



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Mestrado – Doutorado

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
ACOPLADA POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO EM MEIOS
SEMITRANSARENTES COM APLICAÇÃO AO MÉTODO FLASH**

por

Pedro Sinval Ferreira Rodrigues

*Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do grau de mestre*

PEDRO SINVAL FERREIRA RODRIGUES

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
ACOPLADA POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO EM MEIOS
SEMITRANSSPARENTES COM APLICAÇÃO AO MÉTODO FLASH**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de mestre.

Orientador: Professor Dr. Zaqueu Ernesto da Silva

João Pessoa – Paraíba

Março, 2013

R696a Rodrigues, Pedro Sinval Ferreira.
Análise da transferência de calor acoplada por condução e radiação em meios semitransparentes com aplicação ao método flash / Pedro Sinval Ferreira Rodrigues.-- João Pessoa, 2013.
80f. : il.
Orientador: Zaqueu Ernesto da Silva
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CT
1. Engenharia Mecânica. 2. Acoplamento condução-radiação. 3. Ordenadas Discretas. 4. Método Flash. 5. Meio semitransparente.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR ACOPLADA
POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO EM MEIOS
SEMITRANSARENTES COM APLICAÇÃO AO MÉTODO
FLASH**

por -

Pedro Sinval Ferreira Rodrigues

Dissertação aprovada em 01 de março de 2013



Prof. Dr. Zaquieu Ernesto da Silva
Orientador – UFPB



Prof. Dr. José Mauricio Alves de Matos Gurgel
Examinador Interno - UFPB



Prof. Dr. Márcio Gomes da Silva
Examinador Externo – IFPB

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Rômulo e Rosália, que sempre me apoiaram e me incentivaram a buscar nos estudos o caminho para realização dos meus objetivos.

Às minhas tias e ao meu avô Sinval (in memoriam), aos quais serei eternamente grato por todo amor, carinho e dedicação, e por terem proporcionado tantas coisas boas em minha vida.

À Carolina, irmã, amiga e parceira, que sempre esteve comigo, nos bons e maus momentos, me apoiando e encorajando a superar minhas dificuldades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre presente em minha vida, me confortando nas horas de angústia, me dando forças nos momentos de fraqueza e guiando meus passos onde quer que eu esteja.

Aos meus pais, minha irmã e a todos os meus familiares que me apoiaram e me incentivaram a vencer mais esta etapa em minha vida.

Ao professor Zaqueu Ernesto da Silva pela sua amizade, confiança e orientação, que contribuíram significativamente para o meu crescimento tanto pessoal quanto profissional.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pelos conhecimentos e experiências compartilhados durante as aulas.

Aos meus amigos e colegas da pós-graduação: Diego, Daniel, Vamberto, José Félix, Igor, Marcos César, Kleber, Thiago e Felipe, pela amizade e por terem sempre se mostrado dispostos a me ajudar quando eu precisava.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
ACOPLADA POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO EM MEIOS
SEMITRANSSPARENTES COM APLICAÇÃO AO MÉTODO FLASH**

RESUMO

O crescente aparecimento de novos materiais tem gerado um aumento bastante expressivo na demanda pela determinação com maior exatidão e menor incerteza de medição das suas propriedades termofísicas. O conhecimento destas propriedades para os diversos tipos de materiais é essencial em qualquer pesquisa ou projeto de engenharia onde a transferência de calor tenha relevância, pois é a partir destas que podem ser feitos os cálculos das taxas de transferência de calor presentes num determinado processo. Dentre os métodos utilizados para caracterização térmica dos materiais, o método flash é um dos que mais se destaca. Nele a superfície frontal de uma amostra é submetida a um pulso de energia de alta intensidade e curta duração, sendo o aumento da temperatura na superfície traseira medido e utilizado para determinar a difusividade térmica do material. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia para caracterização térmica de materiais semitransparentes através do método flash. Para isso, é feita uma análise do problema da transferência de calor com acoplamento condução-radiação, onde uma solução simultânea da equação da energia e da equação da transferência radiativa (ETR) se faz necessária. O método dos volumes finitos foi utilizado para resolver numericamente a equação da energia e o método das ordenadas discretas para resolver a ETR. Um código computacional em MATLAB foi elaborado para resolução das equações obtidas, sendo este testado e validado com casos existentes na literatura.

Palavras-chave: Acoplamento Condução-Radiação, Ordenadas Discretas, Método Flash, Meio Semitransparente.

**ANALYSIS OF COUPLED CONDUCTION AND RADIATION
HEAT TRANSFER IN A SEMITRANSSPARENT MEDIUM
WITH APPLICATION TO THE FLASH METHOD**

ABSTRACT

The emergence of new materials has generated a significant growth for determination with accuracy of your thermophysical properties. The knowledge of these properties for several kinds of materials is essential for any research or engineering project that the heat transfer is relevant, because it's from these that the rates of heat transfer in a process can be calculated. Method flash is one that stands out most among methods for thermal characterization of materials, in that the front surface of a sample is subjected to an energy pulse of high intensity and short duration, at the same time the temperature of the back surface is measured to determine the thermal diffusivity of the material. This thesis presents a methodology to thermal characterization of semitransparent material using method flash. For this, is made an analysis of the problem of heat transfer with coupling conduction-radiation, where the simultaneous solution of energy equation and the radiative transfer equation (RTE) makes necessary. The finite volume method was used to numerically solve the energy equation and the discrete ordinates method to solve the ETR. A computer code was developed in MATLAB to solve the equations, which is tested and validated with existing cases in the literature.

Keywords: Coupled Conduction-Radiation, Discrete Ordinates, Flash Method, Semitransparent Medium.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| APRESENTAÇÃO..... | 1 |
| 1.1 INTRODUÇÃO | 1 |
| REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 4 |
| 2.1 EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA | 4 |
| 2.2 ACOPLAMENTO CONDUÇÃO-RADIAÇÃO | 7 |
| 2.3 CARACTERIZAÇÃO TÉRMICA DE MEIOS SEMITRANSSPARENTES PELO MÉTODO FLASH..... | 11 |
| ACOPLAMENTO CONDUÇÃO-RADIAÇÃO EM MEIOS SEMITRANSSPARENTES | 13 |
| 3.1 EQUAÇÃO DA ENERGIA..... | 13 |
| 3.2 FUNDAMENTOS DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA..... | 16 |
| 3.2.1 Conceitos Fundamentais | 16 |
| 3.2.2 Equação da Transferência Radiativa (ETR)..... | 18 |
| 3.2.2.1 Simplificações da Equação da Transferência Radiativa | 24 |
| 3.2.2.2 Vetor Fluxo de Calor Radiativo | 26 |
| 3.2.2.3 Divergente do Vetor Fluxo de Calor Radiativo | 26 |
| 3.2.2.4 Representação da Função de Fase | 27 |
| 3.2.2.5 Condições de Contorno para Equação da Transferência Radiativa | 29 |
| 3.3 SOLUÇÃO DA ETR | 30 |
| 3.3.1 Método das ordenadas discretas - Equações | 31 |
| 3.3.2 Seleção das direções discretas..... | 32 |
| 3.3.3 Discretização espacial | 35 |
| MÉTODO FLASH | 41 |
| 4.1 DESENVOLVIMENTOS DAS EQUAÇÕES | 41 |
| ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES..... | 47 |
| 5.1 PROBLEMAS PURAMENTE RADIATIVOS..... | 47 |
| 5.1.1 Espalhamento Puro com contornos negros | 48 |
| 5.1.2 Espalhamento Puro com contornos cinzas e difusos na emissão e na reflexão .. | 51 |

| | |
|--|----|
| 5.1.3 Meio puramente absorvedor com contornos negros | 53 |
| 5.2 PROBLEMAS ACOPLADOS POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO | 55 |
| CONCLUSÕES E SUGESTÕES | 58 |
| REFERÊNCIAS | 59 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 3.1 - Representação de um meio semitransparente e de um elemento infinitesimal de volume deste meio. | 14 |
| Figura 3.2 - Espectro da radiação eletromagnética (GUOLO, 2005). | 16 |
| Figura 3.3 - Interação entre a radiação térmica e uma partícula (DINIZ, 2005). | 17 |
| Figura 3.4 - Meios difusores de radiação: (a) cinzas em suspensão, (b) partículas de alumina (isolante térmico e utilizado em paredes de fornos) (DINIZ, 2005). | 17 |
| Figura 3.5 - Natureza direcional da radiação. | 18 |
| Figura 3.6 - Variação da Intensidade monocromática ao atravessar um volume elementar cilíndrico. | 19 |
| Figura 3.7 - Esquema do ganho líquido de energia radiativa num meio semitransparente. | 21 |
| Figura 3.8 - Esquema do espalhamento de um feixe de radiação (DINIZ, 2005). | 28 |
| Figura 3.9 - Sistema de coordenadas para direção Ω_i | 33 |
| Figura 3.10 - Quadratura S-N, S_4 , CALIOT (2010). | 34 |
| Figura 3.11 - Quadratura T-N, T_2 , CALIOT (2010). | 34 |
| Figura 3.12 - Quadratura polar/azimutal $N_\theta=2$; $N_\phi=2$, CALIOT (2010). | 34 |
| Figura 3.13 - Volume de controle. | 36 |
| Figura 3.14 - Sequência de solução a ser seguida ponto a ponto. | 36 |
| Figura 3.15 - Caminho ao longo do volume de controle. | 38 |
| Figura 3.16 - Tipo de malha utilizada. | 40 |
| Figura 4.1 - Representação de uma amostra sujeita a um pulso de energia em uma de suas superfícies. | 41 |
| Figura 5.1 - Recinto bidimensional quadrado. | 48 |
| Figura 5.2 - Fluxo radiativo adimensional líquido sobre a superfície quente. | 49 |
| Figura 5.3 - Fluxo radiativo adimensional líquido sobre a linha de centro vertical do meio. | 49 |
| Figura 5.4 - Radiação incidente adimensional sobre a linha de centro vertical do meio. ... | 50 |
| Figura 5.5 - Influência da razão de aspecto sobre a radiação incidente adimensional no plano vertical situado no centro do meio. | 50 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.6 - Influência da emissividade das paredes sobre a radiação incidente adimensional no linha de centro do meio. | 52 |
| Figura 5.7 - Influência da emissividade sobre o fluxo de calor radiativo adimensional na superfície quente. | 52 |
| Figura 5.8 - Fluxo de calor radiativo líquido adimensional na parede superior para $\kappa = 10$ | 53 |
| Figura 5.9 - Fluxo de calor radiativo líquido adimensional na parede superior para $\kappa = 1$ | 54 |
| Figura 5.10 - Fluxo de calor radiativo líquido adimensional na parede superior para $\kappa = 0.1$ | 54 |
| Figura 5.11 - Temperatura da face traseira em função do tempo para diferentes temperaturas de referência obtida para um meio semitransparente com superfícies negras. | 55 |
| Figura 5.12 - Temperatura da face traseira em função do tempo obtida para um meio semitransparente não difusor com superfícies negras. | 57 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| Tabela 1 - Valores dos cossenos diretores e pesos para aproximação S4 | 35 |
|---|----|

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--|---|
| a | : Razão de aspecto |
| b_{λ_n} | : Coeficiente da função de fase |
| c | : Velocidade da luz no vácuo ($3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$) |
| c_p | : Calor específico ($\text{J/kg.}^\circ\text{C}$) |
| G_λ | : Radiação Incidente (W.m^{-2}) |
| G^* | : Radiação Incidente Adimensional |
| h_p | : Constante universal de Planck ($6,6256 \times 10^{-34} \text{ J.s}$) |
| h_{CR} | : coeficiente de convecção-radiação acoplados ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) |
| h_{CR}^* | : coeficiente adimensional de convecção-radiação acoplados |
| I_λ | : Intensidade de radiação monocromática (W.m^{-2}) |
| $I_{\lambda, \text{cn}}$ | : Intensidade radiativa de corpo negro (W.m^{-2}) |
| $I_{i,W}$ | : Intensidade média na superfície oeste ao longo da direção i |
| $I_{i,E}$ | : Intensidade média na superfície leste ao longo da direção i |
| $I_{i,S}$ | : Intensidade média na superfície sul ao longo da direção i |
| $I_{i,N}$ | : Intensidade média na superfície norte ao longo da direção i |
| $I_{i,P}$ | : Intensidade média no centro do volume de controle |
| I^* | : Intensidade de radiação adimensional |
| k | : Condutividade térmica (W/m.K) |
| k_B | : Constante universal de Boltzmann ($1,3805 \times 10^{-23} \text{ J/K}$) |
| n | : Índice de refração do meio |
| \vec{n} | : Vetor normal à superfície |
| N | : Parâmetro de acoplamento condução-radiação |
| $\vec{\Omega}$ | : Vetor direção |
| P | : Amplitude do pulso de irradiação (W.m^{-2}) |
| P^* | : Amplitude adimensional do pulso de irradiação |
| $p_\lambda (\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega})$ | : Função de fase de espalhamento |

| | |
|---------------------------|---|
| \dot{Q}_{Liq} | : Fluxo de calor líquido (W.m^{-2}) |
| \dot{Q}_{ent} | : Fluxo de calor que entra no sistema (W.m^{-2}) |
| \dot{Q}_{sai} | : Fluxo de calor que sai no sistema (W.m^{-2}) |
| Q_{rad} | : Fluxo de calor radiativo adimensional |
| Q_{rad}^x | : Fluxo de calor radiativo adimensional na direção x |
| Q_{rad}^y | : Fluxo de calor radiativo adimensional na direção y |
| \vec{q}'' | : Vetor fluxo de calor total |
| \vec{q}''_{cond} | : Vetor Fluxo de calor condutivo |
| \vec{q}''_{rad} | : Fluxo de calor radiativo |
| q_{rad}^x | : Fluxo de calor radiativo na direção x (W.m^{-2}) |
| q_{rad}^y | : Fluxo de calor radiativo na direção y (W.m^{-2}) |
| \vec{s} | : Vetor posição |
| S_{λ} | : Termo fonte da ETR |
| t | : Tempo (s) |
| t_i | : Duração do pulso (ms) |
| T | : Temperatura (K) |
| T_o | : Temperatura do ambiente (K) |
| V | : Volume (m^3) |
| w_i | : Peso das quadraturas |
| x, y | : Coordenadas espaciais (m) |

Letras gregas:

| | |
|-------------------------|---|
| β_{λ} | : Coeficiente espectral de extinção (m^{-1}) |
| ε_{λ} | : Emissividade espectral |
| κ_{λ} | : Coeficiente de absorção espectral (m^{-1}) |
| λ | : Comprimento de onda (μm) |
| μ, ξ, η | : Cossenos diretores |
| ω_{λ} | : Albedo |
| ρ_{λ} | : Refletividade espectral |
| σ_{λ} | : Coeficiente espectral de espalhamento (m^{-1}) |
| $\bar{\sigma}$ | : Constante de Stefan-Boltzmann ($5,669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$) |

τ_x : Coordenada óptica na direção x
 τ_y : Coordenada óptica na direção y
 θ : Temperatura adimensional
 ζ : Tempo adimensional
 ζ_{ir} : Duração do pulso adimensional

CAPÍTULO I

APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

A análise de processos que ocorrem com transferência de calor por condução e radiação simultaneamente em meios semitransparentes tem recebido bastante atenção devido à ampla variedade de aplicações na engenharia e a grande dificuldade, tanto física como matemática, que envolve a avaliação deste tipo de problema. Alguns exemplos das suas aplicações são:

- O processamento e o tratamento térmico de materiais semitransparentes a elevadas temperaturas, como ocorre na fabricação de vidros e cerâmicas, onde o controle exato da distribuição de temperatura se faz necessário para garantir que diferenças de temperatura excessivas não venham a acontecer provocando defeitos como rachaduras e algumas imperfeições que comprometem significativamente a qualidade do produto final;
- O isolamento térmico de fornos e outros equipamentos industriais de alta temperatura, que geralmente é feito com o uso de materiais considerados semitransparentes;
- E os ensaios utilizados na determinação das propriedades termofísicas dos materiais, pois levam em consideração a distribuição espacial e a evolução temporal da temperatura para obtenção dos resultados.

Quando um material semitransparente é submetido a uma elevada temperatura, a radiação térmica é tão ou mais importante que a condução no processo interno de transferência de calor. Para a determinação precisa do campo térmico transiente, é imprescindível o tratamento simultâneo destes dois processos de transferência de calor,

pois a análise separada da radiação e da condução pode introduzir erros consideráveis nos resultados obtidos (Diniz, 2005).

Porém, esta análise é bastante complexa devido à dificuldade existente na avaliação dos fenômenos que ocorrem quando a radiação interage com um meio semitransparente, porque ao contrário dos meios opacos, onde a radiação é considerada um fenômeno puramente superficial, nos meios semitransparentes ela é considerada um fenômeno volumétrico, e, portanto a emissão, a absorção e o espalhamento da radiação ocorrem em todos os pontos do meio, tanto na superfície como em seu interior. Desta forma, para uma verificação completa do balanço de energia, é necessário o conhecimento da temperatura, da intensidade de radiação e das propriedades físicas em todas as localizações do meio.

Os fenômenos físicos que envolvem a transferência de calor por radiação em materiais semitransparentes são modelados matematicamente pela equação da transferência radiativa (ETR). Esta é uma equação do tipo integro-diferencial que descreve a variação da intensidade da radiação para um dado deslocamento ao longo de uma determinada direção. Sua solução permite a determinação do campo da intensidade de radiação no meio investigado e com isso tornando possível o cálculo das grandezas de interesse prático para a engenharia como a radiação incidente, o fluxo de calor radiativo e o seu divergente.

Já a transferência de calor com interação condução-radiação é modelada pela ETR e pela equação da energia, que devem ser resolvidas simultaneamente. Isso se deve ao fato de que a determinação do campo de temperatura do meio é dada pela solução da equação da energia, porém esta contém um termo que envolve o divergente do vetor fluxo de calor radiativo, que por sua vez é obtido pela solução da ETR. Só que para a solução da ETR, é necessário o conhecimento do campo de temperatura do meio, pois esta contém uma expressão que envolve o valor da temperatura local elevada à quarta potência.

O grande avanço da tecnologia computacional observado nos últimos anos tanto em termos de hardware como em termos de software, tem justificado o alto grau de difusão dos métodos numéricos na solução de problemas de engenharia. A facilidade de utilização destes métodos aliada com a rapidez e a qualidade dos resultados obtidos tem permitido simulações de problemas complexos que reproduzem com fidelidade os fenômenos físicos existentes na prática. Tais características têm servido de estímulo para utilização de técnicas numéricas na solução das equações diferenciais investigadas no presente estudo.

