



*Universidade
Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
- Mestrado - Doutorado*

CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

José Marcílio Filgueiras Cruz

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da
Paraíba para obtenção do Grau de Doutor.*

JOSÉ MARCÍLIO FILGUEIRAS CRUZ

**CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE ESTÁTICA E
DINÂMICA DE PÓRTICOS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Doutor.

Orientador: Professor Dr. Ângelo Vieira Mendonça

C957c

Cruz, José Marcílio Filgueiras.

Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo
Método dos Elementos de Contorno / José Marcílio Filgueiras
Cruz.-- João Pessoa, 2012.

366f. : il.

Orientador: Ângelo Vieira Mendonça

Tese (Doutorado) – UFPB/CT

1. Engenharia Mecânica. 2. Estruturas reticuladas. 3. Método
dos Elementos de Contorno (MEC). 4. Interação solo-estrutura.
5. Núcleo de rigidez.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

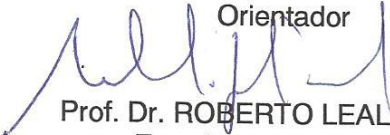
por

JOSÉ MARCÍLIO FILGUEIRAS CRUZ

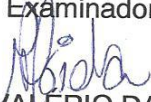
Tese aprovada em 19 de outubro de 2012

Período letivo 2012.2


Prof. Dr. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA
Orientador


Prof. Dr. ROBERTO LEAL PIMENTEL
Examinador Interno


Prof. Dr. JACQUES CÉSAR DOS SANTOS
Examinador Interno


Prof. Dr. VALÉRIO DA SILVA ALMEIDA
Examinador Externo


Profa. Dra. SELMA SHIMURA HISSAE DA NÓBREJA
Examinadora Externa

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu neto Samuel Cruz de Paula Marques, agradecendo ao Criador pela sua existência e pedindo-Lhe muitas bênçãos para que sua vida seja longa, com saúde e paz, profícua e pródiga de importantes feitos e grandes realizações e exemplar, pela correção e honestidade dos seus atos somados à fé no Senhor nosso Deus.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor nosso Deus, fonte de toda vida e de infinita inspiração, agradeço as condições espirituais e materiais indispensáveis à consecução do trabalho.

À minha querida e dedicada esposa Mária de Fátima Cavalcanti Cruz, que com dedicação, coragem e paciência sempre esteve presente com uma palavra de apoio, com um gesto incentivador nos momentos de cansaço. Nunca perdeu a confiança na conclusão dos estudos e do trabalho que culminaram com a realização desta tese. Agradeço o seu amor e carinho demonstrados de tantas formas e por tanto tempo.

Aos meus filhos Natália, Lucas e Bartyra, verdadeiras pedras preciosas a enriquecer minha vida, enchendo-a de alegrias e ensinamentos, agradeço-lhes por serem meus filhos. Agradeço também, ao meu genro Raphael de Paula Marques e aos futuros genro Ivan Bichara Sobreira Neto e nora Manuella Dias Carvalho Silva, filhos que já ganhei adultos, pelo incentivo e pelas inúmeras e valiosas contribuições até a preparação deste trabalho.

A todos os meus familiares tanto os que aqui residem como aos que moram no estado do Ceará e no estado de São Paulo agradeço o apoio necessário sempre que solicitado e a confiança em mim depositada. Por não ser oportuno nomeá-los, um a um, estes são representados por Moacir Lacerda de Sousa (Moa) e sua esposa (tia) Alice Pulga de Lacerda, enquanto os do nordeste, o faço na pessoa da inconfundível Maria de Fátima Filgueiras Cruz, minha irmã.

Ao professor doutor Ângelo Vieira Mendonça cujo cabedal de conhecimento já acumulado só é menor que a sua vontade de aprender mais, agradeço os ensinamentos a mim transmitidos seja nas salas de aulas ou nas discussões levadas a efeito no LAMFIC ou mesmo nos momentos do cafezinho, ao longo desses quatro últimos anos na condição de seu

orientado; saliento, outrossim, a presteza, a cordialidade e a competência características desses momentos de ensino-aprendizagem por ele conduzidos.

Aos professores do PPGEM agradeço a todos pela abnegação e seriedade no desempenho da missão de transmitir conhecimentos e experiências.

Aos colegas do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental agradeço pela compreensão e apoio.

A todos os professores que tive na graduação no CT da UFPB e aos da pós-graduação (mestrado) da EPUSP da USP, de modo especial ao Prof. Antonio Wanderley Moreira e ao Prof. Dr. Victor Manoel de Souza Lima, agradeço pela amizade, transmissão do conhecimento e exemplo de cidadania.

Aos colegas da pós-graduação, agradeço pelo companheirismo, apoio e incentivo, lembrando de modo particular os professores Antônio Taurino de Lucena, Primo Fernandes Filho, Enildo Tales Ferreira, Orlando Villar de Cavalcanti Filho, Raimundo Aprígio de Menezes Júnior e o futuro professor Paulo Céssar de Oliveira Queiroz.

Aos funcionários da coordenação da Pós-Graduação de Engenharia Mecânica: Sras. Mônica Rodrigues da Silva e Andréa Mesquita de Mendonça e o Sr. Noaldo Sales Santos, pela presteza e competência no desempenho de suas atividades.

Aos meus alunos da graduação em Engenharia Civil, de ontem, de hoje e de amanhã, pois ao procurar ensinar-lhes melhor, estou sempre aprendendo.

Agradeço, por fim, a todos aqueles que de um modo ou de outro concorreram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS ESPECIAIS

Aos queridos e inesquecíveis Francisco Filgueiras Cruz (*in memoriam*) e Maria do Céu Cruz (*in memoriam*) inabaláveis e incansáveis na tarefa de ensinar e educar seus filhos. Seus exemplos de vida se afiguram como as mais valiosas das heranças que um filho pode receber.

Pai e mãe, das suas existências estarão sempre comigo o exemplo inigualável, a saudade imensa, o eterno agradecimento, além do pesar por não poder abraçá-los agora e partilhar juntos a alegria de mais uma tarefa cumprida.

CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

RESUMO

Neste trabalho são descritas análises elásticas (estática e vibratória) de pórticos, utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A superestrutura é modelada para duas famílias de estruturas reticuladas (pórtico plano, pórtico espacial) e representações algébricas específicas são desenvolvidos para esse fim. Nos casos pertinentes, os efeitos de flexão (segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko), de torção (segundo as hipóteses de Saint Venant), são devidamente explorados assim como as formas explícitas das matrizes de influência de deslocamentos, de esforços e o vetor de forças de volume.

Um enfoque especial é dado para o problema de interação solo-estrutura em regime estático. Nesse caso a superestrutura (pórtico espacial) é modelada pelo MEC e o solo (admitido como um sólido elástico semi-infinito) é representado por equações integrais e sistematizado algebricamente, também, pelo MEC. Então, os sistemas algébricos da superestrutura e do solo são compatibilizados permitindo assim a análise da interação solo-estrutura.

As barras de seção abertas de paredes finas incorporando o modelo de flexo-torção de Vlasov também recebem uma atenção especial, de forma que uma formulação direta do MEC para a análise estática e vibratória é estabelecida. Assim, aqui são propostas as equações integrais, soluções fundamentais e representações algébricas, que incorporam todos os campos secundários (forças, momentos e bi-momentos) e os campos primários (deslocamentos, rotações, empenamentos). No caso do problema de vibração, as representações integrais e algébricas são deduzidas para os problemas bi-acoplados (seções monossimétricas) e tri-acoplados (seções não-simétricas).

Palavras chaves: estruturas reticuladas, interação solo-estrutura, núcleo de rigidez, MEC.

CONTRIBUTION TO THE STUDY (STATIC AND DYNAMIC) OF FRAMES BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

ABSTRACT

This paper describes elastic, static and dynamic analysis of frames using the Boundary Element Method (BEM). The superstructure is modeled for two frame structure cases (that is, plane frame and space frame) and algebraic specific representations are developed for these purposes. According to the specific cases, bending effects (Euler-Bernoulli or Timoshenko models), torsional effects (under Saint Venant assumptions) are properly operated as well as the explicit forms of displacements and efforts influence matrices and the body force vector.

Special attention is paid to the problem of static soil-structure interaction. In this case the superstructure (space frame) is modeled by BEM and the soil (assumed as semi-infinite elastic solid) is represented by integral equations and algebraically systematized in BEM fashion as well. Then, the superstructure and soil algebraic systems are coupled in order to allow the soil-structure interaction analysis.

Open section thin-walled beams under Vlasov torsional-flexure assumptions receive also special attention, so that a direct BEM formulation for static and vibration analysis is established. Hence, here it is proposed integral equations, fundamental solution and algebraic representations which incorporate all secondary fields (forces, moments and bimoment) and primary fields (displacements, rotations and warping). For vibration case, both integral and algebraic equations are deduced for bi-coupled problems (monosymmetric cross-section) and triply-coupled problems (nonsymmetric cross-sections).

Key words: frame structures, soil-structure interaction, shear cores, BEM.

*Grande parte do esforço
desprendido é perdido se não houver
organização e planejamento.
Marcílio Cruz*

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.1	INTRODUÇÃO.....	1
1.2	BREVES ASPECTOS DO ESTADO-DA-ARTE.....	1
1.2.1	O Cálculo Matricial e Técnicas Numéricas.....	1
1.2.2	O MEC – Aspectos Históricos e do Estado-da-arte.....	3
1.2.3	A AISE - Aspectos Históricos e do Estado-da-arte	8
1.2.4	O núcleo - Aspectos históricos e do Estado-da-arte.....	11
1.3	OBJETIVOS, ESCOPO E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	13
1.3.1	Objetivos.....	13
1.3.2	Escopo.....	14
1.3.3	Organização do Trabalho.....	14
1.4	CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DA TESE AO ESTADO-DA-ARTE.....	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
2.1	INTRODUÇÃO.....	16
2.2	RELAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE.....	18
2.2.1	Relações da Elasticidade Linear.....	19
2.3	O MEC EM PROBLEMAS ELÁSTICOS 3D.....	26
2.3.1	O MEC em problemas Elastostáticos.....	27
2.3.2	O Método dos Elementos de Contorno.....	35
3	O MEC EM ESTRUTURAS APORTICADAS: ANÁLISE ESTÁTICA.....	44
3.1	INTRODUÇÃO.....	44
3.2	EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS.....	45
3.2.1	Hipóteses Gerais.....	47
3.2.2	O Efeito Axial.....	47

3.2.3 O Efeito de Flexão em Y.....	54
3.2.4 O Efeito de Torção.....	84
4 TRANSFORMAÇÕES NOS SISTEMAS ALGÉBRICOS: ANÁLISE	
ESTÁTICA.....	93
4.1 INTRODUÇÃO.....	93
4.2 OS PROBLEMAS INDEPENDENTES.....	94
4.2.1 O Efeito Axial.....	95
4.2.2 O Efeito de Flexão.....	96
4.2.3 O Efeito de Torção Uniforme.....	102
4.3 PROBLEMAS COMBINADOS.....	104
4.3.1 Para Barra de Pórtico Plano no SCLU.....	105
4.3.2 Para Barra de Pórtico Espacial no SCLU.....	106
4.3.3 Para barra de pórtico plano no SCG.....	108
4.3.4 Para barra de pórtico espacial no SCG.....	109
4.4 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA: ANÁLISE	
ESTÁTICA.....	112
5 INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA.....	
5.1 INTRODUÇÃO.....	115
5.2 O SOLO.....	117
5.2.1 Hipóteses Adotadas.....	117
5.2.2 Representação Integral.....	117
5.3 INTERAÇÃO SOLO-SAPATA.....	125
5.4 ACOPLAMENTO SOLO-ESTRUTURA.....	130
5.4.1 Análise de Interação de Pórtico.....	132
6 EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS:	
ELASTODINÂMICA.....	135
6.1 INTRODUÇÃO.....	135
6.2 O EFEITO AXIAL.....	135
6.3 A TORÇÃO UNIFORME.....	140

6.4 A FLEXÃO NA DIREÇÃO Y.....	144
6.5. A FLEXÃO NA DIREÇÃO Z.....	168
6.6 TRANSFORMAÇÕES NOS SISTEMAS ALGÉBRICOS.....	186
6.7 PROBLEMAS COMBINADOS.....	187
6.7.1 Pórtico Plano no SCLU.....	187
6.7.2 Pórtico Espacial no SCLU.....	189
6.7.3 Representação Algébrica da Estrutura.....	193
7 BARRAS DE PAREDES DELGADAS E SEÇÃO ABERTA – NÚCLEOS.....	194
7.1 INTRODUÇÃO.....	194
7.2 ELEMENTOS DA TEORIA DE VLASOV E SUA APLICAÇÃO.....	195
7.2.1 Torção Livre nas Barras de Núcleo.....	195
7.2.2 Torção Não-uniforme nas Barras de Núcleo.....	203
7.3 EFEITO DA TORÇÃO NÃO-UNIFORME: ANÁLISE ESTÁTICA.....	208
7.3.1 Efeito da Torção Não-uniforme.....	208
7.3.2 Representação Algébrica do Efeito da Flexo-torção na Barra de Núcleo.....	219
7.4 PROBLEMA DA TORÇÃO NÃO-UNIFORME: ANÁLISE DINÂMICA..	232
7.4.1 Introdução.....	232
7.4.2 Estudo das Seções Monossimétricas (Problema Bi-acoplado).....	236
7.4.2.1 O problema fundamental bi-acoplado e sua solução.....	238
7.4.2.2 As equações integrais bi-acopladas.....	246
7.4.2.3 As representações algébricas do problema bi-acoplado.....	251
7.4.2.4 Representações algébricas dos problemas combinados: axial, de flexão livre (em z) e de flexo-torção na barra de núcleo, no SCL.....	260
7.4.3 Estudo das Seções Não Simétricas (Problema Tri-acoplado).....	263
7.4.3.1 O problema fundamental tri-acoplado e sua solução.....	264
7.4.3.2 As equações integrais tri-acopladas.....	288
8 APLICAÇÕES.....	306
8.1 INTRODUÇÃO.....	308
8.2 ANÁLISES ESTÁTICAS.....	308

8.2.1 Análise Estática de PP e de PE Apoiados em Sapatas Rígidas e Indeslocáveis.....	308
8.2.2 Análise Estática de Barras de Núcleo (seção bi-simétrica).....	316
8.2.3 Análise Estática de Barras de Núcleo (seção mono-simétrica).....	319
8.2.4 Análise estática de interação solo-estrutura.....	320
8.3 ANÁLISES DINÂMICAS.....	329
8.3.1 Análise de Vigas.....	329
8.3.2 Análise de Pórticos Planos.....	332
8.3.3 Análise Dinâmica de Pórtico Espacial.....	337
8.3.4 Análise Dinâmica de Núcleos.....	339
9 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	343
9.1 INTRODUÇÃO.....	343
9.2 FUTURAS CONTRIBUIÇÕES A ESSE TRABALHO.....	345

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	- Bulbo de pressões.....	9
Figura 1.2	- Interação solo-estrutura – Modelo “a”.....	10
Figura 2.1	- Sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ	19
Figura 2.2	- Tensões no elemento de volume	19
Figura 2.3	- Elemento infinitesimal.....	20
Figura 2.4	- Tetraedro de Cauchy.....	22
Figura 2.5	- Definição de contorno.....	23
Figura 2.6	- Problema: real (domínio Ω e contorno Γ ,).....	27
Figura 2.7	- Efeitos da força concentrada aplicada em Ω^* , $i = 1$	28
Figura 2.8	- Definição do problema fundamental de Mindlin.....	31
Figura 2.9	- O problema fundamental de Boussinesq-Cerruti.....	32
Figura 2.10	- Técnica para que o ponto do contorno seja considerado do domínio.....	34
Figura 2.11	- Elemento triangular isoparamétrico linear e as funções de interpolação...	39
Figura 2.12	- Coordenadas homogêneas, definição e variação.....	41
Figura 2.13	- Estrutura de barras e elemento de contorno 0D.....	41
Figura 2.14	- Elemento de contorno pontuais e sistemas de coordenadas global e local.	42
Figura 3.1	- Solicitações consideradas no estudo das estruturas reticuladas em geral: (a) axial; (b) flexão; (c) flexão pura e (d) torção uniforme.....	46
Figura 3.2	- Barra (elemento estrutural unidimensional).....	47
Figura 3.3	- Barra sob efeito axial.....	48
Figura 3.4	- Barra submetida à flexão, com carregamento no plano xz.....	55
Figura 3.5	- Elementos para o estudo da flexão no plano xz.....	56
Figura 3.6	- Geometria da flexão.....	56
Figura 3.7	- Tensão na flexão.....	57
Figura 3.8	- Problema fundamental (barra).....	58
Figura 3.9	- Viga do problema fundamental (barra).....	61

Figura 3.10	- Representação gráfica do PVC do problema real.....	63
Figura 3.11	- Viga submetida à flexão, com carregamento lateral e momento.....	71
Figura 3.12	- Componentes de deformação – Modelo de Timoshenko.....	72
Figura 3.13	- Barra prismática submetida à torção.....	85
Figura 3.14	- Tensão de cisalhamento devida à torção.....	86
Figura 4.1	- Sistemas de coordenadas para avaliação da contribuição do efeito axial..	95
Figura 4.2	- Sistemas de Coordenadas para avaliação da contribuição de flexão em y..	97
Figura 4.3	- SCLU para a avaliação da contribuição da flexão em z.....	99
Figura 4.4	- SCLU para a avaliação da contribuição de torção.....	103
Figura 4.5	- Sistema de coordenadas local unificado de barra de pórtico plano.....	105
Figura 4.6	- Sistema de coordenadas local unificado de barra de pórtico espacial.....	106
Figura 4.7	- Coordenadas globais OXY e coordenadas locais principais Oxy	109
Figura 4.8	- Coordenadas.....	111
Figura 4.9	- Coordenadas globais $OXYZ$ e coordenadas locais $Oxyz$. Caso particular em que $C_x = C_z = 0$ ($C_{xz} = 0$).....	112
Figura 4.10	- Barras de pórtico convergindo.....	113
Figura 4.11	- Condição de Equilíbrio no nó.....	113
Figura 5.1	- Definição das dimensões C e h	116
Figura 5.2	- Pressão de contato em sapata rígida.....	117
Figura 5.3	- Elemento triangular.....	118
Figura 5.4	- Definição dos sistemas de coordenadas para a integração singular.....	120
Figura 5.5	- Estrutura de fundação submetida aos efeitos de translação e rotação.....	127
Figura 5.6	- Contribuição do elemento el no cálculo das forças e momentos resultantes no nó de ligação sapata pilar	129
Figura 5.7	- Ação e reação.....	131
Figura 5.8	- Pórtico plano com uma barra apoiada por sapata.....	133
Figura 6.1	- Barra sob efeito dinâmico axial.....	136
Figura 6.2	- Barra de prismática submetida à torção dinâmica.....	140
Figura 6.3	- Barra sob efeito de flexão dinâmica.....	144
Figura 6.4	- Barra submetida à flexão dinâmica, com carregamento lateral e momento.....	155

Figura 6.5	- Barra sob efeito de flexão dinâmica em z.....	168
Figura 6.6	- Barra submetida à flexão em z dinâmica, com carregamento lateral e momento.....	176
Figura 6.7	- Cinemática da seção transversal-Modelo de Timoshenko.....	177
Figura 6.8	- Sistema local unificado de barra de pórtico plano.....	188
Figura 6.9	- Sistema local unificado de barra de pórtico espacial.....	189
Figura 7.1	- Efeitos axial, da flexão bidirecional e da torção não-uniforme.....	194
Figura 7.2	- Barra de paredes delgadas e seção aberta.....	195
Figura 7.3	- Tubo de seção aberta.....	196
Figura 7.4	- Distribuição das tensões de cisalhamento.....	197
Figura 7.5	- Elemento de área setorial da seção transversal de uma viga.....	199
Figura 7.6	- Tensão de cisalhamento devido ao esforço cortante.....	201
Figura 7.7	- Polo arbitrário P e polo principal CC.....	202
Figura 7.8	- Elemento de comprimento dx da parede da barra de núcleo.....	205
Figura 7.9	- Distribuição das tensões de cisalhamento da flexo-torção.....	206
Figura 7.10	- Barra de núcleo sob a ação de torque distribuído.....	208
Figura 7.11	- Forças externas e Esforços.....	219
Figura 7.12(a) e (b)	- Esforços na barra de núcleo	233
Figura 7.12(c) e (d)	- Esforços na barra de núcleo.....	234
Figura 7.13	- Seção transversal monossimétrica.....	237
Figura 8.1	- Pórtico plano, carregamento, discretização e SCG.....	309
Figura 8.2	- Pórtico espacial, carregamento, discretização e SCG.....	312
Figura 8.3	- Pórtico da Fig.8.2, SCG e SCL da barra (1) e SCL da barra (2).....	313
Figura 8.4	- Barras de paredes finas com seção bissimétrica (seção bi-simétrica).....	317
Figura 8.5	- Viga de paredes finas com seção mono-simétrica.....	319
Figura 8.6	- Estrutura unifilar espacial com três barras.....	321
Figura 8.7	- Estrutura unifilar espacial com quatro barras.....	322
Figura 8.8	- Estrutura unifilar espacial com cinco barras.....	323
Figura 8.9	- Pórticos espaciais com oito barras.....	325
Figura 8.10	- Pórticos espaciais com doze barras.....	327
Figura 8.11	- Viga engastada-apoiada.....	330
Figura 8.12	- $\log \phi $ versus frequência da viga engastada-apoiada.....	330
Figura 8.13	- Viga engastada-livre.....	331

Figura 8.14 - $\log \phi $ versus frequência da viga engastada-livre.....	332
Figura 8.15 - $\log \phi $ versus frequência da viga engastada-livre (ANTES <i>et al</i> , 2004)..	332
Figura 8.16 - Pórtico com três vãos.....	333
Figura 8.17 - Pórtico tri-engastado.....	334
Figura 8.18 - Pórtico cruciforme: (a) o pórtico, geometria e SCG, (b) Geometria e carregamento e (c) Discretização.....	335
Figura 8.19 - Pórtico bi-engastado.....	337
Figura 8.20 - Pórtico espacial, dimensões, carregamento, SCG e discretização.....	338
Figura 8.21 - Viga de parede fina e seção aberta, perspectiva, seção transversal e SCG	340
Figura 8.22 - Viga de parede fina e seção aberta (assimétrica), seção transversal e SCG.....	342

LISTA DE TABELAS

Tabela 8.1	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PP no SCL...	310
Tabela 8.2	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PP no SCL..	310
Tabela 8.3	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PP no SCL..	311
Tabela 8.4	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PP no SCL..	311
Tabela 8.5	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PE no SCL.	313
Tabela 8.6	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PE no SCL.	314
Tabela 8.7	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PE no SCL.	315
Tabela 8.8	- Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PE no SCL.	316
Tabela 8.9	- Resultados para as extremidades da barra (a).....	317
Tabela 8.10	- Resultados para as extremidades da viga (b).....	318
Tabela 8.11	- Resultados para as extremidades da viga.....	319
Tabela 8.12	- Reações de Apoio no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.6.....	321
Tabela 8.13	- Deslocamentos nos Apoios no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.6	321
Tabela 8.14	- Reações de Apoio no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.7.....	322
Tabela 8.15	- Deslocamentos nos Apoios no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.7.....	322
Tabela 8.16	- Reações de Apoio no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.8.....	323
Tabela 8.17	- Deslocamentos nos Apoios no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.8.....	323
Tabela 8.18	- Reações de Apoio no SCG do Pórtico da Fig. 8.9.....	325
Tabela 8.19	- Deslocamentos nos Apoios no SCG do Pórtico da Fig. 8.9.....	326
Tabela 8.20	- Reações de Apoio no SCG do Pórtico da Fig. 8.10.....	327
Tabela 8.21	- Deslocamentos nos Apoios no SCG do Pórtico da Fig. 8.10.....	328
Tabela 8.22	- As frequências naturais procuradas da viga engastada-apoiada.....	330
Tabela 8.23	- Precisão nos valores calculados das frequências naturais.....	331

Tabela 8.24 - As primeiras quatro frequências naturais do pórtico plano com três vãos	333
Tabela 8.25 - As seis primeiras frequências naturais do pórtico tri-engastado.....	335
Tabela 8.26 - As frequências naturais mais baixas no pórtico cruziforme.....	336
Tabela 8.27 - As quatro primeiras frequências naturais do pórtico bi-engastado.....	337
Tabela 8.28 - As duas frequências naturais axisimétricas mais baixas.....	339
Tabela 8.29 - As cinco primeiras frequências naturais.....	339
Tabela 8.30 - As seis primeiras frequências naturais.....	341
Tabela 8.31 - As seis primeiras frequências naturais	342

LISTA DE ABREVIATURAS

<i>nsp</i>	- Numero total de sapatas
AISE	- Análise de interação solo-estrutura
CC	- Caso de carregamento, Centro de cisalhamento
CG	- Centroíde
CT	- Centro de Tecnologia, Centro de torsão
CC1, CC2...	- Caso de carregamento 1, caso de carregamento 2, etc
EDO	- Equação diferencial ordinária
EDP	- Equação diferencial parcial
EEF	- Elemento estrutural de fundação
EI	- Equação integral
EIF	- Elemento isolado de fundação
EP	- Elemento ponto
EPUSP	- Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
ET	- Elemento triangular
ETP	- Elemento triangular plano
ETPILC	- Elemento triangular plano isoparamétrico linear contínuo
GDL	- Graus de liberdade
LAMFIC	- Laboratório de Análise de Modelos Físicos, Quantitativos e Computacionais
MDF	- Metodo das diferenças finitas
MEC	- Metodo dos elementos de contorno
MEF	- Metodo dos elementos finitos
MEIC	- Metodo das equações integrais de contorno
PP	- Pórtico plano
PE	- Pórtico espacial
PVC	- Problema de valor de contorno
PVI	- Problema de valor inicial

RD	- Região deformável do solo
REEF	- Relação entre a rigidez da estrutura e a da fundação
RI	- Região indeformável do solo
RS	- Rigidez do solo
sgn	- Função sinal
SCG	- Sistema de coordenadas globais
SCL	- Sistema de coordenadas locais
SCLU	- Sistema de coordenadas locais unificado
SCLUB	- Sistema de coordenadas unificado bireferenciado
SCLUCG	- Sistema de coordenadas locais unificado no centroíde
SCLUCT	- Sistema de coordenadas locais unificado no centro de torção
Teo	- Teoria
TRP	- Técnica dos resíduos ponderados
UFPB	- Universidade Federal da Paraíba
USP	- Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

a, b, c, d	- Constantes
$a_1, a_2...a_6$	- Constantes
$a_{1y}, a_{2y}...a_{6y}$	- Constantes
a_x, a_y	- Coordenadas do polo principal
b_x, b_y	- Coordenadas do polo arbitrário
b_i	- Forças de corpo
$b_1, b_2...b_6$	- Constantes
$b_{1y}, b_{2y}...b_{6y}$	- Constantes
$c_{1y}, c_2...c_6$	- Constantes
$\cos_{2y}$	- Cooseno de $\sqrt{\lambda_{2y}}L$
$\cos_{2z}$	- Cooseno de $\sqrt{\lambda_{2z}}L$
ch_{1y}	- Cosseno hiperbólico de $\sqrt{\lambda_{1y}}L$
ch_{1z}	- Cosseno hiperbólico de $\sqrt{\lambda_{1z}}L$
$dx_A^{(1)}, dy_A^{(1)}, dz_A^{(1)}$	- Deslocamentos segundo as direções x, y e z do nó A da barra (1) no SCL
f_x	- Força de corpo na coordenada x
f_{xi}, f_{xj}	- Força de corpo na coordenada x para $x=0$ e x para $x=L$
f_y	- Força de corpo na coordenada y
f_{yi}, f_{yj}	- Força de corpo na coordenada y para $x=0$ e para $x=L$
f_z	- Força de corpo na coordenada z
f_{zi}, f_{zj}	- Força de corpo na coordenada z para $x=0$ e para $x=L$
f_t	- Força de corpo na coordenada x

f_{ti}	- Força de corpo na coordenada x para $x=0$
f_{tj}	- Força de corpo na coordenada x para $x=L$
$f_{a0}, f_{a1}\dots f_{a5}$	- Constantes
$f_{b0}, f_{b1}\dots f_{b5}$	- Constantes
$f_{a0y}, f_{a1y}\dots f_{a5y}$	- Constantes
$f_{xA}^{(1)}, f_{yA}^{(1)}, f_{zA}^{(1)}$	- Esforços na extremidade da barra (1) que se liga ao nó A segundo as coordenadas x, y e z no SCL
h	- Altura da seção, altura da sapata, distância entre planos paralelos
h_s	- Distância do ponto R à tangente a linha do esqueleto no ponto s
$k_x, \tilde{k}_x$	- Constante associada à equação governante do efeito axial em barras no regime estático e no domínio da frequência
$k_y, \tilde{k}_y$	- Constante associada à equação governante do efeito de flexão em y em barras no regime estático e no domínio da frequência
$k_z, \tilde{k}_z$	- Constante associada à equação governante do efeito de flexão em z em barras no regime estático e no domínio da frequência
$k_t, \tilde{k}_t$	- Constante associada à equação governante do efeito de torção em barras no regime estático e no domínio da frequência
m_t	- Momento na coordenada x
m_{ti}	- Momento na coordenada x para $x=0$
m_{tj}	- Momento na coordenada x para $x=L$
m_y	- Momento na coordenada y
m_{yi}, m_{yj}	- Momento na coordenada y para $x=0$ e para $x=L$
m_z	- Momento na coordenada z
m_{zi}, m_{zj}	- Momento na coordenada z para $x=0$ e para $x=L$
m_ψ	- Bimomento na coordenada x
$m_{\psi i}, m_{\psi j}$	- Bimomento na coordenada x para $x=0$ e para $x=L$
$m_{zC}^{(2)}$	- Momento em torno do eixo z no nó C da barra (2)

n	- Normal à superfície, valor genérico
n_x, n_y	- Versores de direção da normal ao contorno do elemento de contorno
p	- Ponto arbitrário, carregamento, ponto fonte, esforço, ponto p de ligação da sapata sp com o pilar p
p_i, p_j	- Forças de superfície, componente de forças de superfície, na direção indicada
$\bar{p}_i$	- Forças de superfície prescritas
p_{ij}^*	- Componentes de força fundamental no ponto i coordenada j
p_x, p_y, p_z	- Esforços nas coordenadas indicadas
$\tilde{p}_x$	- Carregamento harmônico axial distribuído
p_{ij}^*	- Componentes de força fundamental no ponto i coordenada j
q	- Ponto campo, ponto genérico de uma sapata
r	- Módulo da distância entre o ponto fonte e o ponto campo
r	- Raio vetor, variável esférica, raio de seção circular
s	- Ponto fonte, ponto qualquer de um corpo
s'	- Imagem do ponto fonte s
sh_{1y}	- Seno hiperbólico de $\sqrt{\lambda_{1y}} L$
sh_{1z}	- Seno hiperbólico de $\sqrt{\lambda_{1z}} L$
t	- Tempo, espessura de seção aberta ou vazada, torque distribuído
$t(x)$	- Torque distribuído ao longo da barra
$u_{ij}^*(p, s)$	- Representa as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti
$u(s)$	- Deslocamento no ponto fonte segundo o eixo x
u_i	- Componente de deslocamento na direção i
$u_i(s)$	- Componentes de deslocamento no ponto fonte na coordenada i
u_{ij}^*	- Componente de deslocamento fundamental no ponto i coordenada j
$\ddot{u}_i$	- Componente de aceleração na coordenada i
$\bar{u}_i(s)$	- Componente de deslocamento prescrito na coordenada i
$\tilde{u}$	- Deslocamento harmônico na coordenada x , no SCL

$u^{*'}_x$	- Derivada em x do deslocamento fundamental segundo o eixo x no SCL
u_{sq}, v_{sq}, w_{sq}	- Deslocamentos segundo as coordenadas x, y e z do ponto q da sapata sp
$u_{spp}, v_{spp}, w_{spp}$	- Deslocamentos segundo as coordenadas x, y e z do ponto p da sapata sp
u, v, w	- Deslocamentos segundo as coordenadas x, y e z
x	- Ponto campo, incógnita
$\hat{x}$	- Coordenada do ponto fonte na coordenada x
x_i	- Coordenadas do sistema local
x, y, z	- Coordenadas do sistema local
x_1, x_2, x_3	- Coordenadas do sistema local
x_q, y_q	- Coordenadas do ponto q na sapata
y	- Distância da camada da barra ao eixo centroidal
w_p^*, w_m^*	- Solução fundamental em deslocamento segundo o eixo z devido à força p aplicada e ao momento m aplicado
ϕ_p^*	- Solução fundamental em rotação segundo o eixo y devido à força p aplicada
ϕ_m^*	- Solução fundamental em rotação segundo o eixo y devido ao momento m aplicado
$\theta_{spp}, \phi_{spp}, \varphi_{spp}$	- Rotação do ponto p de ligação da sapata sp com o pilar p segundo as coordenadas
$\theta_A^{(1)}, \phi_A^{(1)}, \varphi_A^{(1)}$	- Rotações na extremidade barra (1) que se liga ao nó A segundo os eixos x, y e z .
A	- Área do elemento de contorno, área da seção transversal, coeficiente, constante
A_1, A_2, A_3	- Distâncias entre coordenadas específicas de nós de elementos Triangulares, constantes
B_1, B_2, B_3	- Distâncias entre coordenadas específicas de nós de elementos triangulares

B	- Coeficiente, constante, bimomento
B_x	- Bimomento segundo o eixo x
B_A, B_B, B_C	- Bimomento nos nós A, B e C
C	- Constantes, dimensão
$C_1 \cdots C_5$	- Constantes associadas às soluções fundamentais de
D, D_1, D_2, D_3	- Constantes
D_{2y}, D_{2z}	- Constantes associadas à flexão em torno do eixo indicado no índice
D_X, D_Y, D_Z	- Deslocamentos segundo as coordenadas indicadas, deslocamentos nos apoios
E	- Módulo de Yung ou de deformação longitudinal
$E\Gamma$	- Constante de rigidez ao empenamento
F_X, F_Y, F_Z	- Forças segundo as coordenadas (reações de apoio)
G	- Módulo de deformação transversal
H	- Altura da edificação
$H(x - \hat{x})$	- Função de Heavesaide
I_p	- Momento de inércia polar
I_t	- Momento de inércia á torção, Constante de torção
I_z	- Momento de inércia em torno do eixo z
I_y	- Momento de inércia em torno do eixo y
I_ω	- Momento de inércia setorial
J	- Jacobiano
K_d	- Constante
K_s	- Constante
L	- Comprimento
M, M_y, M_z	- Momento fletor, Momento fletor em torno da coordenada indicada
M_X, M_Y, M_Z	- Momentos segundo as coordenadas indicadas (reações de apoio)
M_y^*, M_z^*	- Momento fletor fundamental segundo as coordenadas indicadas
M_{yp}^*, M_{zp}^*	- Momento fletor fundamental devido à carga p , segundo as coordenadas indicadas

M_{ym}^*, M_{zm}^*	- Momento fletor fundamental devido ao momento m , segundo as coordenadas indicadas
$M_{y,\hat{x}}^*, M_{z,\hat{x}}^*$	- Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) do momento fletor fundamental segundo as coordenadas indicadas
$M_{,\hat{y}p}^*, M_{,\hat{x}p}^*$	- Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) do momento fletor fundamental devido à carga p segundo as coordenadas indicadas
$M_{,\hat{y}p}^*, M_{,\hat{x}p}^*$	- Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) do momento fletor fundamental devido ao momento m segundo as coordenadas indicadas
N	- Esforço axial
N^*	- Esforço axial fundamental
Q	- Ponto
R	- Variável esférica, distância do ponto fonte ao ponto campo
S	- Coordenada do ponto sobre a linha do esqueleto.
S_x	- Momento de área em torno do eixo centroidal x ,
S_{ox}	- Momento estático de segunda ordem de área setorial
T	- Torque aplicado
T_{sv}	- Momento responsável pela torção de Saint-Venant
T_w	- Momento de empenamento
$T_t = T_{nu}$	- Momento total da torção não-uniforme
T_A, T_B, T_C	- Torque nos nós A, B e C
V, V_y, V_z	- Esforço cotrante, esforço cortante segundo a coordenada indicada
V_y^*, V_z^*	- Esforço cortante fundamental nas coordenadas indicadas
$V_{y,\hat{x}}^*, V_{z,\hat{x}}^*$	- Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) do esforço cortante fundamental segundo as coordenadas indicadas
X, Y, Z	- Coordenadas do sistema global
X_1, X_2, X_3	- Coordenadas do sistema global
α	- Constante; ângulo entre um eixo principal de inércia da barra e o eixo X do SCG
α_x	- Coeficiente da matriz de influência de deslocamentos devidos ao efeito axial no regime estático

$\tilde{\alpha}_x$	- Coeficiente da matriz de influência de deslocamentos devidos ao efeito axial no regime dinâmico (domínio da frequência)
$\alpha_{y1}, \alpha_{y2} \dots$	- Coeficientes da matriz de influência dos deslocamentos e rotações
$\tilde{\alpha}_{y1L}, \dots \tilde{\alpha}_{y18L}$	- Coeficientes da matriz de influência dos deslocamentos e rotações
$\tilde{\alpha}_{y1Ls} \dots \tilde{\alpha}_{y18Ls}$	- Coeficientes da matriz de influência dos deslocamentos e rotações
$\alpha_{z1}, \alpha_{z2} \dots$	- Coeficientes da matriz de influência dos deslocamentos e rotações devidos à flexão em z no regime estático
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$	- Constantes
β	- Constante, coeficiente
β_x	- Coeficientes da matriz de influência dos esforços devidos ao efeito axial no regime estático
$\beta_{y1}, \beta_{y2} \dots$	- Coeficientes da matriz de influência de esforços e momentos devidos à flexão em y
$\beta_{z1}, \beta_{z2} \dots$	- Coeficientes da matriz de influência de esforços e momentos devidos à flexão em z no regime estático
$\hat{\beta}_{y1}$	- Coeficiente associado ao efeito de flexão em y da viga de Timoshenko, única diferente das constantes associadas ao efeito de flexão da viga de Euler-Bernoulli no regime estático
$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$	- Constantes
$\tilde{\beta}_{1L}, \dots \tilde{\beta}_{18L}$	- Coeficientes da matriz de influência de esforços e momentos devidos à flexão em y no domínio da frequência
$\tilde{\beta}_{1Ls}, \dots \tilde{\beta}_{18Ls}$	- Coeficientes da matriz de influência de esforços e momentos devidos à flexão em y no domínio da frequência
θ, ϕ, φ	- Ângulo de rotação em torno do eixo x, do eixo y e do eixo z
$\theta_A^{(u)}, \theta_C^{(u)}$	- Rotação de acordo com o eixo x nas extremidades da barra única que chega ao nó A e ao nó C
$\theta_A^{(u)}, \theta_C^{(u)}$	- Rotação de acordo com o eixo x nas extremidades da barra (1) que chega ao nó A e ao nó C
δ_{ij}	- Delta de Kronecker

$\delta(p, s), \delta(x, \hat{x})$	- Delta de Dirac
$\varepsilon, \varepsilon_x$	- Deformação específica, componente de deformação específica segundo o eixo x
ε_{ij}	- Componentes de deformação
λ	- Constante de Lamé, Índice de esbeltez
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$	- Raízes de equação
$\lambda_{1y}, \lambda_{2y}, \lambda_{3y} \dots$	- Raízes de equação associada ao estudo da flexão em y
$\lambda_{1z}, \lambda_{2z}, \lambda_{3z} \dots$	- Raízes de equação associada ao estudo da flexão em z
λ_{geo}	- Índice de esbeltez geométrico
μ	- Constante de Lamé
ν	- Coeficiente de Poisson, deslocamento segundo o eixo y quando escrito nas equações com a utilização do Equation 3 do
ω_s	- Área setorial
σ_{ij}	- Componentes de tensão
σ_x	- Tensão normal à direção x
τ	- Tensão de cisalhamento
ξ	- Valor infinitesimal
ξ_1, ξ_2, ξ_3	- Coordenadas naturais
$\gamma, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	- Distorção, distorção no plano xz , distorção no plano xy
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$	- Constantes
κ	- Coeficiente de cisalhamento,
ψ	- Empenamento, função empenamento de Saint Venan
$\psi_A^{(1)}, \psi_C^{(1)}$	- Empenamento na extremidade que se liga ao nó A e ao nó C da barra (1)
$\psi_A^{(u)}, \psi_C^{(u)}$	- Empenamento na extremidade que se liga ao nó A e ao nó C da barra única
ρ	- Massa específica, raio de curvatura do eixo da viga, raio de seção circular
ζ	- Função escalar

Δ	- Deslocamento, incremento
Γ	- Contorno do corpo, constante de empenamento da seção
Γ_1	- Contorno do corpo onde as forças são prescritas
Γ_2	- Contorno do corpo onde os deslocamentos são prescritos
Γ^*	- Contorno do corpo
Γ_ε	- Contorno da esfera acrescida ao contorno original
Γ_{el}	- Contorno de elemento
$\bar{\Gamma}$	- Interseção do contorno original com a parte da esfera
Ω	- Dominio do corpo
Ω_ε	- Dominio do corpo
Ω_{el}	- Dominio de elemento
Ω^*	- Dominio do corpo
$\{b\}, \{f\}$	- Vetor das forças de corpo
$\{p_n^m\}$	- Forças de superfície nodais definidas no nó $m=1, 2, 3$ do elemento
$\{p\}, \{\underline{p}\}$	- Vetor dos esforços no SCL
$\{\bar{p}\}$	- Vetor dos esforços no SCLU
$\{u\}, \{\underline{u}\}$	- Vetor dos deslocamentos no SCL
$\{\bar{u}\}$	- Vetor dos deslocamentos no SCLU
$\{u^*\}$	- Vetor das soluções fundamentais em deslocamentos
$\{u_n\}$	- Vetor dos deslocamentos do nó
$\{F\}$	- Vetor de esforços nodais da estrutura no SCG
$\{X\}$	- Vetor das coordenadas de um ponto
$\{X_n\}$	- Vetor das coordenadas nodais
$\{U_{est}\}$	- Vetor dos deslocamentos nodais no SCG
$\{U_n\}, \{P_n\}$	- Vetores de deslocamentos e esforços no nó n
$\{\bar{U}_s\}, \{\bar{P}_s\}$	- Vetores de deslocamentos e forças de superfície nos nós de todos os elementos da discretização do solo

$\{\hat{U}_{spp}\}$	- Vetor dos deslocamentos do ponto p de ligação da sapata sp com o pilar p
$\{\bar{U}_{si}\}$	- Vetor dos deslocamentos e rotações do nó i da discretização do solo
$\{\hat{U}_{si}\}$	- Vetor dos deslocamentos e rotações dos nós (pontos) da sapata i
$\{P_{est}\}$	- Vetor dos esforços nodais no SCG
$\{B_{est}\}$	- Vetor das forças de corpo no SCG
$\{\bar{U}\}$	- Vetor dos deslocamentos associados ao SCLU
$\{\bar{P}\}$	- Vetor dos esforços associados ao SCLU
$\{\bar{B}\}$	- Vetor de forças de corpo associadas ao SCLU
$\{V_D\}$	- Vetor das grandezas desconhecidas no sistem de equações do MEC
$\{V_I\}$	- Vetor das grandezas independentes no sistema de equações do MEC
$[g], [\underline{g}]$	- Matriz dos coeficientes de influencia de barra no SCL
$[h], [\underline{h}]$	- Produto $[I]\{u\} +$ a matriz $[\hat{h}]$, produto $[I]\{u\} +$ a matriz $[\hat{h}]$
$[\hat{h}], [\underline{\hat{h}}]$	- Matriz dos coeficientes de influência de barra no SCL
$[\eta_h]$	- Matriz que relaciona os deslocamentos no SCL aos deslocamentos no SCLU
$[\eta_h]$	- Matriz que relaciona os esforços no SCL aos esforços no SCLU
$[\Phi]$	- Matriz de função de interpolação
$[A]$	- Matriz associada ao vetor das grandezas incognitas no sistema de equações do MEC
$[B]$	- Operador diferencial
$[B^{cof}]$	- Matriz dos cofatores da matriz $[B]$
$[C]$	- Submatriz da matriz $[R]$
$[D]$	- Matriz que relaciona o vetor $\{\hat{U}_s\}$ com o vetor $\{\bar{U}_s\}$
$[G], [G_{est}]$	- Matriz dos coeficientes de influencia da estrutura no SCG, matriz de soluções fundamentais

$[G_s]$	- Matriz que relaciona $\{\bar{P}_s\}$ a $\{\bar{U}_s\}$
$[\bar{T}]$	- Matriz inversa da matriz $[G_s]$
$[H]$	- Matriz obtida do produto $[I]\{U\} +$ Matriz de influencia $[\hat{H}]$ no SCG, matriz obtida do produto entre as matrizes $[T]$ e $[D]$
$[\hat{H}_{est}], [\hat{H}]$	- Matriz dos coeficientes de influência da estrutura no SCG
$[H_{ij}^{(k)}], [H_{ij}^{(k)}]$	- Matrizes de influencia da barra da extremidade i para a j da barra (k)
$[I]$	- Matriz identidade
$[R]$	- Matriz que relaciona grandezas referidas ao SCLU ao SCG

“As grandes descobertas resultam, na maioria dos casos, da necessidade de resolver um problema prático. Frequentemente as pessoas recusam analisar com profundidade a questão, perdendo o estímulo ao surgirem os primeiros embaraços. Quando alguém entretanto, decide levar a sério a questão e a meditar profundamente sobre o problema novo, surgem com frequência resultados inéditos.”

Fernando Luiz Barbosa Lobo Carneiro

*Uma jornada
de mil milhas começa
com um simples passo.
Lao-tzu*

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo inicial é composto por mais três itens, nos quais são feitos breves comentários do estado-da-arte, explicitados os objetivos, escopo e organização da tese, além de enumerar as contribuições originais ao estado-da-arte aqui apresentadas.

1.2 BREVES ASPECTOS DO ESTADO-DA-ARTE

Neste item serão apresentados alguns aspectos históricos e do estado-da-arte relativos ao cálculo matricial de estruturas, desenvolvimento do método dos elementos de contorno, aplicado à análise de interação solo-estrutura bem como, ao estudo das barras de paredes delgadas e seção aberta, aqui chamadas de núcleos.

1.2.1 O Cálculo Matricial e Técnicas Numéricas

De acordo com LIVESLEY (1975), as idéias presentes nos documentos de Bendixen e Ostfeld de 1914 e 1926, respectivamente, sobre a utilização do cálculo matricial de estruturas não mereceram a devida atenção, na época, por envolverem a solução de grandes sistemas de equações, demandando grande tempo e paciência para a sua solução.

Consequentemente o trabalho dos engenheiros calculistas de estruturas continuou uma tarefa árdua e enfadonha, pois embora as estruturas não fossem, em geral, muito arrojadas, a grande quantidade de cálculos envolvida permaneceu por mais alguns anos

sendo desenvolvida manualmente ou com o auxílio de máquinas calculadoras relativamente simples.

Conquanto a formulação Matricial do Método dos Deslocamentos tenha seus primórdios em 1944, ainda de acordo com LIVESLEY (1975), quando Kron a utilizou pela primeira vez, sua aplicação permaneceu restrita a análise de estruturas simples cujo equacionamento resultasse em pequeno número de equações implicando numa equação matricial com matrizes quadradas de pequena ordem. É dessa época o Método das Diferenças Finitas (MDF), que teve como origem o trabalho de Southwell datado de 1946 (CALDERON, 1996), e ainda é utilizado em muitos problemas de engenharia apesar das suas restrições.

Porém, com a chegada da chamada era da informática em meados da década de 1950 e a constatação da grande praticidade na programação da formulação matricial para a automação da análise estrutural, toda a energia criadora da comunidade de engenheiros envolvida nessa labuta se voltou para o aprimoramento da ferramenta matemática existente.

Como resultado desse esforço resultaram o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), dentre outros.

Devido a grande versatilidade da sua aplicação o MEF – cujo nome foi cunhado por CLOUGH (1960) – se tornou o mais popular dos métodos numéricos, sendo hoje uma técnica de cálculo plenamente estabelecida (QUEIROZ, 2010), tendo sido aplicado em diversas estruturas desde as estruturas reticuladas até as estruturas volumétricas, tanto em regime estático quanto dinâmico como bem atesta a leitura de MACKERLE (2000).

O MEC – cuja denominação foi dada depois do trabalho de BREBBIA (1978), é o mais novo dos métodos citados, embora seu desenvolvimento tenha ocorrido a partir da década de 1970, também pode ser considerado um método numérico estabelecido, especialmente no que concerne a aplicação nas análises de estruturas de superfície e de volume. Incluída a análise do solo que é considerado como um espaço semi-infinito, dentre outras aplicações.

Sua formulação tem a mesma origem das demais técnicas numéricas, já que qualquer uma delas pode ser formulada a partir do mesmo princípio de minimização dos erros. Pois as equações integrais (EI) utilizadas pelo MEC podem ser obtidas a partir da aplicação da técnica dos resíduos ponderados (TRP) nas equações diferenciais governantes dos problemas estudados. (BREBBIA et al., 1983).

Assim, as etapas a serem realizadas no processo de análise estrutural, cujo ponto de partida são as simplificações introduzidas no problema real para a obtenção de modelos capazes de representar os comportamentos dos campos de interesse, se encaixam perfeitamente na formulação do MEC. A representação matemática, com a obtenção das relações governantes do problema, que em geral, são escritas em termos de equações diferenciais ordinárias (EDO) ou parciais (EDP) e definidas sobre um domínio, são então transformadas em EI definidas em um contorno, na maioria das vezes composto por um meio contínuo.

As soluções analíticas para as EDOs e EDPs bem como para as EIs desses problemas não estão disponíveis ou até mesmo não são possíveis na maioria dos casos, se caracterizando como uma alternativa conveniente a discretização do meio contínuo e a sistematização do problema discreto, obtendo-se soluções aproximadas via análises numéricas, em geral a partir da utilização de um dos métodos numéricos citados ou mesmo da utilização combinada de dois deles (MANOLIS E BESKOS, 1988).

