



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
-Mestrado-Doutorado-

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA NO ESCOAMENTO
BIDIMENSIONAL LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES EM VARIÁVEIS
PRIMITIVAS VIA GITT**

Por

Mabel de Moraes Lopes

*Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para a
Obtenção do Grau de Mestre*

João Pessoa-PB

Setembro, 2012.

MABEL DE MORAIS LOPES

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA NO ESCOAMENTO
BIDIMENSIONAL LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES EM VARIÁVEIS
PRIMITIVAS VIA GITT**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Carlos Antônio Cabral dos Santos

João Pessoa-PB

Setembro, 2012.

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA NO ESCOAMENTO
BIDIMENSIONAL LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES EM VARIÁVEIS
PRIMITIVAS VIA GITT**

por

Mabel de Moraes Lopes

Dissertação aprovada em 28 de setembro de 2012

Período letivo 2012.2

Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

Orientador - UFPB

Prof. Dr. Jacques César dos Santos

Examinador Interno - UFPB

Prof. Dr. Laurivan da Silva Diniz

Examinador Externo - IFPB

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus pais Osnilvan e Francisca, pela educação fornecida, pela paciência e força que sempre me deram.

Aos meus irmãos, Moab e Mayson.

Ao meu namorado Maurício, pelo companheirismo, paciência, compreensão, incentivo e auxílio nos momentos difíceis. E pelo sentimento que construímos durante essa árdua jornada de estudos.

A toda minha família e amigos.

Dedico em especial a minha avó Nazareth Lopes (*em memória*) , que foi a grande incentivadora dos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela infinita bondade e a nossa senhora pela sua intercessão.

A CAPES, pelo suporte financeiro fornecido.

Ao Prof. Carlos Antônio Cabral dos Santos, pela orientação fornecida, confiança depositada, e principalmente pela amizade construída.

Ao Prof. Jacques César dos Santos, pela confiança depositada, a qual foi fundamental no meu ingresso no Mestrado em Engenharia Mecânica.

Aos amigos da graduação em especial, Carol, Thiago, Paulo, Manoel e Jarbson pela amizade construída e pelas horas que convivemos juntos estudando e ao mesmo tempo nos divertindo.

Aos professores Eduardo, Sales, Mário Assad (*em memória*) pelo incentivo e apoio que tive durante a graduação.

Aos funcionários do Les e da Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela atenção prestada.

Ao professor Marinaldo pelo grande apoio prestado na programação utilizada na dissertação.

Aos colegas do mestrado em especial a, Thiago, Igor, Kleber, Allyson e Marcos César pela caminhada que enfrentamos juntos e pela amizade que se fortaleceu.

E aos demais que , de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA NO ESCOAMENTO
BIDIMENSIONAL LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES EM VARIÁVEIS
PRIMITIVAS VIA GITT**

RESUMO

No presente trabalho a convecção forçada interna no escoamento laminar em desenvolvimento simultâneo é estudada aplicando a Técnica da Transformada Integral Generalizada para produzir uma solução híbrida para os campos de velocidade, pressão e temperatura em dutos circulares. As equações da Continuidade, de Navier-Stokes, de Poisson e da Energia são formuladas utilizando variáveis primitivas, sabendo-se que a equação de Poisson foi obtida a partir de algumas manipulações matemáticas feitas na equação de Navier-Stokes. A transformação integral é aplicada nas equações da quantidade de movimento na direção x , de Poisson e na equação da energia, e as equações resultantes são resolvidas com a subrotina numérica do IMSL, DBVPFD recuperando o potencial original para cada perfil em estudo. Assim é possível encontrar uma solução para o sistema de equações em termos de uma expansão de autofunções, que para dutos circulares, as autofunções serão funções de Bessel. Em seguida resultados de interesse prático são calculados e exibidos graficamente como: Número de Nusselt e fRe e estudos da convergência dos perfis de velocidade, velocidade média, temperatura, temperatura média, pressão e pressão média no centro do duto são analisados. Os resultados são comparados com os dados disponíveis na literatura para validação e ajustes do modelo.

Palavras-chave: Navier-Stokes, Convecção Forçada, Variáveis Primitivas, Fluido Newtoniano, GITT.

ANALYSIS OF THE FORCED CONVECTION IN THE BIDIMENSIONAL LAMINAR FLOW IN CIRCULAR DUCTS IN PRIMITIVE VARIABLE BY GITT

ABSTRACT

In this study the forced convection in the laminar flow in simultaneous developing is studied by applying the Generalized Integral Transform Technique to provide a hybrid analytical solution for the fields of velocity, pressure and temperature in circular ducts. The Continuity, Navier-Stokes, Poisson and Energy equations are formulated using primitive variables, knowing that the Poisson Equation was obtained from some mathematical manipulation made on the Navier-Stokes equations. The integral transformation is done in the Momentum equation in x , Poisson and energy equations, and the resulting equations are solved using the IMSL, DBVPFD subroutines and recovering the original potential for each profile studied. In this way it is possible to find a solution to the system by means of an expansion in terms of convenient eigenfunctions, to circular ducts, the eigenfunctions will be Bessel functions. In the following, some results from a practical point of view will be calculated and exhibited graphically such as: The Nusselt number, the fRe value, the study of the convergence profile of the velocity field, the mean velocity, the temperature, the mean temperature, pressure and the mean pressure in the middle of the duct will be analyzed. The results will be compared with the ones found in the literature to validate and adjust the model.

Keywords: Navier-Stokes, Forced Convection , Primitive Variables, Newtonian Fluid, GITT.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	ESCOPO DO TRABALHO	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL	4
2.2	CONVECÇÃO FORÇADA	5
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	9
3.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO	9
4	APLICAÇÃO DA GITT	15
4.1	ESCOLHA DO PROBLEMA AUXILIAR	15
4.1.1	Problema auxiliar para o campo de velocidade	15
4.1.2	Escolha do problema auxiliar para o campo de pressão	16
4.1.3	Escolha do problema auxiliar para o campo de temperatura	17
4.2	DETERMINAÇÃO DOS PARES TRANSFORMADA-INVERSA	17
4.3	PARÂMETROS SIGNIFICATIVOS	18
4.3.1	Cálculo da velocidade transversal	19
4.3.2	Cálculo da velocidade média	19
4.3.3	Cálculo do fator de atrito e Pressão Média	20
4.3.4	Cálculo da temperatura média e Número de Nusselt	20
4.4	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	21
4.4.1	Transformada da Equação da Quantidade de Movimento em X	21
4.4.2	Transformada da Equação de Poisson	22
4.4.3	Transformada da Equação da Energia	24
4.4.4	Solução do sistema diferencial ordinário	25
4.4.5	Transformação do domínio	26
5	RESULTADOS	29

5.1	TABELAS DE CONVERGÊNCIAS	29
5.2	GRÁFICOS	33
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	39
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Representação do desenvolvimento do perfil hidrodinâmico	9
Figura 5.1	Desenvolvimento da velocidade média ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$	33
Figura 5.2	Desenvolvimento da velocidade dividida pela velocidade média ao longo da coordenada adimensional X no centro do duto para $Re=20$	34
Figura 5.3	Desenvolvimento da Pressão média ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$	35
Figura 5.4	Desenvolvimento da Temperatura média ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$	36
Figura 5.5	Desenvolvimento do produto fRe ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$	37
Figura 5.6	Desenvolvimento do Nusselt Local ao longo da coordenada adimensional X	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Comparação da Velocidade U no centro do canal ao longo de X com condições de entrada $U = 1$ e $V = 0$	29
Tabela 5.2	Convergência da Velocidade $U(X, 0)$ no centro do canal ao longo de X .	30
Tabela 5.3	Convergência da Velocidade média $U_m(X)$	30
Tabela 5.4	Convergência da Pressão $P(X, 0)$ no centro do canal ao longo de X . . .	31
Tabela 5.5	Convergência da Pressão média $P_m(X)$	31
Tabela 5.6	Convergência da Temperatura $\theta(X, 0)$ no centro do canal ao longo de X	32
Tabela 5.7	Convergência da Temperatura média $\theta_m(X)$	32

LISTA DE SÍMBOLO / NOMENCLATURA

A_m	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.46
AA_{ijk}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.55
AB_{ijk}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.36
$AB_{ij\infty}$	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.37
b	Raio do duto [m]
Bi	Número de Biot
C_{in}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.38
CC_{ijk}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.57
$D_{i\infty}$	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.40
E_{ik}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.49
E_{ijk}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.50
F_{ijk}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.51
$F_{ik\infty}$	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.52
$\bar{F}_i$	Coefficiente da Velocidade V definido por 4.25
f	Fator de atrito local definido pela equação 4.27
G_i	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.45
$\bar{G}_i$	Coefficiente definido por 4.31
G_{im}	Coeficientes da transformação integral definido pela equação 4.48
h	Coefficiente de transferência de calor por convecção
J_0, J_1	Funções de Bessel
k	Condutividade Térmica
K_i	Norma das autofunções da temperatura como da em 4.16
M_i	Norma das autofunções da temperatura como da em 4.11
N_i	Norma das autofunções da temperatura como da em 4.6
NP	Número de autovalores Pressão
NT	Número de autovalores Temperatura
NU	Número de autovalores Velocidade
Nu	Número de Nusselt

$p(x,y)$	Campo de pressão dimensional[Pascal]
$P(X,Y)$	Campo de pressão adimensionalizado
p_0	Pressão de entrada [Pascal]
P_0	Pressão de entrada adimensionalizada
$P^*(X,Y)$	Potencial da pressão do campo em desenvolvimento
$P_F(X)$	Filtro da pressão
P_{mat}	Coefficientes da transformação integral definido pela equação 4.44
P_m	Pressão média
$\bar{P}_i$	Campo de pressão transformado
PD_{ij}	Coefficientes da transformação integral definidos peloa equação 4.56
Pe	Número de Peclet
Pr	Número de Prandlt
Q_{ik}	Coefficientes da transformação integral definidos peloa equação 4.47
Re	Número de Reynolds
Re_H	Número de Reynolds Hidráulico
$T(x,y)$	Campo de temperatura
T_0	Temperatura de entrada
$u(x,y)$	Campo de velocidade na entrada [m/s]
u_0	Campo de velocidade na entrada [m/s]
$U(X,Y)$	Componente de velocidade longitudinal adimensional filtrado
$U_\infty(Y)$	Campo de velocidade completamente desenvolvido
$U^*(X,Y)$	Potencial da velocidade do campo em desenvolvimento
$\bar{U}_i(X)$	Componente de velocidade longitudinal transformado
U_m	Velocidade média
x	Coordenada dimensional longitudinal [m]
X	Coordenada adimensional longitudinal
y	Coordenada dimensional transversal [m]
Y	Coordenada adimensional transversal

Símbolos Gregos

α	Difusividade térmica
β_i	Autovalores associado ao campo de pressão
δ_{in}	Delta de Kronecker
ΔT	Variação de temperatura
ζ_i	Autofunções do problema auxiliar para a componente da temperatura
$\tilde{\zeta}_i$	Autofunções normalizadas
η	contração de escala
$\theta(X, Y)$	Campo de temperatura adimensionalizado
$\bar{\theta}(X)$	Campo de temperatura transformado
θ_m	Temperatura média
μ_i	Autovalores associado ao campo de velocidade
μ	Viscosidade dinâmica newtoniana [Pa.s]
ν	Viscosidade cinemática [$\frac{m^2}{s}$]
ρ	Massa específica [$\frac{kg}{m^3}$]
τ_w	Tensão de cisalhamento na parede
ϕ_i	Autofunções do problema auxiliar para a componente de velocidade longitudinal
$\tilde{\phi}_i$	Autofunções normalizadas
ψ_i	Autofunções do problema auxiliar para a componente da pressão
$\tilde{\psi}_i$	Autofunções normalizadas
ω_i	Autovalores associado ao campo de temperatura

Subscritos

F	Relativo ao filtro
o	Relativo a posição de entrada
i, j, k	Índice da ordem dos autovalores
∞	referente ao valor da grandeza no escoamento completamente desenvolvido

Superscritos

- * Relativo aos potenciais de velocidade e pressão adimensionais
- ~ Relativo à normalização das autofunções
- Relativo ao termo transformado

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Devido a grande importância nas aplicações industriais e materiais, o estudo de escoamento de fluidos vem sendo realizado e bastante discutido atualmente. O tipo de transporte de calor que envolve o movimento de um fluido é a convecção, e aqui estamos interessados em estudar a convecção forçada interna, onde o fluido é forçado a escoar dentro de um tubo por ação de elementos externos como uma bomba ou um ventilador.