A aplicação prática principal desejada neste trabalho, com a solução do problema da transferência de calor com acoplamento condução-radiação, é a sua utilização na

caracterização térmica de materiais semitransparentes, ou seja, na determinação das suas propriedades térmicas como, por exemplo: a difusividade térmica e a condutividade térmica. Estas são, sem dúvida, umas das propriedades físicas mais importantes necessárias para uma análise de transferência de calor.

A condutividade térmica mede a capacidade de um material conduzir calor. O conhecimento desta propriedade é de grande importância na análise de processos em que se deseja tanto maximizar as taxas transferência de calor como minimizá-las. Materiais com condutividade térmica elevada são utilizados em processos onde altas taxas de transferência de calor são necessárias, como é o caso dos trocadores de calor. Já materiais com baixos valores de condutividade térmica são aplicados em situações onde trocas excessivas de calor devem ser evitadas como é o caso do isolamento de equipamentos que não podem ser expostos a temperaturas elevadas.

Já a difusividade térmica é definida pela razão entre a condutividade térmica e o produto da massa específica pelo calor específico do material, podendo ser entendida como a relação entre capacidade do material conduzir calor pela sua capacidade de armazená-la. Materiais com elevada difusividade térmica apresentam uma tendência de se ajustarem rapidamente às mudanças nas condições térmicas impostas a estes, enquanto materiais com baixos valores desta propriedade levam mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

Diversos métodos foram elaborados com a finalidade de estimar o valor destas propriedades para os diversos tipos de materiais de forma cada vez mais precisa. O método flash é um deles. Este consiste em submeter uma amostra pequena e fina de um material a um pulso de energia de alta intensidade e curta duração que incide em uma de suas faces. A energia do pulso é absorvida pela amostra e o aumento da temperatura na face oposta é medido e usado para estimar o valor da difusividade térmica do material analisado. Este método tem a vantagem de ser rápido e preciso, além de permitir a medição com amostras de pequenas dimensões e a possibilidade de se trabalhar com largas faixas de difusividade térmica e de temperaturas.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

A transferência de calor por radiação em meios participantes (isto é, meios que emitem, absorvem e espalham a radiação) assume grande destaque em muitas aplicações de engenharia, principalmente aquelas que envolvem valores elevados de temperatura como acontece em fornos industriais, caldeiras, câmaras de combustão, reatores nucleares, etc. Porém sua análise é bastante complicada devido à complexidade matemática que envolve a solução da equação da transferência radiativa (ETR), que é a equação que modela os problemas dessa natureza. Isso tem estimulado diversos autores a desenvolverem técnicas de solução que procuram aliar precisão com rapidez de cálculo.

Lathrop (1969) apresentou uma análise comparativa de esquemas de interpolação utilizados para resolver a equação do transporte de Boltzmann em geometria bidimensional cartesiana, onde é demonstrado o desenvolvimento das equações de cada esquema e suas principais vantagens e desvantagens.

Fiveland (1984) usou o método das ordenadas discretas (S_n) para obter a solução numérica da equação da transferência radiativa para um meio cinzento bidimensional que absorve, emite e espalha isotropicamente a radiação. Os resultados são apresentados para as aproximações S_2 , S_4 e S_6 correspondendo respectivamente às aproximações de 4, 12 e 24 fluxos.

Kim e Lee (1988) analisaram a transferência de calor radiativa num meio participante cinza com espalhamento anisotrópico e geometria bidimensional retangular. O método das ordenadas discretas foi utilizado na solução da ETR e várias simulações foram feitas para diferentes funções de fase, relação de aspecto, espessura óptica, albedo de

espalhamento e refletividade dos contornos, a fim de demonstrar a influência destas grandezas sobre o fluxo de calor radiativo.

El Wakil (1991) em sua tese estudou a transferência de calor acoplada por condução, convecção e radiação em meios semitransparentes cinzas com geometria bidimensional retangular. A equação da transferência radiativa foi resolvida pelo método das ordenadas discretas e com o uso de um novo esquema de interpolação da intensidade de radiação que permite a eliminação de certas aberrações numéricas que afetam a qualidade dos resultados obtidos. Com isso, diversas simulações foram realizadas mostrando os efeitos dos vários parâmetros analisados sobre a transferência de calor.

Linhua et al (1997) apresentaram um método inverso para estimar o fluxo de calor radiativo incidente numa das extremidades de uma placa semitransparente de comportamento cinza e com contornos cinzas e difusos, a partir do conhecimento das intensidades de radiação saindo da outra extremidade. O problema inverso foi resolvido utilizando o método do gradiente conjugado de minimização baseado no método das ordenadas discretas da equação de transferência radiativa. As equações dos coeficientes de sensibilidade são derivadas e facilmente resolvidas pelo método das ordenadas discretas. Os efeitos do espalhamento anisotrópico, coeficiente de absorção, coeficiente de dispersão, refletividade da fronteira, a temperatura do fluido fora dos limites, coeficientes de transferência de calor por convecção, coeficiente de condução do meio semitransparente e espessura da placa sobre a precisão da análise inversa são investigados. Os resultados mostram que o fluxo de calor incidente de radiação pode ser estimado com boa precisão.

Mishra e Prasad (1998) apresentaram uma visão geral dos vários métodos analíticos e aproximados para a solução de problemas de transferência radiativa de calor em meios participantes. A revisão de cada método é seguida por seus pontos fortes e limitações. A importância da análise da transferência radiativa de calor e as dificuldades na solução desses problemas foram enfatizadas.

Lin et al (1998) apresentaram um novo esquema de discretização angular para o método das ordenadas discretas e aplicaram esta técnica na solução de problemas com transferência radiativa de calor envolvendo meios participantes com geometria tridimensional e funções de fase complexas.

Kim e Huh (2000) mostraram um novo esquema de discretização angular da ETR baseado no método dos volumes finitos com aplicação em problemas de transferência radiativa de calor envolvendo um meio que emite, absorve e espalha anisotropicamente a

radiação e com geometria tridimensional retangular. A eficácia do método é demonstrada com a solução de alguns problemas, sendo feita sua comparação com outras técnicas de discretização angular, como é o caso do método das ordenadas discretas.

Coelho (2004) resolveu a equação da transferência radiativa através de uma nova versão do método das ordenadas discretas, capaz de diminuir a imprecisão dos resultados causada pela utilização de esquemas de discretização de baixa ordem e pelos efeitos provenientes das descontinuidades e da ocorrência de mudanças bruscas das temperaturas nos contornos do problema. O método foi desenvolvido para um meio participante homogêneo, de comportamento cinza e com espalhamento isotrópico, situado num recinto bidimensional de paredes negras. A extensão para o caso de meio não homogêneo, com espalhamento anisotrópico e contornos cinza, também foi apresentada.

Salah, Askri e Nasrallah (2004) apresentaram uma metodologia para a solução da ETR baseada no método dos volumes finitos, aplicada a problemas com geometria cilíndrica axissimétrica envolvendo um meio participante que emite, absorve e espalha isotropicamente ou anisotropicamente a radiação.

Timoshpol'skii et al (2005) resolveram numericamente a equação de transferência radiativa para um meio participante através do método das ordenadas discretas e o método dos elementos finitos. Foram discutidas as vantagens do método proposto e alguns resultados foram expostos para transferência radiativa em uma, duas e três dimensões.

Filipskii e Surzhikov (2007) apresentaram um método para modelar numericamente o aquecimento radiativo da superfície traseira de um veículo espacial. Para determinar os fluxos de calor por radiação, utilizou-se o método das ordenadas discretas sobre malhas não-estruturadas tetraédricas.

Kim (2008) desenvolveu um novo esquema de discretização da ETR baseado no método dos volumes finitos para análise do problema da transferência radiativa em meios participantes de comportamento cinza ou não e com geometria cilíndrica axissimétrica.

Wang e Tan (2009) desenvolveram um modelo para transferência radiativa de calor em um meio semitransparente com espalhamento anisotrópico linear ou não-linear. O método dos harmônicos esféricos (P_N) foi apresentado para resolver a equação de transferência radiativa, transformando-a num conjunto de equações diferenciais parciais acopladas que foram resolvidas pelo método da matriz tridiagonal. Com isso, foi feita uma simulação para a influência do efeito estufa a partir do dióxido de carbono no perfil de temperatura da atmosfera.

Dembele et al (2011) investigaram a aplicação de um esquema exponencial de interpolação para resolver problemas de transferência radiativa de calor com uso de malhas não-estruturadas. Tal esquema foi implementado na análise de cenários envolvendo meios não-cinzentos presentes em diversas aplicações como, por exemplo, em sistemas de combustão.

2.2 ACOPLAMENTO CONDUÇÃO-RADIAÇÃO

Existem muitos processos que envolvem a transferência de calor acoplada por condução e radiação em meios participantes. Na indústria, podem-se citar alguns exemplos como é o caso da manufatura de vidros e cerâmicas, isolamento térmico feito com materiais fibrosos, etc. A análise matemática deste tipo de problema consiste na solução simultânea da equação da energia e da equação da transferência radiativa. Porém o tratamento conjunto destas equações é bastante complicado e geralmente é feito com o uso de técnicas numéricas, a não ser em casos que permitam o uso de simplificações destas equações de forma a facilitar o uso da abordagem analítica. Com isto, diversos autores têm publicado trabalhos propondo diversas técnicas, tanto analíticas como numéricas, destinadas à solução destas equações.

Viskanta e Grosh (1962) realizaram um estudo da transferência de calor para o acoplamento condução-radiação, em regime permanente, ocorrendo num meio emissor e absorvedor da radiação, com propriedades térmicas consideradas constantes, situado entre duas placas paralelas, difusas, cinzas e isotérmicas. O problema é resolvido usando a aproximação de Rosseland e a aproximação de Milne-Eddington.

Anderson e Viskanta (1970) fizeram um estudo da transferência de calor, em regime permanente, num meio participante plano e paralelo, com contornos difusos e isotérmicos. O objetivo é determinar a condutividade radiativa para aplicação em problemas acoplados de condução e radiação. Na metodologia empregada, o poder emissivo é expandido em dois termos da série de Taylor e o coeficiente de absorção espectral é representado pelo modelo de Milne-Eddington.

Doornink e Hering (1972) estudaram a transferência de calor por condução e radiação em condições transientes, para um meio participante de comportamento cinza, isotrópico e com propriedades termofísicas e radiativas independentes da temperatura. O meio se encontra entre duas superfícies planas paralelas, consideradas negras e com

temperatura uniforme. Dessa forma, foram demonstradas as diversas situações em que a interação entre os mecanismos da condução e da radiação deve ser considerada.

Weston e Hauth (1973) demonstraram a influência que diversos fatores como espessura óptica, albedo e parâmetro de acoplamento condução-radiação, exercem sobre a distribuição interna de temperatura, para os casos de regime permanente e transiente, de um meio participante situado entre duas placas planas paralelas e cinzentas, que são mantidas a temperatura constante e que emitem e refletem difusamente a radiação. Neste trabalho foram usadas a quadratura Gaussiana e a técnica da matriz com autovetores para resolver a equação da transferência radiativa, enquanto que a equação da energia foi resolvida através do método explícito de diferenças finitas.

Yuen e Takara (1988) resolveram o problema de transferência de calor acoplada com condução e radiação para uma geometria bidimensional retangular através da aproximação de difusão em um meio homogêneo não difusor, com paredes negras, propriedades constantes e sem geração interna de calor.

Tsai e Lin (1990) investigaram o efeito do espalhamento anisotrópico da radiação na transferência de calor em regime transiente para o acoplamento condução-radiação. A análise é feita para um meio participante situado entre duas superfícies isotérmicas, planas e paralelas, com reflexão difusa e especular. Para resolver a equação da energia, foi utilizado o método das diferenças finitas, enquanto a equação da transferência radiativa foi resolvida pelo método da aproximação nodal.

Tseng e Chu (1992) estudaram a transferência de calor transiente por condução e radiação acoplados, em um meio emissor, absorvedor e com espalhamento anisotrópico da radiação. No estudo, a condutividade térmica foi considerada variável com a temperatura. O método das ordenadas discretas foi utilizado para resolver a equação de transferência radiativa, enquanto a equação da energia foi resolvida através de um esquema implícito de diferenças finitas. O objetivo principal do trabalho foi determinar o efeito da dependência térmica da condutividade térmica sobre a distribuição de temperatura e sobre os fluxos de calor total e radiativo no meio.

Hahn et al (1997) apresentaram um modelo matemático para calcular a transferência de calor por condução e radiação acoplados, aplicado a um meio isotrópico e semitransparente. Esse modelo é usado para simular o método do Laser-flash, técnica bastante utilizada na determinação da difusividade térmica de materiais. A equação da transferência radiativa foi resolvida pelo método das ordenadas discretas e a equação da

energia pelo método das diferenças finitas de Crank-Nicolson. Resultados experimentais foram apresentados, a fim de se obter a validação do modelo proposto.

Liu e Tan (2001) estudaram o problema da transferência de calor com acoplamento condução-radiação com o objetivo de determinar a resposta térmica transiente de um cilindro semitransparente bidimensional com superfícies negras, submetido a um pulso de energia em uma de suas extremidades. Um esquema implícito de diferenças finitas foi utilizado para resolver a equação da energia, enquanto o método das ordenadas discretas foi aplicado para solucionar a equação da transferência radiativa.

Krishnaprakas et al (2001) analisaram a transferência de calor acoplada (condução-radiação), em regime permanente, para um meio cinza emissor, absorvedor e com espalhamento anisotrópico não-linear, situado entre duas placas planas paralelas e opacas, que refletem difusamente e especularmente. A equação da energia foi resolvida pelo método de Numerov e a equação de transferência radiativa pelo método das ordenadas discretas em conjunto com o método de Crank-Nicolson.

Oliveira (2004) fez um estudo teórico da transferência de calor unidimensional para o acoplamento condução-radiação num meio semitransparente com características cinzenta e não cinzenta. Na análise considerou um meio anisotrópico não-linear com propriedades térmicas (condutividade e difusividade) constantes sendo limitado por duas superfícies planas paralelas opacas, difusas na emissão e difusas e especulares na reflexão. Na resolução do problema utilizou a Técnica da Transformada Integral Generalizada para resolver a equação da energia sujeita a condições de contorno do primeiro tipo, enquanto, o Método das Ordenadas Discretas foi utilizado para resolver a equação da transferência radiativa.

Musella e Tschudi (2005) estudaram o problema transitório de transporte de energia em um meio participante (absorve, emite e espalha a radiação) submetido a um pulso de laser finito. O modelo utilizado considera o transporte de calor unidimensional por condução e radiação, onde o campo de radiação é descrito pela aproximação de dois-fluxos. O material é assumido ser cinza, homogêneo e isotrópico, com propriedades físicas e ópticas dependentes da temperatura. Resultados numéricos foram obtidos para uma amostra de zircônia.

Mahapatra et al (2005) estudaram a transferência de calor com condução e radiação acoplados, para um meio cinza que emite, absorve e espalha isotropicamente a radiação, situado num recinto quadrado. As paredes do recinto são consideradas opacas,

difusas e cinzas, sendo duas paredes verticais isotérmicas e duas paredes horizontais adiabáticas. Um novo método híbrido que combina o método das ordenadas discretas com o método dos harmônicos esféricos foi desenvolvido para resolver a equação da transferência radiativa. Além disso, o método dos volumes finitos foi empregado na resolução da equação da energia. O efeito dos vários parâmetros que influenciam o problema, ou seja, o parâmetro condução-radiação, emissividade da superfície, albedo de espalhamento simples e espessura óptica, foi ilustrado no trabalho.

Bai e Fan (2006) investigaram a transferência de calor transiente para o acoplamento condução-radiação, num isolante térmico multicamada composto de materiais não cinzentos semitransparentes e folhas de alta refletividade. A equação governante para a transferência de calor por radiação e condução combinadas é resolvida usando o método numérico de volumes finitos, enquanto que a equação de transferência radiativa é resolvida utilizando o método de diferenças finitas, em que o espalhamento espectral e o coeficiente de absorção são determinados usando a teoria de Mie e a função de fase de espalhamento é modelada pela aproximação Delta-Eddington. O objetivo deste trabalho é comparar os resultados numéricos obtidos para o isolante considerado não cinzento com os obtidos para o isolamento assumido como cinzento, através da utilização de modelos numéricos adequados de transferência de calor.

Wellele et al (2006) analisaram o problema da transferência de calor acoplada por condução e radiação para o caso de amostras de materiais semitransparentes ortotrópicos, aquecidas não uniformemente por um pulso de energia em uma de suas superfícies. O método dos volumes finitos foi utilizado para resolver tanto a equação da energia como a equação da transferência radiativa.

Safavisohi et al (2009) analisaram a resposta térmica transiente de uma camada semitransparente de policarbonato (PC) para transferência de calor por condução e radiação combinadas, através do método de dois-fluxos e o método implícito de diferenças finitas. O material é considerado cinza, isotrópico e com índice de refração maior que um. Com base nos resultados, mostrou-se que a camada de PC respondeu mais rapidamente quando os efeitos da radiação foram considerados, do que para consideração apenas dos efeitos condutivos. Também é mostrado que a refletividade interna das fronteiras teve um grande efeito sobre a resposta térmica da camada, enquanto que a condutividade térmica teve uma influência menor.

2.3 CARACTERIZAÇÃO TÉRMICA DE MEIOS SEMITRASPARENTES PELO MÉTODO FLASH

O método flash proposto por PARKER et al (1961) é uma das técnicas mais utilizadas na determinação das propriedades termofísicas dos materiais. Uma de suas etapas consiste em resolver um problema de transferência de calor com o objetivo de determinar a distribuição espacial e temporal da temperatura de uma amostra sujeita a um pulso de energia em uma de suas superfícies. No caso específico dos materiais semitransparentes, este problema envolve a análise da transferência de calor com acoplamento condução-radiação, que como foi visto, apresenta grande dificuldade. Com isso, alguns autores têm desenvolvido pesquisas envolvendo a utilização desse método na caracterização térmica de materiais semitransparentes.

Andre e Degiovanni (1995) desenvolveram um modelo teórico para a transferência de calor combinada por condução e radiação em regime transiente baseado nas condições existentes em experimentos flash feitos com materiais semitransparentes cinzas ou não-cinzas. O modelo utilizado é unidimensional, sendo a equação da energia resolvida pelo método de Crank-Nicolson e a ETR por um método semi-analítico. No trabalho foram apresentadas simulações para diferentes condições experimentais a fim de verificar sua influência sobre as respostas térmicas obtidas. Resultados experimentais para condutividade térmica de vidros foram apresentados.