1.2.2 O MEC – Aspectos Históricos e do Estado-da-arte

Na última metade do século XX diversas técnicas numéricas de resoluções de equações ou de sistemas de equações diferenciais deram origem a eficientes ferramentas de cálculo, que permitem a análise dos mais variados problemas de engenharia, concorrendo para a solução de problemas práticos para os quais as soluções analíticas são de difícil obtenção ou de difícil aplicação ou simplesmente não existem, uma vez que os procedimentos numéricos possibilitavam não apenas uma grande flexibilidade de modelagem como também agilidade na obtenção da solução (CAVALCANTI, 2002).

O método dos elementos finitos é introduzido então na chamada era do advento dos computadores. Com a facilidade existente, a simplicidade e a elegância da sua formulação, o método teve um crescimento extremamente rápido, atingindo praticamente todos os campos da engenharia. O MEF assim como o Método das Diferenças Finitas, seu antecessor, aproxima a solução da equação diferencial que rege o problema físico, utilizando valores do domínio de validade, isto é, valores das variáveis básicas do problema em pontos internos e do contorno do espaço em análise. Decorrendo, daí, a denominação “métodos de domínio” muitas vezes atribuída a essas ferramentas de cálculo (ALEXANDER e CHENGA, 2005).

As técnicas de resoluções das equações integrais de contorno surgem, posteriormente, como procedimentos numéricos alternativos promissores para a resolução de diversos problemas físicos da engenharia. Mais particularmente, o Método dos Elementos de Contorno ganha espaço entre os pesquisadores e se estabelece como uma importante técnica de análise de problemas da Mecânica do Contínuo.

No MEC, como nos demais métodos numéricos, a solução obtida será calculada em pontos discretos, os nós, definidos usualmente apenas sobre o contorno. Essa característica do método leva a uma redução das dimensões dos problemas examinados, isso significa menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento em muitos problemas, requerendo menor área auxiliar para armazenamento das informações necessárias no processamento.

A obtenção da equação integral de contorno é obtida pela transformação da equação diferencial governante do fenômeno estudado em uma equação integral equivalente. Esta relaciona, geralmente, valores de contorno e possibilita a análise do problema. A aplicação do MEC está condicionada a uma solução fundamental que representa a resposta em um ponto (chamado de ponto-campo) do domínio infinito do problema congênere devido à aplicação de força unitária em outro ponto (o ponto-fonte). Uma das características das soluções fundamentais é ter natureza singular quando o ponto-fonte é colocado sobre o campo (isto é, aplicação e leitura dos efeitos na vizinhança do ponto-fonte). Este fato pode ser considerado inicialmente uma desvantagem (pois necessita de um estudo matemático cauteloso dos efeitos físicos), no entanto, é esta mesma característica que proporciona versatilidade e precisão ao método, segundo BECKER (1992) e VANZUIT (2007). O MEC como método numérico só aconteceu, concomitantemente ou após o estabelecimento das equações integrais.

Embora só a partir das décadas de 1960 e 1970 a maneira de formular as equações através de integrais tenha se tornado conhecida, Erick Trefftz, matemático alemão (1888-1937), já havia empregado-as em seu método (LI *et al.*, 2007). A diferença básica do método adotado por Trefftz consiste no emprego de soluções fundamentais auxiliares em vez de usar a própria função aproximadora.

Apesar de apenas nas duas últimas décadas ter crescido o interesse dos pesquisadores pelo Método dos Elementos de Contorno, as equações integrais, base do desenvolvimento dessa técnica, são conhecidas há muito tempo. Foi o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), em 1823, que primeiro deduziu as equações

integrais para o tratamento de problemas físicos. O problema mais antigo resolvido desta forma é o da tautócrona - do grego *tauto+crono*, *mesmo tempo* - propriedade utilizada na formulação do estudo de um pêndulo isócrono (SILVA, 1996, SOUZA, 2001). Avanços posteriores foram devidos ao matemático francês Joseph Liouville (1807-1882) que em 1837, transformou um Problema de Valor Inicial (PVI) em uma equação integral e a resolveu usando aproximações sucessivas.

O estudo de problemas da teoria do potencial contribuiu para novos avanços quando Vito Volterra (1860-1940), físico e matemático italiano, em 1884, aplica as equações integrais no estudo da distribuição de cargas elétricas na superfície de uma esfera. Dois anos mais tarde, a representação integral para a elastostática é estabelecida no trabalho intitulado *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. Il Nuovo cimento*, desenvolvido por outro matemático e físico italiano Carlo Somigliana (1860-1955) em 1886, que resultou em uma relação integral, conhecida principalmente na comunidade de elementos de contorno, como Identidade Somigliana (DOMINGUEZ, 1993).

Porém foi o matemático suíço Erik Ivar Fredholm (1866–1927) que apresentou o primeiro e extenso estudo da aplicação das equações integrais lineares à solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC) em elastostática. Seu trabalho (FREDHOLM, 1903), cujo título original é *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, lhe rendeu muitos seguidores e destes, diversas publicações sobre a utilização de equações integrais na solução de problemas elásticos.

Até 1950, apenas PVC relativos à casos particulares de problemas foram estudados baseados nas equações integrais lineares de Fredholm. Um dos estudos de representações integrais com soluções fundamentais para campos vetoriais e aplicados em problemas elásticos é devido ao matemático georgiano Victor Dmitrievich Kupradze (1903-1985). No seu trabalho, KUPRADZE (1965) utilizou os fundamentos da teoria de Fredholm em equações com integrais singulares.

A escola russa deu enorme contribuição ao início de uma nova era do uso das equações integrais para resolução de problemas físicos, entretanto, elas são pouco conhecidas entre os profissionais de engenharia. Um dos estudos de relevância pode ser visto em MIKHLIN (1964), matemático e físico russo, (1908-1991). Essa obra com título traduzido para o inglês *Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology* é uma contribuição valiosa para o entendimento da teoria sobre equações integrais com integrandos escalares e vetoriais, com

ênfase especial para aquelas com singularidades e descontinuidades no domínio de integração.

Apesar da importância de todos os trabalhos objetivando o entendimento e o tratamento das equações integrais, nenhum deles é interpretado como sendo um método numérico para a resolução de problemas de engenharia.

De acordo com BELTRÁN (1999), é atribuído ao matemático irlandês Maurice Aaron Jaswon (1922-) a utilização, em 1963, da primeira técnica assemelhável ao MEC para resolver as equações integrais de Fredholm no estudo de problemas potenciais. Em 1967, o matemático norte-americano Frank Joseph Rizzo (1938-) baseando-se nas soluções fundamentais de Willian Thomson (Lorde Kelvin) (1824-1907) matemático e físico britânico, para um meio elástico infinito publicou *An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics* para a solução de problemas da elasticidade. O tratamento das equações integrais toma a forma de técnica numérica similar à dos demais métodos pela primeira vez neste trabalho. Sendo, ainda, o primeiro a propor a formulação direta para o tratamento das equações integrais, onde as incógnitas que aparecem nos integrandos são as variáveis físicas do problema. As formulações até então apresentadas são chamadas de métodos indiretos, pois a solução do problema era obtida em termos de fontes fictícias aplicadas ao contorno, e permitiam, após a determinação de seus valores, o cálculo das variáveis físicas do problema.

Após os trabalhos pioneiros, de JASWON (1963) e RIZZO (1967), e o estudo do engenheiro mecânico norte-americano Thomas Allen Cruse (1941-), publicado em 1969, apresentando uma adaptação do método direto aos domínios elásticos tridimensionais, foi a contribuição de Lachat em 1975 que abriu as portas para o grande desenvolvimento do MEC. Pois é nesse trabalho que é incorporada ao MEC, a filosofia de discretização e do cálculo do MEF (BELTRÁN, 1999). Diversos estudos a partir do apresentado por RIZZO (1967) concorreram para o aprimoramento do método. Sendo dignas de destaque as contribuições de CRUSE e RIZZO (1968) e RIZZO e SHIPPY (1968), conforme BARBIRATO (1999).

Porém foram os trabalhos realizados por: LACHAT (1975), DOMINGUEZ (1977), BANERJEE e BUTTERFIELD (1977), BREBBIA e DOMINGUEZ (1977), BREBBIA (1978) que mostraram a consistência de um método numérico no Método das Equações Integrais de Contorno (MEIC), ao utilizar a técnica dos Resíduos Ponderados e

as funções de aproximação do MEF. Passando, então, a ser denominado de Método dos Elementos de Contorno.

A sistematização das equações do MEC para o estudo no espaço tridimensional tem como precursores os trabalhos de CRUSE (1969) e de LACHAT (1975), já citados. No primeiro, a solução fundamental de Kelvin é utilizada em problemas gerais da elasticidade, adotando a discretização linear para a geometria e uma aproximação constante para as variáveis. O estudo de Lachat também utiliza as soluções fundamentais de Kelvin, e aplica o método em problemas da elasticidade bi e tridimensional, sendo o contorno do corpo discretizado a partir de elementos curvos de segunda ordem onde a aproximação das variáveis pode ser linear, quadrática ou cúbica. Depois disso, muitas outras contribuições para o MEC em problemas estáticos e dinâmicos em regime elástico e inelástico se seguiram, sugere-se a consulta de outras referências, dentre elas: SWEDLOW e CRUSE (1971), SCHANZ (1999), WATSON (2002).

Desde as primeiras investigações através do MEC o principal foco na Mecânica dos Sólidos tem sido dirigido para os problemas bi e tridimensionais, BECKER (1992), DOMINGUEZ (1993), ALIABADI (2002), KATSIKADELIS (2002). Quanto a aplicação do MEC na análise de estruturas reticuladas o cenário tem se mostrado diferente. São poucos os trabalhos encontrados, e na sua maioria apresentam estudos sobre barras e vigas.

Só a partir da década de 1980, soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC foram apresentadas no estudo de barras onde a flexão de vigas de Euler-Bernoulli nos problemas estáticos foi mostrada por BANERJEE e BUTTERFIELD (1981) e nos dinâmicos por PROVIDAKIS e BESKOS (1986).

Apenas mais recentemente no início dos anos 2000 a formulação relativa à análise estática da viga de Timoshenko foi desenvolvida. ANTES (2003), obteve o sistema completo de equações integrais para a teoria de Timoshenko. De acordo com esse autor, o trabalho pode ser considerado como o primeiro passo para a importante análise dinâmica de vigas de Timoshenko. De fato, no ano seguinte, em ANTES, SCHANZ e ALVERMANN (2004), a formulação para análise harmônica do modelo de Timoshenko foi utilizada no estudo de pórticos planos.

Consequentemente, o estudo das estruturas reticuladas via MEC ainda não está completo, requerendo, portanto, investigações adicionais para seu apropriado estabelecimento, principalmente em pórticos espaciais.

Outro estudo de interesse está associado à interação solo-estrutura, que geralmente é modelado empregando-se unicamente o MEF (OTTAVIANI (1975), CHOW e TEH (1991)), o MEC (CALDERÓN (1991), PAIVA (1993), PAIVA e BUTTERFIELD (1997), MENDONÇA (1997), PAIVA e TRONDI (1999), SHEN, CHOW e YONG (1999), MENDONÇA e PAIVA (2000), MATOS FILHO e MENDONÇA (2005) e SOUZA e MENDONÇA (2008)), e a combinação MEC-MEF (MENDONÇA e PAIVA (2003), PAIVA e ALMEIDA (2004)). Porém as estruturas interagindo com o solo, discutidas nesses trabalhos, recaem em placas e cascas. Para o caso específico de interação pórtico-solo tem-se o trabalho de QUEIROZ (2010). Nesse, apenas o acoplamento vertical é feito, sendo aplicado o MEF na análise da estrutura e o MEC para a análise da contribuição do solo. Sendo a transmissão das forças de interação pórtico-solo feita a partir de uma meso-estrutura (sapata) idealizada para sofrer apenas movimentos de corpo rígido.

1.2.3 A AISE - Aspectos Históricos e do Estado-da-arte

A análise da Interação Solo-Estrutura (AISE) se constitui na melhor alternativa para a determinação dos deslocamentos reais da fundação bem como dos esforços internos que lhes solicitam, pois avalia a superestrutura, a infraestrutura e o meio de apoio, como um sistema único, no qual as três partes componentes trabalham acopladas.

Devido às dificuldades inerentes a esse tipo de análise e a necessidade da concorrência das áreas de geotecnia e de estrutura (esta para a análise do sistema estrutural e aquela para o equacionamento da representação matemática do maciço de apoio) para a sua implementação, observa-se que em muitos projetos de engenharia a avaliação entre as partes integrantes do sistema em estudo (solo-estrutura) é realizada independentemente. Nesse modelo simplificado, é, em geral, assumido que a estrutura está vinculada ao meio de apoio através de ligações indeformáveis e indeslocáveis que são estabelecidas pelos Elementos Estruturais de Fundação (EEF), assim as reações calculadas na base da estrutura serão utilizadas como ações aplicadas aos elementos de fundação que serão dimensionados tendo em vista as características do maciço. Como estas hipóteses não condizem com a realidade, pois deslocamentos ocorrerão devido às deformações verificadas no elemento estrutural e no solo, então os resultados obtidos não representarão, adequadamente, o comportamento da estrutura nem o do solo, impondo à estrutura solicitações devidas às deformações no solo que não serão levadas em consideração, para as quais não foi

dimensionado (GUSMÃO (1994), HALL e OLIVETO (2003), VITORETI (2003), DORIA (2007)).

As características das cargas aplicadas constituem fator importante na definição das pressões de contato, uma vez que a resultante dessas pressões deve ser igual e oposta à resultante das cargas transferidas para o solo (condição de equilíbrio). A intensidade desses esforços, por exemplo, influencia a distribuição de pressões de contato, pois com o aumento da carga, as pressões nas bordas dos EEF se mantêm constantes, ocorrendo aumento das pressões de contato na parte central. Outro fator a ser levado em conta é a rigidez relativa entre os EEF e o solo. Quanto mais flexível for a estrutura de fundação, mais as pressões de contato refletirão o carregamento embora seus recalques sejam menos uniformes.

O fato de que a deformação no solo e a tensão diminuem com o aumento da distância entre o ponto considerado e a fundação, permite concluir, inclusive intuitivamente, sobre a existência de uma distância (D_0) a partir da qual a deformação do solo e a tensão se tornam nulas. Desse modo duas regiões são definidas: a região (RD) na qual ocorrerão deformações devido às ações transmitidas pelos EEF, e a outra região (RI), onde o solo permanecerá praticamente inalterado, como mostrado nas Figs. 1.1 e 1.2.

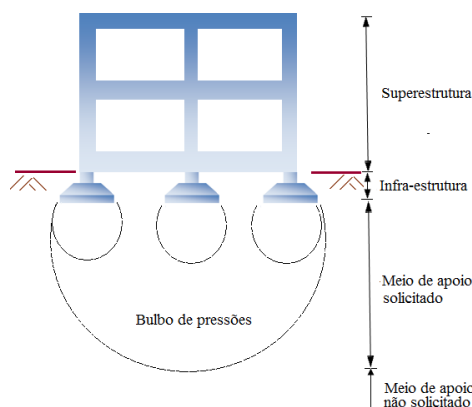


Figura 1.1 - Bulbo de pressões

Como decorrência, dois modelos gerais são idealizados para possibilitar o equacionamento do problema em evidência: a) o modelo da região limitada em que, como o próprio nome sugere, a região de interesse é limitada sendo previamente definida e, b) o

modelo do espaço semi-infinito que considera o sistema estrutura-fundação assentado em região que cresce indefinidamente a partir do plano definido pela interface estrutura-solo. De acordo com o modelo (a) a região do solo além da distância limite D_0 pode ser modelada como rígida ou indeformável. Nesse modelo a determinação da distância limite, aquela que separa as duas regiões, representa um problema cuja solução requer acentuada atenção.

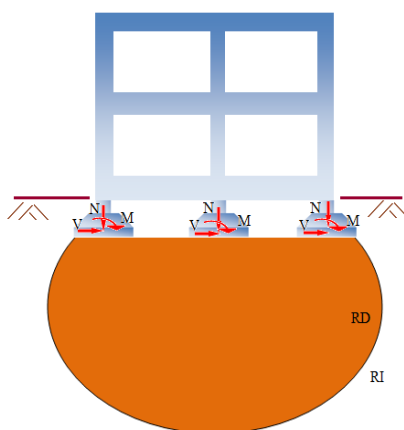


Figura 1.2 - Interação solo-estrutura – Modelo “a”

De qualquer maneira a região RD passa a ser entendida como parte do sistema em análise. No cálculo do tamanho dessa região, a maior dimensão da área de Contato Solo-Estrutura (BCSE) é tomada como um dos parâmetros empregados. D_0 é proporcional à raiz quarta da razão entre a Rigidez do Elemento Estrutural de Fundação (REEF) e a do solo (RS). Para a relação REEF igual a $10RS$, por exemplo, a distância D_0 será aproximadamente igual a $1,78BCSE$. (TEIXEIRA e GODOY, 1998).

No segundo modelo, ou seja, no modelo através do qual o EEF ou o SEF (conjunto dos EEF numa edificação) é assentado em um semi-espaço infinito, mesmo as regiões do meio de apoio mais afastadas dele serão levadas em consideração.

De acordo com o acima exposto observa-se que a AISE se caracteriza como um problema de grande importância para o desenvolvimento de projetos econômicos e seguros que, por envolver grande quantidade de variáveis, é também um problema de difícil solução; requerendo do engenheiro significativo acréscimo na energia demandada para a sua solução, a cada tentativa de obtenção de resultados mais realistas a partir de ajustes no modelo. Em função da adoção do modelo da região limitada ou do semi-espaço infinito

para o meio considerado contínuo onde o SEF está assentado, decorrerá a escolha da técnica numérica a ser empregada. Nesta oportunidade as dificuldades observadas quando da aplicação do MEF ou do MDF, na definição da malha em região semi-infinita, permitirão que sejam demonstradas a viabilidade e a supremacia do MEC no tocante a problemas dessa natureza (COOK *et al.*, 1989).

Desse modo, nas análises de interação solo-estrutura, em geral, o meio de apoio é modelado pelo MEC enquanto a superestrutura e a infra-estrutura poderão ser modeladas pelo MEF ou pelo MEC. Para a análise estática do solo utiliza-se a solução de Kelvin em 3D, a solução de Midlin ou mesmo a de Bousinesq-Cerruti, enquanto cada um dos EEF e a superestrutura são representadas, respectivamente, por uma placa finita (cuja rigidez é infinita para fundações rígidas) e por elementos de pórticos 3D.

Embora as estruturas de fundação sejam, de modo geral, sujeitas a efeitos dinâmicos de carregamentos externos aplicados na superfície de contato e de ondas sísmicas em movimento, nesta tese, nas análises de interação solo-estrutura elas serão sujeitas apenas aos efeitos de carregamento estático, estando assentadas em meio contínuo homogêneo.

1.2.4 O núcleo - Aspectos históricos e estado-da-arte

Quando um elemento estrutural é submetido à torção, sua seção transversal pode empenar além de girar. Se, ao elemento for permitido empenar livremente então o torque aplicado é resistido inteiramente pela tensão de cisalhamento torcional que é chamada de tensão de cisalhamento de Saint-Venant. Caso contrário, se o elemento for impedido de empenar, o torque aplicado é resistido pela tensão de cisalhamento de Saint-Venant e pela tensão normal de empenamento. Esse comportamento caracteriza a chamada torção não-uniforme.

Assim, distinguem-se a torção uniforme ou torção pura, também chamada de torção de Saint-Venant e, a torção não-uniforme que pode ser entendida a partir de uma composição da torção pura e da torção de empenamento. Na verdade, o problema da torção foi considerado resolvido pela teoria de Saint-Venant em 1885 que, ao corrigir hipóteses anteriormente utilizadas, estabeleceu a solução exata para o problema da torção em barras prismáticas. Este problema foi inicialmente estudado por Charles Augustin Coulomb, em 1784 e depois por Claude Louis Marie Navier (engenheiro francês, 1785-1836) em 1821.

Resultados equivalentes foram obtidos também por Ludwig Prandtl (engenheiro alemão, 1875-1953) em 1903 através de uma função de tensão.

Como essa teoria só é aplicável quando as barras submetidas à torção têm suas extremidades livres para se deslocarem segundo a direção axial, ou seja, as seções transversais externas podem sofrer deformações fora do seu plano livremente, essas deformações provocam o encurvamento das seções sendo chamadas de empenamento.

Desse modo restava resolver o problema da torção em barras nas quais o empenamento não fosse uniforme. Somente em 1905, a torção pode ser estudada nas barras com empenamento restringido, através da teoria da torção não-linear de Timoshenko.

No que diz respeito à torção combinada com a flexão, importante contribuição foi apresentada por Robert Mailartt (engenheiro civil suíço, 1872-1940), quando, em 1921, utilizou pela primeira vez o conceito de centro de cisalhamento, CC . Ele demonstrou que, ao atuarem através desse centro as cargas transversais e as reações por elas provocadas nos apoios da barra, o efeito de torção seria anulado. Em 1940, o engenheiro Vasilii Zakharovich Vlasov (1906-1958), nascido na União Soviética, desenvolveu uma teoria combinando os efeitos de flexão com os da torção não-uniforme em barras de paredes finas e abertas, que só veio a ser bem conhecida no ocidente quando da tradução do seu livro para o inglês em 1961. Esta teoria, que ficou conhecida como teoria de Vlasov, permitiu o surgimento de um novo grupo de elementos estruturais lineares denominados de barras unidirecionais de paredes delgadas (MORI e NETO, 2009).

Devido ao baixo peso próprio para uma dada resistência, as barras de paredes finas e seção aberta têm sido usadas com mais e mais frequência como componentes estruturais em projetos estruturais em vários ramos da engenharia: mecânica, civil, aeronáutica, etc.

Muitas são as soluções propostas para as análises estáticas e dinâmicas de barras de seções abertas de paredes finas sob as hipóteses do problema de flexo-torção de Vlasov. No caso estático algumas soluções podem ser encontradas: analíticas, VLASOV (1963); via MEF, TARANAH (1978) e via MEC com integrais de domínio por SAPOUNTZAKIS (2000). Convém notar que no trabalho desse último autor as equações integrais requerem o cálculo de integrações de domínio envolvendo a segunda derivada do ângulo de torção, o que descaracteriza uma definição mais rigorosa do MEC. Além disso, suas equações integrais não contemplam diretamente grandezas típicas da torção não-uniforme, tais como o bimomento e o empenamento.

O caso dinâmico tem recebido intensa atenção por parte de pesquisadores. Soluções analíticas podem ser encontradas para os casos bi e tri-acoplados em DOKUMACI (1987), BANERJEE E WILLIAMS (1994), BERCIN E TANAKA (1997,1999), ARPACI e BOZDAG, (2002), PROKIÉ (2005); soluções via MEF: FRIBERG (1993), BANERJEE (1991); e via MEC com integrais de domínio SUPOUNTZAKIS e DURAKOPOULOS (2008).

Aqui vale registrar que os efeitos decorrentes da metodologia utilizada por SUPOUNTZAKIS (2000) para gerar a representação do MEC para o caso estático reaparece em sua formulação do MEC para o caso dinâmico. Isto é, as equações integrais apresentam termos de domínio e não incorporam diretamente algumas grandezas da torção não-uniforme como o bimomento e empenamento.

Assim, nesta tese é proposta uma formulação do MEC para os casos estático e dinâmico (domínio da frequência), cujas representações integrais e algébricas incorporam diretamente todas as grandezas do problema da flexo-torção de Vlasov, com especial destaque ao bimomento e empenamento.

1.3 OBJETIVOS, ESCOPO E ORGANIZAÇÃO

Neste item serão apresentados os objetivos, o escopo e a organização da tese.

1.3.1 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer: a) uma formulação direta do MEC (implicando na dedução de equações integrais, soluções fundamentais e representações algébricas) para barras de paredes delgadas e seção aberta submetidas à torção não-uniforme sob ação estática e vibratória; b) apresentar uma estratégia conveniente de sequenciamento de sistemas de referência para as equações integrais e algébricas com o intuito de viabilizar análise estática e dinâmica (domínio da frequência) de pórticos planos e espaciais utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno; c) a sistematização do problema da interação solo-estrutura feita unicamente pelo MEC, em que a superestrutura é tomada com um pórtico espacial e o solo como um meio elástico semi-infinito.

1.3.2 Escopo

Todos os materiais envolvidos serão considerados elásticos lineares e o comportamento estrutural será restrito ao linear (linearidade física e geométrica), ficando assim garantida a superposição de causas e efeitos e a possibilidade da análise estrutural na configuração indeformada. O solo será considerado como um espaço semi-infinito, contínuo, homogêneo e isotrópico.

1.3.3 Organização

O conteúdo do trabalho está dividido em nove capítulos, abaixo listados:

Capítulo 1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Capítulo 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Capítulo 3 – O MEC EM ESTRUTURAS RETICULADAS: ANÁLISE ESTÁTICA

Capítulo 4 – TRANSFORMAÇÕES NOS SISTEMAS ALGÉBRICOS: ANÁLISE ESTÁTICA

Capítulo 5 – ACOPLAMENTO SOLO-ESTRUTURA

Capítulo 6 – EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS: ELASTODINÂMICA

Capítulo 7 – BARRAS DE PAREDES DELGADAS E SEÇÃO ABERTA- NÚCLEOS

Capítulo 8 – APLICAÇÕES

Capítulo 9 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

No capítulo 1 pretende-se contextualizar o trabalho no estudo das estruturas através do MEC, apresentar seu conteúdo e sua contribuição ao tema e apresentar um resumo histórico do tema.

No capítulo 2 serão introduzidos os conceitos e as expressões que possibilitam apresentar a fundamentação teórica do tema, além de considerações sobre a formulação do MEC para aplicações na análise de estruturas reticuladas.

Os capítulos 3 e 4 estão estruturados de modo a apresentar os efeitos: axial, de flexão uni e bidirecional (segundo a teoria de Euler-Bernoulli e de Timoshenko) e da torção segundo as hipóteses de Saint-Venant.

No capítulo 5 será descrita a interação da estrutura com o solo com a utilização apenas do MEC.

O capítulo 6 está estruturado como os capítulos 3 e 4, porém com abordagem dinâmica.

A torção não-uniforme em regime estático e dinâmico em barras de paredes delgadas e seção aberta é estudada no capítulo 7. Nele são obtidas as equações integrais e as soluções fundamentais do problema da torção não-uniforme adotada a teoria de Vlasov bem como a representação algébrica do problema.

No capítulo 8 serão mostrados os resultados das aplicações da formulação estudada. Os quais são comparados com resultados obtidos na literatura ou através de programas de análise estrutural já consagrados. As considerações finais estão no capítulo 9.

1.4 CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DA TESE AO ESTADO-DA-ARTE

- Estratégia de sequenciamento das equações integrais e dos sistemas algébricos para os pórticos espaciais (para análise estática e dinâmica);
- Formulação via MEC para análise de interação-solo-estrutura (análise estática).
- Estabelecimento das equações integrais, soluções fundamentais para o problema da flexo-torção de Vlasov em regime estático e dinâmico.

*Não se preocupe com suas dificuldades
em Matemática, posso assegurar-lhe
que as minhas são ainda maiores.
Albert Einstein*

Capítulo II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as equações básicas da teoria da elasticidade estática e dinâmica, aplicáveis nas análises de corpos elásticos tridimensionais, sendo explicitadas as relações e constantes de interesse para a obtenção da(s) solução(ões) do problema em estudo, sob a ótica do MEC.

Muitas das expressões necessárias ao desenvolvimento da tese estão escritas utilizando-se a notação indicial. O resultado desta escolha é a forma sucinta e elegante de escrevê-las. Para a escrita com notação indicial, o sistema de coordenadas cartesianas, geralmente representadas pelos eixos x , y e z , passa a ser x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. Nestas condições, as direções cartesianas são definidas pelos índices $i = 1, 2, 3$, ou, de maneira genérica, por x_i . Outras variáveis que aparecem ao longo do texto, referidas às direções cartesianas, têm o mesmo tratamento indicial (deslocamentos, u_i ; forças de superfície, p_i ; forças de volume, b_i ; acelerações, $\ddot{u}_i$; tensões, σ_{ij} ; dentre outras).

A convenção implícita de somatório também é aqui utilizada. O surgimento de um índice repetido em uma expressão representa um somatório. Como nos exemplos adiante:

$$c_j = a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + a_{3j}b_3 = \sum_{i=1}^3 a_{ij}b_i \quad (2.1)$$

$$c = \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^3 a_{ij}b_i = w_j(a_{ij}b_i) \quad (2.2)$$

Nesta forma de representação sucinta, as indicações tradicionais de derivadas parciais com relação ao espaço dão lugar a uma simples vírgula, conforme mostrado nos exemplos a seguir:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} = \xi_{i,l} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} = \sigma_{ij,k} \quad (2.4)$$

O delta de Kronecker (Leopold Kronecker, 1823-1891, matemático alemão), utilizado ao longo do texto, é definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

enquanto o delta de Dirac (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902-1984, físico teórico britânico) tem a seguinte definição:

$$\delta(q, s) = \begin{cases} \infty & \text{se } q = s \\ 0, & \text{se } q \neq s \end{cases} \quad (2.6a)$$

onde: q é o ponto de leitura do efeito (ponto-campo), e s é o ponto de aplicação da fonte (ponto-fonte). No estudo das estruturas reticuladas essas letras são, por vezes, substituídas por: x e $\hat{x}$, respectivamente.

Algumas propriedades do delta de Dirac são:

$$\int_{\Omega} \delta(q, s) d\Omega = 1$$

$$\int_{\Omega} u(q) \delta(q, s) d\Omega = u(s) \quad (2.6b-c)$$

E a função de Heaveside do físico inglês Oliver Heaveside (1850-1925),

$$H(x - \hat{x}) = \begin{cases} 0 \rightarrow x < \hat{x} \\ 1 \rightarrow x > \hat{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

Cuja relação com a função sinal é dada por:

$$H(x - \hat{x}) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(x - \hat{x}) + 1] \quad (2.8a)$$

sendo $\text{sgn}(x - \hat{x})$ a função sinal que é definida como segue:

$$\text{sgn}(x - \hat{x}) = \begin{cases} -1 \rightarrow x < \hat{x} \\ 1 \rightarrow x > \hat{x} \end{cases} \quad (2.8b)$$

2.2 RELAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE

A teoria da elasticidade estabelece o modelo matemático para a solução dos problemas envolvendo corpos de materiais elásticos. Equações diferenciais ou integrais governantes do problema em estudo são estabelecidas usando princípios básicos da Mecânica do Contínuo usualmente formulados na linguagem vetorial ou tensorial. Ela é, didaticamente, dividida em estática e dinâmica.

A teoria da elastoestática linear é desenvolvida a partir da consideração da linearidade física das relações constitutivas do material, e da verificação do equilíbrio na posição indeformada, que implica em pequenas mudanças de posição e de forma do corpo no estado deformado.

Na elastoestática não-linear, a linearidade geométrica e/ou a física não são atendidas. Os problemas decorrentes do comportamento não-linear estão fora do escopo do trabalho. A formulação elastodinâmica permite melhor aproximação para resolver alguns problemas da engenharia e, em alguns destes, trata-se da única formulação capaz de fornecer resultados aproximados, segundo DOMÍNGUEZ (1993). A formulação no domínio do tempo é adequada para problemas transientes, já que uma solução, a mais precisa quanto possível, é necessária para o início da análise.

2.2.1 Relações da Elastoestática Linear

Partindo de um corpo tridimensional elástico linear, homogêneo e isótropo de domínio Ω e contorno Γ , (Fig. 2.1), em equilíbrio, e dele extraíndo um elemento infinitesimal, definido para representar qualquer ponto s desse corpo (Fig. 2.2), se escrevem as equações diferenciais de equilíbrio de força e de momento bem como as equações deformação-deslocamentos. Enquanto as primeiras levam em conta o equilíbrio de forças, incluídas as forças de corpo ou de massa e momentos, que deve ser garantido para quaisquer pontos do domínio; as outras levam em conta a mudança de posição de cada ponto do sólido.

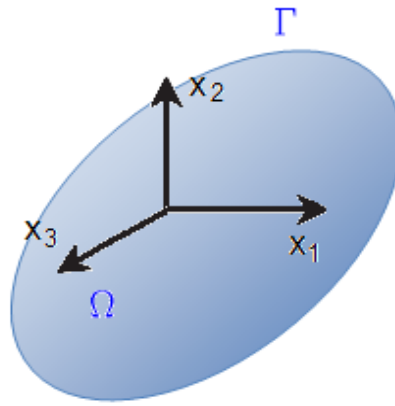


Figura 2.1- Sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ

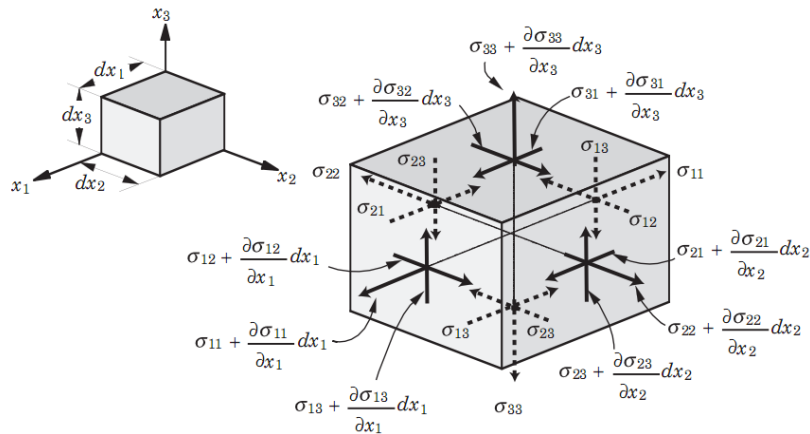


Figura 2.2 - Tensões no elemento de volume
(Extraída de REDDY, 2008)

As equações diferenciais de equilíbrio de força segundo as coordenadas cartesianas, Fig. 2.2, são:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad (2.9a- c)$$

que na notação indicial ganham a forma:

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0 \quad (2.10)$$

onde o índice $i=1, 2, 3$ identifica a face (perpendicular à direção i) e $j=1, 2, 3$ identifica a direção da componente de tensão, b_i representa o vetor das forças de massa existentes no corpo e σ_{ij} é o tensor das tensões (Eq. 2.11), como mostrado na Fig. 2.3:

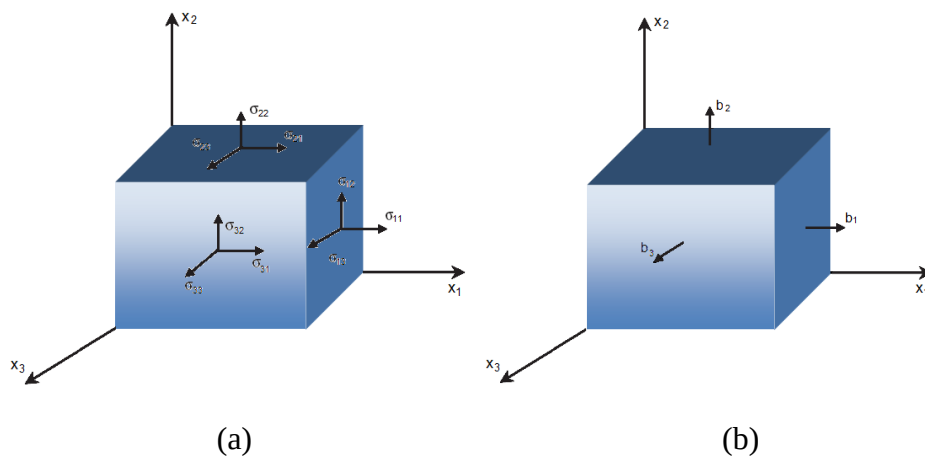


Figura 2.3 - Elemento infinitesimal:

(a) componentes de tensão, (b) componentes de força de massa

(Adaptada de SADD, 2009)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Como decorrência do equilíbrio de momento em relação a cada um dos eixos do sistema de coordenadas imposto ao elemento infinitesimal (Fig. 2.2) obtêm-se as chamadas relações de cisalhamento complementares, conhecidas como relações de Cauchy.

A seguir a aplicação da Segunda Lei de Newton para momentos, em torno do eixo x_3 :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \right] \frac{dx_1}{2} + (\sigma_{12} dx_2 dx_3) \frac{dx_1}{2} \\ & - \left[\left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \right] \frac{dx_2}{2} - (\sigma_{21} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dividindo a Eq. (2.12) por $\frac{1}{2} dx_1 dx_2 dx_3$ e aplicando o limite $dx_1 \rightarrow 0$ e $dx_2 \rightarrow 0$, obtêm-se $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Calculados os momentos em torno dos outros dois eixos, obtêm-se as demais relações, resultando:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \text{e} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (2.13a-c)$$

ou:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.14)$$

Estando, desse modo, realçadas as relações entre os componentes do tensor das tensões, que o torna simétrico.

A condição de equilíbrio nas três dimensões do tetraedro possibilita a obtenção da expressão das forças de superfície, p_i , em função das componentes de tensão, como mostrado nas Eqs. (2.15) e representado na Fig. 2.4.

$$p_1(s) = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3$$

$$p_2(s) = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$$

$$p_3(s) = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \quad (2.15 \text{ a- c})$$

onde $n_i = \cos(n, x_i)$ com $i = 1, 2, 3$ é o vetor normal à superfície considerada ou, de outro modo, representa o cosseno diretor do ângulo entre a normal externa à face inclinada, n , e o eixo cartesiano x_i no ponto s . As equações acima podem ser representadas por:

$$p_i = \sigma_{ij}(s)n_j \quad (2.16)$$

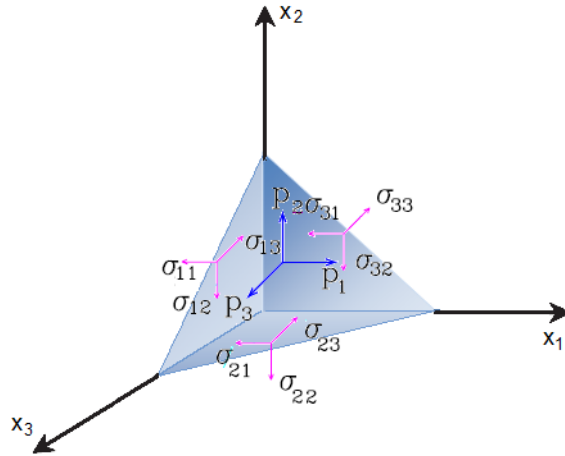


Figura 2.4 - Tetraedro de Cauchy

Nos problemas de engenharia, as forças de superfície $p_i(s)$ são desconhecidas na parte, Γ_1 , do contorno, sendo conhecidas na outra parte, chamada Γ_2 (vide Fig. 2.5). Como as forças de superfície $p_i(s) = \bar{p}_i(s)$ em Γ_2 devem ser equilibradas pelas forças de superfície obtidas pelas tensões internas no contorno, tem-se:

$$p_i(s) = \sigma_{ij}(s)n_j = \bar{p}_i(s) \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.17)$$

$$p_i(s) = \sigma_{ij}(s)n_j \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.18)$$

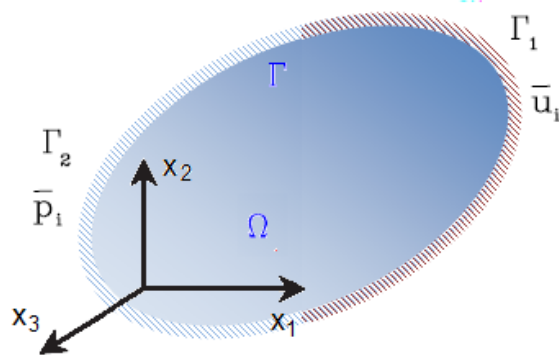


Figura 2.5 - Definição de contorno

onde: $\bar{p}_i(s)$ significa força de superfície prescrita na direção i no ponto s , e são chamadas de condições naturais do problema.

Considerando, agora, o vetor $u(s)$ cujos componentes $u_i(s)$, $i=1, 2, 3$, representam a mudança de posição de cada ponto do sólido é possível escrever as relações deformação-deslocamento, Eqs. (2.19) e (2.20), e definir o tensor das deformações de Green.

$$\varepsilon_{11}(s) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22}(s) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{33}(s) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.19a-c)$$

$$\varepsilon_{12}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{23}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (2.20a-c)$$

As expressões da Eq. (2.19) explicitam as relações diretas entre deslocamentos e deformações, enquanto as da Eq. (2.20) explicitam as distorções. As seis equações, também chamadas de relações cinemáticas, podem ser representadas através da Eq. (2.21), na qual é utilizada a notação indicial:

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

onde: $i=1, 2, 3$ e $j=1, 2, 3$ representam as direções de referência e ε_{ij} são os componentes do tensor das deformações.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Nos problemas de engenharia os deslocamentos $u_i(s)$ são conhecidos na parte Γ_1 , do contorno, sendo desconhecidas na outra parte, chamada Γ_2 , (Fig.2.5). Assim:

$$u_i(s) = \bar{u}_i(s) \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.23)$$

$$u_i(s) = u_i(s) \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.24)$$

onde: $\bar{u}_i(s)$, as condições essenciais, são os deslocamentos prescritos nas direções i no ponto s .

Nos corpos deformáveis, o estado de tensões está relacionado ao estado de deformações através das relações constitutivas do material, ou seja, das relações tensão-deformação. Quando o material constituinte é elástico linear essas relações, também conhecidas como lei de Hooke linear, podem ser expressas através da utilização de duas constantes, λ e μ , chamadas de constantes de Lamé. Estas estão associadas às componentes de deformação volumétrica e às componentes de distorção, e possibilitam expressar as tensões em termos das deformações, através das Eqs. (2.25):

$$\sigma_{ij}(s) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(s)$$

$$\sigma_{ij}(s) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(s) + 2\mu \varepsilon_{ij}(s) \quad (2.25a-b)$$

δ_{ij} é o delta de Kronecker, $C_{ijkl} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})]$. O ε_{kk} apenas com índices internos implica na relação de três componentes de deformação direta, $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, sendo chamado de deformação volumétrica ou primeiro invariante das deformações.

A inversa da Eq. (2.25b) pode ser escrita, resultando na Eq. (2.26) na qual as componentes de deformação são obtidas em função das componentes de tensão. Notar que:

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

$$\varepsilon_{ij}(s) = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}(s) + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}(s) \quad (2.26)$$

As constantes de Lamé podem ser escritas em função do módulo de elasticidade ou módulo de Young E , e do módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento G e do coeficiente de Poisson ν , através das seguintes relações:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.27a-b)$$

As componentes de tensão podem ser expressas em função dos módulos E e G e do coeficiente de Poisson ν , pela substituição da Eq. (2.27) na Eq. (2.25b), resultando:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(s) + 2G \varepsilon_{ij}(s) \quad (2.28)$$

ou, na forma inversa:

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij}(s) - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk}(s) \delta_{ij} \right) \quad (2.29)$$

As componentes de tensão podem ser equacionadas em função dos deslocamentos, substituindo a Eq.(2.21) na Eq. (2.28), assim:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{kk}(s) + G[u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)] \quad (2.30)$$

Como a equação de Navier-Cauchy é a expressão do equilíbrio de forças do corpo infinitesimal em função dos seus deslocamentos, para obtê-la é suficiente substituir a Eq. (2.30) na Eq. (2.10). Logo:

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij}(s) + \frac{1}{G} b_i(s) = 0 \quad (2.31)$$

Por outro lado, pela substituição da Eq. (2.15) na Eq. (2.30), obtém-se o vetor força de superfície em função dos deslocamentos, as chamadas equações de Navier:

$$p_i(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{kk} n_i(s) + G[u_{i,j}(s)n_i + u_{j,n}(s)] \quad (2.32)$$

onde: $u_{j,n}(s)$ é a derivada de $u_j(s)$ em relação à direção da normal externa à superfície definida em s .

Para maiores detalhes, recomenda-se, por exemplo, a leitura de REDDY (2008) e SAAD (2009).

2.3 O MEC EM PROBLEMAS ELÁSTICOS 3D

O Método dos Elementos de Contorno é, dentre os mais utilizados, o método numérico mais recente do ponto de vista de aplicações computacionais para análise de estruturas. Ganhou esta denominação a partir do trabalho de BREBBIA (1978).

O MEC consiste em obter soluções numéricas pela discretização de equações integrais, definidas no contorno, equivalentes às equações diferenciais governantes do problema definidas no domínio. Isso reduz de uma unidade as dimensões de problemas analisados, o que leva a menores quantidades de dados de entrada e, conseqüentemente, menor sistema de equações algébricas. Por outro lado, a matriz do sistema é geralmente cheia e não simétrica.

Em consequência da redução de dimensão conferida pela equação integral de contorno que possibilita a análise do problema, o MEC necessita de uma solução fundamental. Esta representa a resposta em um ponto do domínio infinito devido à aplicação de força unitária em outro ponto do mesmo domínio. As principais características das soluções fundamentais que conferem certas desvantagens ao MEC são: a) suas formas explícitas não estão disponíveis para muitos problemas; b) devido a sua natureza singular o cálculo das integrais para a geração do sistema algébrico pode se tornar uma tarefa custosa computacionalmente e, c) no MEC via resíduos ponderados na

colocação (forma padrão) as soluções fundamentais produzem um sistema algébrico não simétrico.

No entanto, as soluções fundamentais também conferem ao MEC vantagens bem atrativas: a) redução de uma ordem na dimensão do problema; b) convergência acelerada, uma vez que está associada à função de ponderação na técnica dos resíduos ponderados. Quanto melhor a qualidade da função ponderadora, menor o resíduo local. Como a solução fundamental é muito aproximada da solução do problema real, então isso a torna uma das melhores características como função ponderadora nos métodos numéricos.

2.3.1 O MEC em Problemas Elastostáticos

Conforme mencionado anteriormente para que a formulação do MEC fique completamente definida, torna-se necessário o conhecimento prévio da solução de um problema padrão da área que se deseja analisar. A este problema dá-se o nome de problema fundamental (BREBBIA, 1978). Para a definição do problema fundamental, considere-se Ω^* um domínio infinito cujo contorno é denotado por Γ^* . O sólido que se deseja analisar, de domínio Ω e contorno Γ , está contido em Ω^* . O problema particular indicado pelo asterisco é chamado de problema fundamental, definido na Fig. 2.6.

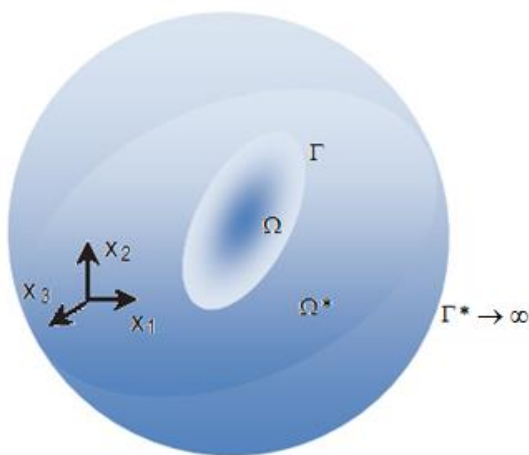


Figura 2.6 - Problemas: real (domínio Ω e contorno Γ ,) e fundamental (domínio Ω^* e contorno Γ^* .)
(Adaptada de BARBIRATO, 1999)

Para a obtenção da solução do problema fundamental aplica-se uma força unitária estática $F_i^*(s) = \delta_F(q, s)$ em um ponto s (ponto-fonte) do domínio na direção cartesiana i e avaliam-se os seus efeitos nas direções cartesianas em outro ponto, q (ponto-campo), conforme mostrado para a coordenada $i = 1$, na Fig. 2.7. As respostas para deslocamentos e forças de superfície, u_{ij}^* e p_{ij}^* são as soluções do problema fundamental do problema particular analisado. É importante notar que o primeiro índice representa a direção cartesiana de aplicação da força e o segundo a direção do efeito medido.

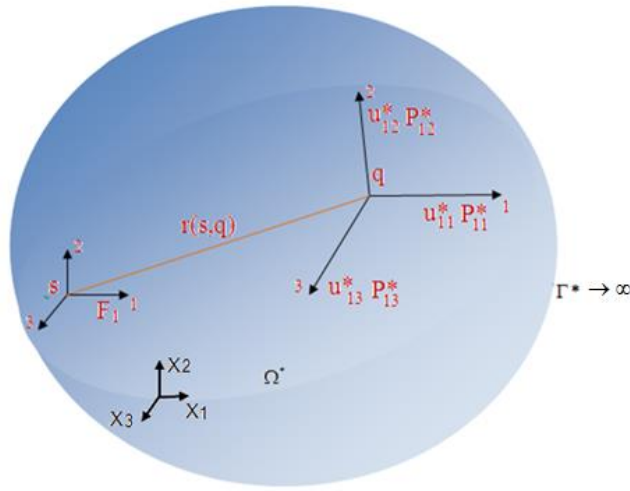


Figura 2.7 - Efeitos da força concentrada aplicada em Ω^* , $i = 1$: solução fundamental.

(Adaptada de BARBIRATO, 1999)

As equações do problema fundamental de deslocamentos e forças de superfície são obtidas substituindo-se o termo das forças volumétricas na equação de equilíbrio para o problema estático, Eq. (2.10), e na equação de deslocamentos, Eq. (2.31), pela distribuição delta de Dirac, que passa a ser a ponderadora da força aplicada no ponto fonte s . Isto resulta, respectivamente, em:

$$b_i^*(q) = \delta(q, s) \delta_{ki}$$

$$u_{ki,jj}^* + \frac{1}{1+2\nu} u_{kj,ji}^* + \frac{1}{G} \delta(q, s) \delta_{ki} = 0$$

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(q,s)\delta_{ki} = 0 \quad (2.43a-c)$$

Enquanto a Eq. (2.43a) representa a fonte concentrada aplicada, as outras, a Eqs. (2.43b) e (2.43c) equivalentes entre si, são: as equações de equilíbrio em deslocamentos e em tensões respectivamente.

