linearizadas restritas a pequenas deformações e rotações, em relação ao eixo de referencia da casca, são assumidas. Para o problema específico de casca cilíndrica, as equações são então reformuladas para o sistema de coordenadas cilíndricas de acordo com as hipóteses de DONNEL.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \Phi^i \quad (102)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{w_i}{R} \right) \Phi^i$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \Phi^i$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} = v_i \frac{d\Phi^i}{dz} + \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{v_i}{R} \right) \Phi^i$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_i \frac{d\Phi^i}{dz} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \Phi^i$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = w_i \frac{d\Phi^i}{dz}$$

Aqui vale lembrar que diferentemente do que foi discutido no elemento finito via modelo de cascas equivalentes simples CYS laminado, as distorções $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \varepsilon_{zz}$ não são nulos.

2.3.14 - VARIAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia potencial e o trabalho das cargas escritas na forma matricial são dados por:

$$U = 1/2 \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega \text{ e } W = \int_{\Gamma} \{u\}^T \{p\} d\Gamma \quad (103)$$

Ou na forma explícita dados por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} \right) dz dA \quad (104)$$

$$W = \int_A \left(p_x u + p_y v + p_z w \right) dA$$

Onde: σ_{yy}, σ_{yz} , e σ_{zz} são as tensões, normal, cisalhante e transversa normal respectivamente e Ω a área da superfície de referência. Substituindo as relações deformação-deslocamento (102) na equação do deslocamento virtual (104) obtém:

Substituindo as relações deformação-deslocamento na equação do deslocamento virtual obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[N_x^i \frac{\partial u_i}{\partial x} + N_y^i \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{r} \right) + N_{xy}^i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{v_i}{r} \right) + M_y^{ij} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + Q_{xz}^i u_i + Q_{zz}^i w_i + Q_{yz}^i v_i + K_{xz}^i \frac{\partial w_i}{\partial x} + K_{yz}^i \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{v_i}{r} \right) \right] dA \quad (105)$$

Onde P_i é a pressão aplicada na superfície da casca cilíndrica. Para pressão interna, $i=1$ e para pressão externa, $i=n+1$. As forças e momentos do laminado são resultantes da integração das tensões ao longo da espessura dadas em função das tensões internas. No layerwise, admite-se uma variação conhecida das tensões (interpolada por Φ) ao longo da espessura de cada lâmina, de forma que os esforços resultante ficam:

$$(N_x^i, N_y^i, N_{xy}^i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) \Phi^i dz \quad (106)$$

$$(Q_{xz}^i, Q_{yz}^i, Q_{zz}^i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}) \frac{d\Phi^i}{dz} dz$$

$$(K_{xz}^i, K_{yz}^i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \Phi^i dz$$

As forças dadas pela equação (106) podem ser expressas em relação aos deslocamentos. Após a substituição das relações constitutivas dadas em (102) obtem-se:

$$\begin{aligned}
N_x^i &= A_{11}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + A_{12}^{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{R} \right) + \bar{A}_{13}^{ij} w_j + A_{16}^{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2} D_{11}^{ijk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} D_{12}^{ijk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) + D_{16}^{ijk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) \\
N_y^i &= A_{12}^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + A_{22}^{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{R} \right) + \bar{A}_{23}^{ij} w_j + A_{26}^{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2} D_{12}^{ijk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} D_{22}^{ijk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) + D_{26}^{ijk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) \\
Q_{zz}^i &= \bar{A}_{13}^{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \bar{A}_{23}^{ji} \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{w_j}{R} \right) + \bar{\bar{A}}_{33}^{ji} w_j + \bar{A}_{36}^{ji} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \bar{D}_{13}^{jki} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} D_{23}^{jki} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) + D_{36}^{jki} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) \\
Q_{xz}^i &= \bar{\bar{A}}_{55}^{ij} u_j + \bar{A}_{55}^{ji} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \bar{\bar{A}}_{45}^{ij} v_j + \bar{A}_{45}^{ji} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{v_j}{R} \right) \\
Q_{yz}^i &= \bar{\bar{A}}_{45}^{ij} u_j + \bar{A}_{45}^{ji} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \bar{\bar{A}}_{44}^{ij} v_j + \bar{A}_{44}^{ji} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{v_j}{R} \right) \\
K_{xz}^i &= \bar{A}_{55}^{ij} u_j + A_{55}^{ji} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \bar{A}_{45}^{ij} v_j + A_{45}^{ji} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{v_j}{R} \right)
\end{aligned} \tag{107}$$

Os coeficientes de rigidez do laminado presentes na equação (107) são dados em termos das constantes elásticas e das funções de interpolação de lagrange e suas derivadas:

$$\begin{aligned}
A_{mn}^{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{mn} \Phi^i \Phi^j dz & \bar{A}_{mn}^{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{mn} \Phi^i \frac{d\Phi^j}{dz} dz \\
\bar{\bar{A}}_{mn}^{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{mn} \frac{d\Phi^i}{dz} \frac{d\Phi^j}{dz} dz & D_{mn}^{ijk} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{mn} \Phi^i \Phi^j \Phi^k dz \\
\bar{D}_{mn}^{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{mn} \Phi^i \Phi^j \frac{d\Phi^k}{dz} dz
\end{aligned} \tag{108}$$

Onde $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n+1$ e $m, n = 1, 2, \dots, 6$. São os coeficientes de rigidez do laminado, para $i, j = 1, \dots, N+1$ e $m, n = 1, 3, 4$, sendo N o número de camadas no laminado. As equações, em função das constantes elásticas, dadas em (108) são definidas como a rigidez do laminado.

2.3.15 – MATRIZ DE RIGIDEZ

Os deslocamentos (u_i, v_i, w_i) na i -ésima interface, são calculados pela combinação linear dos j -deslocamentos nodais (u_i^j, v_i^j, w_i^j) e as funções de interpolação linear Lagrangeana Φ^j , em (100) reescritas da seguinte maneira:

$$(u_i, v_i, w_i) = \sum_{j=1}^p (u_i^j, v_i^j, w_i^j) \Phi^j \quad (109)$$

Onde p é o número de nós na i -ésima camada.

A forma variacional do principio dos deslocamentos virtuais na equação (104), é desenvolvida multiplicando-se esta com as funções interpoladoras e em seguida integrando-se os resultados por partes. A matriz de rigidez do elemento finito é então obtida pela substituição das equações (92) e (94), resultando em (KASSENE 1992).

$$\begin{bmatrix} {}^{11}K_{ij}^{\alpha\beta} & {}^{12}K_{ij}^{\alpha\beta} & {}^{13}K_{ij}^{\alpha\beta} \\ {}^{21}K_{ij}^{\alpha\beta} & {}^{22}K_{ij}^{\alpha\beta} & {}^{23}K_{ij}^{\alpha\beta} \\ {}^{31}K_{ij}^{\alpha\beta} & {}^{32}K_{ij}^{\alpha\beta} & {}^{33}K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q_u\} \\ \{q_v\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix} \quad (110)$$

Onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{u\}$, $\{v\}$ e $\{w\}$ são os vetores de deslocamento nas interfaces e $\{q_u\}$, $\{q_v\}$ e $\{q_w\}$ são os vetores de carregamento respectivamente. Onde $i, j = 1, \dots, p$ e α e $\beta = 1, 2, \dots, n+1$. Os termos explícitos dessa matriz podem ser

consultados no Anexo A. Cada termo da matriz $[K]$ é uma sub-matriz 2x2 que irá compor a matriz de integração de um nó de uma lamina.

$${}^{MN}K_{ij}^{\alpha\beta} = {}^{MN} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (111)$$

A equação (110) fica então na forma dada por.

$$\begin{bmatrix} {}^{11} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{12} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{13} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ {}^{21} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{22} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{23} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ {}^{31} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{32} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{33} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1-1} \\ u_{1-2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} v_{1-1} \\ v_{1-2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_{1-1} \\ w_{1-2} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q_u\} \\ \{q_v\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix} \quad (112)$$

Convém notar que esta matriz representa a integração de um nó de uma lamina da casca cilíndrica. A matriz de rigidez final de uma lamina é composta por 16 sub-matrizes 6x6 totalizando uma matriz 24x24.

$$\begin{bmatrix} K11_{6 \times 6} & K12_{6 \times 6} & K13_{6 \times 6} & K14_{6 \times 6} \\ K21_{6 \times 6} & K22_{6 \times 6} & K23_{6 \times 6} & K24_{6 \times 6} \\ K31_{6 \times 6} & K32_{6 \times 6} & K33_{6 \times 6} & K34_{6 \times 6} \\ K41_{6 \times 6} & K42_{6 \times 6} & K43_{6 \times 6} & K44_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{24 \times 24} \begin{Bmatrix} \{u, v, w\}_1 \\ \{u, v, w\}_2 \\ \{u, v, w\}_3 \\ \{u, v, w\}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q_u\} \\ \{q_v\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix} \quad (113)$$

O modelo da casca cilíndrica com os respectivos nós e graus de liberdade adequadamente numerados são demonstrados na Figura 25. Notar que uma lâmina

possui 2 interfaces com 12 graus de liberdade cada. Deste modo o total de graus de liberdade de uma lâmina é 24.

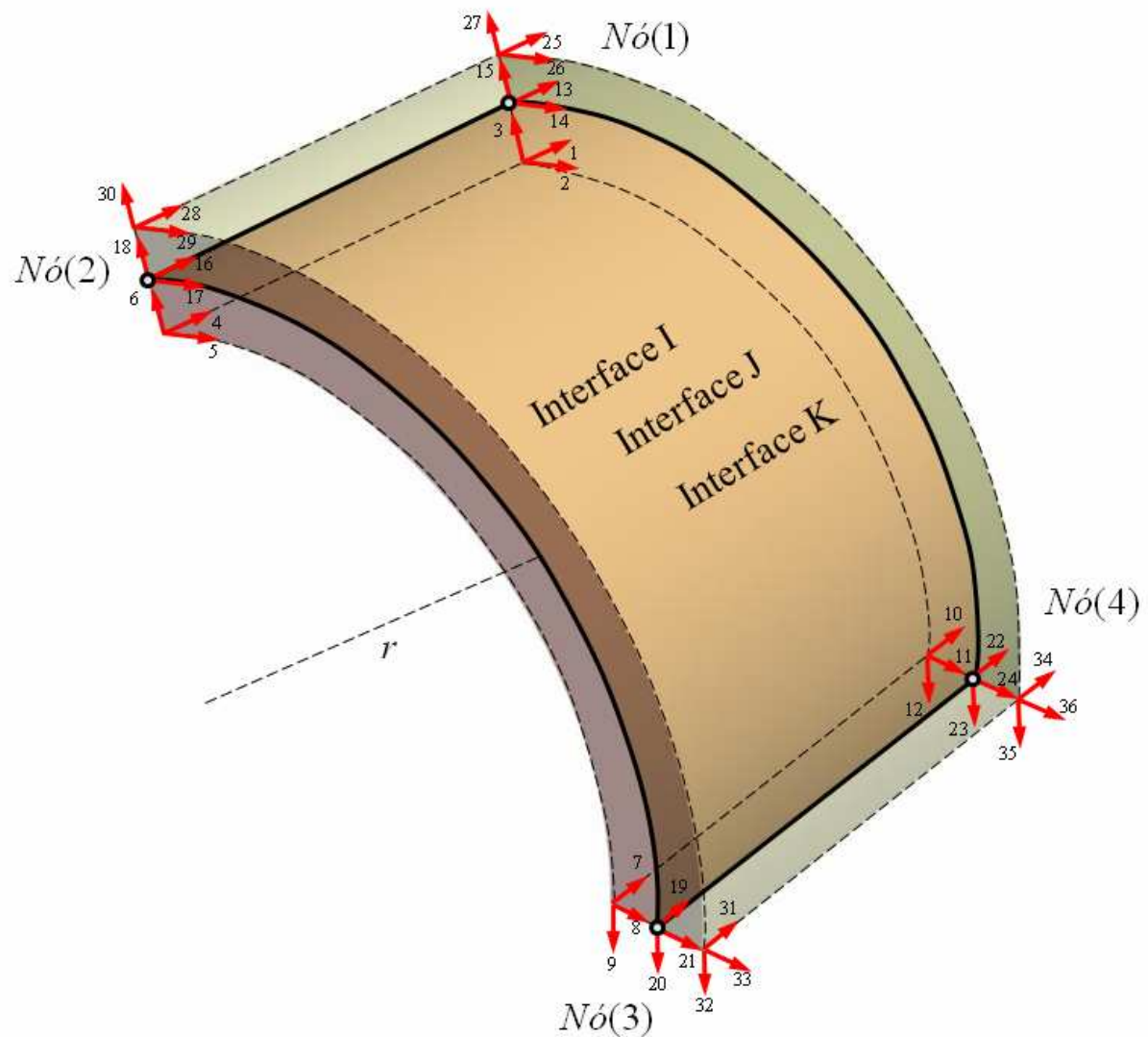


Figura 24 – Graus de Liberdade do Elemento Finito Laminado (original de Kassegne)

Por concisão apenas os 4 primeiros termos da matriz de rigidez de Kassegne são aqui apresentados.

$$\left[{}^{11}K_{ij}^{\alpha\beta} \right] = \int_{\Omega e} \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{11}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{16}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{16}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{66}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \left(\varphi_i \bar{A}_{55}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) \right] dx dy \quad (114)$$

$$\left[{}^{12}K_{ij}^{\alpha\beta} \right] = \int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{12}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{16}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{26}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{66}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\varphi_i \bar{\bar{A}}_{45}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) - \left(\varphi_i \bar{A}_{45}^{\beta\alpha} \frac{\varphi_j}{R} \right) \right] dx dy$$

$$\left[{}^{21}K_{ij}^{\alpha\beta} \right] = \int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{12}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{16}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{26}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{66}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\varphi_i \bar{A}_{45}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) - \left(\frac{\varphi_i}{R} \bar{A}_{45}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) \right] dx dy$$

$$\left[{}^{22}K_{ij}^{\alpha\beta} \right] = \int_{\Omega^e} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{22}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{26}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{26}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \\ & \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{66}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\varphi_i \bar{A}_{44}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) - \left(\varphi_i \bar{A}_{44}^{\beta\alpha} \frac{\varphi_j}{R} \right) - \\ & \left(\frac{\varphi_i}{R} \bar{A}_{44}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) + \left(\frac{\varphi_i}{R^2} \bar{A}_{44}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) \end{aligned} \right] dx dy$$

$$\left[{}^{13}K_{ij}^{\alpha\beta} \right] = \int_{\Omega_e} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A_{12}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{R} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \bar{A}_{13}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} A_{26}^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_j}{R} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \bar{A}_{36}^{\alpha\beta} \varphi_j \right) \\ & + \left(\varphi_i \bar{A}_{55}^{\beta\alpha} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) + \left(\varphi_i \bar{A}_{45}^{\beta\alpha} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} D_{11}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_\gamma}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} D_{12}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}_\gamma}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} D_{16}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}_\gamma}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} D_{16}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_\gamma}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} D_{26}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_\gamma}{\partial x} \right) \\ & + 2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} D_{66}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}_\gamma}{\partial y} \right) \end{aligned} \right] dx dy$$

Os demais termos de primeira ordem de $\begin{bmatrix} {}^{31}K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} {}^{13}K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} {}^{23}K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} {}^{32}K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} {}^{33}K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ podem ser convenientemente extraídos do Anexo B em (KASSEGNE 1992).

É importante destacar que tal numeração segue o modelo original proposto por (KASSEGNE 1992), no entanto, como será discutido nos demais capítulos adiante, existe a necessidade de renumerar os graus de liberdade do respectivo elemento com o intuito de compatibilizar o sistema algébrico viabilizando a acoplagem com o solo. Assim uma nova numeração é proposta conforme indicado na Figura 25.

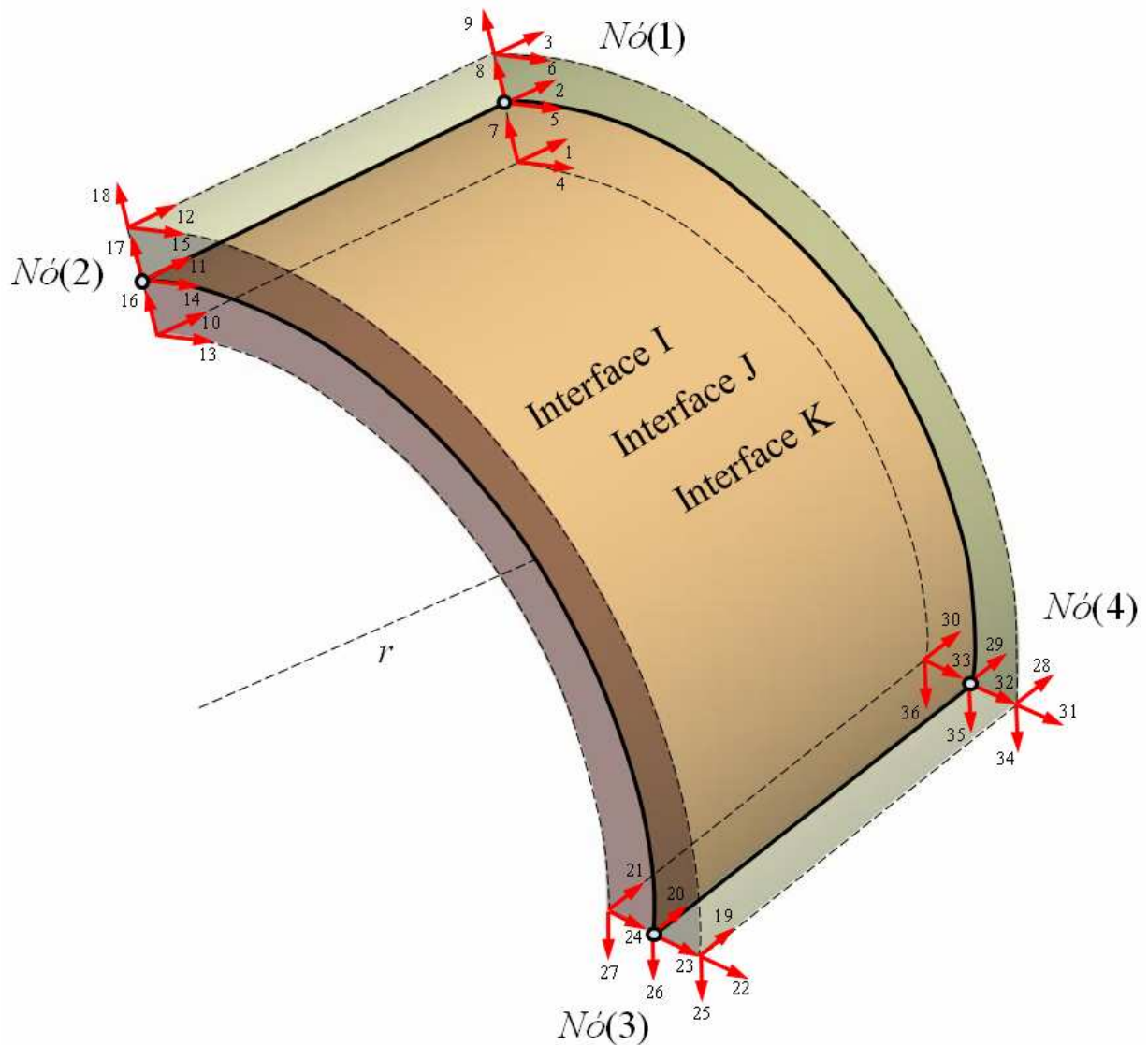


Figura 25 – Graus de Liberdade do Elemento Finito Laminado (re-ordenado)

Convém notar, a matriz de rigidez dada em (114) deverá ser transformada para o sistema re-ordenado.

2.3.16 – VETOR NODAL EQUIVALENTE

Nesta seção, de modo análogo ao elemento CYS, são deduzidos os vetores nodais equivalentes de carregamentos uniformemente, linearmente distribuídos e do peso próprio para o elemento finito RLS. O vetor nodal consistente é obtido através do trabalho realizado pelo carregamento externo que pode ser expresso por:

$$W = \int_A (p_x u + p_y v + p_z w) dA = \int_A \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} dA \quad (115)$$

Os carregamentos externos devido à distribuição linear tem sua representação matricial do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = [R] \{\hat{p}\} \quad (116)$$

Onde a matriz $[R]$ depende do tipo de distribuição das pressões no elemento cujos valores nodais são:

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\}$$

Substituindo-se o vetor de forças na forma em (84) e o vetor de deslocamentos escrito em (63) na expressão do trabalho externo em (83) fica:

$$W = \int_A \{\hat{\delta}_e\}^T [R]^T [R] dA \{\hat{p}\} = \{\hat{\delta}_e\}^T \{F\} \quad (117)$$

Onde :

$$[A] = \int_A [R]^T [R] dA$$

Ou a partir de uma comparação termo a termo em (85), conclui-se que o vetor nodal equivalente $\{F\}$ é dado por:

$$\text{Onde: } \{F\} = [A]\{\hat{p}\} \quad (118)$$

Se a distribuição de pressões for linear no domínio do elemento RLS, então a matriz $[R]$ em (84) fica:

$$[R] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (119)$$

Sendo as funções interpeladoras N_i dadas por:

$$N_1 = (1 + x/a)(1 + y/b)/4; \quad (120)$$

$$N_2 = (1 - x/a)(1 + y/b)/4;$$

$$N_3 = (1 - x/a)(1 - y/b)/4;$$

$$N_4 = (1 + x/a)(1 - y/b)/4$$

Com “a” denotando o semi-comprimento e “b” o semi-arco do elemento.

Após o calculo da integral que forma a matriz $[A]$ em (85) resulta nos valores explícitos:

$$A = \frac{ab}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (121)$$

Para o caso de pressão uniforme em cada uma das direções, então o vetor em (87) toma a seguinte forma:

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\} \quad (122)$$

Onde:

$$\hat{p}_{x1} = \hat{p}_{x2} = \hat{p}_{x3} = \hat{p}_{x4} = \hat{p}_x$$

$$\hat{p}_{y1} = \hat{p}_{y2} = \hat{p}_{y3} = \hat{p}_{y4} = \hat{p}_y$$

$$\hat{p}_{z1} = \hat{p}_{z2} = \hat{p}_{z3} = \hat{p}_{z4} = \hat{p}_z$$

Onde os valores explícitos dos subvetores de: $\{F\} = \left\{ \begin{Bmatrix} F_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$

$$\{F_1\} = ab \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = ab \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (123)$$

De modo análogo ao CYS, para o caso de aplicações de pressões hidrostáticas radiais na casca, o problema pode ser dividido para o caso do eixo longitudinal na Horizontal ou na Vertical. No primeiro caso, o vetor de pressões distribuídas fica: (vide Figura 19)

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\} \quad (124)$$

Onde:

$$\hat{p}_{x1} = \hat{p}_{x2} = \hat{p}_{x3} = \hat{p}_{x4} = 0$$

$$\hat{p}_{y1} = \hat{p}_{y2} = \hat{p}_{y3} = \hat{p}_{y4} = 0$$

$$\hat{p}_{z1} = \hat{p}_{z2} = \gamma_w \cdot h_i$$

$$\hat{p}_{z3} = \hat{p}_{z4} = \gamma_w \cdot h_j$$

Sendo:

$$h_i = h_{liq} - R[1 + \cos(\theta_0 - \theta)]$$

$$h_j = h_{liq} - R[1 + \cos(\theta_0 + \theta)]$$

$$\{F_1\} = \frac{ab}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2h_i + h_j) \\ 0 \\ 0 \\ (2h_i + h_j) \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \frac{ab}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2h_i + h_j) \\ 0 \\ 0 \\ (2h_i + h_j) \end{Bmatrix} \quad (125)$$

Já para o segundo caso, quando o eixo da casca é vertical então (vide Figura 20).

$$\{\hat{p}\}^T = \{\hat{p}_{x1} \quad \hat{p}_{y1} \quad \hat{p}_{z1} \quad \hat{p}_{x2} \quad \hat{p}_{y2} \quad \hat{p}_{z2} \quad \hat{p}_{x3} \quad \hat{p}_{y3} \quad \hat{p}_{z3} \quad \hat{p}_{x4} \quad \hat{p}_{y4} \quad \hat{p}_{z4}\} \quad (126)$$

Onde:

$$\hat{p}_{x1} = \hat{p}_{x2} = \hat{p}_{x3} = \hat{p}_{x4} = 0$$

$$\hat{p}_{y1} = \hat{p}_{y2} = \hat{p}_{y3} = \hat{p}_{y4} = 0$$

$$\hat{p}_{z1} = \hat{p}_{z4} = \gamma_w \cdot x_i$$

$$\hat{p}_{z2} = \hat{p}_{z3} = \gamma_w \cdot x_j$$

Sendo:

$$x_i = x_{liq} - (x_0 + a)$$

$$x_j = x_{liq} - (x_0 - a)$$

Onde os vetores ficam:

$$\{F_1\} = \frac{ab}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(2 \cdot h_i + h_j)}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(2 \cdot h_i + h_j)}{3} \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \frac{ab}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(2 \cdot h_i + h_j)}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(2 \cdot h_i + h_j)}{3} \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (127)$$

Considerando novamente o efeito da ação do Peso Próprio da casca dividido em duas etapas, em que na primeira, assume-se que o eixo longitudinal da casca é ortogonal a gravidade, então a matriz $[R]$ em (84) toma a seguinte forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(y/r + \theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(y/r + \theta_0) \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$\{\hat{p}\}^T = \{0 \quad g \quad g\}$$

Onde $g = \gamma \cdot h$, sendo γ =Peso Específico e h =espessura da casca. Os símbolos em (97) estão indicados na Figura 21.

Se (97) for substituída em (85), e o calculo da matriz $[A]$ for efetuado então o vetor

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} \text{ é dado por:}$$

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ 0 \\ p_{y1} \\ p_{z1} \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_{y3} \\ p_{z3} \\ 0 \\ p_{y3} \\ p_{z3} \end{Bmatrix} \quad (129)$$

Onde os fatores de p_{y1} a p_{y4} e de p_{z1} a p_{z4} são dados por:

$$p_{y1} = -\frac{ra}{2b} \left(r \sin\left(\frac{b}{r}\right) \sin(\theta) - b \cos\left(\frac{b}{r}\right) \sin(\theta) - b \sin\left(\frac{y}{r}\right) \cos(\theta) \right) \rho g t$$

$$p_{y1} = p_{y2}$$

$$p_{y3} = -\frac{ra}{2b} \left(r \sin\left(\frac{b}{r}\right) \sin(\theta) - b \cos\left(\frac{b}{r}\right) \sin(\theta) + b \sin\left(\frac{y}{r}\right) \cos(\theta) \right) \rho g t$$

$$p_{y4} = p_{y3}$$

$$p_{z1} = -\frac{ra}{2b} \left(r \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\theta) - b \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\theta) - b \sin\left(\frac{y}{r}\right) \sin(\theta) \right) \rho g t$$

$$p_{z2} = p_{z1}$$

$$p_{z3} = -\frac{ra}{2b} \left(r \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\theta) - b \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\theta) - b \sin\left(\frac{y}{r}\right) \sin(\theta) \right) \rho g t$$

$$p_{z4} = p_{z3}$$

Se o eixo longitudinal da casca for paralelo ao da gravidade, então o vetor $\{P\}$, Vide Figura 22).

$$\{P_1\} = ab \begin{Bmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \\ p_x \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = ab \begin{Bmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \\ p_x \end{Bmatrix} \quad (130)$$

$$\text{Onde: } p_x = \sum \frac{\gamma_i \cdot th_i}{2}$$

Convém notar que o vetor de carga já foi deduzido diretamente no sistema reordenado, dispensando com isso, a transformação de sistemas.

Capítulo III

O MEC EM PROBLEMAS ELÁSTICOS HOMOGÊNEOS

3.1– INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a formulação estática do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para sólidos elásticos tridimensionais. Inicialmente, pretende-se indicar a notação matemática que deve ser empregada em várias expressões ao longo do texto da tese. Passa-se, então, para uma breve revisão da elastostática, apresentando suas relações e constantes mais importantes. Mostram-se os problemas fundamentais e suas soluções, que serão utilizadas para deduzir as representações integrais para pontos do domínio e especificamente para o contorno. Na sequência, são apresentados os elementos de contorno usados na discretização do contorno do corpo, determinando-se as equações matriciais do método dos elementos de contorno propriamente dito, bem como os procedimentos utilizados para a integração numérica e semi-analítica necessárias à solução do método. São ainda apresentadas as expressões para o cálculo de deslocamentos e tensões em pontos do domínio e tensões em pontos do contorno. Por fim, apresentam-se alguns exemplos para mostrar a eficiência da formulação.

3.2– RELAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA CLÁSSICA

Considere-se um sólido elástico-linear tridimensional, homogêneo e isotrópico, definido pelo domínio Ω . E seu contorno Γ , conforme apresentado na Figura 26.

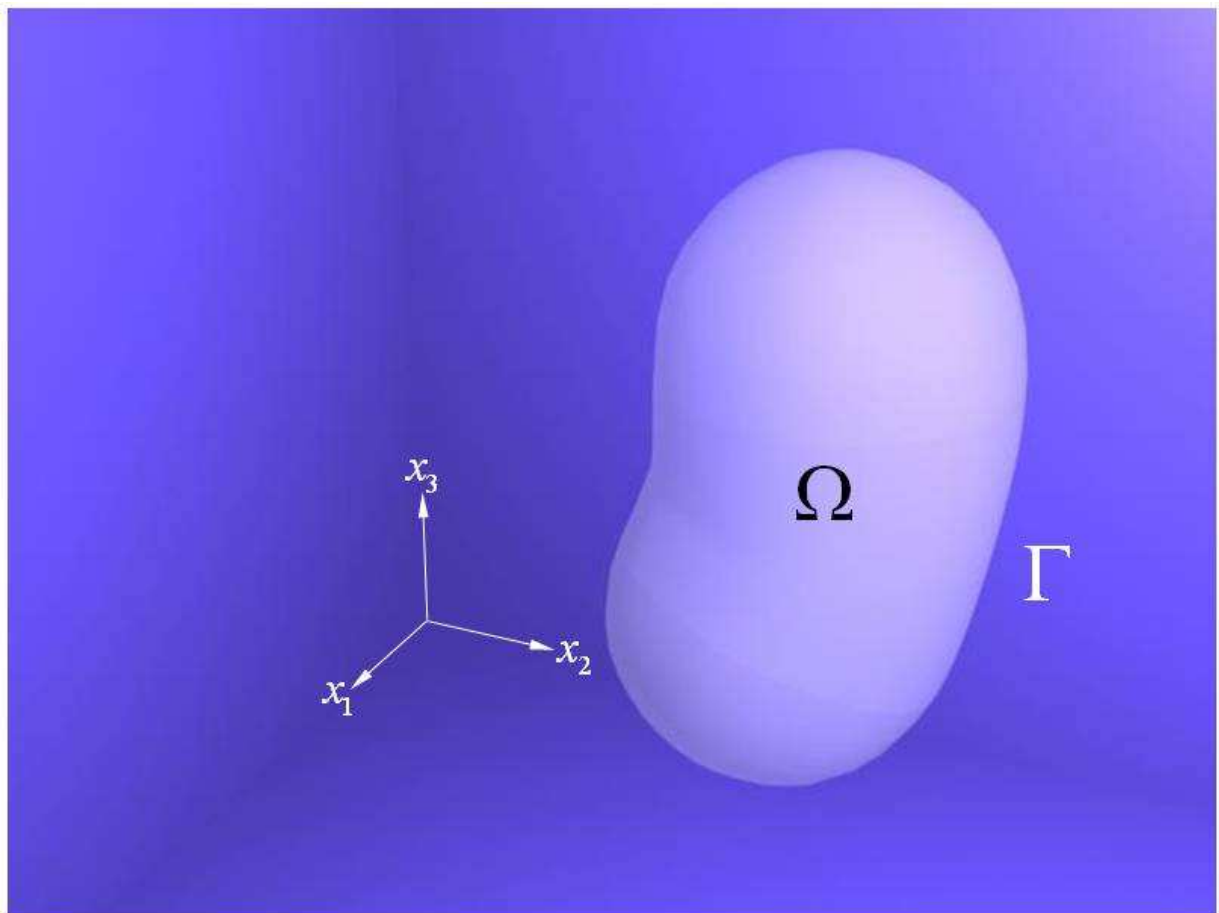


Figura 26 –Sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ .

Admitindo-se que o corpo esteja em equilíbrio estático, pode-se afirmar que um de seus elementos infinitesimais, tomado como referência, também encontra-se equilibrado. Portanto, equacionando-se o equilíbrio das forças que agem nas faces deste elemento e as forças volumétricas, chega-se à expressão diferencial.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (131)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

Cuja representação através da notação indicial reduz-se em:

$$\sigma_{ij,j}(\chi) + b_i(\chi) = 0 \quad (132)$$

Onde:

$\sigma_{ij,j}(\chi)$ representa a derivada do tensor das tensões;

$b_i(\chi)$ o vetor das forças volumétricas; e

χ representa o ponto material analisado.

Por sua vez, o equilíbrio rotacional das forças que agem sobre o elemento em questão indica a simetria do tensor das tensões, classicamente chamada de condição de CAUCHY. Portanto,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (133)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

A mesma expressão em notação indicial fica:

$$\sigma_{ij}(\chi) = \sigma_{ji}(\chi) \quad (134)$$

Para a análise completa de equilíbrio de forças atuantes no corpo, deve-se tomar, ainda, um elemento infinitesimal situado em seu contorno. Surge, então, o que se convencionou chamar de forças de superfície, p_i , conforme mostra a Figura 27.

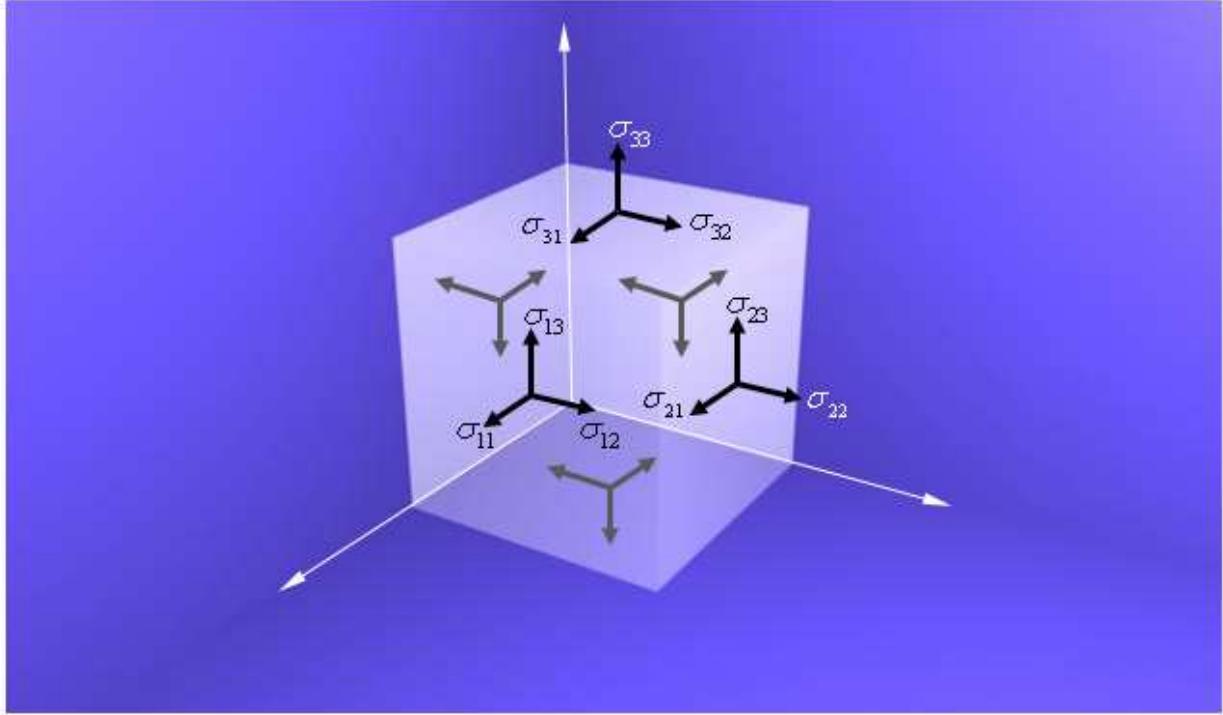


Figura 27 – Tetraedro de CAUCHY

As componentes das forças de superfície, representadas por p_i , podem ser expressas em função das componentes de tensão, considerando-se o equilíbrio nas três direções cartesianas, onde n_j são os cossenos diretores dos ângulos entre a normal à face inclinada (superfície do contorno) e o eixo cartesiano X_j . Chega-se, portanto na seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{Bmatrix} \quad (135)$$

Reescrita em notação indicial resulta em:

$$p_i(\chi) = \sigma_{ij}(\chi)n_j \quad (136)$$

Quanto às deformações que se desenvolvem no corpo, considerando-se as hipóteses de continuidade de deslocamentos, estas podem ser representadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (137)$$

Que em notação indicial é:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (138)$$

A expressão diferencial conhecida como Lei de HOOKE relaciona os tensores de tensão e deformação de um determinado sólido elástico-linear isotrópico, e se apresenta da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (139)$$

Ou na forma indicial:

$$\sigma_{ij} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (140)$$

Ou ainda na forma inversa

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (141)$$

Que indicialmente fica:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (142)$$

ν representa o coeficiente de Poisson

G módulo de elasticidade transversal, ou módulo de elasticidade ao cisalhamento

E módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young;

As relações entre as constantes elásticas são dadas a seguir:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (143)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Substituindo-se a expressão (137) em (139) e o resultado desta em (131) obtém-se a equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos, conhecida como equação de Navier-Cauchy para a estática, ou seja:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} b_x \\ & \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} b_y \\ & \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} b_z \end{aligned} \quad (144)$$

Na forma indicial:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,jj} + \frac{1}{G} b_i = 0 \quad (145)$$

Para que o problema elástico-linear fique completamente definido, além das equações diferenciais de equilíbrio (132), deformação/deslocamento (137) e a lei de

HOOKE (139) ou (140), é necessário conhecer as condições de contorno. Assim, considera-se o contorno do sólido, denotado por Γ , composto por duas partes: Γ_1 e Γ_2 (sendo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), conforme mostrado na Figura 28.

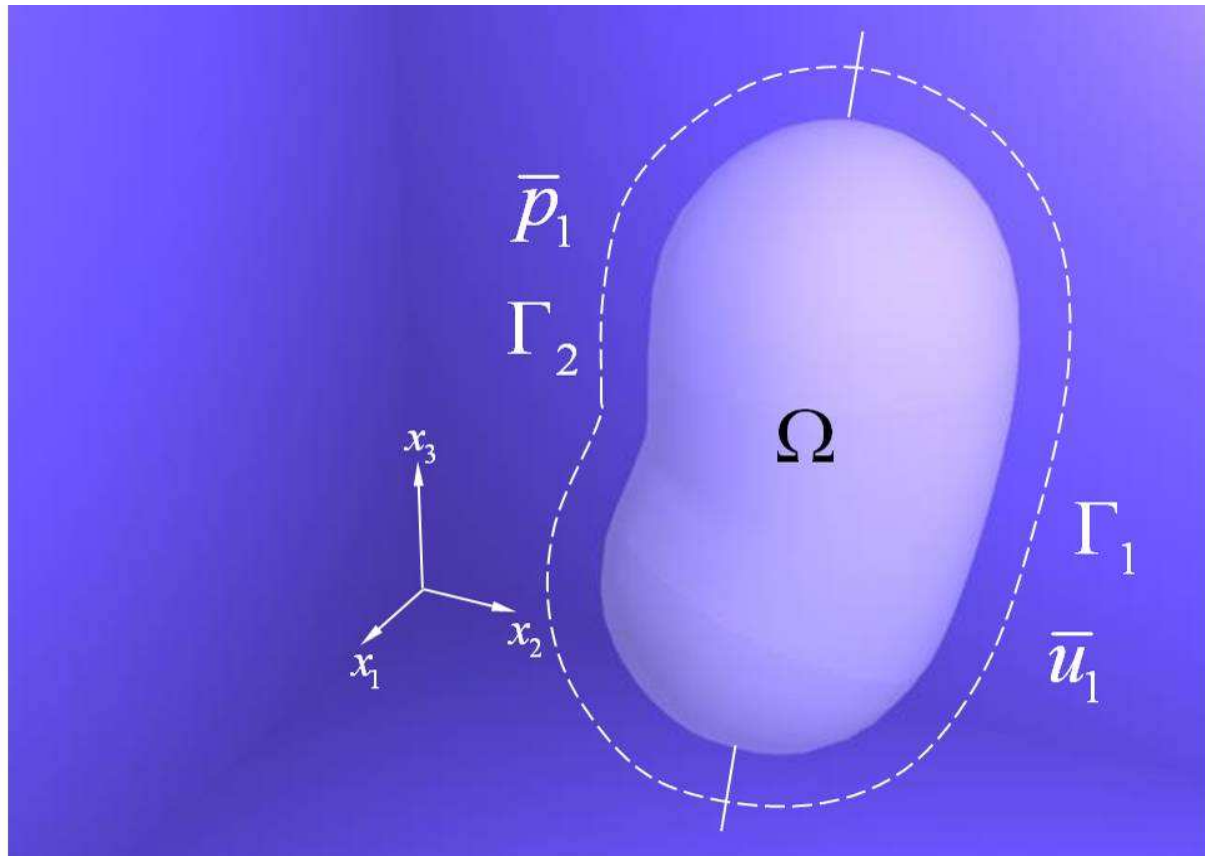


Figura 28 – Definição das condições de contorno

Pode-se, então, definir os valores prescritos das variáveis de interesse para a análise (deslocamentos u_i e forças de superfície p_i) em cada uma das partes, estabelecendo-se:

$$u_i(Q) = \bar{u}_i(Q), \rightarrow Q \in \Gamma_1 \quad (\text{condições essenciais}) \quad (146)$$

$$p_i(S) = \bar{p}_i(S), \rightarrow S \in \Gamma_2 \quad (\text{condições naturais})$$

3.3- PROBLEMAS FUNDAMENTAIS E SUAS SOLUÇÕES

Para que as formulações do método dos elementos de contorno fiquem completamente definidas, torna-se necessário o conhecimento prévio da solução de um problema padrão da área que se deseja analisar. A este problema dá-se o nome de “problema fundamental”, conforme apresentado em BREBBIA (1978). Nas próximas seções apresentam-se os problemas fundamentais de Kelvin e Mindlin com suas respectivas soluções. Para a definição do problema fundamental considere-se Ω^* um domínio infinito cujo contorno é denotado por Γ^* . O sólido que se deseja analisar, de domínio Ω e contorno Γ , está contido em Ω^* . O problema particular indicado pelo asterisco é chamado de problema fundamental e encontra-se definido na Figura 29.