Da Silva (1997) apresentou um modelo matemático para análise da transferência de calor acoplada (condução-radiação) com aplicação ao método flash para materiais semitransparentes. Para isso, utilizou-se um método inverso de identificação de parâmetros que utiliza o conceito de coeficiente de sensibilidade aos parâmetros para determinar a difusividade térmica através do método de Levenberg-Marquardt. A equação da energia foi resolvida pelo método dos volumes finitos e a equação da transferência radiativa pelo método das ordenadas discretas.

Lazard et al (1999) apresentaram uma metodologia para determinação da difusividade térmica de materiais semitransparentes através do método inverso. O problema direto foi analisado com um modelo unidimensional de transferência de calor com acoplamento condução-radiação, em que a equação da energia foi resolvida através da aproximação de dois fluxos e a equação da energia é resolvida através do método do quadrupolo térmico. Já o problema inverso foi resolvido através algoritmo Levenberg-

Marquardt que usa o método Gauss-Newton de mínimos quadrados não-lineares para estimar os valores dos parâmetros desconhecidos.

Kabayabaya et al (2004) efetuaram a medição da difusividade térmica de vidros com temperaturas elevadas através do método flash. Para tanto, foi proposto uma técnica experimental capaz de reduzir significativamente as perdas de calor sofridas pela amostra. Essa técnica consiste em prender a amostra sobre seu suporte com três parafusos finos, que diminuem a área de contato entre a amostra e seu suporte, diminuindo assim a transferência de calor entre eles. Resultados teóricos também foram obtidos para mostrar os efeitos do coeficiente de absorção e a espessura da amostra sobre a transferência de calor em meios semitransparentes.

Lazard et al (2004) apresentaram um estudo teórico e experimental que fornece uma metodologia completa para estimar a difusividade térmica de meios semitransparentes utilizando o Método Flash. Um modelo semi-analítico descreve a transferência de calor em uma placa plana com condução e radiação acoplados. A relevância do modelo utilizado para a inversão foi investigada. Resultados experimentais foram apresentados para várias amostras semitransparentes: o vidro float, SiO₂ e ZnSe. Medições da temperatura na superfície traseira da amostra são obtidas por meio óptico (detecção por infravermelhos) para uma ampla faixa de temperatura (293-700 K), para várias condições de contorno de radiação (revestimentos preto ou dourado). Os resultados foram comparados com aqueles obtidos em outros procedimentos experimentais.

Asllanaj et al (2007) investigaram a transferência de calor acoplada por condução e radiação em meios participantes não-cinzas com propriedades ópticas anisotrópicas. O meio é irradiado por uma fonte de calor dependente do tempo. Diferentes tipos de condições são consideradas: negras, opacas, transparente e semitransparente. Um modelo teórico unidimensional é utilizado para representar os fenômenos da transferência de calor. Comparações dos resultados obtidos com casos existentes na literatura são efetuadas. A influência dos contornos transparentes, semitransparentes e opacos para um material isolante feito de fibras de sílica também foi estudada.

CAPÍTULO III

ACOPLAMENTO CONDUÇÃO-RADIAÇÃO EM MEIOS SEMITRANSARENTES

Como foi comentado anteriormente, os processos que envolvem a transferência de calor por condução e radiação em meios participantes (absorvem, emitem e espalham a radiação) são modelados matematicamente pelo acoplamento entre a equação da energia e a equação da transferência radiativa. Desta forma, o presente capítulo trata do desenvolvimento dessas equações, com a finalidade de proporcionar um melhor entendimento tanto físico como matemático dos termos envolvidos por elas. O desenvolvimento deste capítulo é baseado nos trabalhos de EL WAKIL (1991), DA SILVA (1997), DINIZ (2005) e OLIVEIRA (2004).

3.1 EQUAÇÃO DA ENERGIA

A fim de se obter uma equação que exprima o Princípio da Conservação da Energia para um meio semitransparente com transferência de calor acoplada por condução e radiação, sem a presença de geração interna de energia, considera-se o esquema esboçado na Figura (3.1). Nele, o meio se encontra representado por um volume V estacionário e indeformável, cuja distribuição de temperatura é dada por $T(\vec{s}, t)$, onde \vec{s} é o vetor posição de um ponto P do meio em relação a um sistema de coordenadas qualquer e t é a variável temporal.

Aplicando a Primeira Lei da Termodinâmica a um sistema composto por um elemento infinitesimal de volume dV deste meio, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_{Liq} \quad (3.1)$$

onde o termo do lado esquerdo da equação representa a taxa de variação da energia interna do sistema e \dot{Q}_{Liq} a taxa líquida de calor entrando ou saindo do sistema.

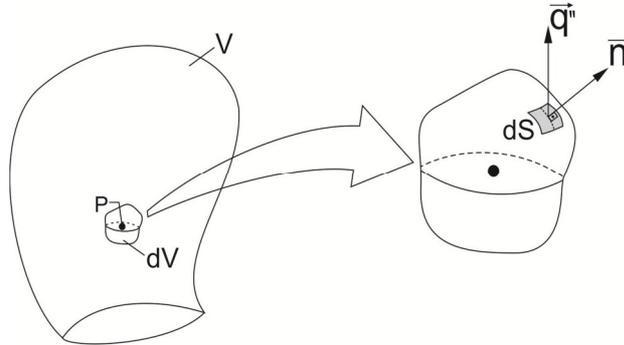


Figura 3.1 - Representação de um meio semitransparente e de um elemento infinitesimal de volume deste meio.

A taxa de variação da energia interna pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\frac{dE}{dt} = \rho C_p(T) \frac{\partial T(\vec{s}, t)}{\partial t} dV \quad (3.2)$$

onde ρ e $C_p(T)$ são respectivamente a massa específica e o calor específico do meio, sendo o calor específico dependente da temperatura em que o meio se encontra.

Já a taxa líquida de calor é dada pela taxa de calor que entra no sistema, \dot{Q}_{ent} , subtraída da taxa de calor que sai, \dot{Q}_{sai} . Com isso,

$$\dot{Q}_{Liq} = \dot{Q}_{ent} - \dot{Q}_{sai} = - \iint_S \vec{q}'' \cdot \vec{n} dS \quad (3.3)$$

onde \vec{q}'' representa o vetor fluxo de calor para dado local da superfície S em torno do volume analisado, e \vec{n} é um vetor normal à superfície neste local e direcionado para fora do volume.

Aplicando o Teorema da Divergência na Equação (3.3), chega-se a seguinte equação:

$$\dot{Q}_{\text{líq}} = - \iint_S \vec{q}'' \cdot \vec{n} \, dS = - \iiint_V \nabla \cdot \vec{q}'' \, dV \quad (3.4)$$

Como a análise está sendo feita em um volume infinitesimal, resulta que a Equação (3.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{Q}_{\text{líq}} = -\nabla \cdot \vec{q}'' \, dV \quad (3.5)$$

Substituindo as Equações (3.2) e (3.5) na Equação (3.1), obtém-se a equação abaixo:

$$\rho C_p(T) \frac{\partial T(\vec{s}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}'' = -\nabla \cdot (\vec{q}''_{\text{cond}} + \vec{q}''_{\text{rad}}) \quad (3.6)$$

onde \vec{q}''_{cond} e \vec{q}''_{rad} representam os vetores fluxo de calor condutivo e radiativo, respectivamente.

O vetor \vec{q}''_{cond} pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\vec{q}''_{\text{cond}} = -k(T)\nabla T \quad (3.7)$$

onde $k(T)$ é a condutividade térmica do meio e que é dependente da temperatura.

Consequentemente, seu divergente assume a forma mostrada abaixo:

$$\nabla \cdot \vec{q}''_{\text{cond}} = \nabla \cdot [-k(T)\nabla T] \quad (3.8)$$

O vetor \vec{q}''_{rad} e o seu divergente serão explicitados mais adiante, após uma introdução da equação da transferência radiativa (ETR). É através do termo $-\nabla \cdot \vec{q}''_{\text{rad}}$ que se dá o acoplamento entre a equação da energia e a ETR. Isto se deve ao fato de que para a determinação do campo de temperatura através da solução da equação da energia, é necessário o conhecimento deste termo, o qual por sua vez é determinado pela solução da ETR. Porém, para solução da ETR, é necessário o conhecimento da distribuição de temperatura, pois como será visto mais adiante, esta contém um termo que envolve a temperatura local elevada à quarta potência.

3.2 FUNDAMENTOS DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

3.2.1 Conceitos Fundamentais

A radiação térmica está associada à taxa de emissão de energia pela matéria, provocada por esta se encontrar a uma temperatura absoluta não nula. Segundo INCROPERA (2003), o mecanismo da emissão está relacionado à energia liberada em consequência das oscilações ou transições dos muitos elétrons que constituem a matéria. Essas oscilações, por sua vez, são sustentadas pela energia interna, e por isso dependem da temperatura da matéria. Além disso, a maneira pela qual esta energia se propaga no espaço pode ser entendida como sendo através de ondas eletromagnéticas.

A radiação eletromagnética ao se propagar em um determinado meio, pode ser caracterizada por sua frequência (ν) e seu comprimento de onda (λ). O espectro de ondas eletromagnéticas (Figura 3.2) é composto por uma ampla faixa de comprimentos de onda, que pode ser subdividida em faixas menores (bandas), de acordo com a maneira como são geradas, e pelos seus efeitos.

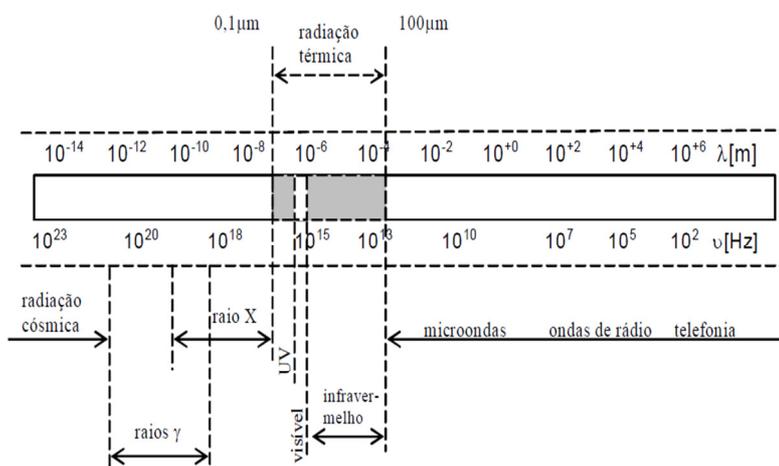


Figura 3.2 - Espectro da radiação eletromagnética (GUOLO, 2005).

A região compreendida entre $0,1$ e $100 \mu\text{m}$, que envolve uma fração da radiação ultravioleta (UV), todo o visível e o infravermelho, é chamada de radiação térmica. Esta

porção do espectro recebe esta denominação por ser capaz de afetar o estado térmico da matéria.

Quando a radiação térmica interage com uma partícula (Figura 3.3), parte dela é absorvida por esta, resultando num aumento de sua energia interna, e parte é afastada de sua direção de propagação por espalhamento (DINIZ, 2005). Na Figura (3.4), são apresentados alguns exemplos de meios que espalham a radiação térmica.

A mudança na direção da radiação incidente pode ocorrer por três motivos:

- Reflexão na superfície da partícula;
- Refração quando penetra e quando sai da partícula;
- Difração ao se desviar da superfície de um obstáculo.

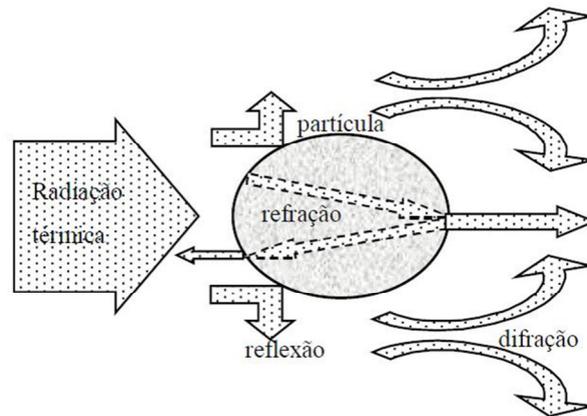
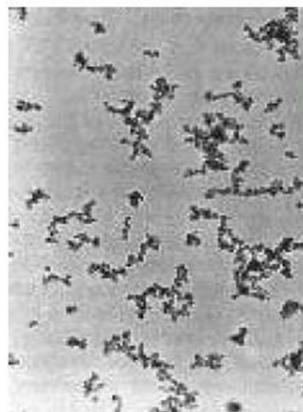
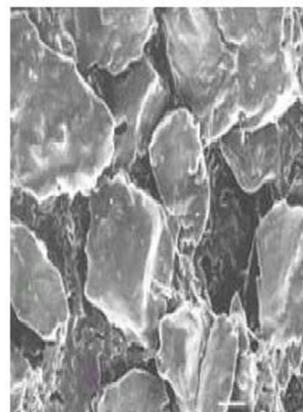


Figura 3.3 - Interação entre a radiação térmica e uma partícula (DINIZ, 2005).



(a)



(b)

Figura 3.4 - Meios difusores de radiação: (a) cinzas em suspensão, (b) partículas de alumina (isolante térmico e utilizado em paredes de fornos) (DINIZ, 2005).

Para a análise dos efeitos da radiação quando esta incide ou emerge de um meio semitransparente, é necessário que se leve em consideração os fenômenos radiativos que ocorrem em todo o volume do meio, pois, a emissão, a absorção e o espalhamento da radiação estão presentes em todos os pontos no interior do meio, inclusive na superfície.

Na análise da taxa de energia radiante que incide ou que emerge de uma superfície, surge a necessidade da introdução do conceito de intensidade de radiação I_λ , que é definida como a taxa na qual energia radiante dq com comprimento de onda λ , incide ou emerge de uma superfície dA na direção Ω , por unidade de área dessa superfície normal a essa direção, por unidade de ângulo sólido no entorno dessa direção e por unidade de comprimento de onda $d\lambda$ no entorno de λ . Com base na Figura (3.5), chega-se a seguinte definição:

$$I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) = \frac{dq}{dA \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda} \quad (3.9)$$

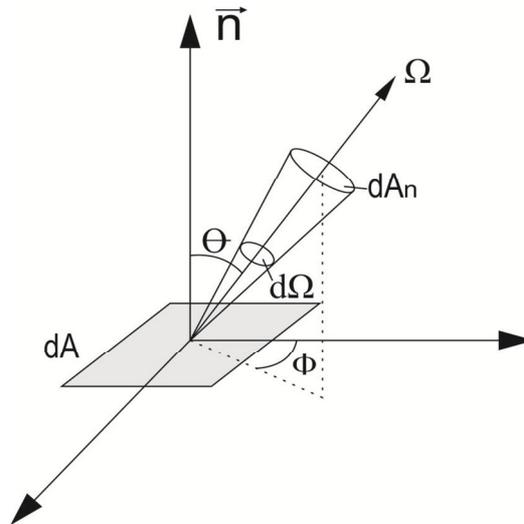


Figura 3.5 - Natureza direcional da radiação.

3.2.2 Equação da Transferência Radiativa (ETR)

Para o cálculo do divergente do vetor \vec{q}''_{rad} , que representa a densidade do fluxo líquido de calor por radiação, é necessário resolver a equação da transferência radiativa. Esta pode ser obtida a partir da teoria microscópica, através da equação de Boltzmann, ou

pela teoria macroscópica de Euler, que consiste em fazer um balanço de energia radiativa sobre um volume elementar, através do caminho percorrido pela radiação OLIVEIRA (2004).

Para este último caso, considera-se um meio semitransparente (Figura 3.6), onde se encontra destacado um elemento de volume cilíndrico de seção transversal dA , de comprimento ds e eixo orientado por um vetor unitário $\vec{\Omega}$. Este elemento está situado num ponto s do meio em que um feixe de radiação monocromática de intensidade $I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t)$ incide normalmente a sua face dA .

Ao atravessar este elemento, a intensidade da radiação sofre os seguintes efeitos:

- Aumento da intensidade devido à emissão de radiação pelo próprio meio e pelo espalhamento da radiação vinda de todas as direções e que são desviadas para a direção $\vec{\Omega}$;
- Diminuição da intensidade devido à absorção da radiação pelo meio e pelo espalhamento da radiação na direção $\vec{\Omega}$ que é desviada para todas as direções do espaço.

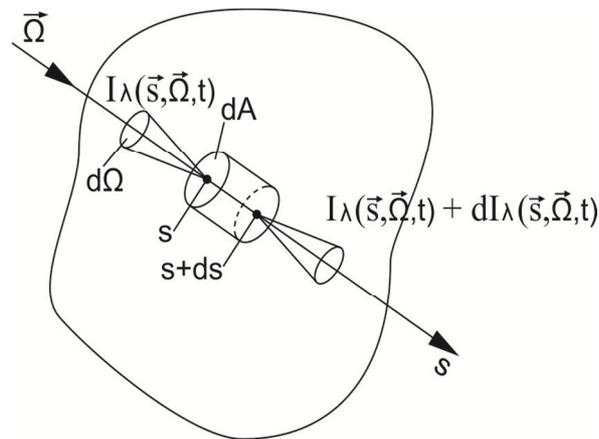


Figura 3.6 - Variação da Intensidade monocromática ao atravessar um volume elementar cilíndrico.

A variação da intensidade de radiação ao atravessar o elemento cilíndrico pode ser representada pela seguinte equação:

$$\frac{dI_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t)}{ds} = W_\lambda \quad (3.10)$$

onde W_λ representa o resultado dos efeitos de ganho e perda de energia radiativa no elemento. Esta expressão será detalhada mais adiante.

Se c representa a velocidade de propagação da radiação no interior do meio, a distância ds percorrida durante o intervalo de tempo dt é dada por:

$$ds = c dt \quad (3.11)$$

Com isso a Equação (3.10) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{c} \frac{DI_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t)}{Dt} = W_\lambda \quad (3.12)$$

onde o operador D/Dt é chamado de derivada total.

Desta forma, a Equação (3.12) fica da seguinte forma:

$$\frac{1}{c} \left(c \nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{\Omega} + \frac{\partial I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} \right) = W_\lambda \quad (3.13)$$

Ou ainda,

$$\nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} = W_\lambda \quad (3.14)$$

O segundo termo da Equação (3.14), em muitas aplicações da engenharia, pode ser desprezado devido ao grande valor da velocidade de propagação c . Com isso, a Equação (3.14) fica como mostrado abaixo:

$$\nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{\Omega} = W_\lambda \quad (3.15)$$

Uma relação explícita para W_λ pode ser obtida considerando-se as interações que ocorrem entre o meio e a radiação incidente, conforme mostra Figura (3.7).