Por definição, a solução fundamental é originária de um problema conhecido e particular. Portanto, dependendo das características do problema fundamental, tais como o espaço a que seu domínio Ω^* e seu contorno Γ^* pertencem (infinito ou semi-infinito, por exemplo) e, resolvendo-se a Eq. (2.43b) e Eq.(2.43c), têm-se diferentes soluções fundamentais.

A solução fundamental do semi-espaço (MINDLIN, 1936) caracteriza-se por ser seu domínio Ω^* um semi-espaço infinito, sólido elástico, isotrópico e homogêneo. A Figura 2.8 apresenta o problema definindo o ponto campo q , o ponto fonte s e sua imagem s' distante c do plano X_1X_2 . Define, ainda, as variáveis esféricas r e R e suas componentes cartesianas. O plano $X_3 = 0$ (ou Γ) representa parte da superfície de contorno onde se admite a ausência de forças de superfície.

Alguns parâmetros utilizados nas soluções de Mindlin são:

$$C_1 = 1 - \nu,$$

$$C_2 = 1 - 2\nu,$$

$$C_3 = 3 - 4\nu,$$

$$C_4 = 3 - 2\nu,$$

$$C_5 = 5 - 4\nu,$$

$$r_i = X_i(q) - X_i(s),$$

$$R_i = X_i(s) - X_i(s'),$$

$$r = \sqrt{r_i r_i} ,$$

$$R = \sqrt{R_i R_i} ,$$

$$c = X_3(s) \geq 0 ,$$

$$z = X_3(q) \geq 0 ,$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} ,$$

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} . \quad (2.44a-n)$$

A seguir, as soluções fundamentais para deslocamentos:

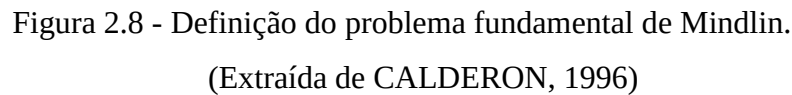
$$u_{11}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{1}{r} + \frac{C_3 r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4C_1 C_2}{R + R_3} \left(1 - \frac{r_1^2}{R(R + R_3)} \right) \right\}$$

$$u_{12}^* = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{C_3}{R^3} - \frac{1}{r} + \frac{6cz}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R + R_3)^2} \right\}$$

$$u_{13}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} - \frac{1}{r} + \frac{6cz R_3}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R + R_3)} \right\}$$

$$u_{21}^* = u_{12}^*$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^*$$



$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^*$$

As expressões para as forças de superfície fundamentais são obtidas em função do tensor de terceira ordem das tensões, do problema fundamental e das componentes do vetor normal à superfície no ponto $q(n_k)$, ou seja:

O problema determinado por Mindlin veio preencher uma lacuna entre dois problemas já devidamente conhecidos e equacionados: o problema fundamental de Kelvin

e o problema fundamental de Boussinesq-Cerruti (NAKAGUMA, 1979). Este último é devido ao mapeamento dos efeitos na superfície livre do semi-espço ($\bar{\Gamma}$ na Fig. 2.9).

O problema de Mindlin pode ser definido a partir do problema de Kelvin somando-se a este uma parcela complementar (BREBBIA *et al.*, 1984). Sendo importante citar que na medida em que o parâmetro c das expressões da Eq. (2.44) cresce, os valores encontrados nas soluções fundamentais de Mindlin coincidem com os obtidos através de Kelvin. Por outro lado, com o parâmetro c igual a zero, as expressões de Mindlin coincidem com as de Boussinesq-Cerruti (NAKAGUMA, 1979 e BARBIRATO, 1991).

As soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti são expressões muito simples, o que torna seu emprego mais direto do que as de Mindlin, para forças agindo na superfície livre de forças de superfície:

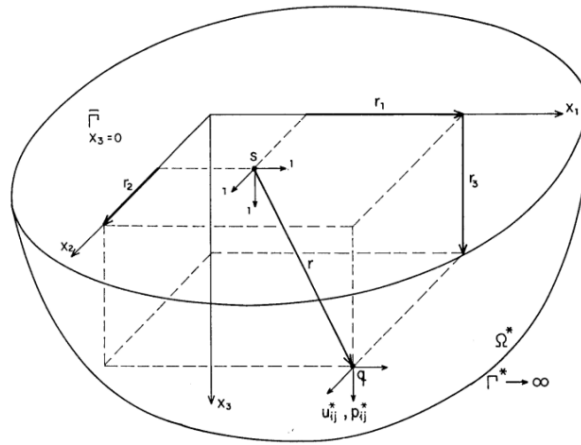


Figura 2.9 - O problema de Boussinesq-Cerruti
(Extraída de BARBIRATO, 1991)

$$u_{11}^* = \frac{1}{2\pi Gr} (C_1 + \nu r_{,1}^2)$$

$$u_{12}^* = \frac{1}{2\pi Gr} (C_1 + \nu r_{,1} r_{,2})$$

$$u_{13}^* = -\frac{1}{2\pi Gr} r_{,1} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^*$$

$$u_{22}^* = \frac{1}{2\pi Gr} (C_1 + \nu r_{,2}^2)$$

$$u_{23}^* = -\frac{1}{2\pi Gr} r_{,2} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

$$u_{31}^* = u_{13}^*$$

$$u_{32}^* = -u_{23}^*$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{2\pi Gr} C_1$$

$$p_{ij}^* = 0 \tag{2.46a-j}$$

onde: $C_1 = 1 - \nu$, e $p_{ij}^* = 0$ devido à condição de superfície livre de forças de superfície.

Para efeito das representações integrais para pontos do sólido há que se destacar os pontos internos do domínio e os da sua superfície, ou seja, os pontos do contorno. Assim o estudo dessas representações é feito em duas partes: a) para pontos internos do domínio, ou simplesmente pontos do domínio e, b) para pontos da superfície do domínio ou pontos do contorno.

a) Representações integrais para pontos do domínio

SOMIGLIANA (1886) obteve uma equação integral para pontos do domínio utilizando o teorema de Betti da Reciprocidade Estática. Alternativamente, ela pode ser obtida, também, através da técnica dos Resíduos Ponderados. A representação integral para o problema elástico, conhecida como identidade de Somigliana pode ser escrita como:

$$u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, s) u_j(Q) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, s) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(q, s) b_i(q) d\Omega \tag{2.47}$$

A Eq. (2.47) fornece o deslocamento no ponto s do domínio na direção cartesiana i , a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície do contorno (ponto Q) e, na presença de forças de volume, as componentes b_j , no ponto q do domínio.

b) Representações integrais para pontos do Contorno

A identidade Somigliana é válida apenas para pontos contidos no interior do sólido em estudo. Para o MEC é essencial que se tenha a expressão correspondente para pontos que pertençam ao contorno Γ . O artifício utilizado correntemente é o de transformar o ponto de contorno em um ponto de domínio, onde é possível a aplicação da identidade Somigliana, acrescentando-se parte de uma esfera (Ω_ε) de raio ε centrada no ponto do contorno (ver Fig. 2.10). Assim, um ponto s do contorno passa a ser um ponto s do domínio.

Com a modificação sugerida, um novo domínio fica estabelecido: $\Omega + \Omega_\varepsilon$. O contorno do sólido também sofre alterações, passando a ser $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$, onde $\bar{\Gamma}$ corresponde à interseção do contorno original Γ com a parte da esfera acrescentada cujo contorno é Γ_ε . Portanto, a identidade Somigliana, Eq. (2.47), passa a ser escrita com novo contorno e novo domínio:

$$u_i(s) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, s) u_j(Q) d\Gamma = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, s) p_j(Q) d\Gamma + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(q, s) b_i(q) d\Omega \quad (2.48)$$

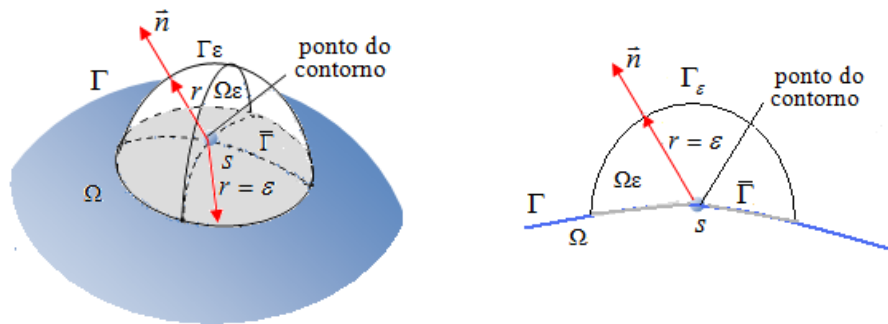


Figura 2.10 – Técnica para que o ponto do contorno seja considerado do domínio

Agora, encontrada a identidade da Eq. (2.48), deve-se efetuar o procedimento inverso, ou seja, o de levar as novas parcelas (correspondentes ao acréscimo de domínio) ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, Ω_ε , $\bar{\Gamma}$, Γ_ε tendem a zero e o ponto volta a ser de contorno, pois $s \rightarrow S$. Em Rocha (1988), por exemplo, são mostrados todos os detalhes destes limites. Ao final, a equação integral de contorno, fica:

$$c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(q,s)u_j(q)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(q,s)p_j(q)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(q)b_i(q)d\Omega \quad (2.49)$$

onde: $c_{ij}(s) = (1/2)[I]$ para pontos de um contorno sem angulosidades ou seja contorno suave, $[I]$ é a matriz identidade, que no problema tri-dimensional é de ordem 3x3 para cada ponto de colocação s . Para pontos do domínio Ω , $c_{ij}(s) = (1)[I]$; enquanto que para pontos externos ao domínio, tem-se $c_{ij}(s) = (0)[I]$.

A Eq. (2.49) pode ser escrita na forma matricial como indicado a seguir:

$$[c](S)\{u\}(S) + \int_{\Gamma} [p^*](Q,S)\{u\}(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} [u^*](Q,S)\{p\}(Q)d\Gamma + \int_{\Omega} [u^*](q,s)\{b\}(q)d\Omega \quad (2.50)$$

onde: $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos; $\{p\}$, o vetor das forças de superfície; $\{b\}$, das forças de corpo; $[u^*]$ é a matriz dos deslocamentos fundamentais; $[p^*]$, das forças de superfície fundamentais.

A representação integral Eq. (2.49) é determinada considerando-se que o sólido tri-dimensional é definido mantendo-se a orientação do vetor normal ao seu contorno sempre para fora.

Nos sólidos vazados, isto é, com vazios no seu interior, o vetor normal ao contorno interno deverá ser orientado para esses vazios.

2.3.2 O Método dos Elementos de Contorno

Após a discussão sobre as equações integrais relativas ao problema em estudo, o MEC tem como objetivo a transformação dessas EI em equações algébricas.

Assim, as principais etapas para a construção de soluções numéricas baseadas na filosofia do Método dos Elementos de Contorno são mostradas a seguir.

Etapa (1): A discretização e aproximação da geometria e das variáveis $\{u\}$ e $\{p\}$

Na discretização do contorno de um corpo qualquer pelo MEC é utilizado um número finito de sub-regiões chamadas de elementos de contorno.

A geometria desses elementos é definida pelas coordenadas cartesianas dos seus pontos nodais, as quais constituem o vetor $\{X^{no}\}$. Por outro lado, as coordenadas $\{X\}$ de um ponto q qualquer, pertencente ao domínio do elemento de contorno podem ser definidas a partir de interpolações das coordenadas dos seus nós, ou seja, do vetor $\{X^{no}\}$, onde o índice no identifica o número do nó do elemento. Consequentemente as coordenadas do ponto q estão definidas pelo vetor das coordenadas nodais e pelas funções interpoladoras contidas em $[\Phi]$, como indicado na Eq. (2.51):

$$\{X\} = [\Phi]^T \{X^{no}\} \quad (2.51)$$

Os deslocamentos $\{u\}$ e as forças de superfícies $\{p\}$, variáveis físicas do problema, para cada ponto q são aproximados, também, através de funções interpoladoras, a partir dos seus respectivos valores nodais $\{u^{no}\}$ e $\{p^{no}\}$, como indicado nas Eqs. (2.52a-b). Devido à possibilidade de escolha da função interpoladora, a utilização de uma ou de outra, classifica os elementos de contorno, que podem ser: constantes, lineares, quadráticos, e de ordem superior.

$$\{u\} = [\Phi]^T \{u^{no}\}$$

$$\{p\} = [\Phi]^T \{p^{no}\} \quad (2.52a-b)$$

Etapa (2): Representação algébrica de um nó

Portanto, aproximando o contorno do sólido por um número n de elementos, com p pontos nodais (nós funcionais), e o seu domínio em n células, a representação integral para deslocamentos, Eq. (2.26), passa a ser:

$$\begin{aligned} [c](S)\{u\}(S) + \sum_{el=1}^n \int_{\Gamma_{el}} [p^*](Q, S) [\Phi]^T(Q) d\Gamma(Q) \{u^{no}\} = \\ = \sum_{el=1}^n \int_{\Gamma_{el}} [u^*](Q, S) [\Phi]^T(Q) d\Gamma(Q) \{p^{no}\} + \sum_{ce=1}^c \int_{\Omega_{ce}} [u^*](q, S) [\Phi]^T(q) d\Omega(q) \{b^{no}\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Etapa (3): Sistematização algébrica para todos os nós do contorno

Resolvidas as integrais da Eq. (2.53) e escrevendo-as para pontos de colocação s no contorno, tem-se:

$$[C]\{U_{est}\} + [\hat{H}_{est}]\{U_{est}\} = [G_{est}]\{P_{est}\} + [D_{est}]\{B_{est}\} \quad (2.54)$$

onde as matrizes $[\hat{H}_{est}]$, $[G_{est}]$ e $[D_{est}]$ vêm, respectivamente, dos somatórios das integrais sobre cada elemento e , definidos na Eq. (2.53).

O sistema indicado na Eq. 2.54 pode ser reagrupado como:

$$[H_{est}]\{U_{est}\} = [G_{est}]\{P_{est}\} + [D_{est}]\{B_{est}\} \quad (2.55)$$

onde: $[H_{est}] = [C] + [\hat{H}_{est}]$.

Etapa (4): Aplicação das condições de contorno e solução do sistema final

Antes da solução do problema, condições de contorno devem ser impostas na Eq. (2.55), resultando em:

$$[A]\{V_D\} = \{V_I\} \quad (2.56)$$

onde: $[A]$ é a matriz quadrada de ordem igual a 3 vezes ao número de nós da malha, cheia e não simétrica, que contém elementos das matrizes $[H_{est}]$ e $[G_{est}]$ devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas as incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; $\{V_D\}$ é o vetor das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies; e $\{V_I\}$, o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes $[H_{est}]$ e $[G_{est}]$ relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume.

A solução do sistema indicado na Eq. (2.56) é simples, podendo ser representada por:

$$\{V_D\} = [A]^{-1} \{V_I\} \quad (2.57)$$

Os elementos de contorno utilizados para aproximar o contorno do corpo têm a dimensão deste diminuída em uma unidade. Desse modo, existem elementos de contorno bidimensional (2D), unidimensional (1D) e pontual (0D).

Os dois primeiros tipos de elementos de contorno podem ser classificados conforme as funções interpoladoras utilizadas para a aproximação dos valores dos deslocamentos e das forças de superfície de pontos do seu interior.

Os elementos de superfície podem ser classificados conforme sua geometria em triangulares, quadrangulares, etc., planos ou curvos. Os elementos de linha também podem ser retos ou curvos.

Assim, o contorno de um volume é representado por elementos de superfície; o contorno de uma chapa ou placa delgada é representado por um conjunto de segmentos, enquanto o contorno (as extremidades) de uma barra, por um par de pontos, um em cada extremidade.

Quanto às funções interpoladoras, os elementos de superfície e os de linha podem ser constantes, lineares (contínuo, de transição ou descontínuo), quadráticos ou de ordem superior. Se as funções interpoladoras de deslocamentos, de forças e da geometria forem iguais, o elemento é dito isoparamétrico.

Tendo em vista que nas análises a serem desenvolvidas neste trabalho serão utilizados apenas o elemento triangular plano isoparamétrico linear contínuo (ETPILC) e os elementos de contorno associados às estruturas reticuladas, ou seja, os pontos que definem as extremidades inicial e final de cada barra, a discussão sobre os demais tipos de elementos não será aqui levada a efeito. Para uma leitura mais detalhada recomenda-se BECKER (1992) e KATSIKADELIS (2002).

O elemento triangular plano (ETP) para a discretização da superfície de contorno de corpos tridimensionais é bastante conhecido, uma vez que foi desenvolvido para uso no MEF (COOK *et al.*, 1989). Portanto, as coordenadas oblíquas (homogêneas ou naturais) e as funções interpoladoras utilizadas no MEC são praticamente as mesmas utilizadas nas formulações do MEF.

A geometria do ETPILC é determinada a partir das coordenadas cartesianas dos três nós posicionados nos vértices (nós geométricos), para o sistema de coordenadas globais (X_i) ou para um sistema de coordenadas cartesianas locais (x_i). Cada tipo de ETP tem suas peculiaridades. Porém, apenas as características e as propriedades do elemento triangular plano isoparamétrico linear contínuo (ETPILC) serão estudadas com maior profundidade.

Esse elemento tem seus nós funcionais coincidentes com os nós geométricos e com os pontos de colocação, como mostrado na Fig. 2.11.

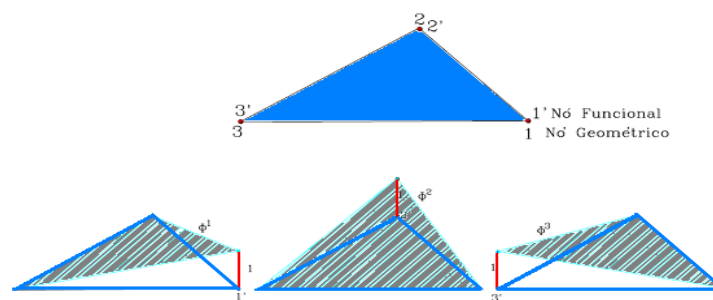


Figura 2.11 - Elemento triangular isoparamétrico linear e as funções de interpolação.

(Adaptada de CALDERON, 1996)

As aproximações das variáveis do problema são expressas matricialmente na Eq. (2.58) e na Eq. (2.59) onde: u_i e p_i representam as componentes de deslocamentos e

forças de superfície, respectivamente, na direção cartesiana i para um ponto qualquer de um elemento de contorno e u_i^{no} e p_i^{no} (i variando de 1 a 3 e no variando de 1 a 3) as componentes nodais na direção i de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente. As funções ξ_i , $i=1, 2, 3$, que aparecem nessas matrizes são as coordenadas naturais ou homogêneas, definidas como indicado na Fig.2.13.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Como a utilização que se dará neste trabalho ao elemento triangular linear contínuo (na superfície do semi-espço) é na modelagem de contornos suaves, sem angulosidades, então a matriz $[c]$ quadrada de ordem 3 da Eq. (2.53) é igual a:

$$[c] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

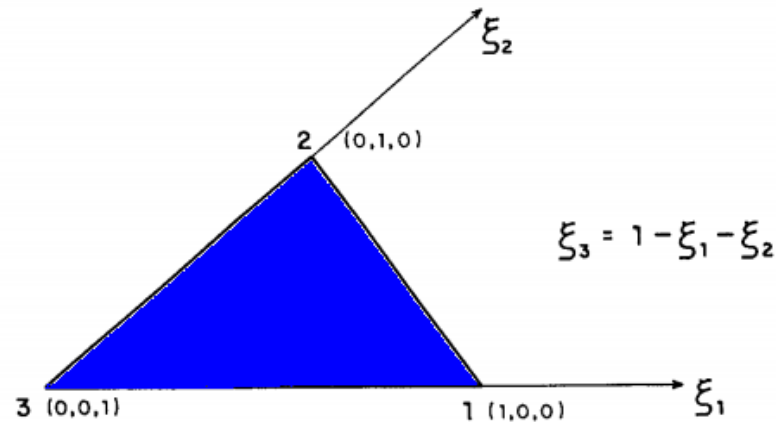


Figura 2.12 - Coordenadas homogêneas, definição e variação.

Quando o domínio do corpo é formado por um conjunto de segmentos unidimensionais tem-se uma estrutura reticulada. Cada uma das barras de um corpo reticulado terá elementos de contorno pontuais em suas extremidades, como motrado na Fig. 2.13.

O elemento ponto (EP), para a discretização do contorno dos elementos dos corpos reticulados, surge como decorrência da observação de que a dimensão dos elementos de contorno é uma unidade menor que a dimensão do corpo em estudo tendo, portanto, neste caso, dimesão zero.

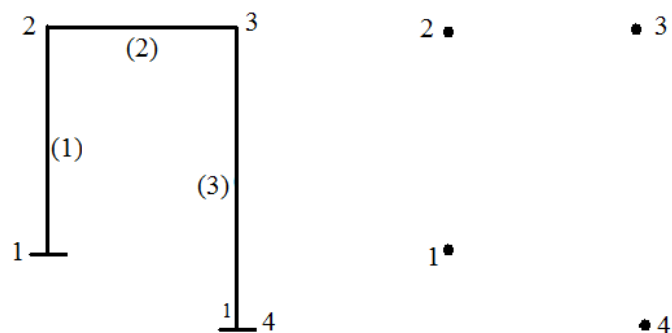


Figura 2.13 – Estruturas de barra e elemento de contorno 0D

Uma peculiaridade da utilização desse tipo de elemento é que devido à ausência de pontos internos (pontos do domínio do elemento) não são utilizadas funções interpoladoras nem coordenadas homogêneas. Estas, para facilitar as integrações numéricas e aquelas para a obtenção das coordenadas, dos deslocamentos e das forças de superfícies em quaisquer dos pontos do interior do elemento de contorno. Desse modo as soluções obtidas para os nós da malha, isto é, para os nós geométricos do corpo reticulado analisado, coincidem com os valores exatos.

O elemento de contorno (EP), Fig. 2.14, de aplicação pouco comum nos livros sobre o MEC, que em geral tratam apenas de elementos de contorno em 1D e em 2D, tem sido utilizado, raramente, em trabalhos como o de ANTAS (2003), ANTAS *et al.* (2004), SOUZA e MENDONÇA (2008), etc.

A transição de equações integrais discretizadas para equações algébricas faz-se pelo cálculo das integrais envolvidas, por exemplo, via integração numérica das parcelas a seguir:

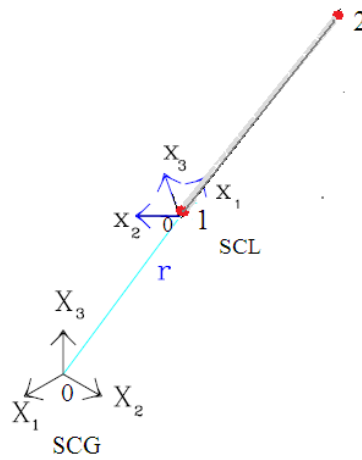


Figura 2.14 - Elementos de contorno pontuais, Sistema de Coordenadas Globais e Sistema de Coordenadas Locais

$$[h] = \int_{\Gamma} [p^*](q, s) \{\Phi\}^T(q) d\Gamma(q)$$

$$[g] = \int_{\Gamma} [u^*](q, s) \{\Phi\}^T(q) d\Gamma(q) \quad (2.60a-b)$$

As soluções analíticas das integrais da Eq. (2.60) são de difícil obtenção, dada a complexidade das funções a serem integradas, o que justifica o emprego de esquemas numéricos de integração para que seja estabelecido um procedimento padrão e eficiente de obtenção dessas matrizes $[h]$ e $[g]$. Essas integrais são calculadas para duas situações distintas: a) quando o ponto de colocação s situa-se no elemento a ser integrado (integração singular ou semi-analítica) e, b) quando este ponto s está posicionado fora do elemento a ser integrado quando, em geral, é feita integração numérica.

Neste trabalho, tendo em vista a generalização do procedimento de cálculo, todas as integrais serão obtidas a partir da integração singular ou semi-analítica, razão pela qual não serão apresentados os procedimentos da chamada integração de Hammer.

Convém notar que no caso de estruturas reticuladas, os elementos das matrizes $[h]$ e $[g]$ já são os próprios valores das soluções fundamentais nodais não havendo, portanto, necessidade de se realizar integrações.

*Se você pode medir o que você está falando,
e expressar em números,
você sabe algo sobre isso.
Lorde Kelvin*

Capítulo III

O MEC EM ESTRUTURAS APORTICADAS: ANÁLISE ESTÁTICA

3.1 INTRODUÇÃO

Na análise dos pórticos e demais estruturas reticuladas, o problema da flexão é levado em conta, em geral, a partir de um dos dois modelos usuais. O modelo de Euler-Bernoulli (quando a deformação por cortante pode ser desprezada) em cuja análise é largamente empregado o método dos deslocamentos da hiperestática clássica, e o modelo de Timoshenko sistematizado pelo MEF, que pode ser encontrado em KAPUR, 1966; NICKEL e SECOR, 1972. O modelo proposto por Timoshenko é, para situações específicas, bem mais próximo da realidade que aquele advindo da teoria de Euler-Bernoulli (TIMOSHENKO e YOUNG, 1961; AUGARDE e DEEKS, 2008). Tal refinamento se deve à contribuição do efeito do cisalhamento no ângulo de giro resultante da seção transversal, verificado em vigas sob a ação de carregamentos quaisquer, perceptível nos casos com moderados índices de esbeltez ($\lambda = L/h$), relação entre o comprimento L da barra e a altura h , da sua seção transversal.

Alternativamente ao MEF, apenas recentemente foram apresentadas soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC para o estudo da deformação por cortante em flexão de barras. ANTES (2003) desenvolveu, via MEC, a solução para o problema de flexão estática utilizando o modelo de Timoshenko. Já em ANTES *et al.* (2004), esse modelo foi incorporado nas representações integrais de pórtico plano (PP) em regime dinâmico e estratégias convenientes de montagem foram utilizadas para obtenção de um sistema algébrico simétrico para o MEC. Observa-se, assim, que as análises numéricas dos

PP e dos pórticos espaciais (PE) têm sido feitas utilizando-se predominantemente o MEF (TARANAH, 1968; PETYT, 1990), sendo sensivelmente menos frequente as soluções obtidas com o MEC (SAPOUNTZAKIS e MOKOS, 2003).

Quando o empenamento da seção transversal de um membro não está restringido, o momento torçor é calculado a partir das tensões tangenciais de SAINT-VENANT (1855). Neste caso, o ângulo de torção por unidade de comprimento (empenamento) permanece constante, o que é compatível com a chamada torção uniforme. Contudo, nos casos mais gerais, o empenamento exibe distribuição não-uniforme ao longo do eixo longitudinal da barra, invalidando a teoria da torção de Saint-Venant, sendo a representação mais usual para este fenômeno o modelo de VLASOV (1961). O problema da torção não-uniforme em barras de núcleos (barras de paredes finas e seção aberta) será estudado no capítulo 7.

Nesta tese, as técnicas de geração da representação algébrica dessas estruturas (pórticos) consistem na observação da equação governante do problema e da utilização de uma seqüência conveniente de transformações em sistemas de referências e em condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de forças. Tais transformações são realizadas levando-se em conta todas as solicitações e as respostas às quais a barra é submetida, uma de cada vez.

3.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS

Os componentes dos sistemas estruturais da engenharia são, didaticamente, divididos em três grupos de acordo com a geometria: elementos de volume, de superfície e os lineares também chamados de barras. Sapatas, blocos de fundação e blocos de coroamento de estacas de fundação são elementos de volume; lajes, chapas e cascas, elementos de superfície; cada lance de pilar e vão de viga, exemplifica os elementos lineares ou barras.

Grande é a quantidade de arranjos possíveis na concepção das chamadas estruturas reticuladas. Sendo estas agrupadas, principalmente, segundo seu desempenho e quantidade de graus de liberdade em cada nó.

Assim, têm-se as treliças e os pórticos planos ou espaciais, as grelhas e os pórticos enrijecidos por paredes estruturais ou núcleos.

Neste capítulo, serão estudadas as barras de pórticos planos e de pórticos espaciais.

Para análise das barras de PP é necessário estudar cada uma sob os efeitos a) do esforço axial e b) da flexão (segundo o eixo perpendicular ao da estrutura); para os PE o esforço axial, a flexão (bidirecional) e c) da torção uniforme.

O modelo matemático para esses problemas requer a adoção de hipóteses que estão adiante relacionadas. Com respeito à torção há que se distinguir a de Saint-Venant (para as barras de pórtico) e a não-uniforme (para as barras do núcleo). Já com relação à flexão, que é levada em conta segundo as direções principais de inércia da seção transversal, há que ser considerado o posicionamento relativo entre a normal da seção e a linha neutra: se a ortogonalidade é assumida, o modelo de Euler-Bernoulli é representado; caso contrário, o modelo de Timoshenko deve ser adotado.

O efeito de cada solicitação presente nas barras de pórtico será estudado separadamente, como indicado na Fig. 3.1 para, ao final, serem agrupados na equação matricial que representa a estrutura.

As hipóteses adotadas podem ser apresentadas em dois grupos, a saber: a) hipóteses gerais e b) hipóteses específicas. As gerais são aquelas hipóteses que devem ser respeitadas para caracterizar o regime estático ou dinâmico, as características elásticas lineares do material e o comportamento linear da estrutura, além de possibilitar a redução do problema originariamente tridimensional (3D) para um problema unidimensional (1D). As hipóteses específicas são aquelas que devem ser observadas quando do estudo de determinado problema através da aplicação de uma teoria específica; por exemplo: no problema da flexão, a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli ou a de Timoshenko; no problema da torção, a aplicação da teoria de Saint-Venant ou a de Vlasov.

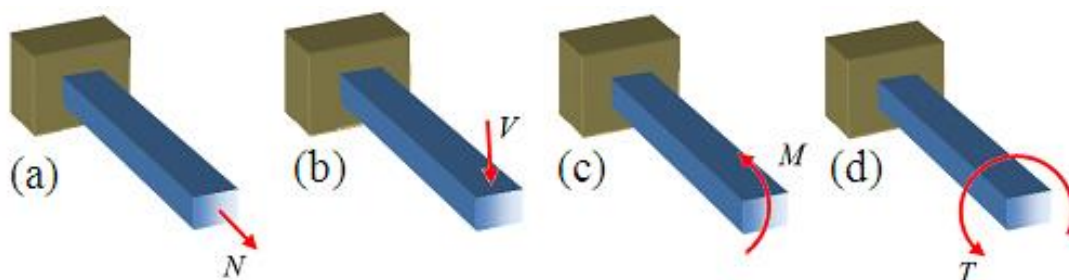


Figura. 3.1 - Solicitações consideradas no estudo das estruturas reticuladas em geral: (a) axial; (b) flexão; (c) flexão pura e (d) torção uniforme

3.2.1 Hipóteses Gerais

a) O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que a maior dimensão do elemento, o comprimento L , seja suficientemente maior que as outras duas, as dimensões b e h da seção transversal, conforme Fig. 3.2.

b) A barra deve ter seção transversal uniforme, ou seja, deve ser prismática;

c) Quando no regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;

d) O material deve ser homogêneo e isotrópico; enquanto a homogeneidade implica que as propriedades e os fenômenos do todo são representados em qualquer região do corpo, a isotropia implica em mesmas propriedades em todas as direções;

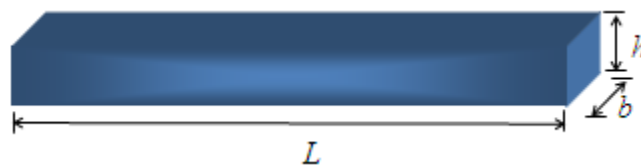


Figura 3.2 – Barra (elemento estrutural unidimensional)

e) O material deve ser elasto-linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual. Já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;

f) A planicidade das seções transversais deve ser mantida durante o processo de deformação;

g) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;

h) Os campos de deslocamentos e deformações devem ser pequenos (suaves).

3.2.2 O Efeito Axial

Considerada a barra prismática sob a ação do carregamento axial distribuído $p(x)$, escreve-se a equação diferencial governante do problema. Para tanto, um elemento da barra de comprimento dx é dela isolado para análise, como mostrado na Fig. 3.3.

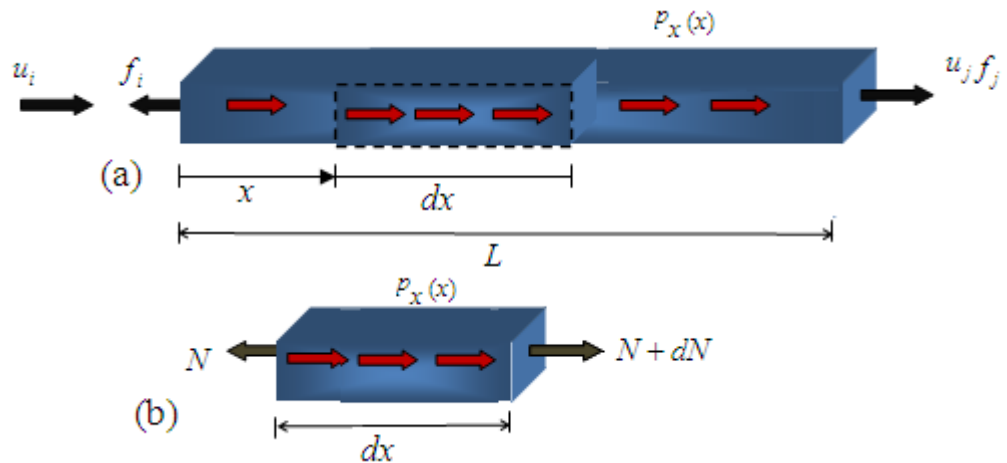


Figura 3.3 – Barra sob efeito axial

- **O problema real**

Do balanço de forças no elemento da barra, obtém-se:

$$\frac{dN}{dx} + p_x(x) = 0 \quad (3.1)$$

onde, N representa o esforço normal e $p_x(x)$, o carregamento aplicado.

Da relação força-deformação, tem-se:

$$N(x) = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (3.2)$$

sendo: u , A e E , respectivamente, o deslocamento segundo o eixo x da barra, a área da seção transversal e o módulo de elasticidade longitudinal do material constituinte.

Igualando a derivada da Eq. (3.2) à Eq. (3.1), obtém-se a equação diferencial governante do problema em estudo.

$$EA \frac{d^2u(x)}{dx^2} + p_x(x) = 0 \quad (3.3)$$

- **O problema fundamental**

Por analogia ao problema real, Eq. (3.3), o equilíbrio do problema fundamental pode ser assim expresso:

$$EA \frac{d^2 u^*}{dx^2}(x, \hat{x}) = -p_x^*(x, \hat{x}) \quad (3.4)$$

onde: $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ com a função delta de Dirac $\delta(x, \hat{x})$ definida na Eq. (2.6a).

Ainda por analogia ao problema real, obtém-se a relação força-deslocamento do fundamental, a partir da Eq. (3.2):

$$N^*(x, \hat{x}) = EA \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.5)$$

Da equação governante do problema fundamental, Eq. (3.3), uma das soluções possíveis é:

$$u^*(x, \hat{x}) = \alpha r + \beta \quad (3.6)$$

onde: $r = |x - \hat{x}|$.

Se a Eq. (3.4) for integrada no domínio e for utilizada a propriedade do delta de Dirac indicada na Eq. (2.6b), fica:

$$\left[EA \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L = -1 \quad (3.7)$$

As derivadas da Eq. (3.6) são:

$$\frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x - \hat{x} \geq 0 \\ -\alpha, & \text{se } x - \hat{x} < 0 \end{cases}$$

que substituídas na Eq. (3.7), resulta em: $EAu^*(L - \hat{x}) - EAu^*(0 - \hat{x}) = -1$, de onde $\alpha = -1/(2EA)$. Assim, o valor da solução da Eq. (3.6), fica:

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EA}r + \beta \quad (3.8)$$

Como o valor de β pode ser tomado arbitrariamente, atribuindo-lhe valor nulo, tem-se:

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EA}|x - \hat{x}| \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. (3.9) na segunda parcela da Eq. (3.5), obtém-se a expressão para a força normal do problema fundamental.

$$N^*(x, \hat{x}) = EA \frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.10)$$

Observa-se que as grandezas fundamentais das Eqs. (3.9) e (3.10) são iguais às apresentadas por ANTAS (2003).

- **A representação integral**

Seja o Problema de Valor de Contorno (PVC) definido pelos valores de contorno, Eqs. (3.11a-d) para a barra mostrada na Fig. 3.3 e pela equação governante Eq. (3.3).

$$u(x=0) = u_i$$

$$u(x=L) = u_j$$

$$N(x=0) = N_i$$

$$N(x=L) = N_j \quad (3.11a-d)$$

Se for aplicada a técnica dos resíduos ponderados na Eq. (3.3), tem-se:

$$\int_0^L [EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p_x(x)] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.12)$$

onde: $u^*(x, \hat{x})$ representa a função ponderadora de deslocamentos (ou função peso), que é obtida da solução do problema fundamental. x , $\hat{x}$ e $p_x(x)$ são, respectivamente, a coordenada do ponto-campo, do ponto-fonte e as forças de corpo.

Integrando por partes a Eq. (3.12), tem-se:

$$\left[EA \frac{du}{dx}(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[\frac{du}{dx} EA \frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) - p_x(x) \right] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.13)$$

Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.13), obtém-se:

$$\left[N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[\frac{du(x)}{dx} EA \frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) - p_x(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.14)$$

Fazendo nova integração por partes, agora da Eq. (3.14), e substituindo a Eq. (3.5) obtém-se:

$$\left[N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[u(x) N^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \left[u(x) EA \frac{d^2 u^*}{dx^2}(x, \hat{x}) + p_x(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.15)$$

Substituindo Eq. (3.5), na Eq. (3.4), tem-se:

$$\frac{dN^*}{dx}(x, \hat{x}) + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.16)$$

Aplicando a propriedade de filtro do delta de Dirac indicada na Eq. (2.6c) na Eq. (3.15), após a introdução da Eq. (3.16), obtém-se:

$$u(\hat{x}) - [N(x)u^*(x, \hat{x})]_0^L + [u(x)N^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (3.17)$$

ou,

$$u(\hat{x}) - u(0)N^*(0, \hat{x}) + u(L)N^*(L, \hat{x}) + N(0)u^*(0, \hat{x}) - N(L)u^*(L, \hat{x}) - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (3.18)$$

A Eq. (3.18) é a equação integral para pontos colocados no domínio. Para a sua completa definição, há que se calcular o termo das forças de corpo, ou seja, a integral de domínio que finaliza o primeiro membro dessa equação. Além disso, a Eq. (3.18) requer os valores das soluções fundamentais.

• A representação algébrica

Fazendo a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra: no contorno à esquerda quando $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$ e no contorno à direita $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$, respectivamente, na Eq. (3.18), tem-se:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$:

$$u(0) - u(0)N^*(0, 0 + \xi) + u(L)N^*(L, 0 + \xi) + N(0)u^*(0, 0 + \xi) - N(L)u^*(L, 0 + \xi) = \int_0^L [p_x(x)u^*(x, 0)]dx \quad (3.19)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$:

$$u(L) - u(0)N^*(0, L - \xi) + u(L)N^*(L, L - \xi) + N(0)u^*(0, L - \xi) - N(L)u^*(L, L - \xi) = \int_0^L [p_x(x)u^*(x, L)]dx \quad (3.20)$$

Reescrevendo a Eq. (3.19) e a Eq. (3.20) com notação matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -N^*(0,0+\xi) & N^*(L,0+\xi) \\ -N^*(0,L-\xi) & N^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} =$$

(3.21)

$$\begin{bmatrix} -u^*(0,0+\xi) & u^*(L,0+\xi) \\ -u^*(0,L-\xi) & u^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x(0) \\ f_x(L) \end{Bmatrix}$$

onde as forças do vetor independente são:

$$f_{xi} = f_x(0) = \int_0^L p_x(x) u^*(x,0) dx$$

$$f_{xj} = f_x(L) = \int_0^L p_x(x) u^*(x,L) dx \quad (3.22a-b)$$

Através da Eq. (3.9) e da Eq. (3.10), calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidas à aplicação da fonte em cada uma dessas extremidades:

a) para a fonte na extremidade i

$$u^*(0,0+\xi) = 0$$

$$u^*(L,0+\xi) = -\beta_x$$

$$N^*(0,0+\xi) = 1/2$$

$$N^*(L,0+\xi) = -1/2$$

b) para a fonte na extremidade j

$$u^*(0,L-\xi) = -\beta_x$$

$$u^*(L,L-\xi) = 0$$

$$N^*(0,L-\xi) = 1/2$$

$$N^*(L,L-\xi) = -1/2 \quad (3.23a-h)$$

com:

$$\alpha_x(L,0+\xi) = -\frac{1}{2}$$

$$\beta_x = \frac{L}{2EA} \quad (3.24a-b)$$

As forças do vetor independente são obtidas substituindo a Eq. (3.16) nas Eqs. (3.22a-b):

$$f_{xi} = f_x(0) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x) x dx$$

$$f_{xj} = f_x(L) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x) (-x + L) dx \quad (3.25a-b)$$

Substituindo as igualdades indicadas na Eqs. (3.23a-h) e Eqs. (3.25a-b), na Eq. (3.21), e obtém-se a representação algébrica do esforço axial:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_x \\ \alpha_x & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ \beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

3.2.3 O Efeito de Flexão em Y

Neste subitem serão estudadas no sistema de coordenadas locais (SCL) indicado a flexão segundo o eixo y da viga de Euler-Bernoulli e da viga de Timoshenko.

a) Teoria de Euler-Bernoulli

A discussão será iniciada com flexão sob as hipóteses de Euler-Bernoulli

- **O problema real (Modelo de Euler-Bernoulli)**

Seja a barra prismática sob a ação do carregamento distribuído $p_z(x)$; V_z , o esforço cortante; M_z , o momento fletor conforme Fig. 3.4. Um elemento da barra de comprimento dx é isolado para análise, como mostrado na Fig. 3.4b.

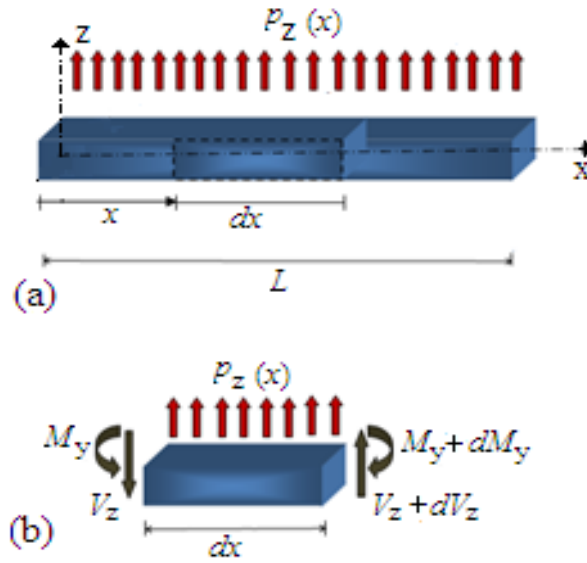


Figura 3.4 - Barra submetida à flexão, com carregamento no plano xz

Do balanço de forças no elemento da barra, onde: V_z representa o esforço cortante que solicita a seção, obtém-se:

$$\frac{dV_z}{dx} = -p_z(x) \quad (3.27)$$

Do balanço de momentos em relação à seção direita do elemento, tem-se:

$$V_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (3.28)$$

onde: M_y representa o momento fletor.

Substituindo a Eq. (3.27) na Eq. (3.28), obtém-se a equação diferencial governante do problema da flexão em esforços.

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + p_z(x) = 0 \quad (3.29)$$

De acordo com a teoria de Euler-Bernoulli a ortogonalidade entre a seção transversal e o eixo longitudinal da barra é mantida, isto é: são desprezadas as deformações por cortante, cujo significado físico é distorção nula, $\gamma_{xz} = 0$, de acordo com a Fig. 3.5.

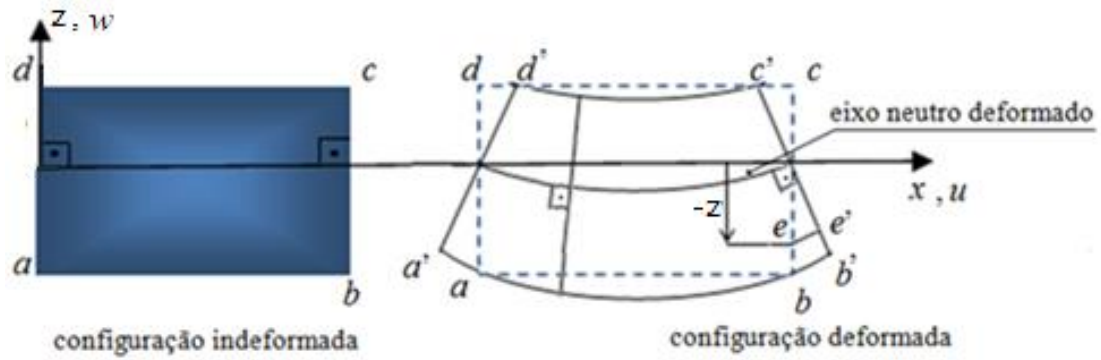


Figura 3.5 - Elementos para o estudo da flexão no plano xz

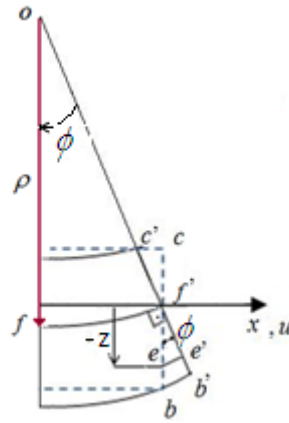


Figura 3.6 – Geometria da flexão

Da geometria indicada na Fig. 3.6, conclui-se que: $ee' = zd\phi$ e $ff' = -\rho d\phi$. Sendo, portanto, $ee' / ff' = -z/\rho$. Assim, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{ee'}{ff'} = -\frac{z}{\rho} \quad (3.30)$$

onde ε_x é a deformação linear em eixo x , z é a distância da camada da barra analisada ao eixo centroidal x , ρ é o raio de curvatura do eixo deformado da barra e, ϕ é o ângulo de rotação da seção transversal em torno do eixo y .

Como o coeficiente de Poisson é considerado nulo, da deformação axial indicada na Eq. (2.20), a tensão normal σ_x resulta:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3.31)$$

Da equação de equilíbrio de momentos da seção (Fig. 3.7), $M_y = \int_A \sigma_x z dA$, na qual são substituídas, na ordem, a Eq. (3.31) e a Eq. (3.30), obtem-se:

$$M_y = -\frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA \quad (3.32)$$

Se $I_y = \int_A z^2 dA$ for o momento de inércia principal em torno do eixo y e, a curvatura do eixo deformado da barra for dada por $\frac{1}{\rho} = \frac{w''(x)}{[1 + w'^2(x)]^{2/3}}$ (que sob as hipóteses de pequenos deslocamentos e pequenas deformações fica $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$ e $w(x)$ for o deslocamento na direção do eixo z), então a Eq. (3.31), passa a ser escrita como:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} = \frac{d\phi}{dx} \quad (3.33)$$

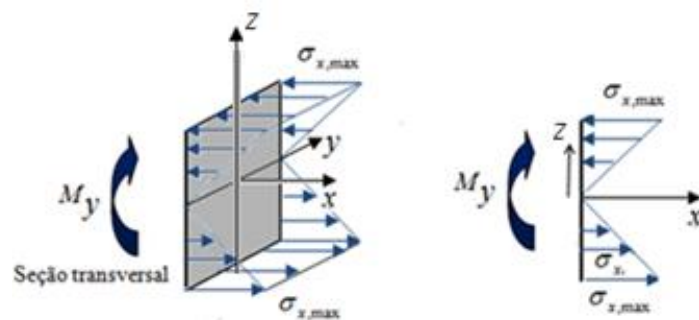


Figura 3.7 - Tensão na flexão
(Extraída de SCHRERYER, RAMM E WAGNER, 1966)

De acordo com a Eq. (3.28) a derivada da Eq. (3.33) é:

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{V_z}{EI_y} \quad (3.34)$$

Substituindo a Eq. (3.33) na Eq. (3.29), obtém-se a Eq. (3.35) - Equação de Navier, que é a EDO governante do problema de flexão sob a hipótese de Euler-Bernoulli.

$$EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p_z(x) \quad (3.35)$$

- **O problema fundamental (Modelo de Euler-Bernoulli)**

O problema fundamental é análogo ao problema real, contudo representado por uma barra de comprimento infinito (Fig. 3.8), sob a ação da força concentrada $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$. Assim, equação governante fundamental por analogia à Eq. (3.36) fica:

$$EI_y \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} - p_z^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.36)$$

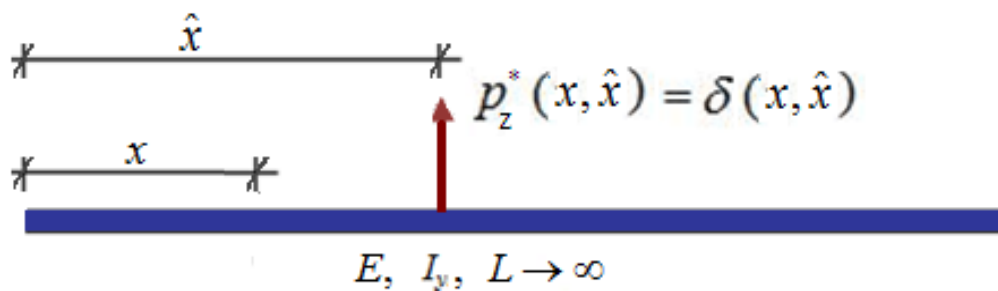


Figura 3.8 - Problema fundamental (barra)

Além disso, os esforços $V_z^*(x, \hat{x})$, $M_y^*(x, \hat{x})$ e as demais relações envolvendo as grandezas de interesse também podem ser escritas por analogia às correspondentes do problema real:

$$\phi^*(x, \hat{x}) = -\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}$$

$$V_z^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3}$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.37a-c)$$

Com o objetivo, de se obter a solução da equação fundamental, utiliza-se a propriedade do delta de Dirac (Eq. (2.6b)) na integral da Eq. (3.36). Assim:

$$\int_0^L \left[EI_y \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} - p_z^*(x, \hat{x}) \right] dx = \left[EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} \right]_0^L - 1 = 0 \quad (3.38)$$

Adotando como solução da Eq. (3.38) o polinômio:

$$w^*(x, \hat{x}) = A|x - \hat{x}|^3 + B|x - \hat{x}|^2 + C|x - \hat{x}| + D \quad (3.39)$$

obtem-se na terceira derivação $\frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} = \pm 6A$, para $x > \hat{x}$ e $x < \hat{x}$, respectivamente.