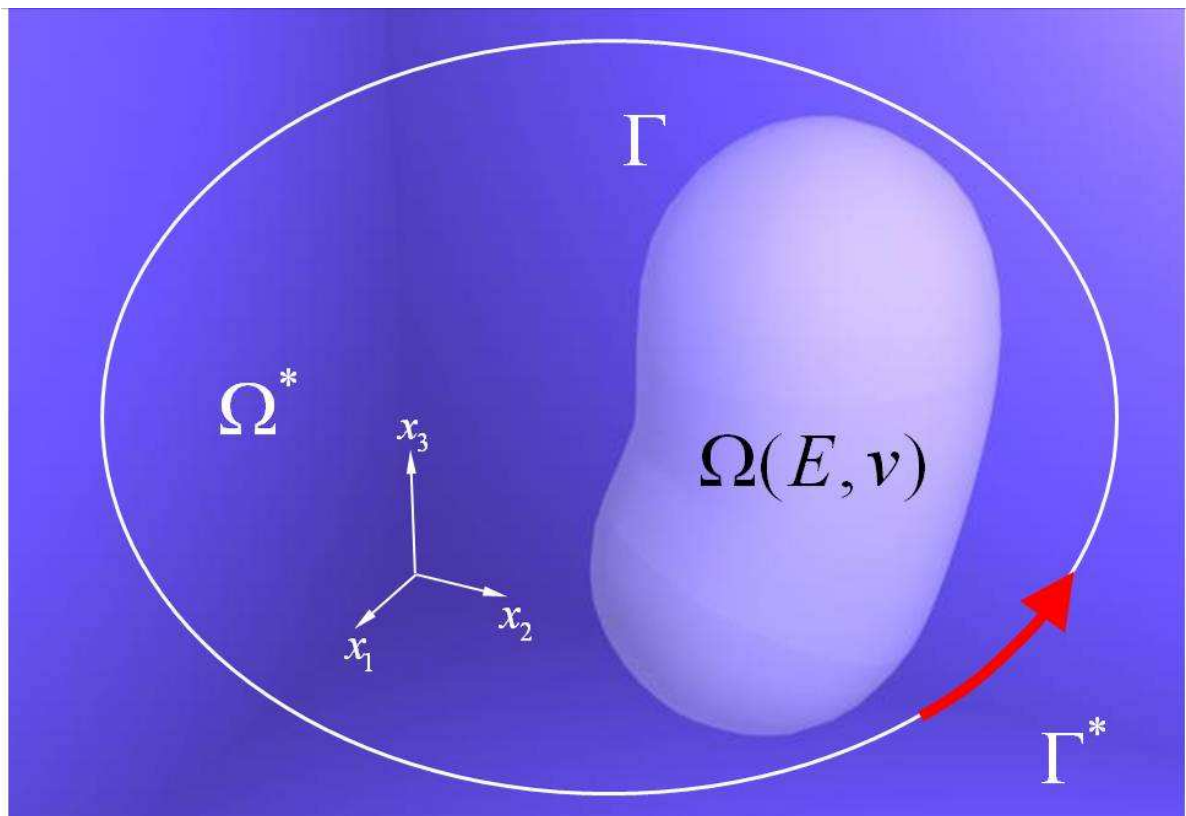


Figura 29 – Definição das condições de contorno

Aplica-se uma fonte concentrada estática em um ponto s (ponto fonte) do domínio na direção cartesiana i , $F_i^*(s)$, e avaliam-se os seus efeitos nas direções cartesianas em um outro ponto, q (ponto de campo), conforme mostra a Figura 30. Observe-se que nas respostas para deslocamentos e forças de superfície, u_{ij}^* e p_{ij}^* respectivamente, o primeiro índice representa a direção cartesiana de aplicação da força e o segundo a direção do

efeito medido. Estas respostas da carga unitária são chamadas de solução fundamental do problema particular analisado.

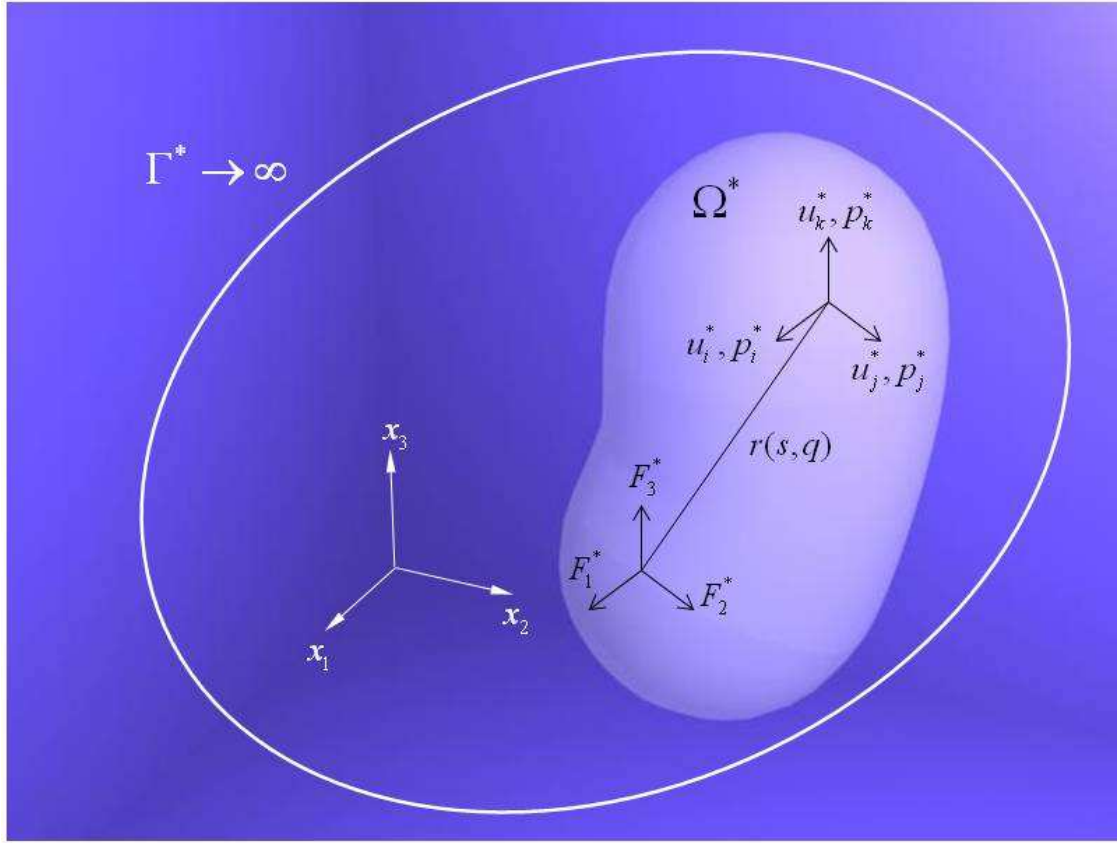


Figura 30 – Efeito das fontes concentradas aplicadas em Ω^* : Solução fundamental

As expressões analíticas da solução fundamental de deslocamentos e forças de superfície são obtidas substituindo-se o termo das forças volumétricas na equação de equilíbrio para o problema estático (131) e na equação de deslocamentos (145) pela distribuição Delta de Dirac, que passa a ser um multiplicador da força unitária aplicada no ponto fonte s . Isto resulta em:

$$b_i(q) = \delta(s, q) \delta_{ki} \quad \sigma_{ij,j} + \delta(s, q) \delta_{ki} = 0 \quad (147)$$

Ou também expressa em termos de deslocamento como:

$$u_{ki,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{kj,ji} + \frac{1}{G} \delta(s, q) \delta_{ki} = 0 \quad (148)$$

A solução fundamental do problema em (148) é associada a um problema conhecido e particular. Portanto, dependendo das características do problema fundamental, tais como o espaço a que seus domínios Ω^* e contornos Γ^* pertencem (infinito ou semi-infinito, por exemplo. Nesta tese utilizam-se soluções fundamentais dos problemas de Kelvin, para o domínio infinito, e de Mindlin, para o domínio semi-infinito, ambos tridimensionais.

3.3.1 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN

A solução fundamental de Kelvin é, sem duvida, a mais difundida e utilizada no meio técnico. Esta solução clássica foi desenvolvida por Lord Kelvin, conforme LOVE (1944), considerando sólidos tridimensionais elásticos, isotrópicos e homogêneos, cujo domínio Ω^* se estende ao infinito. A Figura 31 mostra a definição do problema apresentando o ponto fonte s com suas forças unitárias. O ponto de campo q com as respostas das forças unitárias (deslocamentos fundamentais u_{ij}^* e forças de superfície fundamentais p_{ij}^*), e a variável esférica r e suas componentes cartesianas.

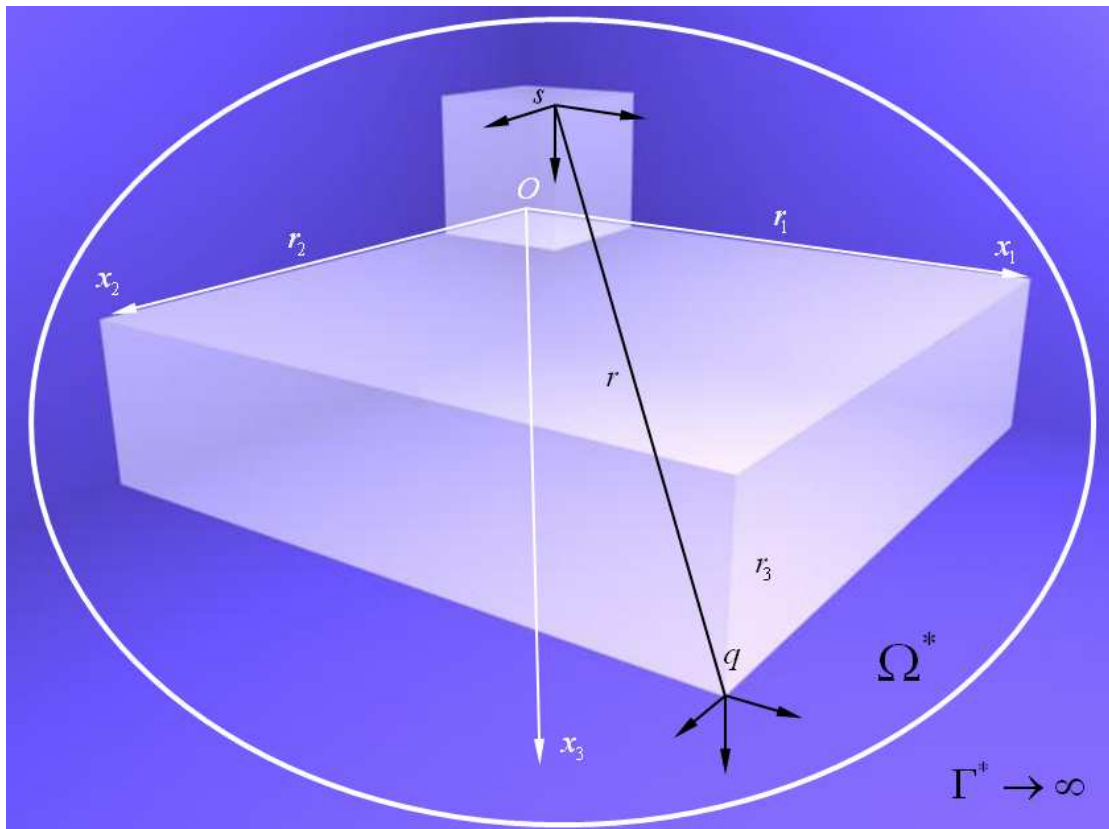


Figura 31 – Definição do problema fundamental de Kelvin

As expressões de deslocamentos e forças de superfície para o problema de Kelvin são (BREBBIA 1978):

$$u_{ij}^*(s,q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \} \quad (149)$$

$$p_{ij}^*(s,q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j] r_n - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \} \quad (150)$$

Onde $r = \sqrt{r_i r_i}$, $r_i = X_i(q) - X_i(s)$, $r_j = \frac{r_i}{r}$, $r_n = \frac{r_i}{n_i}$

3.3.2 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

A solução fundamental de (MINDLIN, 1936) caracteriza-se por ter seu domínio Ω^* um semi-espço infinito, sólido elástico, isótropo e homogêneo. A Figura 32 apresenta o problema definindo o ponto campo q , o ponto fonte s e sua imagem s' distante c do plano $x_1 x_2$. Define, ainda, as variáveis esféricas r e R e suas componentes cartesianas. O plano $x_3 = 0$ (ou $\bar{\Gamma}$) representa parte da superfície de contorno onde se admite a ausência de forças de superfície.

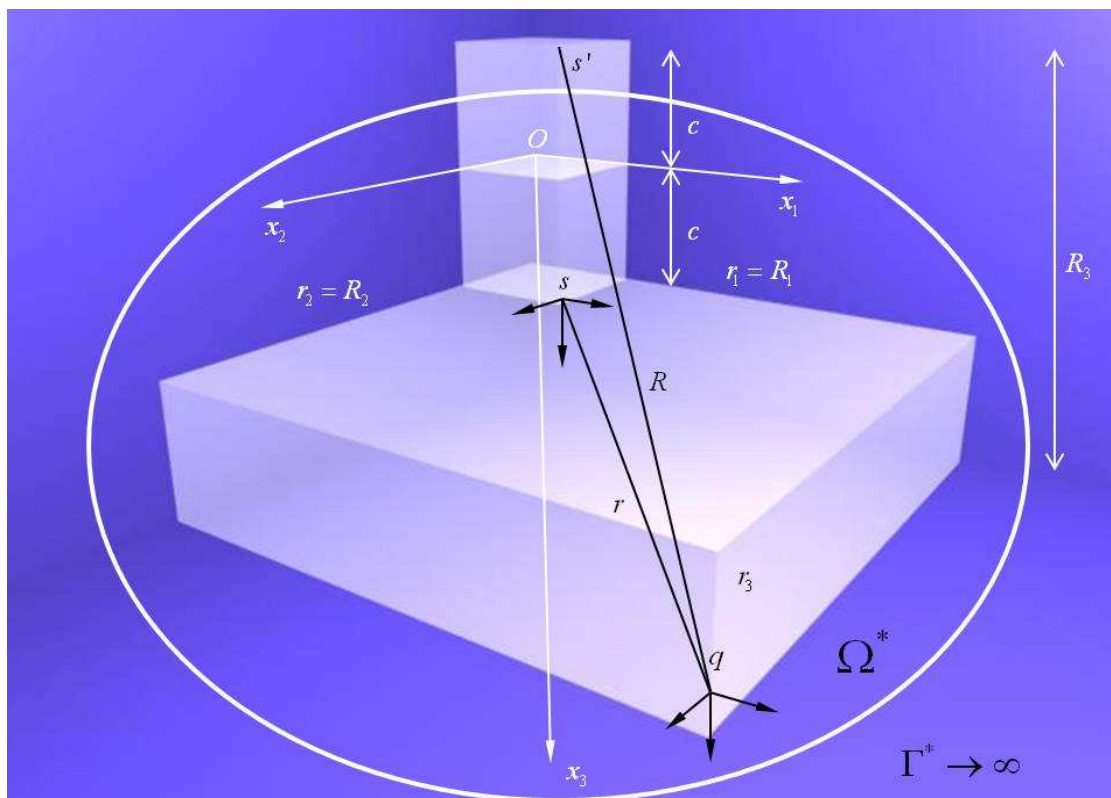


Figura 32 – Definição do problema fundamental de Mindlin

As expressões das soluções fundamentais de Mindlin para deslocamentos e forças de superfície são apresentadas a seguir. No entanto, faz-se necessário a definição de alguns parâmetros, mostrados na Figura 32, que aparecem nas ditas expressões:

$$r_i = X_i(q) - X_i(s) \quad (151)$$

$$R_i = X_i(q) - X_i(s')$$

$$r = \sqrt{r_i r_i}$$

$$R = \sqrt{R_i R_i}$$

$$c = X_3(s) \geq 0$$

$$z = X_3(q) \geq 0$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}$$

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}$$

$$C_1 = 1 - \nu$$

$$C_2 = 1 - 2\nu$$

$$C_3 = 3 - 4\nu$$

$$C_4 = 3 - 2\nu$$

$$C_5 = 5 - 4\nu$$

Então, as formas explícitas para soluções fundamentais em deslocamento ficam:

$$u_{11}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{1}{R} + \frac{C_3 r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4C_1 C_2}{R + R_3} \left(1 - \frac{r_1^2}{R(R + R_3)} \right) \right\} \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
u_{12}^* &= K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{C_3}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \right\} \\
u_{13}^* &= K_d r_1 \left\{ \frac{r^3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)} \right\} \\
u_{21}^* &= u_{12}^* \\
u_{22}^* &= K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{1}{R} + \frac{C_3 r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4C_1 C_2}{R+R_3} \left(1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right) \right\} \\
u_{23}^* &= \frac{r_2}{r_1} u_{13}^* \\
u_{31}^* &= K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)} \right\} \\
u_{32}^* &= \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \\
u_{33}^* &= K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{8C_1^2 - C_3}{R} + \frac{C_3 R_3^2 - 2cz}{R^3} + \frac{6czR_3^2}{R^5} \right\}
\end{aligned}$$

As expressões para as forças de superfície do problema fundamental são obtidas em função das tensões e das componentes da normal à superfície no ponto, ou seja, empregando-se relação de Cauchy:

$$p_{ij}^* = \sigma_{jk}^{*j} n_k \quad (153)$$

De acordo com MINDLIN(1936), as expressões das componentes de tensão fundamental, são :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{*1} &= K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2 C_5}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6c}{R^5} \left[3c - C_4 R_3 + \frac{R r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{12}^{*1} &= K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{6cz}{R^5} \left[1 - \frac{5r_1^2}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{13}^{*1} &= K_s \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2 R_3}{R^5} - \frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - C_2 r_1^2 - \frac{5r_1^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{22}^{*1} &= K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6c}{R^5} \left[c - C_2 R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{23}^{*1} &= K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3C_3 R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[C_2 - \frac{5zR_3}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{33}^{*1} &= K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 R_3^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[c - C_2 R_3 + \frac{5zR_3^2}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{11}^{*2} &= K_s r_2 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6c}{R^5} \left[c - C_2 R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{12}^{*2} &= K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6c}{R^5} \left[1 - \frac{5r_2^2}{R^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{154}$$

$$\sigma_{13}^{*2} = \sigma_{23}^{*1} \quad (155)$$

$$\sigma_{22}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6c}{R^5} \left[3c - C_4 R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{22}^{*1} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2 R_3}{R^5} - \frac{6c}{R^5} \left[z R_3 - C_2 r_2^2 - \frac{5r_2^2 z R_3}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*2} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33}^{*1}$$

$$\sigma_{11}^{*3} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2(3r_3 - 4vR_3)}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2 r_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right] + \frac{6cR_3}{R^5} \left[C_2 z - 2vc - \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*3} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3C_3 r_3}{R^5} - \frac{30czR_3}{R^7} - \frac{4C_1 C_2}{R^2(R+R_3)} \left[\frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*3} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3}{R^5} + \frac{3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\sigma_{22}^{*3} = K_s \left\{ \frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2(3r_3 - 4vR_3)}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2 r_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] + \frac{6cR_3}{R^5} \left[C_2 z - 2vc - \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{23}^{*3} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3}{R^5} + \frac{3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*3} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3^2}{R^5} + \frac{3cR_3(5z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^3}{R^7} \right\}$$

O problema determinado por MINDLIN veio preencher uma lacuna entre dois problemas já devidamente conhecidos e equacionados: O problema de Kelvin e o problema de BOUSSINESQ-CERRUTI (NAKAGUMA, 1979), de aplicação de forças somente na superfície livre do semi-espço infinito ($\bar{\Gamma}$ na Figura 32). Portanto, à medida que o parâmetro c cresce os valores encontrados nas expressões fundamentais de

Mindlin coincidem com os obtidos através de Kelvin. Por outro lado, com o parâmetro c igual a zero, as expressões de Mindlin coincidem com as de BOUSSINESQ-CERRUTI (ver NAKAGUMA, 1979 e BARBIRATO, 1991).

3.4 – EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO (GLOBAL)

A representação integral para pontos do domínio e do contorno servem de base para o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA et al. 1984, ROCHA, 1988, dentre outros). Se u_i^* forem assumidos como funções de ponderação, pelo método dos resíduos ponderados, as equações de equilíbrio pode ser reescritas como:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,k} + b_j) u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (156)$$

Se o termo for $\int_{\Omega} (\sigma_{jk} u_{ii}^*)_{,k} d\Omega = 0$ for desenvolvido fica:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk} u_{ij}^*)_{,k} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{jk,k} u_{ij}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{jk} u_{ij,k}^*) d\Omega \quad (157)$$

Aplicando-se o teorema da divergência no primeiro termo de (157);

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{jk} u_{ij}^*) \eta_k d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{ij,k}^* d\Omega \quad (158)$$

Substituindo a equação (157) na equação do resíduo (156) e aplicando-se o teorema de CAUCHY ($p_j = \sigma_{jk} \eta_k$) fica:

$$\int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{ij,k}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (159)$$

Além disso, a seguinte identidade pode ser obtida:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk} \frac{1}{2} (u_{ij,k}^* + u_{ik,j}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega \quad (160)$$

Substituindo a equação (160) em (159) resulta:

$$\int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (161)$$

Tomando-se a relação constitutiva $(\sigma_{jk} = C_{jkpq} \varepsilon_{pq})$ e (159). A seguinte reciprocidade pode ser obtida.

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Omega} C_{jkpq} \varepsilon_{pq} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ipq}^* \varepsilon_{pq} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk} \varepsilon_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* u_{j,k} d\Omega \quad (162)$$

Substituindo as equações (162) em (161) fica:

$$\int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (163)$$

Com o auxílio de integrações por partes, a equação (162) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* \eta_k u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \eta_k u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_{ij} d\Omega = 0 \quad (164)$$

Utilizando o termo de CAUCHY $(p_{ij}^* = \sigma_{ijk} \eta_k)$, a equação (164) fica:

$$\int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \eta_k u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_{ij} d\Omega = 0 \quad (165)$$

A fim de eliminar a integral primeiro domínio nas equações acima, basta substituir as equações de equilíbrio do problema fundamental dadas em (147) e (148) resultando na equação integral em coordenadas globais dada por:

$$u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (166)$$

3.4.1 - PONTOS DE CONTORNO

A identidade SOMIGLIANA (166) é válida apenas para pontos contidos no interior do sólido em estudo. Para o método dos elementos de contorno é fundamental que se tenha a expressão correspondente para pontos que pertençam ao contorno Γ . O artifício utilizado correntemente é o de transformar o ponto de contorno em um de domínio, onde se pode aplicar a identidade SOMIGLIANA, acrescentando-se parte de uma esfera (Ω_ε) centrada no ponto do contorno e de raio ε (ver Figura 33). Assim, um ponto s do contorno passa a ser um ponto s do domínio.

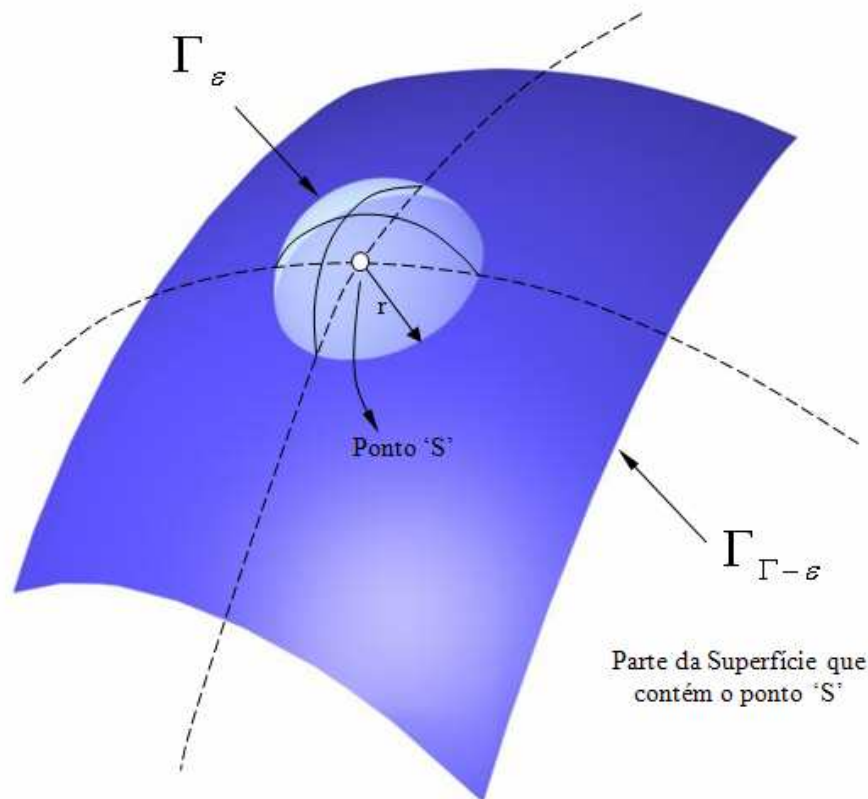


Figura 33 – Transformação de um ponto de contorno para o domínio

Com a modificação sugerida um novo domínio fica estabelecido: $\Omega + \Omega_\varepsilon$. O contorno do sólido também sofre alterações, passando a ser $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$. Portanto, a identidade SOMIGLIANA passa a ser escrita com novos trechos:

$$u_i(s) + \int_{\Gamma - \Gamma + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma - \Gamma + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (167)$$

Agora, encontrada a identidade (167), deve-se efetuar o procedimento inverso, ou seja, o de levar as novas parcelas (correspondentes ao acréscimo de domínio) ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\Omega_\varepsilon, \bar{\Gamma}, \Gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ e o ponto volta a ser de contorno, quando $s \rightarrow S$. Em ROCHA (1988), por exemplo, são mostrados todos os detalhes destes limites. A expressão resultante de particular interesse para este trabalho é:

$$c_{ij}(s) u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (168)$$

Onde $c_{ij}(S) = \frac{1}{2} I$ para pontos de um contorno sem angulosidades (“smooth”); e I é a matriz identidade (aqui de ordem 3x3, para cada ponto de colocação S). A identidade encontrada para pontos do contorno é semelhante àquela para pontos do domínio (166) e é também válida para pontos localizados fora do domínio do sólido. O coeficiente multiplicador c_{ij} passa a caracterizar a natureza da localização do ponto, assumindo os valores:

$$c_{ij} = I \begin{cases} 0, & \text{Para pontos externos ao domínio } \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{Para pontos de contorno } \Gamma \\ 1, & \text{Para pontos internos ao domínio } \Omega \end{cases}$$

A representação integral (168) é determinada considerando-se que o sólido tridimensional é definido mantendo-se a orientação do vetor normal ao seu contorno sempre para fora. Assim, os problemas relacionados a escavações e cavidades ainda não estão equacionados. Uma vez que neste trabalho utiliza-se a solução fundamental de

Mindlin, e sua aplicação em escavações e cavidades próximas a superfície livre é imediata, faz-se necessário conhecer a representação integral para esses problemas.

Considere-se um sólido tridimensional, elástico-linear, homogêneo, de domínio $\bar{\Omega}$ e contorno $\bar{\Gamma}$, e que contém uma cavidade definida pelo contorno Γ (Figura 34). Este sólido, definido por $\Gamma + \bar{\Omega} + \bar{\Gamma}$, em forma de uma esfera de raio r_0 centrado em um ponto S do contorno Γ da cavidade, está contido no espaço Ω^* infinito (ou semi-infinito). O procedimento utilizado para obter a sua representação integral passa por acrescentar à identidade (168) parcelas correspondentes ao domínio $\bar{\Omega}$ e contorno $\bar{\Gamma}$ e, depois, fazer com que o raio da esfera tenda para o infinito ($r_0 \rightarrow \infty$), situação limite do problema. Após efetuarem-se os limites descritos, por exemplo, em ROCHA (1988), verifica-se que a expressão resultante é a mesma, ou seja, a representação integral determinada para os problemas de geometria finita também é válida para regiões infinitas, e, portanto, fica estabelecida uma formulação para análise de problemas de domínio amplo.

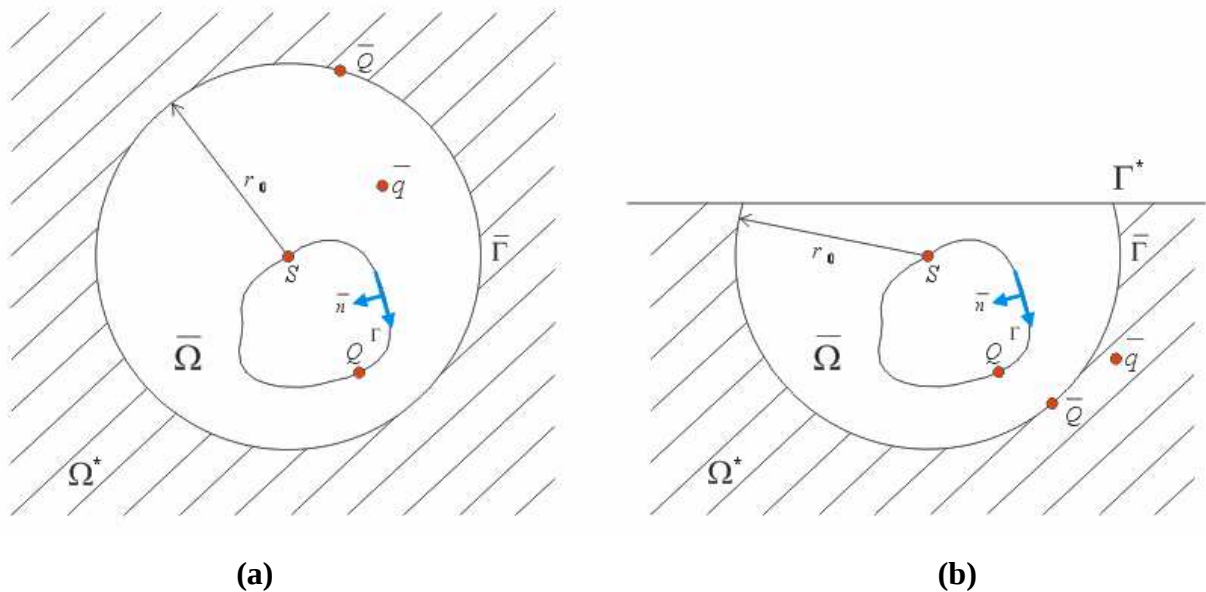


Figura 34 – (a) Região Infinita e (b) Região semi-infinita

3.5 – EQUAÇÕES INTEGRAIS EM COORDENADAS LOCAIS

As equações integrais em (167) estão referenciadas a um sistema de referência global (x, y, z) e elas têm sido utilizadas dessa maneira por grande parte dos trabalhos

descritos na literatura. A grande característica do sistema global é que todos os campos nos pontos-fontes e nos pontos-campos estão respectivamente iso-orientados (no sistema global), vide Figura 33.

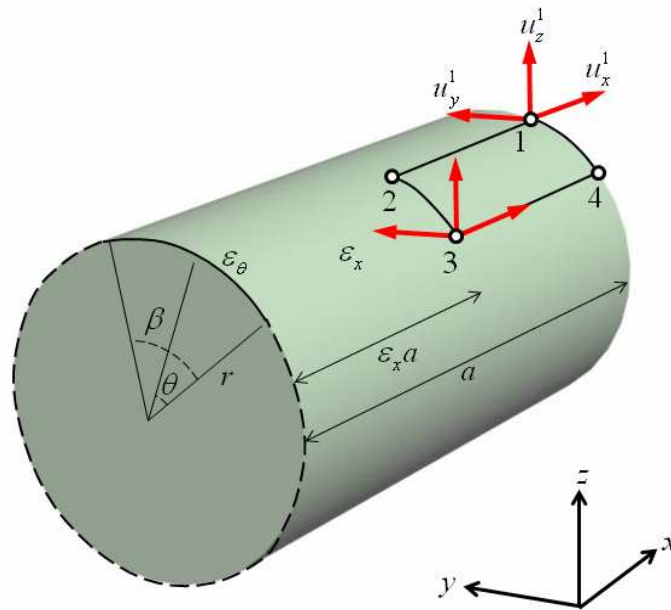


Figura 35 – Transformação de um ponto de contorno para o domínio

Nem sempre o sistema global de coordenadas para as equações integrais é a opção mais atraente para descrição dos campos, especialmente quando a geometria do corpo não é poliédrica. Até mesmo em problemas compostos por domínios sem curvaturas, a representação integral pode não ser a melhor opção. Esse é caso descrito em MENDONÇA (2002), onde foi apresentado um conjunto de sistemas de referência hierarquizados para análise de estruturas compostas de lâminas planas modeladas pelo método dos elementos de contorno a partir da transformação de equações integrais no sistema global para outro sistema dito “local”. A representação integral local proposta neste trabalho, é uma generalização da estratégia utilizada em MENDONÇA (2002), onde a descrição é composta por dois sistemas de referência, onde o primeiro deles está associado ao ponto-fonte e o segundo está relacionado ao ponto-campo.

$$\begin{Bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \\ u_z(p) \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} [P^*] \begin{Bmatrix} u_x(s) \\ u_y(s) \\ u_z(s) \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (169)$$

$$\int_{\Gamma} [U^*] \begin{Bmatrix} p_x(s) \\ p_y(s) \\ p_z(s) \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} [U^*] \begin{Bmatrix} b_1(S) \\ b_2(S) \\ b_3(S) \end{Bmatrix} d\Omega$$

Assim, após aplicar transformações locais nos pontos-fonte $[Q(p)]$ e nos pontos-campo $[Q(s)]$ do problema, a equação integral global pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} u_1(p) \\ u_{\theta}(p) \\ u_r(p) \end{Bmatrix} = [Q(p)] \int_{\Gamma} [P^*] [Q(s)] \begin{Bmatrix} u_1(s) \\ u_{\theta}(s) \\ u_r(s) \end{Bmatrix} d\Gamma =$$

$$[Q(p)] \int_{\Gamma} [U^*] [Q(s)] \begin{Bmatrix} p_1(s) \\ p_{\theta}(s) \\ p_r(s) \end{Bmatrix} d\Gamma + [Q(p)] \int_{\Omega} [U^*] \begin{Bmatrix} b_1(S) \\ b_2(S) \\ b_3(S) \end{Bmatrix} d\Omega \quad (170)$$

Onde:

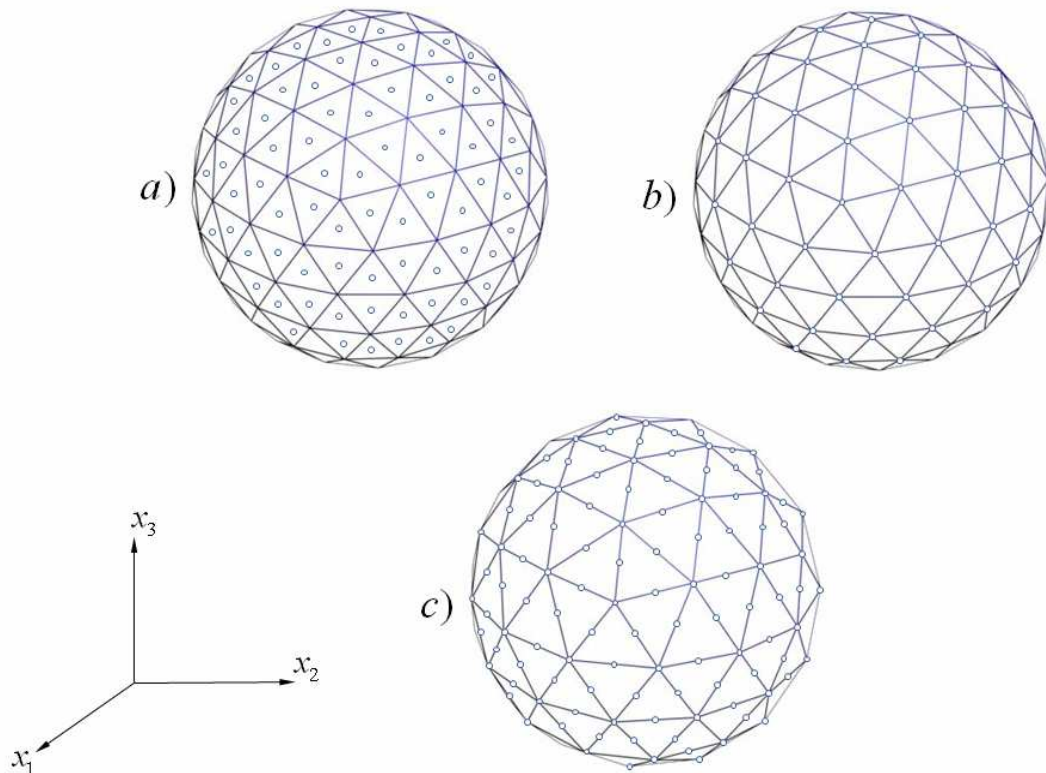
$$[Q(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -n_r(x) & n_{\theta}(x) \\ 0 & n_{\theta}(x) & n_r(x) \end{bmatrix}, \quad [U^*] = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{13}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}, \quad [P^*] = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{13}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix}$$

3.6 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Nas seções anteriores, apresentou-se a formulação das equações integrais de contorno, aplicadas a análise de sólidos elásticos tridimensionais, isotrópicos e homogêneos. Nesta seção será descrita a aplicação prática dessas integrais transformando-as em equações algébricas, onde será detalhado o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

3.6.1 - DISCRETIZAÇÕES

Toma-se o sólido que se deseja analisar e mapeia-se todo o seu contorno por um número finito de elementos: planos ou curvos, triangulares ou quadrangulares (conforme a Figura 36).



**Figura 36 - Sólidos discretizados por elementos de contorno:
(a) constante; (b) linear; e (c) quadrático.**

Um elemento qualquer é geometricamente definido pelas coordenadas cartesianas de seus pontos nodais, X_n . Adotando-se as funções de interpolação Ψ , as coordenadas de um ponto qualquer do elemento são obtidas através de:

$$X = \Psi^T \cdot X^n \quad (171)$$

As variáveis físicas do problema (deslocamentos e forças de superfícies) são aproximadas através de funções interpoladoras utilizando-se os respectivos valores nodais (valores dos nós funcionais). De acordo com a escolha das funções interpoladoras, os elementos de contorno recebem uma classificação: constantes; lineares; quadráticos; e

de ordem superior, para funções polinomiais (ver Figura 36). Os valores de deslocamentos e forças de superfície (u e p), aproximados por seus valores nodais (U^n e P^n), são portanto expressos por:

$$\begin{aligned} u &= \phi^T \cdot U^n \\ p &= \phi^T \cdot P^n \end{aligned} \quad (172)$$

Onde ϕ são as funções interpoladoras.