A transferência de calor por convecção é um fenômeno complexo, pelo fato de envolver os efeitos simultâneos da transferência de calor e o escoamento do fluido. O movimento do fluido em si, pode ser visto como um causador da transferência de calor, razão pela qual a taxa de transferência de calor de um fluido é superior em convecção do que numa situação de condução pura. Na verdade, é fácil verificar que a taxa de transferência de calor varia diretamente com a velocidade do escoamento.

O estudo sobre escoamento laminar em desenvolvimento simultâneo tem sido de grande interesse como mostrado pela vasta literatura disponível principalmente para os projetistas de trocadores de calor.

As equações da Continuidade, Navier-Stokes e Energia fornecem uma descrição compreensiva da transferência de energia em um fluido em movimento. Estas equações apresentam dificuldades matemáticas por possuir termos não-lineares tornando-se viável o uso das técnicas híbridas numérico-analíticas de solução, onde estas tem permitido a abertura de novos rumos em pesquisas envolvendo escoamentos (em regimes laminares ou turbulentos). A implementação numérica torna-se viável graças ao desenvolvimento de computadores digitais com velocidade de processamento cada vez maiores possibilitando um menor custo computacional.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada é um método híbrido (analítico-numérico) para problemas modelados a partir de equações diferenciais parciais que vem sendo empregado com sucesso nos últimos anos, principalmente em problemas de transferência de calor.

O objetivo da mesma é transformar um sistema de equações diferenciais parciais original em um sistema de equações diferenciais ordinárias, através da eliminação de dependências espaciais, com a vantagem de produzir uma solução mais aprimorada e mais econômica, além de permitir um controle pré-estabelecido sobre o erro dos resultados.

Os passos básicos para aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada(GITT) são:

1. Escolha de um problema auxiliar apropriado, que contenha o maior número de informações possíveis a respeito do problema original;
2. Obtenção de um par transformada-inversa adequado que possibilite a transformação associada e a ortogonalidade das autofunções;
3. Transformação de um sistema de equações diferenciais parciais num sistema de equações diferenciais ordinárias, através de operadores que possibilitem a eliminação de uma ou mais variáveis parciais;
4. Resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, após o truncamento da série infinita em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, utilizando rotinas numéricas disponíveis em bibliotecas científicas, obtendo-se os potenciais transformados;
5. Utilizar a fórmula de inversão definida anteriormente, a fim de obter o potencial original.

O presente trabalho pretende aplicar a GITT na solução em termos de variáveis primitivas das equações de Navier-Stokes, Poisson e da Energia, no escoamento laminar, permanente em dutos circulares.

1.2 ESCOPO DO TRABALHO

Este trabalho está subdividido em 5 capítulos, cujos assuntos são:

Capítulo I.Introdução: apresenta-se uma motivação abordando os principais aspectos da pesquisa desenvolvida, alguns conceitos e justificativa para o estudo de transferência de calor por convecção e aplicação da GITT.

Capítulo II. Revisão Bibliográfica: apresenta-se algumas referências sobre o tema abordado e uma breve revisão sobre a Técnica da Transformada Integral Generalizada, destacando as etapas básicas e aplicação da mesma.

Capítulo III. Formulação Matemática :apresenta-se neste capítulo a formulação matemática do problema estudado, abordando as equações governantes em coordenadas cilíndricas com suas devidas considerações.

Capítulo IV. Aplicação da (GITT): Aplica-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada na resolução do problema proposto.

Capítulo V. Análise dos resultados: Apresenta-se uma análise dos resultados para o campo de velocidade, pressão e temperatura , as tabelas de convergências e discussões em relação ao problema em estudo.

Capítulo VI. Conclusões:apresenta-se as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL

No início da década de 70, a Rússia e outros países do Leste Europeu avançaram no desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos, ao mesmo tempo que os Estados Unidos e Europa desenvolviam métodos puramente numéricos. Percebendo o grande esforço computacional utilizado nos métodos puramente numéricos assim como nas manipulações matemáticas, os dois grupos buscaram unir-se e desenvolver alternativas para o tratamento e solução das equações diferenciais parciais desenvolvendo assim como exemplo dessas alternativas a Técnica da Transformada Integral Generalizada.

Desde seu aparecimento a Técnica da Transformada Integral Generalizada vem se mostrando bastante eficiente permitindo a solução de um crescente número de problemas antes não transformáveis e que assim não podiam ser resolvidos pela então Técnica da Transformada Integral Clássica (MIKHAILOV e ÖZISIK, 1984). Este por sua vez é um método puramente analítico de soluções de problemas difusivos. A grande limitação desta técnica se deve a impossibilidade de resolver sistemas acoplados, implicando na resolução de problemas lineares transformáveis, ou seja, problemas que podem ser transformados em sistemas desacoplados, ou que apresentam problema auxiliar de fácil resolução. Como a maioria dos problemas existentes são não lineares, sentiu-se a necessidade de aperfeiçoar a técnica e assim surgiu a GITT com o trabalho de (ÖZISIK e MURRAY, 1974) sobre a solução de problemas difusivos com coeficientes nas condições de contorno variáveis.

A GITT proporciona soluções híbridas numérico-analíticas para problemas de difusão e de convecção-difusão cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas. Desde então a aplicação da GITT tem solucionado problemas de classes mais gerais, tanto lineares, quanto não-lineares. O estudo mais detalhado e completo sobre GITT foi feito por COTTA (1993).

Uma característica importante desta metodologia, e que a diferencia de outros métodos numéricos, é a garantia de convergência satisfatória das soluções para ordens crescentes

de truncamento das séries. Este comportamento indica que é possível obter-se soluções com um número de algarismos significativos convergidos para um determinado número de termos nas expansões. Pela sua natureza híbrida, a Técnica da Transformada Integral Generalizada apresenta vantagens com relação a métodos puramente numéricos, pois retém as mesmas bases de uma solução analítica, não necessitando de discretização de domínio nem geração de malha, (LIMA, 2000).

Podemos encontrar na literatura diversos trabalhos que utilizam a GITT para resolver problemas dos tipos:

- **Problemas com coeficientes variáveis na equação;**
- **Problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno;**
- **Problemas de contorno variáveis;**
- **Problemas que envolvem problemas auxiliares difíceis;**
- **Problemas Não-Lineares.**

2.2 CONVECÇÃO FORÇADA

Para uma melhor análise sobre o escoamento de fluidos, é imprescindível compreender a importância e o significado da mecânica dos fluidos. A mecânica dos fluidos lida com o comportamento de fluidos em repouso e em movimento. O conhecimento e a compreensão dos princípios básicos e dos conceitos da mecânica dos fluidos são essenciais para análise de qualquer sistema onde o fluido é o meio operante. O projeto de todos os meios de transportes, virtualmente, requer aplicação dos princípios da mecânica dos fluidos. Aí se incluem aeronaves para vôos subsônico e supersônico, aircrafts, navios, submarinos e automóveis. O projeto de propulsão para vôos espaciais, assim como para foguetes de brinquedo, também baseia-se no princípio da mecânica dos fluidos. Hoje, é comum a realização de estudos de modelos para determinar as forças aerodinâmicas atuando sobre edifícios e estruturas e os campos de escoamento em torno deles. Isto inclui o estudo de arranha-céus, estádios, chaminés e grandes shoppings. O sistema circulatório do corpo humano é, essencialmente, um sistema fluido. Não causa surpresa que o projeto de corações e pulmões artificiais, de auxiliares mecânicos da respiração e de outros dispositivos do gênero, fundamentem-se no princípio da

mecânica dos fluidos. Na mecânica projetam bombas, turbinas, canais de irrigação, motores de combustão interna, compressores de ar, equipamentos de ar condicionado, equipamentos de controle de poluição do ar e da água, usinas de energia, dentre outras.

O desenvolvimento da mecânica dos fluidos se deu no final do século XVIII com a criação da Escola de Engenharia Francesa liderada por Riche de Prony (1755-1839). Prony e seus associados em Paris, na Ecole Polytechnique (escola politécnica) e a Ecole Pontset Chaussées (escola de pontes e açudes), foram os primeiros a incluir cálculo e teoria científica no currículo de engenharia, que se tornou um modelo para o resto do mundo. Antonie Chezy (1718-1798), Louis Navier (1785-1836), Gaspard Coriolis (1792-1843), Henry Darcy (1803-1858) e muitos outros que contribuíram para a engenharia e teoria dos fluidos foram estudantes e/ou professores nessas escolas. Em meados do século XIX, o médico Jean Poiseuille (1799-1869) mediu com precisão o escoamento em tubos capilares de fluidos múltiplos; na Alemanha, Götthilf Hagen (1797-1884) definiu a diferença entre escoamento laminar e turbulento em tubulações, na Inglaterra, Lord Osborne Reynolds (1842-1912) continuou esse trabalho e desenvolveu o número adimensional que leva o seu nome. De modo similar, em paralelo ao trabalho inicial de Navier, George Stokes (1819-1903) completou as equações gerais do movimento dos fluidos com atrito que levam seus nomes, (ÇENGEL E CIMBALA, 2007).

As equações de Navier-Stokes são de fundamental importância para o estudo de escoamento de fluidos. Estas equações foram derivadas inicialmente por M. Navier em 1827 e por S.D. Poisson em 1831, baseando-se num argumento envolvendo forças intermoleculares. Mais tarde as mesmas equações foram derivadas sem o uso de nenhuma dessas hipóteses por B. de Saint Venant em 1843 e por G.G. Stokes em 1945.

As equações de Navier-Stokes juntamente com a equação da energia nos permite estudar a convecção forçada interna em um escoamento em desenvolvimento simultâneo. As camadas limites hidrodinâmica e térmica são desenvolvidas fazendo com que o perfil de velocidade e temperatura se tornem parabólicos e permitindo assim um estudo mais detalhado na região completamente desenvolvida.

A análise de estudos envolvendo escoamentos de fluidos usando ferramentas computacionais tem sido uma área em constante desenvolvimento, com diferentes campos de aplicações e com progresso no tratamento das equações com formulações seja com visão em camada limite ou com o uso das equações de Navier-Stokes.

A solução de problemas em engenharia envolvendo escoamentos de fluidos e trans-

ferência de calor geralmente são mais complicados por se tratar de equações diferenciais parciais que raramente possuem soluções analíticas. Sendo assim, é necessário o uso de métodos numéricos ou métodos de natureza híbrida, como os analítico-numéricos para a obtenção dos potenciais desejados. O aumento da capacidade dos computadores disponíveis tem facilitado o desenvolvimento e os testes de modelos cada vez mais sofisticados e completos para a simulação dos escoamentos.

Alguns trabalhos que utilizam a Transformada Integral Generalizada no estudo de escoamentos ao longo de dutos podem ser citados como:

MEDEIROS(1998) estuda a convecção forçada interna no escoamento em desenvolvimento simultâneo com variação senoidal no perfil de temperatura de entrada em canais de placas planas e dutos circulares. A GITT foi usada para fornecer uma solução híbrida semi-analítica da equação da energia que está sujeita a condição de contorno do 5º tipo, considerando os efeitos da capacitância térmica da parede, como também para resolver as equações da camada limite com formulação em variáveis primitivas e em função corrente para placas planas, e para dutos circulares com formulação em variáveis primitivas.

NASCIMENTO *et al* (2006) utilizaram as equações de conservação da quantidade de movimento com formulação em variáveis primitivas em um escoamento laminar hidrodinamicamente em desenvolvimento de um fluido Não-Newtoniano dentro de um tubo circular. Os resultados para o campo de velocidade e o produto do fator de atrito por Reynolds são calculados para diferentes lei de potência.