Substituindo o resultado da terceira derivação do polinômio na Eq. (3.38), resulta:

$$[6A]_{x=L} - [-6A]_{x=0} = 1/EI_y \text{ ou:}$$

$$A = 1/(12EI_y) \quad (3.40)$$

De acordo com ANTAS (2003) é possível inferir que os valores para as constantes B , C e D podem ser adotados arbitrariamente, podendo ser todas nulas na Eq. (3.39). Consequentemente as relações de interesse associadas ao problema fundamental são:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{12EI_y} |x - \hat{x}|^3$$

$$\phi^*(x, \hat{x}) = -\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{4EI_y} |x - \hat{x}|^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})$$

$$V_z^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{1}{2} |x - \hat{x}| \quad (3.41a-d)$$

As constantes do polinômio (3.39) podem ser calculadas, também, de uma viga bi-apoiada com o ponto-fonte simetricamente posicionado, como indicado na Fig. 3.19.

Como os momentos nos apoios dessa estrutura são nulos, então $M_y^*(x = \pm L, \hat{x} = 0) = 0$. Porém, como da segunda derivação do polinômio solução, Eq. (3.39), da equação governante da flexão, com $A = 1/(12EI_y)$, obtém-se:

$$\frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{1}{2EI_y} |x - \hat{x}| + 2B \quad \text{e, ainda, de acordo com a Eq. (3.41d),}$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad \text{então:} \quad -EI_y w^{*''}(x = L, \hat{x} = 0) = -EI_y \left(\frac{1}{2EI_y} |L| + 2B \right) = 0,$$

logo:

$$B = -\left| \frac{L}{4EI_y} \right| \quad (3.42)$$

Como a rotação na seção de aplicação da fonte ($\hat{x} = 0$), Fig. 3.9a, é nula, então:

$$\phi^*(x = 0, \hat{x} = 0) = -\frac{1}{4EI_y} |x - \hat{x} = 0|^2 + 2B|x - \hat{x} = 0| + C = 0 \quad (3.43)$$

logo:

$$C = 0 \quad (3.44)$$

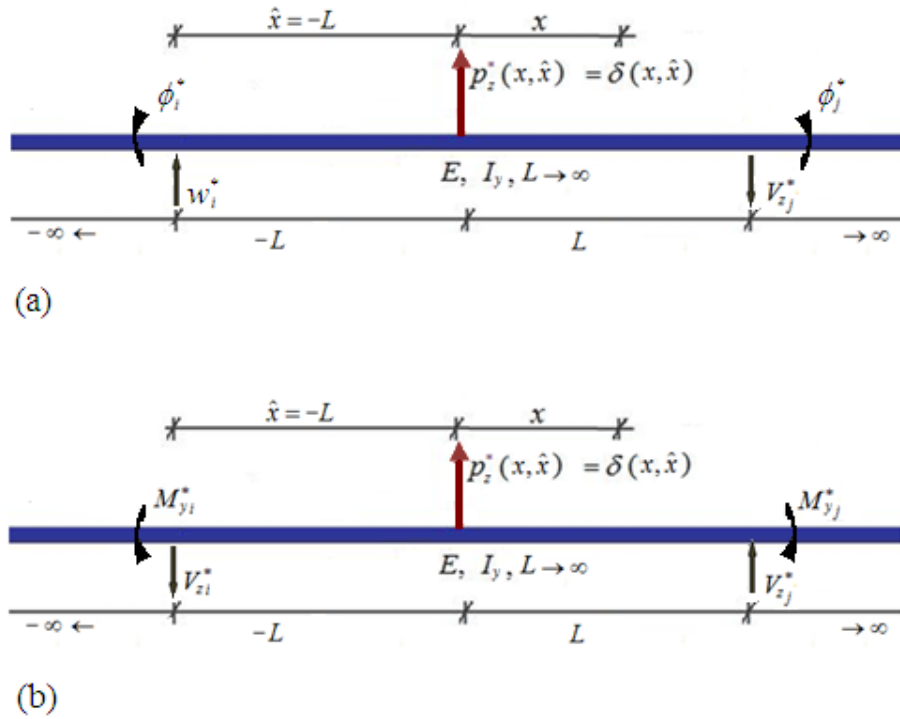


Figura 3.9 – Viga do problema fundamental

A constante D é determinada a partir da condição de deslocamento $w^*(x, \hat{x}) = 0$ nulo na extremidade à direita da viga mostrada na Fig. 3.9a. Então, sendo:

$$w^*(x = L, \hat{x} = 0) = \frac{1}{12EI_y} |L|^3 - \frac{L}{4EI_y} |L|^2 + 0|L| + D = 0 \quad (3.45)$$

obtém-se:

$$D = \frac{L^3}{6EI_y} \quad (3.46)$$

Com os valores das constantes: A , B , C e D , da solução fundamental do problema de flexão, Eq. (3.30) indicados, respectivamente, na Eq. (3.40), Eq.(3.42), Eq. (3.44) e Eq.(3.46), ela pode ser assim explicitada:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{L^3}{12EI_y} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 + 2 \right] \quad (3.47)$$

Logo as demais grandezas fundamentais são:

$$\begin{aligned}\phi^*(x, \hat{x}) &= -\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{L^2}{4EI_y} \left[\left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x-\hat{x}) \\ V_z^*(x, \hat{x}) &= -EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x-\hat{x}) \\ M_y^*(x, \hat{x}) &= -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{L}{2} \left[\left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| - 1 \right]\end{aligned}\quad (3.48a-c)$$

As grandezas fundamentais oriundas da derivação em $\hat{x}$ da Eq. (3.47) e das Eqs. (3.48a-c) ficam:

$$\begin{aligned}w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{dw^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = -\frac{L^2}{4EI_y} \left[\left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x-\hat{x}) \\ \phi_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{d\phi^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{L}{2EI_y} \left[\left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| - 1 \right] \\ V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{dV_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{1}{2} \delta(x, \hat{x}) \\ M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{dM_y^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{1}{2} \text{sgn}(x-\hat{x})\end{aligned}\quad (3.49a-d)$$

- **A representação integral (Modelo de Euler-Bernoulli)**

Considera-se o PVC definido pelas Eqs. (3.35) e (3.50a-d) onde nas Figs. 3.10a-b são mostradas uma barra prismática de comprimento L , momento de inércia I_y e módulo de elasticidade longitudinal E ; em suas extremidades atuam os esforços, V_z e M_y , e ocorrem os deslocamentos w e ϕ .

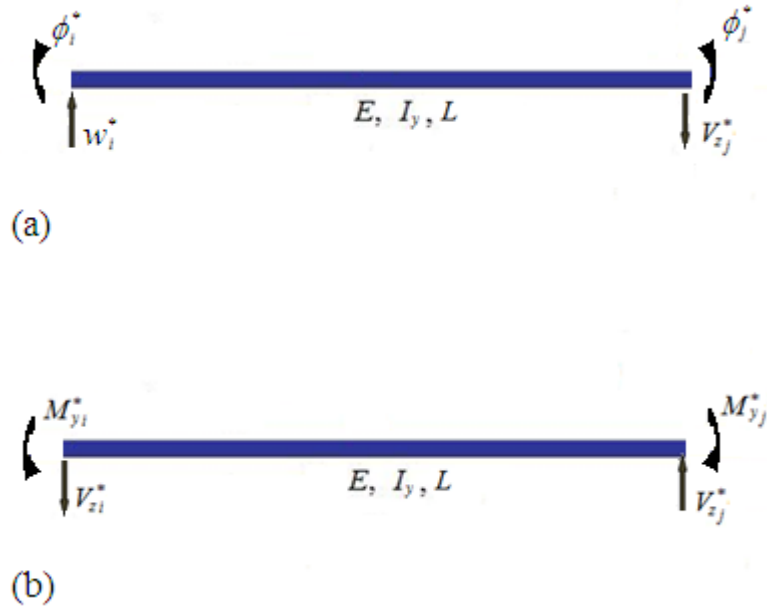


Figura 3.10 - Representação gráfica do PVC do problema real

As condições de contorno são:

a) para a extremidade i

$$w(x=0) = w_i$$

$$\phi(x=0) = \phi_i$$

$$V_z(x=0) = V_{zi}$$

$$M_y(x=0) = M_{yi}$$

b) para a extremidade j

$$w(x=L) = w_j$$

$$\phi(x=L) = \phi_j$$

$$V_z(x=L) = V_{zj}$$

$$M_y(x=L) = M_{yj} \quad (3.50a-h)$$

Aplicando a TRP na equação governante Eq. (3.35) onde $w^*(x, \hat{x})$ é a função ponderadora, tem-se:

$$\int_0^L \left[EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - p_z(x) \right] w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.51)$$

Da integração por partes da Eq. (3.51), resulta:

$$\left[EI_y \frac{d^3 w(x)}{dx^3} w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L EI_y \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \frac{dw^*}{dx}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0$$

que, com a substituição da Eq. (3.34), obtém-se:

$$- \left[V_z(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L EI_y \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \frac{dw^*}{dx}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.52)$$

Integrando por partes a segunda parcela da Eq. (3.52), tem-se:

$$\begin{aligned} & - \left[V_z(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{dw^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\ & + \int_0^L EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w^*}{dx^2}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

com a substituição da Eq. (3.33) e da Eq. (3.37a) na Eq. (3.53), obtém-se:

$$\begin{aligned} & - \left[V_z(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_y(x) \phi^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\ & + \int_0^L EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w^*}{dx^2}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Integrando por partes a terceira parcela da Eq. (3.54), e substituindo no resultado a Eq. (3.37c), tem-se:

$$\begin{aligned} & - \left[V_z(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_y(x) \phi^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\ & + \left[M_y^*(x, \hat{x}) \phi(x) \right]_0^L - \int_0^L EI_y \frac{dw(x)}{dx} \frac{d^3 w^*}{dx^3}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalmente, integrando por partes a quarta parcela da Eq.(3.55) e com o auxílio da Eq. (3.37b), resulta:

$$\begin{aligned}
& -[V_z(x)w^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_y(x)\phi^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y^*(x, \hat{x})\phi(x)]_0^L + \\
& + [V_z^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L + \int_0^L EI_y w(x) \frac{d^4 w^*}{dx^4}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Introduzindo na Eq. (3.56), a relação do problema fundamental Eq. (3.36) fica:

$$\begin{aligned}
& -[V_z(x)w^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_y(x)\phi^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y^*(x, \hat{x})\phi(x)]_0^L + \\
& + [V_z^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L + \int_0^L w(x)\delta(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

que após a aplicação da propriedade de filtro do delta de Dirac, Eq. (2.6c), fica:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) - [V_z(x)w^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_y(x)\phi^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& + [M_y^*(x, \hat{x})\phi(x)]_0^L + [V_z^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde os campos com (*) são as soluções fundamentais nas Eqs. (3.47) e (3.48a-c).

Para o completo equacionamento do problema faz-se necessário a obtenção de mais uma equação integral, pois são duas as condições de contorno desconhecidas. A EI procurada é a da rotação das seções transversais no ponto-fonte, $\phi(\hat{x}) = -dw(\hat{x})/d\hat{x}$. Então essa equação pode ser obtida da derivação da Eq. (3.58) no ponto-fonte, resultando em:

$$\begin{aligned}
& -\phi(\hat{x}) - [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] - [M_y(x)\phi_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] + \\
& + [M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x})\phi(x)] + [V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x})w(x)] - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde: $w_{,\hat{x}}^*, \phi_{,\hat{x}}^*, \dots$ são as soluções fundamentais derivadas no ponto-fonte e dadas nas Eqs(3.49a-d).

• A representação algébrica

Fazendo a colocação independente do ponto fonte em $\hat{x} \rightarrow 0$ e $\hat{x} \rightarrow L$ nas Eqs. (3.58) e (3.59), obtêm-se as Eqs. (3.60), (3.61), (3.62) e (3.63).

$$\begin{aligned}
& w(0) - [V_z(x)w^*(x,0)]_0^L + [V_z^*(x,0)w(x)]_0^L - [M_y(x)\phi^*(x,0)]_0^L + \\
& + [M_y^*(x,0)\phi(x)]_0^L - \int_0^L p_z(x)w^*(x,0)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
& w(L) - [V_z(x)w^*(x,L)]_0^L + [V_z^*(x,L)w(x)]_0^L - [M_y(x)\phi^*(x,L)]_0^L + \\
& + [M_y^*(x,L)\phi(x)]_0^L - \int_0^L p_z(x)w^*(x,L)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
& -\phi(0) - [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,0)]_0^L + [V_{z,\hat{x}}^*(x,0)w(x)]_0^L - [M_y(x)\phi_{,\hat{x}}^*(x,0)]_0^L + \\
& + [M_{y,\hat{x}}^*(x,0)\phi(x)]_0^L - \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,0)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
& -\phi(L) - [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,L)]_0^L + [V_{z,\hat{x}}^*(x,L)w(x)]_0^L - [M_y(x)\phi_{,\hat{x}}^*(x,L)]_0^L + \\
& + [M_{y,\hat{x}}^*(x,L)\phi(x)]_0^L - \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,L)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Expandindo-se as Eqs.(3.60 a 3.63), obtém-se, na ordem:

$$\begin{aligned}
& w(0) - V_z^*(0,0)w(0) + V_z^*(L,0)w(L) - M_y^*(0,0)\phi(0) + M_y^*(L,0)\phi(L) \\
& + V_z(0)w^*(0,0) - V_z(L)w^*(L,0) + M_y(0)\phi^*(0,0) - M_y(L)\phi^*(L,0) \\
& - \int_0^L p_z(x)w^*(x,0)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
& w(L) - V_z^*(0,L)w(0) + V_z^*(L,L)w(L) - M_y^*(0,L)\phi(0) + M_y^*(L,L)\phi(L) \\
& + V_z(0)w^*(0,L) - V_z(L)w^*(L,L) + M_y(0)\phi^*(0,L) - M_y(L)\phi^*(L,L) \\
& - \int_0^L p_z(x)w^*(x,L)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
& -\phi(0) - V_{z,\hat{x}}^*(0,0)w(0) + V_{z,\hat{x}}^*(L,0)w(L) - M_{y,\hat{x}}^*(0,0)\phi(0) + M_{y,\hat{x}}^*(L,0)\phi(L) \\
& + V_z(0)w_{,\hat{x}}^*(0,0) - V_z(L)w_{,\hat{x}}^*(L,0) + M_y(0)\phi_{,\hat{x}}^*(0,0) - M_y(L)\phi_{,\hat{x}}^*(L,0) \\
& - \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,0)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
& -\phi(L) - V_{z,\hat{x}}^*(0,L)w(0) + V_{z,\hat{x}}^*(L,L)w(L) - M_{y,\hat{x}}^*(0,L)\phi(0) + M_{y,\hat{x}}^*(L,L)\phi(L) \\
& + V_z(0)w_{,\hat{x}}^*(0,L) - V_z(L)w_{,\hat{x}}^*(L,L) + M_y(0)\phi_{,\hat{x}}^*(0,L) - M_y(L)\phi_{,\hat{x}}^*(L,L) \\
& - \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,L)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Reescrevendo as Eqs. (3.64), (3.65), (3.66) e a Eq. (3.67) com notação matricial, após a substituição das igualdades apresentadas nas Eqs. (3.50a-d), obtém-se a Eq. (6.68) que é a expressão geral da representação algébrica procurada.

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} w(0) \\ -\phi(0) \\ w(L) \\ -\phi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_z^*(0,0+\xi) & -M_y^*(0,0+\xi) & V_z^*(L,0+\xi) & M_y^*(L,0+\xi) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -M_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & V_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & M_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -V_z^*(0,L-\xi) & -M_y^*(0,L-\xi) & V_z^*(L,L-\xi) & M_y^*(L,L-\xi) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -M_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & V_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & M_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} -w^*(0,0+\xi) & -\phi^*(0,0+\xi) & w^*(L,0+\xi) & \phi^*(L,0+\xi) \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\phi_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & w_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \phi_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -w^*(0,L-\xi) & -\phi^*(0,L-\xi) & w^*(L,L-\xi) & \phi^*(L,L-\xi) \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\phi_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & w_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \phi_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z(0) \\ M_y(0) \\ V_z(L) \\ M_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_z(0) \\ f_{z,\hat{x}}(0) \\ f_z(L) \\ f_{z,\hat{x}}(L) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Os elementos das matrizes da Eq. (3.68) são obtidos a partir das expressões indicadas na Eq. (3.47), nas Eqs. (3.48a-c) e nas Eqs. (3.49a-d), ou seja, das soluções fundamentais do problema, que são calculadas para as extremidades da barra ($x=0$ e $x=L$) com a colocação da fonte nas extremidades com $\hat{x} \rightarrow 0$ e $\hat{x} \rightarrow L$.

$$w^*(0,0+\xi) = \beta_{y1}$$

$$w^*(L,0+\xi) = 0$$

$$w^*(0,L-\xi) = 0$$

$$w^*(L,L-\xi) = \beta_{y1}$$

$$\phi^*(0,0+\xi) = 0$$

$$\phi^*(L,0+\xi) = \beta_{y2}$$

$$\phi^*(0,L-\xi) = -\beta_{y2}$$

$$\phi^*(L,L-\xi) = 0$$

$$w_{,x}^*(0,0+\xi) = 0$$

$$w_{,x}^*(L,0+\xi) = \beta_{y2}$$

$$w_{,x}^*(0, L - \xi) = -\beta_{y2}$$

$$w_{,x}^*(L, L - \xi) = 0$$

$$\phi_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = -\beta_{y3}$$

$$\phi_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$\phi_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = 0$$

$$\phi_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = -\beta_{y3} \quad (3.69a-q)$$

e,

$$V_z^*(0, 0 + \xi) = \frac{1}{2}$$

$$V_z^*(L, 0 + \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$V_z^*(0, L - \xi) = \frac{1}{2}$$

$$V_z^*(L, L - \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$M_y^*(0, 0 + \xi) = \alpha_{y1}$$

$$M_y^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$M_y^*(0, L - \xi) = 0$$

$$M_y^*(L, L - \xi) = \alpha_{y1}$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = 0$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = 0$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = \frac{1}{2}$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = \frac{1}{2} \quad (3.70a-q)$$

onde:

$$\alpha_{y1} = \frac{L}{2}$$

$$\beta_{y1} = \frac{L^3}{6EI_y}$$

$$\beta_{y2} = \frac{L^2}{4EI_y}$$

$$\beta_{y3} = \frac{L}{2EI_y} \quad (3.71a-d)$$

Se além da carga externa $p_z(x)$ for aplicado um momento distribuído $m_y(x)$, às Eqs (3.57) e (3.58) devem ser acrescentadas mais uma parcela, de forma que o vetor de carga em (3.68) fica escrito como:

$$f_{z1}(0) = \int_0^L p_z(x) w^*(x,0) dx, \quad f_{z2}(0) = \int_0^L m_y(x) \phi^*(x,0) dx$$

$$f_{z1}(L) = \int_0^L p_z(x) w^*(x,L) dx, \quad f_{z2}(L) = \int_0^L m_y(x) \phi^*(x,L) dx$$

$$f_{z1,x}(0) = -f_{\phi1}(0) = \int_0^L p_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x,0) dx, \quad f_{z2,x}(0) = -f_{\phi2}(0) = \int_0^L m_y(x) \phi_{,\hat{x}}^*(x,0) dx$$

$$f_{z1,\hat{x}}(L) = -f_{\phi1} = \int_0^L p_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x,L) dx, \quad f_{z2,\hat{x}}(L) = -f_{\phi2} = \int_0^L m_y(x) \phi_{,\hat{x}}^*(x,L) dx$$

Ou ainda explicitamente escritas como:

$$f_{z1}(0) = \frac{L^3}{12EI_y} \int_0^L p_z(x) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \right] dx$$

$$f_{z2}(0) = - \int_0^L m_y(x) \frac{L^2}{4EI_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{z1}(L) = \frac{L^3}{12EI_y} \int_0^L p_z(x) \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 + 2 \right] dx$$

$$f_{z2}(L) = \int_0^L m_y(x) \frac{L^2}{4EI_y} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{z1,\hat{x}}(0) = -f_{\phi1}(0) = -\frac{L^2}{4EI_y} \int_0^L p_z(x) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{z2,\hat{x}}(0) = -f_{\phi2}(0) = \int_0^L m_y(x) \frac{L}{2EI_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right] dx$$

$$f_{z1,\hat{x}}(L) = -f_{\phi1}(L) = \frac{L^2}{4EI_y} \int_0^L p_z(x) \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{z2,\hat{x}}(L) = -f_{\phi2}(L) = \int_0^L m_y(x) \frac{L}{2EI_y} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right) - 1 \right] dx \quad (3.72a-d)$$

Substituindo os valores das Eqs. (3.70a-q), (3.71a-d) e Eqs. (3.72a-d), na Eq. (3.68), obtém-se a representação algébrica do efeito de flexão em y da viga de Euler-Bernoulli:

$$\begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha_{y1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \alpha_{y1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{y1} & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & -\beta_{y3} & -\beta_{y2} & 0 \\ 0 & \beta_{y2} & \beta_{y1} & 0 \\ -\beta_{y2} & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z(0) \\ M_y(0) \\ V_z(L) \\ M_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{z1}(0) \\ f_{\phi1}(0) \\ f_{z1}(L) \\ f_{\phi1}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{z2}(0) \\ f_{\phi2}(0) \\ f_{z2}(L) \\ f_{\phi2}(L) \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

a) Teoria de Timoshenko

A formulação para a avaliação da flexão em y da viga de Timoshenko será escrita com base na apresentada por ANTES, 2003 para a flexão em z.

- **O problema real (Modelo de Timoshenko)**

Considera-se a barra prismática de seção transversal de área A , material com módulo de Young E , sob a ação do carregamento distribuído $p_z(x)$ e $m_y(x)$, e o elemento de comprimento dx dela isolado para análise, mostrados na Fig. 3.11a-b.

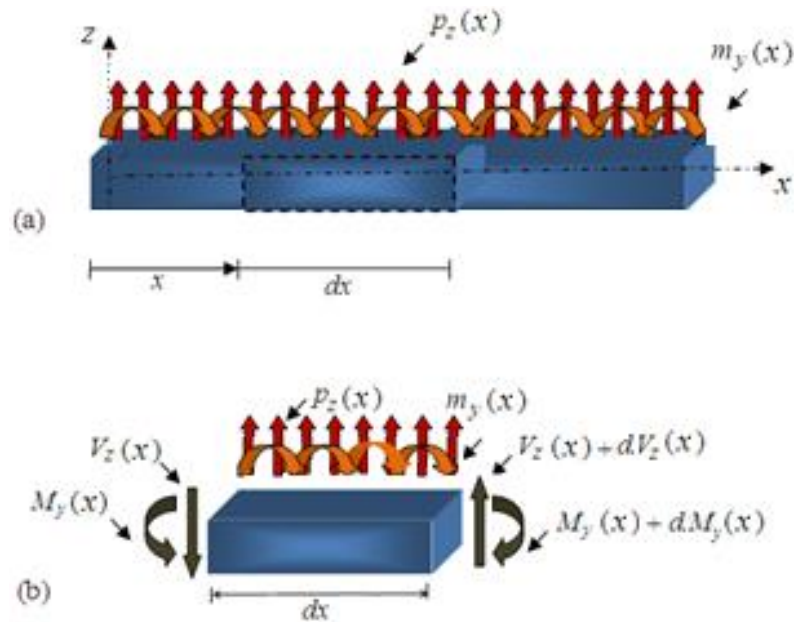


Figura 3.11- Viga submetida à flexão, com carregamento lateral e momento

Considerando as equações de equilíbrio de força e de momento escritas a partir do elemento de viga mostrado na Fig. 3.11b, tem-se, respectivamente:

$$\frac{dV_z(x)}{dx} + p_z(x) = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) + m_y(x) = 0 \quad (3.75)$$

- **O problema real (Modelo de Timoshenko)**

Como na teoria de Timoshenko a distorção devido ao cisalhamento γ_{xz} é considerada, a rotação da seção transversal dependerá da inclinação da linha elástica da

viga bem como da distorção devido ao cisalhamento. Como a seção permanece plana, o deslocamento axial pode ser escrito em função da profundidade da fibra z e do ângulo de rotação ϕ resultando em $u(x) = -z(-\phi(x))$, vide Fig 3.12. Além disso, a distorção no plano xz é $\gamma_{xz}(x) = \left(\frac{du(x)}{dx} + \frac{dw(x)}{dx} \right)$ de forma que uma relação pode ser escrita como:

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\phi(x) + \gamma_{xz}(x) \quad (3.76)$$

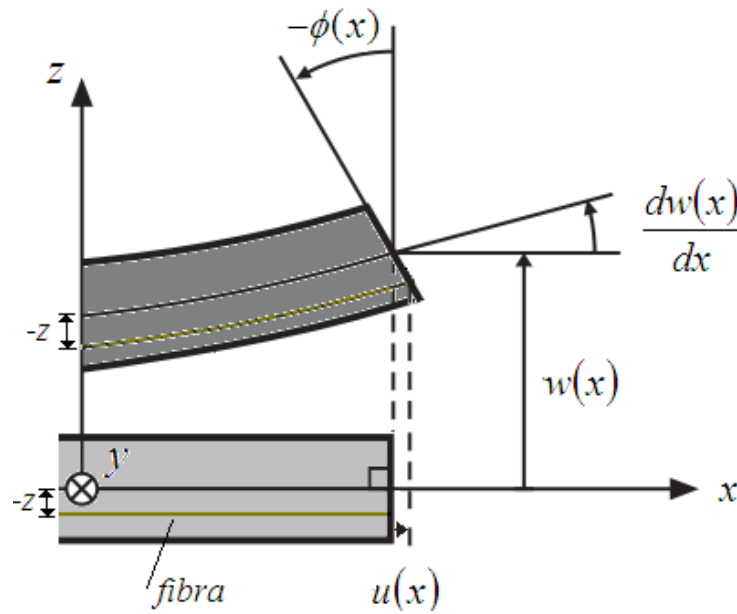


Figura 3.12- Componentes de deformação – Modelo de Timoshenko
(Adaptada de ANDERSEN e NIELSEN, 2008)

As relações entre o momento fletor e o esforço cortante são dados, na ordem, pelas expressões abaixo (ANDERSEN e NIELSEN, 2008):

$$M_y(x) = EI_y \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$V_z(x) = \kappa GA \gamma_{xz}(x) \quad (3.77a-b)$$

onde: EI_y é a rigidez à flexão em torno do eixo y , G é o módulo de deformação transversal e ϕ é o ângulo de rotação da seção transversal em torno do eixo y . Já κ é o

fator de forma de cisalhamento da seção. Seu valor, que relaciona a deformação de cisalhamento média com a deformação de cisalhamento no centroíde da seção transversal, depende da seção transversal e do coeficiente de Poisson. Podendo ser utilizado $\kappa = 6(1+\nu)/(7+6\nu)$ e $\kappa = 10(1+\nu)/(12+11\nu)$, respectivamente para vigas de seção circular e para vigas de seção retangular, ν é o coeficiente de Poisson, (ANTES, 2003).

Da Eq. (3.76) tem-se $\gamma_{xz}(x) = \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x)$ que levado na Eq. (3.77b), resulta:

$$V_z(x) = \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \quad (3.78)$$

Substituindo a derivada da Eq. (3.78) na Eq. (3.74), e a Eq. (3.76) e a derivada da Eq. (3.77a) na Eq. (3.75), obtém-se:

$$\kappa GA \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \kappa GA \frac{d\phi(x)}{dx} = -p_z(x) \quad (3.79)$$

$$-\kappa GA \frac{dw(x)}{dx} + EI_y \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \kappa GA \phi(x) = -m_y(x) \quad (3.80)$$

As Eqs. (3.79) e (3.80) são as EDOs governantes do problema da flexão de vigas submetidas a carregamento lateral e a momento, sob as hipóteses de Timoshenko, na forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

sendo: $D_1 = \kappa GA$, $D_2 = EI_y$.

• O problema fundamental (Modelo de Timoshenko)

Por analogia ao problema real, escreve-se o sistema de EDOs governantes do problema fundamental:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_z^* & 0 \\ 0 & m_y^* \end{bmatrix} \quad (3.82a)$$

onde: $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$; $w_p^*(x, \hat{x})$ e $\phi_p^*(x, \hat{x})$ são as soluções fundamentais em deslocamento e em rotação devidos à ativação do carregamento $p_z^*(x, \hat{x})$; $w_m^*(x, \hat{x})$ e $\phi_m^*(x, \hat{x})$ são as soluções fundamentais em deslocamento e em rotação devidos à ativação do carregamento $m_y^*(x, \hat{x})$.

A Eq. (3.82a) em notação mais concisa fica:

$$[B][G] = -[I]\delta(x, \hat{x}) \quad (3.82b)$$

$[B]$ e $[G]$ são, na ordem, a primeira e a segunda matrizes da Eq. (3.82a), isto é a matriz dos operadores diferenciais e a matriz das soluções fundamentais em deslocamentos e rotações. $[I]$ é a matriz identidade de ordem 2.

Ainda por analogia ao problema real, têm-se os esforços:

$$M_y^*(x) = EI_y \frac{d\phi^*(x)}{dx}$$

$$V_z^*(x) = \kappa GA \gamma_{xz}^*(x) = \kappa GA \left(\phi^* + \frac{dw^*}{dx} \right) \quad (3.83a-b)$$

Para a obtenção das soluções fundamentais utiliza-se o método de Hörmander, citado em ANTES (2003), no qual a matriz $[G]$ é escrita em função do escalar $\varsigma(x, \hat{x})$, como segue:

$$[G] = [B^{cof}]^T \varsigma(x, \hat{x}) \quad (3.84)$$

onde a matriz que multiplica o escalar é a matriz adjunta de $[B]$ ou a transposta da matriz $[B^{cof}]$ dos cofatores.

Substituindo a Eq. (3.84) na Eq. (3.82b), tem-se: $[B][B^{cof}]^T \varsigma(x, \hat{x}) = -[I]\delta(x, \hat{x})$,
que após a utilização das propriedades: $[B][B]^{-1} = [I]$ e $[B^{cof}]^T / \det[B] = [B]^{-1}$, resulta:

$$[I]\det[B]\varsigma(x, \hat{x}) = -[I]\delta(x, \hat{x}) \quad (3.85)$$

Da Eq. (3.82a), tem-se:

$$[B] = \begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix}$$

sendo $\det[B] = D_1 D_2 \frac{d^4}{dx^4}$, a Eq. (3.85) fica:

$$\left[D_1 D_2 \frac{d^4}{dx^4} \right] \varsigma(x, \hat{x}) = -\delta(x - \hat{x}) \quad (3.86)$$

A solução da Eq. (3.86) pode ser obtida com a aplicação da mesma estratégia utilizada quando da pesquisa da solução fundamental para o problema da flexão da viga de Euler-Bernoulli, propondo a função ς da Eq. (3.86) através do polinômio do terceiro grau:
 $\varsigma(x, \hat{x}) = A|x - \hat{x}|^3 + B|x - \hat{x}|^2 + C|x - \hat{x}| + D$.

Da primeira integração da Eq. (3.86) obtém-se com a utilização da propriedade do delta de Dirac indicada na Eq.(2.6b):

$$\int_0^L D_1 D_2 \frac{d^4}{dx^4} \varsigma(x, \hat{x}) dx = - \int_0^L \delta(x, \hat{x}) dx = -1 \quad (3.87)$$

Substituindo-se na Eq. (3.87) o resultado da terceira derivação em x do polinômio aproximador de $\varsigma(x, \hat{x})$, obtém-se: $D_1 D_2 \frac{d^3}{dx^3} [A|x - \hat{x}|^3]_0^L = \pm 6AD_1 D_2$, de onde se conclui que: $D_1 D_2 [6A]_0^L = 12AD_1 D_2$ e $A = -1/(12D_1 D_2)$.

Como os valores das constantes remanescentes do polinômio em estudo podem ser tomados arbitrariamente, são adotados valores nulos para B , C e D . Desse modo a solução da Eq. (3.86) será:

$$\zeta(x, \hat{x}) = -\frac{1}{12D_1D_2}|x - \hat{x}|^3 \quad (3.88)$$

Substituindo na Eq. (3.84) a Eq. (3.88), tem-se:

$$[G] = [B^{cof}]^T \zeta(x, \hat{x}) = \begin{bmatrix} D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & D_1 \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{12D_1D_2}|x - \hat{x}|^3 \right] \quad (3.89)$$

$$\text{onde: } [B^{cof}]^T = \begin{bmatrix} D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & D_1 \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}.$$

Sendo as derivadas indicadas na Eq. (3.89) iguais a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{12D_1D_2}|x - \hat{x}|^3 \right] &= -\frac{3|x - \hat{x}|^2}{12D_1D_2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[-\frac{1}{12D_1D_2}|x - \hat{x}|^3 \right] &= \frac{d}{dx} \left[-\frac{3|x - \hat{x}|^2}{12D_1D_2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \right] = -\frac{|x - \hat{x}|}{2D_1D_2} \end{aligned} \quad (3.90a-b)$$

Substituindo as Eqs. (3.90a-b) na Eq. (3.89) e comparando-a com a matriz $[G]$ da Eq. (3.82a), obtêm-se as soluções fundamentais em deslocamento e em rotação devidas à carga $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e ao momento $m_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$:

$$\begin{aligned} w_p^*(x, \hat{x}) &= D_2 \frac{d^2}{dx^2} \left[-\frac{1}{12D_1D_2}|x - \hat{x}|^3 \right] - D_1 \left[-\frac{1}{12D_1D_2}|x - \hat{x}|^3 \right] = \\ &= -\frac{|x - \hat{x}|}{2D_1} + \frac{1}{12D_2}|x - \hat{x}|^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_p^*(x, \hat{x}) &= D_1 \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{12D_1D_2} |x - \hat{x}|^3 \right] = -\frac{|x - \hat{x}|^2}{4D_2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\
w_m^*(x, \hat{x}) &= -D_1 \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{12D_1D_2} |x - \hat{x}|^3 \right] = \frac{|x - \hat{x}|^2}{4D_2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\
\phi_m^*(x, \hat{x}) &= D_1 \frac{d^2}{dx^2} \left[-\frac{1}{12D_1D_2} |x - \hat{x}|^3 \right] = -\frac{|x - \hat{x}|}{2D_2}
\end{aligned} \tag{3.91a-d}$$

As soluções fundamentais em esforços são:

$$\begin{aligned}
V_{zp}^*(x, \hat{x}) &= -\frac{r_{,x}}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\
M_{yp}^*(x, \hat{x}) &= -\frac{1}{2} |x - \hat{x}| \\
V_{zm}^*(x, \hat{x}) &= 0 \\
M_{ym}^*(x, \hat{x}) &= -\frac{r_{,x}}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})
\end{aligned} \tag{3.91e-h}$$

onde: $\operatorname{sgn}(x - \hat{x}) = r_{,x}$ sendo, $r = |x - \hat{x}|$.

Nesta tese são pesquisadas outras soluções fundamentais para o problema em discussão a partir da função alternativa utilizada como solução da Eq. (3.86), $\zeta(x, \hat{x}) = -\left\{ |x - \hat{x}|^3 - 3|x - \hat{x}|^2 L + 2L^3 \right\} / 12D_1D_2$. Elas são apresentadas a seguir.

As soluções em deslocamentos e rotações são:

$$\begin{aligned}
w_p^*(x, \hat{x}) &= D_2 \frac{d^2 \zeta(x, \hat{x})}{dx^2} - D_1 \zeta(x, \hat{x}) = \frac{L^3}{12EI_y} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 + 2 \right] + \frac{L}{2\kappa GA} \left[- \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| + 1 \right] \\
\phi_p^*(x, \hat{x}) &= D_1 \frac{d\zeta(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{L^2}{4EI_y} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| \right] \operatorname{sgn}(x - \hat{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m^*(x, \hat{x}) &= -D_1 \frac{d\zeta(x, \hat{x})}{dx} = \frac{L^2}{4EI_y} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \\
\phi_m^*(x, \hat{x}) &= D_1 \frac{d^2\zeta(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{L}{2EI_y} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| - 1 \right]
\end{aligned} \tag{3.92a-d}$$

As soluções fundamentais em esforços ficam:

$$\begin{aligned}
V_{zp}^*(x, \hat{x}) &= D_1 \left[\phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \\
M_{yp}^*(x, \hat{x}) &= D_2 \frac{d}{dx} \phi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{L}{2} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| - 1 \right] \\
V_{zm}^*(x, \hat{x}) &= D_1 \left[\phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = \delta(x, \hat{x}) \\
M_{ym}^*(x, \hat{x}) &= V_{zp}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x})
\end{aligned} \tag{3.92e-h}$$

- **A representação integral (Modelo de Timoshenko)**

Tendo em vista a obtenção das EIs do problema aplica-se a TRP ao sistema de EDOs governantes, Eq. (3.81), na ordem, com fonte de força e com fonte de momento:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \tag{3.93}$$

ou, explicitada cada uma das equações:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{bmatrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} dx = 0 \tag{3.94}$$

$$\int_0^L \left(\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (3.95)$$

Após quatro integrações por partes em x da Eq. (3.94) e a conveniente substituição da Eq. (3.77a-b) e da Eq. (3.76), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[V_z w_p^* - V_{zp}^* w \right]_{x=0}^{x=L} + \left[M_y \phi_p^* - M_{yp}^* \phi \right]_{x=0}^{x=L} + \\ & + \int_0^L \left\{ (D_1 w_p^{*''} + D_1 \phi_p^{*'}) w + [-D_1 w_p^{*'} + D_2 \phi_p^{*''} - D_1 \phi_p^*] \phi \right\} dx = - \int_0^L (p_z w_p^* + m_y \phi_p^*) dx \end{aligned} \quad (3.96)$$

De acordo com a Eq. (3.82a), EDOs do problema fundamental, a segunda parcela do integrando do primeiro membro da Eq. (3.96) é nula, enquanto da primeira parcela resulta: $\int_0^L (D_1 w_p^{*''}(x, \hat{x}) + D_1 \phi_p^{*'}(x, \hat{x})) w(x) dx = - \int_0^L w(x) \delta(x, \hat{x}) dx$, que pelo efeito de filtro do delta de Dirac (Eq. 2.6c) é igual a $-w(\hat{x})$.

Assim, da Eq.(3.96) obtém-se a equação integral dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} & w(\hat{x}) + \left[-V_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) + V_{zp}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[-M_y(x) \phi_p^*(x, \hat{x}) + M_{yp}^*(x, \hat{x}) \phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ & = \int_0^L (p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) + m_y(x) \phi_p^*(x, \hat{x})) dx \end{aligned}$$

que na forma mais usual, fica:

$$\begin{aligned} & w(\hat{x}) + \left[V_{zp}^*(x, \hat{x}) w(x) + M_{yp}^*(x, \hat{x}) \phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ & = \left[V_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) + M_y(x) \phi_p^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L (p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) + m_y(x) \phi_p^*(x, \hat{x})) dx \end{aligned} \quad (3.97)$$

Procedendo de maneira análoga com a Eq. (3.95), obtém-se a equação integral das rotações das seções:

$$\begin{aligned} & \phi(\hat{x}) + \left[-V_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + V_{zm}^*(x, \hat{x})w(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[-M_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}) + M_{ym}^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ & = \int_0^L (p_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}))dx \end{aligned}$$

que na forma mais usual, fica:

$$\begin{aligned} & \phi(\hat{x}) + \left[V_{zm}^*(x, \hat{x})w(x) + M_{ym}^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ & = \left[V_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + M_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L (p_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}))dx \end{aligned} \quad (3.98)$$

Escrevendo com notação matricial a Eq.(3.97) e a Eq. (3.98), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} w(\hat{x}) \\ \phi(\hat{x}) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{zp}^*(x, \hat{x}) & M_{yp}^*(x, \hat{x}) \\ V_{zm}^*(x, \hat{x}) & M_{ym}^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} \Big|_0^L = \quad (3.99)$$

$$\begin{bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z(x) \\ M_y(x) \end{Bmatrix} \Big|_0^L + \int_0^L \begin{bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} dx$$

• A representação algébrica (Modelo de Timoshenko)

Após a efetivação das integrações em x indicadas na Eq. (3.99) faz-se a colocação da fonte de força e de momento, uma de cada vez, nas extremidades da barra, ou seja, na extremidade inicial quando $\hat{x}$ tende a zero e na extremidade final, para a qual $\hat{x}$ tende a L , obtendo-se a expressão geral da representação algébrica do efeito de flexão em y indicada na Eq. (3.100).

$$\begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_z^*(0,0+\xi) & -M_y^*(0,0+\xi) & V_z^*(L,0+\xi) & M_y^*(L,0+\xi) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -M_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & V_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & M_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -V_z^*(0,L-\xi) & -M_y^*(0,L-\xi) & V_z^*(L,L-\xi) & M_y^*(L,L-\xi) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -M_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & V_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & M_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} = \quad (3.100)$$

$$= \begin{bmatrix} -w^*(0,0+\xi) & -\phi^*(0,0+\xi) & w^*(L,0+\xi) & \phi^*(L,0+\xi) \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\phi_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & w_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \phi_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -w^*(0,L-\xi) & -\phi^*(0,L-\xi) & w^*(L,L-\xi) & \phi^*(L,L-\xi) \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\phi_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & w_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \phi_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z(0) \\ M_y(0) \\ V_z(L) \\ M_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{z1}(0) \\ \hat{f}_{\phi1}(0) \\ f_{z1}(L) \\ \hat{f}_{\phi1}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{z2}(0) \\ \hat{f}_{\phi2}(0) \\ f_{z2}(L) \\ \hat{f}_{\phi2}(L) \end{Bmatrix}$$

Através das Eqs. (3.91a-d) e Eqs. (3.92a-d) calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidas a aplicação da fonte de força e de momento em cada uma dessas extremidades:

a) para a fonte na extremidade i

b) para a fonte na extremidade j

$$w_p^*(0, 0 + \xi) = \widehat{\beta}_{y1}$$

$$w_p^*(0, L - \xi) = 0$$

$$w_p^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$w_p^*(L, L - \xi) = \widehat{\beta}_{y1}$$

$$\phi_p^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$\phi_p^*(0, L - \xi) = -\beta_{y2}$$

$$\phi_p^*(L, 0 + \xi) = \beta_{y2}$$

$$\phi_p^*(L, L - \xi) = 0$$

$$w_m^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$w_m^*(0, L - \xi) = \beta_{y2}$$

$$w_m^*(L, 0 + \xi) = -\beta_{y2}$$

$$w_m^*(L, L - \xi) = 0$$

$$\phi_m^*(0, 0 + \xi) = \beta_{y3}$$

$$\phi_m^*(0, L - \xi) = 0$$

$$\phi_m^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$\phi_m^*(L, L - \xi) = \beta_{y3} \quad (3.101a-p)$$

$$V_{zp}^*(0, 0 + \xi) = 1/2$$

$$V_{zp}^*(0, L - \xi) = 1/2$$

$$V_{zp}^*(L, 0 + \xi) = -1/2$$

$$V_{zp}^*(L, L - \xi) = -1/2$$

$$M_{yp}^*(0, 0 + \xi) = \alpha_{y1}$$

$$M_{yp}^*(0, L - \xi) = 0$$

$$M_{yp}^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$M_{yp}^*(L, L - \xi) = \alpha_{y1}$$

$$V_{zm}^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$V_{zm}^*(0, L - \xi) = 0$$

$$V_{zm}^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$V_{zm}^*(L, L - \xi) = 0$$

$$M_{ym}^*(0, 0 + \xi) = 1/2$$

$$M_{ym}^*(0, L - \xi) = 1/2$$

$$M_{ym}^*(L, 0 + \xi) = -1/2$$

$$M_{ym}^*(L, L - \xi) = -1/2 \quad (3.102a-p)$$

As constantes α_y e β_y são explicitadas a seguir:

$$\alpha_{y1} = M_{yp}^*(0, 0 + \xi) = M_{yp}^*(L, L - \xi) = \frac{L}{2}$$

$$\widehat{\beta}_{y1} = w_p^*(0, 0 + \xi) = w_p^*(L, L - \xi) = \frac{L^3}{6EI_y} + \frac{L}{2\kappa GA}$$

$$\beta_{y2} = \phi_p^*(L, 0 + \xi) = -\phi_p^*(0, L - \xi) = \frac{L^2}{4EI_y}$$

$$\beta_{y3} = \phi_m^*(0, 0 + \xi) = \phi_m^*(L, L - \xi) = \frac{L}{2EI_y} \quad (3.103a-d)$$

Para a completa definição da Eq. (3.100), devem ser calculadas as forças do vetor independente devidas ao esforço $p_z(x)$ e ao momento $m_y(x)$ aplicados.

Comparando a Eq. (3.99) com a Eq. (3.100) conclui-se que:

$$\widehat{f}_{z1}(0) = \int_0^L p_z(x) w_p^*(x, 0) dx, \quad \widehat{f}_{z2}(0) = \int_0^L m_y(x) \phi_p^*(x, 0) dx$$

$$\widehat{f}_{z1}(L) = \int_0^L p_z(x) w_p^*(x, L) dx, \quad \widehat{f}_{z2}(L) = \int_0^L m_y(x) \phi_p^*(x, L) dx$$

$$\widehat{f}_{\phi1}(0) = \int_0^L p_z(x) w_m^*(x, 0) dx, \quad \widehat{f}_{\phi2}(0) = \int_0^L m_y(x) \phi_m^*(x, 0) dx$$

$$\widehat{f}_{\phi 1}(L) = \int_0^L p_z(x) w_m^*(x, L) dx, \quad \widehat{f}_{\phi 2}(L) = \int_0^L m_y(x) \phi_m^*(x, L) dx \quad (3.104a-d)$$

Substituindo as Eqs. (3.91a-d) nas Eqs. (3.104a-d), obtêm-se as Eqs. (3.105a-d):

$$\widehat{f}_{z1}(0) = \int_0^L p_z(x) \left\{ \frac{L^3}{12EI_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \right] + \frac{L}{2\kappa GA} \left[- \left(\frac{x}{L} \right) + 1 \right] \right\} dx$$

$$\widehat{f}_{z2}(0) = - \frac{L^2}{4EI_y} \int_0^L m_y(x) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] dx$$

$$\widehat{f}_{z1}(L) = \int_0^L p_z(x) \left\{ \frac{L^3}{12EI_y} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 + 2 \right] + \frac{L}{2\kappa GA} \left[- \left(\frac{-x+L}{L} \right) + 1 \right] \right\} dx$$

$$\widehat{f}_{z2}(L) = \frac{L^2}{4EI_y} \int_0^L m_y(x) \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] dx$$

$$\widehat{f}_{\phi 1}(0) = \int_0^L \left\{ p_z(x) \frac{L^2}{4EI_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] \right\} dx$$

$$\widehat{f}_{\phi 2}(0) = - \int_0^L \left\{ m_y(x) \frac{L}{2EI_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right] \right\} dx$$

$$\widehat{f}_{\phi 1}(L) = - \int_0^L \left\{ p_z(x) \frac{L^2}{4EI_y} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] \right\} dx$$

$$\widehat{f}_{\phi 2}(L) = - \int_0^L \left\{ m_y(x) \frac{L}{2EI_y} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right) - 1 \right] \right\} dx \quad (3.105a-d)$$

Substituindo na Eq. (3.100) os valores obtidos nas Eqs. (3.101a-p) e Eqs (3.102a-p), cujas constantes estão definidas nas Eqs. (3.103a-d), substituindo ainda, as Eqs. (3.105a-d), obtém-se a representação algébrica para o problema da flexão em y na teoria de Timoshenko:

$$\begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha_{y1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_{y1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\beta}_{y1} & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & -\beta_{y3} & -\beta_{y2} & 0 \\ 0 & \beta_{y2} & \bar{\beta}_{y1} & 0 \\ -\beta_{y2} & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z(0) \\ M_y(0) \\ V_z(L) \\ M_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{f}_{z1}(0) \\ \hat{f}_{\phi1}(0) \\ \hat{f}_{z1}(L) \\ \hat{f}_{\phi1}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{f}_{z2}(0) \\ \hat{f}_{\phi2}(0) \\ \hat{f}_{z2}(L) \\ \hat{f}_{\phi2}(L) \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

Se o sistema algébrico da viga de Euler-Bernoulli (3.73) for comparado com aquele da viga de Timoshenko (3.106) pode-se concluir que eles são praticamente idênticos, diferindo-se apenas nos coeficientes (β_{y1} e $\bar{\beta}_{y1}$) e no vetor independente de carga somente em ($f_z(0)$, $f_z(L)$ e $\hat{f}_z(0)$, $\hat{f}_z(L)$). Isto implica que com poucas adaptações em um código computacional ambos modelos de flexão de vigas no regime estático podem ser disponibilizados.

3.2.4 O Efeito de Torção

Se o modelo de torção uniforme de Saint-Venant for assumido, é conveniente distinguir dois casos tendo em vista a geometria da seção transversal da barra: seção circular e seção não-circular.