A discretização do domínio é feita, de maneira mais direta, dividindo-o em células tridimensionais, geralmente na forma de hexaedros e tetraedros. Porém, a equação básica do Método dos Elementos de Contorno (168) fica expressa por um termo de domínio, o que de certa forma não está coerente com o princípio do método. Outras técnicas são apresentadas na tentativa de utilizar somente elementos de contorno, dentre elas a Reciprocidade Dual e a Integração Direta (que serão abordadas em detalhes no próximo capítulo). Mas, para permitir a discretização geral de (168) por ora, seguem-se as relações necessárias para o uso de células. As coordenadas X_c de um ponto qualquer da célula ficam definidas em termos das funções interpoladoras Ψ_c e das coordenadas X_{cn} dos pontos geométricos da mesma.

$$X_c = \Psi_c^T \cdot X_{cn} \quad (173)$$

As forças de volume b , por sua vez, podem ser aproximadas sobre cada célula por funções interpoladoras ϕ_c e valores nodais B_n (nos nós funcionais). A fim de utilizar as expressões aproximadas mostradas neste item, é conveniente apresentar a identidade (168) na forma matricial, onde a substituição daquelas é imediata. Assim,

$$\begin{aligned} c(s) \cdot u(s) &= - \int_{\Gamma} p^*(S, Q) u(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u^*(S, Q) p(Q) d\Gamma(Q) + \\ &+ \int_{\Omega} u^*(S, q) b(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (174)$$

Portanto, aproximando o contorno do sólido em "J" elementos, com "N" pontos nodais (nós funcionais), e o seu domínio em "M" células, a representação integral para deslocamentos, (174), passa a ser:

$$\begin{aligned} c(s) \cdot u(s) = & - \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma} p^*(S, Q) u(Q) d\Gamma(Q) \right] \cdot U^n + \\ & + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma} u^*(S, Q) p(Q) d\Gamma(Q) \right] \cdot P^n + \\ & + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega} u^*(S, q) b(q) d\Omega(q) \right] \cdot B^n \end{aligned} \quad (175)$$

Uma vez resolvidas as integrais de (175), com procedimentos que serão vistos no item (173), e escrevendo-as para cada ponto de colocação S, tem-se a seguinte equação matricial:

$$\bar{C}U + \hat{H}U = GP + DB \quad (176)$$

Onde as matrizes $\hat{H}$, G e D vêm, respectivamente, dos somatórios das integrais sobre cada elemento j, definidos em (175). Observando-se a equação (176), nota-se que é possível agrupar as matrizes que multiplicam o vetor dos valores nodais de deslocamentos ($H = \bar{C} + \hat{H}$), resultando na equação:

$$HU = GP + DB \quad (177)$$

Um sistema de equações algébricas pode ser montado a partir da definição das matrizes H, G e D e dos valores prescritos de deslocamentos U, forças de superfície P e forças de volume B. Assim,

$$AV_{DF} = F \quad (178)$$

Onde: A é uma matriz de ordem $3N \times 3N$ que contém elementos das matrizes H e G devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; VDF é o vetor

das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies, de acordo com as condições de contorno; e F o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes H e G relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume. A solução do sistema (178) é simples, podendo ser representada por:

$$V_{DF} = A^{-1}F \quad (179)$$

Podem ser utilizados os já consagrados métodos de resolução de sistema linear de equações, como por exemplo o algoritmo de Gauss. Entretanto, é necessário lembrar-se que a matriz A é cheia e não simétrica.

3.7 – INTERPOLAÇÕES DA GEOMETRIA E VARIÁVEIS

Discretizado o meio contínuo, é necessário representar a distribuição das variáveis no domínio do elemento a partir de interpolações dos respectivos valores discretos (nodais) definidos nos pontos funcionais. Além da interpolação própria das variáveis, também faz-se necessário a representação da geometria do elemento, já as matrizes de influência $[H]$ e $[G]$ são obtidas pela integração sobre a geometria de cada elemento. Dentre as diversas opções de interpolações, as mais usuais são as lineares e as quadráticas para as variáveis e superfícies planas triangulares e quadrangulares para as geometrias. No entanto, elementos apenas com essas geometrias não atende a proposta desse projeto em representar exatamente a geometria do problema. As geometrias no tema de duto enterrado deste projeto (vide Figura 37) são:

Elementos triangulares planos para discretização das interfaces de contato fundação de máquina e o solo; quando for utilizada solução fundamental de Kelvin/Stokes é necessário estabelecer um “contorno” para o domínio infinito, nesse caso, a discretização foi adotada triangular plana, vide Figura 37.a. A interpolação das variáveis e geometria é feita linearmente a partir de três nós funcionais posicionados nos vértices do triângulo.

Elementos quadrangulares curvos associados a um painel cilíndrico destinado para discretização do fuste da cavidade cilíndrica, vide Figura 37.b. Nesse elemento existem quatro pontos nodais com interpolação das variáveis.

Elementos setoriais planos formado por dois lados retos e dois curvos destinado para discretização das extremidades axiais da cavidade, vide Figura 37.c. Os campos são interpolados linearmente sobre os quatros nós funcionais do elemento.

Elementos discóides planos utilizados para discretização das regiões vizinhas aos centros das circunferências das extremidades axiais da cavidade, vide Figura 37.d. Convém notar que um único ponto nodal é colocado nos centros, já os campos são admitidos constantes no domínio desse elemento.

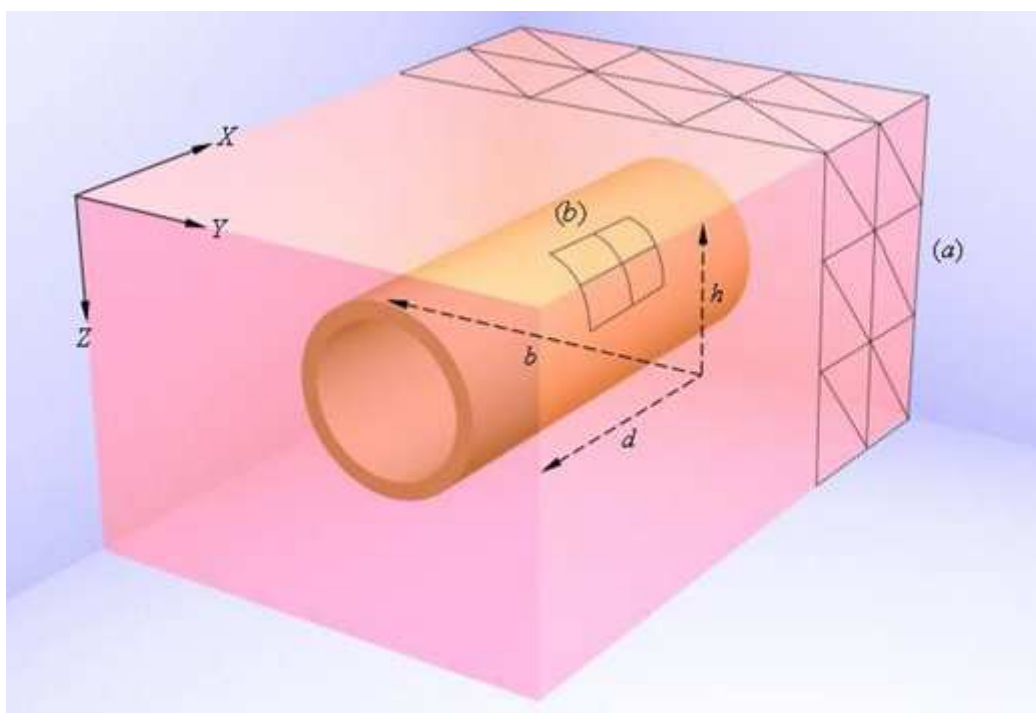


Figura 37 - Tipologia de elementos e sistemas de coordenadas

Nesta tese é discutido inicialmente o caso de interpolação linear em geometrias triangulares planas. Em seguida, a discussão é orientada para os elementos de contorno especiais, que são uma contribuição original desse projeto para análise de dutos. O primeiro desse conjunto são os elementos de geometrias cilíndricas (painéis de cilindro). Só então, os elementos setoriais planos são detalhados, e finalmente, a apresentação da

tipologia dos elementos utilizados na discretização do solo é encerrada reportando o caso do elemento discóide.

3.7.1 – ELEMENTOS DE CONTORNO USUAIS

Se a distribuição for linear para as componentes dos deslocamentos no interior de um elemento triangular (vide Figura 38), então:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \quad (180)$$

onde as funções N_i são $N_1 = 1 - \xi - \eta$; $N_2 = \xi$; $N_3 = \eta$

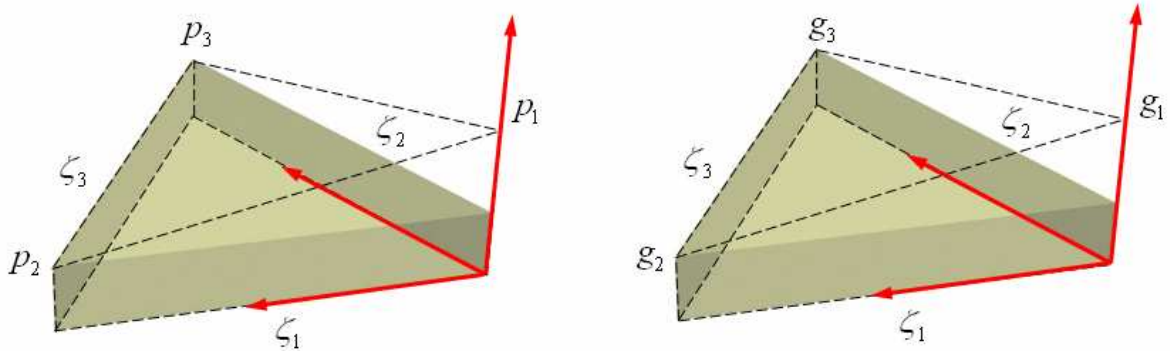


Figura 38 - Elemento triangular

3.7.2 – ELEMENTOS DE CONTORNO ESPECIAIS

Nesta tese tem como contribuição original o desenvolvimento de três tipos de elementos de contorno especiais, sendo eles: o elemento cilíndrico, o elemento setorial plano e o discoide.

Na literatura (ALIABADI et al. 1994, BREBIA 1978, BESKOS 1987) grande parte da geometria dos elementos de contorno são planas ou aproximadas por polinômios, usualmente até segundo grau. Dada a especificidade do assunto discutido nessa tese (superfícies de contato duto-solo – vide Figura 37), esses não seriam muito adequados. Por isso, partiu-se para a proposta de novos elementos de contorno no qual superfícies cilíndricas, superfícies planas com contornos não poligonais pudessem ser exatamente representados. Assim, na seqüência serão descritos os aspectos matemáticos para viabiliza-los. Se for admitida uma distribuição linear para as componentes dos campos no interior de um elemento de um painel cilíndrico (vide Figura 39), suas formas interpoladas ficam:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_\theta^1 \\ u_r^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_\theta^2 \\ u_r^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^3 \\ u_\theta^3 \\ u_r^3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^4 \\ u_\theta^4 \\ u_r^4 \end{Bmatrix} \quad (181)$$

Onde as funções interpoladoras são dadas por:

$$N_1 = \varepsilon_r \varepsilon_\theta; N_2 = (1 - \varepsilon_r) \varepsilon_\theta; N_3 = (1 - \varepsilon_r)(1 - \varepsilon_\theta); N_4 = \varepsilon_r(1 - \varepsilon_\theta)$$

$$\text{com } \varepsilon_r = \frac{\bar{r}}{\Delta r}; \varepsilon_\theta = \frac{\bar{y}}{r\beta} = \frac{r\theta}{r\beta} = \frac{\theta}{\beta}$$

Convém notar que os graus de liberdades no elemento cilíndrico já estão indicados no sistema local de coordenadas. Convém que na Figura 39 só estão indicados os graus de liberdade nos nós 1 e 4. Os demais não estão explicitamente indicados para não saturar o desenho.

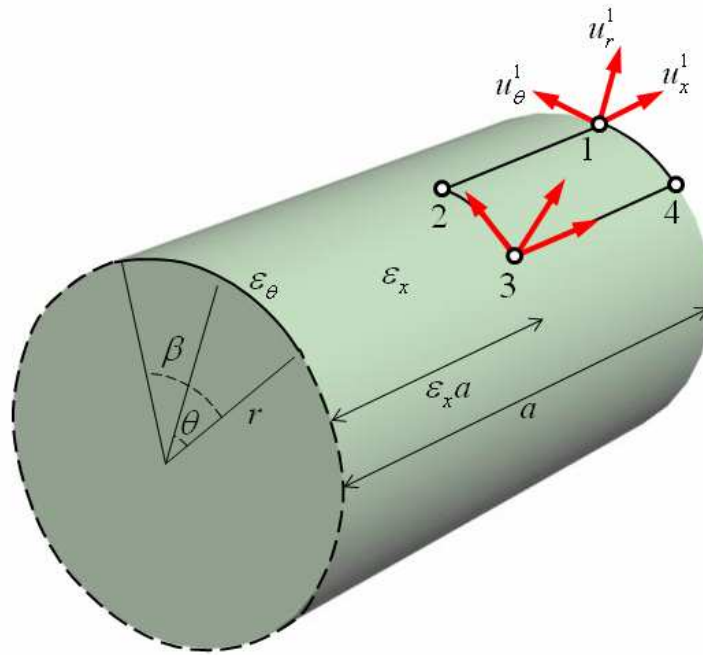


Figura 39 - O elemento de Contorno Cilíndrico

No caso de distribuição linear para os campos no domínio de um elemento setorial plano tem-se uma expressão análoga a equação (31), necessitando-se apenas de ajustes nas equações interpoladoras:

$$N_1 = \epsilon_r \epsilon_\theta; N_2 = (1 - \epsilon_r) \epsilon_\theta; N_3 = (1 - \epsilon_r)(1 - \epsilon_\theta); N_4 = \epsilon_r(1 - \epsilon_\theta)$$

$$\text{com } \epsilon_r = \frac{\bar{r}}{\Delta r}; \epsilon_\theta = \frac{\bar{\theta}}{r\beta} = \frac{r\theta}{r\beta} = \frac{\theta}{\beta}.$$

Convém notar que os graus de liberdades no elemento setorial plano já estão indicados no sistema local de coordenadas. Convém que na Figura 40 só estão indicados os graus de liberdade nos nós 1 e 2. Os demais não estão explicitamente indicados para não saturar o desenho. O elemento setorial plano é aplicável em praticamente todas as regiões dos contornos axiais da cavidade, exceto quando o raio interno do setor for zero, degenerando o elemento a uma geometria triangular com um dos bordos curvos. O principal problema com essa configuração é que os campos vetoriais de interesse não podem ser interpolados univocamente a partir de seus valores nodais. Assim, para resolver essa feição plurívoca, nesse trabalho é admitida uma terceira estratégia. Ela consiste em definir um disco de raio finito r_0 , cujo centro está posicionado no centro de gravidade da região axial da cavidade, vide Figura 40.

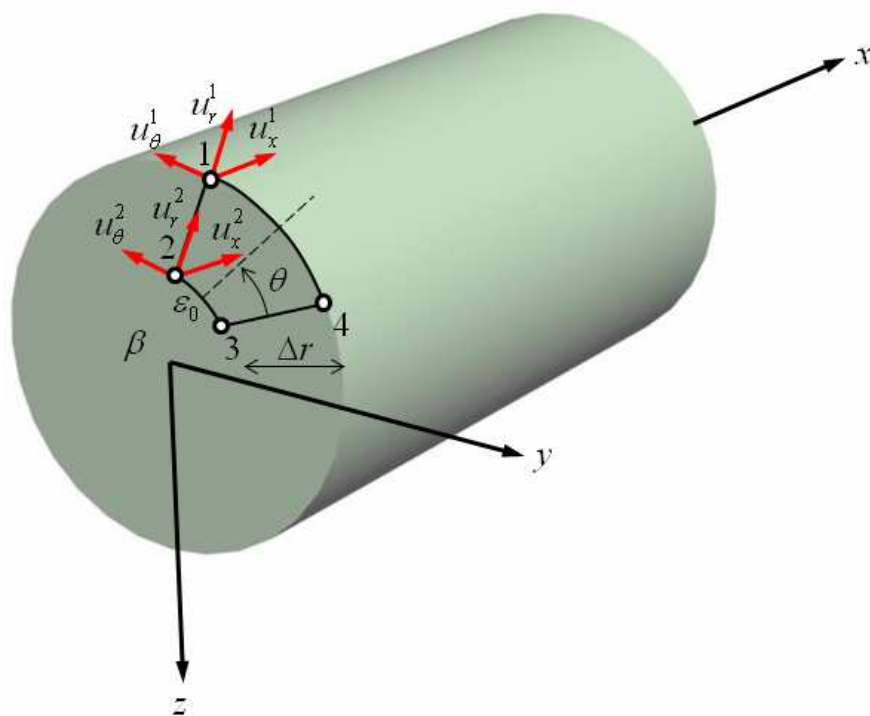


Figura 40 - O elemento de Contorno Setorial Plano

Já na Figura 41 pode ser visualizado o elemento discoide que completa o contorno.

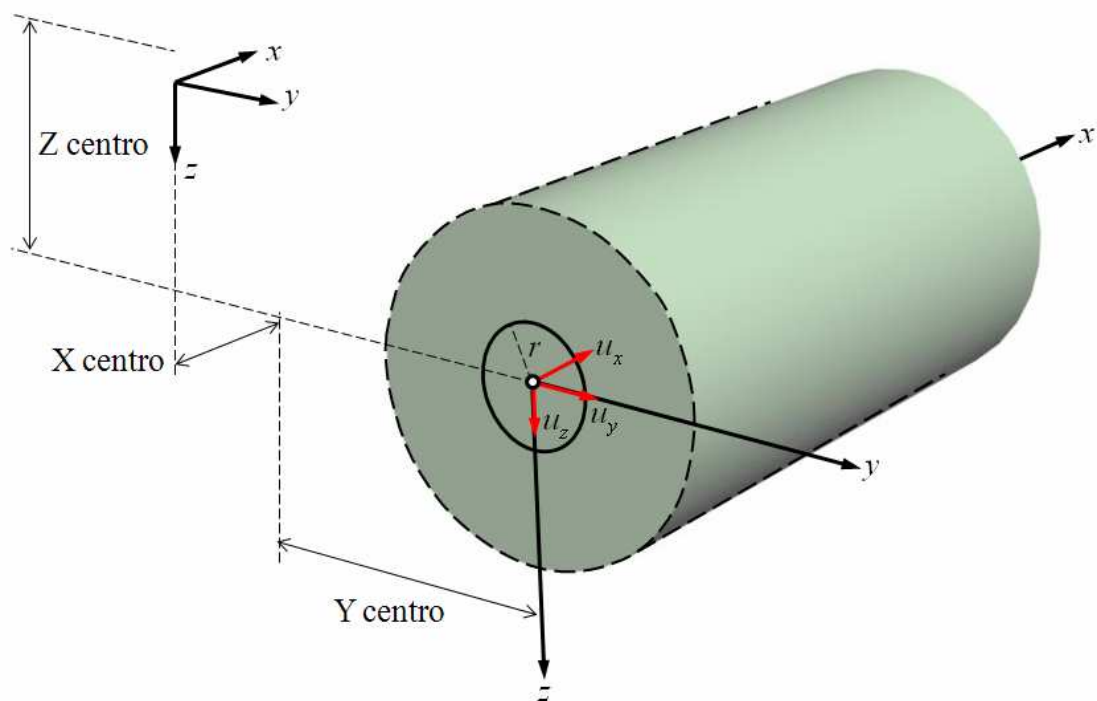


Figura 41 - O elemento de Contorno Discóide

Além disso, uma distribuição constante é admitida para as variáveis nesse domínio, por isso um único ponto funcional é locado no centro do disco. Convém notar que na ausência de fontes pontuais aplicadas sobre o ponto central e o raio r_0 for suficientemente pequeno, em princípio, é razoável esperar que os campos tenham uma distribuição constante em sua vizinhança. Outro aspecto relevante a ser ressaltado é que diferentemente dos elementos cilíndricos e setoriais planos, os campos no domínio do elemento discóide não são escritos no sistema local e sim no global.

Capítulo IV

INTERAÇÃO SOLO ESTRUTURA

4.1– INTRODUÇÃO

Nesta seção são discutidas as contribuições originais da tese para a obtenção das equações algébricas que viabiliza o acoplamento entre o método de elementos finitos (MEF), que discretiza o duto por meio do elemento CYS (Teoria Clássica Cascas) ou pelo elemento RLS (Teoria de Camadas Discretas de Reddy), e o método de elementos de contorno (MEC) que discretiza o solo. A Figura 42 e Figura 43, apresenta uma breve descrição do problema completo a ser estudado e suas forças de interação.

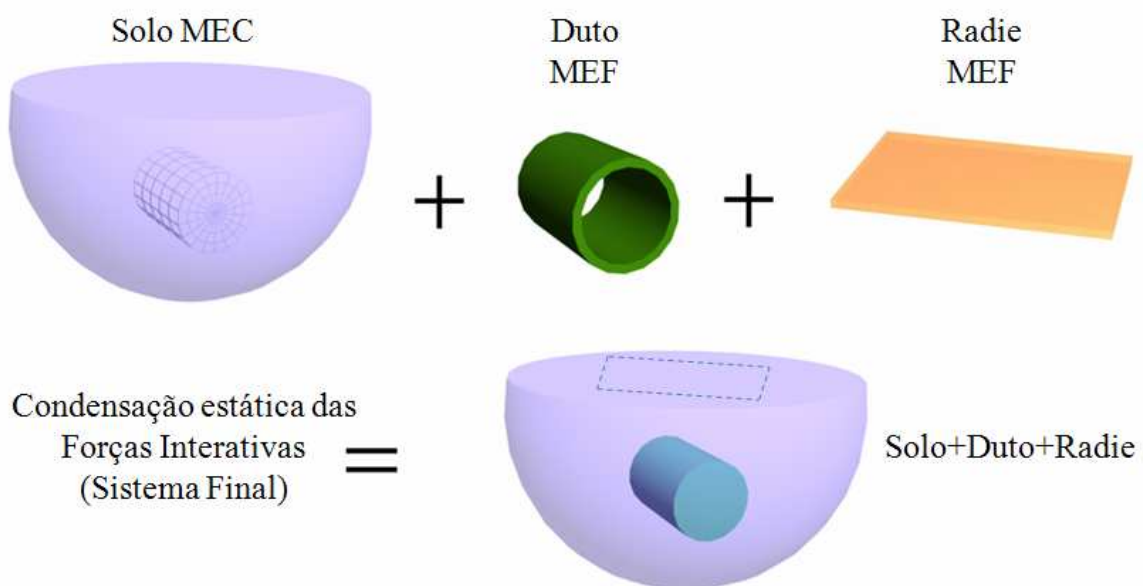


Figura 42- Etapas do acoplamento MEC/MEF

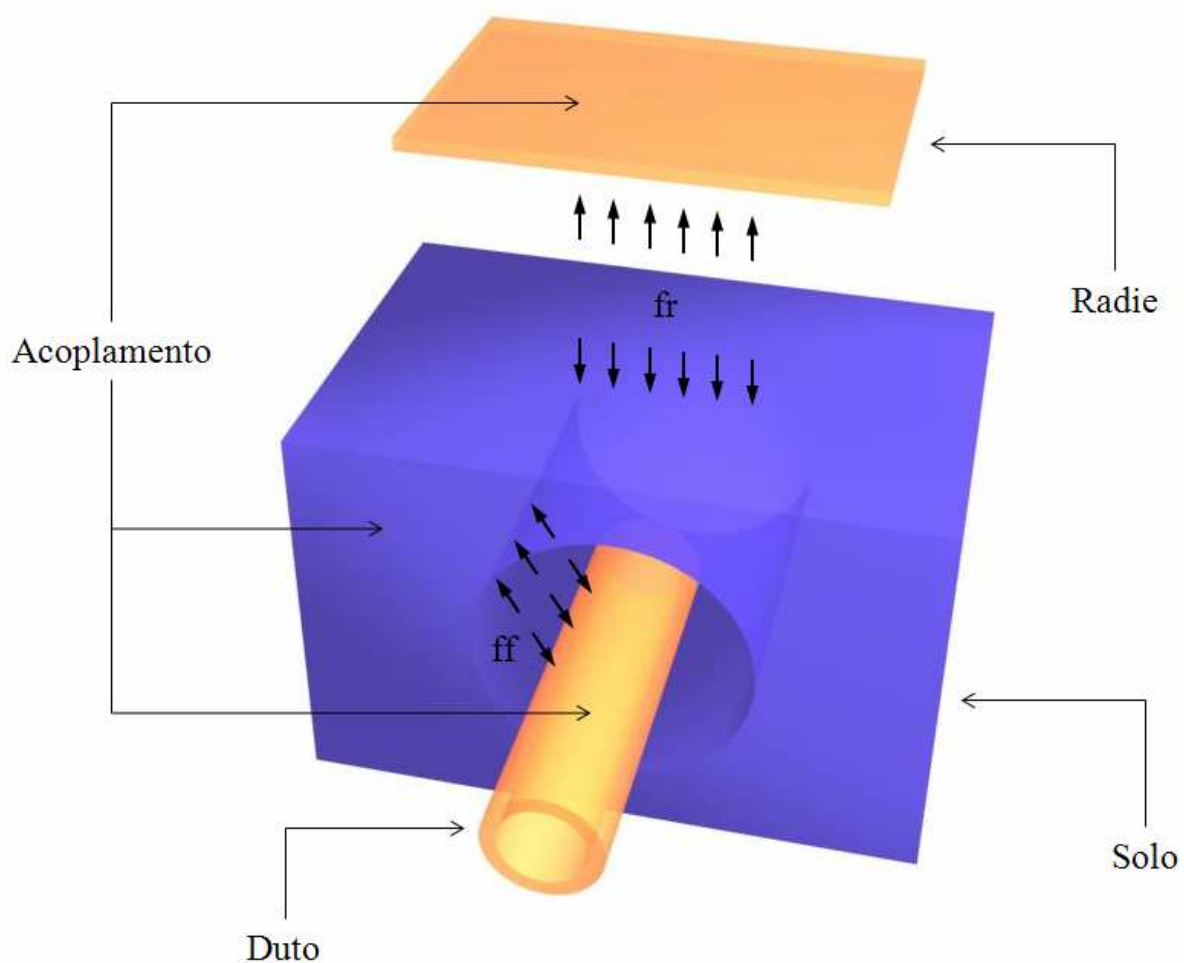


Figura 43 – Forças de Interação do Problema Duto Enterrado.

Em muitos trabalhos de análise de estruturas enterradas em que usualmente emprega-se o acoplamento MEC-MEF no caso em que a estrutura possui partes curvas, suas geometrias são aproximadas por elementos finitos e elementos de contorno planos. Esta estratégia comumente empregada, gera a inconveniente necessidade de se introduzir nós duplos ao longo das arestas formadas pelos elementos de contorno contíguos a fim de eliminar a multiplicidade de normais (contorno não suave) nas arestas. Para reduzir sensivelmente este problema em dutos, nesta tese partiu-se para uma representação exata da geometria cilíndrica da interação solo-duto, modelando-se o duto por elementos finitos de casca cilíndrica e utilizando-se elementos de contorno do tipo painel cilíndrico para o fuste do solo.

Outras medidas são necessárias para viabilizar a geração das equações algébricas do solo, já que o MEC exige que o contorno do modelo esteja completamente definido, isto é, fechado. Para tanto como visto no capítulo III foram utilizados elementos de contorno especiais para o fechamento do contorno do solo em cada uma das extremidades axiais da cavidade cilíndrica. Estes são: o elemento setorial plano (formados por dois lados retos e dois curvos) e o elemento discóide (representado por um único ponto nodal, colocado nos centros) vide Figura 40 e Figura 41.

Com essa estratégia um sistema algébrico do MEC, com graus de liberdade em deslocamentos e forças compatível com suas contrapartes presentes nos elementos finitos cilíndricos, pode ser satisfatoriamente acoplado. Dependendo da solução fundamental utilizada no solo, a representação algébrica do MEC pode ser sintetizada como:

- a) **Problema Fundamental de Mindlin:** Aqui as soluções p_{ij} na superfície do semi-espaço são nulas de forma que requer apenas a discretização da superfície de contato radie-solo.

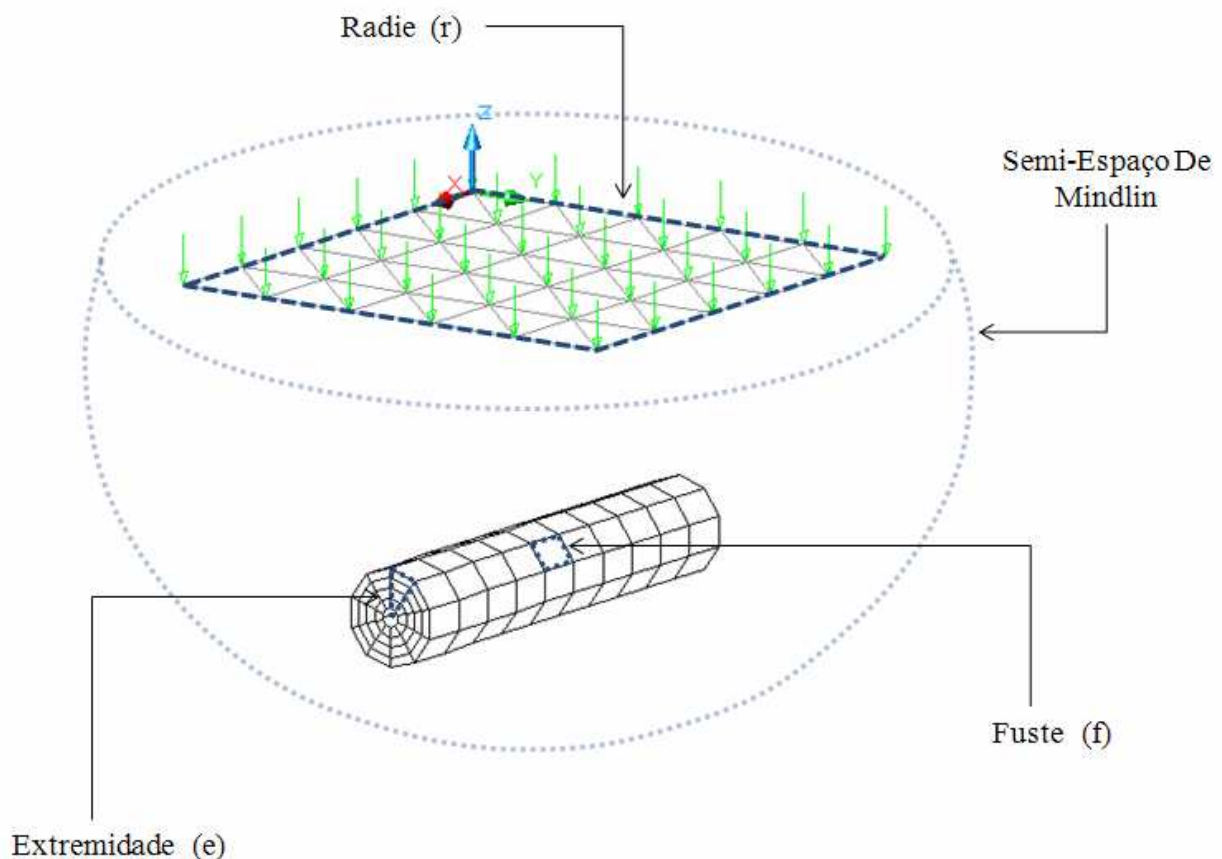


Figura 44- Solução de Mindlin.

Quando os nós fontes forem colocados no fuste (f), na extremidade da cavidade (e), na interface de contato com o radie (r), o sistema algébrico fica:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{ff} & \tilde{H}_{fe} & \tilde{H}_{fr} \\ \tilde{H}_{ef} & \tilde{H}_{ee} & \tilde{H}_{er} \\ \tilde{H}_{rf} & \tilde{H}_{re} & \tilde{H}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_f \\ \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ff} & \tilde{G}_{fe} & \tilde{G}_{fr} \\ \tilde{G}_{ef} & \tilde{G}_{ee} & \tilde{G}_{er} \\ \tilde{G}_{rf} & \tilde{G}_{re} & \tilde{G}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_f \\ \tilde{p}_e \\ \tilde{p}_r \end{Bmatrix} \quad (182)$$

b) **Problema Fundamental de kelvin:** Esta solução não conduz a uma solução p_{ij} nula no plano em contato com o radie, o que exige definição de pontos fora da região de contato com o radie, inclusive a inclusão de contorno para o solo que envelopa a cavidade cilíndrica (Por exemplo, paredes do cubo indicado na Figura 45).

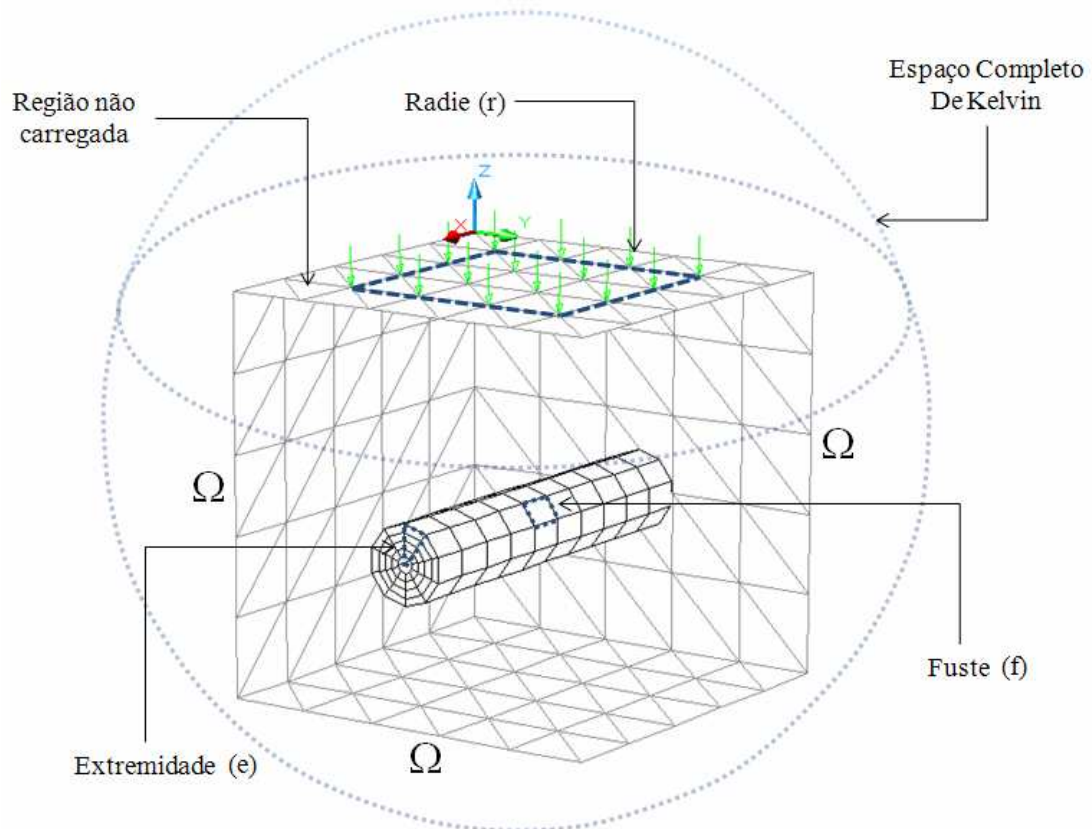


Figura 45- Solução de Kelvin.

Quando os nós fontes forem colocados no fuste (f), na extremidade da cavidade (e), na interface de contato com o radie (r) e nós do contorno envolvente (l), o sistema algébrico fica:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{ff} & \tilde{H}_{fe} & \tilde{H}_{fr} & \tilde{H}_{fl} \\ \tilde{H}_{ef} & \tilde{H}_{ee} & \tilde{H}_{er} & \tilde{H}_{el} \\ \tilde{H}_{rf} & \tilde{H}_{re} & \tilde{H}_{rr} & \tilde{H}_{rl} \\ \tilde{H}_{lf} & \tilde{H}_{le} & \tilde{H}_{lr} & \tilde{H}_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_f \\ \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_r \\ \tilde{u}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ff} & \tilde{G}_{fe} & \tilde{G}_{fr} & \tilde{G}_{fl} \\ \tilde{G}_{ef} & \tilde{G}_{ee} & \tilde{G}_{er} & \tilde{G}_{el} \\ \tilde{G}_{rf} & \tilde{G}_{re} & \tilde{G}_{rr} & \tilde{G}_{rl} \\ \tilde{G}_{lf} & \tilde{G}_{le} & \tilde{G}_{lr} & \tilde{G}_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_f \\ \tilde{p}_e \\ \tilde{p}_r \\ \tilde{p}_l \end{Bmatrix} \quad (183)$$

Assim, a geração do sistema algébrico do MEC em (182) ou (183) requer que, os pontos-fonte e pontos-campo devem ser locados na estrutura e no solo. Após a separação dos nós ligados (i) (que tem interação), daqueles que não tem (ditos nós livres do solo) (c), o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{ii} & \tilde{H}_{i,C1} & \tilde{H}_{i,C2} \\ \tilde{H}_{C1,i} & \tilde{H}_{C1,C1} & \tilde{H}_{C1,C2} \\ \tilde{H}_{C2,i} & \tilde{H}_{C2,C1} & \tilde{H}_{C2,C2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_i \\ \tilde{U}_{C1} \\ \tilde{U}_{C2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ii} & \tilde{G}_{i,C1} & \tilde{G}_{i,C2} \\ \tilde{G}_{C1,i} & \tilde{G}_{C1,C1} & \tilde{G}_{C1,C2} \\ \tilde{G}_{C2,i} & \tilde{G}_{C2,C1} & \tilde{G}_{C2,C2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_i \\ \tilde{P}_{C1} \\ \tilde{P}_{C2} \end{Bmatrix} \quad (184)$$

As regiões com nós livres no solo podem ter ainda prescrições em força (c1) e deslocamento (c2) . Isso requer a separação dos termos incógnitos daqueles conhecidos no (sistema de forma que o sistema (184). Isso implica na troca de colunas na posição (c2) com mudança de sinal em (184) resultando em.