VERONESE (2006) estudaram a convecção forçada transiente no escoamento de um fluido Não-Newtoniano em desenvolvimento com uma variação senoidal no perfil de temperatura na entrada em canais de placas planas paralelas . A GITT é utilizada para fornecer uma solução híbrida semi-analítica da equação da energia, sujeita a uma condição de contorno no 5º tipo a qual considera os efeitos da convecção externa e da capacitância térmica na parede. No trabalho é utilizado também a lei de potência.

LIMA *et al* (2007) aplicaram a GITT na solução do problema de um escoamento laminar em um canal de placas paralelas formulado pelas equações de estado estacionário de Navier-Stokes e Continuidade com representação matemática em variáveis primitivas. Onde é considerada a condição uniforme e irrotacional do escoamento na entrada do canal. Os resultados numéricos do campo de velocidade longitudinal e o fator de atrito são relatados para mostrar o comportamento da convergência dos mesmos na proposta da GITT e comparados

com resultados anteriores.

SILVA *et al* (2009) resolveram as equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas formuladas em termos de função corrente. A GITT foi aplicada para resolver o problema bidimensional estacionário, laminar, no escoamento de um fluido Newtoniano na região em desenvolvimento de um tubo circular. O problema considera duas condições de entrada, perfil de velocidade uniforme representando o escoamento paralelo e vorticidade zero caracterizando escoamento irrotacional na entrada.

ANDRADE (2010) utiliza as equações de Navier-Stokes para estudar o escoamento bidimensional, laminar, de um fluido newtoniano em um duto circular. O problema é formulado a partir da utilização das variáveis primitivas e a Técnica da Transformada Integral Generalizada é empregada para produzir soluções híbridas para os campos de velocidade e pressão.

CAPÍTULO III

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

O modelo abaixo representado pela figura serve de base para uma melhor compreensão do problema bidimensional, laminar, em um duto circular, com perfis de velocidade, pressão e temperatura uniforme na entrada. Considere o desenvolvimento simultâneo de um escoamento laminar de um fluido Newtoniano e incompressível em um duto circular. As propriedades físicas serão consideradas constantes e os efeitos de dissipação viscosa e convecção natural serão considerados desprezíveis. Este problema será formulado em variáveis primitivas e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) será utilizada para fornecer uma solução híbrida (analítico-numérica) para a Equação da Continuidade, Navier-Stokes, Poisson e da Energia.

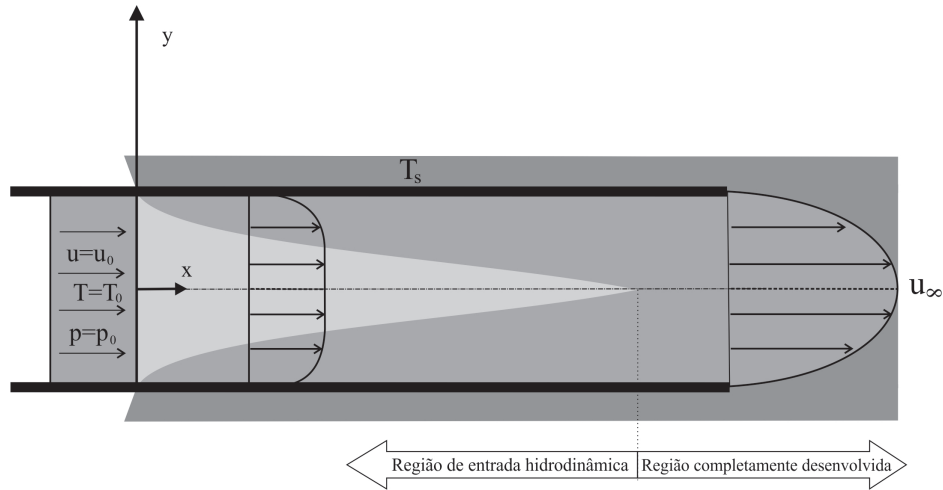


Figura 3.1: Representação do desenvolvimento do perfil hidrodinâmico

As equações do problema que serão utilizadas abaixo, são obtidas a partir das seguintes considerações:

- Impermeabilidade e não-deslizamento na parede do duto,
- Regime permanente,

- Velocidade longitudinal (u) e velocidade transversal (v).

Seja $x > 0$, $0 < y < b$. Considere a seguinte notação que será utilizada neste trabalho, onde $u := u(x, y)$, $v := v(x, y)$, $p := p(x, y)$ e $T := T(x, y)$. O modelo matemático para o problema faz uso das seguintes equações:

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial [yv]}{\partial y} = 0. \quad (3.1)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção x

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]. \quad (3.2)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção y

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial (yv)}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]. \quad (3.3)$$

Equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 2\rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v^2}{y^2} \right]. \quad (3.4)$$

Equação da Energia

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]. \quad (3.5)$$

Nas equações acima, consideraremos as seguintes condições de contorno e de entrada:

Para $x = 0$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0 \quad ; \quad p(x, y) = p_0 \\ v(x, y) &= 0 \quad ; \quad T(x, y) = T_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para $y = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = 0 \\ v(x, y) &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_\infty(y) \quad ; \quad \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = \frac{\mu}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \frac{\partial u_\infty(y)}{\partial y} \right] \\ v(x, y) &= 0 \quad ; \quad T(x, y) = T_\infty \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para $y = b$

$$\begin{aligned} u(x, y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y} \frac{\partial (y v(x, y))}{\partial y} \right] \\ v(x, y) = 0 \quad ; \quad h[T - T_\infty] + k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Adimensionalizaremos 3.1 a 3.9 por meio das seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{b} \quad ; \quad Y = \frac{y}{b} \quad ; \quad U(X, Y) = \frac{u(x, y)}{u_0} \quad ; \quad V(X, Y) = \frac{v(x, y)}{u_0} \quad ; \quad P = \frac{p}{\rho u_0^2} \\ \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \quad ; \quad Re = \frac{u_0 b}{\nu} \quad ; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad ; \quad Pe = Re Pr \quad ; \quad Bi = \frac{hb}{k}. \end{aligned}$$

A adimensionalização utilizada é bastante importante pois permite aplicar os resultados conseguidos a uma dada superfície com um conjunto de condições a outras superfícies semelhantes a primeira, com um conjunto de condições totalmente diferentes. Essas condições podem variar, por exemplo, com a natureza do fluido e com as condições da superfície. E assim ao invés de trabalhar com inúmeros parâmetros originais passamos a trabalhar com poucos grupos adimensionais.

As equações agora serão válidas em $0 < Y < 1$, $X > 0$ e denotaremos por $U := U(X, Y)$, $V := V(X, Y)$, $P := P(X, Y)$ e $\theta := \theta(X, Y)$.

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{Y} \frac{\partial [YV]}{\partial Y} = 0 \quad (3.10)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção X

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right] \quad (3.11)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Y

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{Y} \frac{\partial (YV)}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right] \quad (3.12)$$

Equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 2 \left[\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{V^2}{Y^2} \right] \quad (3.13)$$

Equação da Energia

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right] \quad (3.14)$$

As condições de contorno e entrada tornam-se:

Para $X = 0$

$$\begin{aligned} U(X,Y) &= 1 \quad ; \quad P(X,Y) = P_0 \\ V(X,Y) &= 0 \quad ; \quad \theta(X,Y) = 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para $Y = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(X,Y)}{\partial Y} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial P(X,Y)}{\partial Y} = 0 \\ V(X,Y) &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para $X \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} U(X,Y) &= U_\infty(Y) \quad ; \quad \frac{\partial P(X,Y)}{\partial X} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U_\infty(Y)}{\partial Y} \right) \right] \\ V(X,Y) &= 0 \quad ; \quad \theta(X,Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para $Y = 1$

$$\begin{aligned} U(X,Y) &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial P(X,Y)}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial (YV(X,Y))}{\partial Y} \right] \\ V(X,Y) &= 0 \quad ; \quad Bi\theta(X,Y) + \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quando o problema original possui condições de contorno não homogêneas na variável onde se aplicará a GITT , filtros matemáticos deverão ser utilizados viabilizando o uso da técnica. Daí temos:

Filtro para o campo de Velocidade

$$U(X,Y) = U^*(X,Y) + U_\infty(Y) \quad (3.19)$$

onde

$U^*(X,Y)$ é o potencial de velocidade do campo em desenvolvimento

$U_\infty(Y)$ é o potencial de velocidade do campo completamente desenvolvido

Em coordenadas cilíndricas

$$U_\infty(Y) = 2(1 - Y^2) \quad (3.20)$$

Filtro para o campo de Pressão

$$P(X,Y) = P^*(X,Y) + P_F(X,Y) \quad (3.21)$$

onde

$P^*(X, Y)$ é o potencial da Pressão do campo em desenvolvimento

$P_F(X, Y)$ é o filtro obtido substituindo as condições de contorno em $Y=1$ na Equação da Quantidade de Movimento na Direção Y .

$$P_F(X, Y) = P_0 + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial(YV(X, Y))}{\partial Y} \right] = P_0 - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} \right] \quad (3.22)$$

As equações filtradas tornam-se:

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} + \frac{1}{Y} \frac{\partial(YV)}{\partial Y} = 0 \quad (3.23)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção X

$$\begin{aligned} U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + U_\infty \frac{\partial U^*}{\partial X} + V \frac{\partial U^*}{\partial Y} + V \frac{\partial U_\infty}{\partial Y} = \\ - \frac{\partial P^*}{\partial X} - \frac{\partial P_F}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \left(\frac{\partial U^*}{\partial Y} + \frac{\partial U_\infty}{\partial Y} \right) \right] + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Y

$$(U^* + U_\infty) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P^*}{\partial Y} - \frac{\partial P_F}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{Y} \frac{\partial(YV)}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right] \quad (3.25)$$

Equação de Poisson

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P_F}{\partial X^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial P^*}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial P_F}{\partial Y} \right) = \\ 2 \left[\frac{\partial U^*}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U^*}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U_\infty}{\partial Y} - \frac{V^2}{Y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Equação da Energia

$$U^* \frac{\partial \theta}{\partial X} + U_\infty \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right] \quad (3.27)$$

As condições de contorno e entrada filtradas tornam-se:

Para $X = 0$

$$\begin{aligned} U^*(X, Y) = 1 - U_\infty(Y); \quad P^*(X, Y) = 0 \\ V(X, Y) = 0; \quad \theta(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para $Y = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial P^*(X, Y)}{\partial Y} = 0 \\ V(X, Y) = 0; \quad \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para $X \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} U^*(X, Y) &= 0; \quad \frac{\partial P^*(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U_\infty(Y)}{\partial Y} \right) \right]; \\ V(X, Y) &= 0; \quad \theta(X, Y) = 1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Para $Y = 1$

$$\begin{aligned} U^*(X, Y) &= 0; \quad \frac{\partial P^*(X, Y)}{\partial Y} = 0 \\ V(X, Y) &= 0; \quad Bi\theta(X, Y) + \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DA GITT

Neste capítulo, aplicaremos o método GITT nas equações 3.24, 3.26 e 3.27 com suas respectivas condições de contorno e entrada. O capítulo se divide como segue: Na Seção 1, será feita a escolha de um problema auxiliar conveniente para cada equação, cujas soluções possuem uma propriedade de ortogonalidade. Na Seção 2, iremos decompor as soluções das equações em termos das soluções dos respectivos problemas auxiliares descritos na Seção 1, a qual denotaremos de **inversa**. Em seguida usaremos a propriedade de ortogonalidade na inversa e obteremos a forma **transformada**. Na Seção 3 será feito o cálculo de alguns parâmetros como a velocidade transversal, calcular velocidade média, fator de atrito, pressão média, temperatura média e número de Nusselt para comparar com os resultados já existentes na literatura.