Nas barras prismáticas, de seção circular cheia ou vazada submetida à torção, o empenamento da seção é nulo e isso significa que mesmo estando os deslocamentos axiais restringidos nas suas extremidades, não serão desenvolvidas tensões de empenamento. Por outro lado, nas barras de seção transversal não-circular (retangular, por exemplo) cheia ou vazada ocorre empenamento e isso significa que as tensões de empenamento serão nulas se os deslocamentos axiais nas extremidades da barra não forem restringidos, possibilitando empenamento uniforme das seções.

Se a barra for engastada em uma das suas extremidades então os deslocamentos axiais que caracterizam o empenamento não poderão ocorrer, provocando o surgimento de tensões normais à seção transversal e consequentemente gerando alterações nos campos de

deformações e de tensões. Porém, de acordo com o princípio de Saint-Venant, a alteração no campo das tensões seria restrita ao entorno da seção engastada possibilitando a aplicação da formulação da teoria da torção uniforme na análise de regiões mais distantes.

As hipóteses particulares para a torção uniforme são:

- a) O momento de torção solicitante deve ser constante;
- b) O empenamento não ocorre ou pode ocorrer livremente (uniformemente);
- c) A seção transversal da barra é constante.

• O problema real

Seja a barra prismática de seção circular sob a ação do carregamento de torção distribuído, $t(x)$, conforme Fig. 3.13a, da qual se escreve a equação diferencial governante do problema. Para tanto, um elemento da barra de comprimento dx é isolado para análise, como mostrado na Fig. 3.13b.

Do balanço de momentos no elemento da barra onde T representa o esforço de torção, obtém-se $T - t(x)dx - (T + dT) = 0$ ou,

$$\frac{dT}{dx} = -t(x) \quad (3.107)$$

Sendo, na ordem, θ , r e γ , o ângulo de torção, o raio da seção circular da barra e o ângulo de distorção, obtém-se da geometria da Fig. 3.13b:

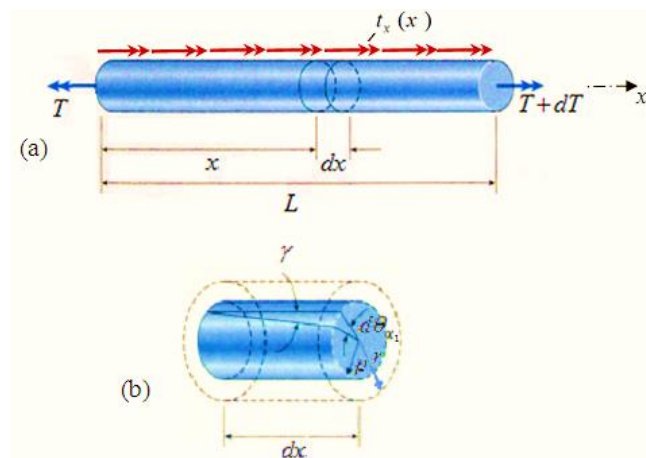


Figura 3.13 – Barra prismática submetida à torção.

$$rd\theta = \gamma dx \quad (3.108)$$

A relação tensão-deformação, onde: G e τ representam o módulo de elasticidade transversal do material e a tensão de cisalhamento desenvolvida em função da torção, é dada por:

$$\gamma = \tau / G \quad (3.109)$$

Substituindo a Eq. (3.108) na Eq. (3.109), obtém-se:

$$\frac{\tau_{\max}}{G} = r \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.110)$$

Da geometria indicada na Fig. 3.14a, obtém-se:

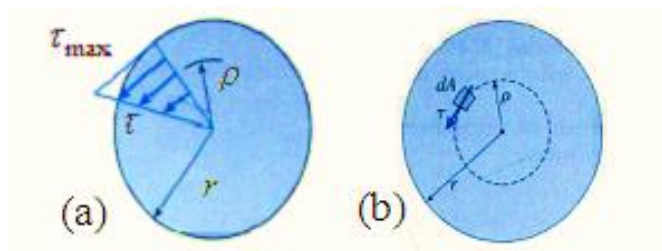


Figura 3.14 - Tensão de cisalhamento devida à torção

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{r} \rho \quad (3.111)$$

e do equilíbrio da seção, tem-se (vide Fig. 3.14b):

$$T = \int_A \tau \rho dA \quad (3.112)$$

Substituindo a Eq. (3.111) na Eq. (3.112), tem-se:

$$T = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA \quad (3.113)$$

Sendo $\int_A \rho^2 dA$ o momento de inércia polar da seção, I_p , e $\frac{\tau_{\max}}{r} = G \frac{d\theta_x}{dx}$, (vide Eq. (3.110)), então:

$$T = GI_p \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.114)$$

Igualando a derivada da Eq. (3.114) à Eq. (3.107), obtém-se a equação diferencial governante do problema em estudo.

$$GI_p \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + t(x) = 0 \quad (3.115)$$

Se a seção transversal da barra submetida à torção for não-circular, então ela empenará perdendo a planicidade que tinha antes da solicitação. Porém, se o empenamento ocorrer livremente, o torque aplicado será resistido do mesmo modo como na barra de seção circular, isto é apenas pela tensão de cisalhamento de Saint-Venant, podendo ser calculada através de uma expressão similar à Eq. (3.114), na qual o I_p é substituído por I_t , obtendo-se a Eq. (3.116):

$$T = GI_t \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.116)$$

I_t é a constante de torção da seção (ou momento de inércia à torção), que pode ser obtida através da expressão $I_t = I_\psi + I_p$, com $I_\psi = \int \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA$, $I_p = I_x + I_y$, A a área da seção transversal e ψ a função empenamento de Saint-Venant (SILVA, 2005).

Para seções circulares tem-se $I_t = I_p = \frac{\pi a^4}{2}$. No caso da seção transversal retangular de lados a e b com $a > b$, tem-se, ainda de acordo com SILVA (2005):

$$I_t = ab^3 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{64b}{\pi^5 a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} \frac{(2n+1)a\pi}{2b}}{(2n+1)^5} \right) \right\}$$

É comum, na bibliografia específica, a referência ao valor do I_t momento de inércia a torção das barras prismáticas de seção retangular cheia (ou maciça) como: $I_t = Cab^3$ onde C depende da relação b/a e tende para $1/3$ quando $a \geq 5b$ (SCHREYER, RAMM e WAGNER, 1969).

• O problema fundamental

Por analogia ao problema real o equilíbrio do problema fundamental, pode ser assim expresso:

$$GI_t \frac{d^2 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} + t^* = 0 \quad (3.117)$$

onde $t^* = \delta(x, \hat{x})$ e o esforço de torção fundamental dado por:

$$T^*(x, \hat{x}) = GI_t \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.118)$$

A solução do problema fundamental, $\theta^*(x, \hat{x})$, do efeito da torção uniforme (Eq. (3.117)) pode ser obtida procedendo-se de maneira análoga ao desenvolvimento da pesquisa da solução fundamental em deslocamento do problema do efeito axial. Assim, adota-se como solução da Eq. (3.117) a expressão: $\theta^*(x, \hat{x}) = \alpha_t r + \beta_t$, onde $r = |x - \hat{x}|$. Após a integração dessa Eq. (3.117) no domínio, resulta:

$$\left[GI_t \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L = -1 \quad (3.119)$$

As derivadas da solução, $\theta^*(x, \hat{x}) = \alpha_t r + \beta_t$, adotada para a Eq. (3.117), são:

$$\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} = \begin{cases} \alpha_t \rightarrow x - \hat{x} \geq 0 \\ -\alpha_t \rightarrow x - \hat{x} < 0 \end{cases} \quad (3.120a-b)$$

Da Eq. (3.119) tem-se: $GI_t \left[\frac{d\theta^*(L, \hat{x})}{dx} - \frac{d\theta^*(0, \hat{x})}{dx} \right] = -1$, que com a substituição da Eq. (3.1201-b), obtém-se:

$$\alpha_t = -1/2GI_t \quad (3.121)$$

Com o valor de α_t na solução adota para a Eq. (3.123), tem-se:

$$\theta^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2GI_t} r + \beta_t \quad (3.122)$$

Fazendo $\beta_t = 0$ na Eq. (3.122), tem-se:

$$\theta^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2GI_t} r = -\frac{1}{2GI_t} |x - \hat{x}| \quad (3.123a-b)$$

Substituindo a Eq. (3.123) na Eq. (3.118), obtém-se:

$$T^*(x, \hat{x}) = \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.124)$$

Ainda por analogia ao problema real, tem-se a partir da Eq. (3.107)

$$\frac{dT^*}{dx}(x, \hat{x}) + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.125)$$

• A equação integral

A EI do problema em estudo pode ser obtida a partir da aplicação da TRP na Eq. (3.115) na qual trocou-se o I_p por I_t :

$$\int_0^L \left[GI_t \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + t(x) \right] \theta^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.126)$$

onde: $\theta^*(x, \hat{x})$ é a função ponderadora e $t(x)$ é a coordenada do ponto campo, do ponto o momento de torção aplicado ao longo da barra.

Integrando por partes a Eq. (3.126), tem-se:

$$\left[GI_t \frac{d\theta(x)}{dx} \theta^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[GI_t \frac{d\theta(x)}{dx} \frac{d\theta^*}{dx}(x, \hat{x}) - t(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.127)$$

Substituindo as equações força-deslocamentos, Eq. (3.114) e Eq. (3.118), na Eq. (3.127), fica:

$$\left[T(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[\frac{d\theta(x)}{dx} T^*(x, \hat{x}) - t(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.128)$$

Fazendo nova integração por partes, agora da Eq. (3.128), obtém-se:

$$\left[T(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\theta(x) T^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \left[\frac{dT^*(x, \hat{x})}{dx} \theta(x) + t(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.129)$$

Aplicando a propriedade de filtro do delta de Dirac (Eq. 2.6c) na Eq. (3.129), após a introdução da Eq. (3.125), obtém-se:

$$\theta(\hat{x}) - \left[T(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[\theta(x) T^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[t(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.130)$$

ou, a Eq. (3.131), que é a equação integral para pontos colocados no domínio:

$$\begin{aligned} & \theta(\hat{x}) - \theta(0) T^*(0, \hat{x}) + \theta(L) T^*(L, \hat{x}) + T(0) \theta^*(0, \hat{x}) - \\ & T(L) \theta^*(L, \hat{x}) - \int_0^L \left[t(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

Para a completa definição da equação integral indicada na Eq. (3.131), há que se calcular a integral de domínio que finaliza o primeiro membro dessa equação.

- **A representação algébrica**

Colocando-se o ponto-fonte nas extremidades da barra, isto é, quando $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$ e $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$, respectivamente, na Eq. (3.131), tem-se:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &\theta(0) - \theta(0)T^*(0,0) + \theta(L)T^*(L,0) + T(0)\theta^*(0,0) - \\ &T(L)\theta^*(L,0) - \int_0^L [t(x)\theta^*(x,0)]dx = 0 \end{aligned} \quad (3.132)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$:

$$\begin{aligned} &\theta(L) - \theta(0)T^*(0,L) + \theta(L)T^*(L,L) + T(0)\theta^*(0,L) - \\ &T(L)\theta^*(L,L) - \int_0^L [t(x)\theta^*(x,L)]dx = 0 \end{aligned} \quad (3.133)$$

Reescrevendo a Eq. (132) e a Eq. (133) com notação matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -T^*(0,0+\xi) & T^*(L,0+\xi) \\ -T^*(0,L-\xi) & T^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\theta^*(0,0+\xi) & \theta^*(L,0+\xi) \\ -\theta^*(0,L-\xi) & \theta^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T(0) \\ T(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_t(0) \\ f_t(L) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Através da Eq. (3.123) e da Eq. (3.124), calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidos a aplicação da fonte de torque em cada uma dessas extremidades:

a) para a fonte na extremidade i

$$\theta^*(0,0+\xi) = 0$$

b) para a fonte na extremidade j

$$\theta^*(0,L-\xi) = -\beta_t$$

$$\theta^*(L, 0 + \xi) = -\beta_t$$

$$\theta^*(L, L - \xi) = 0$$

$$T^*(0, 0 + \xi) = \frac{1}{2}$$

$$T^*(0, L - \xi) = \frac{1}{2}$$

$$T^*(L, 0 + \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$T^*(L, L - \xi) = -\frac{1}{2} \quad (3.135a-h)$$

onde:

$$\beta_t = \frac{L}{2GI_t} \quad (3.136)$$

Comparando a Eq. (3.134) com a Eq. (3.132) e com a Eq. (3.133) conclui-se que:

$$f_t(0) = \int_0^L [t(x)\theta^*(x, 0)]dx$$

$$f_t(L) = \int_0^L [t(x)\theta^*(x, L)]dx$$

Se o torque aplicado for uniforme $t(x) = t$, o vetor de carga fica:

$$f_t(0) = -\int_0^L \left\{ t \frac{1}{2GI_t} x \right\} dx = -t \frac{L^2}{4GI_t}$$

$$f_t(L) = -\int_0^L \left\{ t \frac{1}{2GI_t} (-x + L) \right\} dx = -t \frac{L^2}{4GI_t} \quad (3.137a-b)$$

Substituindo convenientemente as igualdades (Eq. 3.135a-h) e as Eqs. (137a-b) na Eq.(3.134), obtém-se a Eq. (138), que é a representação algébrica do efeito da torção uniforme:

$$\begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_t \\ -\beta_t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T(0) \\ T(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_t(0) \\ f_t(L) \end{Bmatrix} \quad (3.138)$$

*“Não há nada mais poderoso
que uma idéia cujo
tempo já chegou”
V. Hugo*

Capítulo IV

TRANSFORMAÇÕES NOS SISTEMAS ALGÉBRICOS: ANÁLISE ESTATICA

4.1 – INTRODUÇÃO

A unificação dos sistemas de coordenadas locais de cada barra que aqui é desenvolvida tem por objetivo principal possibilitar a adequação rápida e segura das equações e dos resultados obtidos na análise de problemas em que se verifique a necessidade de reescrevê-las levando em conta outros referenciais.

O procedimento aplicado é simples e os resultados dele afloram imediatamente, sendo necessária, apenas, uma inspeção física do problema e sua interpretação no sistema de coordenadas a ser adotado. Assim, a flexão em Z é obtida de forma indireta, a partir de transformações convenientes nos valores obtidos na flexão em y.

Na tese, a utilização de um sistema de coordenadas unificado é decorrente da idéia de utilização das matrizes para mudança de referencial de aplicação corrente no MEF, na solução desses mesmos problemas de estruturas reticuladas, nos quais se aplica o MEC.

Portanto, neste capítulo serão obtidas as representações algébricas referidas ao sistema de coordenadas locais unificadas (SCLU) de cada um dos efeitos independentes aos quais as barras de pórtico plano e espacial estão submetidos. Em seguida estas representações algébricas serão referidas ao SCG. Só então, superpondo convenientemente as representações algébricas dos efeitos referidos ao SCG, obtém-se a representação algébrica das barras de pórticos (plano e espacial) para em seguida e finalmente ser obtida a representação algébrica da estrutura.

Todas as grandezas grafadas com uma barra superior estão referidas ao SCLU e com uma barra inferior, ao SCL.

4.2 OS PROBLEMAS INDEPENDENTES

As representações algébricas dos efeitos independentes escritas com notação matricial, no SCL, Eq. (4.1), serão indicadas no SCLU, como na Eq. (4.2a).

$$\{\underline{u}\} + [\underline{\hat{h}}]\{\underline{u}\} = [\underline{g}]\{\underline{p}\} + \{\underline{f}\} \quad (4.1)$$

$$\{\bar{u}\} + [\bar{\hat{h}}]\{\bar{u}\} = [\bar{g}]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (4.2a)$$

onde:

$$[\bar{\hat{h}}] = [\eta_h]^{-1}[\hat{h}][\eta_h]$$

$$[\bar{g}] = [\eta_h]^{-1}[g][\eta_g]$$

$$\{\underline{u}\} = [\eta_h]\{\bar{u}\}$$

$$\{\underline{p}\} = [\eta_g]\{\bar{p}\}$$

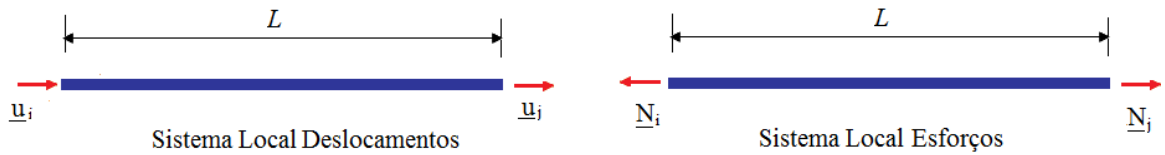
$$\{\bar{f}\} = [\eta_h]^{-1}\{\underline{f}\} \quad (4.2b-f)$$

sendo: $\{\underline{u}\}$, $\{\underline{p}\}$, $\{\underline{f}\}$, $[\underline{\hat{h}}]$ e $[\underline{g}]$, na ordem, o vetor dos deslocamentos, o vetor dos esforços e o vetor das forças de corpo; a matriz de influência dos deslocamentos e a dos esforços, todas referidas ao SCL e $\{\bar{u}\}$, $\{\bar{p}\}$, $\{\bar{f}\}$, $[\bar{\hat{h}}]$ e $[\bar{g}]$ são, na ordem, o vetor dos deslocamentos, o vetor dos esforços e o vetor das forças de corpo nas extremidades da barra; a matriz de influência dos deslocamentos e a dos esforços, todas referidas ao SCLU. As matrizes $[\eta_h]$ e $[\eta_g]$ são operadores que relacionam, respectivamente, os deslocamentos e os esforços no SCL com os seus equivalentes no SCLU.

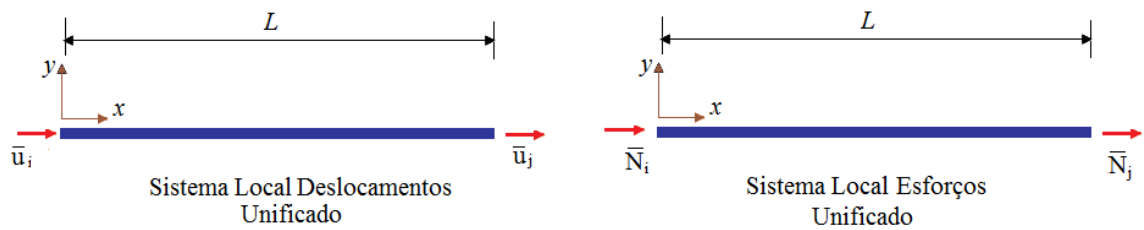
4.2.1. O Efeito Axial

Na Fig. 4.1a-b estão mostrados, respectivamente, os sistemas de coordenadas locais utilizados na avaliação da contribuição do efeito axial no desempenho da barra como elemento de pórtico e os sistemas de coordenadas locais unificados adotados.

Comparando o sentido de cada deslocamento e de cada esforço no SCL com a direção positiva do eixo correspondente do SCLU, indicados na figura abaixo, são obtidas as matrizes $[\eta_h]$ e $[\eta_g]$ necessárias para a transformação da representação algébrica do efeito axial.



(a) SCL para a avaliação da contribuição do efeito axial



(b) SCLU para a avaliação da contribuição do efeito axial

Figura 4.1 – Sistemas de coordenadas para a avaliação da contribuição do efeito axial

Quanto aos deslocamentos, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

que em notação mais concisa fica: $\{\underline{u}\} = [\eta_h]\{\bar{u}\}$, com:

$$[\eta_h] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

E quanto aos esforços, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \underline{N}_i \\ \underline{N}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

que em notação mais concisa fica: $\{\underline{p}\} = [\eta_g] \{\bar{p}\}$, com:

$$[\eta_g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.3) e (4.5) na Eq. (4.1) obtém-se, na Eq. (4.7) a representação algébrica do efeito axial no SCLU.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{xj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

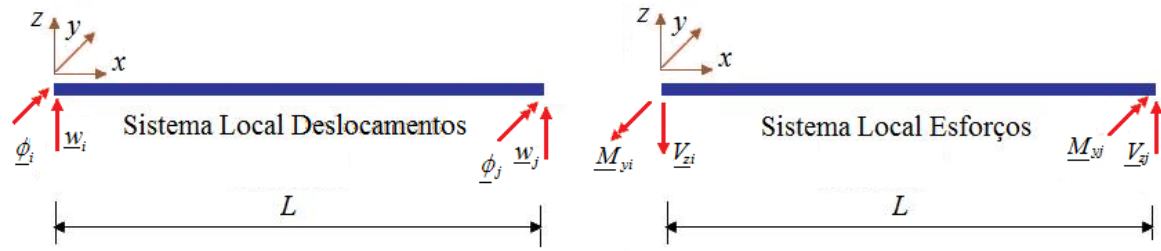
onde: $[\hat{h}] = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix}$ e $[\underline{g}] = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix}$ são as matrizes de influência da representação algébrica do efeito axial referidas ao SCL, integrantes da Eq. (3.26). Assim;

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_x \\ \alpha_x & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ -\beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{xj} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

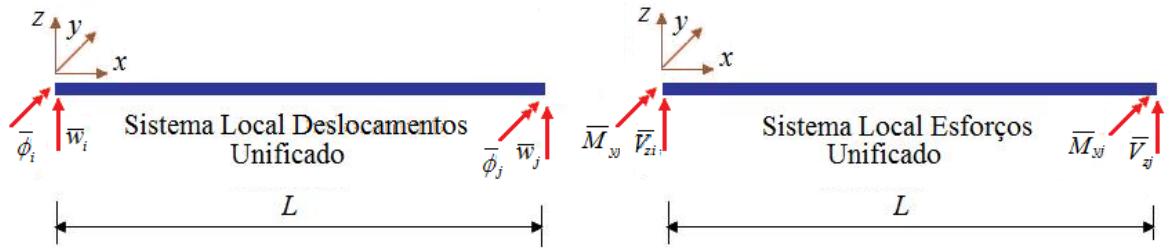
4.2.2 O Efeito de Flexão

- **Flexão em y**

Na Fig. 4.2a-b estão mostrados os SCL e o SCLU utilizados na avaliação da contribuição do efeito de flexão em y no desempenho da barra como elemento de pórtico.



(a) SCL para a avaliação da contribuição da flexão em y



(b) SCLU para a avaliação da contribuição da flexão em y

Figura 4.2 – Sistemas de Coordenadas para a avaliação da contribuição de flexão em y

Observando a Fig. 4.2, conclui-se:

Quanto aos deslocamentos, a transformação fica:

$$\begin{Bmatrix} \underline{w}_i \\ \underline{\phi}_i \\ \underline{w}_j \\ \underline{\phi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

que em notação mais concisa fica: $\{\underline{u}\} = [\eta_h]\{\bar{u}\}$, com:

$$[\eta_h] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Quanto aos esforços, a lei de transformação é:

$$\begin{Bmatrix} \underline{V}_{zi} \\ \underline{M}_{yi} \\ \underline{V}_{zj} \\ \underline{M}_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

que em notação mais concisa fica: $\{p\} = [n_g] \{\bar{p}\}$, com:

$$[n_g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.10) e (4.11) na Eq. (4.1) obtém-se, na Eq. (4.13) a representação algébrica do efeito de flexão em z no SCLU.

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{14} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{24} \\ \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} & \hat{h}_{33} & \hat{h}_{34} \\ \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} & \hat{h}_{43} & \hat{h}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \quad (4.13)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} & \underline{g}_{13} & \underline{g}_{14} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} & \underline{g}_{23} & \underline{g}_{24} \\ \underline{g}_{31} & \underline{g}_{32} & \underline{g}_{33} & \underline{g}_{34} \\ \underline{g}_{41} & \underline{g}_{42} & \underline{g}_{43} & \underline{g}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{zi} \\ \bar{f}_{\phi i} \\ \bar{f}_{wj} \\ \bar{f}_{\phi j} \end{Bmatrix}$$

Onde as matrizes de influência do efeito de flexão referidas ao SCL são:

$$[\hat{h}] = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{14} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{24} \\ \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} & \hat{h}_{33} & \hat{h}_{34} \\ \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} & \hat{h}_{43} & \hat{h}_{44} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\underline{g}] = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} & \underline{g}_{13} & \underline{g}_{14} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} & \underline{g}_{23} & \underline{g}_{24} \\ \underline{g}_{31} & \underline{g}_{32} & \underline{g}_{33} & \underline{g}_{34} \\ \underline{g}_{41} & \underline{g}_{42} & \underline{g}_{43} & \underline{g}_{44} \end{bmatrix}$$

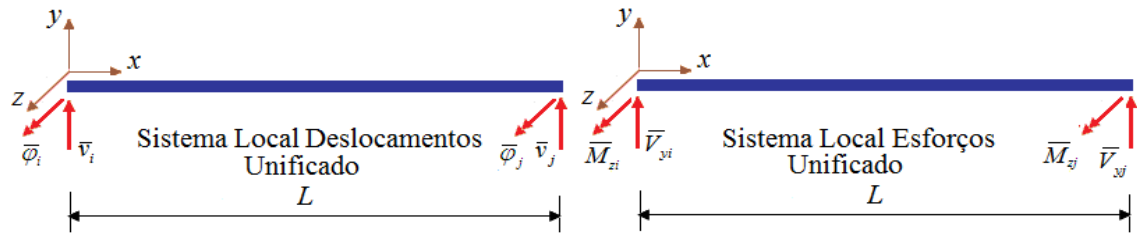
Substituindo-se estas matrizes por aquelas explicitadas na representação algébrica da viga de Euler-Bernoulli, Eq.(3.73), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha_{y1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \alpha_{y1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{y1} & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & \beta_{y3} & -\beta_{y2} & 0 \\ 0 & -\beta_{y2} & \beta_{y1} & 0 \\ \beta_{y2} & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{zi} \\ \bar{f}_{\phi i} \\ \bar{f}_{z1j} \\ \bar{f}_{\phi 1j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{z2i} \\ \bar{f}_{\phi 2i} \\ \bar{f}_{z2j} \\ \bar{f}_{\phi 2j} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

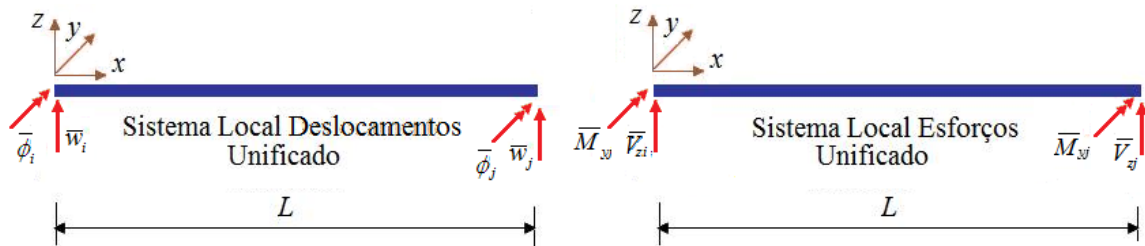
O sistema algébrico unificado para a viga de Timoshenko pode ser obtido através da Eq. (4.14), permutando-se β_{y1} por $\hat{\beta}_{y1} = \frac{L^3}{6EI_y} + \frac{L}{2\kappa GA}$ na matriz de influência dos esforços e o vetor de carga deve ser alterado de $\{\bar{f}_{zi} \ \bar{f}_{\phi i} \ \bar{f}_{zj} \ \bar{f}_{\phi j}\}^T$ para $\{\hat{f}_{zi} \ \hat{f}_{\phi i} \ \hat{f}_{zj} \ \hat{f}_{\phi j}\}^T$, cujos valores estão indicados nas Eqs. (305a-d).

- **Flexão em z**

A representação algébrica da flexão em z da viga de Euler-Bernoulli no SCLU é obtida por analogia à representação algébrica da flexão em y, com a utilização de uma interpretação geométrica na Fig 4.3a-b:



(a) SCLU para a avaliação da contribuição da flexão em z



(b) SCLU para a avaliação da contribuição da flexão em y

Figura 4.3 – SCLU para a avaliação da contribuição da flexão em z

Fazendo-se uma inspeção vetorial nos deslocamentos e esforços da flexão em y e com aqueles da flexão z pode-se concluir que o sistema algébrico unificado da flexão em z pode ser obtido indiretamente daquele de y. Eq. (4.14), desde que sejam feitas as devidas correções de orientações nas rotações das seções e nos momentos fletores e a permuta do eixo de flexão. Assim, com as correções ($\bar{\varphi}_i = -\bar{\phi}_i, \bar{\varphi}_j = -\bar{\phi}_j, \bar{M}_{zi} = -\bar{M}_{yi}$ e $\bar{M}_{zj} = -\bar{M}_{yj}$, $m_z(x) = -m_y(x), p_y(x) = p_z(x)$) o sistema algébrico unificado da flexão em z fica:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ -\bar{\varphi}_i \\ \bar{v}_j \\ -\bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha_{z1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \alpha_{z1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ -\bar{\varphi}_i \\ \bar{v}_j \\ -\bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{z1} & 0 & 0 & \beta_{z2} \\ 0 & \beta_{z3} & -\beta_{z2} & 0 \\ 0 & -\beta_{z2} & \beta_{z1} & 0 \\ \beta_{z2} & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ -\bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ -\bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{y1i} \\ -\bar{f}_{\varphi 1i} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\bar{f}_{y2i} \\ +\bar{f}_{\varphi 2i} \\ -\bar{f}_{y2j} \\ +\bar{f}_{\varphi 2j} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

ou finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_{z1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{z1} & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & \beta_{z3} & \beta_{z2} & 0 \\ 0 & \beta_{z2} & \beta_{z1} & 0 \\ -\beta_{z2} & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{y1i} \\ \bar{f}_{\varphi 1i} \\ \bar{f}_{z1j} \\ \bar{f}_{\varphi 1j} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{f}_{y2i} \\ \bar{f}_{\varphi 2i} \\ \bar{f}_{z2j} \\ \bar{f}_{\varphi 2j} \end{Bmatrix} \quad (4.15a)$$

As constantes α_z e β_z são obtidas das Eqs (3.71a-d) e as forças de corpo, das Eqs. (3.72a-d), nas quais se substitui o I_y por I_z . Os demais coeficientes da Eq. (4.15a) já foram informados no capítulo 3 e, por comodidade, serão repetidos a seguir:

$$\alpha_{z1} = \frac{L}{2}, \quad \beta_{z1} = \frac{L^3}{6EI_z}, \quad \beta_{z2} = \frac{L^2}{4EI_z}, \quad \beta_{z3} = \frac{L}{2EI_z}$$

e,

$$f_{y1}(0) = \frac{L^3}{12EI_z} \int_0^L p_y(x) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \right] dx$$

$$f_{y2}(0) = -\int_0^L m_z(x) \frac{L^2}{4EI_z} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{y1}(L) = \frac{L^3}{12EI_z} \int_0^L p_y(x) \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 + 2 \right] dx$$

$$f_{y2}(L) = \int_0^L m_z(x) \frac{L^2}{4EI_z} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{\varphi1}(0) = -\frac{L^2}{4EI_z} \int_0^L p_y(x) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{\varphi2}(0) = \int_0^L m_z(x) \frac{L}{2EI_z} \left[\left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right]$$

$$f_{\varphi1}(L) = \frac{L^2}{4EI_y} \int_0^L p_z(x) \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{\varphi2}(L) = \int_0^L m_y(x) \frac{L}{2EI_y} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right) - 1 \right]$$

O sistema algébrico unificado da flexão em z da viga de Timoshenko é obtido substituindo-se β_{z1} por $\hat{\beta}_{z1} = \frac{L^3}{6EI_z} + \frac{L}{2\kappa GA}$ na Eq. (4.15a). Já os vetores de carga devem ser alterados para:

$$\hat{f}_{y1}(0) = \int_0^L p_y(x) \left\{ \frac{L^3}{12EI_z} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \right] + \frac{L}{2\kappa GA} \left[- \left(\frac{x}{L} \right) + 1 \right] \right\} dx$$

$$f_{y2}(0) = -\frac{L^2}{4EI_z} \int_0^L m_z(x) \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] dx$$

$$\hat{f}_{y1}(L) = \int_0^L p_y(x) \left\{ \frac{L^3}{12EI_z} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 + 2 \right] - \frac{L}{2\kappa GA} \left[- \left(\frac{-x+L}{L} \right) + 1 \right] \right\} dx$$

$$f_{y2}(L) = \frac{L^2}{4EI_z} \int_0^L m_z(x) \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] dx$$

$$f_{\varphi 1}(0) = - \int_0^L \left\{ p_y(x) \frac{L^2}{4EI_z} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] \right\} dx$$

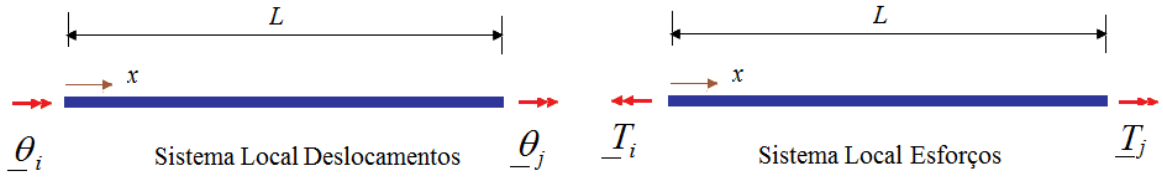
$$f_{\varphi 2}(0) = \int_0^L \left\{ m_z(x) \frac{L}{2EI_z} \left[\left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right] \right\} dx$$

$$f_{\varphi 1}(L) = \int_0^L \left\{ p_y(x) \frac{L^2}{4EI_z} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{-x+L}{L} \right) \right] \right\} dx$$

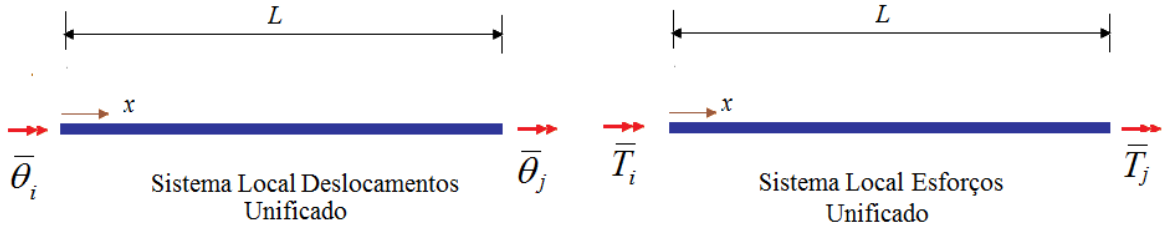
$$f_{\varphi 2}(L) = \int_0^L \left\{ m_z(x) \frac{L}{2EI_z} \left[\left(\frac{-x+L}{L} \right) - 1 \right] \right\} dx$$

4.2.3 O Efeito de Torção Uniforme

Na Fig. 4.4a-b estão mostrados, os SCL e o SCLU utilizados na avaliação da contribuição do efeito de torção. Comparando o sentido de cada ângulo de rotação e de cada momento de torção com o sentido positivo dos eixos correspondentes do SCLU, mostrados na figura 4.4, conclui-se que:



(a) SCL para a avaliação da contribuição de torção



(b) SCLU para a avaliação da contribuição de torção

Figura 4.4 - SCLU para a avaliação da contribuição de torção

Quanto aos ângulos de torção:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\theta}_i \\ \underline{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

e, quanto aos esforços:

$$\begin{Bmatrix} \underline{T}_i \\ \underline{T}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{T}_j \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Com a utilização das Eqs. (4.16) e (4.17) a representação algébrica do efeito da torção uniforme, Eq. (3.138), pode ser reescrita referida ao SCLU como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_i \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_t \\ \beta_t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{T}_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m_{ti} \\ m_{tj} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

4.3 PROBLEMAS COMBINADOS

A representação algébrica de barra de pórtico é feita inicialmente no SCLU para em seguida ser reescrita no sistema de coordenadas globais, SCG. No SCLU ela é obtida pela superposição dos efeitos aos quais a barra está submetida, ou seja: a) para barras de pórtico plano: axial e de flexão no plano da estrutura e, b) para barras de pórtico espacial: axial, de flexão bi-direcional e de torção uniforme. Assim, o sistema algébrico da barra dos efeitos combinados no SCLU pode ser escrito como:

$$[I]\{\bar{u}\} + [\hat{h}]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\}$$

$$[h]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\hat{f}\} \quad (4.19a-b)$$

Já quando referida ao SCG, o sistema algébrico combinado fica:

$$[I]\{U\} + [\hat{H}]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\}$$

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\} \quad (4.20a-b)$$

onde: $[I]$, $[h] = [I] + [\hat{h}]$ e $[g]$ são, na ordem, a matriz identidade, a matriz de influência de deslocamentos e a matriz de influência de forças da barra. Todas são quadradas de ordem 6 ou 12, conforme o tipo de barra em análise: se pórtico plano ou pórtico espacial; $\{u\}$, $\{p\}$ e $\{f\}$ são, na ordem, os vetores dos deslocamentos, dos esforços nodais e das forças de corpo da barra. Todos com a quantidade de linhas igual à quantidade de GDL considerados na barra, isto é: 6 ou 12.

As matrizes e os vetores indicados com letras maiúsculas têm a mesma definição dos seus correspondentes indicados com letras minúsculas, sendo que enquanto as primeiras estão referidas ao SCLU, as do segundo grupo estão referidas ao SCG.

4.3.1 Para Barra de Pórtico Plano no SCLU

Para barra de pórtico plano (no plano xy) a representação algébrica é feita a partir da superposição das Eqs. (4.8) e (4.14), decorrentes da avaliação dos efeitos axial e do efeito de flexão em z .

Então, a representação algébrica da barra de pórtico plano no SCLU é dada por:

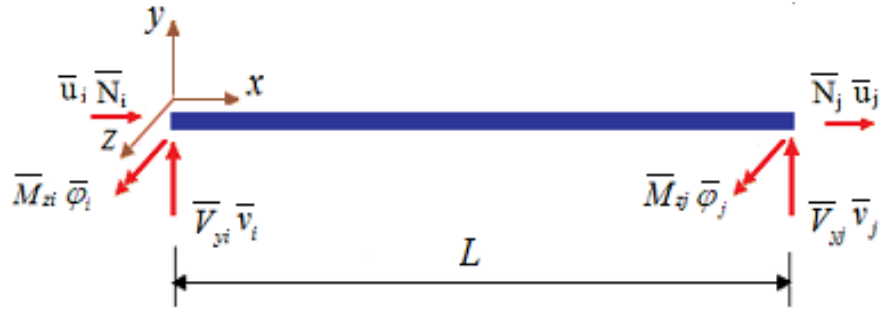


Figura 4.5 - Sistema de coordenadas local unificado de barra de pórtico plano

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \alpha_{z1} & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ \alpha_x & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} = \quad (4.21a)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{z1} & 0 & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & 0 & \beta_{z3} & 0 & \beta_{z2} & 0 \\ -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{z2} & 0 & \beta_{z1} & 0 \\ 0 & -\beta_{z2} & 0 & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{y1i} \\ \bar{f}_{\varphi 1i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{y1j} \\ \bar{f}_{\varphi 1j} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{y2i} \\ \bar{f}_{\varphi 2i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{y2j} \\ \bar{f}_{\varphi 2j} \end{Bmatrix}$$

Já no caso do modelo de Timoshenko a representação algébrica da barra de pórtico plano fica:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \alpha_{z1} & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ \alpha_x & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \quad (4.22b)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{z1} & 0 & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & 0 & \beta_{z3} & 0 & \beta_{z2} & 0 \\ -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{z2} & 0 & \hat{\beta}_{z1} & 0 \\ 0 & -\beta_{z2} & 0 & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{y1i} \\ \bar{f}_{\phi1i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{y1j} \\ \bar{f}_{\phi1j} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{f}_{y2i} \\ \bar{f}_{\phi2i} \\ 0 \\ \bar{f}_{y2j} \\ \bar{f}_{\phi2j} \end{Bmatrix}$$

4.3.2 Para Barra de Pórtico Espacial no SCLU

Para barra de pórtico espacial a representação algébrica é feita a partir da superposição dos efeitos axial, de flexão bidirecional e de torção, como indicado na Fig. 4.6. Estes efeitos estão matematicamente representados pelas Eqs. (4.8), (4.14), (4.15) e Eq. (4.18) quando adotada a teoria clássica de Euler-Bernoulli.

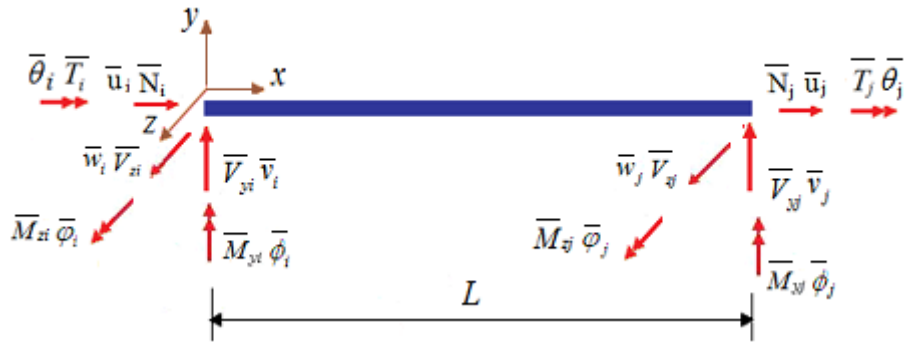


Figura 4.6 - Sistema de coordenadas local unificado de barra de pórtico espacial

Desse modo a representação algébrica para barra de pórtico espacial no modelo de Euler-Bernoulli é como mostrado na Eq. 4.23 enquanto no modelo de Timoshenko é como mostrado na Eq.4.24:

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & 0 & \hat{\beta}_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{y3} & 0 & 0 & 0 & -\beta_{y2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{z3} & 0 & \beta_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{z2} & 0 & \hat{\beta}_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & \hat{\beta}_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{y3} & 0 \\ 0 & -\beta_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{V}_{zi} \\ \bar{T}_i \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{T}_j \\ \bar{M}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{y1i} \\ \bar{f}_{z1i} \\ \bar{f}_{ti} \\ \bar{f}_{\phi1i} \\ \bar{f}_{\phi1i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{y1j} \\ \bar{f}_{z1j} \\ \bar{f}_{tj} \\ \bar{f}_{\phi1j} \\ \bar{f}_{\phi1j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{f}_{y2i} \\ \bar{f}_{z2i} \\ 0 \\ \bar{f}_{\phi2i} \\ -\bar{f}_{\phi2i} \\ 0 \\ -\bar{f}_{y2j} \\ \bar{f}_{z2j} \\ 0 \\ \bar{f}_{\phi2j} \\ -\bar{f}_{\phi2j} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.3.3 Para barra de pórtico plano no SCG

A representação algébrica da estrutura (pórtico plano ou espacial) requer que as contribuições advindas das barras sejam convenientemente acumuladas de forma a descrever o comportamento da estrutura como um todo. Em busca desse objetivo transformações nos sistemas algébricos locais unificados das barras devem ser efetuadas, obtendo-se assim os sistemas algébricos globais dessas mesmas barras.

A princípio, a superposição dos campos vetoriais (esforços e deslocamentos) de cada extremidade de barra deve ser feita através de uma soma vetorial (magnitude e orientação) nos nós comuns. Para que estes vetores sejam somados algebricamente ou escalarmente, eles precisam necessariamente estar na mesma direção para que suas contribuições sejam corretamente consideradas.

Para tanto, deve-se assegurar para cada membro que as matrizes de influência e o seu vetor de carregamento estejam no mesmo sistema de coordenadas.

Os campos no sistema local unificado podem ser referenciados ao sistema de coordenadas global a partir das relações geométricas entre os eixos de mesmo nome desses sistemas. Assim, os deslocamentos, os esforços e as forças de corpo no SCLU são correlacionados com suas respectivas contrapartes globais como:

$$\{u\} = [R]\{U\}, \{p\} = [R]\{P\} \text{ e } \{f\} = [R]\{F\} \quad (4.25a-c)$$

Define-se, então, uma relação entre as matrizes de influência locais unificadas e as de influência globais, a partir da matriz de transformação [R] como mostrada a seguir.

Da substituição das Eqs. (4.25a-c) na Eq. (4.19a), obtém-se:

$$\{U\} + [R]^T [\hat{h}] [R] \{U\} = [R]^T [g] [R] \{P\} + [R]^T [R] \{F\} \quad (4.26)$$

comparando a Eq. (4.26) com a Eq. (4.20a), tem-se:

$$[\hat{H}] = [R]^T [\hat{h}] [R], [G] = [R]^T [g] [R] \text{ e } [F] = [R]^T [f] \quad (4.27a-c)$$

A matriz de transformação para o pórtico plano, utilizada na Eq. (4.26), é:

$$[R] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde, $[C] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, C_x e C_y são os cossenos diretores da

barra em relação aos eixos do SCG, sendo $C_x = \cos \theta_x = \frac{X_j - X_i}{L}$, $C_y = \cos \theta_y = \frac{Y_j - Y_i}{L}$

e o comprimento da barra $L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$, como mostrado na Fig. 4.7.

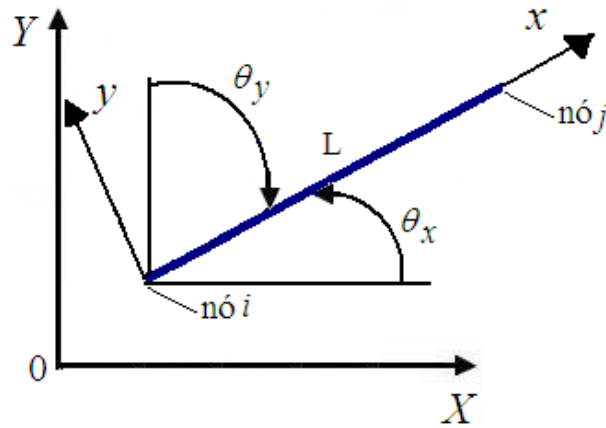


Figura 4.7 – Coordenadas globais 0XY, coordenadas locais principais 0xy

4.3.4 Para barra de pórtico espacial no SCG

Para o pórtico espacial padrão, a matriz $[R]$ é dada para o caso geral, por:

$$[R] = \begin{bmatrix} [R]_{i,i} & [R]_{i,j} \\ [R]_{j,i} & [R]_{j,j} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

com:

$$[R]_{i,i} = [R]_{j,j} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

e

$$[R]_{i,j} = [R]_{j,i} = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

onde $[0]$ é uma matriz nula de ordem 3. Sendo $[C]$ a matriz dos cossenos mostrada a seguir, α é o ângulo de um dos eixos principais de inércia da seção transversal em relação ao eixo de mesmo nome de um sistema de coordenadas arbitrariamente; C_x , C_y , C_z são os cossenos diretores da barra considerados o sistema de coordenadas global e o sistema de coordenadas locais arbitrário; e $C_{xz} = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$ no caso geral, vide Figs. 4.8 e 4.9.

A Fig. 4.8a mostra uma barra de seção triangular e dois sistemas de coordenadas locais: o sistema local principal $0xyz$ e o local arbitrário $0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Esses sistemas de coordenadas têm os eixos longitudinais $0x$ e $0\bar{x}$ coincidentes enquanto os eixos $0y$ e $0z$ que definem o plano onde se encontra a seção transversal da barra, formam um ângulo α respectivamente com os eixos $0\bar{y}$ e $0\bar{z}$. Já na Fig. 4.8b vê-se a barra de seção triangular o sistema local arbitrário e o chamado sistema de coordenadas globais $0XYZ$. Os ângulos entre os eixos de mesmo nome dos dois sistemas de coordenadas são na ordem: θ_x , θ_y e θ_z , sendo os cossenos desses ângulos definidos como os cossenos diretores da barra.