Para um meio semitransparente que emite, absorve e espalha a radiação, o ganho líquido de energia radiativa pelo feixe é dado por:

$$W_{\lambda} = W_{\lambda,emissão} - W_{\lambda,absorção} + W_{\lambda,espalhamento}^{+} - W_{\lambda,espalhamento}^{-} \quad (3.16)$$

onde,

$W_{\lambda,emissão}$ - Ganho por emissão; $W_{\lambda,espalhamento}^{+}$ - Ganho por espalhamento;
 $W_{\lambda,absorção}$ - Perda por absorção; $W_{\lambda,espalhamento}^{-}$ - Perda por espalhamento.

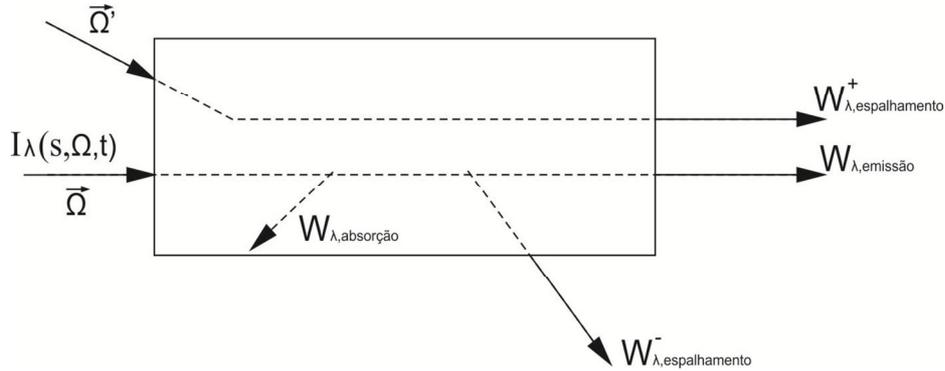


Figura 3.7 - Esquema do ganho líquido de energia radiativa num meio semitransparente.

A seguir, será mostrado o significado físico de cada um desses termos e suas respectivas equações.

- **Ganho por emissão** ($W_{\lambda,emissão}$)

Este termo representa o ganho de energia radiativa pelo feixe devido à emissão de radiação pelo meio por unidade de tempo, volume, comprimento de onda e ângulo sólido. Considerando a hipótese de que o equilíbrio termodinâmico local esteja estabelecido, e que a Lei de Kirchhoff é válida, conclui-se que:

$$W_{\lambda,emissão} = \kappa_{\lambda}(\vec{s}) I_{\lambda,cn}(\vec{s}, T) \quad (3.17)$$

onde $\kappa_{\lambda}(\vec{s})$ é o coeficiente de absorção espectral do meio e $I_{\lambda,cn}(\vec{s}, T)$ a intensidade monocromática de corpo negro na temperatura local $T(\vec{s}, t)$, dada pela Lei de Planck:

$$I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) = \frac{2h_p c_0^2}{\lambda^5 [\exp(h_p c_0 / \lambda k_B T) - 1]} \quad (3.18)$$

onde h_p e k_B são as constantes universais de Planck e de Boltzmann, respectivamente, c_0 é a velocidade da luz no vácuo e T é a temperatura absoluta do corpo negro (K).

- **Perda por absorção** ($W_{\lambda, \text{absorção}}$)

Este termo representa a parcela de energia radiativa perdida pelo feixe em razão da absorção da radiação pelo meio por unidade de tempo, volume, comprimento de onda e ângulo sólido. A equação representativa deste termo é dada por:

$$W_{\lambda, \text{absorção}} = \kappa_{\lambda}(\vec{s}) I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \quad (3.19)$$

- **Ganho por espalhamento** ($W_{\lambda, \text{espalhamento}}^+$)

Representa o ganho de energia radiativa pelo feixe devido à radiação que incide sobre o meio oriunda de todo espaço esférico e que é espalhada na direção $\vec{\Omega}$ do feixe, por unidade de tempo, volume, comprimento de onda e ângulo sólido. Considerando que o espalhamento é coerente, ou seja, a frequência dos raios espalhados é a mesma da radiação incidente, e o meio é anisotrópico, pode-se escrever que:

$$W_{\lambda, \text{espalhamento}}^+ = \frac{\sigma_{\lambda}(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_{\lambda}(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' \quad (3.20)$$

onde $\sigma_{\lambda}(\vec{s})$ é o coeficiente de espalhamento do meio e o termo $p_{\lambda}(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega})$ é a função de fase, e representa a distribuição angular do espalhamento.

O termo $\frac{p_{\lambda}(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) d\Omega'}{4\pi}$ representa a probabilidade de um feixe incidente dentro do ângulo sólido $d\Omega'$, centrado sobre a direção $\vec{\Omega}'$, se espalhar dentro de $d\Omega$ e centrado sobre $\vec{\Omega}$. Como a soma das densidades de probabilidade sobre todas as direções do espaço é igual à unidade, a função de fase pode ser normalizada:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_{\lambda}(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) d\Omega' = 1 \quad (3.21)$$

• **Perda por espalhamento** ($W_{\lambda, \text{espalhamento}}^-$)

Representa a perda de energia radiante pelo feixe devido ao espalhamento da radiação para fora da direção de propagação $\vec{\Omega}$ por unidade de tempo, volume, comprimento de onda e ângulo sólido. Sua equação é dada por:

$$W_{\lambda, \text{espalhamento}}^- = \sigma_{\lambda}(\vec{s}) I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \quad (3.22)$$

Assim, a Equação (3.15) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{\Omega} &= \kappa_{\lambda}(\vec{s}) I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) - \kappa_{\lambda}(\vec{s}) I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) + \\ &+ \frac{\sigma_{\lambda}(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_{\lambda}(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' - \sigma_{\lambda}(\vec{s}) I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizando as seguintes definições,

$$\beta_{\lambda}(\vec{s}) = \kappa_{\lambda}(\vec{s}) + \sigma_{\lambda}(\vec{s}) \quad (3.24)$$

$$\omega_{\lambda}(\vec{s}) = \frac{\sigma_{\lambda}(\vec{s})}{\beta_{\lambda}(\vec{s})} \quad (3.25)$$

onde $\beta_{\lambda}(\vec{s})$ é o coeficiente espectral de extinção e representa os fenômenos que atenuam a intensidade de radiação, $\omega_{\lambda}(\vec{s})$ é o albedo espectral para espalhamento simples, definido como a razão entre o coeficiente de espalhamento e o coeficiente de extinção.

Substituindo estes termos na Equação (3.23) e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{1}{\beta_{\lambda}(\vec{s})} \nabla I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{\Omega} + I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}, t) = [1 - \omega_{\lambda}(\vec{s})] I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) +$$

$$+ \frac{\omega_\lambda(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_\lambda(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' \quad (3.26)$$

A Equação (3.26) é conhecida como a Equação da Transferência Radiativa (ETR) e representa a evolução da intensidade de radiação do feixe ao longo de um caminho s . Aqui, a intensidade dependerá do tempo somente se houver a dependência temporal do termo de emissão $[1 - \omega_\lambda(\vec{s})]I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T)$. Portanto, a variável temporal será omitida nas equações seguintes, sendo sua dependência dada implicitamente pelo termo de emissão.

A ETR pode ser escrita de forma mais simplificada pelo emprego da seguinte definição:

$$S_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) = [1 - \omega_\lambda(\vec{s})]I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) + \frac{\omega_\lambda(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_\lambda(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (3.27)$$

onde $S_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega})$ é denominado termo fonte e representa os fenômenos que aumentam a intensidade de radiação.

Assim, a Equação (3.26) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\beta_\lambda(\vec{s})} \nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} + I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) = S_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \quad (3.28)$$

3.2.2.1 Simplificações da Equação da Transferência Radiativa

A equação da transferência radiativa é do tipo integro-diferencial com dependência de duas variáveis geométricas: posição e direção. Além disso, ainda existe uma dependência espectral dos parâmetros radiativos o que dificulta ainda mais sua resolução. Por isso é que algumas considerações devem ser feitas para que sua solução possa ser obtida.

- **Meio puramente absorvedor e emissor**

O meio é dito puramente absorvedor e emissor quando os efeitos do espalhamento da radiação são desprezíveis. Desta forma, para $\omega_\lambda = 0$ a Equação (3.28) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\kappa_\lambda(\vec{s})} \nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} + I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) = I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) \quad (3.29)$$

- **Meio puramente difusor**

Um meio é dito puramente difusor quando não absorve nem emite radiação, ou seja, qualquer variação na intensidade do feixe radiativo é ocasionada por efeito do espalhamento da radiação. Com isso, para $\omega_\lambda = 1$ a Equação (3.28) torna-se:

$$\frac{1}{\sigma_\lambda(\vec{s})} \nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} + I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) = S_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \quad (3.30)$$

Com $S_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega})$ dado por:

$$S_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_\lambda(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (3.31)$$

- **Meio cinza**

Em termos de radiação, um meio é dito cinza se suas propriedades radiativas são independentes do comprimento de onda. Assim a equação da transferência radiativa pode ser expressa em termos da intensidade total de radiação, que é obtida integrando-se a Equação (3.28) sobre todo o espectro. Desta forma, chega-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{\beta(\vec{s})} \nabla I(\vec{s}, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} + I(\vec{s}, \vec{\Omega}) = S(\vec{s}, \vec{\Omega}) \quad (3.32)$$

Com $S(\vec{s}, \vec{\Omega})$ dado por:

$$S(\vec{s}, \vec{\Omega}) = [1 - \omega(\vec{s})] I_{\text{cn}}(\vec{s}, T) + \frac{\omega(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (3.33)$$

3.2.2.2 Vetor Fluxo de Calor Radiativo

O vetor fluxo de calor radiativo monocromático num ponto de coordenada \vec{s} é definido pela integral do vetor $I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega})\vec{\Omega}$ sobre todas as direções do espaço:

$$\vec{q}''_{\text{rad}}(\vec{s}) = \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega})\vec{\Omega} d\Omega \quad (3.34)$$

Já o vetor fluxo de calor radiativo total pode ser obtido pela integração do fluxo monocromático sobre todos os comprimentos de onda:

$$\vec{q}''_{\text{rad}}(\vec{s}) = \int_0^\infty \vec{q}''_{\text{rad}}(\vec{s}) d\lambda \quad (3.35)$$

3.2.2.3 Divergente do Vetor Fluxo de Calor Radiativo

O divergente do vetor fluxo de calor radiativo caracteriza a energia radiativa que é absorvida ou emitida pelo meio por unidade de tempo, de volume e sobre todos os comprimentos de onda. A importância desta grandeza está associada ao fato de que ela intervém na conservação da energia total do meio (Equação 3.6). Para desenvolver a equação que representa este termo, considera-se primeiramente a ETR escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} = & \kappa_\lambda(\vec{s}) I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) - \kappa_\lambda(\vec{s}) I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) + \\ & + \frac{\sigma_\lambda(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_\lambda(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' - \sigma_\lambda(\vec{s}) I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

e integra-se a mesma sobre todo o ângulo sólido ($\Omega = 4\pi$).

Levando em conta que:

$$\nabla \cdot \vec{q}''_{\text{rad}}(\vec{s}) = \nabla \cdot \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega})\vec{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega=4\pi} \nabla \cdot I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega})\vec{\Omega} d\Omega \quad (3.37)$$

e a normalização da função de fase, Equação (3.21), conclui-se que após algumas simplificações algébricas, a Equação (3.37) assume a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{q}_{\lambda}''_{\text{rad}}(\vec{s}) = \kappa_{\lambda}(\vec{s}) \left[4\pi I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) - \int_{\Omega=4\pi} I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}) d\Omega \right] \quad (3.38)$$

Definindo-se a radiação incidente G_{λ} por:

$$G_{\lambda}(\vec{s}) = \int_{\Omega=4\pi} I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (3.39)$$

Este termo representa a radiação monocromática incidente sobre a posição \vec{s} , proveniente de todas as direções do espaço.

Com isso, a Equação (3.38) torna-se:

$$\nabla \cdot \vec{q}_{\lambda}''_{\text{rad}}(\vec{s}) = \kappa_{\lambda}(\vec{s}) [4\pi I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) - G_{\lambda}(\vec{s})] \quad (3.40)$$

Ainda, para obter o divergente do fluxo total, efetua-se a integração desta equação sobre todos os comprimentos de onda. Fazendo isso, chega-se a seguinte expressão:

$$\nabla \cdot \vec{q}''_{\text{rad}}(\vec{s}) = \int_0^{\infty} \kappa_{\lambda}(\vec{s}) [4\pi I_{\lambda, \text{cn}}(\vec{s}, T) - G_{\lambda}(\vec{s})] d\lambda \quad (3.41)$$

3.2.2.4 Representação da Função de Fase

Como foi visto anteriormente, quando a radiação se propaga através de um meio semitransparente ao longo de uma dada direção, as pequenas partículas existentes no interior do meio fazem com que parte de seu conteúdo energético seja perdido devido ao espalhamento dessa radiação sobre todas as outras direções do espaço. A distribuição direcional deste espalhamento é descrita pela função de fase $p_{\lambda}(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega})$.

No caso em que o meio é considerado homogêneo e isotrópico, e que não apresenta uma direção preferencial de espalhamento, pode-se escrever que $\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega} = \cos \theta_0$, onde θ_0

é o ângulo entre a direção da radiação incidente e a direção de espalhamento, conforme a Figura (3.8).

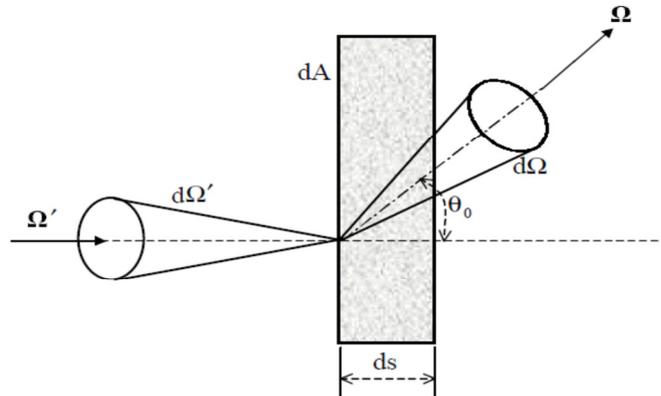


Figura 3.8 - Esquema do espalhamento de um feixe de radiação (DINIZ, 2005).

Dependendo do meio, a função de fase pode ser classificada como isotrópica ou anisotrópica.

- **Função de Fase Isotrópica**

A função de fase é considerada isotrópica, quando a radiação incidente num determinado ponto do meio é espalhada igualmente em todas as direções. Neste caso o seu valor é dado por:

$$p_{\lambda}(\cos \theta_0) = 1 \tag{3.42}$$

- **Função de Fase Anisotrópica**

No espalhamento anisotrópico, a radiação incidente não é espalhada uniformemente sobre todas as direções do espaço, de forma que a distribuição do espalhamento pode assumir diferentes comportamentos a depender, por exemplo, das características que as partículas no interior do meio possuem.

Diferentes representações da função de fase são utilizadas. CHU e CHURCHILL (1955), utilizando a teoria de Mie, exprimiram a função de fase em uma série de polinômios de Legendre:

$$p_{\lambda}(\cos \theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\lambda n} P_n(\cos \theta_0) \quad b_{\lambda 0} = 1 \quad (3.43)$$

onde $b_{\lambda n}$ são constantes que podem ser obtidas pela teoria de Mie em função do comprimento de onda, das dimensões geométricas e das características das partículas que causam espalhamento, e P_n são os polinômios de Legendre de ordem n .

Esta representação permite, em princípio, a aproximação de qualquer função de fase quando o número de termos da série é grande o suficiente, mas na prática trunca-se a série e utiliza-se apenas alguns termos, como mostrado a seguir, para o caso de espalhamento linear anisotrópico de primeiro grau e segundo grau, aproximações estas, que dão bons resultados em praticamente todos os casos significativos de espalhamento da radiação (MODEST et AZAD, 1980).

- Espalhamento Linear Anisotrópico de Primeiro Grau

$$p_{\lambda}(\cos \theta_0) = 1 + b_{\lambda 1} \cos \theta_0 \quad -1 < b_{\lambda 1} < 1 \quad (3.44)$$

Para o caso em que $b_{\lambda 1} = 1$, tem-se que o espalhamento é linear anisotrópico, fortemente dirigido para frente. Já para $b_{\lambda 1} = -1$, o espalhamento é linear anisotrópico, fortemente dirigido para trás.

- Espalhamento Linear Anisotrópico de Segundo Grau

$$p_{\lambda}(\cos \theta_0) = 1 + b_{\lambda 1} \cos \theta_0 + \frac{1}{2} b_{\lambda 2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \quad (3.45)$$

3.2.2.5 Condições de Contorno para Equação da Transferência Radiativa

Para que se possa obter a solução de um problema de transferência de calor por radiação em um meio semitransparente, é necessário que se estabeleça adequadamente suas

condições de contorno. Essas condições variam conforme o tipo da fronteira que envolve o meio, podendo ser representada por combinações das condições apresentadas a seguir.

- **Contornos Negros**

Quando a superfície de contorno é negra, mantida a uma temperatura uniforme T, a intensidade de radiação espectral vinda destas superfícies para o meio é igual à função de Planck para a temperatura da superfície:

$$I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}) = I_{\lambda, \text{cn}}(T) \quad (3.46)$$

- **Contornos Opacos Difusos na Emissão e na Reflexão**

Quando a superfície de contorno é opaca e difusa na emissão e na reflexão, a intensidade da radiação vinda dessas superfícies para o meio é independente da direção, sendo composta de uma componente emissora e outra refletora. Desta forma, a equação que representa tal condição assume a seguinte forma:

$$I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}) = \varepsilon_{\lambda} I_{\lambda, \text{cn}}(T) + \frac{\rho_{\lambda}(\vec{s})}{\pi} \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega}' < 0} |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}'| I_{\lambda}(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (3.47)$$

onde $\varepsilon_{\lambda}(\vec{s})$ e $\rho_{\lambda}(\vec{s})$ são, respectivamente, a emissividade espectral e a refletividade espectral hemisférica.

3.3 SOLUÇÃO DA ETR

Devido a ETR ser uma equação do tipo integro-diferencial, sua solução geralmente apresenta elevada dificuldade. Soluções analíticas geralmente não são obtidas para esta equação a não ser quando um grande número de simplificações pode ser adotado. Quando este não é o caso, o que se faz é resolvê-la através do emprego de técnicas numéricas.

Um dos métodos numéricos mais utilizados para análise desta equação é o chamado método das ordenadas discretas (MOD). Inicialmente proposto por CHANDRASEKHAR (1960) em seus trabalhos sobre radiação estelar e atmosférica, este método tem sido

bastante aplicado para resolver problemas envolvendo transferência radiativa de calor em meios participantes. Esta técnica se baseia na representação discreta da variação angular da intensidade de radiação. Para isso, o método consiste em discretizar o domínio angular da ETR, em um determinado número de direções N , cada uma afetada por um peso. Em seguida, resolve-se a ETR para cada direção discreta, substituindo-se os termos integrais por quadraturas numéricas. Com isso, um sistema de N equações diferenciais parciais de primeira ordem é gerado, podendo este ser resolvido de forma analítica ou numérica.