4.1 ESCOLHA DO PROBLEMA AUXILIAR

O problema auxiliar será um problema de Sturm-Liouville cujas soluções, para coordenadas cilíndricas, são dadas em termos de funções de Bessel com algumas propriedades que exibiremos a seguir.

4.1.1 PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE VELOCIDADE

Consideremos o seguinte problema de Sturm-Liouville associado à equação da quantidade de movimento na direção X (3.24):

$$\frac{1}{Y} \frac{d}{dY} \left[Y \frac{d\phi_i(Y)}{dY} \right] + \mu_i^2 \phi_i(Y) = 0, \quad (4.1)$$

com condições de contorno dadas por,

$$\phi_i(1) = 0; \quad \left. \frac{d\phi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} = 0. \quad (4.2)$$

O problema descrito pelas equações (4.1)-(4.2) tem solução analítica dada por:

$$\varphi_i(Y) = J_0(\mu_i Y), \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (4.3)$$

Utilizando as condições de contorno no problema auxiliar, encontramos os autovalores μ_i 's a partir das equações $J_0(\mu_i) = 0$. Mais detalhes sobre as funções de Bessel podem ser encontrados em ÖZISIK (1993).

Um fato importante é que as funções de Bessel descritas possuem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 Y \tilde{\varphi}_i(Y) \tilde{\varphi}_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}, \quad (4.4)$$

onde

$$\tilde{\varphi}_i(Y) = \frac{\varphi_i(Y)}{\sqrt{N_i}}, \quad (4.5)$$

são as **autofunções normalizadas** e N_i é a **norma** definida por:

$$N_i = \int_0^1 Y \varphi_i^2(Y) dY. \quad (4.6)$$

4.1.2 ESCOLHA DO PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE PRESSÃO

Analogamente, definiremos um problema de Sturm-Liouville associada à equação de Poisson (3.26). O problema auxiliar segue:

$$\frac{1}{Y} \frac{d}{dY} \left[Y \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \right] + \beta_i^2 \psi_i(Y) = 0, \quad (4.7)$$

com condições de contorno dadas por:

$$\left. \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} = 0; \quad \left. \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=1} = 0. \quad (4.8)$$

A solução de (4.7)-(4.8) é dada por:

$$\psi_i(Y) = J_0(\beta_i Y) \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (4.9)$$

onde os autovalores β_i 's são raízes da equação $J_1(\beta_i) = 0$.

Como anteriormente, as autofunções normalizadas são

$$\tilde{\psi}_i(Y) = \frac{\psi_i(Y)}{\sqrt{M_i}} \quad (4.10)$$

onde

$$M_i = \int_0^1 Y \psi_i^2(Y) dY, \quad (4.11)$$

com a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\int_0^1 Y \tilde{\psi}_i(Y) \tilde{\psi}_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}. \quad (4.12)$$

4.1.3 ESCOLHA DO PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE TEMPERATURA

O problema auxiliar para o campo temperatura associado a equação da energia (3.27) é da forma:

$$\frac{1}{Y} \frac{d}{dY} \left[Y \frac{d\zeta_i(Y)}{dY} \right] + \omega_i^2 \zeta_i(Y) = 0, \quad (4.13)$$

com condições de contorno

$$\left. \frac{d\zeta_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} = 0; \quad Bi\zeta_i(Y) + \left. \frac{d\zeta_i(Y)}{dY} \right|_{Y=1} = 0. \quad (4.14)$$

A solução de (4.13)-(4.14) segue

$$\zeta_i(Y) = J_0(\omega_i Y) \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (4.15)$$

Os autovalores ω_i 's são raízes da equação $BiJ_0(\omega_i) + \omega_i J_0'(\omega_i) = 0$. A norma é dada por

$$K_i = \int_0^1 Y \zeta_i^2(Y) dY \quad (4.16)$$

e as autofunções normalizadas,

$$\tilde{\zeta}_i(Y) = \frac{\zeta_i(Y)}{\sqrt{K_i}}. \quad (4.17)$$

Ainda temos a seguinte propriedade de ortogonalidade para as autofunções:

$$\int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) \tilde{\zeta}_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}. \quad (4.18)$$

4.2 DETERMINAÇÃO DOS PARES TRANSFORMADA-INVERSA

A solução para os campos de velocidade, pressão e temperatura é então proposta como uma expansão em termos de autofunções que são soluções dos problemas auxiliares para

cada campo em estudo. Daí os pares Transformada-Inversa são construídos e definidos como:

Para o campo de velocidade

As soluções dos problemas em estudo podem ser escritas como uma combinação linear das autofunções obtidas por meio do problema auxiliar. Desta maneira obtemos

- Inversa

$$U^*(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(Y) \bar{U}_i(X). \quad (4.19)$$

- Transformada

$$\bar{U}_i(X) = \int_0^1 Y \tilde{\phi}_i(Y) U^*(X, Y) dY. \quad (4.20)$$

Para o campo de pressão

De forma análoga, obtemos o par transformada-inversa para o campo pressão

- Inversa

$$P^*(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(Y) \bar{P}_i(X) \quad (4.21)$$

- Transformada

$$\bar{P}_i(X) = \int_0^1 Y \tilde{\psi}_i(Y) P^*(X, Y) dY \quad (4.22)$$

Para o campo de temperatura

- Inversa

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_i(Y) \bar{\theta}_i(X), \quad (4.23)$$

e

- Transformada

$$\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) \theta^*(X, Y) dY. \quad (4.24)$$

4.3 PARÂMETROS SIGNIFICATIVOS

Para se fazer uma análise mais detalhada da convecção interna num duto circular será necessário o cálculo de alguns parâmetros.

4.3.1 CÁLCULO DA VELOCIDADE TRANSVERSAL

Faz-se necessário o cálculo da velocidade transversal V para eliminá-la do sistema de equações 3.23 a 3.27 fazendo-se a integração da equação da continuidade 3.23 em relação a Y .

$$\begin{aligned} \int_Y^1 Y \frac{\partial U^*}{\partial X} dY + \int_Y^1 \frac{\partial(YV(X, Y))}{\partial Y} dY &= 0 \\ \int_Y^1 Y \frac{\partial U^*}{\partial X} dY + [YV(X, Y)]_Y^1 &= 0 \\ \int_Y^1 Y \frac{\partial U^*}{\partial X} dY + 1V(X, 1) - YV(X, Y) &= 0 \\ YV(X, Y) &= \int_Y^1 Y \frac{\partial U^*}{\partial X} dY \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} V(X, Y) &= \frac{1}{Y} \int_Y^1 Y \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(Y) \frac{d\bar{U}_i(X)}{dX} dY \\ V(X, Y) &= \frac{1}{Y} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{F}_i(Y) \frac{d\bar{U}_i(X)}{dX}; \quad \bar{F}_i(Y) = \int_Y^1 Y \tilde{\phi}_i(Y) dY \end{aligned}$$

4.3.2 CÁLCULO DA VELOCIDADE MÉDIA

Para calcular a velocidade média iremos integrar o perfil de velocidade e substituí-lo pela inversa 4.19.

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{\int_0^1 Y U(X, Y) dY}{\int_0^1 Y dY} = \frac{\int_0^1 Y (U^*(X, Y) dY + U_{\infty}) dY}{\frac{1}{2}} \\ U_m &= 2 \int_0^1 Y (U^*(X, Y) dY + 2 \int_0^1 Y 2(1 - Y^2) dY \\ U_m &= 1 + 2 \int_0^1 Y \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(Y) \bar{U}_i(X) dY \\ U_m &= 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \bar{F}_i(0) \bar{U}_i(X); \quad \bar{F}_i(0) = \int_0^1 Y \tilde{\phi}_i(Y) dY \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.3.3 CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO E PRESSÃO MÉDIA

O fator de atrito é um parâmetro adimensional que é utilizado para calcular a perda de carga em uma tubulação devido ao atrito. Muitas vezes é necessário o cálculo deste parâmetro para determinar a potência de uma bomba ou de um ventilador usado no escoamento interno.

Por definição o fator de atrito é:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_0^2} \quad (4.27)$$

onde τ_w é a tensão de cisalhamento na parede. Adimensionalizando os termos da equação 4.27 temos:

$$fRe = -2 \left[\frac{dU_\infty(Y)}{dY} \Big|_{Y=1} + \frac{\partial U^*(X,Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \right] \quad (4.28)$$

$$2fRe = -4 \left[-4 + \frac{\partial U^*(X,Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \right] \quad (4.29)$$

Aplicando a inversa 4.19 na equação 4.29, obtemos:

$$fRe_H = 16 - 4 \sum_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i(X) \frac{d\bar{\Phi}_i(Y)}{dY} \Big|_{Y=1}, \quad Re_H = 2Re \quad (4.30)$$

A pressão média P_m é obtida a partir de:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{\int_0^1 Y P(X,Y) dY}{\int_0^1 Y dY} = 2 \int_0^1 Y P^*(X,Y) dY + 2 \int_0^1 Y P_F(X,Y) dY \\ P_m &= 2 \int_0^1 Y \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}_i(Y) \bar{P}_i(X) dY + 2 \int_0^1 Y \left(P_0 - \frac{1}{Re} \frac{\partial U^*}{\partial X} \right) dY \\ P_m &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \bar{G}_i(0) \bar{P}_i(X) + P_0 - \frac{2}{Re} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{F}_i(0) \frac{d\bar{U}_i(X)}{dX}; \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$\bar{G}_i(0) = \int_0^1 Y \bar{\Psi}_i(Y) dY$$

4.3.4 CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA E NÚMERO DE NUSSELT

A partir do perfil de temperatura outros parâmetros térmicos como a temperatura média do escoamento e o Número de Nusselt local poder ser calculados:

A temperatura média é dada como:

$$\theta_m(X) = \frac{\int_0^1 Y \theta(X, Y) U(X, Y) dY}{U_m} \quad (4.32)$$

O número de Nusselt é um grandeza adimensional muito utilizada para determinar o coeficiente de transferência de calor por convecção. Logo temos:

$$Nu(X) = \frac{2 \frac{d\theta(X, 1)}{dY}}{\theta(X, 1) - \theta_m(X)} \quad (4.33)$$

4.4 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Iremos transformar o sistema de equações diferenciais parciais composta pelas equações da quantidade de movimento na direção X, equação de Poisson e equação da energia, em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

4.4.1 TRANSFORMADA DA EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM X

Multiplicaremos a equação 3.24 por $\int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) dY$ e obteremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} dY + \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) U_\infty(Y) \frac{\partial U^*}{\partial X} dY \\ & + \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) V \frac{\partial U^*}{\partial Y} dY + \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) V \frac{\partial U_\infty(Y)}{\partial Y} dY = \\ & - \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{\partial P^*}{\partial Y} dY - \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{\partial P_F}{\partial X} dY + \\ & \frac{1}{Re} \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \left(\frac{\partial U^*}{\partial Y} + \frac{\partial U_\infty(Y)}{\partial Y} \right) \right] dY + \\ & \frac{1}{Re} \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^2} dY \end{aligned} \quad (4.34)$$

Utilizando as formas inversas 4.19 e 4.21, a velocidade transversal 4.25 a propriedade de ortogonalidade 4.4, e somando todos os termos do lado esquerdo e direito da equação 4.34 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{U}_i(X)}{dX^2} = \frac{Re}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} AB_{ijk} \bar{U}_j(X) + AB_{ik\infty} \right) \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} \frac{d\bar{P}_n(X)}{dX} \right] + \frac{\mu_i^2 \bar{U}_i(X)}{2} - \frac{D_{i\infty}}{2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Onde os coeficientes acima encontrados a partir da transformação integral são dados por:

$$AB_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{d\tilde{\Phi}_j(Y)}{dY} \bar{F}_k(Y) dY + \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \tilde{\Phi}_j(Y) \tilde{\Phi}_k(Y) dY \quad (4.36)$$

$$AB_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{dU_{\infty}(Y)}{dY} \bar{F}_k(Y) dY + \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \tilde{\Phi}_k(Y) U_{\infty}(Y) dY \quad (4.37)$$

$$C_{in} = \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \tilde{\Psi}_n(Y) dY \quad (4.38)$$

$$\delta_{ij} = \int_0^1 Y \tilde{\Phi}_i(Y) \tilde{\Phi}_j(Y) dY \quad (4.39)$$

$$D_{i\infty} = \int_0^1 \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{d}{dY} \left[Y \frac{dU_{\infty}(Y)}{dY} \right] dY \quad (4.40)$$