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{(C_x C_y \cos \alpha + C_z \sin \alpha)} & C_y & \frac{C_z}{(-C_y C_z \cos \alpha + C_x \sin \alpha)} \\ \frac{C_{xz}}{(C_x C_y \sin \alpha - C_z \cos \alpha)} & C_{xz} \cos \alpha & \frac{C_{xz}}{(C_y C_z \sin \alpha + C_x \cos \alpha)} \\ \frac{C_{xz}}{C_{xz}} & -C_{xz} \sin \alpha & \frac{C_{xz}}{C_{xz}} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

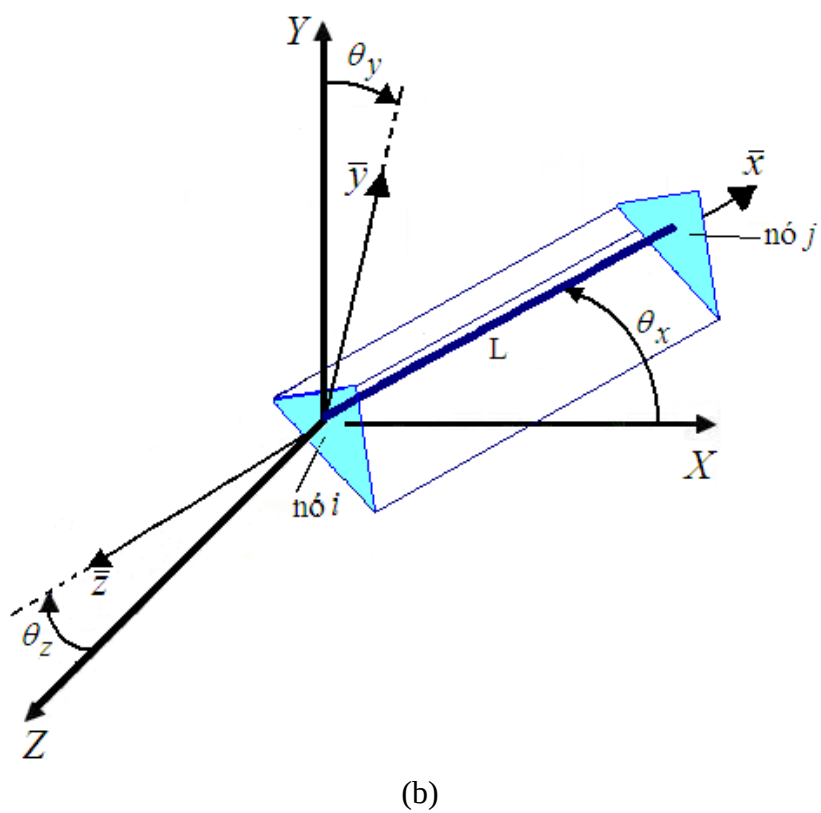
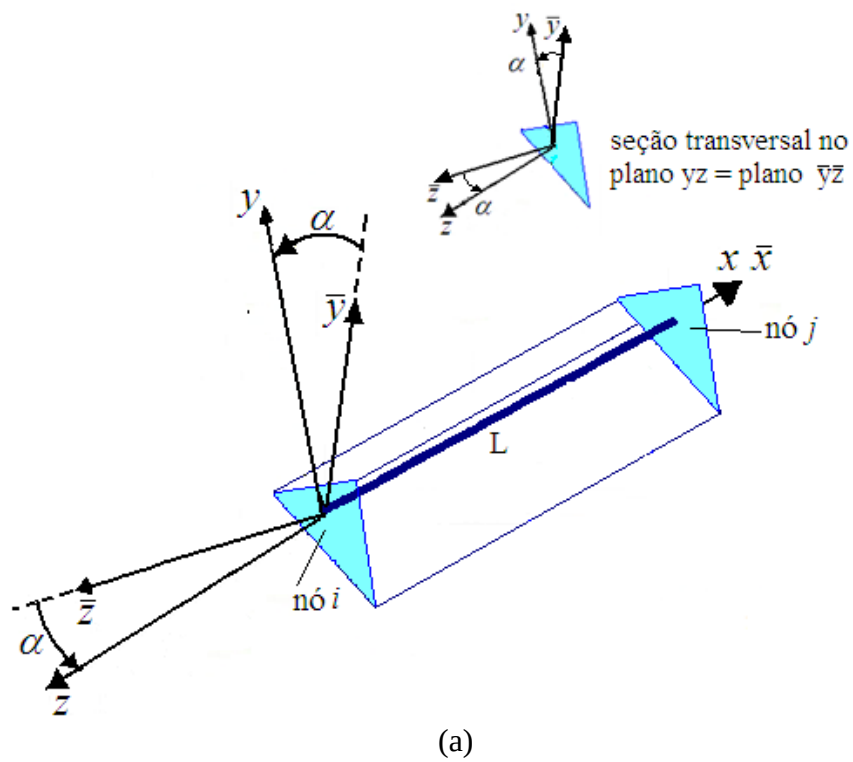


Figura 4.8 – Coordenadas

- a) Coordenadas locais principais, locais arbitrárias e seção transversal
- b) Coordenadas globais $0XYZ$, locais arbitrárias $0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Quando $C_x = C_z = 0$ ($C_{xz} = 0$), vide Fig. 4.9, a matriz $[C]$ fica:

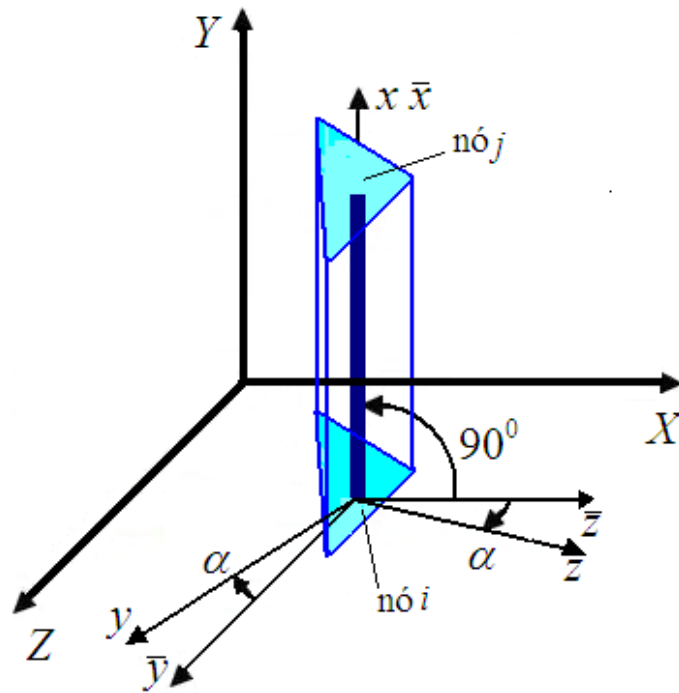


Figura 4.9 – Coordenadas globais 0XYZ e coordenadas locais 0xyz .
Caso particular em que $C_x = C_z = 0$ ($C_{xz} = 0$)

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

4.4. REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA – ANÁLISE ESTÁTICA

Quando duas ou mais barras convergirem para o mesmo nó deve ser levado em conta a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio. No caso dos pórticos (planos ou espaciais) a definição de um nó virtual nas extremidades dessas barras é suficiente para a verificação do equilíbrio nó a nó da estrutura.

Para a discussão sobre a montagem do sistema global dos pórticos serão consideradas (por simplicidade e concisão) duas barras convergentes. Neste caso isola-se o nó 2 e indica-se as barras (1) e (2) que convergem para ele, conforme ilustrado na Fig. 4.10.

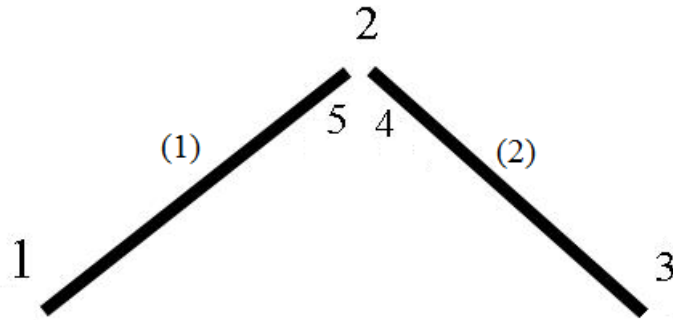


Figura 4.10 - Barras de pórtico convergindo

As representações algébricas para as barras (1) e (2) no SCG são:

$$\begin{cases} [H_{11}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{12}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{11}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{12}^{(1)}]\{P_5\} \\ [H_{21}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{22}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{21}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{22}^{(1)}]\{P_5\} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} [H_{22}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{23}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{22}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{23}^{(2)}]\{P_3\} \\ [H_{32}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{33}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{32}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{33}^{(2)}]\{P_3\} \end{cases} \quad (4.35)$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento nas seções à esquerda e à direita no nó 2 e garantindo as condições de equilíbrio desse mesmo nó, tem-se, conforme Figs. 4.10 e 4.11:

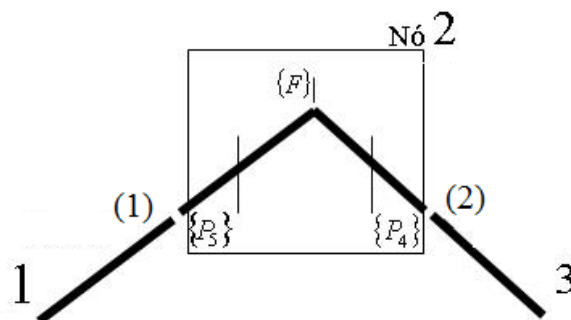


Figura 4.11 - Condição de Equilíbrio no nó

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (4.36)$$

$$\{P_5\} + \{P_4\} - \{F\} = \{0\} \quad (4.37)$$

onde: $\{F\}$ é o vetor que contém as forças e momentos diretamente aplicados no nó 2; $\{P_5\}$ e $\{P_4\}$ são os vetores que contém os esforços à esquerda e à direita desse nó, respectivamente.

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Eq. (4.36), e as condições de equilíbrio, conforme a Eq. (4.37), nas representações algébricas indicadas nas Eq. (4.34) e Eq. (4.35), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{12}^{(1)} \\ H_{22}^{(1)} \\ H_{32}^{(2)} \\ H_{22}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{33}^{(2)} \\ H_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_{32}^{(2)} \\ -G_{22}^{(2)} \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G_{12}^{(1)} \\ -G_{22}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33}^{(2)} \\ G_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

*“Estudar as manifestações da natureza
é trabalho que agrada a Deus.
É o mesmo que orar.”
Leonardo da Vinci*

Capítulo V

INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão discutidas a representação algébrica do solo e a estratégia de acoplamento com o sistema da estrutura, necessárias ao entendimento do problema de interação solo-sapata-estrutura.

A estratégia de representação da interação solo-estrutura na tese tem como ponto de partida o trabalho de QUEIROZ (2010). As principais características desse modelo são: o solo tomado como um semi-espaco elástico, a meso-estrutura (sapata) admitida como rígida (cada uma apoiando uma única barra), e a superestrutura, um pórtico espacial padrão é modelado pelo MEF. Além disso, o acoplamento solo-estrutura é feito apenas para as forças verticais.

Diferentemente da abordagem de QUEIROZ (2010), a proposta de interação solo-estrutura aqui desenvolvida utiliza apenas o método dos elementos de contorno. Além disso, o acoplamento contempla as ações verticais e horizontais nas sapatas de PP e PE com mais de uma barra chegando à mesma sapata.

As estruturas são, em geral, divididas em duas partes: superestrutura e infraestrutura. Enquanto a primeira parte é composta pela estrutura principal, na segunda encontram-se os elementos estruturais de fundação que servindo de apoio para a estrutura principal funcionam como vínculos cujos desempenhos garantem ao conjunto o equilíbrio e indeslocabilidade desejados.

Cada elemento estrutural de fundação e o maciço de solo que o envolve compõem um sistema designado como elemento isolado de fundação (EIF) ou simplesmente fundação, o

conjunto desses elementos numa edificação compõe o sistema estrutural de fundação (AOKI, 1997). As fundações são divididas em dois grandes grupos: fundações rasas (superficiais ou diretas) e fundações profundas. As profundas são definidas como aquelas nas quais o mecanismo de ruptura da base não atinge a superfície do terreno. Como os efeitos desse mecanismo só conseguem atingir as camadas superiores do solo até duas vezes a menor dimensão do EEF, as fundações rasas são definidas como aquelas que estão assentadas a uma profundidade de até duas vezes sua menor dimensão (TEIXEIRA e GODOY, 1998). No Brasil, por recomendação da NBR 6122/03 da ABNT a profundidade deste tipo de fundação não pode ultrapassar de 3 metros abaixo da superfície natural do terreno.

Dentre as fundações profundas encontram-se os sistemas estruturais compostos por estacas (de fundação) - blocos de coroamento (de estacas de fundação) e, dentre as rasas encontram-se os EEF chamados sapatas. Estas sapatas, que podem ser isoladas, contínuas, conjugadas e etc., são divididas quanto à deformabilidade em rígidas e flexíveis.

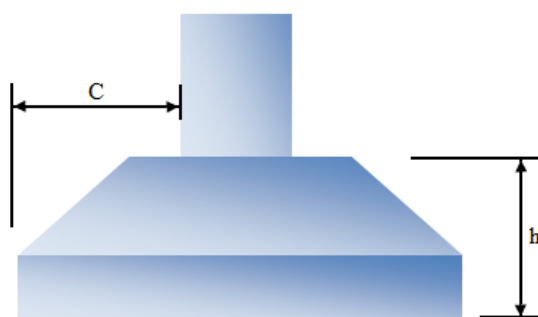


Figura 5.1 - Definição das dimensões C e h

As sapatas rígidas são aquelas cujas deformações por flexão não são consideradas, enquanto nas flexíveis estas deformações não podem ser desprezadas. Geometricamente as rígidas se distinguem das flexíveis pela relação C/h . Sendo, para aquelas, de 0,5 a 1,5 e para essas, no mínimo igual à 2. C e h são definidos na Fig.5.1, (DUARTE, 2005).

Neste trabalho serão consideradas apenas as sapatas isoladas rígidas estando associada a cada uma delas uma ou mais barras (pilares ou pilares e vigas).

As deformações no solo e as pressões de contato que agem na interface da base da sapata com o solo não dependem apenas das propriedades elásticas do solo, da distribuição de cargas sobre a sapata, da profundidade de assentamento e das dimensões geométricas, mas também da rigidez à flexão dessa sapata. Assim, as deformações no solo (na região de

contato) entre as sapatas rígidas serão uniformes, embora a reação deste sobre a sapata não se manifeste com a mesma característica, ver Fig. 5.2; em relação às flexíveis, ao contrário, as deformações impostas ao solo na área de contato não serão uniformes embora a reação as pressões de contato deste no elemento estrutural sejam uniformes (TEIXEIRA e GODOY, 1998, DORIA, 2007, BRAJA, 2007).

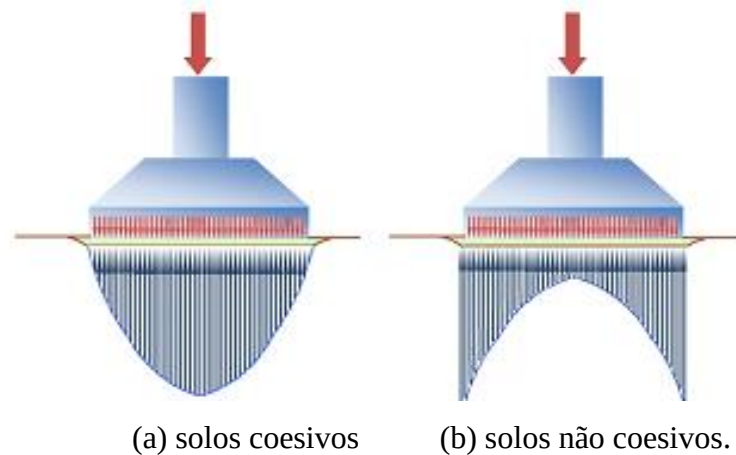


Figura 5.2 – Pressão de contato em sapata rígida.

5.2 O SOLO

A superfície do solo será representada por nel (número total de elementos) elementos de contorno triangulares contínuos e lineares, com um número total de nós igual à nno , distribuídos em nsp (número total de sapatas) sapatas.

5.2.1 Hipóteses Adotadas

Admite-se o solo como um sólido semi-infinito, elástico, homogêneo e isótropo, que está submetido à ações estáticas horizontais segundo duas direções ortogonais entre si e vertical atuando na sua superfície. As forças de corpo são desprezadas.

5.2.2 Representação Integral

A equação integral indicada na Eqs. (5.1b) associada às soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti é a representação algébrica do problema em questão.

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, s) p_j(s) d\Gamma$$

ou,

$$u_i = \sum_{el=1}^{nel} \int_{\Omega_{el}} u_{ij}^*(p, s) p_j(s) d\Omega_{el}(s) \quad (5.1a-b)$$

p_j é a componente da força de superfície na direção j , u_i é a componente do deslocamento na direção i ; Ω_{el} é o domínio do elemento de contorno; i e j variam de 1 à 3; $u_{ij}^*(p, s)$ representa as soluções fundamentais do problema de Boussinesq-Cerruti, já explicitadas no subitem 2.3.1, do capítulo 2.

Admitindo que as forças de superfície sofram variação linear no domínio dos elementos de contorno triangulares, então, sendo: ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 as coordenadas homogêneas e $\{p_n^m\}$, as forças de superfície nodais definidas no nó $n=1, 2, 3$ do elemento, $m=1, 2, 3$ indica, as coordenadas ou graus de liberdade (GDL) em cada nó do elemento triangular, vide Fig. 5.3, obtém-se a Eq. (5.2):

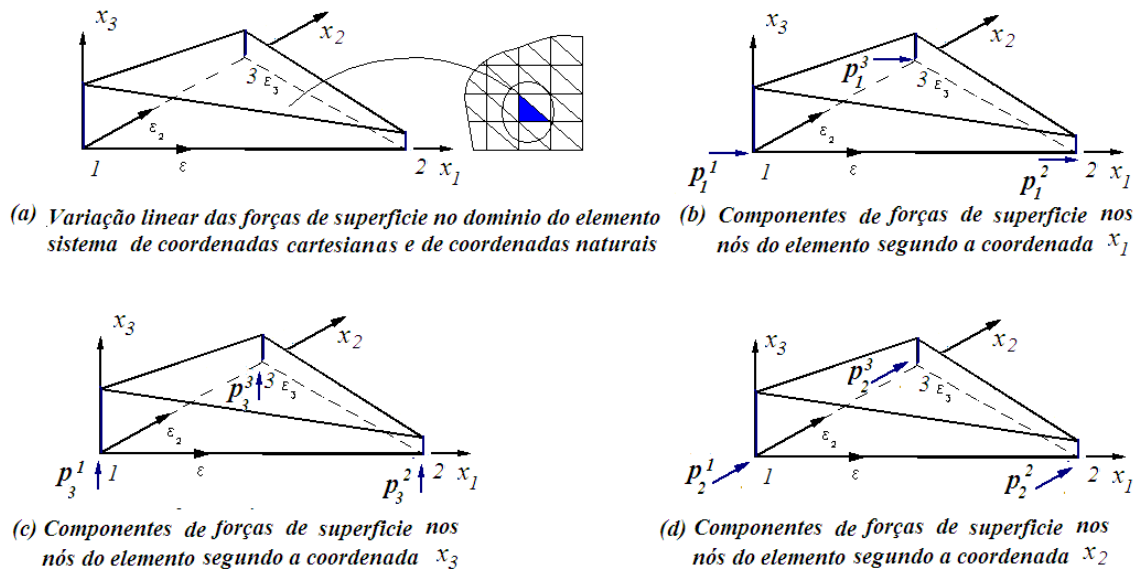


Figura 5.3 - Elemento triangular

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Da explicitação da integral da Eq. (5.1) para o elemento de contorno el , considerando os três GDL em cada nó desse elemento, resulta:

$$\begin{Bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \end{Bmatrix} = \int_{\Omega_{el}} \begin{bmatrix} u_{11}^*(p,s) & u_{12}^*(p,s) & u_{13}^*(p,s) \\ u_{21}^*(p,s) & u_{22}^*(p,s) & u_{23}^*(p,s) \\ u_{31}^*(p,s) & u_{32}^*(p,s) & u_{33}^*(p,s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \\ p_3(s) \end{Bmatrix} d\Omega_{el} \quad (5.3)$$

Substituindo a Eq. (5.2) na Eq. (5.3), obtém-se a representação integral de um elemento em coordenadas homogêneas. Sendo considerados todos os elementos de contorno obtém-se a equação para todo o contorno do solo em coordenadas homogêneas:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{el=1}^{nel} \int_{\Gamma_{el}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \xi_1 \\ \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \xi_2 \\ \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \xi_3 \end{bmatrix}_{(el)} d\Gamma_e \begin{Bmatrix} \{p^1\} \\ \{p^2\} \\ \{p^3\} \end{Bmatrix}_{(el)} \quad (5.4)$$

A Eq. (5.4) pode ser reescrita como indicado na Eq. (5.5) onde $[\tilde{g}_{in}]_{(el)} = \int_{\Gamma_{el}} \begin{bmatrix} u_{i1}^* & u_{i2}^* & u_{i3}^* \end{bmatrix} \xi_n d\Gamma_{el}$ e cada vetor, $\{p^n\} = [p_1^n \ p_2^n \ p_3^n]^T$ sendo $n=1, 2, 3$, os nós de cada elemento de contorno e $i=1, 2, 3$ as coordenadas em cada ponto fonte.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{el=1}^{nel} \begin{bmatrix} [\tilde{g}_{11}] & [\tilde{g}_{12}] & [\tilde{g}_{13}] \\ [\tilde{g}_{21}] & [\tilde{g}_{22}] & [\tilde{g}_{23}] \\ [\tilde{g}_{31}] & [\tilde{g}_{32}] & [\tilde{g}_{33}] \end{bmatrix}_{(el)} \begin{Bmatrix} \{p_1^n\} \\ \{p_2^n\} \\ \{p_3^n\} \end{Bmatrix}_{(el)} \quad (5.5)$$

As coordenadas homogêneas ξ_n podem ser escritas em função das coordenadas cartesianas, como indicado na Eq. (5.6), onde:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

sendo: $A_k = (y_i - y_j)$, $B_k = (x_j - x_i)$ e $C_k = (x_i y_j - x_j y_i)$ constantes associadas às funções de forma que são, por sua vez, associadas respectivamente aos nós do elemento triangular de contorno, onde: $k=1, 2, 3$. x_i, y_i e x_j, y_j com $i=2,3,1$ e $j=3,1,2$ representam as coordenadas daqueles nós.

Sendo: x_s e y_s as coordenadas do ponto fonte s em relação ao sistema oxy e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ suas coordenadas em relação ao sistema $o\bar{x}\bar{y}$, vide Fig.5.4, então:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

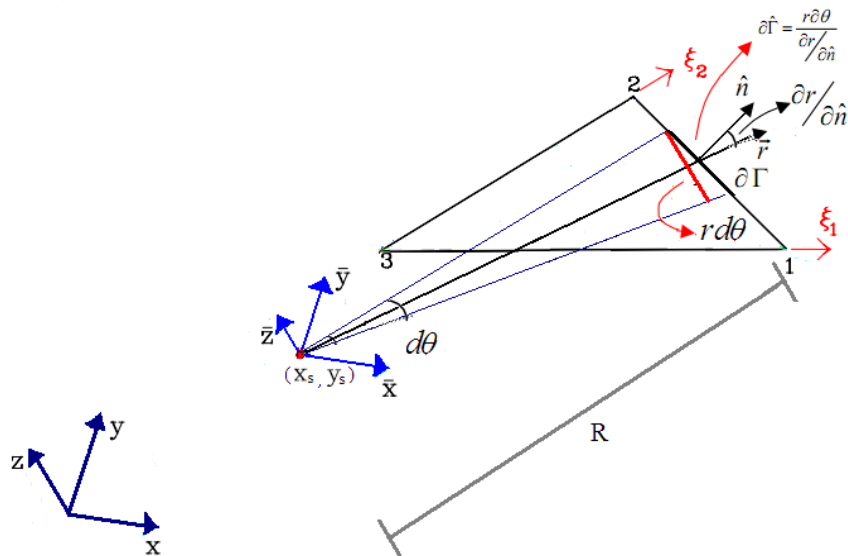


Figura 5.4 - Definição dos sistemas de coordenadas para a integração singular
(Adaptada de Barbirato, 1991)

Desse modo as coordenadas naturais são referidas ao sistema $o\bar{x}\bar{y}$ através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde: $D_k = A_k x_s + B_k y_s + C_k$ e $k=1,2,3$.

Substituindo adequadamente a Eq. (5.5) na Eq. (5.8), as integrais $[\tilde{g}_{in}]_{(el)}$ são referidas ao sistema $o\bar{x}\bar{y}$. Assim:

$$[\tilde{g}_{in}]_{(el)} = \begin{bmatrix} \{\Xi_{i1}\}^T & \{\Xi_{i2}\}^T & \{\Xi_{i3}\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ D_n \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\text{com: } \{\Xi_{ij}\}^T = \int_{\Omega_{el}} [\bar{x} \quad \bar{y} \quad 1] \mu_{ij}^* d\Omega_{el} \text{ e } [\tilde{g}_{in}]_{(el)} = \begin{bmatrix} g_{i(3n-2)} \\ g_{i(3n-1)} \\ g_{i(3n-0)} \end{bmatrix}.$$

Em PAIVA (1993), vê-se a transformação da integração analítica Eq. (5.1b) sobre o domínio Ω_{el} em uma integral equivalente, que requer apenas integração ao longo do contorno do elemento Γ_{el} , isto é, ao longo dos lados do triângulo. Tal procedimento requer o emprego do sistema polar, seguido da integração ao longo de r , além de relações geométricas entre os cossenos diretores do raio-vetor e da normal ao longo do perímetro dos lados do elemento de contorno.

Tendo em vista a aplicação da transformação da integração acima referida, tem-se (vide Fig. 5.4) as seguintes relações: $\bar{x} = r \cos \theta$, $\bar{y} = r \sin \theta$ e $d\Omega_{el} = r dr d\theta$, que levadas na Eq. (5.9), resulta:

$$\{\Xi_{i1}\}^T = \int_0^R \int_0^{2\pi} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] u_{ij}^* r dr d\theta \quad (5.10)$$

Das relações geométricas observadas na Fig. 5.4 conclui-se que o diferencial angular $d\theta$ pode ser escrito em função do diferencial de contorno do elemento $d\Gamma_{el}$,

através da expressão Eq. (5.11), na qual $\cos \varphi = \left(n_x \frac{dR}{dx} + n_y \frac{dR}{dy} \right)$:

$$d\theta = \cos \varphi \frac{d\Gamma_e}{R} \quad (5.11)$$

onde: n_x e n_y são, na ordem, os versores de direção da normal ao contorno do elemento de contorno; R é a distância do ponto fonte ao ponto campo.

Substituindo a Eq. (5.11) na Eq. (5.10), resulta:

$$\{\Xi_{ij}\}^T = \int_0^R \int_{\theta} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \mu_{ij}^* \frac{\cos \varphi}{R} dr d\Gamma_{el} \quad (5.12)$$

As integrações indicadas na Eq. (5.12) são iniciadas calculando-se as integrações ao longo do raio vetor r e em seguida as integrais no contorno do elemento de contorno. Após esses cálculos são conhecidos todos os elementos da matriz da Eq. (5.5).

$$g_{11} = \{\Xi_{11}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{11}\}^T = \int_0^R \int_{\theta} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu + \nu r_{,1}^2}{2\pi G} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{12} = \{\Xi_{12}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{12}\}^T = \int_0^R \int_{\theta} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{\nu}{2\pi G r} r_{,1} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{13} = \{\Xi_{13}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{13}\}^T = \int_0^R \int_{\theta} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi G r} r_{,1} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{14} = \{\Xi_{11}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{11}\}^T = \int_0^R \int_{\theta} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu + \nu r_{,1}^2}{2\pi G} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{15} = \{\Xi_{12}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{12}\}^T = \int_0^R \int_{\theta} [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{\nu}{2\pi G r} r_{,1} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{16} = \{\Xi_{13}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{13}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,1} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{17} = \{\Xi_{11}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{11}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu + \nu r_{,1}^2}{2\pi G} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{18} = \{\Xi_{12}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{12}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{\nu}{2\pi Gr} r_{,1} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{19} = \{\Xi_{13}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{13}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,1} dr d\Gamma_e$$

$$g_{21} = \{\Xi_{21}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{21}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{\nu}{2\pi Gr} r_{,1} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{22} = \{\Xi_{22}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{22}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu + \nu r_{,2}^2}{2\pi Gr} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{23} = \{\Xi_{23}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{23}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,2} dr d\Gamma_e$$

$$g_{24} = \{\Xi_{21}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{21}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{\nu}{2\pi Gr} r_{,1} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{25} = \{\Xi_{22}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{22}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu + \nu r_{,2}^2}{2\pi Gr} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{26} = \{\Xi_{23}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{23}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{27} = \{\Xi_{21}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{21}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{\nu}{2\pi Gr} r_{,1} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{28} = \{\Xi_{22}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{22}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu + \nu r_{,2}^2}{2\pi Gr} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{29} = \{\Xi_{23}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{23}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{31} = \{\Xi_{31}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{31}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,1} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{32} = \{\Xi_{32}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{32}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{33} = \{\Xi_{33}\}^T \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{33}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu}{2\pi Gr} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{34} = \{\Xi_{31}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{31}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,1} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{35} = \{\Xi_{32}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{32}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{36} = \{\Xi_{33}\}^T \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{33}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu}{2\pi Gr} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{37} = \{\Xi_{31}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{31}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,1} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{38} = \{\Xi_{32}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{32}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{(0,5-\nu)}{2\pi Gr} r_{,2} dr d\Gamma_{el}$$

$$g_{39} = \{\Xi_{33}\}^T \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ com } \{\Xi_{33}\}^T = \int_0^R \int_0^\theta [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad 1] \frac{1-\nu}{2\pi Gr} dr d\Gamma_{el} \quad (5.13a-i)$$

5.3 INTERAÇÃO SOLO-SAPATA

Os sistemas reativos e a descrição cinemática da interação solo-sapata será representada matematicamente a partir das seguintes hipóteses:

- a) O contato entre a sapata e a superfície do solo é ideal, isto é, sem deslocamentos relativos na superfície de interação;
- b) Sendo rígido o elemento estrutural de fundação, a cinemática dos pontos da interface sapata-solo desdobrar-se-á em duas descrições:

- b1) Translação pura (caso de carregamento centrado) e

b2) Translação com rotação (carregamento excêntrico);

a) A ligação sapata-pilar deve oferecer condições de neutralizar os deslocamentos axiais decorrentes da torção no pilar, impedindo o empenamento da seção engastada.

Efetuada o cálculo das integrais indicadas na Eq. (5.13) para todos os elementos, obtém-se a representação algébrica do solo através da expressão $\{\bar{U}_s\} = [G_s]\{\bar{P}_s\}$, onde: $\{\bar{P}_s\}$ e $\{\bar{U}_s\}$ são, respectivamente, vetores que contêm as forças de superfície e os deslocamentos de todos os nós dos elementos de contorno discretizados na superfície do solo.

Sendo $[\bar{T}] = [G_s]^{-1}$ obtém-se a Eq. (5.14), na qual as forças de superfície são escritas em função dos deslocamentos.

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{T}]\{\bar{U}_s\} \quad (5.14)$$

Em geral, nos edifícios, a estrutura de fundação está submetida tanto a translação quanto à rotação segundo as 3 coordenadas, vide Fig. 5.5. Quando a fundação é admitida rígida, os deslocamentos horizontal em x , horizontal em y e vertical em z de um ponto q de coordenadas (x, y) da sapata sp podem ser escritos como: $u_{sq}(x, y) = u_{spp} - (y_q - y_{spp})\varphi_{spp}$, $v_{sq}(x, y) = v_{spp} + (x_q - x_{spp})\varphi_{spp}$ e $w_{sq}(x, y) = w_{spp} + (y_q - y_{spp})\theta_{spp} - (x_q - x_{spp})\phi_{spp}$. Os deslocamentos (lineares e angulares): u_{spp} , v_{spp} , w_{spp} , θ_{spp} , ϕ_{spp} e φ_{spp} são, na ordem, o deslocamento horizontal em x , horizontal em y , vertical em z ; rotação em x ; rotação em y e rotação em z no nó spp , isto é no nó de ligação da sapata sp com o pilar p que nela se apoia. Eles compõem o vetor $\{\hat{U}_{spp}\}$; x_{spp} e y_{spp} são as coordenadas desse ponto ou de locação do pilar, na sapata sp , no sistema de coordenadas do solo, cujo eixo z tem direção vertical e sentido de cima para baixo.

Escrevendo $\{\bar{U}_s\}$ para cada um dos pontos (nós) discretizados no solo, tem-se:

$$\{\bar{U}_s\}^T = \left[\{\bar{U}_{s1}\}^T \quad \{\bar{U}_{s2}\}^T \quad \cdots \quad \{\bar{U}_{sq}\}^T \quad \cdots \quad \{\bar{U}_{snn}\}^T \right] \quad (5.15)$$

onde: $\{\bar{U}_{sq}\}^T = [u_{sq} \quad v_{sq} \quad w_{sq} \quad \theta_{sq} \quad \varphi_{sq} \quad \phi_{sq}]$, q representa o nó genérico e varia de 1 a nno , sendo nno o total de nós (pontos) discretizados no solo.

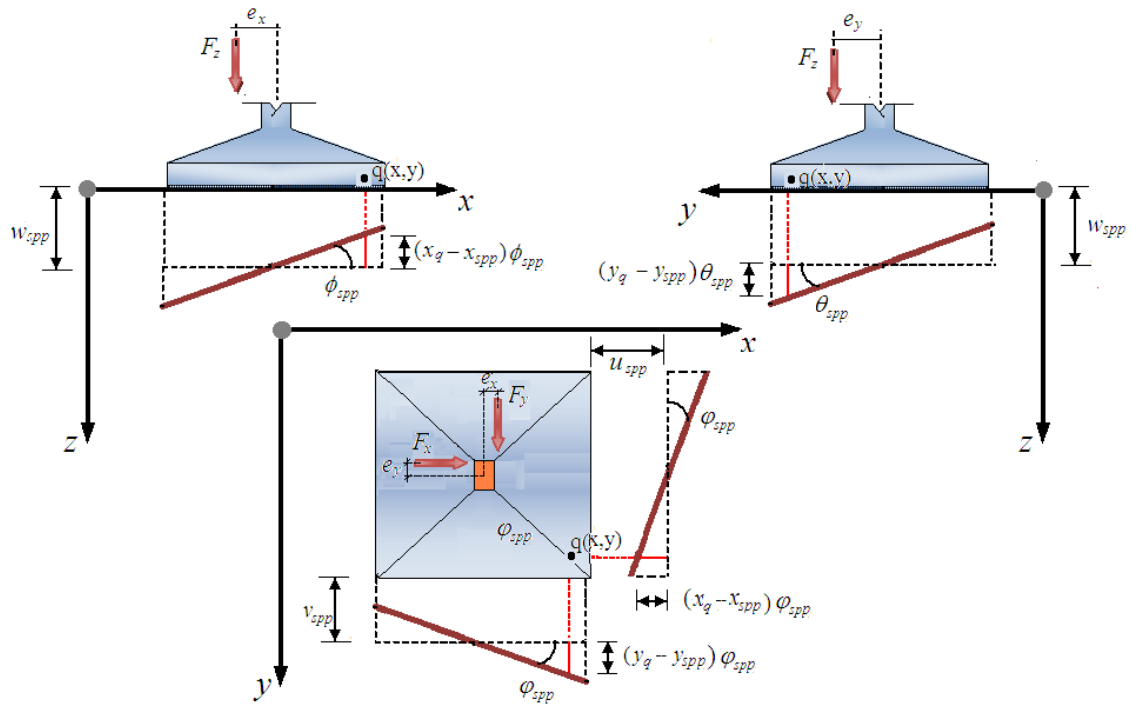


Figura 5.5 - Estrutura de fundação submetida aos efeitos de translação e rotação

Escrevendo o vetor $\{\hat{U}_s\}$ para cada sapata da fundação, tem-se:

$$\{\hat{U}_s\}^T = \left[\{\hat{U}_{s1}\}^T \quad \{\hat{U}_{s2}\}^T \quad \dots \quad \{\hat{U}_{ssp}\}^T \quad \dots \quad \{\hat{U}_{snsp}\}^T \right] \quad (5.16)$$

onde: $\{\hat{U}_{ssp}\}^T = [u_{spp} \quad v_{spp} \quad w_{spp} \quad \theta_{spp} \quad \phi_{spp} \quad \phi_{spp}]$, sp representa a sapata genérica e varia de 1 a nsp , sendo nsp o total de sapatas da fundação.

Com as definições dadas na Eq. (5.15) e na Eq. (5.16), tem-se:

$$\{\bar{U}_s\} = [D] \{\hat{U}_s\} \quad (5.17)$$

$$\text{onde: } [D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [D_{sp}] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [D_{nsp}] \end{bmatrix}, [D_{sp}] = \begin{bmatrix} [D_{1sp}] \\ [D_{2sp}] \\ \dots \\ [D_{qsp}] \\ \dots \\ [D_{nnosp}] \end{bmatrix} \text{ e } [D_{qsp}] = \begin{bmatrix} [I] & [D_{Rsp}] \end{bmatrix},$$

com: $[D_{Rsp}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(y_q - y_{sp})\varphi_{sp} \\ 0 & 0 & (x_q - x_{sp})\varphi_{sp} \\ (y_q - y_{sp})\theta_{sp} & -(x_q - x_{sp})\phi_{sp} & 0 \end{bmatrix}$. Notar que a dimensão da

matriz $[D]$ é $(3nnos.nsap \times 6nsap)$, da matriz $[D_{sp}]$ é $(3nnos \times 6)$, da matriz $[D_{qsp}]$ é (3×6) enquanto a matriz $[I]$ é de ordem 3.

Combinando a Eq.(5.14) com a Eq.(5.17), obtém-se a representação algébrica do solo em termos das forças de superfície por unidade de área:

$$\{P_s\} = [H]\{\hat{U}_s\} \quad (5.18)$$

onde $[H] = [T][D]$.

Sendo as forças nodais concentradas $\{F_s\}$ obtidas pelo produto $[Q]\{P_s\}$, onde $[Q]$ é uma matriz de transformação quadrada de ordem $3nnos$. Tem-se:

$$\{F_s\} = [Q][P_s] = [Q][H]\{\hat{U}_s\} = [R]\{\hat{U}_s\} \quad (5.19a-c)$$

sendo: $[R] = [Q][H]$.

Para o elemento de contorno el , tem-se;

$$\{\bar{F}_{el}\} = [Q_{el}][\bar{P}_{el}]$$

sendo: $\{\bar{F}_{el}\}^T = \{\{\bar{F}_{el}^1\}^T \quad \{\bar{F}_{el}^2\}^T \quad \{\bar{F}_{el}^3\}^T\}$ e $\{\bar{P}_{el}\}^T = \{\{\bar{P}_{el}^1\}^T \quad \{\bar{P}_{el}^2\}^T \quad \{\bar{P}_{el}^3\}^T\}$ em que cada vetor-elemento $\{\bar{F}_{el}^i\}$ e $\{\bar{P}_{el}^i\}$ ($i=1, 2, 3$) representa, respectivamente, as forças concentradas e as de superfície em cada nó do elemento de contorno, pois o índice sobescrito indica o elemento e o sobrescrito o nó do elemento considerado. Por sua vez $\{\bar{F}_{el}^i\} = [\bar{F}_{xel}^i \quad \bar{F}_{yel}^i \quad \bar{F}_{zel}^i]^T$ e $\{\bar{P}_{el}^i\} = [\bar{P}_{xel}^i \quad \bar{P}_{yel}^i \quad \bar{P}_{zel}^i]^T$, onde os índices subscritos:

xel, yel, zel , indicam a direção das forças. A matriz $[Q_{el}] = \frac{A_{el}}{12} \begin{bmatrix} 2[I] & [I] & [I] \\ [I] & 2[I] & [I] \\ [I] & [I] & 2[I] \end{bmatrix}$, na

qual: A_{el} é a área do elemento e $[I]$ é de ordem 3.

As forças atuantes no solo, Eq. (5.19) sob cada sapata produzem individualmente resultantes de forças e momentos nos respectivos nós *spp* que são definidas como:

$$\{\hat{F}_s\} = [\hat{R}]\{\hat{U}_s\} \quad (5.20)$$

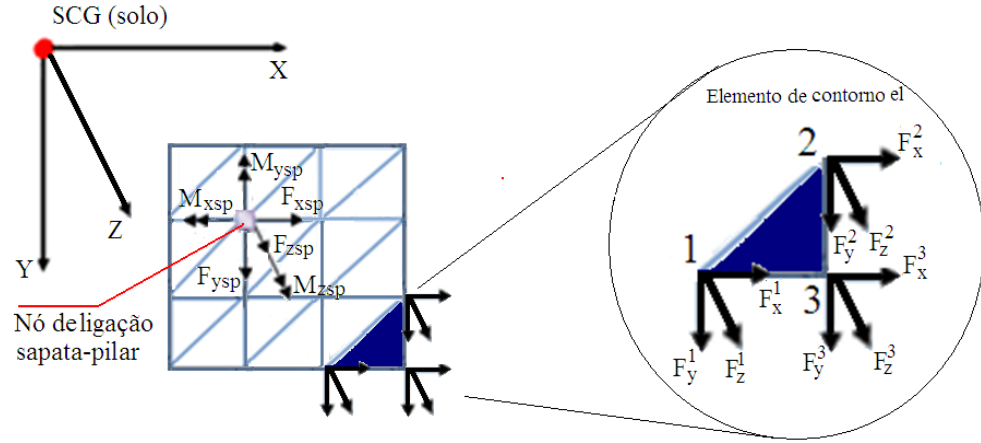


Figura 5.6 - Contribuição do elemento *el* no cálculo das forças e momentos resultantes no nó de ligação sapata pilar

onde: $[\hat{R}] = [C][R]$.

A forma explícita de $[C]$ da Eq. 5.21 fica:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [C_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [C_{sp}] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [C_{nsap}] \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

onde a submatriz da *sp*-ésima sapata é $[C_{sp}] = [D_{sp}]^T$.

Na Eq. (5.22) está indicado o cálculo das forças e momentos resultantes no nó de ligação sapata-pilar da sapata *sp*, a partir da contribuição de cada elemento dessa sapata.

$$\begin{Bmatrix} F_{xsp} \\ F_{ysp} \\ F_{zsp} \\ M_{xsp} \\ M_{ysp} \\ M_{zsp} \end{Bmatrix} = \sum_{el=1}^{nel} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\delta y^1 & 0 & 0 & -\delta y^2 & 0 & 0 & -\delta y^3 \\ 0 & 0 & -\delta x^1 & 0 & 0 & -\delta x^2 & 0 & 0 & -\delta x^3 \\ \delta y^1 & \delta x^1 & 0 & \delta y^2 & \delta x^2 & 0 & \delta y^3 & \delta x^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xel}^1 \\ F_{yel}^1 \\ F_{zel}^1 \\ F_{xel}^2 \\ F_{yel}^2 \\ F_{zel}^2 \\ F_{xel}^3 \\ F_{yel}^3 \\ F_{zel}^3 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Onde: $\delta y^1 = y_{ssp} - y_{el}^1$, $\delta x^1 = x_{ssp} - x_{el}^1$, $\delta y^2 = y_{ssp} - y_{el}^2$, $\delta x^2 = x_{ssp} - x_{el}^2$, $\delta y^3 = y_{ssp} - y_{el}^3$ e $\delta x^3 = x_{ssp} - x_{el}^3$

5.4 ACOPLAMENTO SOLO-ESTRUTURA

A montagem do sistema final de equações para o problema de interação pórtico-solo requer o acoplamento das contribuições de ambas as partes. Esse acoplamento se caracteriza pela compatibilização dos deslocamentos e do equilíbrio de forças em cada nó *ssp* (de ligação sapata pilar), respectivamente, com os deslocamentos e forças do nó *k* da estrutura ao qual se liga o pilar que se apóia na sapata *sp*.

Como as forças resultantes calculadas no nó *ssp* de cada sapata resultam das ações atuantes no solo, necessita-se inverter o sentido de cada uma delas para que sejam obtidas as forças reativas do solo na sapata, pois são estas que garantirão o equilíbrio de forças e momentos em cada apoio da estrutura, vide Fig. 5.7. A inversão pode ser assim realizada:

$$\{\hat{F}_{ssp}\} = [\Delta_{sr}] \{\tilde{F}_{ssp}\} \quad (5.23)$$

onde: $\{\hat{F}_{ssp}\}$ é o vetor das resultantes de forças atuantes no solo, calculadas para o nó *sp* de cada sapata, $\{\tilde{F}_{ssp}\}$ é o vetor das forças oriundas do solo que atuam na base do pilar que se liga à sapata, e $[\Delta_{sr}] = -1[I]$, com $n = 6$.

Como as forças envolvidas no equilíbrio de cada nó de ligação sapata-pilar estão referidas a sistemas de coordenadas diferentes (o SCG do solo e o SCG da estrutura), é conveniente proceder a uma unificação de sistemas mantendo-se o da estrutura. Isto é feito através da expressão:

$$\{\tilde{F}_{spp}\} = [\Delta_{se}]\{F_{spp,est}\} \quad (5.24)$$

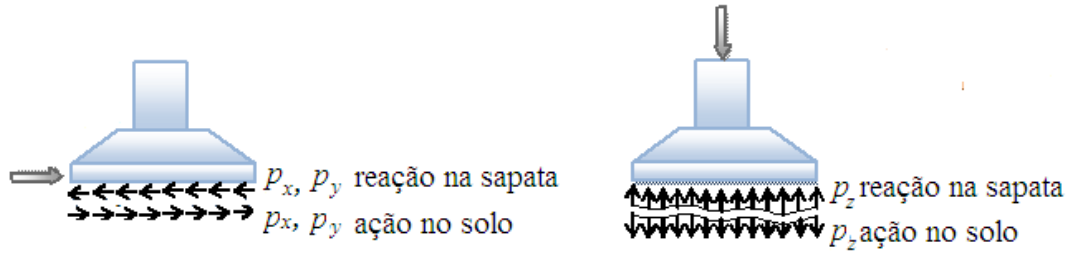


Figura 5.7 - Ação e reação

onde: $\{F_{spp,est}\}$ é o vetor das forças reativas do solo referidas ao SCG da estrutura que atuam na extremidade do pilar que se liga à sapata sp e $[\Delta_{se}]$ é a matriz quadrada com $n = 6$, dada por:

$$[\Delta_{se}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, o vetor $\{F_{spp,est}\}$ pode ser obtido diretamente do vetor $\{\hat{F}_{spp}\}$, através da expressão:

$$\{\hat{F}_{ssp}\} = [\Delta_{sr}][\Delta_{se}]\{F_{spp,est}\}$$

ou,

$$\{F_{spp,est}\} = -[\Delta_{se}]\{\hat{F}_{ssp}\} \quad (5.25)$$

Para aplicação da compatibilidade de deslocamentos é também conveniente reescrever os deslocamentos no nó de ligação sapata pilar da sapata sp . Isso pode ser feito através da expressão:

$$\{U_{spp,est}\} = [\Delta_{se}]\{U_{ssp}\} \quad (5.26)$$

Assim, os vetores dos esforços e dos deslocamentos, referidos ao SCG da estrutura, associados ao nó p , de cada sapata sp e ao nó κ que é correspondente, no pórtico, à extremidade do pilar que se apóia nessa sapata, envolvidos no problema, são, na ordem:

$$\begin{aligned} \{U_{spp,est}\}^T &= [u_{spp,est} \quad v_{spp,est} \quad w_{spp,est} \quad \theta_{spp,est} \quad \phi_{spp,est} \quad \varphi_{spp,est}] \\ \{F_{spp,est}\}^T &= [F_{xspp,est} \quad F_{yspp,est} \quad F_{zspp,est} \quad M_{xspp,est} \quad M_{yspp,est} \quad M_{zspp,est}] \\ \{U_k\}^T &= [U_k \quad V_k \quad W_k \quad \theta_k \quad \phi_k \quad \varphi_k] \\ \{F_k\}^T &= [F_{xk} \quad F_{yk} \quad F_{zk} \quad M_{xk} \quad M_{yk} \quad M_{zk}] \end{aligned} \quad (5.27a-d)$$

5.4.1 Análise de Interação de Pórtico

O equacionamento do sistema algébrico de pórticos com a incorporação das forças (reativas do solo) atuantes nos nós de interface pórtico-sapata-solo será apresentado para dois casos: a) sapatas apoiando apenas uma barra e b) sapatas apoiando mais de uma barra.

Na intenção de diminuir a quantidade de equações a serem utilizadas e o tamanho da equação final, que é a representação algébrica do problema, e por não trazer prejuízos para o desenvolvimento a ser realizado, optou-se pela utilização de um modelo de pórtico plano.

- **AISE de Pórtico com uma barra chegando à sapata**

Escrevendo a representação algébrica de cada uma das barras, do pórtico plano mostrado na Fig. 5.8 e impondo a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio nodais

e, utilizando as relações força-deslocamentos abaixo indicadas, obtém-se o sistema algébrico da estrutura.

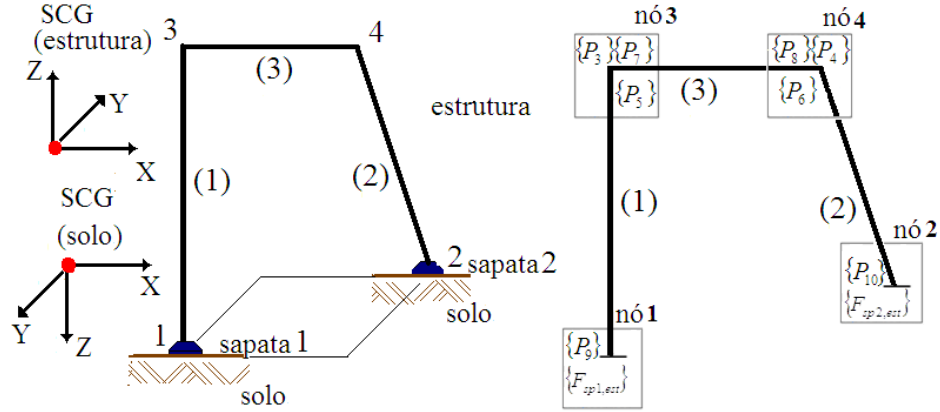


Figura. 5.8 – Pórtico com uma barra apoiada por sapata

Expressões que exprimem compatibilidade de deslocamentos

$$\{U_1\} = \{U_{sp1,est}\}$$

$$\{U_2\} = \{U_{sp2,est}\}$$

$$\{U_3\} = \{U_5\} = \{U_7\}$$

$$\{U_4\} = \{U_6\} = \{U_8\} \quad (5.28a-d)$$

Expressões que exprimem equilíbrio nodal.

$$\{P_9\} + \{F_{sp1,est}\} = \{0\}$$

$$\{P_5\} + \{P_7\} = \{F_3\}$$

$$\{P_6\} + \{P_8\} = \{F_4\}$$

$$\{P_{10}\} + \{F_{sp2,est}\} = \{0\} \quad (5.29)$$

Expressões que exprimem as relações força-deslocamentos do solo:

$$\begin{aligned}
\{P_{sp1,est}\} &= [R_{sp11}] \{U_{sp1,est}\} + [R_{sp12}] \{U_{sp2,est}\} \\
\{P_{sp2,est}\} &= [R_{sp21}] \{U_{sp2,est}\} + [R_{sp22}] \{U_{sp2,est}\}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Representação algébrica para a AISE do pórtico mostrado na Fig. 5.8.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [H_{11}^{(1)}] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & -[G_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & -[G_{11}^{(1)}] & [0] \\ [H_{21}^{(1)}] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & -[G_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & -[G_{21}^{(1)}] & [0] \\ [0] & [H_{32}^{(2)}] & [H_{33}^{(2)}] & [0] & [0] & -[G_{32}^{(2)}] & -[G_{33}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [H_{43}^{(3)}] & [H_{44}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] & -[G_{43}^{(3)}] & [0] & -[G_{44}^{(3)}] \\ [0] & [H_{22}^{(2)}] & [H_{23}^{(2)}] & [0] & [0] & -[G_{22}^{(2)}] & -[G_{23}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [H_{33}^{(3)}] & [H_{34}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] & -[G_{33}^{(3)}] & [0] & -[G_{34}^{(3)}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [I] & [0] & [0] \\ [R_{sp11}] & [0] & [0] & [R_{sp12}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] \\ [R_{sp21}] & [0] & [0] & [R_{sp22}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{U_4\} \\ \{P_6\} \\ \{P_7\} \\ \{P_8\} \\ \{P_9\} \\ \{P_5\} \\ \{P_{10}\} \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{F_2\} \\ \{0\} \\ \{F_3\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Capítulo VI

EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS: ELASTODINÂMICA

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as equações integrais governantes dos problemas dinâmicos relativos aos efeitos presentes nas barras de pórticos. Serão utilizadas as soluções dos problemas fundamentais e obtidas as representações algébricas desses efeitos. São válidas as hipóteses estabelecidas para a análise estática, exceto a que se refere à aplicação das cargas. Aqui, os efeitos da energia cinética serão considerados. Na descrição do problema será inicialmente abordado o efeito axial e de torção uniforme em seguida o efeito da flexão em y e da flexão em z .