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{ii} & \tilde{H}_{i,C1} & -\tilde{G}_{i,C2} \\ \tilde{H}_{C1,i} & \tilde{H}_{C1,C1} & -\tilde{G}_{C1,C2} \\ \tilde{H}_{C2,i} & \tilde{H}_{C2,C1} & -\tilde{G}_{C2,C2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_i \\ \tilde{U}_{C1} \\ \tilde{P}_{C2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ii} & \tilde{G}_{i,C1} & -\tilde{H}_{i,C2} \\ \tilde{G}_{C1,i} & \tilde{G}_{C1,C1} & -\tilde{H}_{C1,C2} \\ \tilde{G}_{C2,i} & \tilde{G}_{C2,C1} & -\tilde{H}_{C2,C2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_i \\ \tilde{P}_{C1} \\ \tilde{U}_{C2} \end{Bmatrix} \quad (185)$$

Por uma questão de concisão (185) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} [H_{ii}] & [H_{ic}] \\ [H_{ci}] & [H_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_i\} \\ \{U_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{ii}] & [G_{ic}] \\ [G_{ci}] & [G_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{P_c\} \end{Bmatrix} \quad (186)$$

Onde:

$$[H_{ii}] = [\tilde{H}_{ii}]$$

$$[G_{ii}] = [\tilde{G}_{ii}]$$

$$[H_{ic}] = \left[[\tilde{H}_{i,C1}] \quad [-\tilde{G}_{i,C2}] \right]$$

$$[G_{ic}] = \left[[\tilde{G}_{i,C1}] \quad [-\tilde{H}_{i,C2}] \right]$$

$$[H_{ci}] = \begin{bmatrix} [\tilde{H}_{C1,i}] \\ [-\tilde{H}_{C2,i}] \end{bmatrix}$$

$$[G_{ci}] = \begin{bmatrix} [\tilde{G}_{C1,i}] \\ [-\tilde{G}_{C2,i}] \end{bmatrix}$$

$$[H_{cc}] = \begin{bmatrix} [\tilde{H}_{C1,C1}] & [-\tilde{G}_{C1,C2}] \\ [\tilde{H}_{C2,C1}] & [-\tilde{G}_{C2,C2}] \end{bmatrix}$$

$$[G_{cc}] = \begin{bmatrix} [\tilde{G}_{C1,C1}] & [-\tilde{H}_{C1,C2}] \\ [\tilde{G}_{C2,C1}] & [-\tilde{H}_{C2,C2}] \end{bmatrix}$$

Isolando-se o vetor (deslocamentos ou forças) de nós livres do solo não prescritos, resulta em:

$$[U_c] = -[H_{cc}]^{-1} \cdot [H_{ci}] \cdot [U_i] + [H_{cc}]^{-1} \cdot [G_{ci}] \cdot \{P_i\} + [H_{cc}]^{-1} \cdot [G_{cc}] \cdot \{P_c\} \quad (187)$$

Ao substituir (187) na primeira linha de (186) resulta em:

$$[H^*] \cdot \{U_i\} = [G^*] \cdot \{P_i\} + \{P^*\} \quad (188)$$

Onde (189)

$$[H^*] = [H_{ii}] - [H_{ic}] \cdot [H_{cc}]^{-1} \cdot [H_{ci}]$$

$$[G^*] = [G_{ii}] - [H_{ic}] \cdot [H_{cc}]^{-1} \cdot [G_{ci}]$$

$$\{P^*\} = \left([G_{ic}] - [H_{ic}] [H_{cc}]^{-1} [G_{cc}] \right) \cdot \{P_c\}$$

Isolando-se as forças de superfícies das interfaces ligadas $\{P_i\}$ em (189), fica:

$$[A] \cdot \{U_i\} - \{P^{**}\} = \{P_i\} \quad (190)$$

Onde:

$$[A] = [G^*]^{-1} \cdot [H^*]$$

$$\{P^{**}\} = [G^*]^{-1} \cdot \{P^*\}$$

Se houver apenas o duto na análise (i=f) então a equação (190) fica:

$$[A_{ff}] \cdot \{U_f\} - \{P_f^{**}\} = \{P_f\} \quad (191)$$

O sistema em (191) ainda requer ajustes para transformar as forças de superfícies distribuídas (resultantes do MEC) $\{P_f\}$ em forças nodais equivalentes $\{P_F\}$ compatíveis com o MEF. Para tal fim multiplica-se ambos os lados de (191) por uma matriz de transformação $[\alpha_f]$, resultando em:

$$\{P_F\} = [\alpha_f] [A_{ff}] \{U_f\} - [\alpha_f] \{P_f^{**}\} \quad (192)$$

Onde: $[\alpha_{ff}] = [Q_f]$, é uma matriz e que depende do elemento finito utilizado. No caso, CYS ou RLS. Assim, inserindo essa transformação em (192) fica:

$$\{P_F\} = [\alpha_f] [A_{ff}] \{U_f\} - [\alpha_f] \{P_f^{**}\} \quad (193)$$

$$\{P_F\} = [K_{ff}] \{U_F\} - \{P_F^{**}\} \quad (194)$$

$$\text{Onde: } [K_{ff}] = [\alpha_f] [A_{ff}] \text{ e } \{P_F^{**}\} = [\alpha_f] \{P_f^{**}\}$$

Quando a estrutura for composta pelo duto e radiê algumas adaptações tem que ser inseridas nas equações (191) - (194), indicadas, a seguir:

$$\begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fr} \\ A_{rf} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_f^{**} \\ P_r^{**} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_f \\ P_r \end{Bmatrix} \quad (195)$$

Do mesmo modo, o sistema em (195) necessita de ajustes para transformar as forças de superfícies distribuídas (resultantes do MEC) $\{P_f\}$ em forças nodais equivalentes $\{P_F\}$ compatíveis com o MEF. Para tal fim multiplica-se ambos os lados de (195) por uma matriz de transformação $[\alpha_f]$, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} P_F \\ P_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_f & 0 \\ 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fr} \\ A_{rf} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_r \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_f & 0 \\ 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_f^{**} \\ P_r^{**} \end{Bmatrix} \quad (196)$$

$\alpha_r = [Q_r]$, $\alpha_f = [Q_f]$ são matrizes que dependem do elemento finito utilizado. No caso CYS ou RLS. Assim, inserindo essa transformação em (196) fica:

$$\begin{Bmatrix} P_F \\ P_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_f & 0 \\ 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fr} \\ A_{rf} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_r \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_f & 0 \\ 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_f^{**} \\ P_r^{**} \end{Bmatrix} \quad (197)$$

Onde: $[\alpha_{ff}] = [Q_f]$ são matrizes e dependem dos graus de liberdade do elemento finito utilizado. O sistema (197) com as contribuições do solo compatíveis no MEF equivalente pode ainda ser reorganizado como:

$$\begin{Bmatrix} P_F \\ P_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fr} \\ K_{rf} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_F^{**} \\ P_R^{**} \end{Bmatrix} \quad (198)$$

$$\text{Onde: } \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fr} \\ K_{rf} & K_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_f & 0 \\ 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fr} \\ A_{rf} & A_{rr} \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{Bmatrix} P_F^{**} \\ P_R^{**} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_f & 0 \\ 0 & \alpha_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_f^{**} \\ P_r^{**} \end{Bmatrix}$$

4.2– INTERFACE SOLO-DUTO

A interação duto-solo pode ser representada matematicamente a partir das seguintes hipóteses:

- O contato entre duto e a superfície do solo é ideal (não há deslocamento relativo em nenhum ponto da superfície de interação);
- Compatibilização apenas dos graus de liberdade de deslocamentos e forças nas direções axiais, radiais e circunferenciais na superfície de contato.

a) Elemento CYS

O sistema algébrico da estrutura obtido a partir da discretização em elementos finitos de cascas cilíndricas CYS é dado por:

$$\left[\hat{K}_{FF} \right] \left\{ \hat{U}_F \right\} = \left\{ \hat{F}_F \right\} - \left\{ F_F \right\} \quad (199)$$

Convém notar que existem 3 graus de liberdade por nó no elemento de contorno do solo, ao passo que o CYS (MEF) requer cinco graus de liberdade (dois adicionais em relação as rotações) $\left(u_x, u_\theta, u_v, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ assim, é necessário inserir zeros no vetor do solo, resultando em $(u_x, u_\theta, u_v, 0, 0)$. Ao fazer a compatibilização da dimensão dos vetores (inserção conveniente de zeros) do solo (194) $\{U_f\}$ resulta em $\{U_F\}$ e $\{F_f\}$ resulta em $\{F_F\}$ de forma que o sistema do solo pode ser escrito como:

$$\{F_F\} = \left[\hat{K}_{ff} \right] \{U_F\} - \{F_F^{**}\} \quad (200)$$

O acoplamento final dos sistemas pode ser assegurado impondo as condições de compatibilidade de deslocamentos $\{U_F\} = \{\hat{U}_F\}$ e as condições de equilíbrio $\{F_F\} = \{\hat{F}_F\}$.

Assim:

$$\left[\left[\hat{K}_{ff} \right] + \left[\hat{K}_{FF} \right] \right] \{U_F\} = \{\hat{F}_F\} + \{F_F^{**}\} \quad (201)$$

Na Figura 46 (a) e (b) estão indicados os graus de liberdade do solo e do elemento CYS. Por uma questão de concisão apenas os nós 1 e 4 são representados com os graus de liberdade associados.

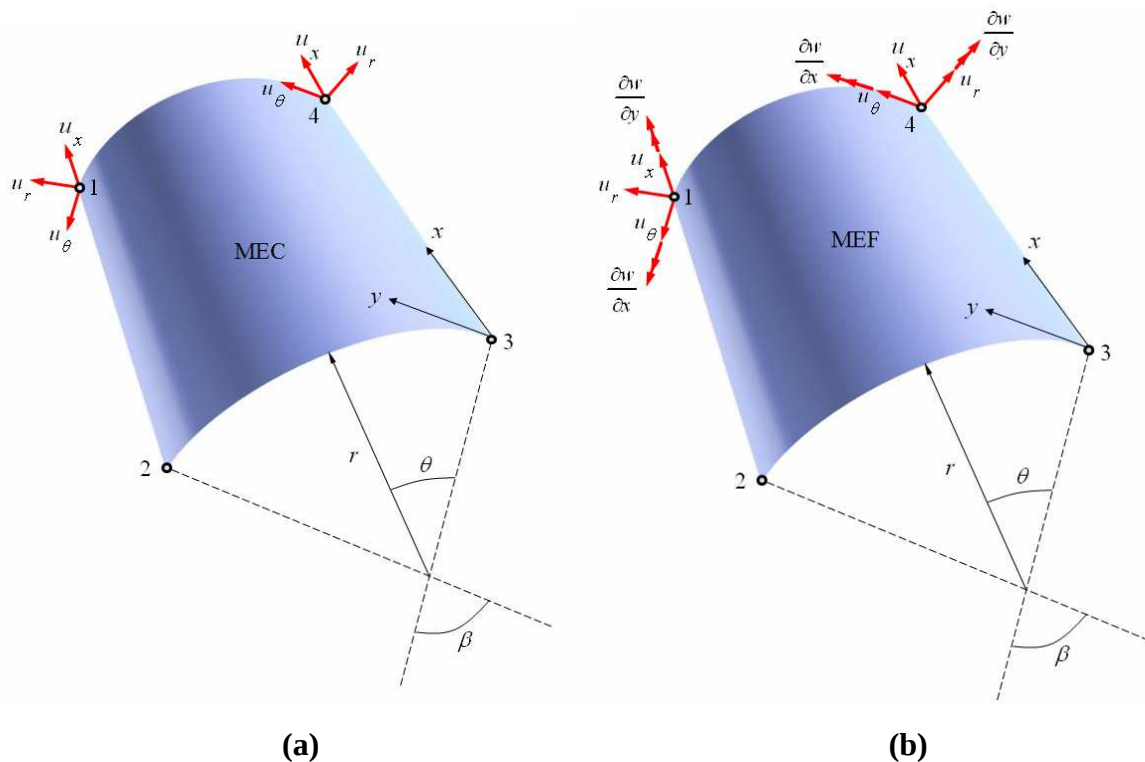


Figura 46 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento Finito CYS

b) Elemento RLS

O acoplamento do sistema oriundo do solo com o RLS dependerá da forma que a matriz de rigidez da estrutura foi organizada. No capítulo II está descrito uma montagem

desta matriz e seu vetor nodal seguindo a estratégia de posicionamento dos graus de liberdade ditados pela numeração sequencial dos nós geométricos e das interfaces entre camadas, gerando o sistema.

$$[\hat{K}_{FF}][\hat{U}_F] = \{\hat{F}_F\} - \{F_F\} \quad (202)$$

Com o intuito de preservar o maximo possível a comunalidade das funções de implementação do código optou-se por resequenciar o posicionamento final seguindo a numeração primeiro na interface ligada com o solo e assim por diante. Dessa forma o novo sistema passa a ser:

$$[\bar{K}]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} - \{F\} \quad (203)$$

Onde:

$$[\bar{K}] = [L]^T [\hat{K}_{FF}] [L]$$

$$[\bar{F}] = [L]^T [\hat{F}_F]$$

Embora o formalismo matemático exija a formação de $[L]$, sua pré e pós multiplicação pela matriz $[\hat{K}_{FF}]$ para a obtenção da matriz reposicionada $[\bar{K}]$, no código computacional desenvolvido essa tarefa é obtida diretamente escrevendo funções que transformam os índices da matriz original para a atual. O sistema do MEF em (203), agora reordenado, pode ser particionado na forma de submatrizes.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{LL} & \bar{K}_{LN} \\ \bar{K}_{NL} & \bar{K}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_L \\ \bar{U}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_L \\ \bar{F}_N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (204)$$

Convém notar que os graus de liberdade no contato duto-solo no RLS são completamente compatíveis de forma que não há necessidade de fazer quaisquer adaptações nas contribuições oriundas do solo descritas na equação (194), vide Figura

47. Nesta é demonstrada a configuração dos graus de liberdade do elemento RLS a ser acoplado ao elemento cilíndrico do solo. Aqui a composição do sistema algébrico acoplado é perfeitamente compatibilizado já que tanto o elemento de solo quanto o elemento de duto possuem apenas graus translacionais.

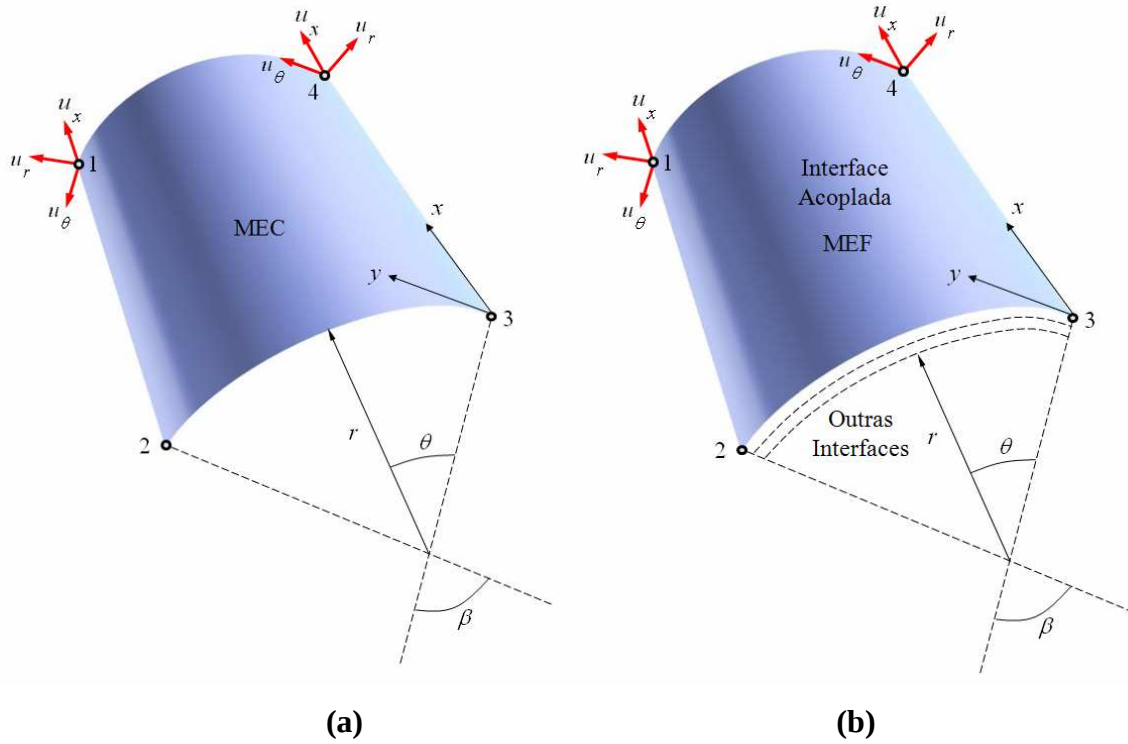


Figura 47 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento Finito RLS

Então fazendo-se o equilíbrio de forças $\{\bar{P}_L\} = \{P_F\}$, a compatibilidade de deslocamentos $\{\bar{U}_L\} = \{U_F\}$, e ainda substituindo o sistema do solo em (198) no sistema do MEF RLS (204), tem-se o sistema final da interação duto-solo no RLS.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{LL} + K_{ff} & \bar{K}_{LN} \\ \bar{K}_{NL} & \bar{K}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_L \\ \bar{U}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_L \\ \bar{F}_N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_F^{**} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (205)$$

4.3– INTERFACE SOLO-DUTO-RADIE

Um outro ponto a ser discutido é a situação em que vários agentes podem interferir no comportamento do duto enterrado. Neste caso, não só a interface enterrada duto-solo é relevante no estudo do problema, mas também a interação placa-solo

(fundação de máquina) na superfície do meio contínuo decorrente da atividade industrial. Assim, aqui os tópicos discutidos nas duas últimas seções são convenientemente unificados. O sistema algébrico do solo é gerado pela colocação dos pontos-fonte e leitura dos efeitos nos pontos-campo no fuste (f) e nas regiões não-ligadas do solo (s) e na placa do radiê (r).

a) Elemento CYS

Os sistemas algébricos do MEF radie (DKSt) e duto (CYS) são:

$$[\hat{K}_{RR}][\hat{U}_R] = \{\hat{F}_R\} - \{F_R\} \quad (206)$$

$$[\hat{K}_{FF}][\hat{U}_F] = \{\hat{F}_F\} - \{F_F\} \quad (207)$$

Como já discutido anteriormente, existem 3 graus de liberdade por nó no elemento de contorno do solo, ao passo que o elemento finitos de duto CYS requer cinco graus de liberdade (dois adicionais em relação as rotações), além disso, o elemento finito do radie é também composto por cinco graus de liberdade, de maneira que os vetores de deslocamentos do duto e do radie tem a seguinte forma $\left(u_x, u_\theta, u_y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$.

Assim, é necessário inserir zeros no vetor do solo em torno do duto e em contato com o radie, o que resulta para os dois casos em vetores da forma $(u_x, u_\theta, u_y, 0, 0)$. A Figura 48 e Figura 49 mostram os elementos finitos e os graus de liberdade a serem compatibilizados.

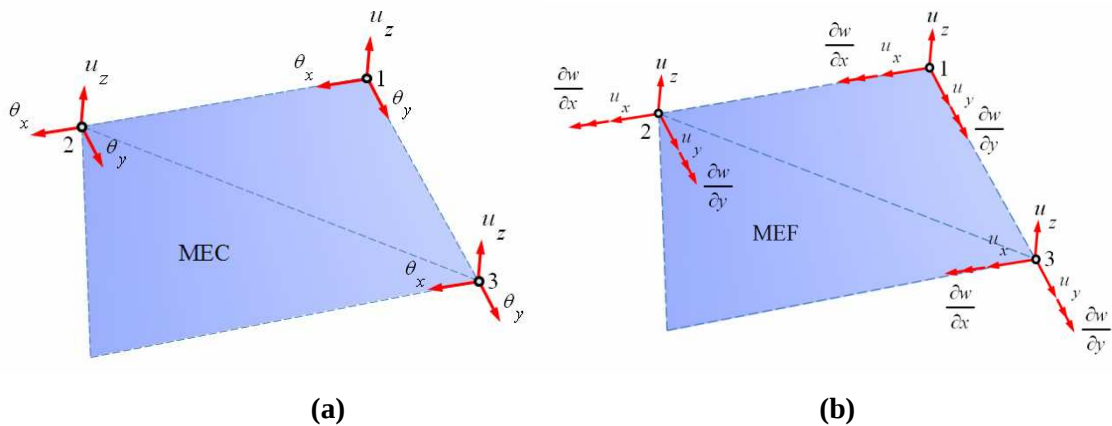


Figura 48 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento do Finito DKSt.

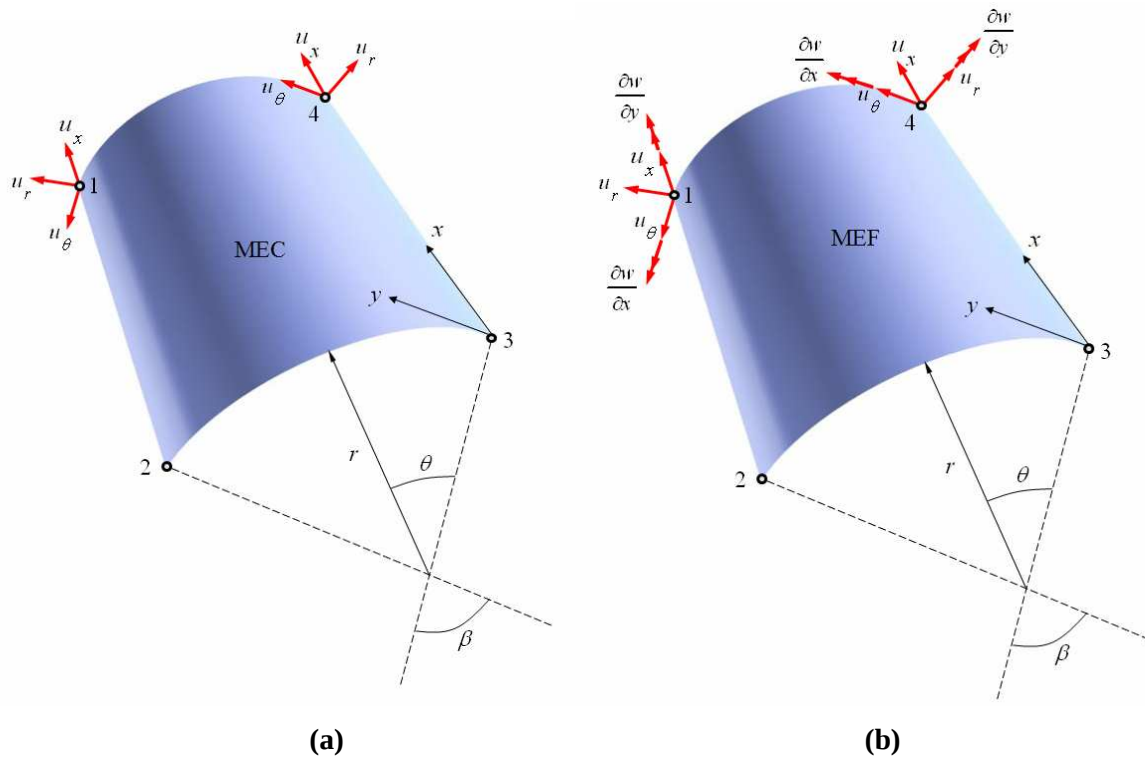


Figura 49 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento do Finito CYS.

As interações duto-solo e placa-solo devem obedecer as seguintes hipóteses:

- O contato duto-solo e placa-solo são ideais (não há deslocamento relativo em nenhum ponto da superfície de interação);
- No duto há compatibilização apenas dos graus de liberdade de deslocamentos e forças nas direções axiais, radiais e circunferenciais na superfície de contato. As rotações do duto não recebem contribuições do solo.
- Na placa há compatibilização dos deslocamentos verticais e horizontais. As rotações da placa estão livres de ligação com o solo.

Após a compatibilização da dimensão dos vetores, $\{U_F\}$ resulta em $\{U_F\}$, $\{F_F\}$ resulta em $\{F_F\}$ e $\{F_R\}$ resulta em $\{F_R\}$ de forma que o sistema do solo pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} F_F \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{FF} & \hat{K}_{FR} \\ \hat{K}_{RF} & \hat{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ U_R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_F^{**} \\ F_R^{**} \end{Bmatrix} \quad (208)$$

O acoplamento final dos sistemas é obtido impondo as condições de compatibilidade de deslocamentos e as relações de equilíbrio nas interfaces solo-radie e solo-duto.

$$\{U_F\} = \{\hat{U}_F\}, \{U_R\} = \{\hat{U}_R\} \quad (209)$$

$$\{F_F\} = \{\hat{F}_F\}, \{F_R\} = \{\hat{F}_R\} \quad (210)$$

Então substituindo a equação do solo redimensionada (208) nos o sistemas algébricos do MEF [Radie (206), Duto (207)] obtem-se o sistema final acoplado:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_{ff} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{K}_{FF} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{K}_{fr} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{K}_{rf} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{K}_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{K}_{RR} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{U}_F\} \\ \{\hat{U}_R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\hat{F}_F\} \\ \{\hat{F}_R\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_F^{**} \\ F_R^{**} \end{Bmatrix} \quad (211)$$

b) Elemento RLS

Aqui os sistemas algébricos do MEF, radie (RLS) e duto (RLS) são:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{U}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_R \end{Bmatrix} - \{F_R\} \quad (212)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{U}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_F \end{Bmatrix} - \{F_F\} \quad (213)$$

As equações do radie e duto, como já discutido anteriormente, devem ser resequenciadas ficando na forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_R \end{Bmatrix} - \{F_R\} \quad (214)$$

$$[\bar{K}_{FF}]\{\bar{U}_F\} = \{\bar{F}_F\} - \{F_F\} \quad (215)$$

As interações duto-solo e radie-solo devem obedecer as seguintes hipóteses:

- O contato duto-solo e radie-solo são ideais (não há deslocamento relativo em nenhum ponto da superfície de interação);
- No duto há compatibilização apenas dos graus de liberdade de deslocamentos e forças nas direções axiais, radiais e circunferenciais na superfície de contato.
- Na placa há compatibilização dos deslocamentos verticais e horizontais.

$$\begin{Bmatrix} P_F \\ P_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fr} \\ K_{rf} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ U_R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_F^{**} \\ P_R^{**} \end{Bmatrix} \quad (216)$$

O acoplamento final dos sistemas é também obtido impondo as condições de compatibilidade de deslocamentos e as relações de equilíbrio.

$$\{U_F\} = \{\hat{U}_F\}, \{U_R\} = \{\hat{U}_R\} \quad (217)$$

$$\{P_F\} = \{F_F\}, \{P_R\} = \{F_R\} \quad (218)$$

Como já discutido anteriormente, aqui também faz-se necessário a readequação do sistema de equações do RLS de tal forma a ordenar os graus de liberdade em função da interface ligada com o solo. O sistema reordenado composto pelas equações (214) e (215) fica:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{LF,LF}] & [\bar{K}_{LF,NF}] & 0 & 0 \\ [\bar{K}_{NF,LF}] & [\bar{K}_{NF,NF}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{K}_{LR,LR}] & [\bar{K}_{LR,NR}] \\ 0 & 0 & [\bar{K}_{NR,LR}] & [\bar{K}_{NR,NR}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{LF} \\ \bar{U}_{NF} \\ \bar{U}_{LR} \\ \bar{U}_{NR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{LF} \\ \bar{F}_{NF} \\ \bar{F}_{LR} \\ \bar{F}_{NR} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{P}_{LF} \\ \bar{P}_{NF} \\ \bar{P}_{LR} \\ \bar{P}_{NR} \end{Bmatrix} \quad (219)$$

Os graus de liberdade no contato duto-solo no RLS (vide Figura 50 e Figura 51), são completamente compatíveis de forma que não há necessidade de fazer quaisquer adaptações nas contribuições oriundas do solo, sendo assim:

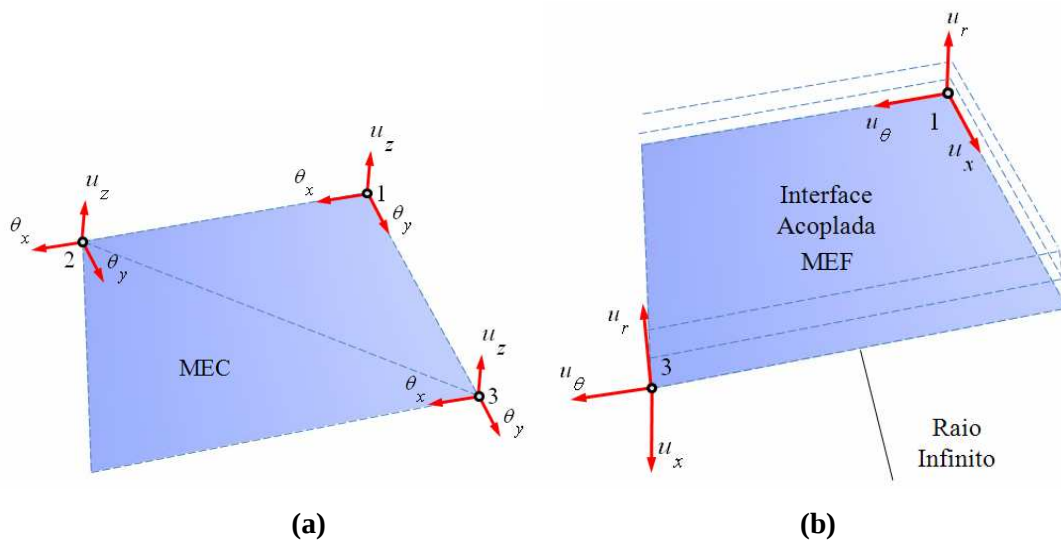


Figura 50 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento do Finito RLS (Placa).

Graus de liberdade do duto laminado.

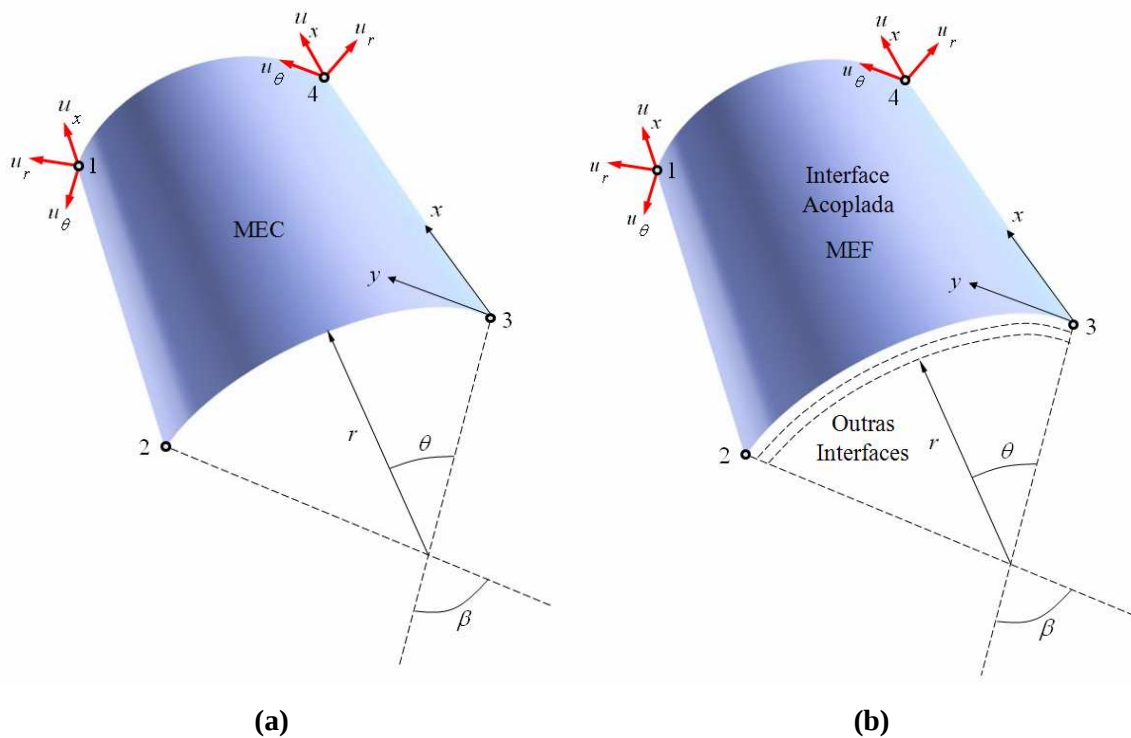


Figura 51 – (a) Elemento de Contorno do Solo, (b) Elemento Finito RLS (Duto)

Então fazendo-se o equilíbrio de forças no duto $\{\bar{P}_{LF}\} = \{P_F\}$ e radie $\{\bar{P}_{LR}\} = \{P_R\}$, a compatibilidade de deslocamentos no duto $\{\bar{U}_{LF}\} = \{U_F\}$ e radie $\{\bar{U}_{LR}\} = \{U_F\}$, e ainda somando-se o sistema do solo em (216) nos sistema algébrico do MEF em (219), obtem-se o sistema final acoplado:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{LF,LF}] + [K_{ff}] & [\bar{K}_{LF,NF}] & [K_{fr}] & 0 \\ [\bar{K}_{NF,LF}] & [\bar{K}_{NF,NF}] & 0 & 0 \\ [K_{rf}] & 0 & [\bar{K}_{LR,LR}] + [K_{rr}] & [\bar{K}_{LR,NR}] \\ 0 & 0 & [\bar{K}_{NR,LR}] & [\bar{K}_{NR,NR}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{LF} \\ \bar{U}_{NF} \\ \bar{U}_{LR} \\ \bar{U}_{NR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{LF} \\ \bar{F}_{NF} \\ \bar{F}_{LR} \\ \bar{F}_{NR} \end{Bmatrix} \quad (220)$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{LF} \\ \bar{F}_{NF} \\ \bar{F}_{LR} \\ \bar{F}_{NR} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_{LF}^{**} \\ 0 \\ \bar{P}_{LR}^{**} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Aqui vale lembrar que se o modelo do semi-espço (MINDLIN) for utilizado as regiões não ligadas se restringirão apenas às extremidades axiais da cavidade cilíndrica do solo. No entanto, no caso de problemas fundamentais com domínio infinito (KELVIN), além dessas regiões será necessária a discretização de um contorno “infinito” que envolva o duto com dimensões adequadas (delimitadas heurísticamente). Convém notar que o número de graus de liberdade inseridos no sistema algébrico baseados nos modelos de Kelvin é drasticamente superior aos casos dos modelos de semi-espço. Outro aspecto que vale ressaltar é que a compatibilidade de deslocamentos fora dos nós não é garantida no acoplamento MEC-MEF desse problema proposto. Isto decorre do fato que no domínio do elemento de contorno cilíndrico os deslocamentos (axial, circunferencial e radial) são interpolados linearmente e suas contrapartes no elemento finito CYS são aproximadas por polinômios até de quinta ordem na direção circunferencial. No entanto, as forças são conformes, já que as forças reativas que carregam o duto são interpoladas linearmente. Essa não conformidade de interpolação para os deslocamentos pode afetar na velocidade de convergência do modelo, no entanto para uma discretização mais rica, o resultado final usualmente é menos afetado.

Capítulo V

BIBLIOTECA DLL E AMBIENTE AMIGÁVEL PARA ANÁLISE DE CASCAS CILINDRICAS LAMINADAS E INTERAÇÃO SOLO- ESTRUTURA

5.1 – INTRODUÇÃO

O presente capítulo abordará a estratégia de programação orientada a objetos aplicada ao desenvolvimento de uma biblioteca DLL (Dynamic Link Library), chamada *sapromsv2.dll* (Sistema de Análise de Problemas em Mecânica dos Sólidos-SAPROMS). A biblioteca no presente estágio de desenvolvimento encontra-se na versão V2.0.2012. Na versão anterior (V1.0.2008), MENEZES (2008) viabiliza apenas as soluções do MEF em que foram implementadas as matrizes de rigidez dos elementos DST, DKT, FF, CYS e as associações DST+FF, DKT+FF nos regimes estático e dinâmico.

Como contribuição original desta tese, à biblioteca SAPROMS original desenvolvida por MENEZES (2008) foram incorporados: o elemento finito RLS (Casca Cilíndrica Laminada baseado na teoria Layerwise de J. N. Reddy), o elemento de contorno BemTri (Elemento triangular plano para discretização das interfaces entre radie e solo), o elemento de contorno BemCyli (Elemento cilíndrico) destinado para discretização do fuste da cavidade cilíndrica, o elemento de contorno BemCirc (Elemento discóide plano utilizado para discretização das regiões vizinhas aos centros das circunferências das extremidades axiais da cavidade) e o elemento de contorno BemQuad

(Elemento setorial plano formado por dois lados retos e dois curvos destinado para discretização das extremidades axiais da cavidade). Convém salientar que na versão V1.0.2008 do SAPROMS, as análises do MEF estavam restritas a casos em que as estruturas encontravam-se isoladas, de forma que na versão V2.0.2012 para viabilizar a análise da interação solo-duto, foi desenvolvido o acoplamento entre o MEF e MEC permitindo a solução de problemas conjugados pelas duas técnicas.

5.2 –A PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS E O C++

Antes de discutir aspectos específicos do código gerado durante a elaboração desta tese, será dada ênfase nesta seção, ao histórico e surgimento da Programação Orientada ao Objeto (Object-Oriented Programming). A OOP como é comumente chamada, teve sua origem na linguagem Simula (Simula Language), concebida na Noruega no início da década de 60. Como próprio o nome sugere, a idéia era criar uma linguagem para fazer simulações. Despercebidamente o seu uso trouxe um conceito que até então não havia sido notado pelos projetistas: a similaridade com a interação no mundo real.

A primeira linguagem de programação a implementar sistematicamente os conceitos de OOP foi a linguagem SIMULA-68; seguida pela linguagem Smaltalk criada pela Xerox, que pode ser considerada a linguagem que popularizou e incentivou o emprego da OOP. Com o aparecimento da "crise do software", o emprego da OOP foi a saída protagonizada pelos desenvolvedores para minimizar os custos relativos às manutenções corretivas responsáveis pela maior parte dos custos e também do indesejável expediente de alterar e/ou corrigir o código dos sistemas implantados. Um conceito fundamental na OOP é a definição para objeto que seria um "ente" ativo que possui certas características que o tornam "inteligente", a ponto de tomar certas decisões quando devidamente solicitado.

A linguagem C++ é uma derivação da linguagem C desenvolvida nos anos 70 a partir da linguagem B (criada nos anos 60 por Ken Thompson). Brian Kernighan e Dennis M. Ritchie são os criadores da reformulação da linguagem B que deu origem à linguagem C. Pode ser considerada uma linguagem de nível médio onde suas instruções ora se comportam como linguagem de alto nível, com uma sintaxe próxima à linguagem humana e ora utilizada como linguagem de baixo nível, onde suas instruções manipulam

bits, bytes e endereços de memória com uma semelhança à linguagem Assembler. A linguagem C foi desenvolvida a partir da necessidade de se escrever programas que utilizassem recursos próprios da linguagem de máquina de uma forma mais simples e portátil.

5.3 – A NOVA BIBLIOTECA SAPROMS.DLL (VERSÃO V2.0.2012)

Para incorporar novas funções à biblioteca DLL em C++ é necessário possuir um compilador capaz de criar programas no padrão Windows. Há 2 compiladores bastante conhecidos para este fim.

- Microsoft Visual C++ Versão 6.0 +
- Borland C++ for Windows Versão 5.0 +

Para a programação das novas classes utilizou-se o compilador Microsoft Visual C++ Versão 6.0. Na versão (V2.0.2012) foram incorporadas novas classes de objetos. Nas tabelas abaixo se encontram em detalhes as classes e métodos desenvolvidos.

Classes de Elementos Finitos Incorporadas:

FemCys	Classe do Elemento Finito de Casca Cilíndrica CYS
FemDKST	Classe dos Elementos Finito DKT e DST
FemRLT	Classe do Elemento Finito Cilíndrico Laminado LRT
FemSolutions	Classe de Compartilhamento de Soluções Para o MEF

Classes de Elementos de Contorno Incorporadas:

BemCIRC	Classe do Elemento de Contorno Discoide
BemCYLI	Classe do Elemento de Contorno Cilíndrico
BemQUAD	Classe do Elemento de Contorno Setorial Plano
BemTRI	Classe do Elemento de Contorno Triangular
BemSolutions	Classe de Compartilhamento de Soluções Para o MEC

Classes acessórias incorporadas:

Structure	Classe de Soluções numéricas da Estrutura
Coupling	Classe de Acoplamento entre os Métodos MEF e MEC

Já na Figura 52 é demonstrado um fluxograma das etapas realizadas pela biblioteca SAPROMS.DLL.

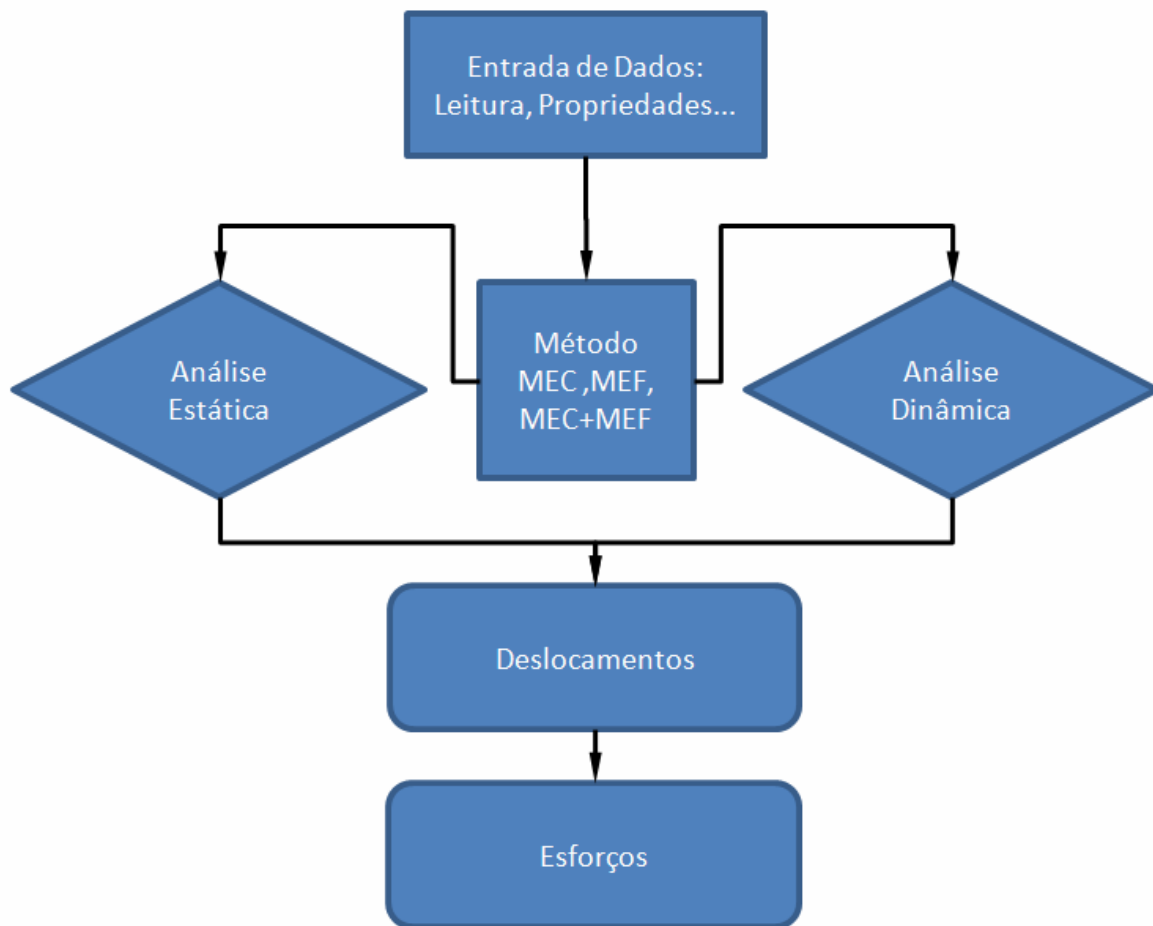


Figura 52 – Diagrama para seqüência de análise.