4.4.2 TRANSFORMADA DA EQUAÇÃO DE POISSON

Multiplicando a equação de Poisson 3.26 por $\int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i dY$ obteremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial^2 P^*}{\partial X^2} dY + \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial^2 P_F}{\partial X^2} dY \\ & + \int_0^1 \frac{Y}{Y} \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \frac{\partial P^*}{\partial Y} dY \right] + \int_0^1 \frac{Y}{Y} \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \frac{\partial P_F}{\partial Y} dY \right] = \\ & 2 \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial U^*}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} dY - 2 \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial U^*}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial X} dY \\ & - 2 \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial U_{\infty}}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial X} dY - 2 \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{V^2}{Y^2} dY \end{aligned} \quad (4.41)$$

Utilizando as formas inversas 4.19 e 4.21, a velocidade transversal 4.25 a propriedade de ortogonalidade 4.12, e somando todos os termos do lado esquerdo e direito da equação 4.41 obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[\delta_{in} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} G_{im} C_{mn} \right] \frac{d^2 \bar{P}_n(X)}{dX^2} = \beta_i^2 \bar{P}_i(X) - \frac{1}{Re} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{ik} \mu_k^2 \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} G_{im} A_m + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{ijk} \frac{d\bar{U}_j(X)}{dX} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_{ijk} \bar{U}_j \frac{d^2 \bar{U}_k(X)}{dX^2} \\
& - 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik\infty} \frac{d^2 \bar{U}_k(X)}{dX^2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} E_{ik} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

A equação acima torna-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{mat} \frac{d^2 \bar{P}_n(X)}{dX} = G_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} G_{im} A_m \tag{4.43}$$

Onde os coeficientes são:

$$P_{mat} = \delta_{in} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} G_{im} C_{mn} \tag{4.44}$$

$$G_i = \beta_i^2 \bar{P}_i(X) - \frac{1}{Re} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{ik} \mu_k^2 \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{ijk} \frac{d\bar{U}_j(X)}{dX} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} \tag{4.45}$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{\infty} E_{ik} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} F_{ijk} \bar{U}_j(X) + F_{ik\infty} \right] \frac{d^2 \bar{U}_k(X)}{dX^2}$$

$$A_m = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} AB_{mjk} \frac{d\bar{U}_j(X)}{dX} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} AB_{mjk} \bar{U}_j(X) \frac{d^2 \bar{U}_k(X)}{dX^2} \tag{4.46}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} AB_{mk\infty} \frac{d^2 \bar{U}_k(X)}{dX^2} + \frac{\mu_m^2}{Re} \frac{d\bar{U}_m(X)}{dX}$$

$$Q_{ik} = \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \tilde{\Phi}_k(Y) dY \tag{4.47}$$

$$G_{im} = \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \tilde{\Phi}_m(Y) dY \tag{4.48}$$

$$E_{ik} = \int_0^1 \frac{1}{Y^3} \tilde{\Psi}_i(Y) [\bar{F}_k(Y)]^2 dY \tag{4.49}$$

$$E_{ijk} = \int_0^1 Y \tilde{\Psi}_i(Y) \tilde{\Phi}_j(Y) \frac{d}{dY} \left[\frac{\bar{F}_k(Y)}{Y} \right] dY \tag{4.50}$$

$$F_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \bar{F}_k(Y) \frac{d\tilde{\Phi}_j(Y)}{dY} dY \tag{4.51}$$

$$F_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \bar{F}_k(Y) \frac{dU_{\infty}(Y)}{dY} dY \tag{4.52}$$

4.4.3 TRANSFORMADA DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Multiplicando a equação da energia 3.27 por $\int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) dY$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) U^* \frac{\partial \theta}{\partial X} dY + \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) U_\infty(Y) \frac{\partial \theta}{\partial X} dY + \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) V \frac{\partial \theta}{\partial Y} dY = \\ \frac{1}{Pe} \left[\int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) dY + \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} dY \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Utilizando as formas inversas 4.19 e 4.23, a propriedade de ortogonalidade 4.18 e a velocidade transversal 4.25, e juntando os termos de ambos os lados da equação anterior temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\theta}_j}{dX^2} = Pe \sum_{j=1}^{NT} \left[\sum_{k=1}^{NT} AA_{ijk} \bar{U}_k(X) + PD_{ij} \right] \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} \\ + Pe \sum_{j=1}^{NT} \left[\sum_{k=1}^{NT} CC_{ijk} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} + \frac{\delta_{ij}}{Pe} \omega_j^2 \right] \bar{\theta}_j(X) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Onde os coeficientes são:

$$AA_{ijk} = \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) \tilde{\zeta}_j(Y) \tilde{\Phi}_k(Y) dY \quad (4.55)$$

$$PD_{ij} = 2 \left[\delta_{ij} - \int_0^1 Y^3 \tilde{\zeta}_i(Y) \tilde{\zeta}_j(Y) dY \right] \quad (4.56)$$

$$CC_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\zeta}_i(Y) \frac{d\tilde{\zeta}_j(Y)}{dY} \bar{F}_k(Y) dY \quad (4.57)$$

Aplicando a transformação integral nas condições de contorno 3.28 e 3.30 encontramos:

Para $X = 0$

$$\bar{U}_i(X) = \int_0^1 Y (1 - U_\infty(Y)) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \quad (4.58)$$

$$\bar{P}_i(X) = 0 \quad (4.59)$$

$$\bar{\theta}_i(X) = 0 \quad (4.60)$$

Para $X \rightarrow \infty$

$$\bar{U}_i(X) = 0 \quad (4.61)$$

$$\frac{d\bar{P}_i(X)}{dX} = \frac{1}{Re} \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \frac{dU_\infty(Y)}{dY} \right] dY \quad (4.62)$$

$$\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 Y \tilde{\zeta}_i(Y) dY \quad (4.63)$$

4.4.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DIFERENCIAL ORDINÁRIO

O sistema transformado obtido é constituído de uma quantidade infinita de equações impossibilitando a implementação. Por este motivo, é necessário fazermos um truncamento de maneira a obtermos um sistema com uma quantidade finita de equações, obtendo assim a formulação escrita abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{U}_i(X)}{dX^2} = \frac{Re}{2} \left[\sum_{k=1}^{NU} \left(\sum_{j=1}^{NU} AB_{ijk} \bar{U}_j(X) + AB_{ik\infty} \right) \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{NP} C_{in} \frac{d\bar{P}_n(X)}{dX} \right] + \frac{\mu_i^2 \bar{U}_i(X)}{2} - \frac{D_{i\infty}}{2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\sum_{n=1}^{NP} P_{mat} \frac{d^2 \bar{P}_n(X)}{dX^2} = G_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NU} G_{im} A_m \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\theta}_j}{dX^2} = Pe \sum_{j=1}^{NT} \left[\sum_{k=1}^{NT} AA_{ijk} \bar{U}_k(X) + PD_{ij} \right] \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} \\ + Pe \sum_{j=1}^{NT} \left[\sum_{k=1}^{NT} CC_{ijk} \frac{d\bar{U}_k(X)}{dX} + \frac{\delta_{ij}}{Pe} \omega_j^2 \right] \bar{\theta}_j(X) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Para resolver este problema numericamente utilizaremos a DBVPFD, que é uma subrotina disponível na biblioteca IMSL (1989). Esta subrotina resolve problemas diferenciais ordinários não lineares de 1ª ordem com condições de contorno em dois pontos. Como no nosso estudo o sistema a ser resolvido é de 2ª ordem, logo é necessário reescrevê-lo como um sistema de 1ª ordem. Para isso, definimos:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_i &= \chi_i & i &= 1, 2, 3 \dots NU \\
\frac{d\bar{U}_i}{dX} &= \frac{d\chi_i}{dX} = \chi_{NU+i} & i &= 1, 2, 3 \dots NU \\
\frac{d^2\bar{U}_i}{dX^2} &= \frac{d}{dX} \left(\frac{d\bar{U}_i}{dX} \right) = \frac{d\chi_{NU+i}}{dX} & i &= 1, 2, 3 \dots NU \\
\bar{P}_i &= \chi_{2NU+i} & i &= 1, 2, 3 \dots NP \\
\frac{d\bar{P}_i}{dX} &= \frac{d\chi_{2NU+i}}{dX} = \chi_{2NU+NP+i} & i &= 1, 2, 3 \dots NP \\
\frac{d^2\bar{P}_i}{dX^2} &= \frac{d}{dX} \left(\frac{d\bar{P}_i}{dX} \right) = \frac{d\chi_{2NU+NP+i}}{dX} & i &= 1, 2, 3 \dots NP \\
\bar{\theta}_i &= \chi_{2NU+2NP+i} & i &= 1, 2, 3 \dots NT \\
\frac{d\bar{\theta}_i}{dX} &= \frac{d\chi_{2NU+2NP+i}}{dX} = \chi_{2NU+2NP+NT+i} & i &= 1, 2, 3 \dots NT \\
\frac{d^2\bar{\theta}_i}{dX^2} &= \frac{d}{dX} \left(\frac{d\bar{\theta}_i}{dX} \right) = \frac{d\chi_{2NU+2NP+NT+i}}{dX} & i &= 1, 2, 3 \dots NT
\end{aligned} \tag{4.67}$$

4.4.5 TRANSFORMAÇÃO DO DOMÍNIO

Para trabalhar com a rotina DBVPD será necessário transformar o domínio ilimitado $(0, +\infty)$ em um domínio limitado $(0, 1)$ utilizando uma contração de escala. Essa contração é dada por:

$$\eta(x) = 1 - e^{-cx}, \quad x \in (0, \infty) \tag{4.68}$$

onde c é o fator de contração de escala e

$$\frac{d\eta}{dX} = c(1 - \eta). \tag{4.69}$$

Note que $0 < \eta < 1$.

Com isso as condições de contorno originais do problema são satisfeitas.

Fazendo uso da regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned}
\chi_{NU+i} &= \frac{d\chi_i}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} = \frac{d\bar{U}_i}{dX} & i = 1, 2, 3 \dots NU \\
\frac{d\chi_{NU+i}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} &= \frac{d^2\bar{U}_i}{dX^2} & i = 1, 2, 3 \dots NU \\
\chi_{2NU+NP+i} &= \frac{d\chi_{2NU+i}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} = \frac{d\bar{P}_i}{dX} & i = 1, 2, 3 \dots NP \\
\frac{d\chi_{2NU+NP+i}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} &= \frac{d^2\bar{P}_i}{dX^2} & i = 1, 2, 3 \dots NP \\
\chi_{2NU+2NP+NT+i} &= \frac{d\chi_{2NU+2NP+i}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} = \frac{d\bar{\theta}_i}{dX} & i = 1, 2, 3 \dots NT \\
\frac{d\chi_{2NU+2NP+NT+i}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} &= \frac{d^2\bar{\theta}_i}{dX^2} & i = 1, 2, 3 \dots NT
\end{aligned} \tag{4.70}$$

E assim podemos reescrever as equações em termos de η obtendo-se o seguinte sistema diferencial ordinário:

Equação da quantidade de movimento na direção X

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi_{NU+i}}{d\eta} &= \left[\frac{Re}{2} \sum_{k=1}^{NU} \left(\sum_{j=1}^{NU} AB_{ijk} \chi_j + AB_{ik\infty} \right) \chi_{NU+k} + \frac{Re}{2} \sum_{n=1}^{NP} C_{in} \chi_{2NU+NP+n} \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_{i\infty}}{2} + \frac{\mu_i^2}{2} \chi_i \right] \frac{d\eta}{dX}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Equação de Poisson

$$\sum_{n=1}^{NP} P_{mat} \frac{d\chi_{2NU+NP+n}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} = G_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NU} G_{im} A_m \tag{4.72}$$