6.2. O EFEITO AXIAL

Seja a barra prismática de material com densidade ρ , módulo de Young E e seção transversal A , sob a ação do carregamento dinâmico axial distribuído $p_x(x,t)$, indicada na Fig. 6.1a.

- **O problema real**

A equação governante é escrita a partir do equilíbrio dinâmico do elemento da barra de comprimento dx dela isolado, vide Fig. 6.1b.

Do equilíbrio de forças, tem-se:

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = -p_x(x,t) + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

onde, $N(x,t)$ representa o esforço normal, $u(x,t)$ e $\partial^2 u(x,t)/\partial t^2$ são, respectivamente, o deslocamento e a aceleração segundo o eixo x , no instante t .

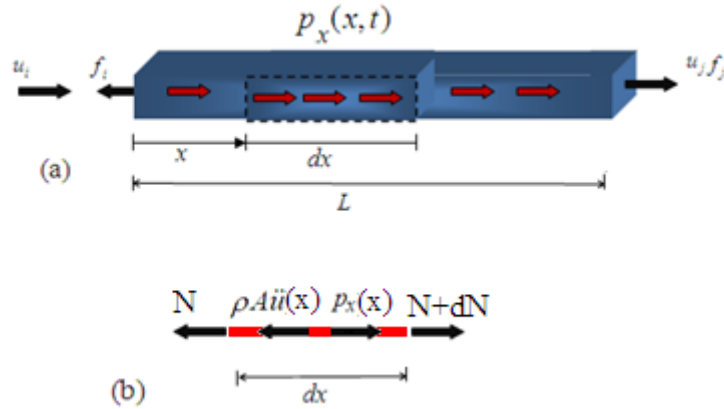


Figura 6.1. Barra sob efeito dinâmico axial

A relação força-deformação é:

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (6.2)$$

Substituindo-se a Eq. (6.2) na Eq. (6.1), obtém-se a equação governante do problema.

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -p_x(x,t) \quad (6.3)$$

Dividindo a Eq. (6.3) por EA e fazendo $k_x^2 = \rho/E$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - k_x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{p_x(x,t)}{EA} \quad (6.4)$$

Para carregamentos harmônicos no tempo com frequência de excitação ω , $p_x(x, t) = p_x(x)e^{i\omega t} = \tilde{p}_x(x, \omega)$, a resposta $u(x, t) = u(x)e^{i\omega t} = \tilde{u}(x, \omega)$ é também harmônica. Com a intenção de simplificar a notação faz-se: $\tilde{p}_x(x) = \tilde{p}_x(x, \omega)$ e $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x, \omega)$, que são o esforço e o deslocamento axiais, funções apenas de x e de ω .

Com base na Eq. (6.4) obtém-se a equação governante do problema real no domínio da frequência,

$$\frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} - \tilde{k}_x^2 \tilde{u}(x) = -\frac{\tilde{p}_x(x)}{EA} \quad (6.5)$$

onde, $\tilde{k}_x^2 = \omega^2 \rho / E$.

• O problema fundamental

No problema fundamental o carregamento consiste em carga pontual harmônica $\tilde{p}_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ atuando no ponto-fonte, $\hat{x}$. Por analogia, obtém-se a partir da Eq. (6.5) a EDP governante do problema fundamental do efeito axial fica:

$$\frac{d^2 \tilde{u}^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \tilde{k}_x^2 \tilde{u}^*(x, \hat{x}) = -\frac{\delta(x, \hat{x})}{EA} \quad (6.6)$$

Segundo ANTES *et al.* (2004), a solução fundamental da Eq. (6.6) é:

$$\tilde{u}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\tilde{k}_x EA} \text{sen}(\tilde{k}_x r) \quad (6.7)$$

Ainda por analogia ao problema real, obtém-se a relação esforço-deslocamento do fundamental, a partir da Eq. (6.2):

$$\tilde{N}^*(x, \hat{x}) = EA \frac{d\tilde{u}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (6.8)$$

O esforço normal fundamental $\tilde{N}^*$ é obtido utilizando-se a Eq. (6.7) e (6.8):

$$\tilde{N}^*(x, \hat{x}) = -\frac{r_{,x}}{2} \cos(\tilde{k}_x r) \quad (6.9)$$

onde: $r = |x - \hat{x}|$, $dr/dx = r_{,x} = \text{sgn}(x - \hat{x})$.

- **A representação integral**

A equação integral pode ser estabelecida utilizando-se a técnica dos resíduos TRP onde a equação governante do problema real Eq. (6.5) é ponderada pelo deslocamento fundamental $\tilde{u}^*$, Eq. (6.7):

$$\int_0^L \left[\frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} + \tilde{k}_x^2 \tilde{u}(x) + \frac{\tilde{p}_x(x)}{EA} \right] \tilde{u}^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.10)$$

Após duas integrações por partes na Eq. (6.10) e a adequada utilização da Eq. (6.2) e da Eq. (6.8), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[-\tilde{u}(x) \tilde{N}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[\tilde{N}(x) \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + EA \int_0^L \left[\frac{d^2 \tilde{u}^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \tilde{k}_x^2 \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right] \tilde{u}(x) dx = \\ & = - \int_0^L \left[\tilde{p}_x(x) \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right] dx \end{aligned} \quad (6.11)$$

Em seguida, com a substituição da Eq. (6.6) na Eq. (6.11) e a aplicação da propriedade de filtro do delta de Dirac Eq. (2.6b), obtém-se a EI para pontos colocados no domínio do problema.

$$\tilde{u}(\hat{x}) + \left[\tilde{u}(x) \tilde{N}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\tilde{N}(x) \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L = \int_0^L \left[\tilde{p}_x(x) \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right] dx$$

que reescrita na forma mais usual fica:

$$\tilde{u}(\hat{x}) + \left[\tilde{u}(x) \tilde{N}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L = \left[\tilde{N}(x) \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \left[\tilde{p}_x(x) \tilde{u}^*(x, \hat{x}) \right] dx \quad (6.12)$$

- **A representação algébrica**

Fazendo a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, ou seja, no contorno, quando $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0}(0 + \xi)$ e $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0}(L - \xi)$, na Eq. (6.12), e efetuando as integrações nos limites indicados nesta equação, tem-se:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(0) - \bar{u}(0)\bar{N}^*(0, 0 + \xi) + \bar{u}(L)\bar{N}^*(L, 0 + \xi) = \\ = -\bar{N}(0)\bar{u}^*(0, 0 + \xi) + \bar{N}(L)\bar{u}^*(L, 0 + \xi) + \int_0^L [\bar{p}_x(x)\bar{u}^*(x, 0)]dx \end{aligned} \quad (6.13)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(L) - \bar{u}(0)\bar{N}^*(0, L - \xi) + \bar{u}(L)\bar{N}^*(L, L - \xi) = \\ = -\bar{N}(0)\bar{u}^*(0, L - \xi) + \bar{N}(L)\bar{u}^*(L, L - \xi) + \int_0^L [\bar{p}_x(x)\bar{u}^*(x, L)]dx \end{aligned} \quad (6.14)$$

Reescrevendo a Eq. (6.13) e a Eq. (6.14) com notação matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{u}(0) \\ \bar{u}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{N}^*(0, 0 + \xi) & \bar{N}^*(L, 0 + \xi) \\ -\bar{N}^*(0, L - \xi) & \bar{N}^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}(0) \\ \bar{u}(L) \end{Bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\bar{u}^*(0, 0 + \xi) & \bar{u}^*(L, 0 + \xi) \\ -\bar{u}^*(0, L - \xi) & \bar{u}^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}(0) \\ \bar{N}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_x(0) \\ \bar{f}_x(L) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Com a Eq. (6.13) e a Eq. (6.14) calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidos a aplicação da fonte nessas extremidades, obtendo-se a representação algébrica do efeito axial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}(0) \\ \bar{u}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\bar{\alpha}_x \\ -\bar{\alpha}_x & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}(0) \\ \bar{u}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\beta}_x \\ \bar{\beta}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}(0) \\ \bar{N}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_x(0) \\ \bar{f}_x(L) \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_x = \cos(\tilde{k}_x L) / 2, \quad \tilde{\beta}_x = \frac{\sin(\tilde{k}_x L)}{2\tilde{k}_x EA} \quad (6.17a-b)$$

e,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x(0) &= \int_0^L [\tilde{p}_x(x) \tilde{u}^*(x,0)] dx = -\frac{1}{2\tilde{k}_x EA} \int_0^L [\tilde{p}_x(x) \sin(\tilde{k}_x x)] dx \\ \tilde{f}_x(L) &= \int_0^L [\tilde{p}_x(x) \tilde{u}^*(x,L)] dx = -\frac{1}{2\tilde{k}_x EA} \int_0^L [\tilde{p}_x(x) \sin(\tilde{k}_x (-x+L))] dx \end{aligned} \quad (6.18a-b)$$

6.3 A TORÇÃO UNIFORME

Seja a barra prismática sob torção uniforme, que implica que o momento de torção solicitante deve ser constante e o empenamento deve ocorrer livremente.

- O problema real

Na Fig. 6.2b estão mostradas as ações e solicitações dinâmicas.

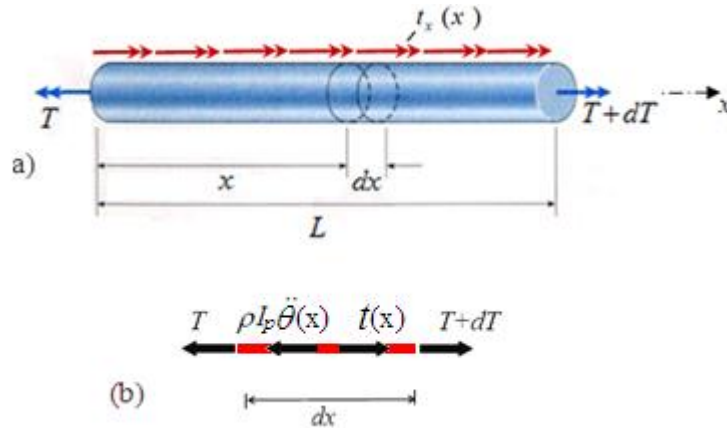


Figura 6.2 – Barra de prismática submetida a torção dinâmica.

Do equilíbrio dinâmico de um elemento da barra, obtém-se:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = -t(x,t) \quad (6.19)$$

onde: $\rho(x,t)$ e I_p representam, respectivamente, a massa específica do material e o momento polar de inércia; $t(x,t)$ e $T(x,t)$ representam, na ordem, o torque aplicado ao longo da barra e o esforço de torção; $\theta(x,t)$ e $\partial^2\theta(x,t)/\partial x^2$ a rotação e a aceleração angular segundo o eixo x , no instante t .

A relação força-deformação é:

$$T(x,t) = GI_t \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \quad (6.20)$$

onde: I_t é o momento de inércia á torção.

Que ao ser combinada com a Eq. (6.19) fica:

$$GI_t \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} - \rho I_p \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = -t_x(x,t) \quad (6.21)$$

ou

$$\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} - k_t^2 \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{t_x(x,t)}{GI_t} \quad (6.22)$$

onde, $k_t^2 = \rho I_p / GI_t$

Quando o problema real estiver no domínio da frequência, então sua equação governante é dada por:

$$\frac{d^2\tilde{\theta}(x)}{dx^2} + \tilde{k}_t^2 \tilde{\theta}(x) = -\frac{\tilde{t}_x(x)}{GI_t} \quad (6.23)$$

onde: $\tilde{k}_t^2 = \rho I_p \omega^2 / GI_t$

• O problema fundamental

Por analogia ao problema real (6.3), a equação governante do problema fundamental no domínio da frequência é dada por:

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \tilde{k}_t^2 \tilde{\theta}^*(x, \hat{x}) = -\frac{\delta(x, \hat{x})}{GI_t} \quad (6.24)$$

A solução fundamental do ângulo de torção Eq. (6.24) em uma barra infinita sob um carregamento pontual harmônico $\tilde{t}_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ atuando no ponto fonte $\hat{x}$, é:

$$\tilde{\theta}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\tilde{k}_t GI_t} \text{sen}(\tilde{k}_t r) \quad (6.25)$$

Além disso, a relação constitutiva momento torçor - ângulo de torção fica:

$$\tilde{T}^*(x, \hat{x}) = GI_t \frac{d\tilde{\theta}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (6.26)$$

Substituindo-se a Eq. (6.25) na Eq. (6.26), obtém-se o torçor fundamental:

$$\tilde{T}^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \cos(\tilde{k}_t r) \quad (6.27)$$

• A representação integral

A representação integral para o ângulo de torção é obtida via TRP ponderando-se a Eq. (6.23) pelo ângulo de torção fundamental, Eq. (6.25):

$$\int_0^L \left[\frac{d^2 \tilde{\theta}(x)}{dx^2} + \tilde{k}_t^2 \tilde{\theta}(x) + \frac{\tilde{t}_x(x)}{GI_t} \right] \tilde{\theta}^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (6.28)$$

Após duas integrações por partes da Eq. (6.28) e a adequada utilização da Eq. (6.20) e da Eq. (6.25), obtém-se a Eq. (6.29).

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\theta}(x) \tilde{T}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\tilde{T}(x) \tilde{\theta}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + GI_t \int_0^L \left[\frac{d^2 \tilde{\theta}^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \tilde{k}_t^2 \tilde{\theta}^*(x, \hat{x}) \right] \tilde{\theta}(x) dx = \\ & - \int_0^L \left[\tilde{t}_x(x) \tilde{\theta}^*(x, \hat{x}) \right] dx \end{aligned} \quad (6.29)$$

Finalmente, com a substituição da Eq. (6.24) na Eq. (6.29), para em seguida aplicar a propriedade de filtro do delta de Dirac, Eq. (2.7b), obtém-se a equação integral para pontos colocados no domínio do problema em estudo.

$$\tilde{\theta}(\hat{x}) + [\tilde{\theta}(x)\tilde{T}^*(x, \hat{x})]_0^L - [\tilde{T}(x)\tilde{\theta}^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L [\tilde{t}_x(x)\tilde{\theta}^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (6.30)$$

• **A representação algébrica**

A representação algébrica é obtida fazendo a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, isto é, no contorno, quando $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$ e $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$ na Eq. (6.30), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} \tilde{\theta}(0) \\ \tilde{\theta}(L) \end{matrix} \right\} + \left[\begin{matrix} -\tilde{T}^*(0, 0 + \xi) & \tilde{T}^*(L, 0 + \xi) \\ -\tilde{T}^*(0, L - \xi) & \tilde{T}^*(L, L - \xi) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \tilde{\theta}(0) \\ \tilde{\theta}(L) \end{matrix} \right\} = \\ & \left[\begin{matrix} -\tilde{\theta}^*(0, 0 + \xi) & \tilde{\theta}^*(L, 0 + \xi) \\ -\tilde{\theta}^*(0, L - \xi) & \tilde{\theta}^*(L, L - \xi) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \tilde{T}(0) \\ \tilde{T}(L) \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tilde{f}_t(0) \\ \tilde{f}_t(L) \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Com as Eq. (6.25) e (6.27), calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidas a aplicação da fonte em cada uma dessas extremidades:

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{\theta}(0) \\ \tilde{\theta}(L) \end{matrix} \right\} + \left[\begin{matrix} -1/2 & -\tilde{\alpha}_t \\ -\tilde{\alpha}_t & -1/2 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \tilde{\theta}(0) \\ \tilde{\theta}(L) \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} 0 & -\tilde{\beta}_t \\ \tilde{\beta}_t & 0 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \tilde{T}(0) \\ \tilde{T}(L) \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tilde{f}_t(0) \\ \tilde{f}_t(L) \end{matrix} \right\} \quad (6.32)$$

Onde

$$\tilde{\alpha}_t = \cos(\tilde{k}_t L) / 2, \quad \tilde{\beta}_t = -\frac{\text{sen}(\tilde{k}_t L)}{2\tilde{k}_t G I_t} \quad (6.33a-b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(0) &= \int_0^L [\tilde{t}_x(x)\tilde{\theta}^*(x, 0)]dx = -\frac{1}{2\tilde{k}_t G I_t} \int_0^L [\tilde{t}_x(x)\text{sen}(\tilde{k}_t x)]dx \\ \tilde{f}_t(L) &= \int_0^L [\tilde{t}_x(x)\tilde{\theta}^*(x, L)]dx = -\frac{1}{2\tilde{k}_t G I_t} \int_0^L [\tilde{t}_x(x)\text{sen}(\tilde{k}_t (-x + L))]dx \end{aligned} \quad (6.34a-b)$$

6.4 A FLEXÃO NA DIREÇÃO Y

Será estudado neste item o problema da flexão na direção y sob as hipóteses da teoria clássica (Euler-Bernoulli) e da Teoria de Timoshenko.

- **O problema real (Euler-Bernoulli)**

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli para o problema dinâmico é admitido que a deformação por cortante e a inércia rotatória sejam desprezadas. Um sistema de referência local (x,y,z) é adotado para o equacionamento, onde (y,z) são os eixos principais de inércia. Seja uma barra prismática submetida a uma flexão em y devido ao carregamento dinâmico $p_z(x,t)$, com seção transversal de área A e material com densidade ρ e módulo de Young E mostrados em um elemento diferencial na Fig. 6.3b.

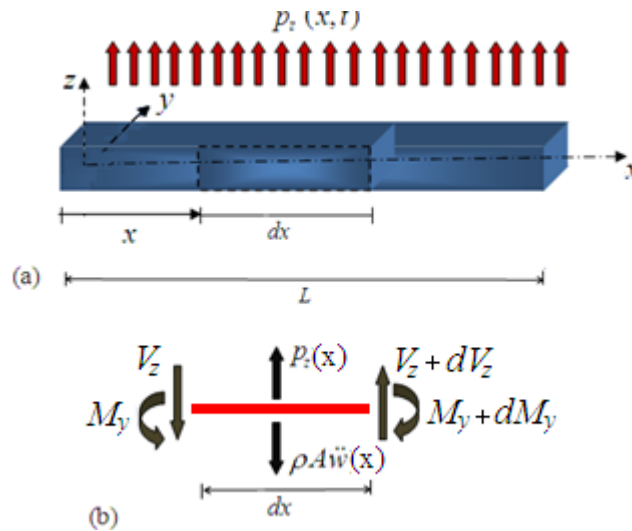


Figura 6.3 - Barra sob efeito de flexão dinâmica

Do equilíbrio de forças e momentos no elemento na barra, tem-se:

$$\frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} + p_z(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y(x,t)}{\partial x} - V_z(x,t) = 0 \quad (6.35a-b)$$

Por analogia ao caso estático, tem-se:

$$\begin{aligned} V_z(x,t) &= -EI_y \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\ M_y(x,t) &= -EI_y \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \phi(x,t) &= -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.36a-c)$$

Substituindo a Eq. (6.36a) na Eq.(6.35a) e fazendo $k_y^4 = \rho A / EI_y$, obtém-se:

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + k_y^4 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p_z(x,t)}{EI_y} \quad (6.37)$$

A Eq. (6.37) é a EDP governante do problema da flexão em y de vigas submetidas a carregamento dinâmico lateral, sob as hipóteses de Euler-Bernoulli. Nesta equação $w(x,t)$ é a deflexão lateral, I_y é a inércia e $\phi(x,t) = -\partial w(x,t)/\partial x$ é a rotação da seção transversal, ambas em torno do eixo y, e x é o eixo longitudinal da barra.

Para o caso do carregamento harmônico $p_z(x,t) = p_z(x)e^{i\omega t} = \check{p}_z(x,\omega)$, o deslocamento segundo o eixo z, $w(x,t) = w(x)e^{i\omega t} = \check{w}(x,\omega)$ e a rotação em torno do eixo y, $\phi(x,t) = \phi(x)e^{i\omega t} = \check{\phi}(x,\omega)$ são de mesma frequência. Com a intenção de simplificar a notação essas grandezas serão assim referidas: $p_z(x)e^{i\omega t} = \check{p}_z(x)$, $w(x)e^{i\omega t} = \check{w}(x)$.

Consideradas as grandezas definidas na Eq. (6.36) e fazendo $\check{k}_y^4 = \rho A \omega^2 / EI_y$, obtém-se a EDP governante do problema em estudo.

$$\frac{d^4 \check{w}(x)}{dx^4} - \check{k}_y^4 \check{w}(x) = \frac{\check{p}_z(x)}{EI_y} \quad (6.38)$$

- **O problema fundamental (Euler-Bernoulli)**

É possível escrever a EDP governante do problema fundamental no domínio da frequência por analogia ao problema real Eq. (6.38), resultando em :

$$\frac{d^4 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^4} - \tilde{k}_y^4 \tilde{w}^*(x, \hat{x}) = \frac{\tilde{p}_z^*(x, \hat{x})}{EI_y} \quad (6.39)$$

No problema fundamental o carregamento consiste de uma carga pontual $\tilde{p}_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ atuando no ponto-fonte $\hat{x}$. E, analogamente ao problema real, as relações esforços-deslocamentos para o fundamental ficam:

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} = EI_y \frac{d\tilde{\phi}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (6.40a)$$

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{M}_y^*(x, \hat{x})}{dx} = -EI_y \frac{d^3 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^3} \quad (6.40b)$$

$$\tilde{\phi}^*(x, \hat{x}) = -\frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (6.40c)$$

onde: $\tilde{w}^*(x, \hat{x})$, $\tilde{\phi}^*(x, \hat{x})$, $\tilde{V}_z^*(x, \hat{x})$ e $\tilde{M}_y^*(x, \hat{x})$ são, respectivamente, o deslocamento, a rotação da seção, o cortante e o momento fundamentais, cujos valores explícitos podem ser encontrados em PROVIDAKIS e BESKOS (1986) e listadas a seguir:

$$\tilde{w}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{4EI_y \tilde{k}_y^3} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \sin(\tilde{k}_y (L - r)) - \sec h(\tilde{k}_y L) \sinh(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{\phi}^*(x, \hat{x}) = -\frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{4EI_y \tilde{k}_y^2} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \cos(\tilde{k}_y (L - r)) - \sec h(\tilde{k}_y L) \cosh(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{1}{4\tilde{k}_y} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \sin(\tilde{k}_y (L - r)) + \sec h(\tilde{k}_y L) \sinh(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^3 \tilde{w}^*}{dx^3} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{4} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \cos(\tilde{k}_y (L - r)) + \sec h(\tilde{k}_y L) \cosh(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{w}^*}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{4EI_y \tilde{k}_y^2} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \cos(\tilde{k}_y (L - r)) - \sec h(\tilde{k}_y L) \cosh(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{\phi}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{\phi}^*}{d\hat{x}} = -\frac{1}{4\tilde{k}_y EI_y} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \text{sen}(\tilde{k}_y (L - r)) + \sec h(\tilde{k}_y L) \text{senh}(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{M}_{yx}^*}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{4} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \cos(\tilde{k}_y (L - r)) + \sec h(\tilde{k}_y L) \cosh(\tilde{k}_y (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*}{d\hat{x}} = \frac{\tilde{k}_y}{4} \left\{ \sec(\tilde{k}_y L) \text{sen}(\tilde{k}_y (L - r)) - \sec h(\tilde{k}_y L) \text{senh}(\tilde{k}_y (L - r)) \right\} \quad (6.41a-h)$$

Nesta tese, uma solução fundamental alternativa à Eq. (6.41a-h) também é apresentada. Sendo $y = \frac{d^2 w^*}{dx^2}$, uma equação característica associada à equação governante do problema fundamental Eq. (6.39) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k_y^4 = 0 \quad (6.42)$$

cujas soluções são: $\lambda_{1y} = \sqrt{k_y^4}$ e $\lambda_{2y} = -\sqrt{k_y^4}$.

Uma solução possível para Eq. (6.39) é:

$$\tilde{w}^* = C_1 \text{senh}(-\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_2 \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \quad (6.43)$$

Como a Eq. (6.39) necessita de uma quarta derivada da Eq.(6.43), ela será obtida a seguir.

Inicialmente, tem-se a segunda derivada da Eq. (6.43) dada por:

$$\frac{d^2 \tilde{w}^*}{dx^2} = \left[-C_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] \frac{d}{dx} (\text{sgn}(r)) - C_{1y} \lambda_{1y} \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) - C_{2y} (-\lambda_{2y}) \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \quad (6.44)$$

Convém notar que $\frac{d}{dx} \text{sgn}(r) = 2\delta(x, \hat{x})$. Com o intuito de se evitar a derivação do delta de Dirac na terceira derivada da Eq. (6.43), impõe-se a relação:

$$-C_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} + C_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} = 0 \quad (6.45)$$

Assim a Eq. (6.44) passa a ser escrita como:

$$\frac{d^2 \tilde{w}^*}{dx^2} = -C_{1y} \lambda_{1y} \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) - C_{2y} (-\lambda_{2y}) \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \quad (6.46)$$

Com isso, a quarta derivada de Eq. (6.43), que implica na segunda da Eq. (6.46), fica:

$$\frac{d^4 \tilde{w}^*}{dx^4} = \left[-C_{1y} \lambda_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_{2y} \lambda_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] 2\delta(x, \hat{x}) - C_{1y} \lambda_{1y}^2 \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_{2y} \lambda_{2y}^2 \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \quad (6.47)$$

Ao substituir a Eq. (6.47) na Eq. (6.39) fica:

$$\left[-C_{1y} \lambda_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_{2y} \lambda_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] 2\delta(x, \hat{x}) + C_{1y} (-\lambda_{1y}^2 + k_y^4) \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_{2y} (\lambda_{2y}^2 - k_y^4) \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) = \frac{\delta(x, \hat{x})}{EI_y} \quad (6.48)$$

Substituindo-se as raízes da Eq. (6.42) na Eq. (6.48), tem-se:

$$\left[-C_{1y} \lambda_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + C_{2y} \lambda_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] 2\delta(x, \hat{x}) = \frac{\delta(x, \hat{x})}{EI_y} \quad (6.49)$$

Para que a identidade da Eq. (6.49) seja verificada, inclusive com $r = 0$, implica em:

$$\left[-C_{1y}\lambda_{1y}\sqrt{\lambda_{1y}} + C_{2y}\lambda_{2y}\sqrt{-\lambda_{2y}} \right] = \frac{1}{2EI_y} \quad (6.50)$$

Se a Eq. (6.45) e a Eq. (6.50) forem agrupadas, então:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\lambda_{1y}} & \sqrt{-\lambda_{2y}} \\ -\lambda_{1y}\sqrt{\lambda_{1y}} & \lambda_{2y}\sqrt{-\lambda_{2y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1y} \\ C_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2EI_y \end{Bmatrix} \quad (6.51)$$

Ao resolver o sistema da Eq. (6.51), as constantes C_{iy} ficam:

$$C_{1y} = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1y}}}, \quad C_{2y} = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{2y}}}.$$

Então, a solução fundamental, Eq. (6.43), fica:

$$\tilde{w}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \left[\frac{\sinh(-\sqrt{\lambda_{1y}}r)}{\sqrt{\lambda_{1y}}} + \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_{2y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right] \quad (6.52)$$

E os valores fundamentais associados às rotações e esforços no ponto-campo:

$$\tilde{\phi}^* = -\frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} [\cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}}r)]$$

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^3\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} [\lambda_{1y} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}}r) - \lambda_{2y} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}r)]$$

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{1}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} [\sqrt{\lambda_{1y}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}}r) + \sqrt{-\lambda_{2y}} \sen(\sqrt{-\lambda_{2y}}r)]$$

$$\tilde{w}_{,\hat{x}}^* = \frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} [\cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}}r)]$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{,\hat{x}}^* &= \frac{d\tilde{\phi}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \left[\sqrt{\lambda_{1y}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + \sqrt{-\lambda_{2y}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] \\ \tilde{V}_{z,\hat{x}}^* &= \frac{d\tilde{V}_z^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{1}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \left[\lambda_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) + \lambda_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] \\ \tilde{M}_{y,\hat{x}}^* &= \frac{d\tilde{M}_y^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \left[\lambda_{1y} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} r) - \lambda_{2y} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right] \quad (6.53a-g)\end{aligned}$$

- **A representação integral (Euler-Bernoulli)**

Para a obtenção da EI associada à EDP governante do efeito da flexão é utilizado o método dos resíduos ponderados onde a equação governante do problema real Eq. (6.39) é ponderada pelo deslocamento fundamental $\tilde{w}^*$:

$$\int_0^L \left(\frac{d^4 \tilde{w}(x)}{dx^4} - \tilde{k}_y^4 w(x) - \frac{\tilde{p}_z(x)}{EI_y} \right) \tilde{w}^* dx = 0 \quad (6.54)$$

Integrando por partes quatro vezes a Eq. (6.54) obtém-se:

$$\begin{aligned}& \int_0^L \tilde{w} \left(\frac{d^4 \tilde{w}^*}{dx^4} - \tilde{k}_y^4 \tilde{w}^* \right) dx + \left[\frac{d^3 \tilde{w}(x)}{dx^3} \tilde{w}^* \right]_0^L - \left[\frac{d^2 \tilde{w}(x)}{dx^2} \frac{d\tilde{w}^*(x)}{dx} \right]_0^L + \\ & + \left[\frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \frac{d^2 \tilde{w}^*(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[\tilde{w}(x) \frac{d^3 \tilde{w}^*(x)}{dx^3} \right]_0^L = \int_0^L \frac{\tilde{p}_z(x)}{EI_y} \tilde{w}^* dx\end{aligned} \quad (6.55)$$

A Eq. (6.55) indica uma relação de reciprocidade nas integrais das funções $\tilde{w}^*$ e $\tilde{w}$, então, a função $\tilde{w}^*$ pode ser considerada a solução do problema fundamental da flexão em estudo. O problema fundamental em questão é governado pela Eq. (6.39), sendo $\tilde{w}^*(x, \hat{x})$ sua solução fundamental em deslocamento.

Aplicando a propriedade do delta de Dirac, Eq. (2.7a), isto é, fazendo:

$$d^4 \tilde{w}^* / dx^4 - \tilde{k}_y^4 \tilde{w}^* = \delta(x, \hat{x}) / EI_y \text{ e } \int_0^L \tilde{w}(x) \delta(x, \hat{x}) dx = \tilde{w}(\hat{x}), \text{ a Eq. (6.55) pode ser reescrita}$$

como:

$$\tilde{w}(\hat{x}) = EI_y \left[-\frac{d^3 \tilde{w}}{dx^3} \tilde{w}^* + \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} \frac{d\tilde{w}^*}{dx} - \frac{d\tilde{w}}{dx} \frac{d^2 \tilde{w}^*}{dx^2} + \tilde{w}(x) \frac{d^3 \tilde{w}^*}{dx^3} \right]_0^L + \int_0^L \frac{\tilde{p}_z(x)}{EI_y} \tilde{w}^* dx \quad (6.56)$$

que após adequada utilização das Eqs. (6.36a-c) e Eqs. (6.40a-c), a Eq. (6.56) fica:

$$\tilde{w}(\hat{x}) = \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}^*(x, \hat{x}) - \tilde{\phi}(x) \tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) - \tilde{w}(x) \tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \tilde{w}^*(x, \hat{x}) \frac{\tilde{p}_z(x)}{EI_y} dx \quad (6.57)$$

cuja derivada em $\hat{x}$ resulta na equação integral em rotação. Ambas, a Eq. (6.57) e sua derivada em $\hat{x}$ são indicadas a seguir na sua expressão usual.

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\hat{x}) + \left[\tilde{w}(x) \tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) + \tilde{\phi}(x) \tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\ \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \tilde{p}_z(x) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (6.58a)$$

Já a equação integral da rotação da seção transversal pode ser obtida pela diferenciação de (6.58a) no ponto-fonte

$$\begin{aligned} -\tilde{\phi}(\hat{x}) + \left[\tilde{w}(x) \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \tilde{\phi}(x) \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \tilde{p}_z(x) \tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (6.58b)$$

- **A representação algébrica (Euler-Bernoulli)**

Efetuada as colocações do ponto-fonte nas extremidades da barra, isto é, fazendo $\hat{x} \rightarrow 0$ e $\hat{x} \rightarrow L$ nas as Eqs. (6.58a-b), obtém-se:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0) - \tilde{w}(0) \tilde{V}_z^*(0,0) + \tilde{w}(L) \tilde{V}_z^*(L,0) - \tilde{\phi}(0) \tilde{M}_y^*(0,0) + \tilde{\phi}(L) \tilde{M}_y^*(L,0) = \\ -\tilde{V}_z(0) \tilde{w}^*(0,0) + \tilde{V}_z(L) \tilde{w}^*(L,0) - \tilde{M}_y(0) \tilde{\phi}^*(0,0) + \tilde{M}_y(L) \tilde{\phi}^*(L,0) + \int_0^L \tilde{p}_z(x) \tilde{w}^*(x,0) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\check{\phi}(0) - \check{w}(0)\check{V}_{z,\hat{x}}^*(0,0) + \check{w}(L)\check{V}_{z,\hat{x}}^*(L,0) - \check{\phi}(0)\check{M}_{y,\hat{x}}^*(0,0) + \check{\phi}(L)\check{M}_{y,\hat{x}}^*(L,0) = \\
& -\check{V}_z(0)\check{w}_{,\hat{x}}^*(0,0) + \check{V}_z(L)\check{w}_{,\hat{x}}^*(L,0) - \check{M}_y(0)\check{\phi}_{,\hat{x}}^*(0,0) + \check{M}_y(L)\check{\phi}_{,\hat{x}}^*(L,0) + \int_0^L \check{p}_z(x)\check{w}_{,\hat{x}}^*(x,0)dx \\
& \hspace{15em} (6.59a-b)
\end{aligned}$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$

$$\begin{aligned}
& \check{w}(L) - \check{w}(0)\check{V}_z^*(0,L) + \check{w}(L)\check{V}_z^*(L,L) - \check{\phi}(0)\check{M}_y^*(0,L) + \check{\phi}(L)\check{M}_y^*(L,L) = \\
& -\check{V}_z(0)\check{w}^*(0,L) + \check{V}_z(L)\check{w}^*(L,L) - \check{M}_y(0)\check{\phi}^*(0,L) + \check{M}_y(L)\check{\phi}^*(L,L) + \int_0^L \check{p}_z(x)\check{w}^*(x,L)dx \\
& -\check{\phi}(L) - \check{w}(0)\check{V}_{z,\hat{x}}^*(0,L) + \check{w}(L)\check{V}_{z,\hat{x}}^*(L,L) - \check{\phi}(0)\check{M}_{y,\hat{x}}^*(0,L) + \check{\phi}(L)\check{M}_{y,\hat{x}}^*(L,L) = \\
& -\check{V}_z(0)\check{w}_{,\hat{x}}^*(0,L) + \check{V}_z(L)\check{w}_{,\hat{x}}^*(L,L) - \check{M}_y(0)\check{\phi}_{,\hat{x}}^*(0,L) + \check{M}_y(L)\check{\phi}_{,\hat{x}}^*(L,L) + \int_0^L \check{p}_z(x)\check{w}_{,\hat{x}}^*(x,L)dx \\
& \hspace{15em} (6.60a-b)
\end{aligned}$$

Reescrevendo as Eqs. (6.59a-b) e as Eqs. (6.60a-b) com notação matricial fica:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \check{w}(0) \\ -\check{\phi}(0) \\ \check{w}(L) \\ -\check{\phi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\check{V}_z^*(0,0+\xi) & -\check{M}_y^*(0,0+\xi) & \check{V}_z^*(L,0+\xi) & \check{M}_y^*(L,0+\xi) \\ -\check{V}_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\check{M}_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \check{V}_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \check{M}_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -\check{V}_z^*(0,L-\xi) & -\check{M}_y^*(0,L-\xi) & \check{V}_z^*(L,L-\xi) & \check{M}_y^*(L,L-\xi) \\ -\check{V}_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\check{M}_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \check{V}_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \check{M}_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{w}(0) \\ \check{\phi}(0) \\ \check{w}(L) \\ \check{\phi}(L) \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} -\check{w}^*(0,0+\xi) & -\check{\phi}^*(0,0+\xi) & \check{w}^*(L,0+\xi) & \check{\phi}^*(L,0+\xi) \\ -\check{w}_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\check{\phi}_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \check{w}_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \check{\phi}_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -\check{w}^*(0,L-\xi) & -\check{\phi}^*(0,L-\xi) & \check{w}^*(L,L-\xi) & \check{\phi}^*(L,L-\xi) \\ -\check{w}_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\check{\phi}_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \check{w}_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \check{\phi}_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{V}_z(0) \\ \check{M}_y(0) \\ \check{V}_z(L) \\ \check{M}_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \check{f}_z(0) \\ \check{f}_{z,\hat{x}}(0) \\ \check{f}_z(L) \\ \check{f}_{z,\hat{x}}(L) \end{Bmatrix} \quad (6.61)
\end{aligned}$$

Para as soluções fundamentais de PROVIDAKIS e BESKOS (1986), os valores das colocações indicadas na Eq. (6.45) ficam:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \check{w}(0) \\ \phi(0) \\ \check{w}(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1/2 & -\check{\alpha}_{2y} & -\check{\alpha}_{1y} & 0 \\ \check{\alpha}_{3y} & -1/2 & 0 & -\check{\alpha}_{1y} \\ -\check{\alpha}_{1y} & 0 & -1/2 & \check{\alpha}_{2y} \\ 0 & -\check{\alpha}_{1y} & -\check{\alpha}_{3y} & -1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{w}(0) \\ \phi(0) \\ \check{w}(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\check{\beta}_{1y} & 0 & 0 & \check{\beta}_{2y} \\ 0 & -\check{\beta}_{4y} & -\check{\beta}_{3y} & 0 \\ 0 & \check{\beta}_{2y} & \check{\beta}_{1y} & 0 \\ -\check{\beta}_{2y} & 0 & 0 & \check{\beta}_{4y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{V}_z(0) \\ \check{M}_y(0) \\ \check{V}_z(L) \\ \check{M}_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \check{f}_z(0) \\ \check{f}_{\phi}(0) \\ \check{f}_z(L) \\ \check{f}_{\phi}(L) \end{Bmatrix} \\
& \hspace{15em} (6.62)
\end{aligned}$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_{1y} = [\sec(\tilde{k}_y L) + \sec h(\tilde{k}_y L)]/4, \quad \tilde{\alpha}_{2y} = [\tan(\tilde{k}_y L) + \tanh(\tilde{k}_y L)]/(4\tilde{k}_y)$$

$$\tilde{\alpha}_{3y} = [\tan(\tilde{k}_y L) - \tanh(\tilde{k}_y L)]\tilde{k}_y/4, \quad \tilde{\beta}_{1y} = [\tan(\tilde{k}_y L) - \tanh(\tilde{k}_y L)]/(4\tilde{k}_y^3 EI_y)$$

$$\tilde{\beta}_{2y} = [\sec(\tilde{k}_y L) - \sec h(\tilde{k}_y L)]/(4\tilde{k}_y^2 EI_y), \quad \tilde{\beta}_{4y} = [tg(\tilde{k}_y L) + tgh(\tilde{k}_y L)]/(4\tilde{k}_y EI_y) \quad (6.63a-h)$$

e,

$$\tilde{f}_z(0) = \frac{1}{4EI_y \tilde{k}_y^3} \int_0^L \{\tilde{p}_z(x) [\sec(\tilde{k}_y L) \sin(\tilde{k}_y (L-x)) - \sec h(\tilde{k}_y L) \sinh(\tilde{k}_y (L-x))]\} dx$$

$$\tilde{f}_z(L) = \frac{1}{4EI_y \tilde{k}_y^3} \int_0^L \{\tilde{p}_z(x) [\sec(\tilde{k}_y L) \sin(\tilde{k}_y x) - \sec h(\tilde{k}_y L) \sinh(\tilde{k}_y x)]\} dx$$

$$f_{z,\hat{x}}(0) = -f_\phi(0) =$$

$$\frac{1}{4EI_y \tilde{k}_y^2} \int_0^L \{\tilde{p}_z(x) [\sec(\tilde{k}_y L) \cos(\tilde{k}_y (L-x)) - \sec h(\tilde{k}_y L) \cosh(\tilde{k}_y (L-x))]\} dx$$

$$f_{z,\hat{x}}(L) = -f_\phi(L) = -\frac{1}{4EI_y \tilde{k}_y^2} \int_0^L \{\tilde{p}_z(x) [\sec(\tilde{k}_y L) \cos(\tilde{k}_y x) - \sec h(\tilde{k}_y L) \cosh(\tilde{k}_y x)]\} dx$$

(6.64a-d)

Já para o caso da solução alternativa dada na Eq. (6.52) e Eqs. (6.53), o sistema algébrico Eq. (6.61) fica:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \tilde{\alpha}_{y18Ls} & -\tilde{\alpha}_{y19L} \\ 0 & -1/2 & -\tilde{\alpha}_{y20L} & -\tilde{\alpha}_{y21Ls} \\ \tilde{\alpha}_{y18Ls} & \tilde{\alpha}_{y19L} & -1/2 & 0 \\ \tilde{\alpha}_{y20L} & -\tilde{\alpha}_{y21Ls} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\beta}_{y18L} & -\tilde{\beta}_{y19Ls} \\ 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{y20Ls} & \tilde{\beta}_{y21L} \\ -\tilde{\beta}_{y18L} & -\tilde{\beta}_{y19Ls} & 0 & 0 \\ -\tilde{\beta}_{y20Ls} & -\tilde{\beta}_{y21L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_z(0) \\ \tilde{M}_y(0) \\ \tilde{V}_z(L) \\ \tilde{M}_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_z(0) \\ \tilde{f}_\phi(0) \\ \tilde{f}_z(L) \\ \tilde{f}_\phi(L) \end{Bmatrix} \quad (6.65)$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_{y18Ls} = \frac{1}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\lambda_{2y} \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} L) - \lambda_{1y} \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} L))$$

$$\tilde{\alpha}_{y19L} = \frac{1}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\sqrt{\lambda_{1y}} \sinh \sqrt{\lambda_{1y}} L + \sqrt{-\lambda_{2y}} \sen \sqrt{-\lambda_{2y}} L)$$

$$\tilde{\alpha}_{y20L} = \frac{1}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\lambda_{1y} \sqrt{\lambda_{1y}} \sinh \sqrt{\lambda_{1y}} L + \lambda_{2y} \sqrt{-\lambda_{2y}} \sen \sqrt{-\lambda_{2y}} L)$$

$$\tilde{\alpha}_{y21Ls} = \frac{1}{2(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\lambda_{1y} \cosh \sqrt{\lambda_{1y}} L - \lambda_{2y} \cos \sqrt{-\lambda_{2y}} L)$$

$$\tilde{\beta}_{y18L} = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \left(-\frac{\sinh \sqrt{\lambda_{1y}} L}{\sqrt{\lambda_{1y}}} + \frac{\sen \sqrt{-\lambda_{2y}} L}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right)$$

$$\tilde{\beta}_{y19Ls} = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\cos \sqrt{-\lambda_{2y}} L - \cosh \sqrt{\lambda_{1y}} L)$$

$$\tilde{\beta}_{y20Ls} = \frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\cos \sqrt{-\lambda_{2y}} L - \cosh \sqrt{\lambda_{1y}} L)$$

$$\tilde{\beta}_{y21L} = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} (\sqrt{\lambda_{1y}} \sinh \sqrt{\lambda_{1y}} L + \sqrt{-\lambda_{2y}} \sinh \sqrt{-\lambda_{2y}} L) \quad (6.66a-h)$$

e

$$\tilde{f}_z(0) = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_z(x) \left[\frac{\sinh(-\sqrt{\lambda_{1y}} x)}{\sqrt{\lambda_{1y}}} + \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_{2y}} x)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right] \right\} dx$$

$$\tilde{f}_z(L) = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_z(x) \left[\frac{\sinh(-\sqrt{\lambda_{1y}} (-x + L))}{\sqrt{\lambda_{1y}}} + \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_{2y}} (-x + L))}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right] \right\} dx$$

$$f_{z,\hat{x}}(0) = -f_{\phi}(0) = \frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_z(x) \left[\cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} x) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}} x) \right] \right\} dx$$

$$f_{z,\hat{x}}(L) = -f_{\phi}(L) = -\frac{1}{2EI_y(\lambda_{1y} - \lambda_{2y})} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_z(x) \left[\cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}(-x + L)) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1y}}(-x + L)) \right] \right\} dx$$

(6.66i-m)

- **O problema real (Timoshenko)**

Na teoria de Timoshenko para o problema dinâmico são levadas em conta tanto a deformação por cortante quanto a inércia rotatória. Seja uma barra prismática submetida a uma flexão em y devido aos carregamentos dinâmicos $p_z(x,t)$, $m_y(x,t)$ e sendo o sistema de referência local (x,y,z) . Além disso, $(y$ e $z)$ são os eixos principais de inércia e as propriedades geométricas e mecânicas dadas por uma seção transversal de área A , densidade ρ e módulo de Young E , conforme mostrado na Fig. 6.4a-b,

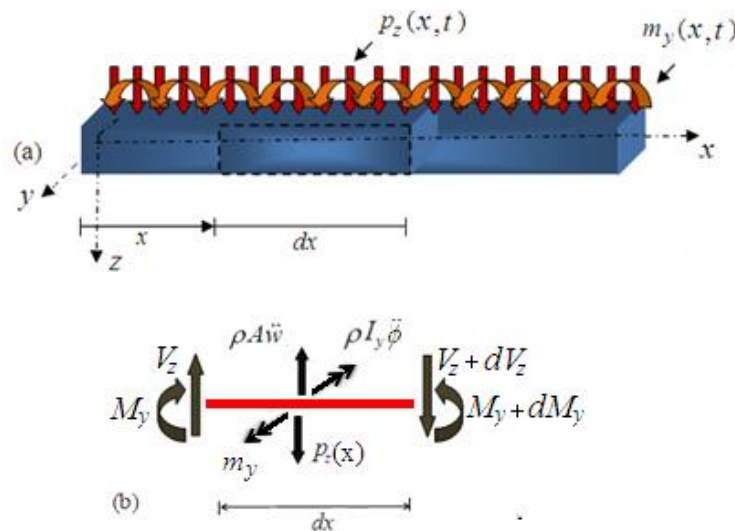


Figura 6.4 - Barra submetida à flexão dinâmica, com carregamento lateral e momento

Considerando as equações de equilíbrio de força e de momento escritas a partir do elemento de viga mostrado na Fig. 6.4b, tem-se, respectivamente:

$$\frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} + p_z(x,t) - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = 0 \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial M_y(x,t)}{\partial x} - V_z(x,t) + m_y(x,t) - \rho I_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x,t) = 0 \quad (6.68)$$

Diferentemente da teoria clássica, a inclinação da linha elástica $\partial w(x,t)/\partial x$ e o ângulo de rotação da seção $\phi(x,t)$ em torno de y estão correlacionados com a distorção γ_{xz} :

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = -\phi(x,t) + \gamma_{xz}(x,t) \quad (6.69)$$

As relações momento-curvatura e força cortante-deslocamento são dados por:

$$M_y(x,t) = EI_y \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \quad (6.70)$$

$$V_z(x,t) = \kappa GA \gamma_{xz}(x,t) = \kappa GA \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \phi(x,t) \right) \quad (6.71)$$

onde: EI_y é a rigidez a flexão, A a área da seção transversal, G é o módulo de deformação transversal, κ é o coeficiente de cisalhamento (fator de forma da seção).

Conforme mencionado no capítulo 3 o valor κ depende da seção transversal, do coeficiente de Poisson e da frequência de excitação ω .

Substituindo a Eq. (6.69) na Eq. (6.67) assim como as Eqs. (6.70) e (6.68) na Eq. (6.71), obtêm-se as equações de movimento da flexão em y :

$$\kappa GA \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} + \kappa GA \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = -p_z(x,t) \quad (6.72)$$

$$-\kappa GA \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + EI_y \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} - \kappa GA \phi(x,t) - \rho I_y \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = -m_y(x,t) \quad (6.73)$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} & D_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ -D_1 \frac{\partial}{\partial x} & D_{2y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_1 - \rho I_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x,t) \\ \phi(x,t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p_z(x,t) \\ m_y(x,t) \end{Bmatrix} \quad (6.74)$$

Com $D_1 = \kappa GA$, $D_{2y} = EI_y$.

Para carregamentos harmônicos no tempo, $p_z(x,t) = p_z(x)e^{i\omega t} = \tilde{p}_z(x,\omega)$ e $m_y(x,t) = m_y(x)e^{i\omega t} = \tilde{m}_y(x,\omega)$, a Eq. (6.74) fica:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_{2y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{Bmatrix} \quad (6.75)$$

- **O problema fundamental (Timoshenko)**

Por analogia ao problema real no domínio da frequência Eq. (6.75), escreve-se o sistema de EDPs governantes do problema fundamental devido aos impulsos $\tilde{p}_z^*(x,\hat{x}) = \delta(x,\hat{x})$ e $\tilde{m}_y^*(x,\hat{x}) = \delta(x,\hat{x})$:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_{2y} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_p^*(x,\hat{x}) & \tilde{w}_m^*(x,\hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x,\hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x,\hat{x}) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta(x,\hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x,\hat{x}) \end{bmatrix} \quad (6.76a)$$

Na dedução das soluções fundamentais da Eq. (6.76a), ANTES *et al.* (2004) utilizaram o método de Hörmander, que necessita das etapas a seguir.