5.4 – PROGRAMANDO OS ELEMENTOS FINITOS DO DUTO

Nesta seção será feita uma breve discussão sobre os elementos de duto programados e incluídos na biblioteca saproms.dll.

5.4.1 – ELEMENTO FINITO DE CASCA CILINDRICA CYS

Conforme já discutido anteriormente. A matriz de rigidez do elemento de casca cilíndrica CYS é obtida de:

$$[K_{uu}] = [C_d^{-1}]^T \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b [B_u]^T [D] [B_u] dx dy \right\} [C_d^{-1}] = [C_d^{-1}]^T [Q] [C_d^{-1}] \quad (221)$$

Parte do código que gera os elementos destas matrizes é demonstrado na Tabela 1. Neste é exibido o calculo do elemento K11 da matriz de rigidez.

Tabela 1 – Calculo dos Elementos da Matriz de Rigidez do Elemento CYS

```
// MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO CYS
for(ip=0;ip<=19;ip++)
{

    for(jp=0;jp<=19;jp++)
    {

        for(kp=0;kp<=19;kp++)
        {

            Kmin[ip][jp] += MatCtQ[ip][kp] * MatC[kp][jp];

        }

    }

}
```

5.4.2 – ELEMENTO FINITO DE CASCA CILINDRICA RLS

Em seções anteriores em que aborda-se o elemento RLS, discute-se a equação algébrica que compõe a matriz de rigidez de uma lamina, cuja representação é dada por:

$$\begin{bmatrix} {}^{11} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{12} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{13} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ {}^{21} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{22} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{23} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ {}^{31} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{32} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} & {}^{33} \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1-1} \\ u_{1-2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} v_{1-1} \\ v_{1-2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_{1-1} \\ w_{1-2} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q_u\} \\ \{q_v\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix} \quad (222)$$

Cada termo da matriz [K] é uma sub-matriz 2x2 que irá compor a matriz de integração de um nó de uma lamina. O ponto de partida para a montagem da matriz de integração da rigidez de um dos nós da lamina é a programação da sub-matriz definida na equação (223). No caso do elemento RLS (Layerwise Theory), como já discutido anteriormente, a matriz final terá 16 sub-matrizes para compor as integrações nos quatro nós de uma lamina.

$${}^{MN} K_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \\ K_{ij}^{\alpha\beta} & K_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (223)$$

Além disso, parte do código do elemento RLS, implementado em C++ no SAPROMS, foi uma adaptação do código-fonte COSHELL.FOR disponibilizado por Samuel Kinde Kassegne na internet e baseado em sua tese KASSEGNE(1992) . Na Tabela 2 está o trecho do termo $K_{11}^{\alpha\beta}$ adaptado em C++.

Tabela 2 – Calculo dos Elementos K11 e S11

```
//
//
//.....CALCULATE [K11] (Tangent and Direct) and [S11]
//
//
//
d->ST[I1][IN] += (d->A[NE][NE][1][1]*GSF[1][I]*GSF[1][J]
+ d->A[NE][NE][1][6]*GSF[1][I]*GSF[2][J]
+ d->A[NE][NE][1][6]*GSF[1][J]*GSF[2][I]
+ d->A[NE][NE][6][6]*GSF[2][I]*GSF[2][J]
+ d->DBAR[NE][NE][7]*SF[I]*SF[J])*CNST;
```

5.5 – PROGRAMANDO OS ELEMENTOS DE CONTORNO DO SOLO

Neste tópico será discutida a programação para os elementos de contorno utilizados para a análise do problema solo-duto, e que são uma parte significativa das contribuições desta tese.

5.5.1 - ELEMENTO DE CONTORNO TRIANGULAR

O elemento de geometria triangular é utilizado para discretizar a parte externa do solo. Os campos de deslocamento e de forcas são aproximados por funções lineares. Parte do código que gera a contribuição do elemento triangular na matriz G e H do problema fundamental é demonstrado na Tabela 3. Notar que estas contribuições estão armazenadas nas variáveis AG[i][j] e AH[i][j] para posteriormente serem acumuladas nas variáveis G[i][j] e H[i][j] finais.

Tabela 3 – Código fonte da integração no Elemento Triangular

```
//INTEGRACAO NO ELEMENTO TRIANGULAR
for(LA=1;LA<=3;LA++)
{
    IC=0;

    for(LL=1;LL<=3;LL++)
    {
        for(JJ=1;JJ<=3;JJ++)
        {
            IC=IC+1;
            d->AG[LA][IC]=d->AG[LA][IC]+d->UL[LA][JJ]*DJAC*Z[LL];
            d->AH[LA][IC]=d->AH[LA][IC]+d->PL[LA][JJ]*DJAC*Z[LL];
        }
    }
}
```

5.5.2 - ELEMENTO PAINEL CILINDRICO

O elemento painel cilíndrico é adotado para a modelagem do corpo do fuste. O fuste é a região da interação solo-duto onde os graus de liberdade deste elemento se acoplam com os graus de liberdade correspondentes do elemento de duto escolhido para a análise. Uma modelagem da superfície cilíndrica do fuste pode ser visualizada na Figura 45. Neste exemplo, uma discretização de baixa densidade foi adotada provocando a presença de chanfros em torno de todo o modelo. Discretizações mais densas permitem obter uma maior convergência de resultados e melhor aproximação da geometria. Parte do código que gera a contribuição do elemento triangular na matriz G e H do problema fundamental é demonstrado na tabela Tabela 4. Notar que estas contribuições estão armazenadas nas variáveis AG[i][j] e AH[i][j] para posteriormente serem acumuladas nas variáveis G[i][j] e H[i][j] finais.

Tabela 4 – Código fonte da integração no Elemento Cilindrico

```
//INTEGRAÇÃO NO ELEMENTO CILINDRICO
for(I=1;I<=3;I++)
{

    for(J=1;J<=4;J++)
    {

        d->AG[I][3*J-2]=d->AG[I][3*J-2]+U[I][1]*N[J]*DJACOB;

        //!ROTACAO CIRCUNFERENCIAL
        d->AG[I][3*J-1]=d->AG[I][3*J-1]+(U[I][2]*d->NZ-U[I][3]
            *d->NY)*FAT_SINAL1*N[J]*DJACOB;
        //!ROTACAO RADIAL UI
        d->AG[I][3*J]=d->AG[I][3*J]+(U[I][2]*d->NY+U[I][3]
            *d->NZ)*N[J]*DJACOB;

        d->AH[I][3*J-2]=d->AH[I][3*J-2]+P[I][1]*N[J]*DJACOB;

        //!ROTACAO RADIAL NO PONTO CAMPO PI TETA
        d->AH[I][3*J-1]=d->AH[I][3*J-1]+(P[I][2]*d->NZ-P[I][3]
            *d->NY)*FAT_SINAL1*N[J]*DJACOB;

        //!ROTACAO CIRCUNFERENCIAL NO PONTO CAMPO PI R
        d->AH[I][3*J]=d->AH[I][3*J]+(P[I][2]*d->NY+P[I][3]
            *d->NZ)*N[J]*DJACOB;

    }

}
```

5.5.3 - ELEMENTO SETORIAL PLANO

O elemento setorial plano é o primeiro de dois elementos aplicados para fechar o domínio do fuste, neste caso, as extremidades. Um dos problemas que a discretização da extremidade do fuste, usando o elemento setorial plano causa, é o não fechamento da região central quando a densidade de elementos é pequena. Parte do código que gera a contribuição do elemento triangular na matriz G e H do problema fundamental é demonstrado na Tabela 5. Notar que estas contribuições estão armazenadas nas variáveis AG[i][j] e AH[i][j] para posteriormente serem acumuladas nas variáveis G[i][j] e H[i][j] finais.

Tabela 5 – Código fonte da integração no Elemento Setorial Plano

```
//C INTEGRACAO NO SETORIAL PLANO
if(d->IDISCO == 0)
{
    for(I=1;I<=3;I++)
    {
        for(J=1;J<=4;J++)
        {
            d->AG[I][3*J-2]=d->AG[I][3*J-2]+d->U[I][1]*N[J]*DJACOB;

            //C ROTACAO RADIAL NO PONTO CAMPO UITETA
            d->AG[I][3*J-1]=d->AG[I][3*J-1]+(d->U[I][2]
            *d->NZ-d->U[I][3]*d->NY)*FAT_SINAL*N[J]*DJACOB;

            //C ROTACAO CIRCUNFERENCIAL NO PONTO CAMPO UIR
            d->AG[I][3*J]=d->AG[I][3*J]+(d->U[I][2]*d->NY+d->U[I][3]
            *d->NZ)*N[J]*DJACOB;

            d->AH[I][3*J-2]=d->AH[I][3*J-2]+d->P[I][1]*N[J]*DJACOB;

            //C ROTACAO RADIAL NO PONTO CAMPO PITETA
            d->AH[I][3*J-1]=d->AH[I][3*J-1]+(d->P[I][2]*d->NZ-d->P[I][3]
            *d->NY)*FAT_SINAL*N[J]*DJACOB;

            //C ROTACAO CIRCUNFERENCIAL NO PONTO CAMPO PIR
            d->AH[I][3*J]=d->AH[I][3*J]+(d->P[I][2]*d->NY+d->P[I][3]
            *d->NZ)*N[J]*DJACOB;
        }
    }
}
```

5.5.4 - ELEMENTO DISCOIDE

Um elemento com campos de distribuição constante é admitido para compor o centro do disco da extremidade do fuste. O elemento possui um único ponto funcional locado no centro. Outro aspecto que deve ser ressaltado é que diferentemente dos elementos cilíndricos e setoriais planos, os campos no domínio do elemento discóide não são escritos no sistema local e sim no global. Uma parte do código que gera a contribuição do elemento triangular na matriz G e H do problema fundamental é demonstrado na Tabela 6. Notar que estas contribuições estão armazenadas nas variáveis AG[i][j] e AH[i][j] para posteriormente serem acumuladas nas variáveis G[i][j] e H[i][j] finais.

Tabela 6 – Código fonte da integração no Elemento Discoide

```
#!/INTEGRACAO NO DISCO

else
{

    for(I=1;I<=3;I++)
    {

        d->AG[I][7]=d->AG[I][7]+d->U[I][1]*DJACOB;

        /*!ROTACAO RADIAL NO PONTO CAMPO UITETA
        d->AG[I][8]=d->AG[I][8]+d->U[I][2]*DJACOB;

        /*!ROTACAO CIRCUNFERENCIAL NO PONTO CAMPO UIR
        d->AG[I][9]=d->AG[I][9]+d->U[I][3]*DJACOB;

        d->AH[I][7]=d->AH[I][7]+d->P[I][1]*DJACOB;

        /*!ROTACAO RADIAL NO PONTO CAMPO UITETA
        d->AH[I][8]=d->AH[I][8]+d->P[I][2]*DJACOB;

        /*!ROTACAO CIRCUNFERENCIAL NO PONTO CAMPO UIR
        d->AH[I][9]=d->AH[I][9]+d->P[I][3]*DJACOB;

    }

}
```

5.5.5 - PROCESSOS DE INTEGRAÇÃO

Os processos de integração utilizados são os apresentados em SOUZA (2001), uma vez que, como dito anteriormente, as implementações relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno foram obtidas to referido trabalho e adaptadas para o problema

que se deseja tratar. Uma breve descrição das técnicas empregadas é apresentada a seguir, lembrando-se que estas se encontram detalhadas em SOUZA (2001).

5.5.6 - INTEGRAL NÃO SINGULAR

A integral não singular ocorre quando o ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado e quando o ponto fonte não está muito próximo ao elemento. Este tipo de integração é a forma mais direta de se calcular a integral sobre um elemento, sendo que para elementos triangulares planos, a integração é feita através da quadratura de HAMMER et al. (1956) e é estabelecida em função das coordenadas homogêneas.

Técnicas de subdivisão dos elementos são aplicadas para que se realize uma melhor integração nos elementos que se encontram mais próximos do ponto fonte a ser integrado. A integração não singular é realizada neste trabalho exatamente como descrito e implementado por SOUZA (2001) para ambas soluções fundamentais.

5.5.7 - INTEGRAL QUASE SINGULAR E QUASE HIPER-SINGULAR

Nos casos em que o ponto fonte se encontra muito próximo ao elemento e a utilização da quadratura de Hammer torna-se muito dispendiosa devido ao grande número de sub-elementos necessários para uma boa integração, é preciso recorrer a um método alternativo para avaliar essa integral de forma mais rápida, no caso da formulação implementada por SOUZA (2001), baseado no trabalho de MOM-MA et al. (1996) – apud SOUZA (2001), que efetua a integração em elementos unidimensionais através da quadratura de Gauss com subdivisão progressiva dos elementos.

Maiores detalhes podem ser encontrados no referido trabalho. As integrações quase singular e quase hiper-singular também são realizadas neste trabalho exatamente como descrito e implementado por SOUZA (2001). Uma descrição ainda mais detalhada pode ser vista em ALMEIDA (2003a).

5.5.8 - INTEGRAL SINGULAR

Quando o ponto fonte pertence ao elemento a ser integrado e este ponto está contido no contorno diz-se que essa integral é uma integral singular, pois a solução fundamental possui termos ($1/r$ e $1/r^2$) que não podem ser integrados diretamente pelas técnicas descritas anteriormente. Para se efetuar tal integral é preciso recorrer à mudança das coordenadas cartesianas para coordenadas polares. A integral sobre este elemento pode ser resolvida de três formas, sendo as duas primeiras semi-analíticas e a terceira analítica:

- Analiticamente em r e numericamente com a quadratura de Gauss em θ ;
- Analiticamente em r e com uma transformação da parte angular para linear no contorno de cada lado do elemento e efetuando-se essa parte numericamente com a quadratura de Gauss;
- Analiticamente em r e θ .

No trabalho de SOUZA (2001) as integrais singulares foram obtidas para solução fundamental de Kelvin de forma semi-analítica, de acordo com o segundo procedimento citado e o termo livre calculado utilizando-se a propriedade do movimento de corpo rígido, BREBBIA et al. (1984). Com a realização das adaptações para introdução da solução fundamental de Mindlin, foram realizadas também algumas modificações com relação à realização da integral singular para esta solução fundamental.

5.5.9 - ESQUEMA DO PROGRAMA DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Para se ter uma visão geral do programa de elementos de contorno utilizado neste trabalho, apresenta-se o fluxograma com os principais passos do programa computacional no que diz respeito à geração do sistema de equações, Figura 8.4.

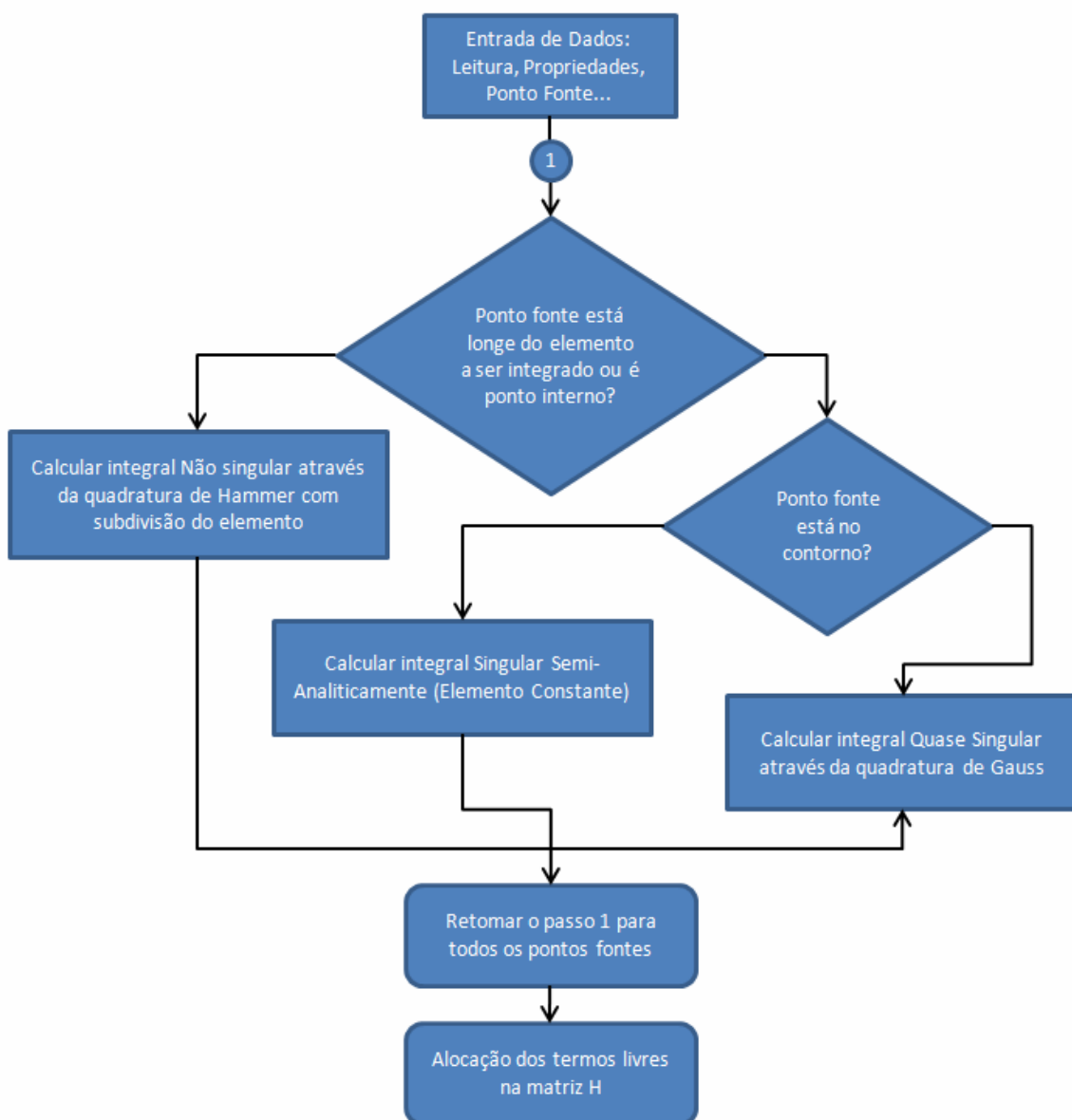


Figura 53 – Fluxograma da montagem das equações com base em SOUZA (2001).

A consideração da viscoelasticidade no MEC se fundamenta teoricamente no modelo constitutivo de Kelvin mostrado no capítulo 3 e em desenvolvimentos matemáticos descritos em MESQUITA (2002) e MESQUITA & CODA (2002). Sua implementação, entretanto, é descrita no capítulo 9, e se faz diretamente na formulação acoplada, observando imediata semelhança nas manipulações algébricas das matrizes (de rigidez) oriundas do MEC e do MEF.

5.5.10 – ACOPLAMENTO MEC-MEF

O acoplamento entre o MEC e o MEF tem se mostrado como uma técnica bastante empregada na solução de diversos problemas de engenharia, sobretudo na análise de problemas de interação entre a estrutura e meios contínuos, como exemplo, a interação solo-estrutura. Neste tipo de análise, comumente se utiliza o MEF para consideração da plasticidade devido à abordagem mais simples que este proporciona. O MEC, como tradicionalmente, é utilizado na modelagem do contínuo, devido à sua característica de redução de variáveis.

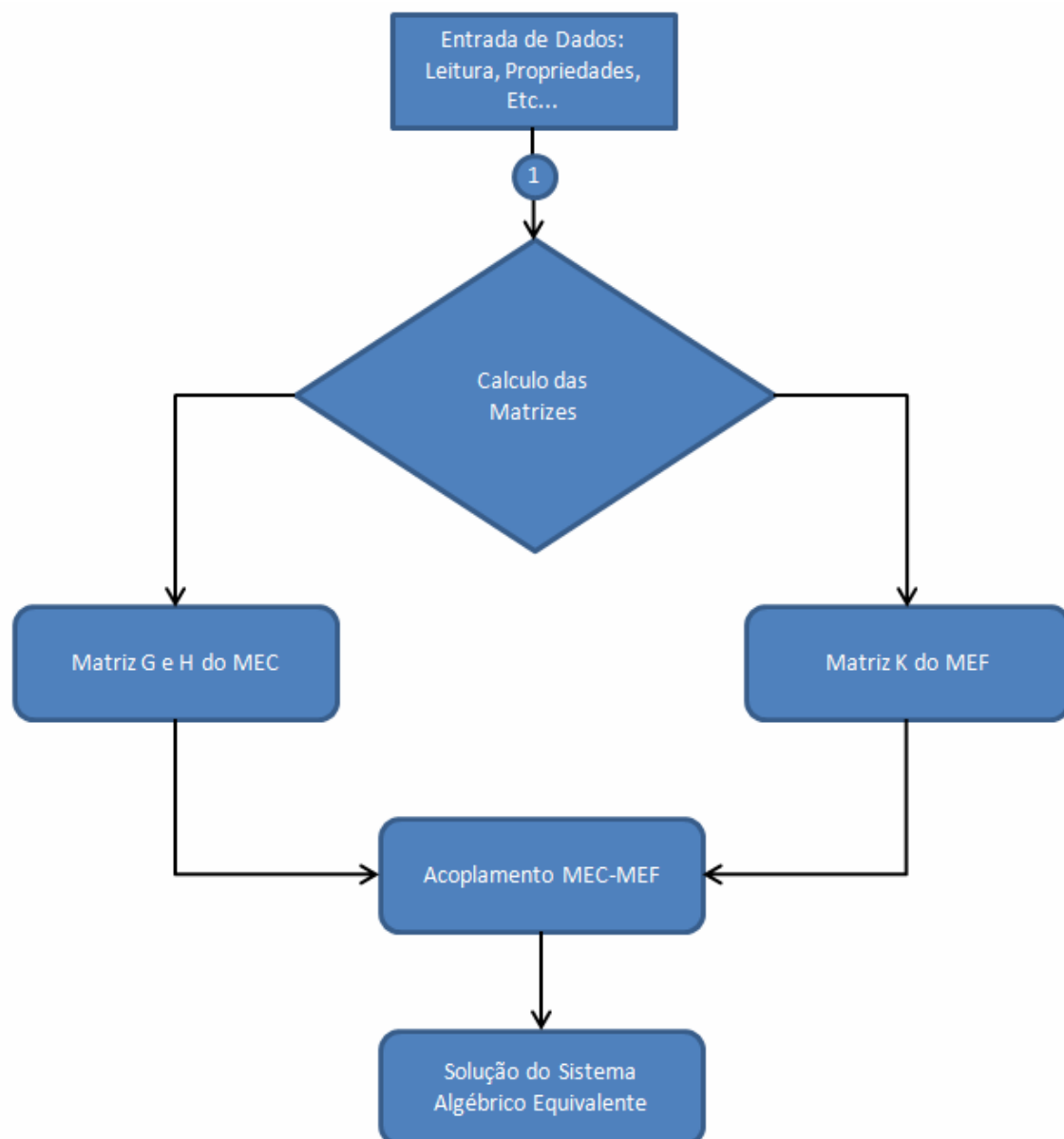


Figura 54 – Fluxograma Acoplamento

5.6 – AMBIENTE AMIGÁVEL PARA MODELAGEM E ANÁLISE

Nesta seção aborda-se a programação orientada a objetos com vistas ao desenvolvimento de uma interface amigável ao usuário, dedicada a problemas de estruturas laminares e interação solo-estrutura. Uma especial atenção será dada as linguagens ObjectARX e Visual Lisp que são o padrão para desenvolvimento de funções de customização para o software AutoCAD.

O software AutoCAD é uma ferramenta consagrada mundialmente no desenvolvimento de projetos de Engenharia e Arquitetura. É um grande aliado dos profissionais destas áreas por possuir um conjunto completo de recursos, que facilitam a execução dos trabalhos e lhes confere qualidade, organização na criação e documentação. Para estender as facilidades do programa AutoCAD, é possível que o usuário escreva funções auxiliares, automatizando tarefas, criando novos ambientes de utilização do software.

Essas funções interagem com o programa AutoCAD, melhorando a eficiência de desenvolvimento de projetos. Todavia, a inserção de novas funcionalidades dentro de um software existente exige o perfeito conhecimento do funcionamento deste, evitando introduzir falhas que possam comprometer tanto o funcionamento do pacote adicional, quanto do próprio software original. O AutoCad possui um menu de funções em inglês, diversas toolbars com utilidades para desenho, visualização, dimensionamento, camadas, cores e um espaço gráfico para desenho (ver Figura 55).

Convém salientar que o AutoCAD é uma plataforma voltada essencialmente para o desenho técnico, não possuindo portanto, qualquer capacidade para análise de problemas estruturais, uma vez que os campos de propriedades geométricas ou mecânicas não estão presentes nas entidades (pontos, linhas, polilinhas, arcos, etc). Além disso, o software também não possui rotinas de processamento capazes de efetuar os cálculos exigidos neste tipo de análise. Nesta Tese, o AutoCAD será base para o desenvolvimento de uma interface amigável para análise de estruturas laminares, aproveitando todas as funcionalidades que esse já apresenta.

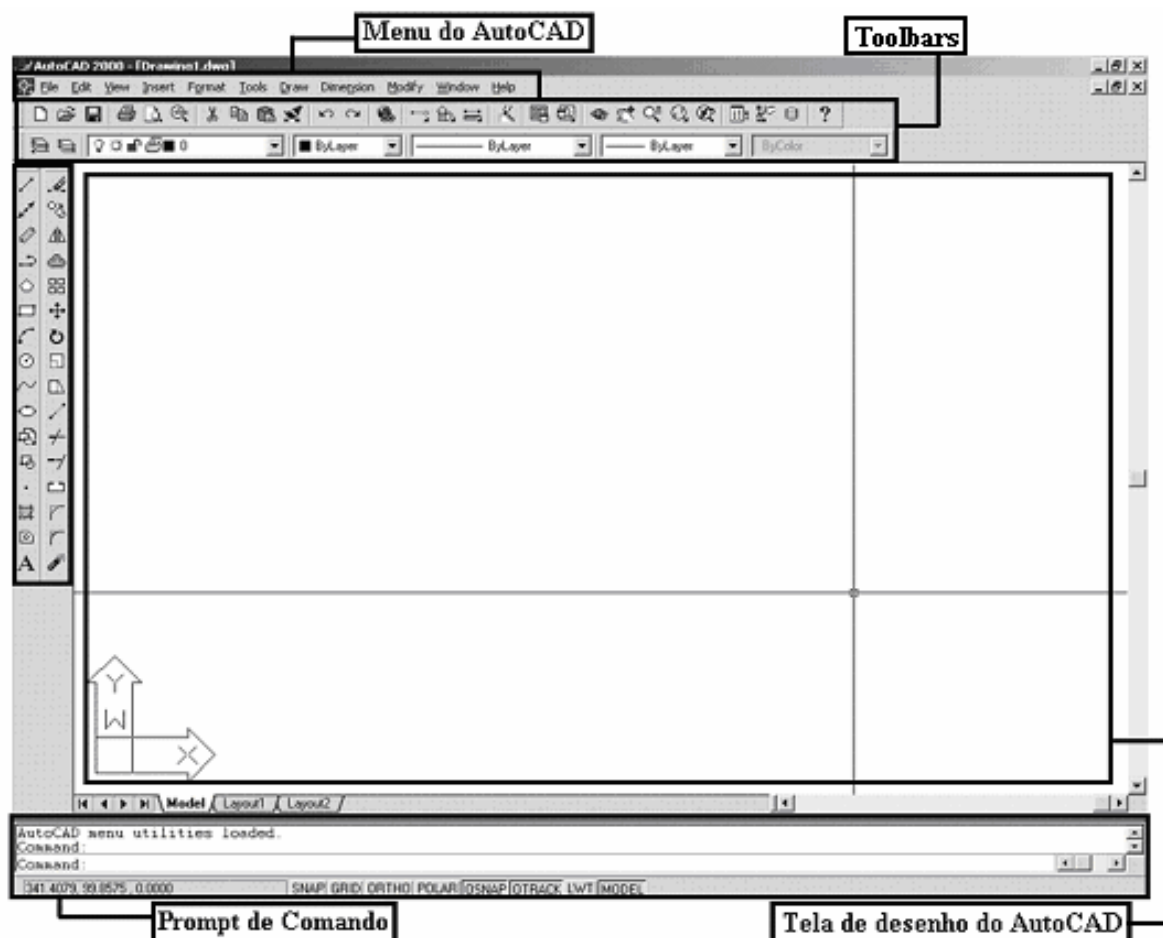


Figura 55 – Interface original do AutoCAD

5.6.1 – O SOFTWARE AUTOCAD E A BIBLIOTECA ObjectARX

O AutoCAD constitui uma plataforma de projeto com funções básicas de desenho, utilizando primitivas geométricas, sendo uma ferramenta amplamente conhecida no meio profissional e acadêmico da engenharia. Os arquivos ARX (AutoCAD RunTime Extension) são DLLs escritas através de um conjunto de funções da biblioteca ObjectARX. Estas quando compiladas podem ser ligadas ao AutoCAD através de uma função de entrada chamada ENTRY POINT. É através do ObjectARX que pode-se programar novas funções para manipulação ou criação automatizada de uma geometria qualquer no AutoCAD.

Também é possível, por intermédio das funções escritas em ObjectARX, a incorporação de outras funções compartilhadas por uma DLL aplicando os conceitos de reuso, herança e polimorfismo (já apontados anteriormente como pilares da programação orientada a objetos). Através desta abordagem, será ilustrada aqui o desenvolvimento de um conjunto de funções básicas, que quando acessadas através do prompt de comando ou do menu do AutoCAD, permitem que um domínio discretizado com as ferramentas deste software possa ser analisado.

Na Figura 56 tem-se uma descrição do conteúdo dos menus de Pré-Processamento, Processamento e Pós-Processamento do ambiente customizado.

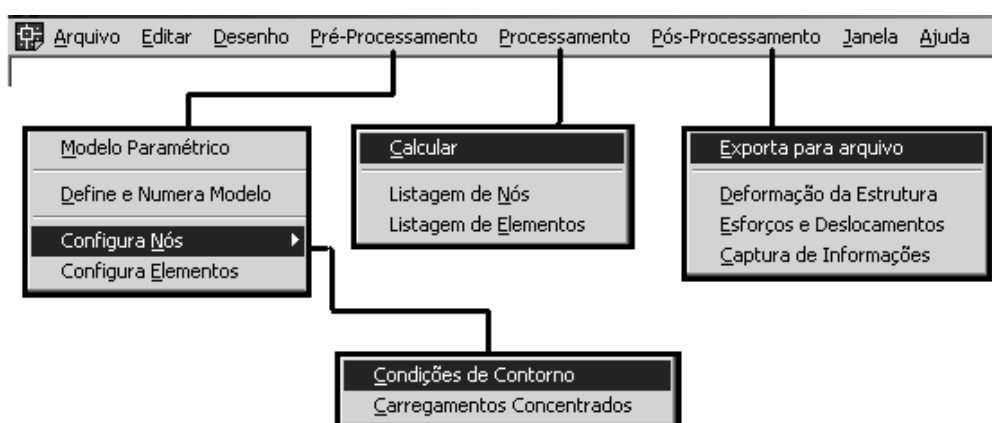


Figura 56 – Menus customizados para interface com o AutoCAD.

É importante destacar que todas as ferramentas de desenho originais do AutoCAD são mantidas permitindo a utilização das mesmas para discretizar a geometria. Os quatro conteúdos que subdividem a tela descrita na Figura 57 foram desenvolvidos em linguagens distintas. O menu traduzido, por exemplo, foi programado na linguagem Diesel utilizada como padrão pelo AutoCAD para a criação de menus. O dialogo lateral para listagens e informações, bem como as funções para manipulação de entidades gráficas foram desenvolvidos em C++/ObjectArx e Visual Lisp.

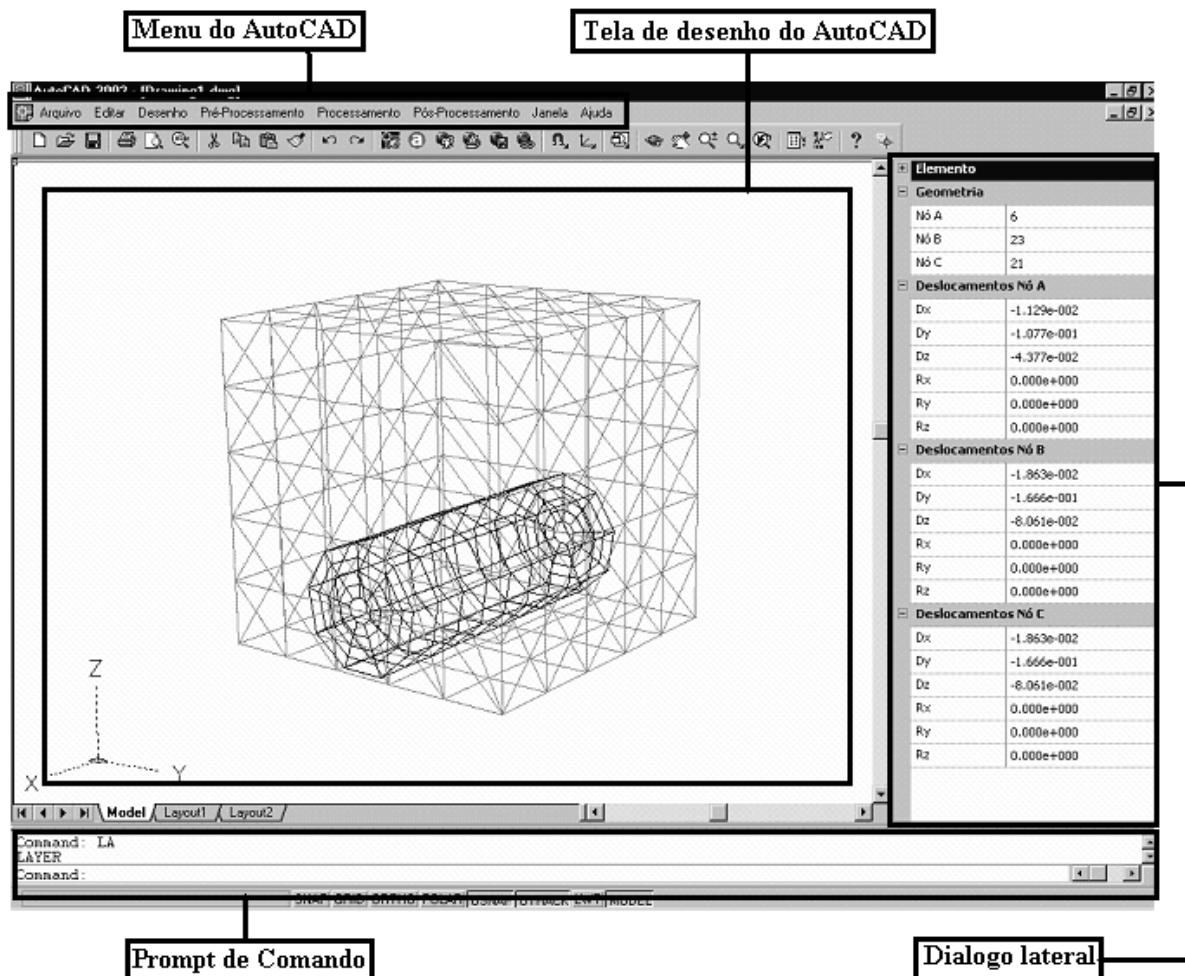


Figura 57 – Interface customizada do AutoCAD

Por ter uma arquitetura aberta para a customização, o AutoCAD torna possível o desenvolvimento de aplicativos específicos, através de uma interface de programação (API - Application Program Interface), que utiliza o ObjectARX (AutoCAD Runtime Extention). O ObjectARX é uma biblioteca de vinculação dinâmica (DLL - dynamic link library) onde as classes e funções utilizadas pelo AutoCAD estão disponíveis para implementações específicas. Através do ObjectARX podem ser realizadas derivações por Herança de suas classes nativas, acesso às estruturas de banco de dados e ao sistema gráfico do AutoCAD, além da criação de novos comandos que operam do mesmo modo que os comandos nativos do AutoCAD.

O AutoCAD e o ObjectARX foram desenvolvidos na linguagem C++. O Visual C++ é o compilador predefinido pela Autodesk, para o desenvolvimento de aplicativos para o AutoCAD com o uso do ObjectARX. O Visual C++ é uma ferramenta de

programação desenvolvida pela Microsoft com suporte das ferramentas MFC (Microsoft Foundation Classes), um ambiente de desenvolvimento integrado baseado em Windows, chamado Developer Studio (HORTON, 1997), para criação de interfaces com o usuário. Com esse ambiente integrado de projeto, o Visual C++ permite uma programação mais rápida e eficiente devido às suas ferramentas internas de programação ((CULLENS et al. ,1997) e (DEITEIL e DEITEIL,1997)).

Os aplicativos ARX podem ser criados com uma vinculação dinâmica à biblioteca MFC. Essa biblioteca é compartilhada com o AutoCAD, possibilitando a criação de aplicativos com interface gráfica do Windows (GUI - Graphical User Interface) com o uso de quadros de diálogo, barras de ferramentas, menus, etc. O AutoCAD versão 14 foi o primeiro a apresentar uma verdadeira arquitetura aberta, com a possibilidade de desenvolvimento de aplicativos na mesma linguagem do AutoCAD, a linguagem C++. Essa abertura foi proporcionada por uma biblioteca de vínculo dinâmico (DLL) denominada ObjectARX, que possui funções chamadas diretamente pelo AutoCAD. O ObjectARX, além de proporcionar o uso das classes e funções do próprio AutoCAD para programação, permite a aplicação dos paradigmas da Programação Orientada a Objetos (POO) para o desenvolvimento de aplicativos mais complexos pelo usuário.

A arquitetura flexível do AutoCAD permite que sejam desenvolvidos aplicativos complexos com módulos desenvolvidos em linguagem diferentes, devido a aplicação dos conceitos de programação COM (Component Object Model) que permite a comunicação entre módulos de programação utilizando os conceitos de programação orientada a objetos (KRUGLINSKI, 1997). Esta estruturação torna possível a construção no AutoCAD de um aplicativo base e a criação de extensões, utilizando outras linguagens de programação, que se utilizem daquele aplicativo através da interface COM. Torna-se possível, então, a utilização de módulos gráficos em VBA (Visual Basic for Applications), rotinas complexas em ObjectARX e funções simples de personalização utilizando-se Active-X (MALARD, 1998).

5.6.2 – CONTEÚDO DE UMA APLICAÇÃO ObjectARX

Um aplicativo ObjectARX completo é composto de dois arquivos: o primeiro tem a extensão *.ARX e o segundo a extensão *.DBX. O arquivo *.ARX permite a inclusão de janelas, *toolbars*, desenvolvimento de novas funções de desenho semelhantes aos existentes no AutoCAD e importar funções de DLLs incorporando seus métodos e variáveis. Já o segundo (extensão *.DBX) contém as novas classes objeto criada através do mecanismo de herança e polimorfismo das classes objeto existentes no AutoCAD, permitindo por exemplo que “linhas” possam conter características de barras de treliças, vigas, pilares; “pontos” possam representar nós contendo informações de força, condições de contorno etc.

O AutoCAD possui uma estrutura funcional para o armazenamento de dados, que pode ser entendida como um banco de dados (*database*) interno do aplicativo, conforme figura xx. Essa estrutura é dividida em tabelas de símbolos (*symbol tables*) e um dicionário de objetos nomeados (*Named Object Dictionary – NOD*). De acordo com a classe a que pertencem, os objetos criados no ambiente do AutoCAD são armazenados em locais específicos de sua estrutura interna. Os objetos que possuem representação gráfica são chamados de entidades (*entity*) e armazenados na tabela de blocos (*block table*).

Já os objetos sem representação gráfica (*objects*) persistem no NOD. Existe ainda uma tabela de blocos específica para armazenar os objetos que representam as camadas de desenho (*layer table*), assim como outras tabelas de símbolos, que podem ser personalizadas com o uso da API ObjectARX.