Onde

$$P_{mat} = \delta_{in} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NU} G_{im} C_{mn} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
G_i &= \frac{-1}{Re} \sum_{k=1}^{NU} Q_{ik} \mu_k^2 \chi_{NU+k} + 2 \sum_{k=1}^{NU} \left(\sum_{j=1}^{NU} E_{ijk} \chi_{NU+j} - E_{ik} \chi_{NU+k} \right) \chi_{NU+k} \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^{NU} \left(\sum_{j=1}^{NU} F_{ijk} \chi_j + F_{ik\infty} \right) \frac{d\chi_{NU+k}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} + \beta_i^2 \chi_{2NU+i}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$A_m = \sum_{j=1}^{NU} \sum_{k=1}^{NU} AB_{mjk} \chi_{NU+j} \chi_{NU+k} + \sum_{k=1}^{NU} \left(\sum_{j=1}^{NU} \chi_j + AB_{mk\infty} \right) \frac{d\chi_{NU+k}}{d\eta} \frac{d\eta}{dX} \tag{4.75}$$

Equação da Energia

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_{2NU+2NP+NT+i}}{d\eta} = Pe \left[\sum_{j=1}^{NT} \left(\sum_{k=1}^{NT} AA_{ijk}\chi_k + PD_{ij} \right) \chi_{2NU+2NP+NT+j} \right. \\ \left. + Pe \sum_{j=1}^{NT} \left(\sum_{k=1}^{NT} CC_{ijk}\chi_{NU+k} + \frac{\delta_{ij}}{Pe} \omega_j^2 \right) \chi_{2NU+2NP+j} \right] / \frac{d\eta}{dX} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \chi_i(0) &= \int_0^1 Y(1 - U_\infty(Y)) \tilde{\Phi}_i(Y) dY & i = 1, 2, 3, \dots, NU \\ \chi_i(1) &= 0 & i = 1, 2, 3, \dots, NU \\ \chi_{2NU+i}(0) &= 0 & i = 1, 2, 3, \dots, NP \\ \chi_{2NU+NP+i}(1) &= \frac{1}{Re} \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \frac{dU_\infty(Y)}{dY} \right] dY & i = 1, 2, 3, \dots, NP \\ \chi_{2NU+2NP+i}(0) &= 0 & i = 1, 2, 3, \dots, NT \\ \chi_{2NU+2NP+i}(1) &= \int_0^1 Y \tilde{\xi}_i(Y) dY & i = 1, 2, 3, \dots, NT \end{aligned} \quad (4.77)$$

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Para obter a solução do problema de convecção forçada aqui estudado foi necessário o desenvolvimento de um código computacional construído em linguagem Fortran e implementado num microcomputador com processador core i-3, 3 GB de Ram, com sistema operacional windows 7. A subrotina DBVPFD da biblioteca IMSL foi utilizada a fim de resolver o problema com uma tolerância de 10^{-4} para determinar o erro automático na avaliação dos campos de velocidade, pressão e temperatura e estabelecido para a quarta casa decimal. Sabendo-se que a DBVPFD resolve problemas de primeira ordem com condições de contorno em dois pontos foi necessário reescrever o problema em termos de outra variável e ainda usar uma contração de escala para trabalhar com domínio $[0, 1]$. O fator de contração utilizado no programa foi $C = 1.2$, com $Re = 20$ equivalente ao $Re_H = 40$ apresentado em outros trabalhos, e o número de Prandlt utilizado foi $Pr = 0.7$ para comparações com dados disponíveis na literatura. O número de termos de truncamento nas séries NU, NT, NP foram implementados igualmente.

5.1 TABELAS DE CONVERGÊNCIAS

Tabela 5.1: Comparação da Velocidade U no centro do canal ao longo de X com condições de entrada $U = 1$ e $V = 0$

RE-X	Referências	0,1	0,25	0,3	0,5	0,7	0,75
20	Presente Trabalho	0,9460	1,0380	1,0769	1,2420	1,3805	1,4099
20	ANDRADE(2010)	0,9819	1,0582	1,0881	1,2034	1,3205	1,3552
40	SILVA <i>et al</i> (2009)	1,017	1,057	1,077	1,18	1,3	1,33
40	FRIEDMANN(1968)	1,008	1,0484	1,074	1,1738	1,31	1,326

A Tabela 5.1 mostra que os resultados encontrados para NU=47 e Re=20 apresentam boa concordância com os dados da literatura disponibilizados por ANDRADE (2010)(NU=40), SILVA *et al*(2009) e FRIEDMANN *et al* (1968)(NU=44). A formulação usada nas referências [14] e [2] utilizam função corrente e a formulação de [23] e do presente trabalho

utilizam variáveis primitivas e é comparado com resultados para $Re_h=40$.

Tabela 5.2: Convergência da Velocidade $U(X, 0)$ no centro do canal ao longo de X

X-N	4,0000	8,0000	16,0000	20,0000	27,0000	29,0000	43,0000	47,0000
0,1081	0,9428	1,0047	0,9565	0,9571	0,9550	0,9541	0,9470	0,9460
0,2529	1,0850	1,0339	1,0251	1,0276	1,0310	1,0318	1,0365	1,0380
0,3000	1,1117	1,0541	1,0541	1,0584	1,0644	1,0659	1,0746	1,0769
0,5000	1,1989	1,1591	1,1859	1,1970	1,2125	1,2162	1,2371	1,2420
0,7001	1,2777	1,2641	1,3063	1,3215	1,3424	1,3473	1,3744	1,3805
0,7500	1,2968	1,2882	1,3330	1,3488	1,3706	1,3757	1,4036	1,4099
1,0000	1,3855	1,3937	1,4461	1,4638	1,4883	1,4939	1,5242	1,5309
1,2500	1,4609	1,4765	1,5320	1,5502	1,5756	1,5813	1,6121	1,6189
2,0013	1,6350	1,6661	1,7176	1,7311	1,7524	1,7573	1,7835	1,7891
5,2108	1,9804	1,9890	1,9912	1,9904	1,9919	1,9921	1,9929	1,9931

A Tabela 5.2 mostra a convergência da velocidade longitudinal no centro do canal ($Y = 0$) em diversas posições ao longo do mesmo, para a solução em variáveis primitivas. Verifica-se uma diferença razoavelmente grande, com relação a coordenadas retangulares, talvez pelo fato de que a continuidade seja mais afetada em coordenadas cilíndricas por aparecerem termos com divisão por Y nos coeficientes.

Tabela 5.3: Convergência da Velocidade média $U_m(X)$

X-N	4,0000	8,0000	16,0000	20,0000	27,0000	29,0000	43,0000	47,0000
0,0000	0,9065	0,9512	0,9752	0,9801	0,9852	0,9863	0,9908	0,9916
0,1081	0,8814	0,8857	0,8837	0,8840	0,8853	0,8858	0,8894	0,8904
0,2529	0,8587	0,8460	0,8455	0,8472	0,8504	0,8513	0,8572	0,8586
0,3000	0,8544	0,8406	0,8413	0,8433	0,8468	0,8478	0,8541	0,8556
0,5000	0,8495	0,8375	0,8423	0,8453	0,8499	0,8512	0,8585	0,8602
0,7001	0,8572	0,8493	0,8569	0,8606	0,8660	0,8674	0,8754	0,8772
0,7500	0,8600	0,8530	0,8612	0,8650	0,8705	0,8720	0,8801	0,8820
1,0000	0,8756	0,8720	0,8823	0,8866	0,8928	0,8943	0,9031	0,9051
1,2500	0,8906	0,8890	0,9005	0,9050	0,9115	0,9131	0,9220	0,9240
2,0013	0,9277	0,9291	0,9399	0,9438	0,9494	0,9507	0,9581	0,9597
5,2108	0,9969	0,9972	0,9978	0,9980	0,9982	0,9983	0,9986	0,9987

A Tabela 5.3 mostra a convergência da velocidade longitudinal média em diversas posições ao longo do duto, onde é observado uma oscilação na entrada do duto devido a dificuldade da análise na entrada hidrodinâmica onde os efeitos viscosos são mais pronunciados, mas vale ressaltar que o valor converge para 1 a partir de um certo X com um número de autovalores suficientemente grande como mostra a literatura.

Tabela 5.4: Convergência da Pressão $P(X, 0)$ no centro do canal ao longo de X

X-N	4,0000	8,0000	16,0000	20,0000	27,0000	29,0000	43,0000	47,0000
0,1081	-0,0520	0,0146	0,1560	0,2092	0,2776	0,2876	0,3420	0,3544
0,2529	-0,0483	0,0539	0,1709	0,2067	0,2480	0,2577	0,3115	0,3230
0,3000	-0,0613	0,0444	0,1502	0,1836	0,2217	0,2308	0,2808	0,2915
0,5000	-0,1364	-0,0452	0,0233	0,0468	0,0713	0,0773	0,1101	0,1170
0,7001	-0,2270	-0,1638	-0,1216	-0,1061	-0,0919	-0,0882	-0,0684	-0,0643
0,7500	-0,2508	-0,1937	-0,1566	-0,1427	-0,1304	-0,1272	-0,1098	-0,1062
1,0000	-0,3686	-0,3345	-0,3161	-0,3078	-0,3022	-0,3006	-0,2918	-0,2900
1,2500	-0,4753	-0,4546	-0,4478	-0,4427	-0,4411	-0,4405	-0,4364	-0,4355
2,0013	-0,7216	-0,7385	-0,7490	-0,7421	-0,7442	-0,7440	-0,7418	-0,7412
5,2108	-1,1689	-1,1845	-1,1773	-1,1566	-1,1474	-1,1427	-1,1144	-1,1083

A Tabela 5.4 ilustra o comportamento da pressão ao longo do duto para vários valores de X , decrescendo com o aumento de X contrariamente ao perfil de velocidade.

Tabela 5.5: Convergência da Pressão média $P_m(X)$

X-N	4,0000	8,0000	16,0000	20,0000	27,0000	29,0000	43,0000	47,0000
0,1081	-0,0516	-0,0402	-0,0383	-0,0388	-0,0397	-0,0399	-0,0412	-0,0415
0,2529	-0,1397	-0,1378	-0,1390	-0,1394	-0,1398	-0,1399	-0,1404	-0,1405
0,3000	-0,1680	-0,1673	-0,1686	-0,1689	-0,1692	-0,1693	-0,1697	-0,1697
0,5000	-0,2831	-0,2842	-0,2850	-0,2853	-0,2855	-0,2855	-0,2858	-0,2858
0,7001	-0,3873	-0,3884	-0,3891	-0,3893	-0,3895	-0,3895	-0,3897	-0,3897
0,7500	-0,4114	-0,4125	-0,4131	-0,4133	-0,4135	-0,4135	-0,4137	-0,4137
1,0000	-0,5203	-0,5211	-0,5216	-0,5217	-0,5218	-0,5218	-0,5219	-0,5219
1,2500	-0,6100	-0,6106	-0,6109	-0,6109	-0,6109	-0,6109	-0,6109	-0,6109
2,0013	-0,7855	-0,7859	-0,7852	-0,7849	-0,7845	-0,7843	-0,7837	-0,7835
5,2108	-0,9365	-0,9341	-0,9288	-0,9272	-0,9248	-0,9243	-0,9214	-0,9207

A Tabela 5.5 mostra a convergência satisfatória para a pressão média ao longo do eixo X .