A seguir, será mostrado o desenvolvimento das equações obtidas através da aplicação do MOD para solução da ETR em meios cinza e com contornos opacos e difusos na emissão e na reflexão.

3.3.1 Método das ordenadas discretas - Equações

Reescrevendo a Equação (3.32) que consiste na simplificação da ETR para meios de comportamento cinza, chega-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{\beta(\vec{s})} \nabla I(\vec{s}, \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega} + I(\vec{s}, \vec{\Omega}) = [1 - \omega(\vec{s})] I_{cn}(\vec{s}, T) + \frac{\omega(\vec{s})}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (3.48)$$

Para obter-se a solução desta equação pelo método das ordenadas discretas, deve-se primeiramente resolvê-la para um conjunto de N direções discretas representadas por um vetor unitário $\vec{\Omega}_i$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$, e ainda fazer a substituição dos termos integrais por uma quadratura numérica, da seguinte forma:

$$\int_{4\pi} f(\vec{\Omega}) d\Omega = \sum_{i=1}^N w_i f(\vec{\Omega}_i) \quad (3.49)$$

onde w_i é o peso da quadratura associado à direção $\vec{\Omega}_i$. Com isso, a Equação (3.48) assume a seguinte forma:

$$\frac{1}{\beta(\vec{s})} \nabla I(\vec{s}, \vec{\Omega}_i) \cdot \vec{\Omega}_i + I(\vec{s}, \vec{\Omega}_i) = [1 - \omega(\vec{s})] I_{\text{cn}}(\vec{s}, T) + \frac{\omega(\vec{s})}{4\pi} \sum_{j=1}^N w_j p(\vec{\Omega}_j \cdot \vec{\Omega}_i) I(\vec{s}, \vec{\Omega}_j) \quad (3.50)$$

Aplicando este princípio na condição de contorno da Equação (3.47), tem-se:

$$I(\vec{s}, \vec{\Omega}_i) = \varepsilon I_{\text{cn}}(T) + \frac{\rho(\vec{s})}{\pi} \sum_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_j < 0} w_j |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_j| I_\lambda(\vec{s}, \vec{\Omega}_j), \quad \vec{n} \cdot \vec{\Omega}_i > 0 \quad (3.51)$$

3.3.2 Seleção das direções discretas

A escolha do esquema de quadratura é arbitrária, embora algumas restrições sobre as direções discretas $\vec{\Omega}_i$ e os pesos da quadratura possam ser utilizadas com o intuito de garantir a simetria e satisfazer certas condições. Geralmente opta-se por um conjunto de direções e pesos que sejam completamente simétricos, ou seja, que não varia com qualquer rotação de 90° em torno de qualquer eixo coordenado, e ainda que satisfaça as seguintes relações para os momentos de radiação:

$$\int_{4\pi} d\Omega = 4\pi = \sum_{i=1}^N w_i \quad (3.52)$$

$$\int_{4\pi} \vec{\Omega} d\Omega = 0 = \sum_{i=1}^N w_i \vec{\Omega}_i \quad (3.53)$$

$$\int_{2\pi} |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}| \vec{\Omega} d\Omega = \pi = \sum_{\substack{i=1 \\ \vec{n} \cdot \vec{\Omega}_i > 0}}^N w_i |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_i| \vec{\Omega}_i \quad (3.54)$$

$$\int_{4\pi} \vec{\Omega} \vec{\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{3} = \sum_{i=1}^N w_i \vec{\Omega}_i \vec{\Omega}_i \quad (3.55)$$

Normalmente, o conjunto de direções da quadratura é descrito através dos seus cossenos diretores. μ , η e ξ , que são derivados a partir dos ângulos θ e φ como mostra a Figura (3.9).

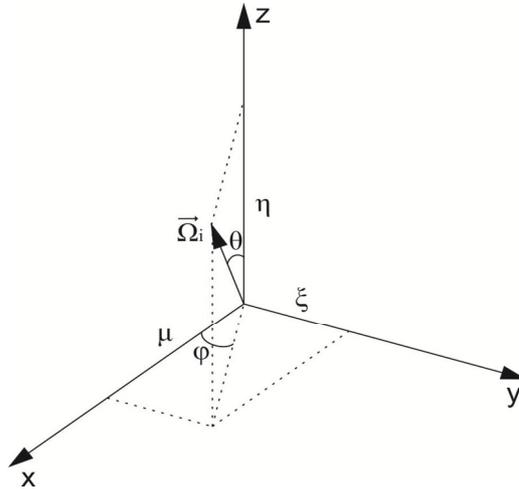


Figura 3.9 - Sistema de coordenadas para direção Ω_i

Onde,

$$\Omega_i^x = \mu = \sin \theta \cos \varphi \quad (3.56)$$

$$\Omega_i^y = \xi = \sin \theta \sin \varphi \quad (3.57)$$

$$\Omega_i^z = \eta = \cos \theta \quad (3.58)$$

Os cossenos diretores satisfazem a seguinte relação:

$$\mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1 \quad (3.59)$$

As Figuras (3.10), (3.11) e (3.12) permitem a visualização de certos aspectos geométricos de alguns tipos de quadratura. Já a Tabela (3.1) contém os valores dos cossenos diretores de cada direção discreta e seus respectivos pesos para uma quadratura do tipo S_4 .

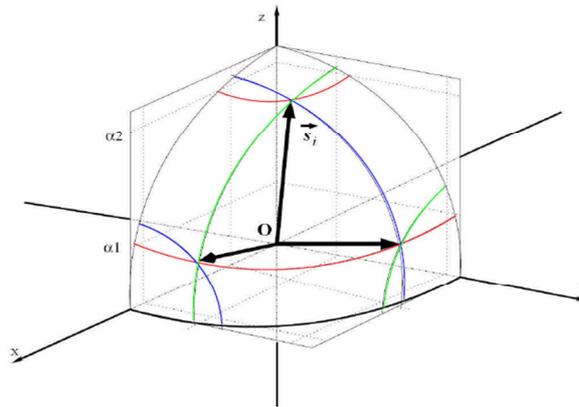


Figura 3.10 - Quadratura S-N, S_4 , CALIOT (2010).

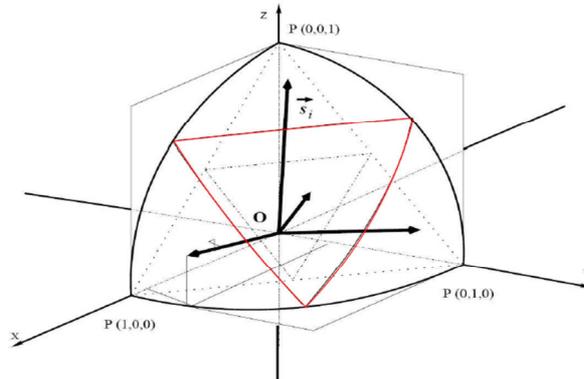


Figura 3.11 - Quadratura T-N, T_2 , CALIOT (2010).

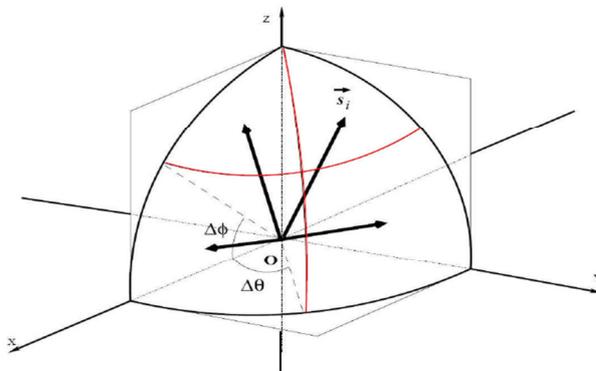


Figura 3.12 - Quadratura polar/azimutal $N_\theta=2$; $N_\phi=2$, CALIOT (2010).

Tabela 1 - Valores dos cossenos diretores e pesos para aproximação S4

| Número da direção | Ordenadas | | | Peso |
|-------------------|------------|------------|-----------|---------|
| | μ | ξ | η | |
| 1 | -0,2958758 | -0,9082483 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 2 | 0,2958758 | -0,9082483 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 3 | -0,2958758 | -0,2958758 | 0,9082483 | $\pi/6$ |
| 4 | -0,9082483 | -0,2958758 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 5 | 0,9082483 | -0,2958758 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 6 | 0,2958758 | -0,2958758 | 0,9082483 | $\pi/6$ |
| 7 | -0,2958758 | 0,2958758 | 0,9082483 | $\pi/6$ |
| 8 | -0,9082483 | 0,2958758 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 9 | 0,9082483 | 0,2958758 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 10 | 0,2958758 | 0,2958758 | 0,9082483 | $\pi/6$ |
| 11 | -0,2958758 | 0,9082483 | 0,2958758 | $\pi/6$ |
| 12 | 0,2958758 | 0,9082483 | 0,2958758 | $\pi/6$ |

3.3.3 Discretização espacial

Para o caso bidimensional, a Equação (3.50) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\beta(\vec{s})} \left(\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} \right) + I(\vec{s}, \vec{\Omega}_i) = [1 - \omega(\vec{s})] I_{cn}(\vec{s}, T) + \frac{\omega(\vec{s})}{4\pi} \sum_{j=1}^N w_j p(\vec{\Omega}_j \cdot \vec{\Omega}_i) I(\vec{s}, \vec{\Omega}_j) \quad (3.60)$$

Para resolver o sistema de equações que se obtém ao aplicar a Equação (3.60) sobre cada direção da quadratura, utiliza-se o método dos volumes finitos. Para tanto, considera-se o volume de controle mostrado na Figura (3.13), cujo volume é dado por $\Delta V = \Delta x \Delta y$. Aplicando a Equação (3.60) para uma dada direção discreta “ Ω_i ” e multiplicando a equação resultante por $dx \cdot dy$, integra-se a mesma ao longo do volume de controle. Com isso, chega-se a seguinte expressão:

$$\mu_i \Delta y (I_{i,E} - I_{i,W}) + \xi_i \Delta x (I_{i,N} - I_{i,S}) = -\beta \Delta V I_{i,P} + \kappa \Delta V I_{cn,P} + \Delta V \frac{\sigma}{4\pi} \sum_i w_i' p_i' I_{i',P} \quad (3.61)$$

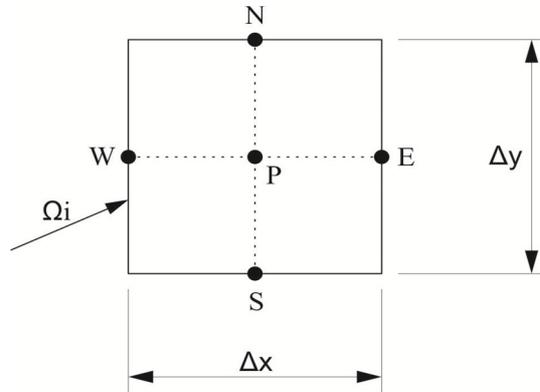


Figura 3.13 - Volume de controle.

A solução da Equação (3.61) para cada uma das i -direções é iterativa, pois o termo fonte de espalhamento e as condições de contorno dependem da intensidade da radiação que chega a cada ponto. Os cálculos devem ser iniciados assumindo que o termo fonte de espalhamento é nulo, pois com esta consideração a intensidade de radiação pode ser calculada. Com isto o procedimento é repetido, porém agora levando-se em conta o termo fonte e a parte das condições de contorno correspondente a reflexão.

Para uma iteração particular, a solução da Equação (3.61), juntamente com suas condições de contorno, é encontrada usando-se o método ponto a ponto. Como mostra a Figura (3.14), o método consiste em resolver a equação para cada ponto da malha seguindo

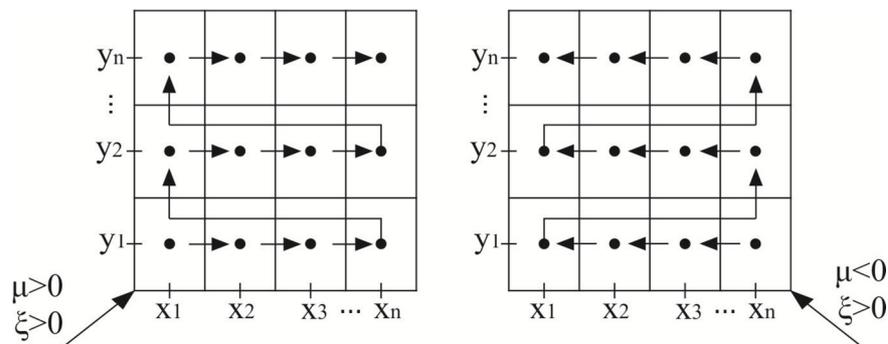


Figura 3.14 - Sequência de solução a ser seguida ponto a ponto.

a sequência demonstrada de acordo com a direção analisada. Para as direções com $\xi < 0$, o procedimento é semelhante ao exposto na figura, porém sendo feito de cima para baixo.

A Equação (3.61) é aplicada para direções com cossenos diretores positivos. Já para os demais casos, o lado esquerdo da equação deve ser modificado. Por exemplo, para o caso da direção com $\mu < 0$ e $\xi > 0$, a integração vai da face leste (E) para face oeste (W), e com isso a equação assume a seguinte forma:

$$\mu_i \Delta y (I_{i,W} - I_{i,E}) + \xi_i \Delta x (I_{i,N} - I_{i,S}) = -\beta \Delta V I_{i,P} + \kappa \Delta V I_{cn,P} + \Delta V \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{i'} w_{i'} p_{i' i} I_{i',P} \quad (3.62)$$

Para as demais direções o procedimento é semelhante.

A fim de reduzir o número incógnitas nestas equações, deve-se fazer o uso de esquemas de interpolação, os quais relacionam as intensidades de radiação nos contornos do volume de controle com a intensidade no centro deste. Para isso, existem vários esquemas disponíveis na literatura. Alguns desses esquemas são citados em MODEST (1993) e são mostrados abaixo:

- **Step Scheme**

É o mais simples esquema de interpolação, e que não produz resultados fisicamente impossíveis. Porém, possui o maior erro de truncamento de todos os métodos. É definido da seguinte forma:

$$I_{i,N} = I_{i,P} \quad (3.63)$$

$$I_{i,E} = I_{i,P} \quad (3.64)$$

- **Diamond Scheme**

Este é o método mais popular de interpolação. Todavia, este pode produzir resultados sem sentido físico como intensidades negativas. Para resolver isto, as intensidades negativas são consideradas nulas no processo de cálculo, mas isto acaba produzindo oscilações e instabilidades indesejáveis que podem ser diminuídas usando-se malhas cada vez mais refinadas. Este esquema consiste na seguinte expressão:

$$I_{i,P} = \frac{I_{i,E} + I_{i,W}}{2} = \frac{I_{i,N} + I_{i,S}}{2} \quad (3.65)$$

O esquema de interpolação utilizado neste trabalho pode ser encontrado em LATHROP (1969), e seu desenvolvimento será mostrado a seguir.

Aplicando a ETR para a intensidade de radiação que sai do ponto s_0 e chega em s' através do caminho s mostrado na Figura (3.15), obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{dI(s)}{ds} + \beta I(s) = S(s) \quad (3.66)$$

onde S é o termo fonte, definido por:

$$S(s) = \kappa_a I_{cn}(T) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I(s', \vec{\Omega}', t) d\Omega' \quad (3.67)$$

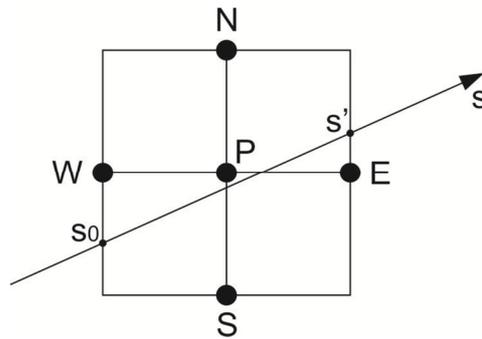


Figura 3.15 - Caminho ao longo do volume de controle.

A Equação (3.66) pode ser multiplicada por $e^{\beta s}$, e após algumas manipulações esta assume a seguinte forma:

$$\frac{d}{ds} [I(s)e^{\beta s}] = S(s)e^{\beta s} \quad (3.68)$$

Integrando-a entre os limites s_0 e s' , tem-se:

$$I(s') = I(s_0)e^{-\beta(s'-s_0)} + \frac{1}{e^{\beta s'}} \int_{s_0}^{s'} S(s)e^{\beta s} ds \quad (3.69)$$

Considerando que o valor de S não varia no interior do volume, o termo integral desta equação é resolvido, resultando na seguinte expressão:

$$I(s) = I(s_0)e^{-\beta(s-s_0)} + S[1 - e^{-\beta(s-s_0)}] \quad (3.70)$$

Assumindo que as intensidades nas faces oeste e sul do volume de controle são uniformes, ou seja, $I_W(\mu, \xi)$ e $I_S(\mu, \xi)$, pode-se calcular as intensidades na face leste e norte através das seguintes equações:

$$I_E(\mu, \xi) = \frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} I(\Delta x, y, \mu, \xi) dy \quad (3.71)$$

$$I_N(\mu, \xi) = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} I(x, \Delta y, \mu, \xi) dx \quad (3.72)$$

A solução das equações acima é apresentada a seguir, onde foram introduzidos os seguintes parâmetros que caracterizam a direção e as dimensões do volume de controle:

$$a = \beta \frac{\Delta x}{\mu_m} \quad (3.73)$$

$$b = \beta \frac{\Delta y}{\xi_m} \quad (3.74)$$

$$c_m = \frac{a}{b} \quad (3.75)$$

- Se $cm > 1$:

$$I_{mE} = \frac{S_m}{\beta} + \left(I_{mS} - \frac{S_m}{\beta} \right) (1 - e^{-B}) \frac{1}{B} \quad (3.76)$$

$$I_{mN} = \frac{S_m}{\beta} + \left(I_{mW} - \frac{S_m}{\beta}\right) (1 - e^{-B}) \frac{1}{A} + \left(I_{mS} - \frac{S_m}{\beta}\right) \left(1 - \frac{1}{c_m}\right) e^{-B} \quad (3.77)$$

- Se $cm < 1$:

$$I_{mE} = \frac{S_m}{\beta} + \left(I_{mW} - \frac{S_m}{\beta}\right) (1 - c_m) e^{-A} + \left(I_{mS} - \frac{S_m}{\beta}\right) (c_m) (1 - e^{-A}) \frac{1}{A} \quad (3.78)$$

$$I_{mN} = \frac{S_m}{\beta} + \left(I_{mW} - \frac{S_m}{\beta}\right) (1 - e^{-A}) \frac{1}{A} \quad (3.79)$$

- Se $cm = 1$:

$$I_{mE} = \frac{S_m}{\beta} + \left(I_{mS} - \frac{S_m}{\beta}\right) (1 - e^{-B}) \frac{1}{B} \quad (3.80)$$

$$I_{mN} = \frac{S_m}{\beta} + \left(I_{mW} - \frac{S_m}{\beta}\right) (1 - e^{-A}) \frac{1}{A} \quad (3.81)$$

As equações discretizadas obtidas neste trabalho foram desenvolvidas para uma malha do tipo mostrada na Figura (3.16), que apresenta volumes de controle na fronteira cujos pontos centrais se situam sobre a mesma.