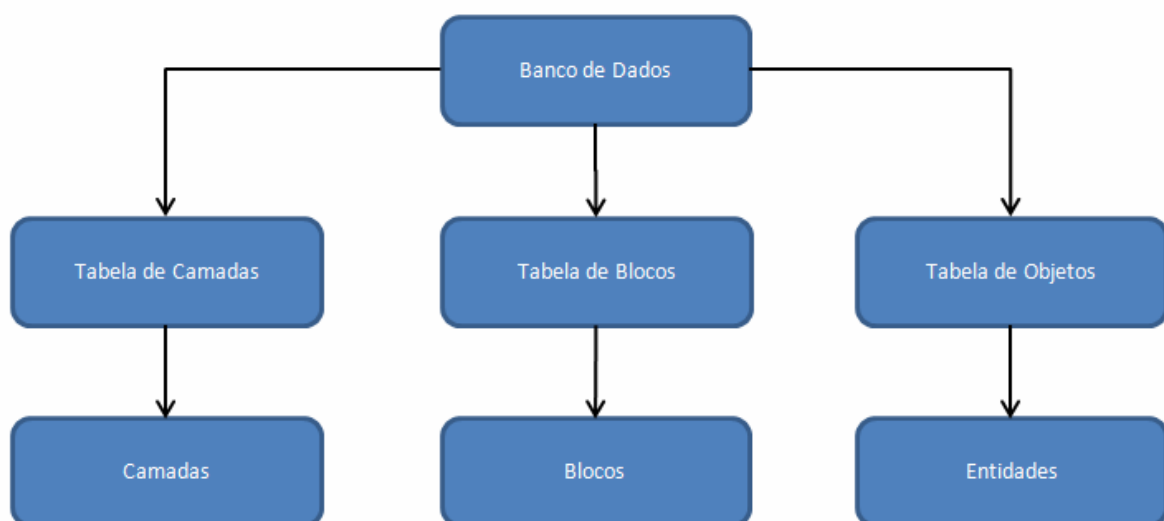


Figura 58 – Armazenamento de dados no AutoCAD.

A biblioteca ObjectARX é uma detalhada API (Application Programming Interface) que contém mais de 220 classes e mais de 3000 funções, separadas segundo sua funcionalidade e subdivididas nestas classes. Apresenta as seguintes bibliotecas:

- ACRX:** AutoCAD Runtime Extension: esta biblioteca oferece recursos de inicialização, registro de bibliotecas e novas classes.
- ACED:** Esta classe se presta a registrar comandos nativos e notificação de eventos.
- ACDB:** AutoCAD Data Base. Contém as classes de entidades do AutoCAD.
- ACGI:** AutoCAD Graphics Interface: biblioteca responsável pela representação gráfica avançada das entidades.
- ACGE:** AutoCAD Geometry Entities: nesta biblioteca estão definidas classes de objetos geométricos e operações de álgebra linear entre estes. Estes objetos são utilizados como parâmetros para a construção e edição de objetos gráficos das outras classes.
- ADSRX:** bibliotecas remanescentes de um ambiente de programação em C para AutoCAD (AutoCAD Development System - ADS).

Com essa estrutura, pode-se criar classes e objetos derivados das entidades primitivas do AutoCAD. Por possuírem, na sua estrutura, as características das entidades da plataforma, essas classes e objetos podem ser utilizadas pelo AutoCAD como se fossem originárias dele próprio, eliminado assim, um grande número de conflitos e problemas naturais a esse tipo de união.

A sigla ARX é uma alusão a "AutoCAD Runtime Extension", e os arquivos compilados segundo esta estrutura recebem a extensão ".arx". Neste arquivo ou projeto ARX é delineada a interface com o usuário. Em outras palavras, neste arquivo ou projeto, se dá a disponibilização dos comandos do AutoCAD. Já o projeto DBX é bem mais complexo, pois neste estão definidos os métodos e funções que definem o comportamento e criação das novas entidades. A sigla DBX refere-se a "DataBase Extension", no que tange a ampliação da quantidade de entidades disponíveis no acervo do AutoCAD.

Na medida em que se cria novas entidades, a complexidade e extensão do código aumentam acentuadamente. Esse é um dos motivos de se separar a interface com o usuário da extensão do banco de dados. Embora seja uma separação conceitual, ela é necessária para que se entenda que não se deve confundir a interação das entidades com o AutoCAD com a interação das entidades com o usuário. Utilizando recursos

disponibilizados pela API ObjectARX, as classes personalizadas herdam as funcionalidades das classes nativas do AutoCAD e, a partir disso, se especializam definindo funcionalidades próprias. Essas classes podem, assim, reunir o comportamento e os dados necessários para a modelagem de elementos estruturais. Para mais detalhes sobre a criação de aplicações com a API ObjectARX encontram-se em MCAULEY (2000) e na documentação on-line. AUTODESK (2009). Na estrutura básica de modulo ARX ou DBX deve-se implementar a função *entry point* juntamente com a função *DllMain*. Esta função é responsável por efetivar a comunicação entre o AutoCAD e a aplicação que foi desenvolvida em ObjectARX. As funções *entry point* e *dllmain* são mostradas a seguir, vide tabela Tabela 7.

Tabela 7 - Funções Entry Point e dllMain.

```

////////////////////////////////////
// DLL Entry Point
extern "C"
BOOL WINAPI DllMain(HINSTANCE hInstance, DWORD dwReason, LPVOID
{
    if (dwReason == DLL_PROCESS_ATTACH)
    {
        // Extension DLL one time initialization
        DCadDLL.AttachInstance(hInstance);
        InitAcUiDLL();
    } else if (dwReason == DLL_PROCESS_DETACH) {
        // Terminate the library before destructors are called
        DCadDLL.DetachInstance();
    }
    return TRUE;    // ok
}

////////////////////////////////////
// ObjectARX EntryPoint
extern "C" AcRx::AppRetCode
acrxEEntryPoint(AcRx::AppMsgCode msg, void* pkt)
{
    switch (msg) {
        case AcRx::kInitAppMsg:
            // Comment out the following line if your
            // application should be locked into memory
            acrxDynamicLinker->unlockApplication(pkt);
            acrxDynamicLinker->registerAppMDIAware(pkt);
            InitApplication();
            break;
        case AcRx::kUnloadAppMsg:
            UnloadApplication();
            break;
    }
    return AcRx::kRetOK;
}

```

Através da função entry point são registrados os novos comandos que serão acessados através do prompt ou menu do AutoCAD. Um arquivo ARX pode armazenar inúmeros novos comandos que estarão disponíveis apenas após o seu registro.

Um exemplo de registro de comandos é mostrado na tabela Tabela 8. Os novos comandos registrados devem ter um grupo, um nome global, e um nome local que são passados como parâmetros para o método `acedRegCmds->addCommand`.

Tabela 8 – Função InitApplication, UnloadApplication e AddCommand.

```
// Init this application. Register your
// commands, reactors...
void InitApplication()
{
    // NOTE: DO NOT edit the following lines.
    //{AFX_ARX_INIT
    AddCommand("SAPROMS", "SOLVER", "SAPSOLVER", ACRX_CMD_TRANSPARENT | ACRX_CMD_USEPI
    //}}AFX_ARX_INIT

    // TODO: add your initialization functions
}

// Unload this application. Unregister all objects
// registered in InitApplication.
void UnloadApplication()
{
    // NOTE: DO NOT edit the following lines.
    //{AFX_ARX_EXIT
    acedRegCmds->removeGroup("SAPROMS");
    //}}AFX_ARX_EXIT

    // TODO: clean up your application
}

// This functions registers an ARX command.
// It can be used to read the localized command name
// from a string table stored in the resources.
void AddCommand(const char* cmdGroup, const char* cmdInt, const char* cmdLoc,
                const int cmdFlags, const AcRxFunctionPtr cmdProc, const int idLocal)
{
    char cmdLocRes[65];

    // If idLocal is not -1, it's treated as an ID for
    // a string stored in the resources.
    if (idLocal != -1) {
        HMODULE hModule = GetModuleHandle("Saproms.arx");

        // Load strings from the string table and register the command.
        ::LoadString(hModule, idLocal, cmdLocRes, 64);
        acedRegCmds->addCommand(cmdGroup, cmdInt, cmdLocRes, cmdFlags, cmdProc);
    } else
        // idLocal is -1, so the 'hard coded'
        // localized function name is used.
        acedRegCmds->addCommand(cmdGroup, cmdInt, cmdLoc, cmdFlags, cmdProc);
}
```

5.6.3 – UTILIZANDO A BIBLIOTECA SAPROMS.DLL NO AUTOCAD

Por ser uma DLL, o programa escrito em ObjectARX tem a vantagem de contar com recursos da linguagem C++ tais como herança e polimorfismo que permitiram que a Autodesk (empresa que desenvolveu o AutoCAD), disponibilizasse parte do código fonte do AutoCAD na forma de uma API chamada SDK ObjectARX.

Como o compartilhamento de funções (que ocorre entre DLL e executável) também pode ser feito entre DLLs, torna-se possível assim a inclusão de bibliotecas, com as mais diversas funcionalidades, que podem ser executadas dentro do próprio AutoCAD utilizando o *prompt* de comando por exemplo. A Figura 59 esquematiza como se dá a interação entre a biblioteca SAPROMS.DLL e o AutoCAD através do aplicativo Saproms.arx.

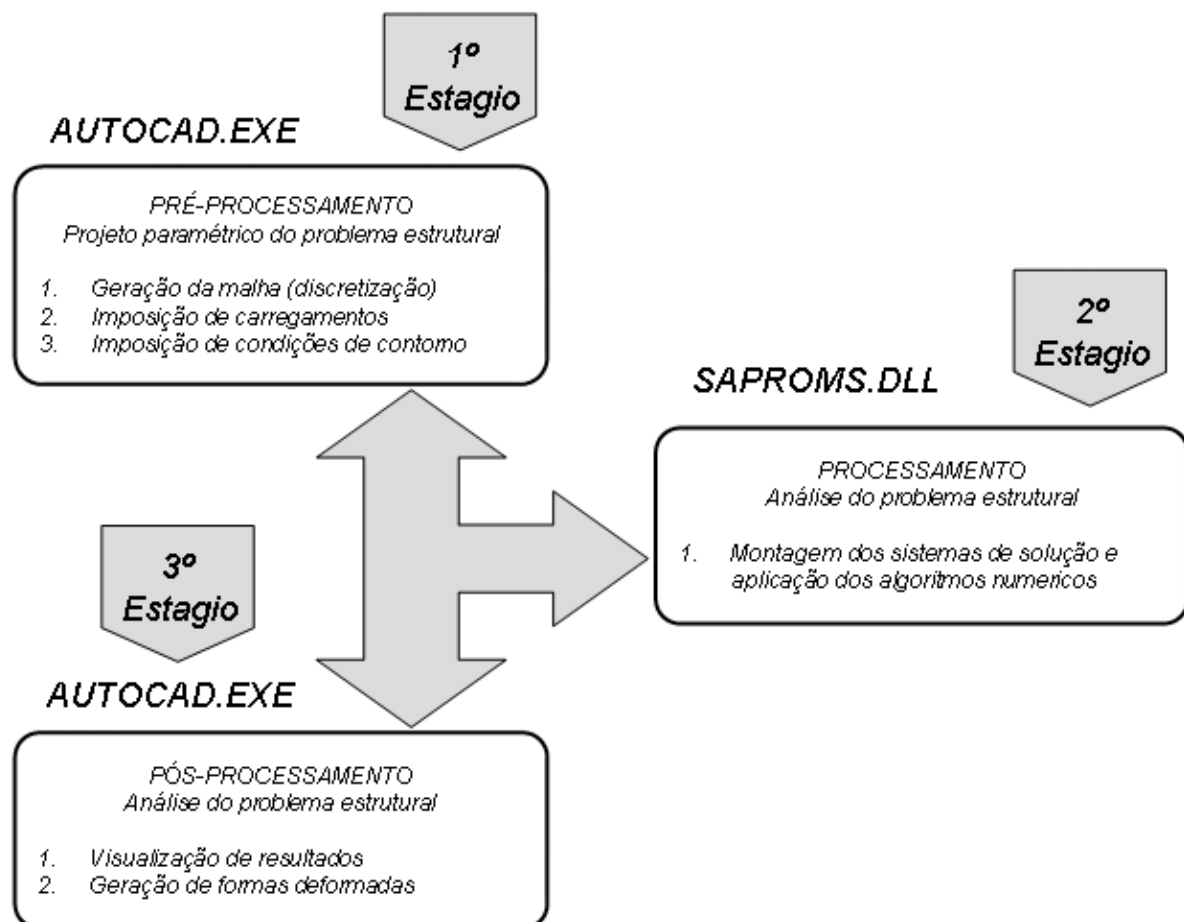


Figura 59 – Integrando uma DLL no AutoCad.

A biblioteca `saproms.dll` é inserida no AutoCAD por intermédio do arquivo `Saproms.arx`. Assim, todas as etapas de pré-processamento e pós-processamento acontecem dentro da interface do AutoCAD, enquanto que o processamento é feito na biblioteca de análise sem precisar deixar o ambiente do mesmo. Convém notar que com esta estratégia a necessidade de transferência de dados via arquivo entre as fases de pré-processamento e processamento é eliminada. Como foi visto anteriormente na tabela Tabela 8, `addcommand` adiciona a função `solver` que é responsável por iniciar o processamento chamando as ferramentas de análise estrutural contidas na biblioteca.

5.6.4 – UTILIZANDO O AMBIENTE AMIGÁVEL

Utilizando-se recursos da linguagem Visual Lisp e `ObjectArx`, o usuário pode modificar a interface do programa permitindo, por exemplo a tradução de menus, diálogos e o desenvolvimento de outros objetos de interface que facilitem a utilização do AutoCAD. Na corrente customização dessa dissertação, o AutoCAD teve o menu traduzido para o português, além de terem sido acrescentadas funções que contemplam as fases de pré-processamento e pós-processamento.

5.6.4.1 – GERAÇÃO PARAMÉTRICA DO MODELO

De modo análogo a interface em OpenGL (discutida no capítulo VI), o problema deve ser primeiramente discretizado. No ambiente do AutoCAD a discretização pode ser realizada de diversas tais como:

- Discretização automática (paramétrica)
- Discretização manual (utilizando-se funções de desenho)
- Importação de geometria de outros aplicativos CAD.

Um dos recursos desenvolvidos para a interface permite a construção paramétrica de problemas de interação solo-duto. Para iniciar a discretização deve-se acessar o menu Pré-Processamento -> Modelo Paramétrico, vide figura Figura 60.

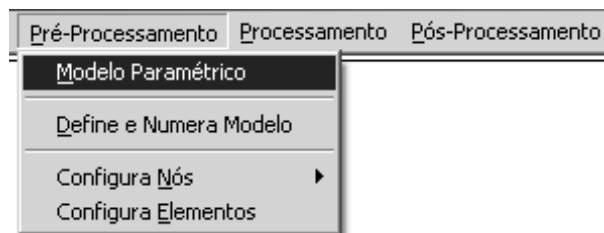


Figura 60 – Função de modelagem paramétrica

Para a modelagem, devem ser informados valores de alguns campos. A figura Figura 61 exibe o diálogo utilizado para a entrada de dados e escolha do tipo de geometria a ser gerada. A mesma figura indica o diálogo contendo as opções da tipologia estrutural e os elementos associados para realizar a análise.

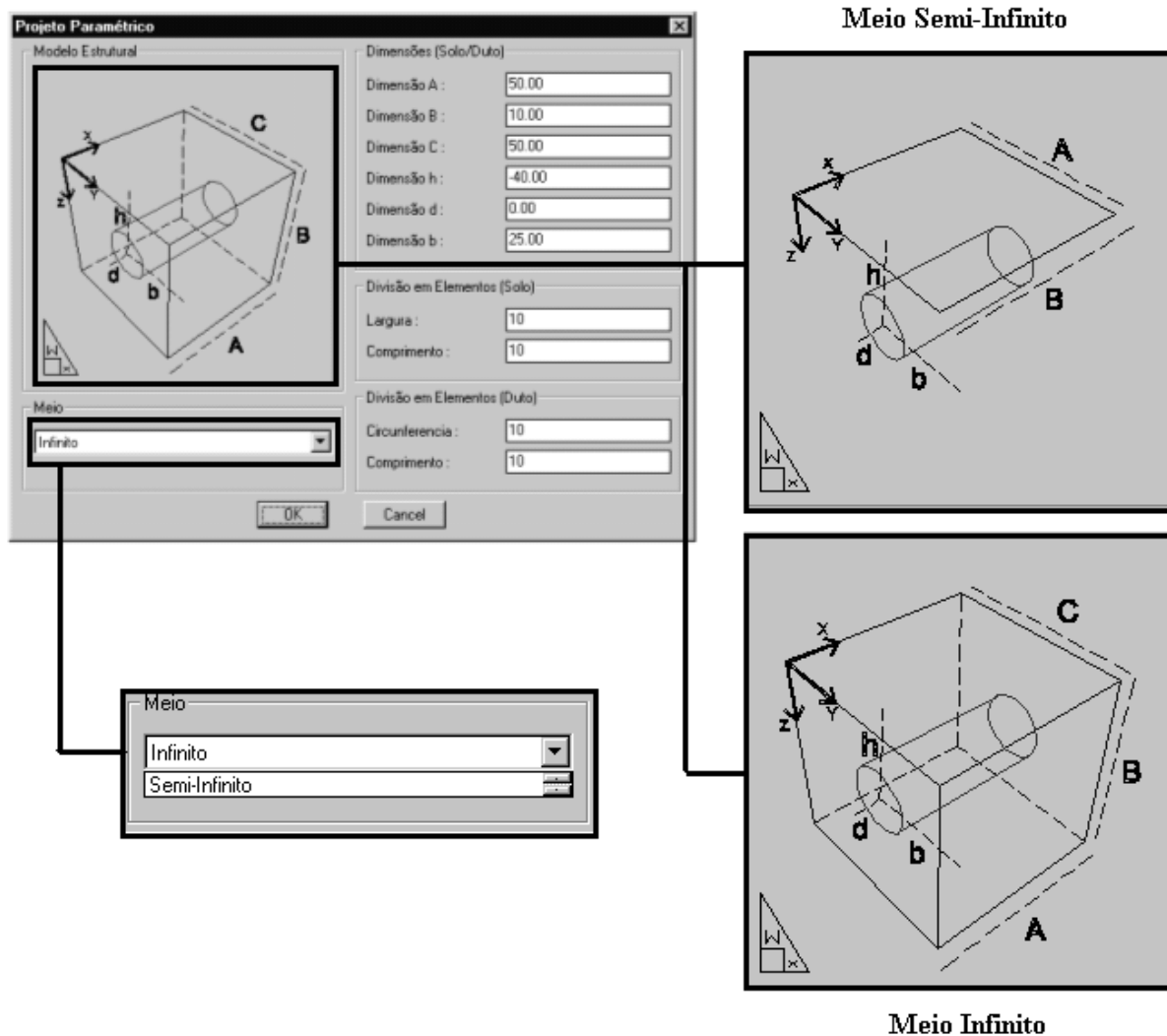


Figura 61 – Gerando a Geometria no AutoCAD

Ao serem preenchidos todos os campos e confirmados os valores escolhidos, a caixa de diálogo é automaticamente fechada e o domínio é discretizado no ambiente de desenho 3D. Vide figura Figura 62.

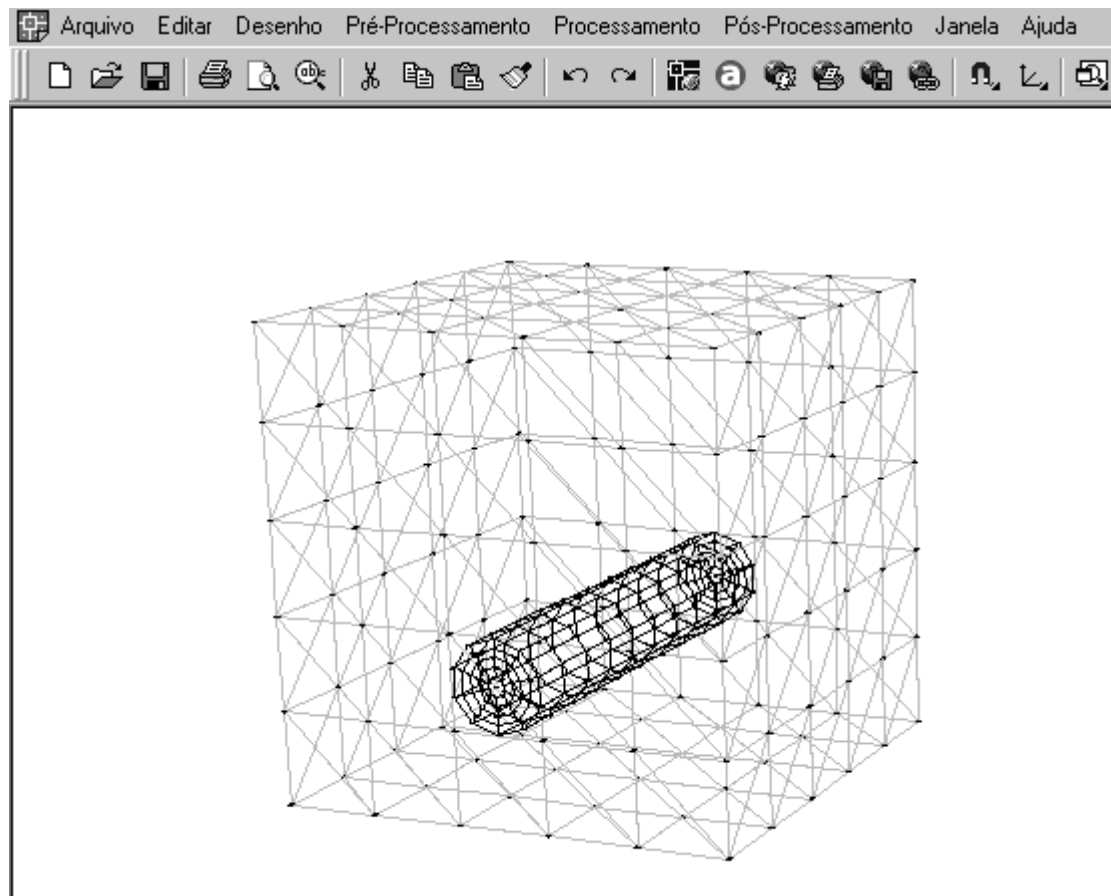


Figura 62 – Modelagem paramétrica do conjunto solo-duto.

5.6.4.2 – APLICANDO CONDIÇÕES DE CONTORNO E FORÇAS

Na figura Figura 63 observa-se as funções de pré-processamento que são utilizadas para a fase de discretização, aplicação de propriedades mecânicas e condições de contorno do modelo.

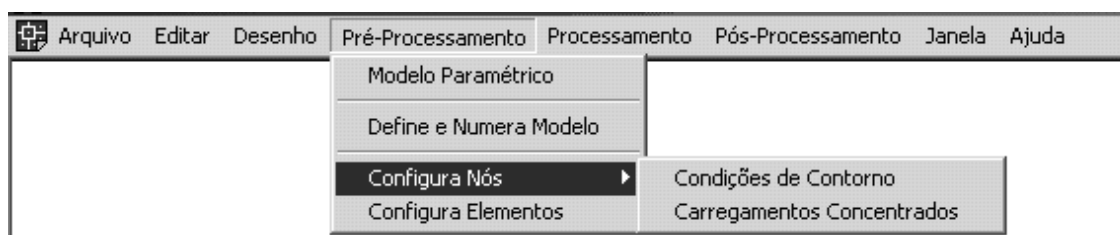


Figura 63 – Menu pré-processamento.

Para a inclusão de condições de contorno basta, setar os graus de liberdade existentes na caixa de diálogo indicada na Figura 64 (que é exibida no momento que o usuário utilizar a função Pré-Processamento->Configura Nós->Condições de Contorno).

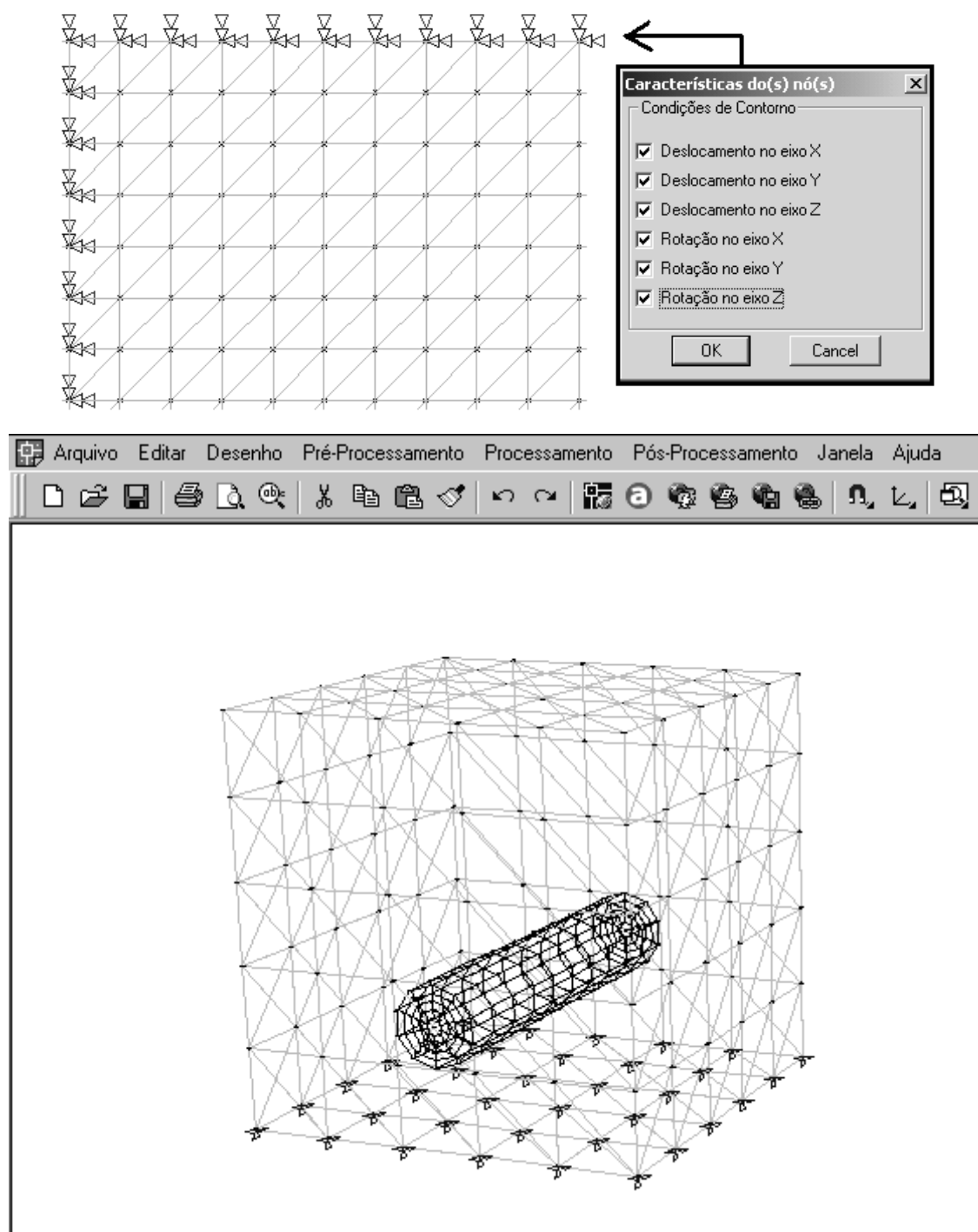


Figura 64 – Condições de contorno no Solo.

Para aplicação de forças nodais devem ser preenchidos os valores na caixa de diálogo exibida na Figura 65 (que é acessada através do menu Pré-Processamento->Configura Nós->Carregamentos Concentrados).



Características do(s) nó(s)

Força Nodal

Força em X :	0.0000E+00
Força em Y :	0.0000E+00
Força em Z :	-1.0000E+03
Torsor em X :	0.0000E+00
Torsor em Y :	0.0000E+00
Torsor em Z :	0.0000E+00

OK Cancel

Figura 65 – Diálogo de Carregamentos concentrados.

Após setar os valores na caixa de diálogo exibida e selecionado o botão “OK” e se o usuário selecionar a malha superior, os carregamentos são exibidos conforme indicado na Figura 66.

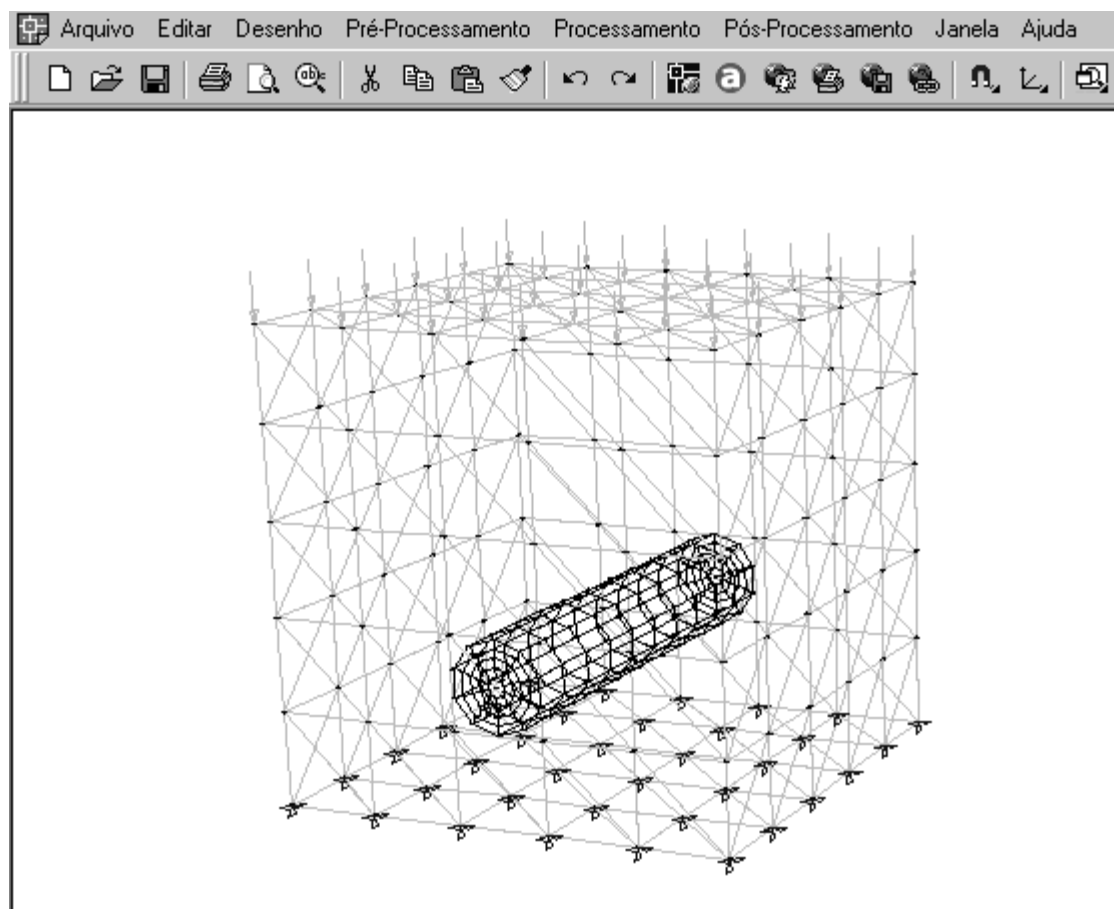


Figura 66 – Carregamentos Aplicados no Solo

5.6.4.3 – INFORMANDO PROPRIEDADES MECÂNICAS

Já as propriedades mecânicas do modelo são configuradas através da caixa mostrada na Figura 67 onde são requeridas as atribuições: espessura dos elementos, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade.

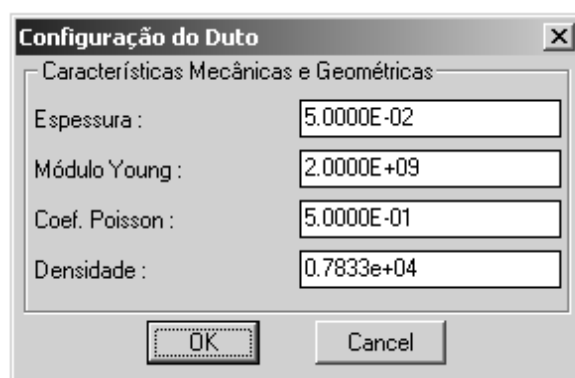


Figura 67 – Propriedades dos elementos.

5.6.4.4 – PROCESSAMENTO DA ANÁLISE NUMÉRICA

A função “Calcular” é a principal função do menu Processamento, responsável por chamar a função *solver*. Neste ponto o AutoCAD dá lugar as funções presentes na DLL de análise, repassando para às mesmas todas as informações do modelo a ser processado. A Figura 68 mostra as funções que compõem a fase de Processamento.

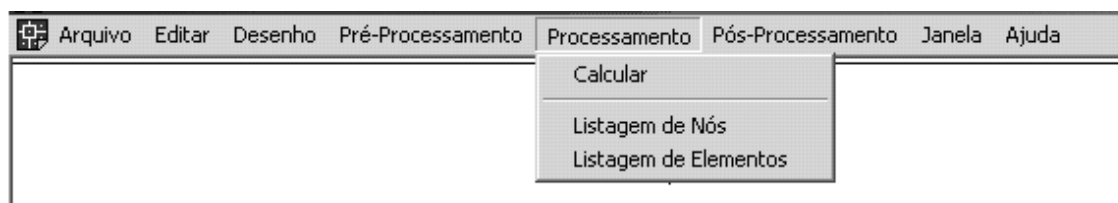


Figura 68 – Menu processamento.

Antes de iniciar o processo de cálculo, é mostrado o diálogo na Figura 69 onde podem ser escolhidos os tipos de análise (no caso da vibração forçada, requer o valor da frequência), através do menu Processamento->Calcular.

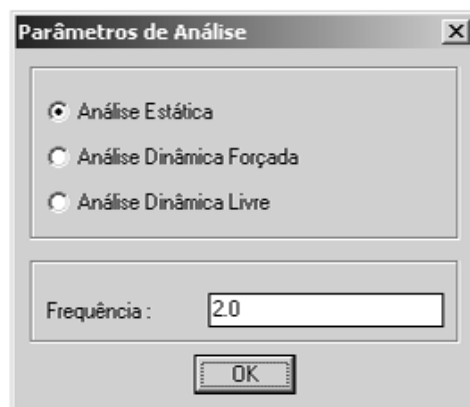


Figura 69 – Opções de Processamento.

Após selecionar o botão “OK” é apresentada a tela de estatísticas da estrutura, (vide Figura 70) e o processo de cálculo é iniciado sem sair do ambiente do AutoCAD .

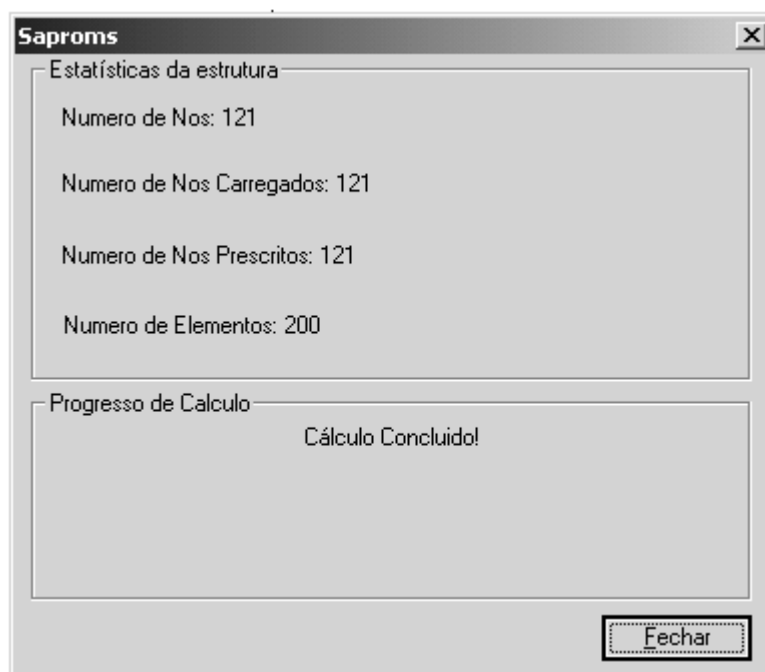


Figura 70 – Estatísticas da Estrutura.

Uma vez concluído o processamento, podem ser visualizados os valores dos campos de deslocamentos através do dialogo mostrado a partir do Menu Pós-

Processamento (vide Figura 71) , além disso outras propriedades dos elementos podem ser verificadas, por exemplo, as conectividades dos nós.

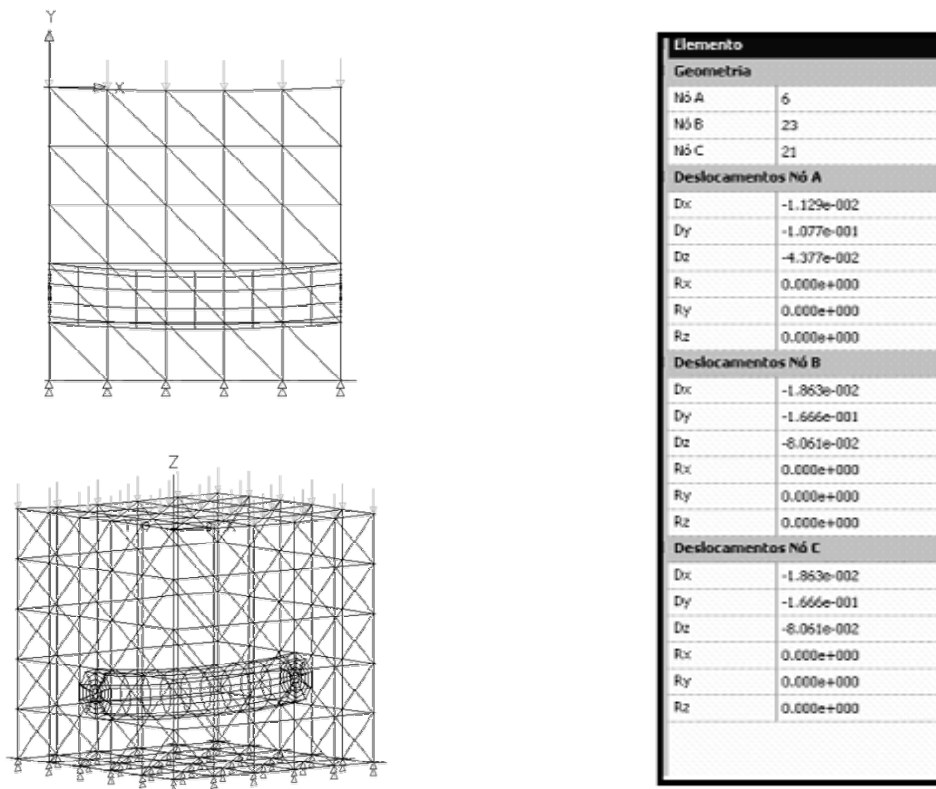


Figura 71 – Resultados da Análise da Estrutura - Deslocamentos.

Capítulo VI

EXEMPLOS

6.1 – INTRODUÇÃO

Neste Capítulo são apresentados alguns exemplos, que demonstram a análise de de cascas cilíndricas para modelagem de dutos, a análise de sólidos elásticos homogêneos para representação do solo e a simulação de problemas de interação solo-duto. É empregado o método dos elementos de contorno (MEC) para simular o solo, através de elementos especiais, discutidos anteriormente. O duto, por sua vez, é modelado empregando o método dos elementos finitos (MEF), utilizando-se os elementos CYS e RLS já discutidos.

A análise da interação solo-duto é feita através do acoplamento do MEF com o MEC, permitindo que estruturas modeladas pelo MEF interajam com o solo simulado pelo MEC. Todos os exemplos apresentados são estáticos, o solo é considerado isotrópicos e elástico-linear e o duto composto de material e elástico-linear. Na Seção 6.2 são apresentados exemplos relacionados a análise de dutos isolados. A Seção 6.3, por sua vez, contém exemplos representativos do solo. Na sequência, a Seção 6.4 apresenta exemplos que envolvem a interação do duto com o solo.

6.2 – EXEMPLOS DE ANÁLISE DE DUTOS

Nesta Seção são apresentados exemplos clássicos relacionados a análise de dutos isolados onde são explorados a potencialidade de cada elemento finito.

6.2.1 – CASCA CILINDRICA PINÇADA (PINCHED SHELL)

Nesta seção será mostrado um exemplo de análise de uma Casca Cilíndrica de comprimento L , pinçada de acordo com a Figura 72.

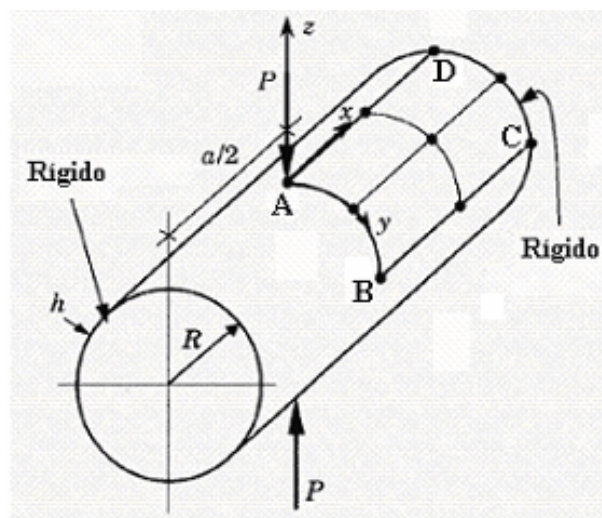


Figura 72 – Malha 2x2 no Octante A,B,C,D da Casca Cilíndrica Puncionada.