Tabela 5.6: Convergência da Temperatura $\theta(X, 0)$ no centro do canal ao longo de X

X-N	4,0000	8,0000	16,0000	20,0000	27,0000	29,0000	43,0000	47,0000
0,2529	1,0259	0,9952	0,9934	0,9934	0,9935	0,9936	0,9938	0,9939
0,3000	1,0271	0,9924	0,9915	0,9916	0,9917	0,9918	0,9921	0,9922
0,5000	1,0139	0,9823	0,9822	0,9825	0,9830	0,9831	0,9839	0,9841
0,7001	0,9975	0,9710	0,9717	0,9723	0,9732	0,9735	0,9747	0,9750
0,7500	0,9936	0,9681	0,9690	0,9697	0,9707	0,9710	0,9723	0,9726
1,0000	0,9750	0,9530	0,9550	0,9561	0,9577	0,9580	0,9600	0,9605
1,2500	0,9586	0,9388	0,9416	0,9430	0,9449	0,9454	0,9478	0,9483
2,5000	0,8992	0,8817	0,8833	0,8839	0,8850	0,8853	0,8865	0,8867
3,5010	0,6147	0,6081	0,6090	0,6084	0,6093	0,6095	0,6103	0,6103
5,2108	0,1234	0,1227	0,1229	0,1227	0,1229	0,1229	0,1231	0,1231

A Tabela 5.6 ilustra a convergência da Temperatura no centro do duto para vários valores de X , podendo ser visto que a convergência satisfatória foi alcançada para $NU=47$ na terceira casa decimal, utilizando no problema $Re=20$, $Bi=\infty$ e temperatura prescrita na parede.

Tabela 5.7: Convergência da Temperatura média $\theta_m(X)$

X	4,0000	8,0000	16,0000	20,0000	27,0000	29,0000	43,0000	47,0000
0,0000	0,9985	0,9998	1,0000	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001
,1081	0,9047	0,8757	0,8663	0,8656	0,8655	0,8656	0,8663	0,8666
0,2529	0,8180	0,7913	0,7876	0,7880	0,7890	0,7893	0,7913	0,7918
0,3000	0,7961	0,7711	0,7683	0,7689	0,7702	0,7706	0,7728	0,7733
0,5000	0,7243	0,7050	0,7051	0,7063	0,7083	0,7088	0,7117	0,7124
0,7001	0,6750	0,6592	0,6611	0,6627	0,6650	0,6656	0,6690	0,6697
0,7500	0,6650	0,6499	0,6521	0,6538	0,6562	0,6568	0,6602	0,6610
1,0000	0,6252	0,6124	0,6158	0,6177	0,6204	0,6211	0,6247	0,6255
1,2500	0,5974	0,5861	0,5901	0,5921	0,5948	0,5955	0,5992	0,6000
2,0013	0,5507	0,5416	0,5452	0,5467	0,5489	0,5494	0,5521	0,5527
5,2108	0,0588	0,0579	0,0581	0,0582	0,0584	0,0584	0,0586	0,0586

A Tabela 5.7 mostra a convergência da temperatura média variando o X , com $Re=20$, $Pr=0.7$ e $Bi=\infty$ nota-se a convergência também é satisfatória com $NU=47$ na terceira casa decimal, lembrando-se que devido a dificuldade das autofunções de Bessel o programa rodou apenas com 47 autovalores.

5.2 GRÁFICOS

O gráfico da velocidade média foi construído ao longo de X partindo de $X=0.3652$ para analisar o que acontece sem considerar a entrada hidrodinâmica como na Tabela 5.3. Como era de se esperar, os valores estão tendendo para $U_m = 1$.

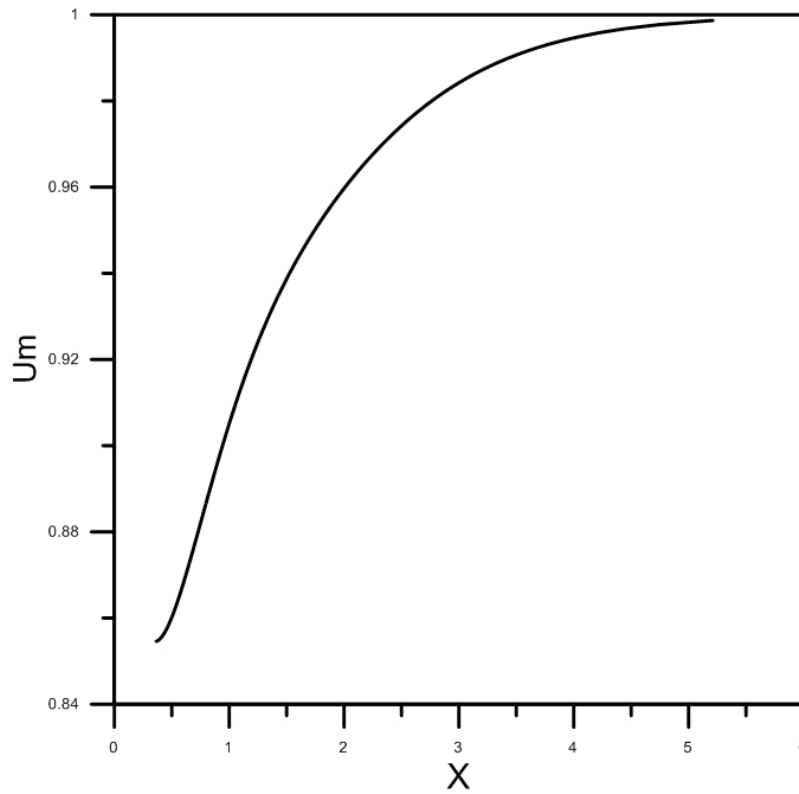


Figura 5.1: Desenvolvimento da velocidade média ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$

O gráfico 5.2 mostra que o perfil de velocidade no escoamento completamente desenvolvido tende para 2 como mostra FAVRE-MARINET e TARDUS (2009) estando assim em concordância com a Tabela 5.2.

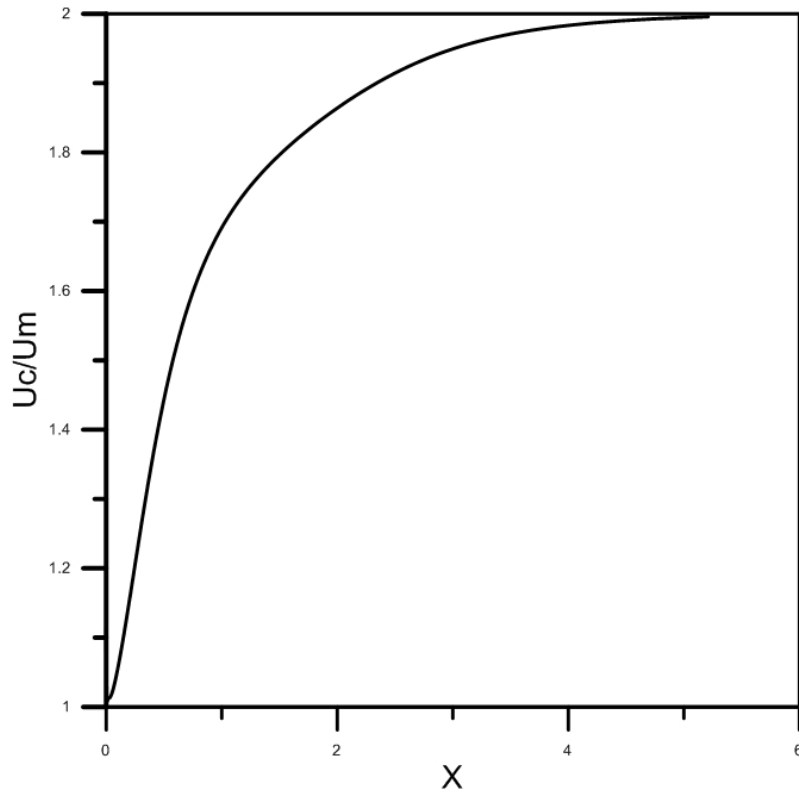


Figura 5.2: Desenvolvimento da velocidade dividida pela velocidade média ao longo da coordenada adimensional X no centro do duto para $Re=20$

O gráfico 5.3 mostra o comportamento da pressão média ao longo de X com 47 autovalores.

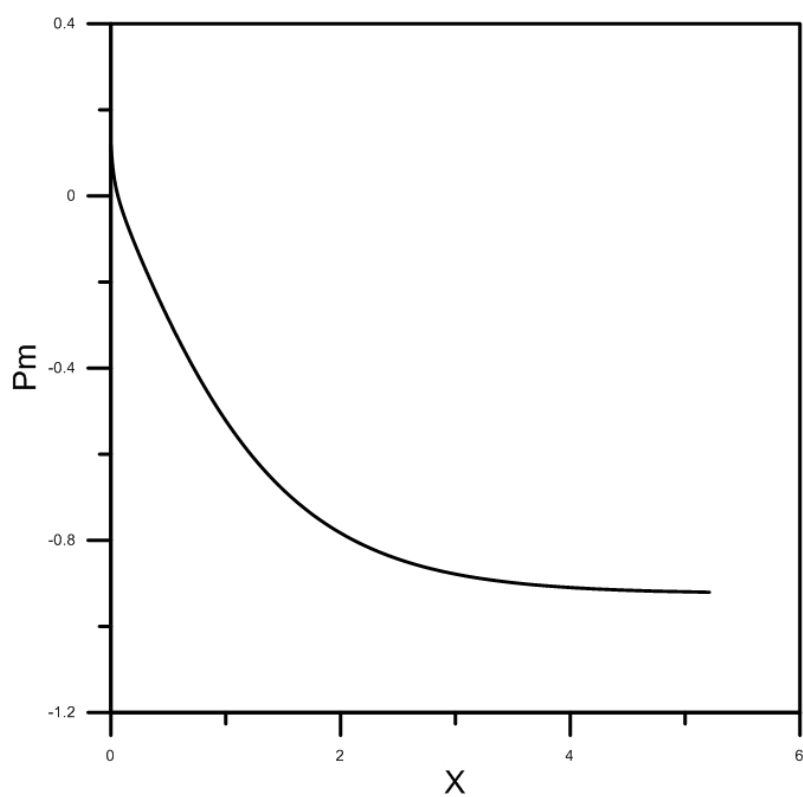


Figura 5.3: Desenvolvimento da Pressão média ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$

O gráfico 5.4 mostra o decaimento da temperatura média do fluido ao longo do duto.

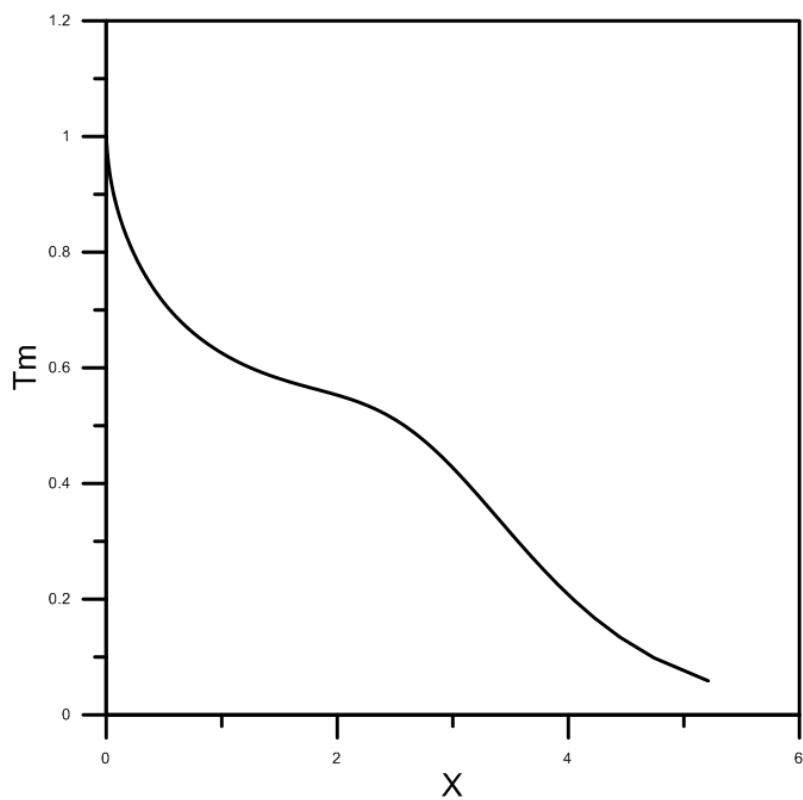


Figura 5.4: Desenvolvimento da Temperatura média ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$

O gráfico do produto fRe mostra o comportamento ao longo do eixo X para $Re=20$, obtido pela formulação em variáveis primitivas condição de entrada $U=1$ e $V=0$, e podemos ver que o resultado aqui obtido foi muito próximo do trabalho de SILVA *et al* (2009) formulado em função corrente. Podemos ver no gráfico que o resultado encontrado foi satisfatório igual a 16.01 o que condiz com a vasta literatura disponível.