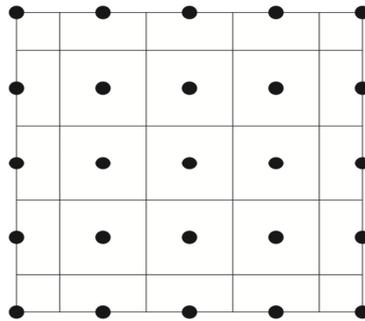


Figura 3.16 - Tipo de malha utilizada.

Como se pode observar, a malha envolve volumes inteiros, meios-volumes e quarto de volumes.

CAPÍTULO IV

MÉTODO FLASH

4.1 DESENVOLVIMENTOS DAS EQUAÇÕES

Esta seção tem como objetivo apresentar as equações que serão utilizadas para determinar o perfil temporal do campo de temperatura de uma amostra de material semitransparente cinza submetido a um pulso de energia de alta intensidade e curta duração, que incide sobre uma de suas superfícies, como mostra a Figura (4.1). Estas características são típicas de um ensaio flash para caracterização térmica de materiais semitransparentes.

Como foi comentado anteriormente, a análise deste problema consiste na solução de duas equações diferenciais acopladas: a equação da energia e a equação da transferência radiativa. Estas equações juntamente com suas condições de contorno são explicitadas a seguir.

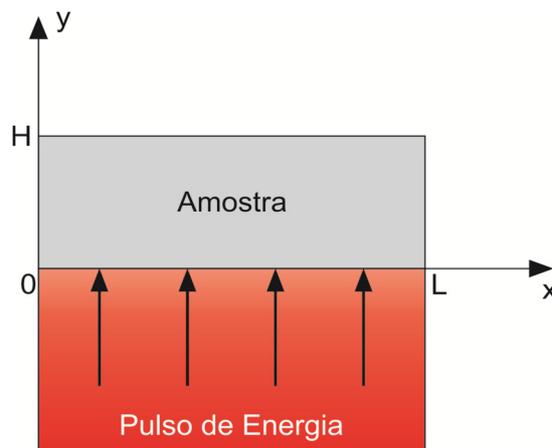


Figura 4.1 - Representação de uma amostra sujeita a um pulso de energia em uma de suas superfícies.

Equação da Energia:

$$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{k} \nabla \cdot \vec{q}''_{\text{rad}} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} \quad (4.1)$$

onde

$$\nabla \cdot \vec{q}''_{\text{rad}} = (1 - \omega)\beta(4n^2\bar{\sigma}T^4 - G) \quad (4.2)$$

onde n é o índice de refração do meio e $\bar{\sigma}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Já o termo G representa a radiação incidente no meio, e é calculado pela seguinte equação:

$$G = \int_{4\pi} I d\Omega \quad (4.3)$$

Condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -h_{CR}[T(x, y, t) - T_0] - q_{\text{rad}}^x(x, y, t), \quad x = 0 \quad (4.4)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = h_{CR}[T(x, y, t) - T_0] - q_{\text{rad}}^x(x, y, t), \quad x = L \quad (4.5)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = -h_{CR}[T(x, y, t) - T_0] - q_{\text{rad}}^y(x, y, t) + F(t), \quad y = 0 \quad (4.6)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=H} = h_{CR}[T(x, y, t) - T_0] - q_{\text{rad}}^y(x, y, t), \quad y = H \quad (4.7)$$

onde h_{CR} é o coeficiente de convecção-radiação acoplados, L é a largura do material e H sua espessura. Já q_{rad}^x e q_{rad}^y são respectivamente os fluxos de calor radiativos na direção x e y e podem ser calculados pelas seguintes equações:

$$q_{\text{rad}}^x = \int_{4\pi} \mu I d\Omega \quad (4.8)$$

$$q_{\text{rad}}^y = \int_{4\pi} \xi I d\Omega \quad (4.9)$$

O termo $F(t)$ representa o fluxo de energia do pulso. Neste trabalho, o pulso de energia é representado matematicamente da seguinte forma:

$$F(t) = \begin{cases} P, & 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & t > t_i \end{cases} \quad (4.10)$$

onde P é a amplitude do pulso de irradiação e t_i representa sua duração.

Condição de simetria:

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (4.11)$$

Condição inicial:

$$T(x, y, t) = T_o, \quad t = 0 \quad (4.12)$$

Adimensionalização:

A fim de se obter a adimensionalização das equações acima, as seguintes variáveis adimensionais são introduzidas:

$$I^* = \frac{\pi I}{\sigma T_o^4} \quad (4.13)$$

$$N = \frac{k\beta}{4n^2\sigma T_o^3} \quad (4.14)$$

$$P^* = \frac{P}{4n^2\sigma T_o^4} \quad (4.15)$$

$$Q_{\text{rad}} = \frac{q_{\text{rad}}}{4n^2\sigma T_o^4} \quad (4.16)$$

$$Q_{\text{rad}}^x = \frac{q_{\text{rad}}^x}{4n^2\sigma T_o^4} \quad (4.17)$$

$$Q_{\text{rad}}^y = \frac{q_{\text{rad}}^y}{4n^2\sigma T_o^4} \quad (4.18)$$

$$h_{\text{CR}}^* = \frac{h_{\text{CR}}}{4n^2\sigma T_o^3} \quad (4.19)$$

$$\theta = \frac{T}{T_o} \quad (4.20)$$

$$\tau_x = \beta x \quad (4.21)$$

$$\tau_y = \beta y \quad (4.22)$$

$$\zeta = \frac{k}{\rho C_p} \beta^2 t \quad (4.23)$$

$$\zeta_{\text{ir}} = \frac{k}{\rho C_p} \beta^2 t_{\text{ir}} \quad (4.24)$$

Com a aplicação destas expressões, as seguintes equações adimensionais são obtidas:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau_x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau_y^2} - \frac{1}{N} \nabla^* \cdot \mathbf{Q}_{\text{rad}}^x = \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \quad (4.25)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tau_x} = \frac{1}{N} [-h_{\text{CR}}^* (\theta - 1) - Q_{\text{rad}}^x], \quad \tau_x = 0 \quad (4.26)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tau_x} = \frac{1}{N} [h_{CR}^*(\theta - 1) - Q_{rad}^x], \quad \tau_x = \beta L \quad (4.27)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tau_y} = \frac{1}{N} [-h_{CR}^*(\theta - 1) - Q_{rad}^y + F^*(\zeta)], \quad \tau_y = 0 \quad (4.28)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tau_y} = \frac{1}{N} [h_{CR}^*(\theta - 1) - Q_{rad}^y], \quad \tau_y = \beta H \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_x} = 0, \quad \tau_x = \beta L/2 \quad (4.30)$$

$$\theta = 1, \quad \zeta = 0 \quad (4.31)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{Q}_{rad}^x = (1 - \omega)(\theta^4 - G^*) \quad (4.32)$$

$$G^* = \frac{1}{4n^2\pi} \int_{\Omega=4\pi} I^* d\Omega = \frac{1}{4n^2\pi} \sum_{m=1}^N w_m I_m^* \quad (4.33)$$

$$Q_{rad}^x = \frac{1}{4n^2\pi} \int_{\Omega=4\pi} \mu I^* d\Omega = \frac{1}{4n^2\pi} \sum_{m=1}^N \mu_m w_m I_m^* \quad (4.34)$$

$$Q_{rad}^y = \frac{1}{4n^2\pi} \int_{\Omega=4\pi} \xi I^* d\Omega = \frac{1}{4n^2\pi} \sum_{m=1}^N \xi_m w_m I_m^* \quad (4.35)$$

onde as integrais das equações acima foram substituídas por uma quadratura numérica, que pode ser resolvida através do método das ordenadas discretas.

Aqui, o método dos volumes finitos é novamente utilizado, mas desta vez, para resolver a Equação (4.25). Para isso, integra-se esta equação ao longo de um volume de controle como o que é mostrado na Figura (3.13), conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
& \iiint \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau_x^2} \right) d\tau_x d\tau_y d\zeta + \iiint \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau_y^2} \right) d\tau_x d\tau_y d\zeta - \iiint \left(\frac{1}{N} \nabla^* \cdot \mathbf{Q}_{\text{rad}}^x \right) d\tau_x d\tau_y d\zeta = \\
& = \iiint \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} d\tau_x d\tau_y d\zeta \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Resolvendo esta equação e utilizando um esquema totalmente implícito para avaliação das temperaturas, a seguinte equação é obtida:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{2\Delta\zeta}{\Delta\tau_x^2} + \frac{2\Delta\zeta}{\Delta\tau_y^2} \right) \theta_{(x,y)}^{t+1} = \theta_{(x,y)}^t + \frac{\Delta\zeta}{\Delta\tau_x^2} (\theta_{(x+1,y)}^{t+1} + \theta_{(x-1,y)}^{t+1}) + \\
& + \frac{\Delta\zeta}{\Delta\tau_y^2} (\theta_{(x,y+1)}^{t+1} + \theta_{(x,y-1)}^{t+1}) - \frac{(1-\omega)}{N} (\theta_{(x,y)}^{t+1})^4 \Delta\zeta + \frac{(1-\omega)}{N} G^* \Delta\zeta \quad (4.37)
\end{aligned}$$

A equação acima é desenvolvida para todos os pontos de uma malha como a da Figura (3.16), o que resulta num sistema de equações não-lineares que são resolvidas neste trabalho pelo método de Newton-Raphson, através do uso da subrotina *fsolve* do MATLAB.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES

O presente capítulo trata da análise e solução de problemas que envolvem a transferência de calor em meios semitransparentes cinzentos. São investigados casos tanto com transferência puramente radiativa como casos com transferência acoplada por condução e radiação. Os resultados obtidos são comparados com valores apresentados em outros trabalhos.

As equações desenvolvidas no capítulo anterior, e aplicadas neste capítulo, foram resolvidas através de um código computacional elaborado em plataforma MATLAB, o qual foi executado num computador com processador Core i3 2,53 GHz com 3 GB de RAM DDR3 1333 MHz.

5.1 PROBLEMAS PURAMENTE RADIATIVOS

Para analisar a influência dos diferentes parâmetros radiativos sobre a transferência de calor por radiação em meios participantes, e efetuar a comparação dos resultados obtidos através do método de solução apresentado neste trabalho com os métodos utilizados por outros autores, propõe-se aqui a análise de alguns tipos de problemas que são comumente encontrados na literatura.

Em todos os casos tratados, considera-se um meio semitransparente cinza, homogêneo e isotrópico, de geometria retangular e que possui índice de refração unitário. Uma malha contendo 21x21 volumes de controle foi adotada por apresentar uma convergência satisfatória dos resultados. Uma quadratura do tipo S_8 foi utilizada, a qual contém 40 direções, cada uma com seu respectivo peso.

5.1.1 Espalhamento Puro com contornos negros

O problema consiste num recinto bidimensional retangular como mostrado na Figura (5.1), com paredes negras e frias ($T_F = 0$ K) com exceção da parede inferior, que possui um poder emissivo igual à unidade. No interior do recinto existe um meio que espalha isotropicamente a radiação. Além disso, o meio não emite nem absorve a radiação, e seus coeficientes de espalhamento e de absorção são respectivamente iguais a 1 e 0 m^{-1} .

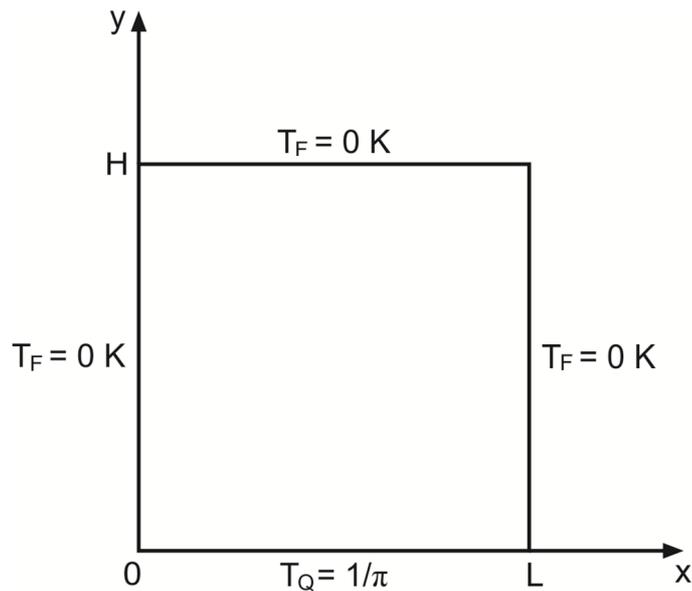


Figura 5.1 - Recinto bidimensional quadrado.

A Figura (5.2) mostra o fluxo de calor radiativo líquido na direção y , Q_y , para os pontos sobre a superfície quente enquanto a Figura (5.3) mostra Q_y sobre o plano médio vertical do meio. Já a Figura (5.4) mostra a radiação incidente também sobre a linha de centro vertical do meio. Como se pode observar, os resultados obtidos apresentam boa concordância com os valores fornecidos por KIM e LEE (1988).

Na Figura (5.5), mostra-se a influência da razão de aspecto ($a = L/H$) sobre a radiação incidente na linha de centro vertical, onde se pode ver que quanto maior a razão de aspecto maior será seu valor. Isso se deve ao fato de que para valores elevados da razão de aspecto, a intensidade de radiação no meio sofre uma influência maior da parede quente e conseqüentemente seu valor se torna superior aos casos com razão de aspecto inferior, onde a parede quente exerce menos influência sobre intensidade de radiação no meio.

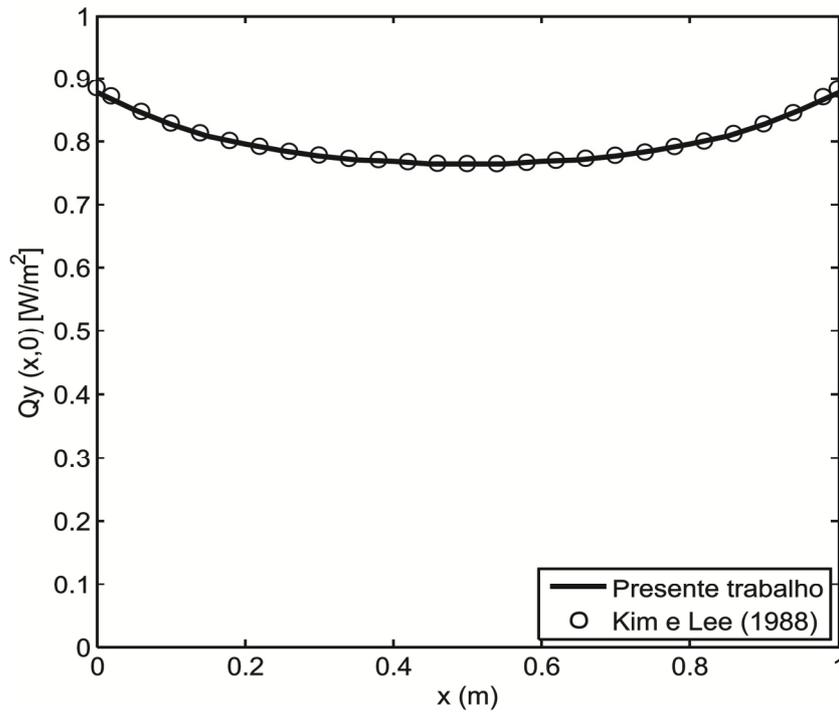


Figura 5.2 - Fluxo radiativo adimensional líquido sobre a superfície quente.

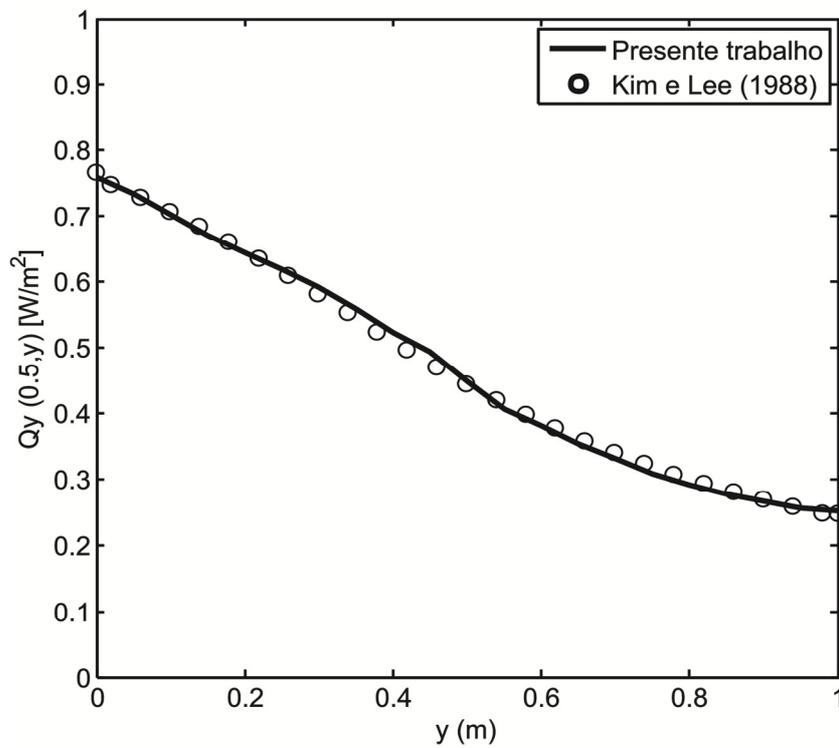


Figura 5.3 - Fluxo radiativo adimensional líquido sobre a linha de centro vertical do meio.