As propriedades físicas e geométricas adotadas estão indicadas na Tabela 9:

Tabela 9 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica					
E_1 :	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	G_1 :	7.6897e+04 MPa (1.1153e+06 Psi)	ν_{12} :	0.3000e+00
E_2 :	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	G_2 :	7.6897e+04 MPa (1.1153e+06 Psi)	ν_{13} :	0.3000e+00
E_3 :	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	G_3 :	7.6897e+04 MPa (1.1153e+06 Psi)	ν_{23} :	0.3000e+00
r	7.6200e+00 m (3.0000e+02 in)	h	0.00762 e+00 m (3.0000e-01 in)	α	90° (1.5707 rad)
L	7.6200e+00 m (3.0000e+02 in)	P	0.0000e+00 (kN) (1.0000e+00 Lb)		

Para a análise do modelo são consideradas as condições de contorno mostradas na Tabela 10. Notar que o valor “0” significa que não há restrição no grau de liberdade, já o

valor “1” implica grau de liberdade prescrito. No caso do RLS apenas os 3 primeiros graus de liberdade são considerados.

Tabela 10 – Condições de Contorno do Octante A,B,C,D da Casca Cilíndrica					
Coordenadas	Prescrições				
	u	v	w	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial y}$
$x = 0$	0	1	0	0	1
$x = \frac{a}{2}$	0	1	0	0	1
$y = 0$	0	1	1	0	1
$y = \frac{b}{2}$	1	0	0	1	0

Para explorar a potencialidade do ambiente customizado, a Figura 73 ilustra as diferentes vistas (a) e (b) do modelo discretizado com uma malha completa 16x32 (quando usado a condição de simetria essa discretização equivale à malha 8x8 do Octante A,B,C,D).

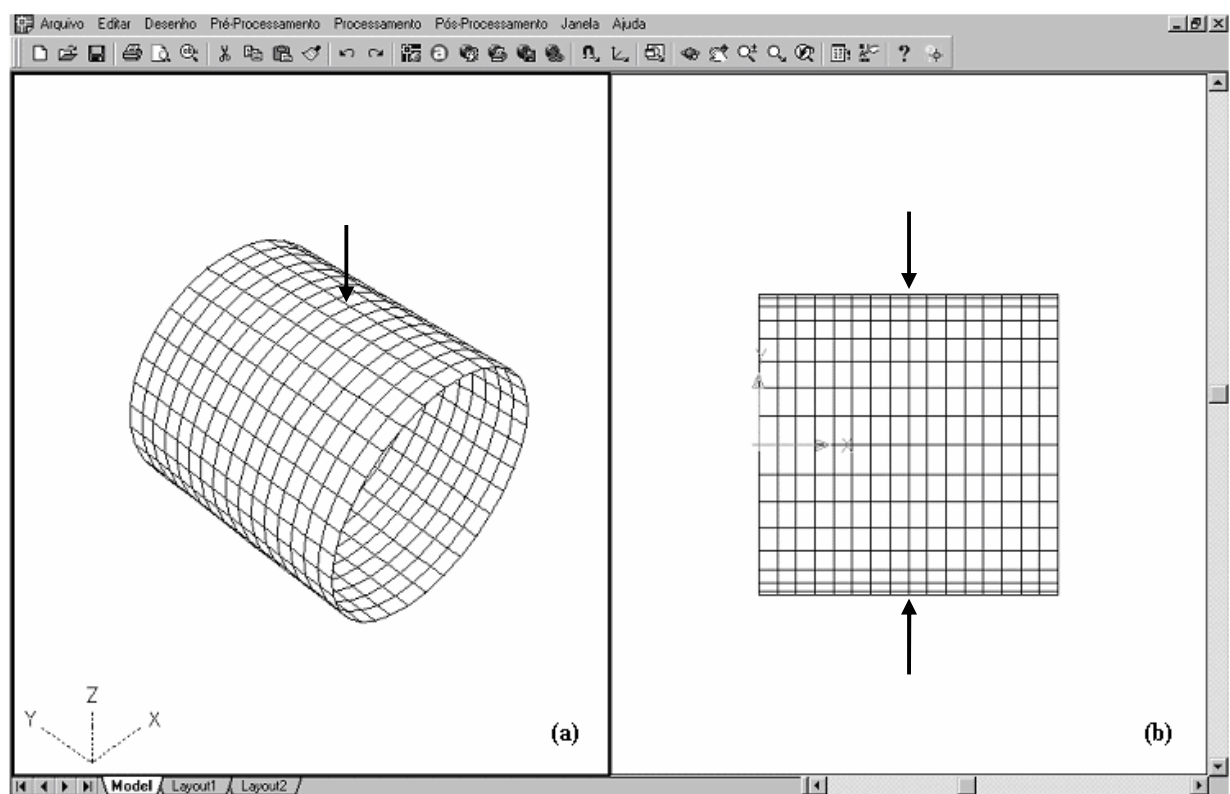


Figura 73 – Casca Cilíndrica Puncionada no AutoCAD.

Já na Figura 74 pode-se visualizar as vistas (a) e (b) da geometria deformada.

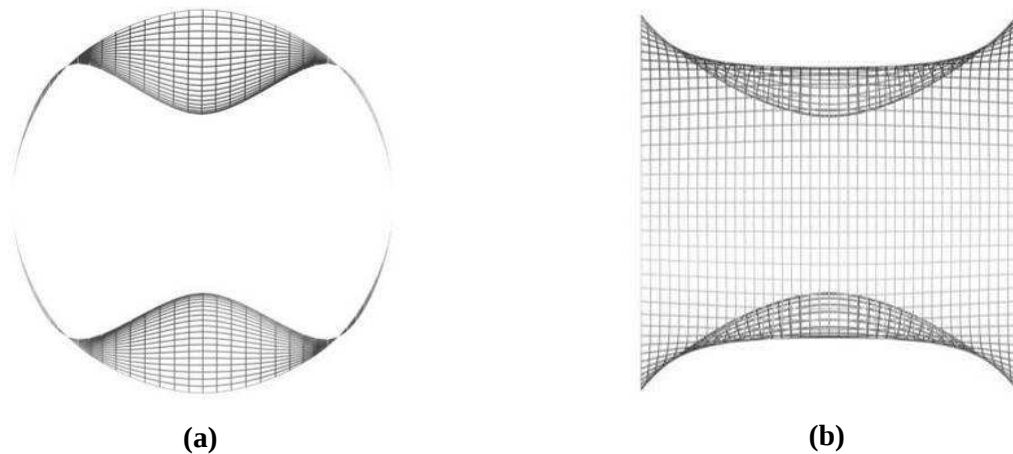


Figura 74 – Casca Cilíndrica Puncionada Vistas Frontal e Lateral deformada

Após a etapa de processamento, são visualizados no gráfico da Figura 75 as convergências dos elementos CYS e RLS comparados com valores de referência para o deslocamento radial sob a carga P : $w = -1,8248in$ FLUGGE(1973) e $w = -1,8541in$ CHO & ROH (2003). O primeiro valor foi obtido analiticamente empregando-se as hipóteses de Kirchhoff (supressão da deformação por cortante), já o segundo é um resultado numérico utilizando-se o modelo de Mindlin (incorporação do efeito da deformação por cortante). Os resultados numéricos foram obtidos a partir da discretização no Octante A,B,C,D onde foram avaliadas as malhas de 4x4, 6x6, 8x8 e 10x10.

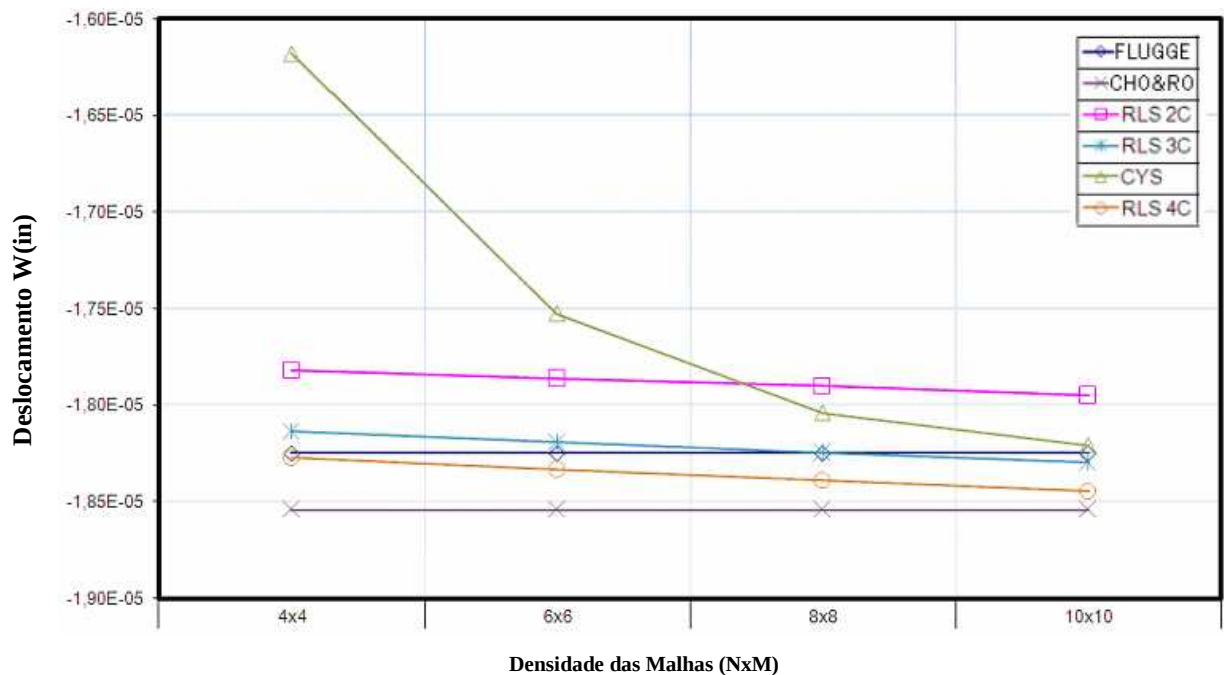


Figura 75 – Casca Cilíndrica Puncionada – Gráfico

O elemento CYS exibe uma convergência acentuada para a malha 10x10 onde o valor obtido praticamente coincide com o valor de referência de Kirchhoff, uma vez que o elemento CYS despreza a deformação por força cisalhante. Já em relação ao elemento RLS, nota-se que a convergência acentua-se a medida que são acrescentadas camadas a espessura. Uma vez que o RLS pode recuperar o efeito de deformação por cisalhamento ao longo da espessura, os valores obtido por tal elemento aproximam-se do valor de referência de Mindlin (vide Tabela 11 – RLS 2C [2 camadas], RLS 3C [3 camadas], RLS 4C [4 camadas]).

Tabela 11 – Deslocamento radial W(in) sob a carga P

	4x4	6x6	8x8	10x10
FLUGGE	-1,8248E-05	-1,8248E-05	-1,8248E-05	-1,8248E-05
CHO&RO	-1,8541E-05	-1,8541E-05	-1,8541E-05	-1,8541E-05
RLS 2C	-1,7820E-05	-1,7861E-05	-1,7902E-05	-1,7949E-05
RLS 3C	-1,8137E-05	-1,8191E-05	-1,8245E-05	-1,8297E-05
CYS	-1,6180E-05	-1,7525E-05	-1,8040E-05	-1,8207E-05
RLS 4C	-1,8274E-05	-1,8332E-05	-1,8390E-05	-1,8445E-05

6.2.2 – TELHADO DE SCORDELIS (SCORDELIS ROOF)

Aqui será mostrado um exemplo de análise de uma Casca Cilíndrica de comprimento L , Simplesmente Apoiada sob carregamento de seu peso próprio $q = \gamma \cdot h$, usando as malhas 4x4, 6x6, 8x8 e 10x10 no octante A,B,C,D. O caso da casca cilíndrica simplesmente apoiada é um problema de referência bem conhecido, também chamado de telhado de SCORDELIS-LO (1964). Uma solução para este problema foi discutido pela primeira vez por CANTIN & CLOUGH (1968) (que usou $\nu = 0,3$), vide Figura 76.

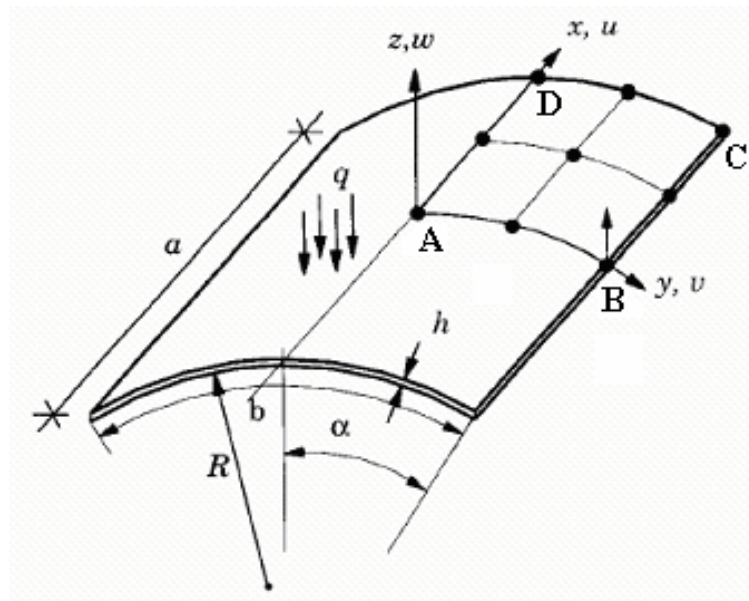


Figura 76 – Octante da Casca Cilíndrica Simplesmente Apoiada.

As propriedades físicas e geométricas adotadas estão indicadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica					
$E_1:$	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	$G_1:$	1.0342e+04 MPa (1.5000e+06 Psi)	$\nu_{12}:$	0.0000e+00
$E_2:$	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	$G_2:$	1.0342e+04 MPa (1.5000e+06 Psi)	$\nu_{13}:$	0.0000e+00
$E_3:$	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	$G_3:$	1.0342e+04 MPa (1.5000e+06 Psi)	$\nu_{23}:$	0.0000e+00
r	7.6200e+00 m (3.0000e+02 in)	h	0.07620 e+00 m (3.0000e+00 in)	α	80° (1.3962 rad)
L	76.200e+00 m (3.0000e+03 in)	γ	7.6200e+00 (kg/m³) (0.2080e+00 lbf/in³)		

Para a análise do modelo são consideradas as seguintes condições de contorno, vide Tabela 13.

Tabela 13 – Condições de Contorno do Octante A,B,C,D da Casca Cilíndrica					
Coordenadas	Prescrições				
	u	v	w	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial y}$
$x = 0$	0	0	0	0	0
$x = \frac{a}{2}$	0	0	0	0	0
$y = 0$	0	1	1	0	1
$y = \frac{b}{2}$	1	0	0	1	0

Para explorar a potencialidade do ambiente customizado, a Figura 77 ilustra as diferentes vistas (a) e (b) do modelo com a malha completa 16x16 (quando usado a condição de simetria essa discretização equivale à malha 8x8 do Octante A,B,C,D).

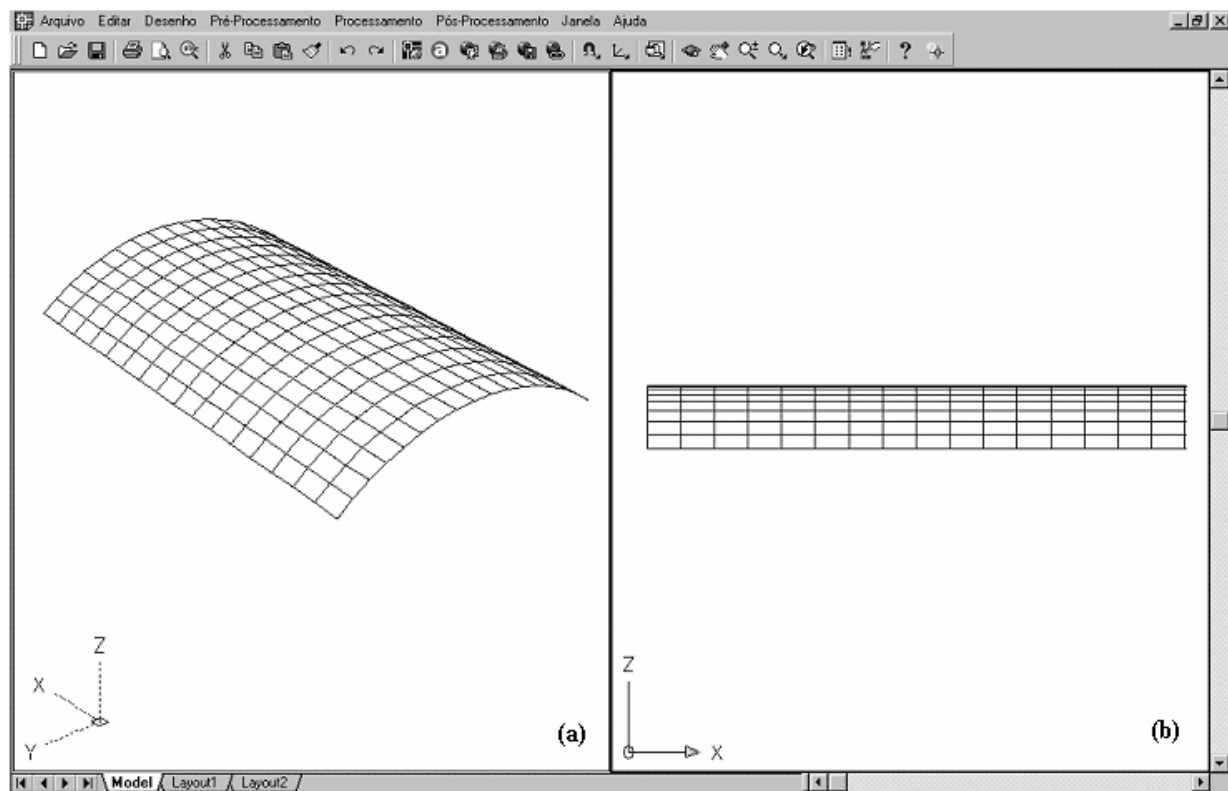


Figura 77 – Casca Cilíndrica Simplesmente Apoiada no AutoCAD.

Após a etapa de processamento, são visualizados no gráfico da Figura 78 as convergências das malhas analisadas para o valor de referência do deslocamento vertical no ponto B, (vide Tabela 14).

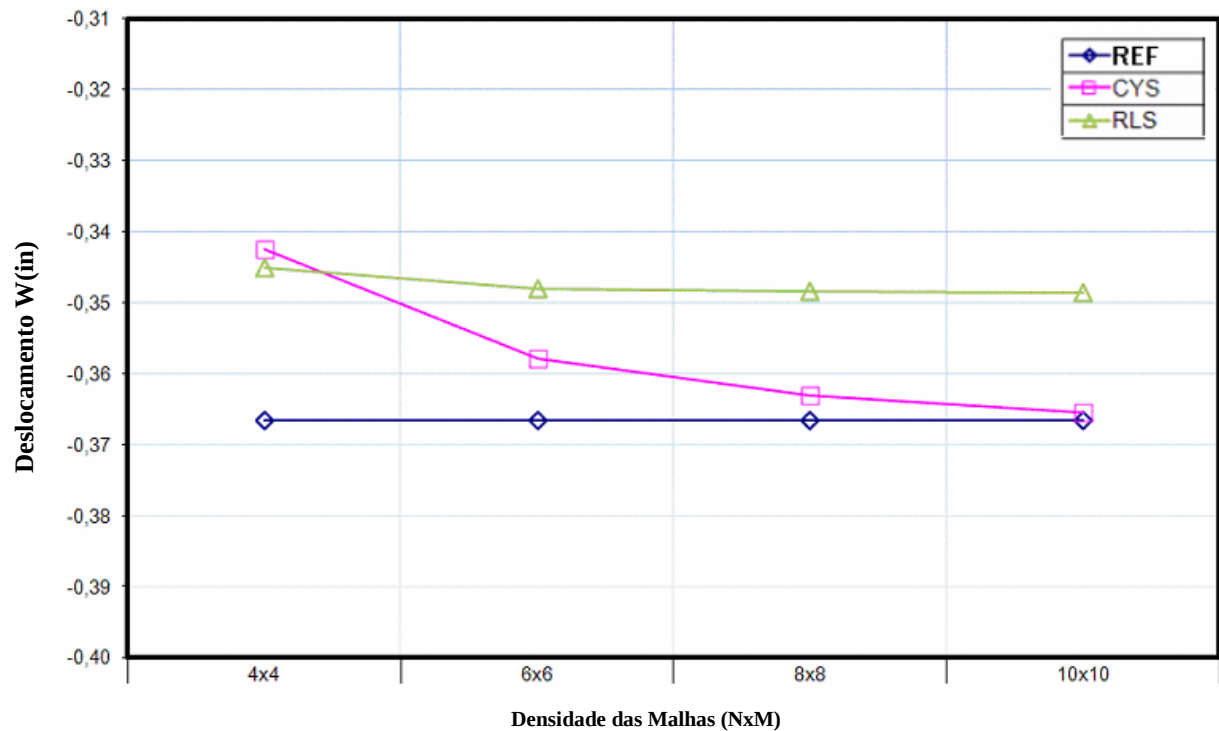


Figura 78 – Casca Cilíndrica Simplesmente Apoiada – Gráfico

Pode-se notar que os resultados indicados mostram uma convergência para o valor de referência ($w = 0,36288in$ por SIMO, FOX & RIFAI (1989)), mais efetivo para o elemento CYS em detrimento da mesma convergência do elemento RLS.

Tabela 14 – Deslocamento vertical W(in) em B.

	4x4	6x6	8x8	10x10
REF	-3,6660E-01	-3,6660E-01	-3,6660E-01	-3,6660E-01
CYS	-3,4245E-01	-3,5773E-01	-3,6299E-01	-3,6542E-01
RLS	-3,4493E-01	-3,4790E-01	-3,4834E-01	-3,4850E-01

6.2.3 – CASCA CILÍNDRICA ORTÓTROPA SOB PRESSÃO CONSTANTE

Nesta seção será mostrado um exemplo de análise de uma Casca Cilíndrica de comprimento L , cuja deformação ocorre por ação de uma pressão interna. A Casca encontra-se engastada em suas extremidades, vide Figura 79.

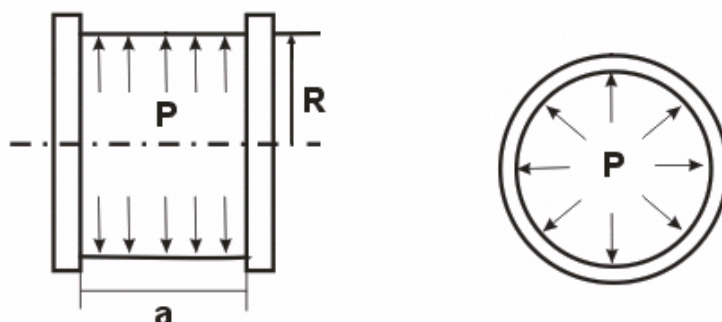


Figura 79 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Constante

Os parâmetros geométricos e físicos utilizados são mostrados na Tabela 15.

Tabela 15 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica					
E_1 :	5.1710e+04 MPa (7.5000e+06 Psi)	G_1 :	8.6184e+04 MPa (1.2500e+06 Psi)	ν_{12} :	0.2500e+00
E_2 :	1.3789e+04 MPa (2.0000e+06 Psi)	G_2 :	8.6184e+04 MPa (1.2500e+06 Psi)	ν_{13} :	0.2500e+00
E_3 :	1.3789e+04 MPa (2.0000e+06 Psi)	G_3 :	8.6184e+046 MPa (1.2500e+06 Psi)	ν_{23} :	0.2500e+00
r	0.0508e+00 m (2.0000e+02 in)	h	0.0254e+00 m (1.0000e+00 in)	α	360° (6.2830 rad)
L	0.5080e+00 m (2.0000e+01 in)				

Para a análise do modelo são consideradas as seguintes condições de contorno, vide Tabela 16.

Tabela 16 – Condições de Contorno da Casca Cilíndrica					
Coordenadas	Prescrições				
	u	v	w	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial y}$
$x = 0$	0	0	0	0	0
$x = \frac{a}{2}$	0	0	0	0	0
$y = 0$	1	1	1	1	1
$y = \frac{b}{2}$	1	1	1	1	1

Para explorar a potencialidade do ambiente customizado, a Figura 80 ilustra as diferentes vistas (a) e (b) do modelo com a malha completa 16x16 (quando usado a condição de simetria essa discretização equivale à malha 8x8 do Octante A,B,C,D).

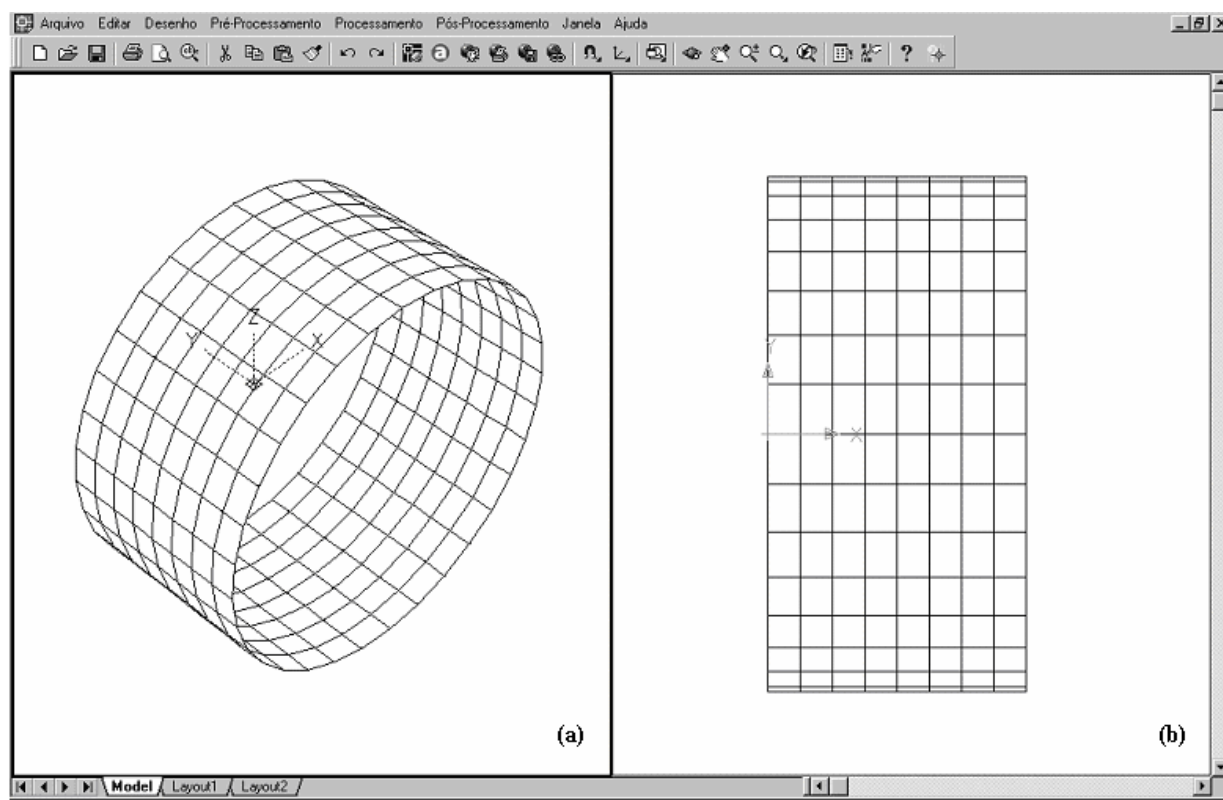


Figura 80 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Constante no AutoCAD.

A convergência dos resultados numéricos para o deslocamento radial máximo (vide Tabela 17), obtidos para a discretização de 1 Octante com malhas de 4x4, 6x6, 8x8, 10x10 e comparados com o valor de referência $w = -0.366m$ RAO (1978), é mostrada na Figura 81.

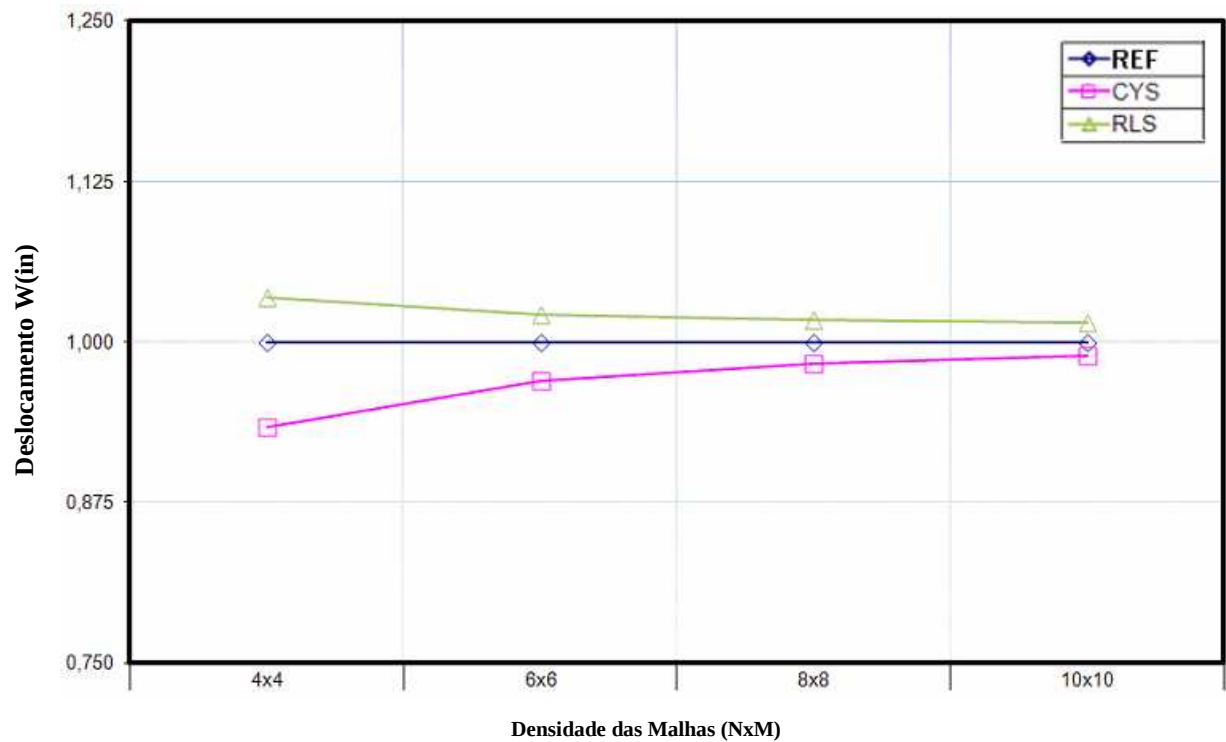


Figura 81 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Constante – Gráfico

Pode-se notar que os resultados indicados na Tabela 17, mostram uma convergência para o para ambos os elementos.

Tabela 17 – Deslocamento radial máximo W(in).

	4x4	6x6	8x8	10x10
REF	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
CYS	93,40%	97,03%	98,36%	98,99%
RLS	103,49%	102,19%	101,72%	101,49%

6.2.4 – TANQUE ESBELTO CHEIO

Nesta seção será mostrado um exemplo de análise de um tanque de comprimento L engastado na base. Para esta análise, no caso específico do RLS, cada elemento finito possui uma única camada composta por duas interfaces constituindo ao todo 36 graus de liberdade. As propriedades físicas e geométricas são mostradas na Tabela 18.

Tabela 18 – Propriedades Físicas da Casca Cilíndrica					
E_1 :	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	G_1 :	1.0342e+04 MPa (1.5000e+06 Psi)	ν_{12} :	0.0000e+00
E_2 :	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	G_2 :	1.0342e+04 MPa (1.5000e+06 Psi)	ν_{13} :	0.0000e+00
E_3 :	2.0684e+04 MPa (3.0000e+06 Psi)	G_3 :	1.0342e+04 MPa (1.5000e+06 Psi)	ν_{23} :	0.0000e+00
r	0.2540e+00 m (1.0000e+01 in)	h	0.0254e+00 m (1.0000e+00 in)	α	360° (6.2830 rad)
L	1.5240e+00 m (6.0000e+01 in)	γ	7.6200e+00 (kg/m³) (0.2080e+00 lbf/in³)		

Para a análise do modelo são consideradas as seguintes condições de contorno, vide Tabela 19.

Tabela 19 – Condições de Contorno da Casca Cilíndrica					
Coordenadas	Prescrições				
	u	v	w	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial y}$
$x = 0$	0	0	0	0	0
$x = \frac{a}{2}$	0	0	0	0	0
$y = 0$	1	1	1	1	1
$y = \frac{b}{2}$	0	0	0	0	0

Os resultados obtidos a partir da discretização completa do tanque com malhas 4x4, 6x6, 8x8 e 10x10 e o valor de referência para o deslocamento radial em (h) estão

mostrados na Figura 82 e Tabela 20. Convém notar que o valor de referência $w = 0.4963in$ é uma solução analítica dada por TIMOSHENKO e WOIONOWSKY-KRIEGER (1959) para tubos longos, já que é utilizada uma equação governante de vigas para representar o problema. Assim foi analisado no problema um tanque cuja altura é 6 vezes o seu raio.

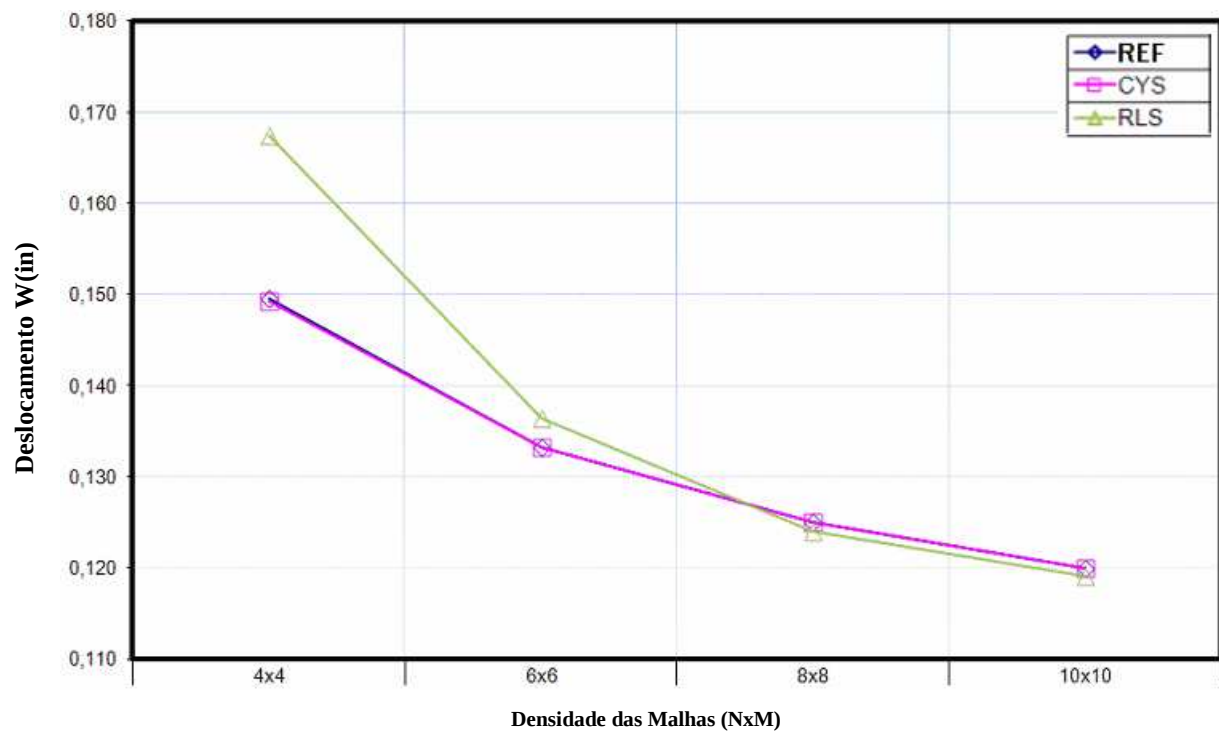


Figura 82 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Hidrostática – Gráfico

Os resultados indicam que o elemento CYS apresenta valores de convergência praticamente coincidentes com os valores analíticos, já para o elemento RLS usando-se apenas uma camada, observa-se uma convergência que depende de uma maior densidade de malha.

Tabela 20 – Deslocamento radial máximo W(in).

	4x4	6x6	8x8	10x10
REF	1,4963E-01	1,3331E-01	1,2502E-01	1,2001E-01
CYS	1,4929E-01	1,3332E-01	1,2501E-01	1,2001E-01
RLS	1,6749E-01	1,3646E-01	1,2400E-01	1,1917E-01

Na Figura 83 estão indicadas a vista isométrica (a) da configuração indeformada e as vistas isométrica (b) e frontal (c) da configuração deformada.

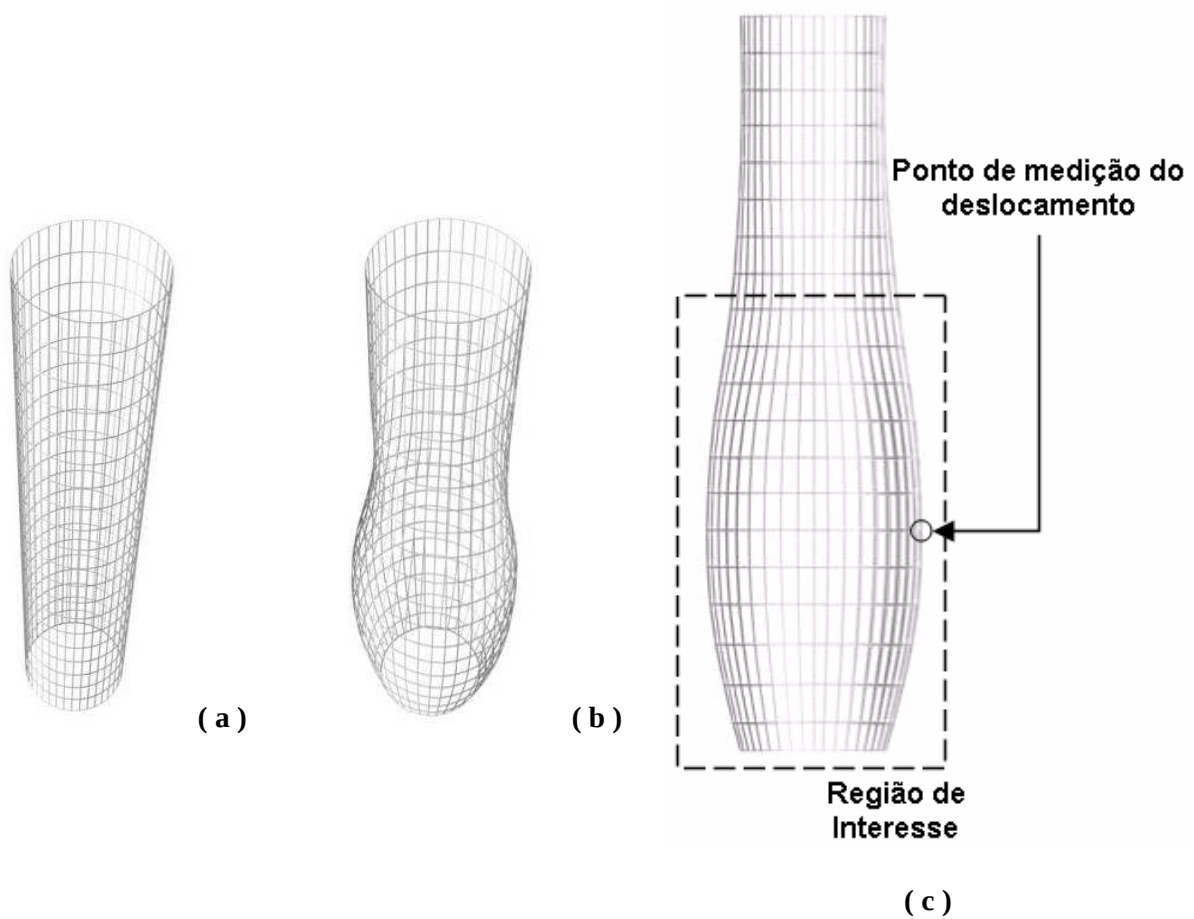


Figura 83 – Casca Cilíndrica Sob Pressão Hidrostática.

6.3 – EXEMPLOS DE ANÁLISE DO SOLO

Nesta seção serão mostrados exemplos do solo isolado, analisados pelo método dos elementos de contorno.

6.3.1 – ANÁLISE DE UM SÓLIDO CÚBICO

Nesta seção será mostrado um exemplo de análise de um cubo formado por 96 nós e 108 elementos. As propriedades físicas e geométricas de cada elemento de contorno são demonstradas a seguir.