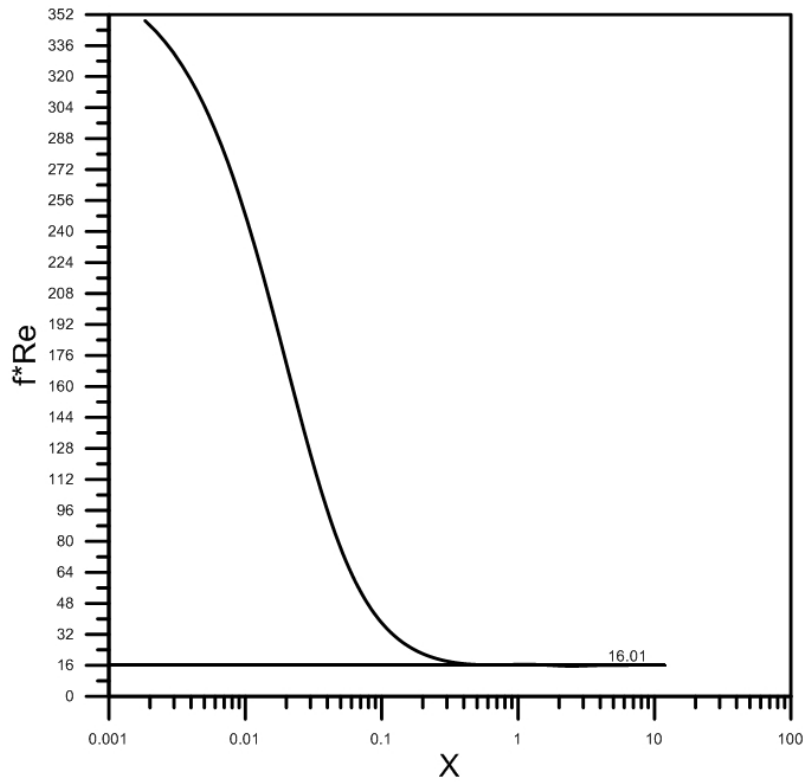


Figura 5.5: Desenvolvimento do produto fRe ao longo da coordenada adimensional X para $Re=20$

O gráfico ilustra o desenvolvimento do número de Nusselt ao longo do eixo X para $Re=20$ e $Pr=0.7$. Sabendo-se que para problema do perfil de temperatura completamente desenvolvido, com temperatura prescrita na parede, onde o perfil de velocidade não é introduzido no problema de autovalor da temperatura como visto em KAKAÇ e YENNER (1995), o número de Nusselt local é igual ao valor do primeiro autovalor ao quadrado e portanto $Nu=5,78$. Daí podemos ver que o gráfico está em conformidade com o resultado de KAKAÇ e YENNER (1995).

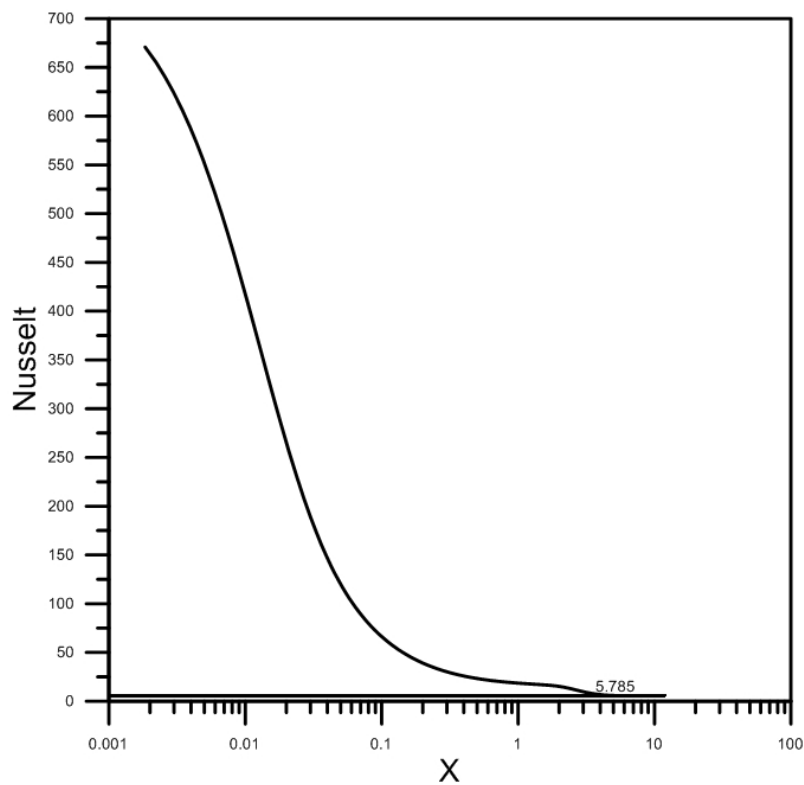


Figura 5.6: Desenvolvimento do Nusselt Local ao longo da coordenada adimensional X

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Tínhamos por proposta obter os campos de velocidade, temperatura e pressão pelas equações de Navier-Stokes e Energia em variáveis primitivas via GITT num escoamento de um fluido Newtoniano, incompressível, laminar em regime permanente.

Foi possível ver que o campo de temperatura se desenvolve mais rapidamente que o campo de velocidade visto que o número de Prandtl é menor que um.

A utilização de filtros, com o principal objetivo de homogeneizar as condições de contorno, é reforçada tanto para velocidade quanto para pressão, visto que, melhora a convergência e o desempenho computacional. Resolver o problema por variáveis primitivas facilitou na construção da programação tendo como referência a dificuldade que teríamos se utilizássemos função corrente, entretanto esta última proporciona a continuidade automaticamente e para trabalhar com coordenadas cilíndricas torna-se menos trabalhosa.

O resultado do produto fRe que foi encontrado, condiz com os valores obtidos na literatura na região completamente desenvolvida e mostra que tanto o campo de velocidade como o campo de pressão podem ser validados a partir dele. Assim como também o número de Nusselt encontrado, nos mostra que a solução para o campo de temperatura pode ser validado.

Os resultados obtidos na resolução das equações de Navier-Stokes para o campo de velocidade em termos de variáveis primitivas foram comparadas com equações em camada limite, e com as equações de Navier-Stokes em função corrente com condições de entrada $U = 1$, $V = 0$ e $P = P_0$. Verifica-se que no início do canal os valores estão menores do que os da referência, verifica-se que a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) utilizada neste trabalho fornece, apesar da dificuldade na implementação da subrotina DBVPFD da Biblioteca do IMSL, uma boa concordância com os resultados comparados disponíveis na literatura.

Como sugestões para outros trabalhos:

- Analisar a mudança no limite de integração para encontrar a velocidade transversal;

- Estender a número de Reynolds elevado;
- Estender a análise para situação em problemas tridimensionais;
- Estender o estudo ao escoamento transiente para tempos longos com entrada periódica;
- Estender o estudo para o escoamento turbulento;
- Efetuar a análise para diferentes números de Prandtl.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANDRADE, F.E. ,1996, *Solução de Equações Diferenciais Acopladas pela Técnica da Transformada Integral e Computação Simbólica*. Dissertação de M.Sc. UFCE, Dezembro.
- [2] ANDRADE, H. J. ,2010, *Análise das equações de Navier-Stokes no escoamento bidimensional em dutos com formulação em variáveis primitivas via GITT*. Dissertação de M.Sc. UFPB, Janeiro.
- [3] CAMPOS SILVA, J.B., COTTA, R.M. E APARECIDO, J.B., 1992, "Analytical Solution to Simultaneously Developing Laminar Flow Inside Paralell-Plates Channels", *Int. J. Heat Transfer*, v.35, pp 887-895.
- [4] COTTA, R. M. , 1993, *Integral Transform in Computational Heat and Fuid Flow*. Boca Raton-FL, CRC Press.
- [5] ÇENGEL, A.Y. e CIMBALA J. M., 2007, *Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações*. 6 ed. São Paulo, Editora Mc Graw Hill.
- [6] FAVRE-MARINET, M. e TARDU, S., 2009, *Convective Heat Transfer*. 1 ed. John Wiley.
- [7] FORTRAN POWERSTATION, (1995). Version 4.0 ; Microsoft Corporation.
- [8] FOX, R. W.MACDONALD, A. T. e PRITCHARD, P. J., 2006, *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6 ed. Rio de Janeiro, LTC Editora.
- [9] FRIEDMANN, M., GILLS J. e LIRON N. (1968). "Laminar Flow in a Pipe at Low and Moderate Reynolds Numbers", *Appl. Sci. Res*, v. 19, pp 426-438.
- [10] IMSL library - MATH/LIB, 1989. Houston, Texas.
- [11] INCROPERA, F.W. e WITT, D. P., 1990, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 3 ed, John Wiley.
- [12] KAKAÇ, S. e YENNER, Y., 1995, *Convective Heat Transfer*. 2 ed. Boca Raton-FL, CRC Press.
- [13] LIMA, C. G. G., 2002, *Análise Teórica de Fotoreatores Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada*. Tese de D.Sc. UFPB, Março.

- [14] LIMA, C. G. G., SANTOS, C. A. C., COTTA, R. M. et al, 2007, "Integral Transform Solution of Internal Flow Problems based on Navier-Stokes Equations and Primitive Variables Formulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, pp 544-561.
- [15] LIMA, J. A., 2000, *Escoamento Turbulento em Canais de Placas Planas e Paralelas: Análise via Transformação Integral e Modelos Algébricos e K-L de Turbulência*. Tese de D. Sc. UFPB, Agosto.
- [16] MEDEIROS, J. M., 1998, *Análise Teórica da Convecção Forçada Laminar Transiente em Desenvolvimento Simultâneo em Dutos*. Dissertação de Msc. UFPB, Janeiro.
- [17] MIKHAILOV, M. D. e ÖZISIK, M. N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York, John Wiley.
- [18] NASCIMENTO, S. C. C., MACÊDO, E. N. e QUARESMA, J. N. N. ,2006,"Generalized Integral Transform Solution for Hidrodynamically Developing Non Newtonian. Flows in Circular Tubes", *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. e Eng.*, v. 28, pp 125-130.
- [19] OZISIK, M. N, 1993, *Heat Conduction*. 2 ed. New York, John Wiley.
- [20] ÖZISIK, M. N. e MURRAY, R.L.,1974,"On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions Parameters", *J. Heat Trasnfer*, v.96, pp. 48-51.
- [21] PEREIRA, L. M., PEREZ GERRERO, J.S. e COTTA, R.M., 1998. "Integral Transform of the Navier-Stokes Equations in Cylindrical Geometry". *Computational Mechanics*, v.21, pp 60-70.
- [22] SHAH R.K e LONDON A. L, 1978, *Laminar flow Forced Convection in Ducts*, Supplement 1, Advances in heat Transfer, Academic, New York.
- [23] SILVA, C. A. M., COTTA, R. M. e QUARESMA, J. N. N., 2009. "Integral Transform Solution of the Navier-Stokes Equations in Full Cylindrical Regions with Streamfunction Formulation". *Communications in Numerical Methods in Engineering*. Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)

- [24] SILVA, R. L., QUARESMA, J.N.N. e SANTOS C.A.C., 2004, "Integral Transform Analysis of Flow Development in Parallel Plates Ducts". In: *10 th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering ENCIT*, Rio de Janeiro, Brasil.
- [25] VERONESE, J. P., Medeiros, J. M. e Santos, C. A. C., 2006, "Análise da Convecção Forçada em Canais de Placas Planas no Escoamento de Fluidos Não Newtonianos via GITT". In: *IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Recife-PE.