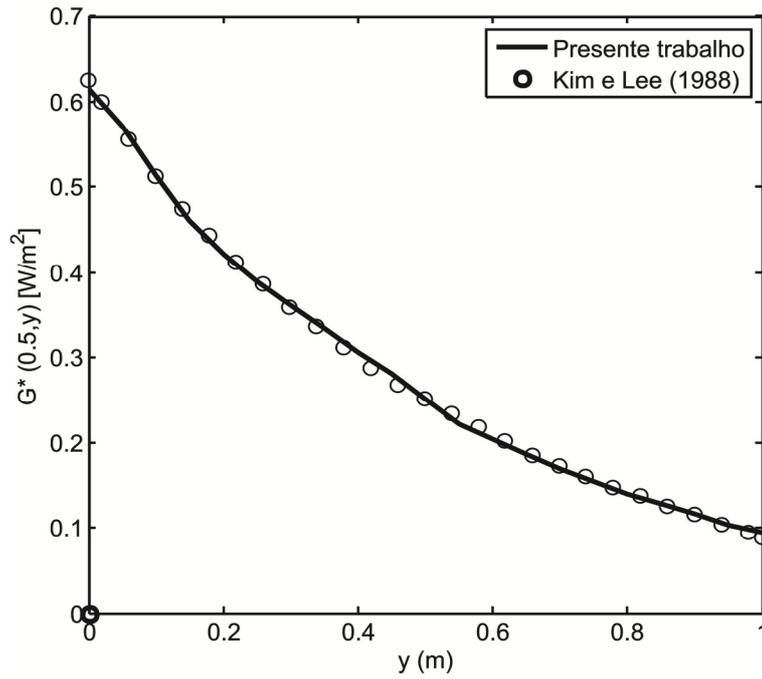


Figura 5.4 - Radiação incidente adimensional sobre a linha de centro vertical do meio.

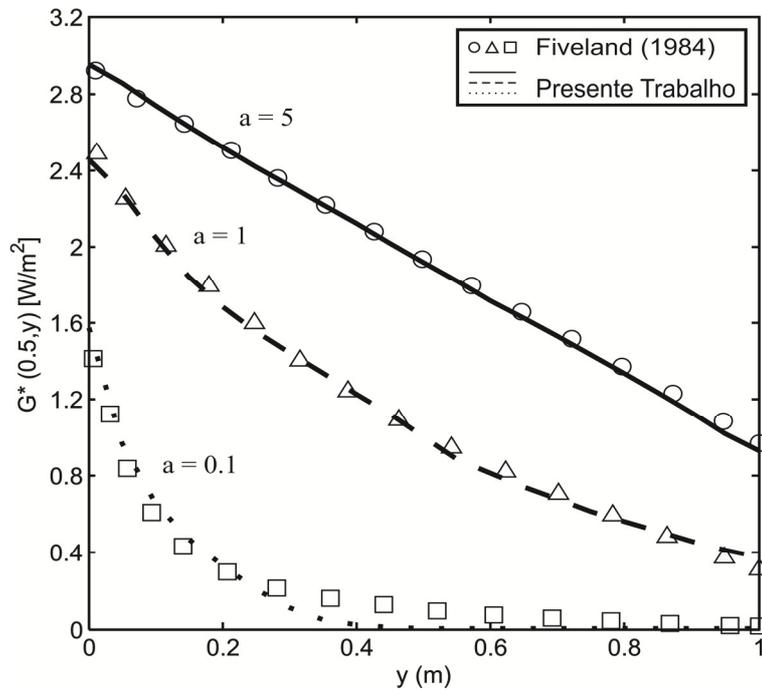


Figura 5.5 - Influência da razão de aspecto sobre a radiação incidente adimensional no plano vertical situado no centro do meio.

Ainda na Figura (5.5), verifica-se que para pequenos valores da razão de aspecto, os resultados obtidos neste trabalho tendem a apresentar desvios em relação aos resultados encontrados em FIVELAND (1984). Este fato pode ser explicado pelas diferenças existentes entre os métodos de solução utilizados, pois em FIVELAND (1984), as intensidades nas faces dos volumes de controle foram calculadas utilizando o *diamond scheme*, que considera a intensidade de radiação no centro do volume de controle como sendo a média das intensidades nas faces laterais, enquanto que neste trabalho foi considerada uma distribuição não uniforme e mais realista da intensidade. Por tanto, espera-se que os resultados apresentados neste trabalho sejam mais precisos.

5.1.2 Espalhamento Puro com contornos cinzas e difusos na emissão e na reflexão

Nesta seção, a influência da emissividade das paredes é analisada. O problema é semelhante ao caso abordado na seção anterior, com exceção dos contornos, que são agora cinzas e com emissão e reflexão difusa. A Figura (5.6) mostra a radiação incidente na linha de centro vertical do meio para valores de emissividade iguais a 1, 0.5 e 0.1. Verifica-se que quanto maior a emissividade, maior é o valor da radiação incidente sobre o meio, o que é de se esperar, pois a quantidade de energia emitida pela parede quente torna-se maior. Outro detalhe importante de ser observado, é que para valores pequenos da emissividade o perfil da radiação incidente no plano vertical central se aproxima de uma linha horizontal. Isso ocorre, pois quando a emissividade das paredes é pequena e conseqüentemente a reflexão é elevada ($\rho = 1 - \epsilon$), a quantidade de energia emitida pela superfície quente é pequena e como as paredes frias não emitem energia, mas são altamente refletoras, estas acabam retornando grande parte da energia que recebem.

A figura (5.7) mostra a influência da emissividade sobre o fluxo de calor radiativo líquido sobre a superfície quente. Verifica-se que ele atinge um máximo para o caso com paredes negras, e, para os casos com contornos altamente refletoras, seu valor é consideravelmente menor e observa-se um perfil uniforme ao longo de toda a extensão da largura.

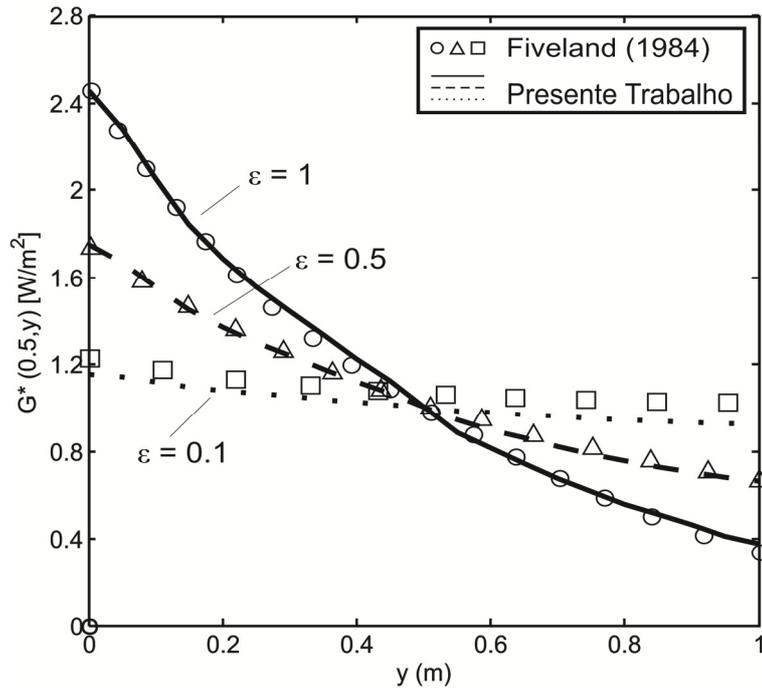


Figura 5.6 - Influência da emissividade das paredes sobre a radiação incidente adimensional no linha de centro do meio.

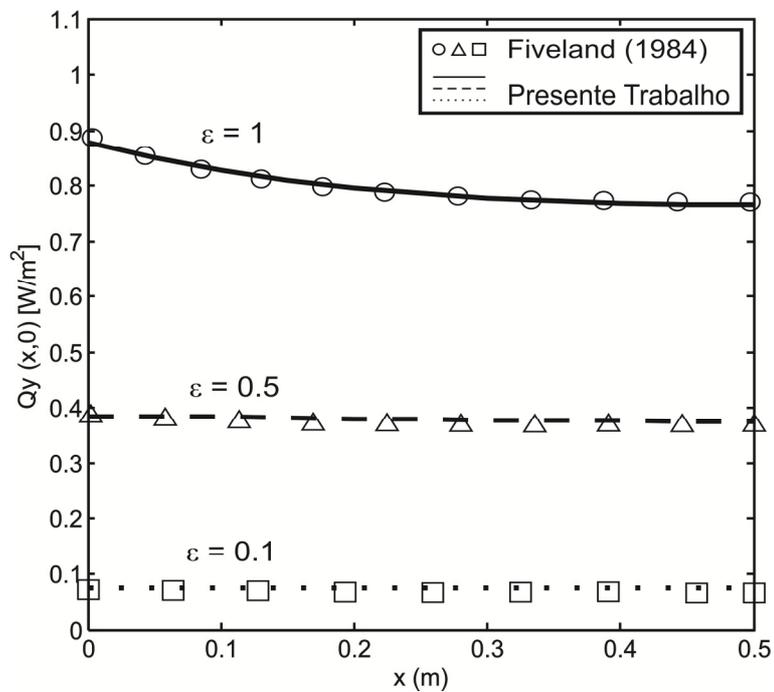


Figura 5.7 - Influência da emissividade sobre o fluxo de calor radiativo adimensional na superfície quente.

5.1.3 Meio puramente absorvedor com contornos negros

O problema analisado envolve um meio puramente absorvedor mantido com um poder emissivo unitário e envolvido por paredes negras e frias. SHAH (1979) apresentou uma solução analítica para este problema que é bastante usada para validação de métodos numéricos usados na solução da ETR. A equação para o cálculo do fluxo de calor radiativo saindo pela superfície é dada por:

$$q(x, 0) = \frac{2}{\pi} \kappa \int_0^L \left\{ L |\kappa(\xi - x)| - L \left[\kappa \sqrt{(\xi - x)^2 + H^2} \right] \right\} d\xi \quad (5.1)$$

onde $L(\xi)$ é definido por $L(z) = K_0(z) - K_{i2}(z)$, em que K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero e K_{i2} é a integral de K_0 repetida duas vezes.

As Figuras (5.8), (5.9) e (5.10) mostram o perfil do fluxo de calor Q_y na superfície superior do meio para diferentes valores do coeficiente de absorção.

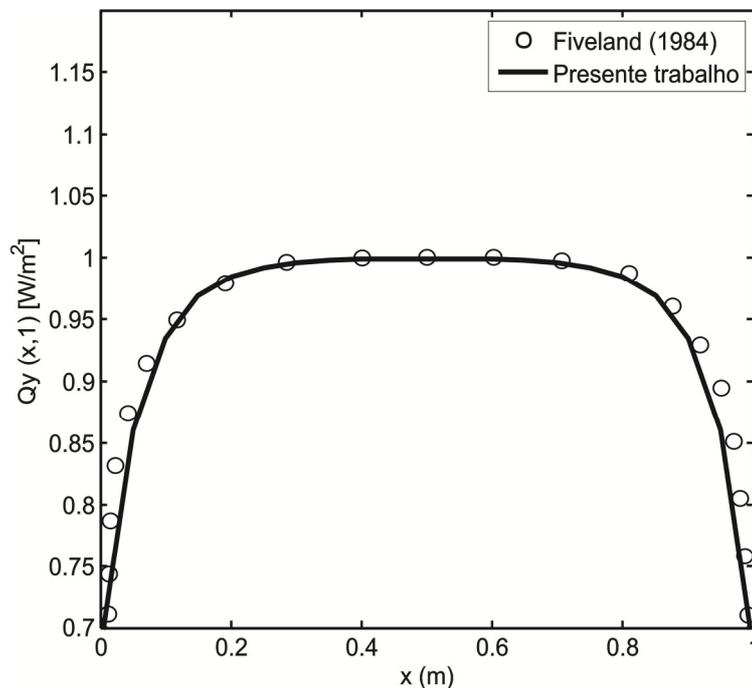


Figura 5.8 - Fluxo de calor radiativo líquido adimensional na parede superior para $\kappa = 10$.

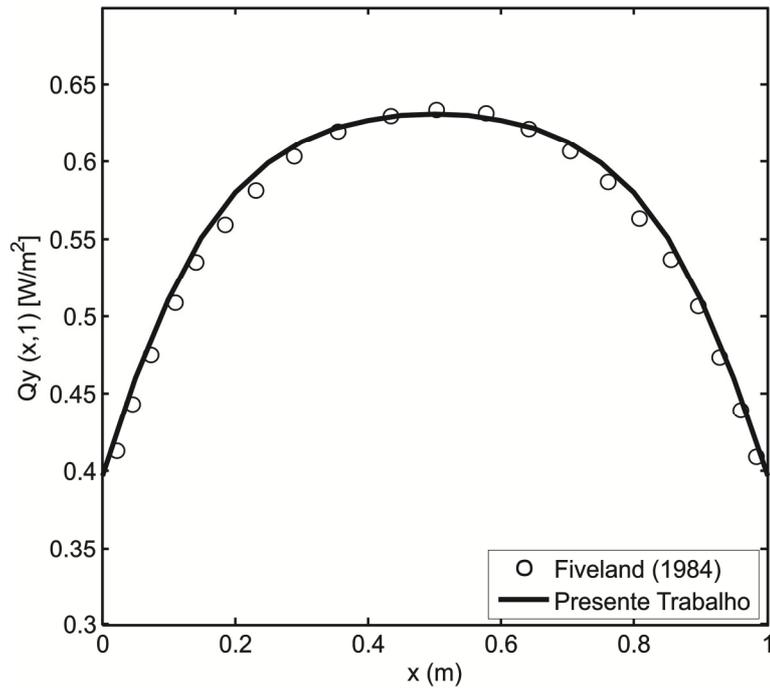


Figura 5.9 - Fluxo de calor radiativo líquido adimensional na parede superior para $\kappa = 1$.

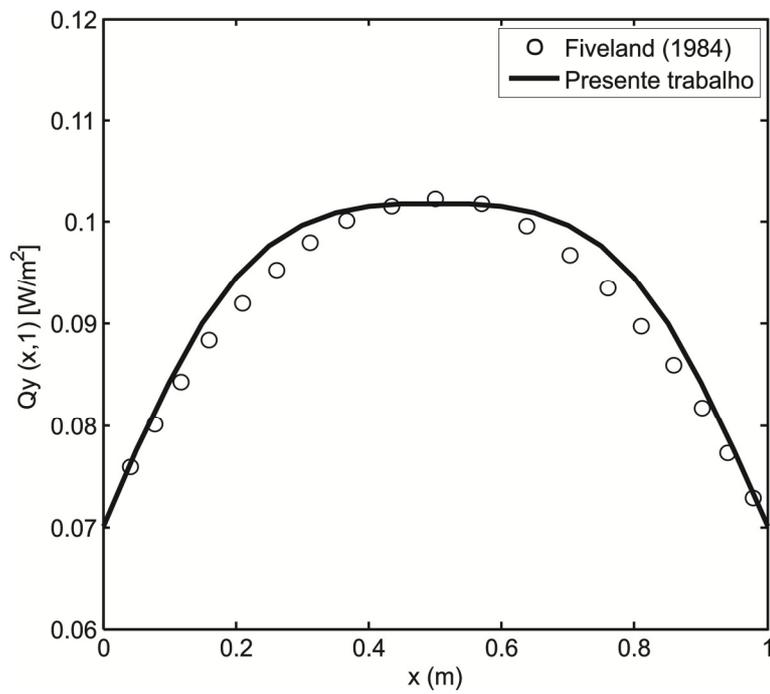


Figura 5.10 - Fluxo de calor radiativo líquido adimensional na parede superior para $\kappa = 0.1$.

Ao analisar os gráficos, pode-se observar a ocorrência de desvios entre os resultados obtidos neste trabalho em relação aos resultados apresentados pela solução analítica. Isso ocorre devido ao chamado “**ray effect**” que é uma falha do método das ordenadas discretas resultante da discretização da variável angular da ETR. Este efeito é independente da discretização espacial utilizada. Tal problema pode ser diminuído, porém não eliminado, com o aumento do número de direções discretas consideradas.

5.2 PROBLEMAS ACOPLADOS POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO

Nesta seção, são analisados os problemas como aqueles abordados no Capítulo IV que têm como objetivo determinar a evolução temporal da temperatura numa amostra de material semitransparente sujeita a um pulso de energia em uma de suas faces.

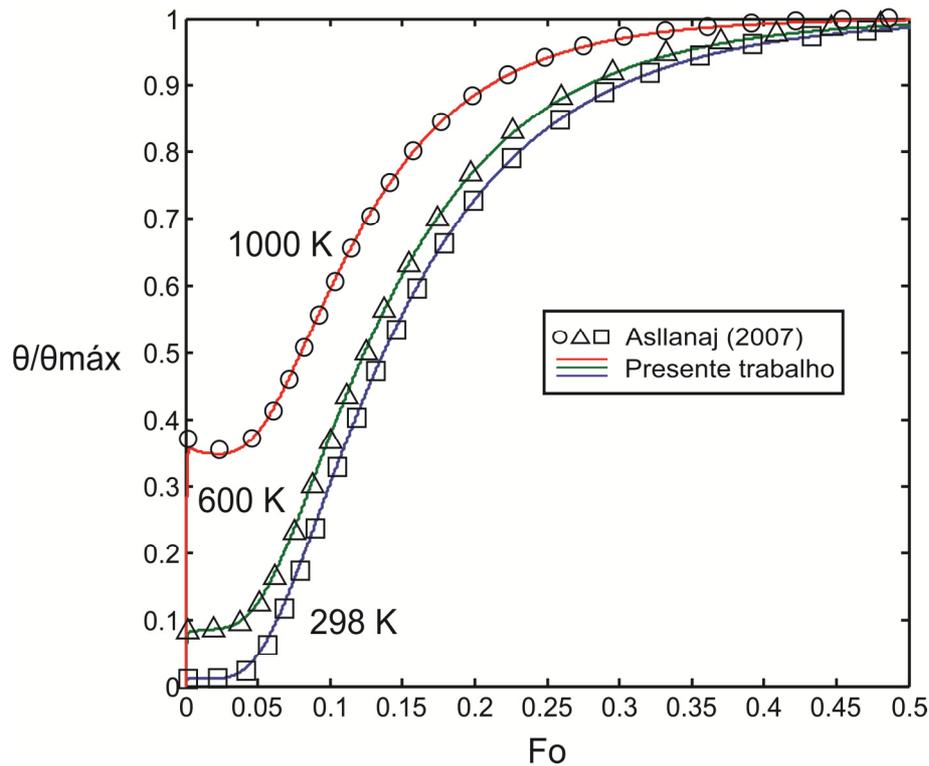


Figura 5.11 - Temperatura da face traseira em função do tempo para diferentes temperaturas de referência obtida para um meio semitransparente com superfícies negras.