Tabela 21 – Propriedades físicas do Cubo		
E (Pa)	ν	Densidade (Kg/m ³)
1.0000e+00	0.0000e+00	1.0000e+02

A Figura 84, ilustra a configuração do problema proposto demonstrando as condições de apoio bem como o carregamento nodal aplicado em três direções com os respectivos valores ($X = 0.000e+00$ KN, $Y = 0.000e+00$ KN, $Z = 1.000e+03$ KN).

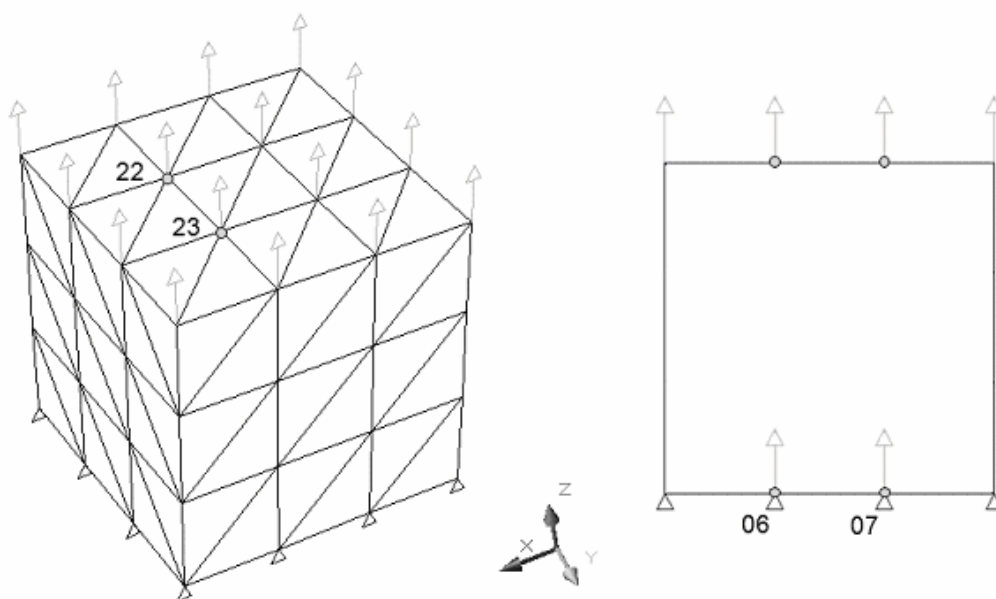


Figura 84 – Sólido (Cubo)

Após o processamento, a solução do sistema linear resulta no vetor de deslocamentos e forças nodais demonstrado a seguir:

Tabela 22 – Resultados da Análise do Sólido (Cubo)			
Nó	Deslocamento X (m)	Deslocamento Y (m)	Deslocamento Z (m)
22	6.2723851e-06	-2.7525483e-06	6.0000013e-00
23	213.58494e-09	5.9492028e-06	6.0000005e-00
Nó	Força X (kN / m)	Força Y (kN / m)	Força Z (kN / m)
6	0.0000000e+00	0.0000000e+00	-1.0000017e+00
7	0.0000000e+00	0.0000000e+00	-999.9993014e-03

Os resultados indicam que a discretização do sólido por elementos triangulares foi eficaz para a análise do problema.

6.3.2 – ANÁLISE DE UM SÓLIDO CILINDRICO

Nesta seção será mostrado um exemplo de análise de um sólido (cilindro) discretizado conforme indicado na Figura 85. O cilindro encontra-se vinculado axialmente em uma de suas extremidades e axialmente tracionado com carga estática uniformemente distribuída na outra. As propriedades físicas e geométricas de cada elemento de contorno são demonstradas a seguir.

Tabela 23 – Propriedades físicas do Cilindro			
E (Pa)	ν	Raio (m)	Densidade (Kg/m ³)
1.0000e+00	3.0000e-01	8.0000e-01	1.0000e+02

A Figura 85 ilustra a configuração do problema proposto: as condições de apoio bem como o carregamento trativo uniformemente distribuído.

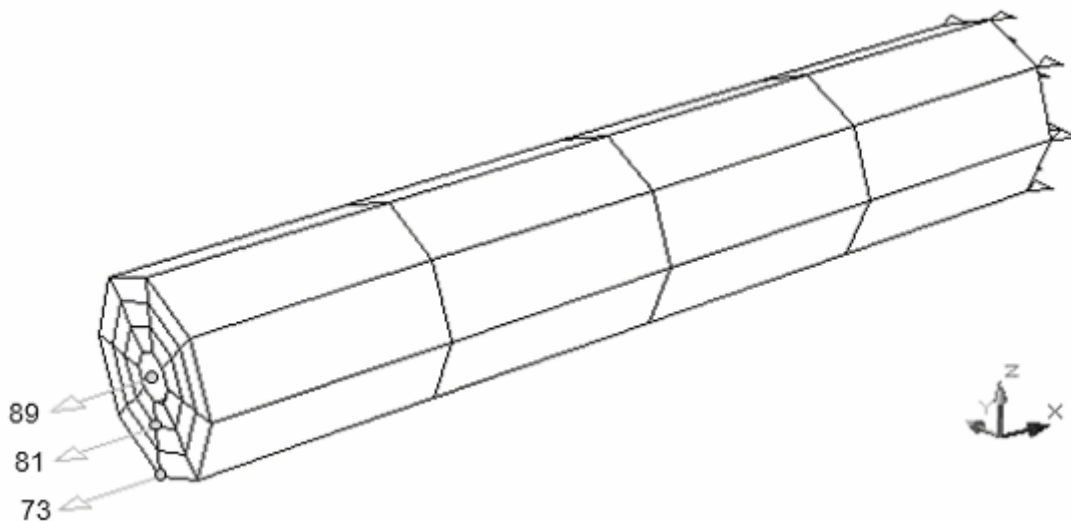


Figura 85 – Sólido (Cilindro)

Após o processamento, a solução do sistema linear resulta no vetor de deslocamentos nodais obtidos e mostrados na Tabela 24.

Tabela 24 – Resultados da Análise do Sólido (Cilindro)			
	X (m)	Y (m)	Z (m)
73	600.0059283e-03	-237.0119402e-12	-12.8353078e-09
81	600.0039539e-03	21.3567404e-09	-12.2432353e-09
89	600.0264948e-03	-52.3799488e-09	-54.8749057e-09

Os resultados indicam que a estratégia de elementos com geometrias especiais de elementos de contorno desenvolvidas nesta tese são eficazes.

6.4 – EXEMPLOS DE ANÁLISE DE INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

6.4.1 – ANÁLISE DE UM DUTO DE BAIXA PROFUNDIDADE

Seja uma cavidade de 2,3 m de raio em um maciço rochoso cujas propriedades mecânicas estão indicadas na Tabela 25:

Tabela 25 – Propriedades físicas do Acoplamento Solo-Duto			
E	ν	Espessura	Estrutura
12,50 GPa	0,20	-	Solo
25,70 GPa	0,15	0,3 m	Duto

Considerou-se o duto inicialmente homogêneo e submetido a uma pressão de confinamento devido ao peso do maciço rochoso de $p = 1000 \text{ kPa}$ conforme Figura 86.

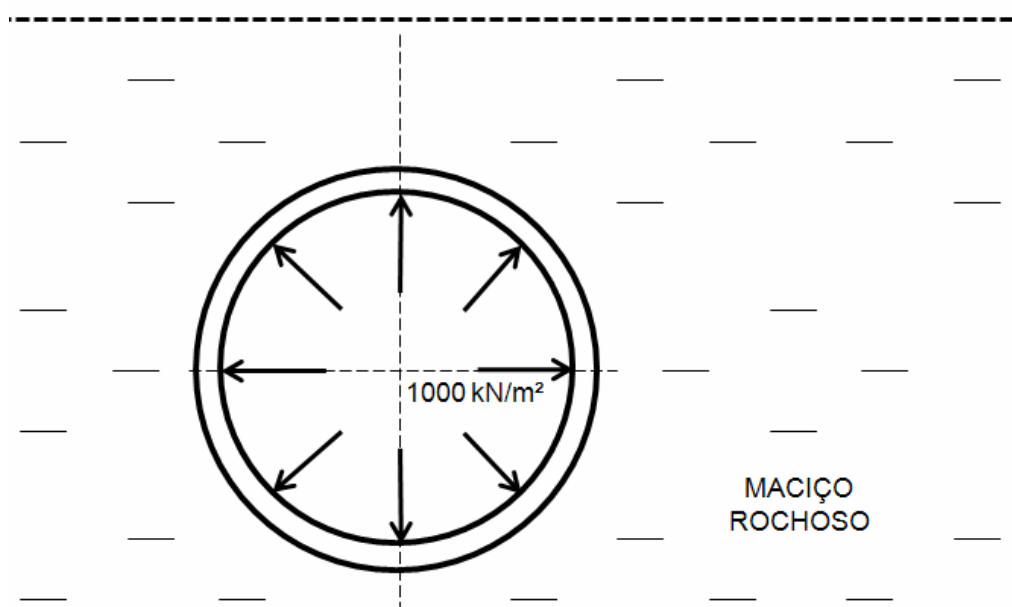


Figura 86 – Duto Baixa Profundidade Pressurizado

Na Tabela 27 estão indicados os resultados para o deslocamento radial, no ponto 2 da cavidade, que são comparados com a solução analítica de TIMOSHENKO (1959) e com a solução numérica do MEC dada por FREITAS (2008) (utilizando-se 40 elementos de contorno lineares), vide Tabela 26. Essas últimas analisam o problema no estado plano de deformação. Com intuito de recuperar a análise bidimensional aplicando-se o modelo

3D, considerou-se uma cavidade/cilindro com comprimento pouco maior que 10 vezes o diâmetro da cavidade, resultando em $L = 45m$. Além disso os deslocamentos nas extremidades axiais da cavidade foram prescritos. O gráfico da Figura 87 descreve o comportamento da convergência dos resultados para as análises feitas.

Tabela 26 – Resultados de Outros Autores	
TIMOSHENKO (1959)	MEC 2D – FREITAS (2008)
153.333e-007 (m)	153.000e-007 (m)

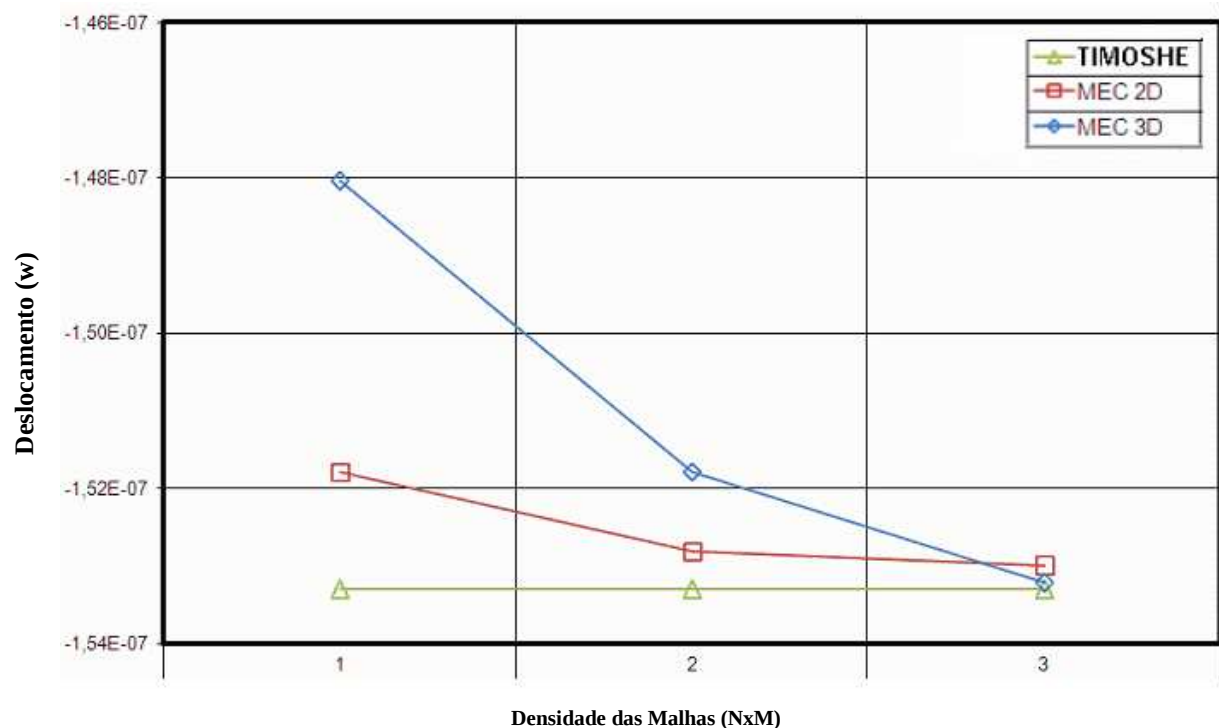


Figura 87 – Duto Homogêneo Baixa Profundidade Pressurizado – Gráfico

Os resultados podem ser vistos diretamente na Tabela 27.

Tabela 27 – Duto Homogêneo Baixa Profundidade Pressurizado

	1	2	3
TIMOSHE	-1,5330000000000000E-07	-1,5330000000000000E-07	-1,5330000000000000E-07
MEC 2D	-1,51779220244818000000E-07	-1,5280000000000000E-07	-1,5300000000000000E-07
MEC 3D	-1,48046313039020000000E-07	-1,51779220244818000000E-07	-1,53216451717576000000E-07

Numa segunda análise, o duto, na sua espessura foi dividido em camadas e também submetido a uma pressão de confinamento devido ao peso do maciço rochoso de $p = 1000kPa$. Foram realizadas sucessivas soluções para até 5 camadas, cujos valores são mostrados no gráfico da Figura 88, para as malhas informadas.

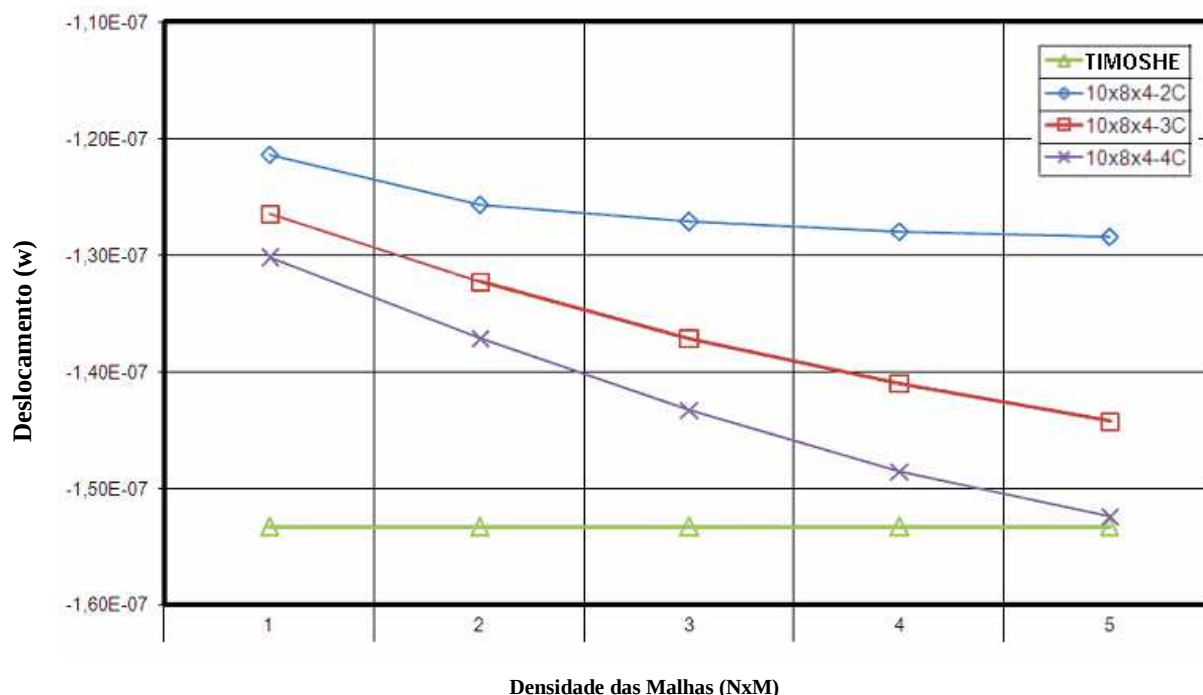


Figura 88 – Duto Laminado Baixa Profundidade Pressurizado – Gráfico

Os resultados (Tabela 27 e Tabela 28 Onde: RLS 2C [2 camadas], RLS 3C [3 camadas], RLS 4C [4 camadas]), indicam que tanto o elemento CYS quanto o elemento RLS, quando acoplados ao solo, apresentam convergência para valores presentes na literatura. Convém ressaltar que o elemento RLS apresenta-se mais efetivo quanto maior for o número de camadas presentes na espessura do modelo, no entanto, do ponto de vista computacional, a análise torna-se mais onerosa quando comparada ao acoplamento feito com o elemento CYS.

Tabela 28 – Duto Laminado Baixa Profundidade Pressurizado

	1	2	3	4	5
TIMOSHE	-1,5330000000000000	-1,5330000000000000	-1,5330000000000000	-1,5330000000000000	-1,5330000000000000
10x8x4-2C	-1,21367747962786000	-1,25634916650629000	-1,27152019357978000	-1,27924597262407000	-1,28387163761400000
10x8x4-3C	-1,26418832181394000	-1,32219333204286000	-1,37113127131674000	-1,40965352959932000	-1,44231942543395000
10x8x4-4C	-1,30219333204286000	-1,37113127131674000	-1,43231942543395000	-1,48550458334936000	-1,52353802962412000

Capítulo VII

CONCLUSÕES

7.1 – OBSERVAÇÕES FINAIS

Nesta Tese estudou-se a análise do problema de dutos isolados e enterrados e sua vizinhança. Do ponto de vista matemático e computacional, algumas contribuições originais foram dadas, sendo enumeradas a seguir:

a) Elementos de contorno com geometrias especiais (cilíndrica, setoriais planas e discoide);

b) Análise da interação solo-duto laminado com a representação exata da superfície de contato;

c) Análise de dutos através de elementos de casca cilíndrica não homogênea (laminado) RLS e adequação do elemento finito de casca cilíndrica CYS, proposto inicialmente como homogêneo isotrópico e modificado para modelo não homogêneo e ortótropo;

d) Implementação computacional dos Elementos RLS e CYS e elementos de Contorno (cilíndrico, setorial plano e discoide) na biblioteca Saproms.dll (Sistema de

Análise de Problemas em Mecânica dos Sólidos), escrita em linguagem orientada a objetos C++, dedicada a análise estrutural de dutos livres através do MEF e de dutos enterrados pelo acoplamento MEC-MEF;

e) Construção de um ambiente amigável utilizando-se customização do AutoCAD para geração paramétrica dos modelos de dutos livres e dutos enterrados (pré-processamento), bem como a incorporação da biblioteca Saproms.dll no mesmo ambiente (processamento).

Exemplos numéricos foram analisados para os problemas de dutos, painéis cilíndricos e para o meio contínuo (solo). O maciço de solos é modelado com o método dos elementos de contorno (MEC) empregando as soluções fundamentais de KELVIN e MINDLIN. Esta técnica se baseia no relacionamento das soluções fundamentais dos diferentes domínios, permitindo que todo o maciço seja equacionado como um único sólido. Uma desvantagem desta técnica é que todo o domínio modelado deve ter as mesmas propriedades. O acoplamento deste modelo de solo com o duto em camadas através de elementos finitos de casca cilíndrica é uma contribuição original desta tese.

Algumas considerações importantes a partir das análises apresentadas utilizando-se o Elemento finito CYS podem ser tecidas:

1 – O elemento possui boa convergência para valores analíticos mesmo utilizando malhas pouco densas nos casos homogêneos isotrópicos e ortótropos. Dessa forma, pode-se dizer que o custo computacional para análise é consideravelmente reduzido.

2 – A adaptação do elemento para problemas não homogêneos não apresenta bons resultados de convergência. Este fato deve-se a escolha das funções interpoladoras para os campos de deslocamentos não serem totalmente compatíveis com os deslocamentos observados ao longo das interfaces de laminados cilíndricos.

Já concernente ao elemento RLS, pode ser discutido que:

1 – Através da teoria de camadas discretas (Layerwise) é possível propor modelos para análise de cascas cilíndricas cujas análises demonstram haver boa convergência

para valores analíticos encontrados na literatura. Diferentemente dos modelos de camadas simples equivalentes, a teoria Layerwise, por discretizar cada camada individualmente, pode fornecer informações detalhadas de cada interface, tais como, campos de deslocamentos e esforços.

2 – Os modelos de camadas simples equivalentes conseguem determinar tensões e deformações unicamente nas regiões inferior e superior do laminado, esta capacidade na teoria Layerwise se estende para determinação dos mesmos campos não só nas superfícies extremas, mas também ao longo da espessura. Tal propriedade é de grande importância para as etapas de projeto, uma vez que pode contribuir significativamente na escolha do esquema de laminação que melhor se adéque aos propósitos de utilização da estrutura.

Quanto a análise da interação solo-duto pelo acoplamento MEC-MEF pode ser destacado que:

1 – Há convergência de resultados do modelo 3D em relação aos modelos 2D presentes na literatura

7.2 – PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta Seção, são citados os principais tópicos que podem ser desenvolvidos para a continuidade deste projeto de doutoramento:

1 - Associar técnicas de processamento paralelo ao programa computacional;

2 - Implementar a técnica alternativa de sub-regiões ao modelo de análise do solo;

3 - Implementação das soluções de espaço infinito e semi-espaço no regime dinâmico para problemas do solo isolado ou acoplado ao duto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIABADI, M.H. & BREBBIA, C.A. (1993). Advances in boundary element methods for fracture mechanics. London. Computational Mechanics Publications.

ALIABADI, M.H. & ROOKE, D.P. (1991). Numerical Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications. Southampton and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

ALIABADI, M.H. et al. (1987). Weighted gaussian methods for three-dimensional boundary element kernel integration. Comm. Appl. Numer. Methods, 3, 89-96.

ALIABADI, M.H., BREBBIA, C.A., & PARTON, V.Z. (1994). Static and dynamic fracture mechanics. Southampton, CMP, UK.

ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P. and CARTWRIGHT, D.J. (1987). An improved boundary element formulation for calculating stress intensity factors: application to aerospace structures. J. Strain Anal., 22 (4), pp. 1-5.

ALLMAN D. J. (1984). A compatible triangular element including vertex rotation for plane elasticity analysis. Computer and Structures, Vol 19, p1-8.

ALMEIDA F.P.A, CODA H. B., MESQUITA E. N. (2004). Soil-structure interaction by TDBEM-FEM coupling: a stable procedure . In: Iberian Latin-American Congress On Computational Methods In Engineering, 25., 2004, Recife.

ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B (2004). Análise da interação solo não homogêneo-fundação empregando o MEC juntamente com a técnica da rigidez sucessiva. In: XXXI JORNADAS SUD-AMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 2004, Mendoza, Argentina. Anais. . . CD-ROM.

BANERJEE, P. K.; DAVIES, T. G (1977). Analysis of pile groups embedded in Gibson soil. In: INT. CONF. SOIL MECHS FDN ENGNG., 9, 1977, Tokyo. Proceedings. . . v.1, p.381-386.

BANERJEE, P.K. (1976). Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. Int. J. Mechanical Science, v.18, p. 293-303.

BANERJEE, P.K. and BUTTERFIELD, R. (1977). Boundary Element Method in Geomechanics. In: Finite Elements in Geomechanics, G. Gudehus (ed.), pp. 529-570, J. Wiley, London.

BARBERO E. J., REDDY J. N. And TEPLY J. L., (1990), General two-dimensional Theory of laminated Cylindrical Shells, AIAA Journal, vol 28, No 3, pp. 544-553.

BARBIRATO, J.C.C. & VENTURINI, W.S. (1997). Análise transiente de sólidos tridimensionais através do método dos elementos de contorno. In: XVIII CILAMCE, v. 1, pp. 397-404. Brasília, BR.

BARBIRATO, J.C.C. & VENTURINI, W.S. (1998). Boundary element method for three-dimensional cohesive crack problems. In: IV WCCM, CD-ROM Proceedings. Buenos Aires, AR.

BARBIRATO, J.C.C. (1991) Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin. São Carlos, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BARBIRATO, J.C.C. and VENTURINI, W.S. (1991). Formulação do método dos elementos de contorno, baseada na solução fundamental de Mindlin, para problemas elásticos tridimensionais. In: XXV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, v. 1, pp. 431-442. Porto Alegre, BR.

BATHE K.J. and DVORKIN E.H.(1985) ‘Short communication – a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation’. Int. J. Num. Meth. Eng., 21, 367–383..

BATHE, K. J; HO. L. W.(1981). A simple and effective element for analysis of general shell structures. Computers and Structures. Vol 13, p673-681.

BATOZ J.L, BATHE K.J. HO L.W. (1980) ‘A study of three-node triangular plate bending elements’ Int. J. Num. Eng., 15, 1771 – 1812.

BATOZ, J.L. & LARDEUR, P.(1989). A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 28, p. 533-560.

BERGAN P. G.; NYGARD M. K. (1985). Finite element with increase freedom in shape function. Int. Num. J. Num. Meth. Engng. Vol 20, p643-664.

BERGAN, P. G.; FELIPPA, C. A.(1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, Comp. Meths. in Applied Mech. Eng., v.50, p.25-69.

BESKOS, D.E. (1987). Boundary element methods in dynamic analysis, Appl. Mech. Reviews, Vol. 40, pp. 1-23.

BILLINGTON, D.F; (1968). Thin shell concrete structures. McGraw-Hill, 1968.

BIOT M.A. (1937) “ Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation,” J. App. Mech. Trans. ASME 59. A1-A7.

BOGADO, W. H. (1997). Customização de Sistemas Comerciais de CAD. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1997.

BREBBIA e GEORGIOU (1979)

BREBBIA, C.A. & DOMÍNGUEZ, J. (1977). Boundary element methods for potential problems. Appl. Math. Modelling, v. 1, pp. 372-378.

BREBBIA, C.A. & DOMÍNGUEZ, J. (1989). Boundary elements - an introductory course. London. Computational Mechanics Publications.

BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A. J. (1975). The finite element technique – an introduction for engineers. Editora da URGs, Porto Alegre.

BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. (1983). Dynamic analysis in solid mechanics by and alternative boundary element procedure. Int. Jour. of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v. 2, n. 4, pp. 228-233.

BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. (1986). Solution of parabolic and hyperbolic time dependent problems using elements. Comp. & Math. with Appls., 12B, n. 5/6: 1061-1072.

BREBBIA, C.A. (1978) The boundary element method for engineers, London, Pentech Press.

BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. (1984). Boundary element techniques. Spring-Verlag, Berlin.

CANTIN G, CLOUGH R.W. (1968), A curved cylindrical shell Finite element, AIAA J. 6, 1057–1062.

CHAN, K.S.; KARASUDHI, P.; LEE, S.L. (1974). Force at a point in the interior of a layered elastic half-space. Int. J. Solids Structs, v. 10, p. 1179-1199.

CHEN K. K, (1979). A triangular plate finite element for large displacement elastic-plastic analysis of automobile structural components. Computers and Structures. Vol 10, p203-215.

CHIN, J. T.; CHOW, Y. K (1990). Numerical analysis of axially loaded vertical piles and pile groups. Computers and Geotechnics, England, v.9, p.273-290.

CHO M, and ROH H. Y. (2003), Development of Geometrically Exact Elements Based

on General Curvilinear Coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 81-115.

CLOUGH R. W. and TOUCHER J. L. (1965), 'Finite Element Stiffness Matrices For the Analysis of Plate Bending', *Proc. Matrix Methods in Structural Analysis*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

COWPER G.R, LINDBERG G.M. OLSEN M.D. (1979), A shallow shell finite element of triangular shape, *Int. J. Solids Struct.* 6, 1133–1156

CRAIG S. G., and ZAFER G. And RAKESH K. K., (1994), *Finite Element Analysis Of Geodesical Stiffened Cylindrical Composite Shells Using a Layerwise Theory*. Virginia Polytechnic Institute and State University.

CRUSE, T.A (1973). Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. *Computers and Structures*, 3, pp. 509-527.

CRUSE, T.A (1974). An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Computers and Structures*, v. 4, pp. 741-754.

CRUSE, T.A. & MEYERS, G.J. (1977). Three dimensional fracture mechanics analysis. *ASCE Journal of the Structural Division*, n. 103, pp. 309-320.

CRUSE, T.A. & RIZZO, F.J. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. *Journal Math. Anal. Appl.*, v. 22, pp. 224-259.

CRUSE, T.A. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II. *Journal Math. Anal. Appl.*, v. 22.

CRUSE, T.A. (1988). *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. London, Kluwer Academic Publishers.

CRUSE, T.A. (1995). BIE fracture mechanics analysis - 25 years of developments. In: IABEM/95. pp. 2848-2855.

CRUSE, T.A. and Van BUREN (1971). Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. Int. J. Fract. Mech., v. 7, pp. 1-15.

CRUSE, T.A.(1969). Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. Journal of Solids and Structures. v. 5, pp. 1259-1274.

CRUSE, T.A., (1975). Boundary-integral equation method for three-dimensional elastic fracture mechanics analysis, AFOSR-TR-75-0813.

DEVELOO P. R. B., MENEZES F. A., BRAVO C. M. A. A., 1999, Formulação e implementação de cálculo de placas de material composto, COBEM 99 – Congresso de Engenharia Mecânica, in CDROM, Águas de Lindóia, SP, Brasil.

DJOUDI M. S, BAHAI H. (2002). A shallow Shell finite element for non-linear analysis of cylindrical shells, Eng. Struct., v.25, p.769-778.

DJOUDI M. S, BAHAI H. (2004). A cylindrical strain-based Shell element for vibration analysis of Shell structures, Fin.Elem. Anal. Desig., v.40, p.1947-1961.

DJOUDI M. S, BAHAI H. (2004). Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with openings, Thin Wall. Struct., v.42, p.575-588.

DONNELL, L. H. (1933). Stability of Thin Walled Tubes Under Torsion. NACA Rep.479.

DONNELL, L. H. (1938). A discussion of thin shell theory. Proceedings of the Fifth International Congress of Applied Mechanics.

DVORKIN E. N. and BATHE K. J. (1984), ‘A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis’, Eng. Comp., 1, 77–88.

FAFART M; DHATT G, BATOZ J. L. (1989). A new descrit Kirchhoff plate/Shell element with procedure. Computers and Structures. Vol 31, p591-606.

FERREIRA A. J. M., BARBOSA J. T., MARQUES A. T., DE SÁ J. C., 2000, Non-Linear analisys of sandwich shells: the effect of core plasticity, Computers & Structures, vol. 76, pp. 337-346.

FERREIRA A. J. M., ROQUE C. M. C., MARTINS PALS., 2004, Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminates composite beams and plates, Composite Structures, article in press.

FERREIRA, A. J. M., 2003, A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates, Composite Structures, vol. 59, pp. 385-392.

FLUGGE W. (1973), Stresses in Shells, Second Edition, Springer-Verlag, Germany.

FULTON R.E., EPINK R.T., WALZ J.E. (1966), The accuracy of finite element method in continuum problems, Proceedings of the Fifth US National Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, p. 272.

GIBSON J.E. (1968). The Design of Shell Roofs (3rd Edition ed.), E. & F. N. Spon Ltd., London.

GREENWOOD, M.E., LANG, D.C. (1990): Vertical Deflection of Buried Flexible Pipes, Buried Plastic Pipe Technology. ASTM STP 1093. Philadelphia.

HASHIN Z., 1980, Failure Criteria for unidirectional fiber composites. Journal of Applied Mechanics, 47:329-334.

HASHIN Z., ROSEN W., (1964), The Elastic Moduli of Fiber Reinforced Materials, Journal of Applied Mechanics, Vol 31. Pp 223-232.

HETENYI M. (1946) “Beams on Elastic Foundation,” University of Michigan Press. Ann Arbor.

HILL R., (1965), A Self-Consistent Mechanics of Composite material, Journal of the Mechanics and Physics v 13, p213-222.

HRENNIKOF A, TEZCAN S.S. (1966), Analysis of cylindrical shells by the finite element method, Symposium of Problems of Interdependence of Design and Construction of Large Span Shells for Industrial and Civic Buildings, Leningrad.

KABIR H. R. H. (1994) ‘A shear locking free robust isoparametric three-node triangular element for general shells’ Comp. Struct., 51, 425–436.

KABIT H. R. H. (1992)‘A shear-locking free isoparametric three-node triangular element for moderately-thick and thin plates’ Comp. Struct., 35, 503–519.

KASSEGNE S. K. (1992), Layerwise Theory for discretely Stiffened Laminated Cylindrical Shells, Virginia Polytechnic Institute and State University.

KLINKEL S., GRUTTMANN F., WAGNER W., 1999, A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures, Computers & Structures, vol 71. pp. 43-62.

LAETHEM, M. VAN et al. (1984). The use of boundary elements to represent the far field in soil-structure interaction. Nuclear Engineering and Design, vol. 78, pp 313-327, North-Holland Publishing Division.

LEE J. D., 1980, Three dimensional finite element analysis of layered fiber-reinforced composite materials. Computers & Structures, v 12, n 3, pp. 319-339.

LIBRESCU L., KHDEIR A. A., and REDDY J. N., A Comprehensive Analysis of the State of Elastic Anisotropic Flat Plates Using Refined Theories, Acta Mechanica, 70, 57-81 (1987).

LOVE, A.E.H. (1927). A treatise on the mathematical theory of elasticity. General Publishing Company Ltd, 4a edição.

MAIER, G.; NOVATI, G. (1987). Boundary element elastic analysis by a successive stiffness method. Int. J. for Numerical and Anal. Methods in Geomechanics, v.11, p. 435-447.

MANOLIS, G.D. and BESKOS, D.E. (1981). Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform. Int. J. Num. Meth. Engng., v. 17, pp. 573-599.

MANOLIS, G.D. and BESKOS, D.E. (1988). Boundary element methods in elastodynamics. Unwin Hyman, London-UK.

MENDONÇA A.V. (2002). Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras constantes: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B.. Decomposition of the stiffness matrix of the shear triangular element. Submitted to International Journal of Numerical Methods in Engineering.

MENDONÇA, A.V.; MENEZES R. J.; VIANA, H. R.G.. Decomposition of the mass matrix of shear triangular element. Submitted to Journal of Sound and Vibration.

MENEZES R. J. (2008). Sobre análise estática e dinâmica de problemas de placas e cascas: ambientes amigáveis ao usuário com o método dos elementos finitos. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFPB, João Pessoa.

MENEZES R. J.; MENDONÇA, A. V. Análise elastostática de dutos utilizando-se um elemento finito de casca cilíndrica: Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia CILAMCE 2009, 2009, Armação dos Búzios.

MINDLIN, R.D. (1936). Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. J. Physics, v. 7, pp. 195-202.

MOSER, A.P.; FOLKMAN, S. (2008). Buried pipe design. McGraw-Hill 3rd edition.

NAKAGUMA, R.K. (1979). Three dimensional elastostatics using the boundary element method. Southampton. Tese (PhD) - University of Southampton.

NOOR M. A. And DHAR S. A. (2003). Three-Dimensional response of Buried Pipe Under Vehicle Loads. New Pipeline Technologies, Security, and Safety, 658-665.

PIANG T. H. H. and WANG D. K. C.(1986) 'Hybrid plate elements based on balanced stresses and displacements' Finite Element Method for plates and shell structures, Volume 1, Pineridge Press, Swansea.

POULOS, H.G. (1967). Stresses and displacements in an elastic layer underlain by rough rigid base. Géotechnique, v.17,p. 378-410.

POULOS, H.G. (1969). Settlement of single piles in nonhomogeneous soil. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, v. 105 (5), p. 627-641.

RAMALHO M.A. (1990), Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RAO, K. P., (1978), A rectangular laminated anisotropic shallow thin shell finite element. Computer Methods in Applied

RASTGAAR AAGAAH M., MAHINFALAH M., MAKHAJE JAZAR., G., 2003. Linear static analysis and finite element modeling for laminated composite plates using third order shear deformation theory, Composite Structures, vol. 62, pp 27-39.

REDDY J. N., (1984), A Simple High-Order Theory for Laminated Composite Plates Journal of Applied Mechanics, v51, n 4, p 745-752.

REDDY J. N., (1992), A Layerwise Shell Theory with Applications to Buckling and Vibration of Cross-Ply Laminated Stiffened Circular Cylindrical Shells, Virginia Polytechnic Institute and State University, CCMS-92-01.

REDDY J. N., and SAVOIA M., (1992), Post-buckling of laminated Circular Cylindrical Shells According to the Layerwise Shell Theory, Virginia Polytechnic Institute and State University, CCMS-92-01.

REDDY J. N.,(1989), On Refined computacional models of composite laminates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 27, 631-382.

REDDY J. N.,(1993). An Introduction to the Finite Element Method, Second Edition. McGraw-Hill.

RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. (2009). Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.11, n. 50, p. 57-74, 2009.

RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. (2009). Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.11, n. 50, p. 57-74, 2009.

SANTOS E. S. R, DEVLOO P. R. B. (2001). Desenvolvimento de classes viga e pilar para autocad utilizando linguagem C++ e objectarx em “ IX Congresso Interno de Iniciação Científica da Unicamp”, 27 e 28 de setembro, 2001.

SCOORDELIS, A. C., Lo K. S., (1964). Computer Analisys of Cylinder Shells. Journal of American Concrete Institute. Vol 61, May.

SIMO J. C., FOX D. D. and RIFAI M. S., (1989) On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 73, 53-92.

SPANGLER, MG. (1941): The Structural Design of Flexible Pipe Culverts, The Iowa State College Bulletin, n.30, Vol. XL, Iowa Engineering Experimental Station, Iowa State College.

SPECK, H. J. (2001). Avaliação Comparativa das Metodologias Utilizadas em Programas de Modelagem Sólida. 203 f. Dissertação (Mestrado em engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SPECK, H. J. Proposta de método para facilitar a mudança de técnicas de projetos: da prancheta à modelagem sólida (CAD) para empresas de engenharia de pequeno e médio porte. 2005. 185 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SWOBODA, G.; et al. (1987). Rheological analysis of tunnel excavation by means of coupled finite element (FEM) boundary element (BEM) analysis. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 11(2):115-129.

SYDENSTRICKER R. M., COUTINHO A.L.G.A. and LANDAU L. (1995) ‘Pseudoconsistent load vector and mass matrix for the discrete Kirchhoff triangle and the discrete shear triangle elements’. Comm. Num. Meth. Eng., 11, 317-330.

SYDENSTRICKER R. M., LANDAU L. (2000) A Study of some triangular discrete Reisner-Mindlin plate and Shell Elements, Computers and Structures, Vol 78. 21-33.

TIMOSHENKO S. P., WOIONOWSKY-KRIEGER S., 1959, Theory of Plates and Shells 2d, Edition McGraw-Hill, New York,.

TOCHER J. L, ‘Analysis of Plate Bending Using Triangular Elements’, University of California, Berkeley, Ph.D. Dissertation, 1962.

TOLSON S., ZABARAS N., 1991, Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates, Computers & Structures, v. 38, n3, p. 361-376.

TSAI S. W., (1965), Strength Characteristics of Composite Materials, Washington: NASA, April 1965. Report CR-224, 95 p.

VENTURINI, W.S. (1988). Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos. Tese (Livre-Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VIEIRA C. S., (2009). Aplicação do acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos para a análise bidimensional da interação solo-estrutura. Maceió. Tese (Livre-Docência) – Universidade Federal de Alagoas, UFAL.

WATKINS, R.K., SPANGLER, M.G. (1958): Some Characteristics of the Modulus at Passive Resistance of Soil: A Study of Similitude, Highway Research Board. Proceedings of the 37th Annual Meeting, Vol. 37, pp 576-583.

WATKINS, R.K.; ANDERSON, L.R. (1999). Structural mechanics of buried pipes. CRC Press.

WEARING J. L., BURSTOW M. C., 1994, Elasto-Plastic analysis using a coupled boundary element finite element technique, Engineering Analysis with Boundary Elements v 14, n 1, p 39-49.

WOO K. S., HONG C. H., BASU P. K., 2003, Materially and geometrically nonlinear analysis of laminated anisotropic plates by p-version of FEM, Computers & Structures, vol 81, pp 1653-1662.

WU C. H., TAUCHERT T. R., 1980, Thermoelastic analysis of laminated plates. 2: Antisymmetric cross-ply and angle-ply laminates Journal of Thermal Stresses 3 (3), 365-

378.

ZHANG W, EVANS KE. (1988) Effect of changes in elastic constants on the strength of composites, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, volume 23, no. 4, pages 213-221.

ZHANG W, EVANS KE. (1988) Numerical prediction of the mechanical properties of anisotropic composite materials, Computers and Structures, volume 29, no. 3, pages 413-422.

ZHANG W, EVANS KE. (1988) Strain-based tensor polynomial failure criterion for anisotropic materials, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, volume 23, no. 4,