Na Figura (5.11) verifica-se o problema resolvido por ASLLANAJ et al (2007) que consiste numa amostra de material semitransparente cinza e que espalha isotropicamente a

radiação. Seus coeficientes de espalhamento e de absorção são ambos iguais a 100 m^{-1} . O material possui um índice de refração igual a 1,36. Sua espessura é de 2mm e o mesmo possui uma condutividade térmica igual a $1,38 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e capacidade calorífica de $1,7 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$. A amostra é assumida adiabática. Um pulso de energia incide sobre uma de suas superfícies e seu valor é de 3399 J.m^{-2} . Sua duração foi considerada de 0,5 ms. Os resultados são obtidos para três valores de temperatura: 1000, 600 e 298 K. Neste trabalho, utilizou-se um esquema de passo de tempo variável. Para os problemas verificados nesta seção este esquema é dado pela seguinte equação:

$$\Delta t = 1 - \exp[(-1,0005 \cdot 10^{-7})i] \quad (5.2)$$

onde i corresponde ao passo de tempo analisado, $i = 1,2,3,\dots,Nt$, em que Nt é o número total de passos de tempo.

O gráfico da Figura (5.11) mostra a razão entre a temperatura no centro da superfície não irradiada da amostra e a temperatura máxima atingida neste local com a evolução do tempo, em função do número de Fourier, definido por:

$$F_0 = \frac{k}{\rho c_p} \frac{t}{H^2} \quad (5.3)$$

Verifica-se que diferentes comportamentos são observados para valores de temperatura distintos. Para valores elevados da temperatura, as trocas de calor por radiação são predominantes. A interação da radiação com o meio é muito baixa e o meio tende a se comportar como um meio transparente. Com isso, num curto espaço de tempo, um forte aumento da temperatura na face não irradiada é observado. Em seguida, esta temperatura decresce e depois sobe novamente com a chegada do fluxo de calor vindo da superfície exposta ao pulso de energia. Este aumento da temperatura num curto intervalo de tempo é devido à transmissão quase que imediata para a superfície não irradiada de grande parte do fluxo de energia absorvido pela face submetida ao pulso. A troca radiativa entre as duas superfícies ocorre muito rapidamente, com isso uma transferência de calor entre a superfície não irradiada e o meio é estabelecida pelo mecanismo da transferência acoplada.

Já para baixos valores de temperatura, as trocas radiativas se tornam menos importantes predominando apenas o mecanismo da condução.

Na figura (5.12) verifica-se um dos problemas resolvidos por DA SILVA (1997).
Os dados são os seguintes:

$$\varepsilon = 1$$

$$T_0 = 800\text{K}$$

$$n = 1.43$$

$$L = 40 \text{ mm}$$

$$k = 2.44 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$H = 2 \text{ mm}$$

$$\rho \cdot c_p = 2267030 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$P' = 80000 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$h_{\text{CR}} = 110 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\beta = 280 \text{ m}^{-1}$$

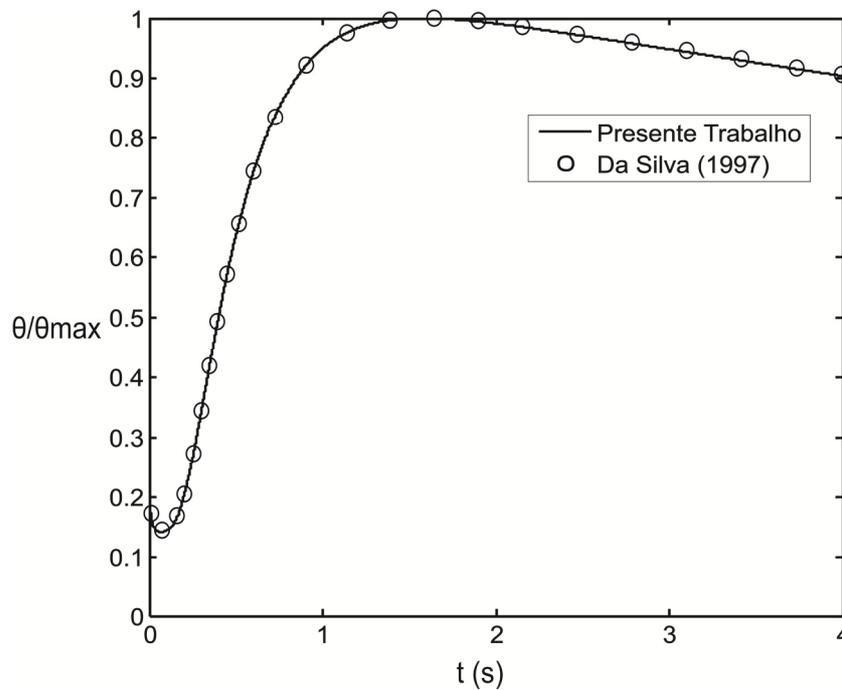


Figura 5.12 - Temperatura da face traseira em função do tempo obtida para um meio semitransparente não difusor com superfícies negras.

Observa-se que em ambas as situações analisadas, os resultados obtidos se mostraram em excelente acordo com os resultados apresentados na literatura.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho teve como objetivo analisar a transferência de calor com acoplamento condução-radiação em meios semitransparentes cinzas para as condições estabelecidas no método flash. Tal análise envolve a solução de duas equações acopladas: a equação da energia e a ETR. A equação da energia foi resolvida pelo método dos volumes finitos e a ETR pelo método das ordenadas discretas.

Problemas envolvendo transferência de calor puramente radiativa foram investigados com a finalidade de verificar a eficácia do método de solução proposto para a ETR. Observou-se que os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os resultados disponíveis na literatura. Além disso, o método proposto neste trabalho mostrou-se capaz de eliminar os problemas da instabilidade e das oscilações dos resultados como os que são verificados no método de FIVELAND (1984). Já no caso que envolve um meio puramente absorvedor, uma divergência pouco significativa pôde ser verificada em relação aos resultados obtidos pela solução analítica apresentada por SHAH (1979).

Em seguida, foi analisado o problema físico envolvido pelo método flash. Uma investigação da influência da temperatura da amostra no processo foi realizada mostrando que para valores elevados da temperatura, o mecanismo de transferência acoplada prevalece, enquanto que para baixas temperaturas, apenas o mecanismo da condução é significativo. Em todos os casos analisados, os resultados obtidos mostraram boa concordância com os resultados apresentados na literatura.

Como sugestão para possíveis trabalhos futuros, pode-se citar a resolução da equação da energia e da ETR em coordenadas cilíndricas. Sugere-se ainda a realização de uma análise da sensibilidade aos parâmetros que influenciam no processo de transferência de calor e a resolução de um problema inverso de identificação da difusividade térmica para materiais semitransparentes cinzas ou não-cinzas.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, E. E. e VISKANTA, R., “Effective Conductivity for Conduction-Radiation by Taylor Series Expansion”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 14, pp. 1216-1220, 1970.

ANDRE, S. e DEGIOVANNI, A., “A Theoretical Study of the Transient Coupled Conduction and Radiation Heat Transfer in Glass: Phonic Diffusivity Measurement by the Flash Technique”, **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol. 38, N° 18, pp. 3401–3412, 1995.

ASLLANAJ, F., BRIDGE, X., JEANDEL, G., “Transient Combined Radiation and Conduction in a One-Dimensional Non-gray Participating Medium with Anisotropic Optical Properties Subjected to Radiative Flux at the Boundaries”, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, Vol. 107, N° 1, pp. 17–29, 2007.

BAEK, S. W., KIM, M. Y., “Modification of the Discrete-Ordinates Method in an Axisymmetric Cylindrical Geometry”, **Numerical Heat Transfer, Part B, Fundamentals**, Vol. 31, pp. 313-326, 1997.

BAI, D., FAN, X.-J., “Transient Coupled Heat Transfer in Multilayer Non-gray Semitransparent Media with Reflective Foils”, **International Journal of Thermophysics**, Vol. 27, N° 2, pp. 647-664, 2006.

BENASSI, M., COTTA, R. M. and SIEWERT, C. E., “The PN Method for Radiative Transfer Problems with Reflective Boundary Conditions”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Vol. 30, N° 6, pp. 547-553, 1983.

CALIOT, C., “Numerical Methods in Radiative Transfer”, **PROMES-CNRS LAB**, 2010.

CHANDRASEKHAR, S., Radiative Transfer, **Ed. Dover Publication, Inc.**, New York, 393p, 1960.

CHU, C.-M. e CHURCHILL, S. W., “Representation of the Angular Distribution of Radiation Scattered by a Spherical Particle”, **J. Opt. Soc. Am.**, Vol. 45, pp. 958-962, 1955.

COELHO, P. J., “A Modified Version of the Discrete Ordinates Method for Radiative Heat Transfer Modelling”, **Computational Mechanics**, PP. 375-388, 2004.

DA SILVA, Z. E., “Transfers Couplés Conduction-Rayonnement: Application de la Méthode Flash aux Milieux Semi-Transparents”, **Tese D.Sc**, INSA, LYON, 1997.

DEMBELE, S., LIMA, K. L. M., WEN, J. X., “Assessment of an Unstructured Exponential Scheme Discrete Ordinates Radiation Model for Non-Gray Media”, **Heat Mass Transfer**, Vol. 47, N° 11, pp 1349-1362, 2011.

DINIZ, L. S., “Estudo das Tensões Térmicas no Acoplamento Condução-Radiação em Materiais Semitransparentes”, **Tese de D.Sc.**, PPGEM/ UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.

DOORNINK, D. G. e HERING, R. G., Transient Combined Conductive and Radiative Heat Transfer, **ASME Journal Heat Transfer**, Vol. 94, pp. 473-478, 1972.

EL WAKIL, N., “Etude de Transferts de Chaleur par Conduction, Convection et Rayonnement Couples dans des Milieux Semi-Transparents Fluides ou Poreux. Elaboration de Modeles de Simulation en Geometrie Bidimensionnelle”. **Tese. D. Sc.**, INSA, Lyon, France.

FILIPSKII, M. V. e SURZHIKOV, S. T., “Calculation of Radiation Fluxes to the Surface of a Space Vehicle with the Aid of a Discrete Ordinates Method”, **Journal of Engineering Physics and Thermophysics**, Vol. 80, No. 2, pp. 284-291, 2007.

FIVELAND, W. A., 1984, “Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures”, **Trans. ASME–Journal of Heat Transfer**, Vol. 106, N° 4, pp. 699-706, 1984.

FONSECA, H. M., “Caracterização Termofísica de Nanofluidos”, Dissertação de M. Sc., COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2007.

GUOLO, A. L., “Análise da Transferência de Calor por Condução e Radiação através de Meios Semitransparentes com Índice de Refração Não Unitário”, Dissertação de M. Sc., PUCPR, Curitiba, PR, 2005.

HAHN, O., RATHER, F., ARDINI-SCHUSTER, M. C. e FRICKE, J., Transient Coupled Conductive/Radiative Heat Transfer in Absorbing, Emitting and Scattering Media: Application to Laser-Flash Measurements on Ceramic Materials, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 40, N° 3, pp. 689-698, 1997.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P, 2003, *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

KABAYABAYA, T., YU, F., ZHANG, X., “Thermal Diffusivity Measurement of Glass at High Temperature by Using Flash Method”, **J. of Thermal Science**, Vol. 13, N° 1, pp. 91-96, 2004.

KIM, M. Y., “Assessment of the Axisymmetric Radiative Heat Transfer in a Cylindrical Enclosure with the Finite Volume Method”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, pp. 5144–5153, 2008.

KIM, T. K. e LEE, H., “Effect of Anisotropic Scattering on Radiative Heat Transfer in Two-Dimensional Rectangular Enclosures”. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 31, pp. 1711-1721, 1988.

KIM, S. H. e HUH, K. Y., “A New Angular Discretization Scheme of the Finite Volume Method for 3-D Radiative Heat Transfer in Absorbing, Emitting and Anisotropically

Scattering Media”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, PP. 1233-1242, 2000.

KRISHNAPRAKAS, C.K., NARAYANA, K.B. and DUTTA, P., “Combined Conduction and Radiation Heat Transfer in a Gray Anisotropically Scattering Planar Medium with Diffuse-Specular Boundaries”, **International Comm. In Heat Transfer and Mass Transfer**, Vol. 28, N° 1, pp. 77-86, 2001.

LATHROP, K. D., “Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity versus Accuracy”. **Journal of Computational Physics**, Vol. 4, N° 4, pp. 475 – 498, 1969.

LAZARD, M., ANDRE, S., MAILLET, D., DOERMANN, D., DEGIOVANNI, A., “Flash Experiment on a Semitransparent Material: Interest of a Reduced Model”, 3rd Int. Conference on Inverse Problems in Engineering, 1999.

LAZARD, M., ANDRE, S., MAILLET, D., “Diffusivity Measurement of Semi-transparent Media: Model of the Coupled Transient Heat Transfer and Experiments on Glass, Silica Glass and Zinc Selenide”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, pp. 477–487, 2004, Vol. 47, N° 3, pp. 477–487, 2004.

LIN, W. X., MO, X. T., EN, H. S., “Three-Dimensional Radiation in Absorbing-Emitting-Scattering Medium Using the Discrete-Ordinates Approximation”, **J. of Thermal Science**, Vol. 7, N° 4, pp. 255-263, 1998.

LINHUA, L., HEPING, T., QIZHENG, Y., “Inverse radiation problem of boundary incident radiation heat flux in semitransparent planar slab with semitransparent boundaries”, **Journal of Thermal Science**, Vol. 7, N° 2, pp. 131-138, 1997.

LIU, L.-H., TAN, H.-P., “Transient radiation and conduction in a two-dimensional participating cylinder subjected to a pulse irradiation”, **International Journal of Thermal Sciences**, Vol. 40, N° 10, pp. 877-889, 2001.

MAHAPATRA, S., NANDA, P., SARKAR, A., “Analysis of coupled conduction and radiation heat transfer in presence of participating medium- using a hybrid method”, **Heat and Mass Transfer**, Vol. 41, N° 10, pp. 890-898, 2005.

MISHRA, S., PRASAD, M., “Radiative Heat Transfer in Participating Media - A Review”, **SADHANA - Academy Proceedings in Engineering Sciences**, Vol. 23, N° 2, pp. 213-232, 1998.

MODEST, M. F., Radiative Heat Transfer, **Ed. McGraw-Hill, Inc.**, Singapore, 1993.

MODEST, M. F. and AZAD, F. H., “The differential approximation for radiative transfer in an emitting, absorbing, and anisotropically scattering medium”, **J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.**, vol. 23, N° 1, pp. 117-120, 1980.

MUSELLA, M., TSCHUDI, H. R., “Transient Radiative and Conductive Heat Transfer in Ceramic Materials Subjected to Laser Heating” **International Journal of Thermophysics**, Vol. 26, N° 4, pp. 981-999, 2005.

OLIVEIRA, J. V. L., 2004, “Análise da Transferência de Calor para o Acoplamento Condução-Radiação em um Meio Absorvedor, Emissor e Difusor: Aplicação aos Materiais Cerâmicos”, **Tese de D.Sc.**, CPGEM/ UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.

PARKER, W. J., JENKINS, R. J., BUTLER, C. P., ABBOTT, G. L., “Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity”, **Journal of Applied Physics**, Vol 32, N° 9, pp. 1679-1684, 1961.

SAFAVISOHI, B., SHARBATI, E., AGHANAJAFI, C., FIROOZABADI, S. R. K., “Finite Difference Solution for Radiative–Conductive Heat Transfer of a Semitransparent Polycarbonate Layer”, **Journal of Applied Polymer Science**, Vol. 112, N° 6, pp. 3313-3321, 2009.

SALAH, M. B., ASKRI, F., SLIMI, K., NASRALLAH, S. B., “Numerical Resolution of the Radiative Transfer Equation in a Cylindrical Enclosure with the Finite-Volume Method”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, pp. 2501–2509, (2004).

SHAH, N., “New Method of Computation of Radiation Heat Transfer in Combustion Chambers”, **Tese de D. Sc**, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science and Technology, University of London, 1979.

SIEWERT, C. E., MAIORINO, J. R., ÖZİŞİK, M. N., “The Use of the F_N Method for Radiative Transfer Problems with Reflective Boundary Conditions”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Vol. 23, N° 6, pp. 565-573, 1979.

TIMOSHPOL'SKII, V. I., GERMAN, M. L., GRINCHUK, P. S., OZNOBISHIN, A. N., “Numerical Solution of the Radiative-Transfer Equation for an Absorbing, Emitting, and Scattering Medium with a Complex 3-D Geometry”, **Journal of Engineering Physics and Thermophysics**, Vol. 78, N° 1, pp. 144-154, 2005.

TSAI, J. H. e LIN, J.D., Transient Combined Conduction and Radiation with Anisotropic Scattering, **AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, Vol. 4, N° 1, pp. 92-97, 1990.

TSENG, C. J e CHU, H. S., Transient Combined and Radiation in an Absorbing Emitting and Anisotropically-Scattering Medium with Variable Thermal Conductivity, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 35, N° 7, pp. 1844-1847, 1992

VISKANTA, R.; e GROSH, R. J., Effect of Surface Emissivity on Heat transfer by Simultaneous Conduction and Radiation, **International Journal oh Heat and Mass Transfer**, Vol. 5, pp. 729-734, 1962.

WANG, Y. E TAN, H., “Arbitrary-Order Spherical Harmonics Method for Radiative Heat Transfer in Semitransparent Medium”, **International Conference on Energy and Environment Technology**, pp. 11-14, 2009.

WEI, X-L., XU, T-M., HUI, S-E., “Three-Dimensional Radiation in Absorbing-Emitting-Scattering Medium using the Discrete-Ordinates Approximation”, **Journal of Thermal Science**, Vol. 7, N° 4, pp. 255-263, 1998.

WELLELE, O., ORLANDE, H. R. B., RUPERTI JR, N., COLAÇO, M. J., DELMAS, A., “Coupled conduction–radiation in semi-transparent Materials at high temperatures”, **Journal of Physics and Chemistry of Solids**, Vol. 67, N° 9-10, pp. 2230-2240, 2006.

WESTON, K. C. e HAUTH, J. L., Unsteady, Combined Radiation and Conduction in an Absorbing, Scattering, and Emitting Medium, **ASME Journal Heat Transfer**, Vol. 95, pp. 357-364, 1973.

YANMING, W., HEPING, T., “Arbitrary-Order Spherical Harmonics Method for Radiative Heat Transfer in Semitransparent Medium”, **International Conference on Energy and Environment Technology**, Vol. 3, pp. 11-14, 2009.

YUEN, W. W. e TAKARA, E. E., Analysis of Combined Conductive-Radiative Heat Transfer in a Two-Dimensional Rectangular Enclosure with a Gray Medium, **ASME Journal of Heat Transfer**, Vol. 110, pp. 468-474, 1988.