Inicialmente escreve-se a Eq. (6.76a) na forma:

$$[\tilde{B}][\tilde{G}] = -[I]\delta(x,\hat{x}) \quad (6.76b)$$

$$\text{onde: } [\tilde{B}] = \begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_{2y} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} \tilde{w}_p^*(x,\hat{x}) & \tilde{w}_m^*(x,\hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x,\hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x,\hat{x}) \end{bmatrix}$$

A solução de Eq. (6.76b) é dada por:

$$\left[\tilde{G}\right] = \left[\tilde{B}^{cof}\right]^T \zeta(x, \hat{x}) \quad (6.77)$$

Substituindo a Eq. (6.77) na Eq. (6.76b), tem-se: $\left[\tilde{B}\right]\left[\tilde{B}^{cof}\right]^T \zeta = -[I]\delta(x, \hat{x})$, que após a utilização das propriedades: $\left[\tilde{B}\right]\left[\tilde{B}\right]^{-1} = [I]$ e $\left[\tilde{B}^{cof}\right]^T / \det[\tilde{B}] = \left[\tilde{B}\right]^{-1}$, o que finaliza a técnica de Hörmander, tem-se:

$$\det[\tilde{B}]\zeta(x, \hat{x}) = -\delta(x, \hat{x}) \quad (6.78)$$

Com isso, a equação Eq. (6.76a) fica escrita na forma desacoplada em função de ζ . Assim, calculando-se o determinante de $[\tilde{B}]$ e substituindo-se a Eq. (6.78) fica:

$$\left[D_1 D_{2y} \frac{d^4}{dx^4} + (D_1 \rho I_y \omega^2 + D_{2y} \rho A \omega^2) \frac{d^2}{dx^2} - \rho A \omega^2 (D_1 - \rho I_y \omega^2) \right] \zeta = -\delta(x - \hat{x}) \quad (6.79)$$

Tomando-se $y = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, a equação característica da forma homogênea de Eq. (6.79)

é $D_1 D_{2y} y^2 + (D_1 \rho I_y \omega^2 + D_{2y} \rho A \omega^2) y - \rho A \omega^2 (D_1 - \rho I_y \omega^2) = 0$, cujas raízes são:

$$\begin{aligned} \lambda_{1y} &= -\frac{1}{2D_1 D_{2y}} \left[(D_1 \rho I_y \omega^2 + D_{2y} \rho A \omega^2) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(D_1 \rho I_y \omega^2 + D_{2y} \rho A \omega^2)^2 + 4D_1 D_{2y} \rho A \omega^2 (D_1 - \rho I_y \omega^2)} \right] \\ \lambda_{2y} &= -\frac{1}{2D_1 D_{2y}} \left[(D_1 \rho I_y \omega^2 + D_{2y} \rho A \omega^2) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(D_1 \rho I_y \omega^2 + D_{2y} \rho A \omega^2)^2 + 4D_1 D_{2y} \rho A \omega^2 (D_1 - \rho I_y \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

ANTES *et al.* (2004) reescreve essas raízes $\lambda_{1y,2y}$ como:

$$\lambda_{1y,2y} = -\frac{\rho \omega^2}{2} \left[\left(\frac{\kappa G + E}{E \kappa G} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa G - E}{E \kappa G} \right)^2 + 4 \frac{A}{\rho E I_y \omega^2}} \right] \quad (6.80a-b)$$

Reescrevendo a Eq. (6.79) em função das suas raízes, tem-se:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_{1y}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_{2y}\right)\zeta = -\frac{1}{D_1 D_{2y}} \delta(x, \hat{x}). \quad (6.81)$$

Da Eq. (6.80) conclui-se que as raízes $\lambda_{1y,2y}$ são reais, sendo $\lambda_{1y} < 0$ para qualquer valor de ω enquanto $\lambda_{2y} < 0$ para $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_y$ e $\lambda_{2y} > 0$ para $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_y$. Como as raízes são reais então as soluções da Eq. (6.81), as soluções fundamentais do problema em estudo serão também reais. Cada um desses casos foram abordados em ANTES *et al.*(2004), de forma que as soluções da função escalar extraídas de lá são listadas a seguir:

Para $\lambda_{1y} < \lambda_{2y} < 0$

$$\zeta = \frac{1}{D_1 D_{2y} (\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right) \quad (6.82a)$$

Para $\lambda_{1y} < 0 < \lambda_{2y}$

$$\zeta = \frac{1}{D_1 D_{2y} (\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} - \frac{\text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}} r)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \right) \quad (6.82b)$$

A partir da aplicação de Eq. (6.77) na Eq. (6.81), ANTES *et al.* (2004) deduziram finalmente as soluções fundamentais de interesse para $\lambda_{1y} < \lambda_{2y} < 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \\ &\left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\lambda_{1y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} r)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\lambda_{2y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \right] \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) &= \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}} r) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} r) \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}r) \right)$$

$$\tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right]$$

$$\tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}r) \right]$$

$$\tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) = \frac{-1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\sqrt{-\lambda_{1y}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \sqrt{-\lambda_{2y}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}}r) \right]$$

$$\tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) = \frac{\rho A \omega^2}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right]$$

$$\tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}}r) \right]$$

(6.83 a-h)

Analogamente para o intervalo de frequências $\lambda_{1y} < 0 < \lambda_{2y}$, as soluções fundamentais são (ANTES *et al.*, 2004):

$$\tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\lambda_{1y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) - \frac{\text{senh}\sqrt{\lambda_{2y}}r}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\lambda_{2y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \right]$$

$$\tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}r) \right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) &= -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}r) \right) \\
\tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) - \frac{\text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}}r)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) \right] \\
\tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}r) \right] \\
\tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) &= \frac{-1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\sqrt{-\lambda_{1y}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \sqrt{\lambda_{2y}} \text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}}r) \right] \\
\tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\rho A \omega^2}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} - \frac{\text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}}r)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \right] \\
\tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_{1y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}r) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}r) \right]
\end{aligned} \tag{6.84a-h}$$

- **A representação integral (Timoshenko)**

Para obtenção das equações integrais, aplica-se o método dos resíduos ponderados em que a equação governante do problema real Eq. (6.75) é convenientemente ponderada pelos campos fundamentais de deslocamento e rotação. Assim:

$$\int_0^L \left[\begin{pmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_{2y} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{pmatrix} \right\} \right]^T \begin{bmatrix} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = 0 \tag{6.85}$$

onde: $\tilde{w}_p^*(x, \hat{x})$, $\tilde{w}_m^*(x, \hat{x})$, $\tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x})$ e $\tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x})$ são as soluções fundamentais em deslocamento e em rotação devidas à fonte de força e a fonte de momento.

A equação integral de deslocamento é obtida quando apenas p_z for ativado $\tilde{p}_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $\tilde{m}_y^*(x, \hat{x}) = 0$, resultando em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_{2y} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (6.86)$$

Após quatro integrações por partes em x da Eq. (6.86) e a conveniente substituição da Eq. (6.70) e da Eq. (6.71), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{V}_z \tilde{w}_p^* - \tilde{V}_{zp}^* \tilde{w} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[\tilde{M}_y \tilde{\phi}_p^* - \tilde{M}_{yp}^* \tilde{\phi} \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(D_1 \tilde{w}_p^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{w}_p^* + D_1 \tilde{\phi}_p^{*'} \right) \tilde{w} dx \\ & + \int_0^L \left[-D_1 \tilde{w}_p^{*'} + D_{2y} \tilde{\phi}_p^{*''} - D_1 \tilde{\phi}_p^{*'} + \rho I_y \omega^2 \tilde{\phi}_p^* \right] \tilde{\phi} dx = - \int_0^L \left(\tilde{p}_z \tilde{w}_p^* + \tilde{m}_y \tilde{\phi}_p^* \right) dx \end{aligned} \quad (6.87)$$

Como apenas o impulso em força p_z é ativado, então: $D_1 \tilde{w}_p^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{w}_p^* + D_1 \tilde{\phi}_p^{*'} = \delta(x, \hat{x})$ e $-D_1 \tilde{w}_p^{*'} + D_{2y} \tilde{\phi}_p^{*''} - D_1 \tilde{\phi}_p^{*'} + \rho I_y \omega^2 \tilde{\phi}_p^* = 0$. Desse modo, se essas relações e o delta de Dirac forem substituídos em Eq. (6.87) resulta:

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(\hat{x}) + \left[-\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{V}_{yp}^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \\ & + \left[-\tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) \tilde{\phi}(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \int_0^L \left(\tilde{p}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{m}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right) dx \end{aligned}$$

que na forma mais usual, fica:

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(\hat{x}) + \left[\tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) + \tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) \tilde{\phi}(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ & \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(\tilde{p}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{m}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right) dx \end{aligned} \quad (6.88)$$

Já a equação integral de rotações das seções é obtida quando apenas pela ponderação de soluções fundamentais quando se ativa apenas o momento $\tilde{m}_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $\tilde{p}_z^*(x, \hat{x}) = 0$, resultando em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_{2y} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (6.89)$$

Após as integrações por partes da Eq. (6.89) e a utilização das relações constitutivas (força-deslocamento, momento-curvatura) fica:

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{V}_z \tilde{w}_{pm}^* - \tilde{V}_{zm}^* \tilde{w} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[\tilde{M}_y \tilde{\phi}_m^* - \tilde{M}_{ym}^* \tilde{\phi} \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(D_1 \tilde{w}_m^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{w}_m^* + D_1 \tilde{\phi}_m^{*'} \right) \tilde{w} dx \\ & + \int_0^L \left[-D_1 \tilde{w}_m^{*'} + D_{2y} \tilde{\phi}_m^{*''} - D_1 \tilde{\phi}_m^{*'} + \rho I_y \omega^2 \tilde{\phi}_m^* \right] \tilde{\phi} dx = - \int_0^L \left(\tilde{p}_z \tilde{w}_m^* + \tilde{m}_y \tilde{\phi}_m^* \right) dx \end{aligned} \quad (6.90)$$

Aqui apenas o impulso em momento m_y é ativado, então $D_1 \tilde{w}_m^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{w}_m^* + D_1 \tilde{\phi}_m^{*'} = 0$ e $-D_1 \tilde{w}_m^{*'} + D_{2y} \tilde{\phi}_m^{*''} - D_1 \tilde{\phi}_m^{*'} + \rho I_y \omega^2 \tilde{\phi}_m^* = \delta(x, \hat{x})$. Com isso, se essas relações constitutivas e o delta de Dirac forem substituídos na Eq. (6.90) resulta:

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}(\hat{x}) + \left[\tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) + \tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) \tilde{\phi}(x) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ & \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(\tilde{p}_z(x) \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) + \tilde{m}_y(x) \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \right) dx \end{aligned} \quad (6.91)$$

As equações integrais podem ser agrupadas e apresentadas matricialmente como:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(\hat{x}) \\ \tilde{\phi}(\hat{x}) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) & \tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) & \tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\}_0^L = \\ & \left[\begin{array}{cc} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{V}_z(x) \\ \tilde{M}_y(x) \end{array} \right\}_0^L + \int_0^L \left[\begin{array}{cc} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\}_0^L dx \end{aligned} \quad (6.92)$$

• A representação algébrica (Timoshenko)

Após a efetivação das integrações em x indicadas na Eq. (6.92) faz-se a colocação da fonte de força e de momento, uma de cada vez, nas extremidades da barra, ou seja, na extremidade inicial com $\hat{x} \rightarrow 0$ e na extremidade final, para a qual se tem $\hat{x} \rightarrow L$, obtendo-se a expressão geral da representação algébrica da barra:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{V}_{zp}^*(0,0+\xi) & -\tilde{M}_{yp}^*(0,0+\xi) & \tilde{V}_{zp}^*(L,0+\xi) & \tilde{M}_{yp}^*(L,0+\xi) \\ -\tilde{V}_{zm}^*(0,0+\xi) & -\tilde{M}_{ym}^*(0,0+\xi) & \tilde{V}_{zm}^*(L,0+\xi) & \tilde{M}_{ym}^*(L,0+\xi) \\ -\tilde{V}_{zp}^*(0,L-\xi) & -\tilde{M}_{yp}^*(0,L-\xi) & \tilde{V}_{zp}^*(L,L-\xi) & \tilde{M}_{yp}^*(L,L-\xi) \\ -\tilde{V}_{zm}^*(0,L-\xi) & -\tilde{M}_{ym}^*(0,L-\xi) & \tilde{V}_{zm}^*(L,L-\xi) & \tilde{M}_{ym}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} -\tilde{w}_p^*(0,0+\xi) & -\tilde{\phi}_p^*(0,0+\xi) & \tilde{w}_p^*(L,0+\xi) & \tilde{\phi}_p^*(L,0+\xi) \\ -\tilde{w}_m^*(0,0+\xi) & -\tilde{\phi}_m^*(0,0+\xi) & \tilde{w}_m^*(L,0+\xi) & \tilde{\phi}_m^*(L,0+\xi) \\ -\tilde{w}_p^*(0,L-\xi) & -\tilde{\phi}_p^*(0,L-\xi) & \tilde{w}_p^*(L,L-\xi) & \tilde{\phi}_p^*(L,L-\xi) \\ -\tilde{w}_m^*(0,L-\xi) & -\tilde{\phi}_m^*(0,L-\xi) & \tilde{w}_m^*(L,L-\xi) & \tilde{\phi}_m^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_y(0) \\ \tilde{M}_z(0) \\ \tilde{V}_y(L) \\ \tilde{M}_z(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_z(0) \\ \tilde{m}_y(0) \\ \tilde{f}_z(L) \\ \tilde{m}_y(L) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Através das equações Eqs. (6.83a-h) - para $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_y$ isto é: $\lambda_{1y} < \lambda_{2y} < 0$ - e das equações Eqs. (6.84a-h) - para $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_y$ isto é: $\lambda_{1y} < 0 < \lambda_{2y}$ -, calculam-se os valores dos elementos das matrizes da Eq. (6.93) que são as soluções fundamentais para as extremidades da barra devidas a aplicação da fonte de força e de momento em cada uma dessas extremidades. Portanto, a expressão geral da representação algébrica da barra da flexão em y no domínio da frequência segundo a teoria de Timoshenko:

Para $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_y$ isto é: $\lambda_{1y} < \lambda_{2y} < 0$, após o cálculo de cada termo da Eq. (6.93) o sistema algébrico fica:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \tilde{\alpha}_{1y} & -\tilde{\alpha}_{5y} \\ 0 & -1/2 & \tilde{\alpha}_{6y} & \tilde{\alpha}_{4y} \\ \tilde{\alpha}_{1y} & \tilde{\alpha}_{5y} & -1/2 & 0 \\ -\tilde{\alpha}_{6y} & \tilde{\alpha}_{4y} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\beta}_{5y} & \tilde{\beta}_{2y} \\ 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{3y} & -\tilde{\beta}_{6y} \\ -\tilde{\beta}_{5y} & \tilde{\beta}_{2y} & 0 & 0 \\ -\tilde{\beta}_{3y} & \tilde{\beta}_{6y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_y(0) \\ \tilde{M}_z(0) \\ \tilde{V}_y(L) \\ \tilde{M}_z(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_z(0) \\ \tilde{f}_\phi(0) \\ \tilde{f}_z(L) \\ \tilde{f}_\phi(L) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.94}$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_{1y} = \frac{1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}} L) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} L) \right]$$

$$\tilde{\alpha}_{5y} = \frac{1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\sqrt{-\lambda_{1y}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}} L) - \sqrt{-\lambda_{2y}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} L) \right]$$

$$\tilde{\alpha}_{6y} = \frac{\rho A \omega^2}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2y}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \right]$$

$$\tilde{\alpha}_{4y} = \frac{1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}} L) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} L) \right]$$

$$\tilde{\beta}_{2y} = \tilde{\beta}_{3y} = \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} (\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}} L) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} L))$$

$$\tilde{\beta}_{5y} = \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{2y}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} - \lambda_{2y} \right) - \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} - \lambda_{1y} \right) \right]$$

$$\tilde{\beta}_{6y} = \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{2y}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right] \quad (6.95a-h)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{zp}(0) = & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{2y}} x)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} - \lambda_{2y} \right) dx - \right. \\ & \left. \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}} x)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} - \lambda_{1y} \right) dx \right\} + \\ & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \int_0^L \tilde{m}_y(x) (\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}} x) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\phi(0) = & -\frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_z(x) (\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}} x) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2y}} x)) dx + \right. \\ & \left. \int_0^L m_y(x) \left[\frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{2y}} x)}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}} x)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right] dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{zp}(L) = & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sin[\sqrt{-\lambda_{2y}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} - \lambda_{2y} \right) dx - \right. \\ & \left. \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sin[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} - \lambda_{1y} \right) dx \right\} - \\ & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \int_0^L \tilde{m}_y(x) (\cos[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)] - \cos[\sqrt{-\lambda_{2y}}(-x+L)]) dx \end{aligned}$$

$$f_\phi(L) = \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_z(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)] - \cos[\sqrt{-\lambda_{2y}}(-x+L)] \right) dx - \right. \\ \left. \int_0^L m_y(x) \left[\frac{\text{sen}[\sqrt{-\lambda_{2y}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\text{sen}[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right] dx \right\} \quad (6.96a-d)$$

Se $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_y$, isto é, $\lambda_{1y} < 0 < \lambda_{2y}$, os valores da representação algébrica, Eq. (6.93) ficam:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \tilde{\alpha}_{1y} & -\tilde{\alpha}_{5y} \\ 0 & -1/2 & \tilde{\alpha}_{6y} & \tilde{\alpha}_{4y} \\ \tilde{\alpha}_{1y} & \tilde{\alpha}_{5y} & -1/2 & 0 \\ -\tilde{\alpha}_{6y} & \tilde{\alpha}_{4y} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{w}(L) \\ \tilde{\phi}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\beta}_{5y} & \tilde{\beta}_{2y} \\ 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{3y} & -\tilde{\beta}_{6y} \\ -\tilde{\beta}_{5y} & \tilde{\beta}_{2y} & 0 & 0 \\ -\tilde{\beta}_{3y} & \tilde{\beta}_{6y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_z(0) \\ \tilde{M}_y(0) \\ \tilde{V}_z(L) \\ \tilde{M}_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_z(0) \\ \tilde{f}_\phi(0) \\ \tilde{f}_z(L) \\ \tilde{f}_\phi(L) \end{Bmatrix} \quad (6.97)$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_{1y} = \frac{1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}L) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}L) \right]$$

$$\tilde{\alpha}_{5y} = \frac{1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\sqrt{-\lambda_{1y}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}L) - \sqrt{\lambda_{2y}} \text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}}L) \right]$$

$$\tilde{\alpha}_{6y} = \frac{\rho A \omega^2}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}L)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} - \frac{\text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}}L)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \right]$$

$$\tilde{\alpha}_{4y} = \frac{1}{2(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\left(\lambda_{1y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}L) - \left(\lambda_{2y} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}L) \right]$$

$$\tilde{\beta}_{5y} = \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1y}}L)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\lambda_{1y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) - \frac{\text{senh}(\sqrt{\lambda_{2y}}L)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\lambda_{2y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) \right]$$

$$\tilde{\beta}_{2y} = \tilde{\beta}_{3y} = \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}L) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}L) \right)$$

$$\tilde{\beta}_{6y} = \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left[\frac{\sinh(\sqrt{\lambda_{2y}}L)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}}L)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right]$$

(6.98a-j)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{zp}(0) = & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ - \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_{2y}}x)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\lambda_{2y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) dx + \right. \\ & \left. \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}}x)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\lambda_{1y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) dx \right\} + \\ & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \int_0^L \tilde{m}_y(x) \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}x) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}x) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\phi(0) = & - \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_z(x) \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1y}}x) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2y}}x) \right) dx + \right. \\ & \left. \int_0^L m_y(x) \left[\frac{\sinh(\sqrt{\lambda_{2y}}x)}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1y}}x)}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right] dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{zp}(L) = & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ - \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sinh[\sqrt{\lambda_{2y}}(-x+L)]}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\lambda_{2y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) dx + \right. \\ & \left. \int_0^L \tilde{p}_z(x) \frac{\sin[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\lambda_{1y} - \frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2y}} \right) dx \right\} - \\ & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \int_0^L \tilde{m}_y(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)] - \cosh[\sqrt{\lambda_{2y}}(-x+L)] \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\phi(L) = & \frac{1}{2D_{2y}(\lambda_{2y} - \lambda_{1y})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_z(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)] - \cosh[\sqrt{\lambda_{2y}}(-x+L)] \right) dx - \right. \\ & \left. \int_0^L m_y(x) \left[\frac{\sinh[\sqrt{\lambda_{2y}}(-x+L)]}{\sqrt{\lambda_{2y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2y} \right) - \frac{\sin[\sqrt{-\lambda_{1y}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1y}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1y} \right) \right] dx \right\} \end{aligned}$$

(6.99e-f)

6.5. A FLEXÃO NA DIREÇÃO Z

No capítulo 4 as contribuições da flexão na direção z sob as hipóteses da teoria clássica (Euler-Bernoulli) e da Teoria de Timoshenko foram obtidas indiretamente por inspeção da transformação de eixos e dos valores da flexão em y . No entanto, aqui, optou-se por estudar diretamente o problema da flexão na direção z sob as hipóteses da teoria clássica (Euler-Bernoulli) e da Teoria de Timoshenko. Com intuito de se evitar repetições sistemáticas de algebrismos já explorados, as expressões serão deduzidas em muitos casos por analogia ao estudo da flexão em y (quando não houver prejuízo da clareza e concatenação da explicação em curso).

- **O problema real (Euler-Bernoulli)**

Conforme já discutido, na teoria de Euler-Bernoulli a deformação por cortante e a inércia rotatória são desprezadas. Seja uma barra prismática submetida a uma flexão em z com ação $p_y(x)$ e sendo o sistema de referência local (x,y,z) . Além disso, $(y$ e $z)$ são os eixos principais de inércia conforme indicado na Fig. 6.5.

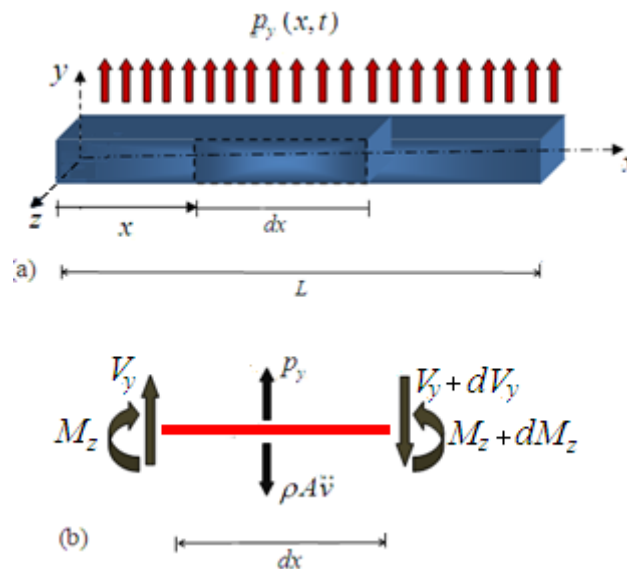


Figura 6.5 - Barra sob efeito de flexão dinâmica em z

Do equilíbrio de forças e momentos no elemento na barra, tem-se:

$$\frac{\partial V_y(x,t)}{\partial x} + p_y(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_z(x,t)}{\partial x} + V_y(x,t) = 0 \quad (6.100)$$

Devido à configuração da curvatura na flexão em z e as relações constitutivas (Lei de Hooke), as relações força-deslocamento ficam:

$$M_z(x,t) = EI_z \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

$$V_y(x,t) = -\frac{dM_z(x,t)}{dx} = -EI_z \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3}$$

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (6.101a-c)$$

Substituindo a Eq. (6.101a-c) na Eq.(6.100) e fazendo $k_z^4 = \rho A / EI_z$, obtém-se a equação de movimento da flexão em z:

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + k_z^4 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p_y(x,t)}{EI_z} \quad (6.102)$$

Convém notar que Eq. (6.102) é análoga à equação de movimento da flexão em y Eq. (6.54), bastando uma permuta das rigidezes. No entanto, deve-se observar que $\varphi(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$, $M_z(x,t) = EI_z \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ têm sinais opostos aos de suas contrapartes na flexão em y.

Assim, por analogia à flexão em y, as equações de movimento na flexão em z do problema real no domínio da frequência ficam:

$$\frac{d^4 \tilde{v}(x)}{dx^4} - \tilde{k}_z^4 \tilde{v}(x) = \frac{\tilde{p}_y(x)}{EI_z} \quad (6.103)$$

- **O problema fundamental (Euler-Bernoulli)**

Por analogia ao problema real (6.103), tem-se a equação governante da flexão em z no domínio da frequência do problema fundamental:

$$\frac{d^4 \tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx^4} - \tilde{k}_z^4 \tilde{v}^*(x, \hat{x}) = \frac{\tilde{p}_y^*(x, \hat{x})}{EI_z} \quad (6.103a)$$

As relações força-deslocamento fundamentais ficam:

$$\tilde{V}_y^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{d^3 \tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx^3} \quad (6.104a)$$

$$\tilde{M}_z^*(x, \hat{x}) = EI_z \frac{d^2 \tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx^2} = EI_z \frac{d\tilde{\varphi}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (6.104b)$$

$$\tilde{\varphi}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (6.104c)$$

Então, fazendo-se as devidas compatibilizações nas soluções fundamentais desenvolvidas originalmente por PROVIDAKIS e BESKOS (1986) para flexão em y , obtêm-se suas correspondentes em z :

$$\tilde{v}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{4EI_z \tilde{k}_z^3} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \operatorname{sen}(\tilde{k}_z (L - r)) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \operatorname{senh}(\tilde{k}_z (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{\varphi}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{v}^*}{dx} = -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4EI_z \tilde{k}_z^2} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \cos(\tilde{k}_z (L - r)) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \cos(\tilde{k}_z (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{M}_z^*(x, \hat{x}) = EI_z \frac{d^2 \tilde{v}^*}{dx^2} = -\frac{1}{4\tilde{k}_z} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \operatorname{sen}(\tilde{k}_z (L - r)) + \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \operatorname{senh}(\tilde{k}_z (L - r)) \right\}$$

$$\tilde{V}_y^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{d^3 \tilde{v}^*}{dx^3} = -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \cos(\tilde{k}_z (L - r)) + \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \cosh(\tilde{k}_z (L - r)) \right\}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{d\tilde{v}^*}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{4EI_z \tilde{k}_z^2} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \cos(\tilde{k}_z (L - r)) - \sec h(\tilde{k}_z L) \cosh(\tilde{k}_z (L - r)) \right\} \\ \tilde{\varphi}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{d\tilde{\varphi}^*}{d\hat{x}} = \frac{1}{4\tilde{k}_z EI_z} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \text{sen}(\tilde{k}_z (L - r)) + \sec h(\tilde{k}_z L) \text{senh}(\tilde{k}_z (L - r)) \right\} \\ \tilde{M}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{d\tilde{M}_z^*}{d\hat{x}} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{4} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \cos(\tilde{k}_z (L - r)) + \sec h(\tilde{k}_z L) \cosh(\tilde{k}_z (L - r)) \right\} \\ \tilde{V}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{d\tilde{V}_y^*}{d\hat{x}} = \frac{\tilde{k}_z}{4} \left\{ \sec(\tilde{k}_z L) \text{sen}(\tilde{k}_z (L - r)) - \sec h(\tilde{k}_z L) \text{senh}(\tilde{k}_z (L - r)) \right\} \quad (6.105a-h)\end{aligned}$$

Uma conversão análoga pode ainda ser estendida para o caso da solução alternativa para flexão em y proposta nesta tese, Eq. (6.52).

$$\tilde{v}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\frac{\text{senh}(-\sqrt{\lambda_{1z}} r)}{\sqrt{\lambda_{1z}}} + \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} r)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \right]$$

onde: $\lambda_{1z} = \sqrt{k_z^4}$ e $\lambda_{2z} = -\sqrt{k_z^4}$

Os valores fundamentais associados às rotações e esforços no ponto-campo ficam:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^* &= \frac{d\tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} r) \right] \\ \tilde{V}_y^*(x, \hat{x}) &= -EI_z \frac{d^3 \tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\lambda_{1z} \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} r) - \lambda_{2z} \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \\ \tilde{M}_z^*(x, \hat{x}) &= EI_z \frac{d^2 \tilde{v}^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{1}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\sqrt{\lambda_{1z}} \text{senh}(\sqrt{\lambda_{1z}} r) + \sqrt{-\lambda_{2z}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \\ \tilde{v}_{,\hat{x}}^* &= \frac{d\tilde{v}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} r) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{,\hat{x}}^* &= \frac{d\varphi^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\sqrt{\lambda_{1z}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1z}} r) + \sqrt{-\lambda_{2z}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \\ \tilde{V}_{y,\hat{x}}^* &= \frac{d\tilde{V}_y^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{1}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\lambda_{1z} \sqrt{\lambda_{1z}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1z}} r) + \lambda_{2z} \sqrt{-\lambda_{2z}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \\ \tilde{M}_{z,x}^* &= \frac{d\tilde{M}_z^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left[\lambda_{1z} \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} r) - \lambda_{2z} \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \quad (6.106a-h)\end{aligned}$$

- **A representação integral (Euler-Bernoulli)**

A equação integral pode ser estabelecida utilizando-se a ponderação da equação governante do problema real Eq. (6.102) pelo deslocamento fundamental $\tilde{v}^*$:

$$\int_0^L \left(\frac{d^4 \tilde{v}(x)}{dx^4} - \tilde{k}_z^4 \tilde{v}(x) - \frac{\tilde{p}_y(x)}{EI_z} \right) \tilde{v}^* dx = 0 \quad (6.107)$$

Após as integrações por partes da Eq. (6.107), tem-se:

$$\begin{aligned}& \int_0^L \tilde{v} \left(\frac{d^4 \tilde{v}^*}{dx^4} - \tilde{k}_z^4 \tilde{v}^* \right) dx + \left[\frac{d^3 \tilde{v}(x)}{dx^3} \tilde{v}^* \right]_0^L - \left[\frac{d^2 \tilde{v}(x)}{dx^2} \frac{d\tilde{v}^*(x)}{dx} \right]_0^L + \\ & + \left[\frac{d\tilde{v}(x)}{dx} \frac{d^2 \tilde{v}^*(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[\tilde{v}(x) \frac{d^3 \tilde{v}^*(x)}{dx^3} \right]_0^L = \int_0^L \frac{\tilde{p}_y(x)}{EI_z} \tilde{v}^* dx\end{aligned} \quad (6.108)$$

Substituindo-se as relações força-deslocamento reais Eq. (6.101a-c) e fundamentais Eq. (6.104a-c) na Eq. (6.108), e ainda utilizando-se a propriedade de filtro do delta de Dirac, a equação integral de deslocamento fica:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\hat{x}) + \left[\tilde{v}(x) \tilde{V}_y^*(x, \hat{x}) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{M}_z^*(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\ \left[\tilde{V}_y(x) \tilde{v}^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_z(x) \tilde{\varphi}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \tilde{p}_y(x) \tilde{v}^*(x, \hat{x}) dx\end{aligned} \quad (6.109)$$

Então, a equação integral das rotações é obtida pela derivada da Eq. (6.109), resultando em:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\hat{x}) + \left[\bar{v}(x) \bar{V}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \bar{\varphi}(x) \bar{M}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ \left[\bar{V}_y(x) \bar{v}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \bar{M}_z(x) \bar{\varphi}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{-0}^L [\bar{p}_y(x) \bar{v}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (6.110)$$

- **A representação algébrica (Euler-Bernoulli)**

Fazendo-se a colocação do ponto-fonte no contorno da barra nas Eq. (6.109) e Eq. (6.110), obtém-se o sistema algébrico:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{\varphi}(0) \\ \bar{v}(L) \\ \bar{\varphi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\bar{V}_y^*(0,0+\xi) & -\bar{M}_z^*(0,0+\xi) & \bar{V}_y^*(L,0+\xi) & \bar{M}_z^*(L,0+\xi) \\ -\bar{V}_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\bar{M}_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \bar{V}_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \bar{M}_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -\bar{V}_y^*(0,L-\xi) & -\bar{M}_z^*(0,L-\xi) & \bar{V}_y^*(L,L-\xi) & \bar{M}_z^*(L,L-\xi) \\ -\bar{V}_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\bar{M}_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \bar{V}_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \bar{M}_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{\varphi}(0) \\ \bar{v}(L) \\ \bar{\varphi}(L) \end{Bmatrix} = \end{aligned} \quad (6.111)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -\bar{v}^*(0,0+\xi) & -\bar{\varphi}^*(0,0+\xi) & \bar{v}^*(L,0+\xi) & \bar{\varphi}^*(L,0+\xi) \\ -\bar{v}_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\bar{\varphi}_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \bar{v}_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \bar{\varphi}_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -\bar{v}^*(0,L-\xi) & -\bar{\varphi}^*(0,L-\xi) & \bar{v}^*(L,L-\xi) & \bar{\varphi}^*(L,L-\xi) \\ -\bar{v}_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\bar{\varphi}_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \bar{v}_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \bar{\varphi}_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_y(0) \\ \bar{M}_z(0) \\ \bar{V}_y(L) \\ \bar{M}_z(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_y(0) \\ \bar{f}_{\varphi}(0) \\ \bar{f}_y(L) \\ \bar{f}_{\varphi}(L) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Após o cálculo dos termos para as soluções fundamentais de PROVIDAKIS e BESKOS (1986) adaptadas para direção z, Eqs. (6.105a-h), os valores explícitos da Eq. (6.111) ficam:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{\varphi}(0) \\ \bar{v}(L) \\ \bar{\varphi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1/2 & \bar{\alpha}_{2z} & -\bar{\alpha}_{1z} & 0 \\ -\bar{\alpha}_{3z} & -1/2 & 0 & -\bar{\alpha}_{4z} \\ -\bar{\alpha}_{1z} & 0 & -1/2 & -\bar{\alpha}_{2z} \\ 0 & -\bar{\alpha}_{4z} & \bar{\alpha}_{3z} & -1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{\varphi}(0) \\ \bar{v}(L) \\ \bar{\varphi}(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\bar{\beta}_{1z} & 0 & 0 & \bar{\beta}_{2z} \\ 0 & -\bar{\beta}_{4z} & \bar{\beta}_{3z} & 0 \\ 0 & -\bar{\beta}_{2z} & \bar{\beta}_{1z} & 0 \\ \bar{\beta}_{3z} & 0 & 0 & \bar{\beta}_{4z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_y(0) \\ \bar{M}_z(0) \\ \bar{V}_y(L) \\ \bar{M}_z(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_y(0) \\ \bar{f}_{\varphi}(0) \\ \bar{f}_y(L) \\ \bar{f}_{\varphi}(L) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.112)$$

onde:

$$\bar{\alpha}_{1z} = \bar{\alpha}_{4z} = [\sec(\bar{k}_z L) + \sec h(\bar{k}_z L)]/4, \quad \bar{\alpha}_{2z} = [\tan(\bar{k}_z L) + \tanh(\bar{k}_z L)]/(4\bar{k}_z)$$

$$\tilde{\alpha}_{3z} = [\tan(\tilde{k}_z L) - \tanh(\tilde{k}_z L)] \tilde{k}_z / 4,$$

$$\tilde{\beta}_{1z} = [\tan(\tilde{k}_z L) - \tanh(\tilde{k}_z L)] / (4\tilde{k}_z^3 EI_z),$$

$$\tilde{\beta}_{2z} = \tilde{\beta}_{3z} = [\sec(\tilde{k}_z L) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L)] / (4\tilde{k}_z^2 EI_z)$$

$$\tilde{\beta}_{4z} = [tg(\tilde{k}_z L) + tgh(\tilde{k}_z L)] / (4\tilde{k}_z EI_z) \quad (6.112a-h)$$

e,

$$\tilde{f}_y(0) = \frac{1}{4EI_z \tilde{k}_z^3} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_y(x) [\sec(\tilde{k}_z L) \operatorname{sen}(\tilde{k}_z (L-x)) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \operatorname{senh}(\tilde{k}_z (L-x))] \right\} dx$$

$$\tilde{f}_y(L) = \frac{1}{4EI_z \tilde{k}_z^3} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_y(x) [\sec(\tilde{k}_z L) \operatorname{sen}(\tilde{k}_z x) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \operatorname{senh}(\tilde{k}_z x)] \right\} dx$$

$$\tilde{f}_\varphi(0) = -\frac{1}{4EI_z \tilde{k}_z^2} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_y(x) [\sec(\tilde{k}_z L) \cos \tilde{k}_z (L-x) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \cosh(\tilde{k}_z (L-x))] \right\} dx$$

$$\tilde{f}_\varphi(L) = \frac{1}{4EI_z \tilde{k}_z^2} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_y(x) [\sec(\tilde{k}_z L) \cos(\tilde{k}_z x) - \operatorname{sech}(\tilde{k}_z L) \cosh(\tilde{k}_z x)] \right\} dx \quad (6.113a-d)$$

Agora, se for também utilizada a solução alternativa proposta nesta tese, Eq. (6.106a-h), o sistema da Eq. (6.111) fica:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \tilde{\alpha}_{z18Ls} & \tilde{\alpha}_{z19L} \\ 0 & -1/2 & \tilde{\alpha}_{z20L} & -\tilde{\alpha}_{z21Ls} \\ \tilde{\alpha}_{z18Ls} & -\tilde{\alpha}_{z19L} & -1/2 & 0 \\ -\tilde{\alpha}_{z20L} & -\tilde{\alpha}_{z21Ls} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{Bmatrix} = \quad (6.114)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\beta}_{z18L} & \tilde{\beta}_{z19Ls} \\ 0 & 0 & \tilde{\beta}_{z20Ls} & \tilde{\beta}_{z21L} \\ -\tilde{\beta}_{z18L} & \tilde{\beta}_{z19Ls} & 0 & 0 \\ \tilde{\beta}_{z20Ls} & -\tilde{\beta}_{z21L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_z(0) \\ \tilde{M}_y(0) \\ \tilde{V}_z(L) \\ \tilde{M}_y(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_y(0) \\ \tilde{f}_\varphi(0) \\ \tilde{f}_y(L) \\ \tilde{f}_\varphi(L) \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\check{\alpha}_{z18Ls} = \frac{1}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\lambda_{2z} \sqrt{-\lambda_{2z}} \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) - \lambda_{1z} \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) \right)$$

$$\check{\alpha}_{z19L} = \frac{1}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\sqrt{\lambda_{1z}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) + \sqrt{-\lambda_{2z}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right)$$

$$\check{\alpha}_{z20L} = \frac{1}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\lambda_{1z} \sqrt{\lambda_{1z}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) + \lambda_{2z} \sqrt{-\lambda_{2z}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right)$$

$$\check{\alpha}_{z21Ls} = \frac{1}{2(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\lambda_{1z} \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) - \lambda_{2z} \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right)$$

$$\check{\beta}_{z18L} = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(-\frac{\sinh(\sqrt{\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{\lambda_{1z}}} + \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \right)$$

$$\check{\beta}_{z19Ls} = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) \right)$$

$$\check{\beta}_{z20Ls} = \frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) \right)$$

$$\check{\beta}_{z21L} = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \left(\sqrt{\lambda_{1z}} \sinh(\sqrt{\lambda_{1z}} L) + \sqrt{-\lambda_{2z}} \sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right)$$

e

$$\check{f}_y(0) = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \int_0^L \left\{ \check{p}_y(x) \left[\frac{\sinh(-\sqrt{\lambda_{1z}} x)}{\sqrt{\lambda_{1z}}} + \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{2z}} x)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \right] \right\} dx$$

$$\check{f}_y(L) = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \int_0^L \left\{ \check{p}_y(x) \left[\frac{\sinh[-\sqrt{\lambda_{1z}}(-x+L)]}{\sqrt{\lambda_{1z}}} + \frac{\sin[\sqrt{-\lambda_{2z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \right] \right\} dx$$

$$f_\varphi(0) = -\frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \int_0^L \left\{ \check{p}_y(x) [\cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} x) - \cosh(\sqrt{\lambda_{1z}} x)] \right\} dx$$

$$f_{\varphi}(L) = \frac{1}{2EI_z(\lambda_{1z} - \lambda_{2z})} \int_0^L \left\{ \tilde{p}_y(x) [\cos[\sqrt{-\lambda_{2z}}(-x+L)] - \cosh[\sqrt{\lambda_{1z}}(-x+L)]] \right\} dx \quad (6.115a-h)$$

- **O problema real (Timoshenko)**

Conforme dito anteriormente, na teoria de Timoshenko ambos os efeitos de deformação por cortante e inércia de rotação são incluídos no modelo. O sistema local (x,y,z) é fixado onde os dois últimos são os eixos principais de inércia. As forças e as propriedades geométricas estão indicadas na Fig. 6.6

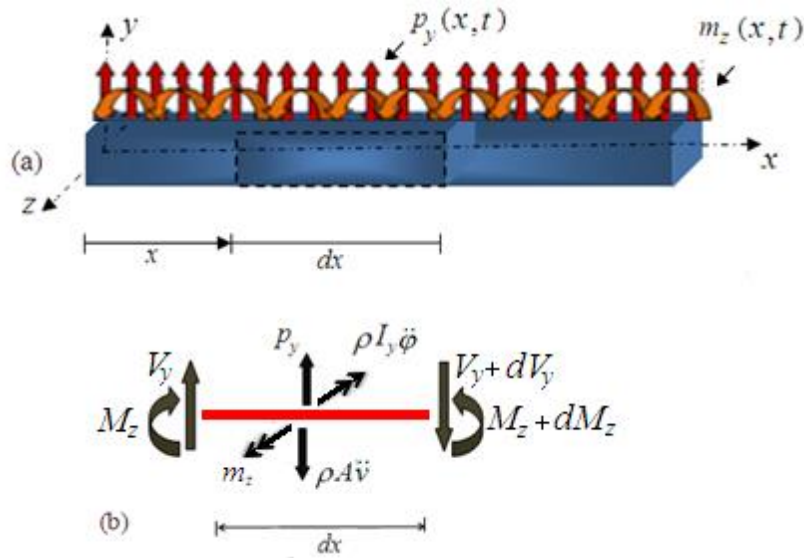


Figura 6.6 - Barra submetida à flexão dinâmica em z, com carregamento lateral e momento

Fazendo-se o equilíbrio em força em y e momento em z fica:

$$\frac{\partial V_y(x,t)}{\partial x} + p_y(x,t) - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t) = 0 \quad (6.116)$$

$$\frac{\partial M_z(x,t)}{\partial x} + V_y(x,t) + m_z(x,t) - \rho I_z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x,t) = 0 \quad (6.117)$$

O deslocamento axial pode ser escrito em função do ângulo de rotação da seção transversal e da profundidade da fibra, vide Fig. 6.7.

$$u(x,t) = -y\varphi(x,t) \quad (6.118a)$$

Já a distorção no plano xy é dada por:

$$\gamma_{xy}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (6.118b)$$

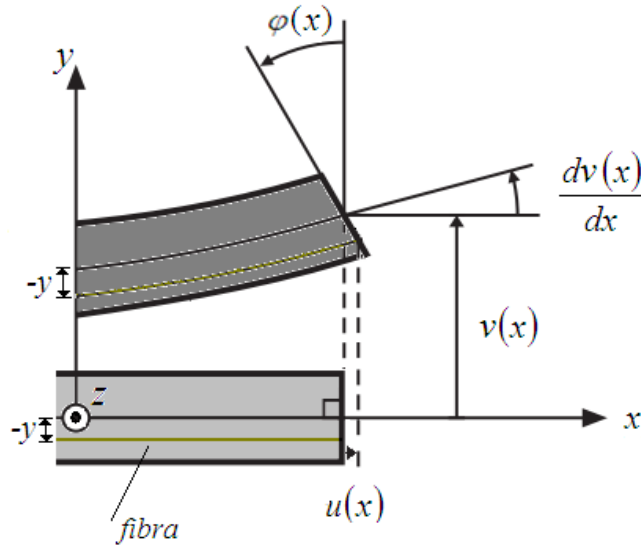


Figura 6.7 – Cinemática da seção transversal - Modelo de Timoshenko
(Adaptada de ANDERSEN e NIELSEN, 2008)

A relação entre a inclinação da elástica $\partial v(x,t)/\partial x$ e a rotação da seção $\varphi(x,t)$ na direção z é obtida a partir de (6.118a) e (6.118b) resultando em:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \varphi(x,t) + \gamma_{xy}(x,t) \quad (6.118c)$$

As relações (momento-curvatura e força cortante-deslocamento) são dadas por:

$$M_z(x,t) = EI_z \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \quad (6.119)$$

$$V_y(x,t) = \kappa GA \gamma_{xy}(x,t) = \kappa GA \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \varphi(x,t) \right)$$

Substituindo a Eq. (6.119) e (6.118c) nas Eqs. (6.116) e (6.117), têm-se as equações de movimento:

$$\kappa GA \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = -p_y(x,t) \quad (6.120)$$

$$\kappa GA \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + EI_z \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} - \kappa GA \phi(x) - \rho I_z \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = -m_z(x,t) \quad (6.121)$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -D_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D_1 \frac{\partial}{\partial x} & D_{2z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_1 - \rho I_z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x,t) \\ \phi(x,t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p_y(x,t) \\ m_z(x,t) \end{Bmatrix} \quad (6.122)$$

onde, $D_1 = \kappa GA$ e $D_{2z} = EI_z$

Se a Eq. (6.122) for escrita no domínio da frequência fica:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & D_{2z} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_z \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{p}_y(x) \\ \tilde{m}_z(x) \end{Bmatrix} \quad (6.123)$$

• O problema fundamental (Timoshenko)

A equação governante da flexão em z da viga de Timoshenko fundamental pode ser escrita analogamente ao problema real (6.123), resultando em:

$$\begin{bmatrix} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & D_{2z} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_y \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{v}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{p}_y^*(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \tilde{m}_z^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (6.124)$$

onde $\tilde{p}_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $\tilde{m}_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$. Observar que: $\tilde{v}_p^*(x, \hat{x})$ e $\tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x})$ são as soluções fundamentais em deslocamento e em rotação devidos ao carregamento $\tilde{p}_y^*(x, \hat{x})$ e $\tilde{v}_m^*(x, \hat{x})$ e $\tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x})$ são as soluções fundamentais em deslocamento e em rotação devidos ao carregamento $\tilde{m}_z^*(x, \hat{x})$.

Na literatura, as soluções fundamentais para a viga de Timoshenko são apresentadas por ANTES et al. (2004) apenas para a flexão em y . Assim, é necessária a obtenção dessas soluções para determinação do problema fundamental da flexão em z . Nesta tese utilizou-se uma estratégia para este fim, que é descrita a seguir.

Convém notar que as equações de movimento da flexão em z e em torno de y são semelhantes, exceto pelos sinais trocados na diagonal secundária da Eq. (6.124) e, naturalmente, o eixo de flexão. Se o momento de inércia for atualizado de I_y para I_z , o determinante da matriz dos operadores da Eq. (6.124) não altera a forma polinomial da equação característica, levando, portanto, a uma função escalar ς análoga às Eq. (6.81) e Eq. (6.82) que foram apresentadas por ANTES *et al.* (2004) na flexão em y . Assim, as soluções fundamentais da flexão em z podem ser facilmente escritas, tomando o cuidado com a mudança de sinais na matriz adjunta dos operadores, pois eles se propagam para as soluções fundamentais adaptadas.

Se $\lambda_{1z} < \lambda_{2z} < 0$, os valores das soluções fundamentais para a flexão em z podem ser escritos como:

$$\tilde{v}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\lambda_{1z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}}r)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\lambda_{2z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \right]$$

$$\tilde{\varphi}_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}}r) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}}r) \right)$$

$$\tilde{v}_m^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}}r) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}}r) \right)$$

$$\tilde{\varphi}_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}}r)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}}r)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) \right]$$

$$\tilde{V}_{yp}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}}r) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}}r) \right]$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{zp}^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\sqrt{-\lambda_{1z}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \sqrt{-\lambda_{2z}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \\ \tilde{V}_{ym}^*(x, \hat{x}) &= -\frac{\rho A \omega^2}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} r)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \right] \\ \tilde{M}_{zm}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_{1z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} r) \right] \\ &\quad (6.125a-h)\end{aligned}$$

Já para o intervalo $\lambda_{1z} < 0 < \lambda_{2z}$, as soluções fundamentais de Antes *et al.*, (2004) adaptadas para flexão em z, ficam:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_p^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\lambda_{1z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) - \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} r)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\lambda_{2z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \right] \\ \tilde{\varphi}_p^*(x, \hat{x}) &= -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} r) \right) \\ \tilde{v}_m^*(x, \hat{x}) &= \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} r) \right) \\ \tilde{\varphi}_m^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) - \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} r)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) \right] \\ \tilde{V}_{yp}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_1 + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} r) \right] \\ \tilde{M}_{zp}^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\sqrt{-\lambda_{1z}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \sqrt{\lambda_{2z}} \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} r) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{ym}^*(x, \hat{x}) &= -\frac{\rho A \omega^2}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{1z}} r)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} - \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_{2z}} r)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \right] \\ \tilde{M}_{zm}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} r) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} r) \right]\end{aligned}\quad (6.126a-h)$$

A equação integral em deslocamento pode ser estabelecida utilizando-se a ponderação da equação governante do problema real, Eq. (6.123), pelos campos fundamentais em deslocamento e rotação decorrentes da ativação apenas do impulso em p_y :

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & D_{2z} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_z \omega^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}(x) \\ \tilde{\varphi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_y(x) \\ \tilde{m}_z(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\varphi}_p^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (6.127)$$

Após as integrações por partes da Eq. (6.127) e a substituição das relações constitutivas resulta:

$$\begin{aligned}& \left[\tilde{V}_y \tilde{v}_p^* - \tilde{V}_{yp} \tilde{v} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[\tilde{M}_z \tilde{\varphi}_p^* - \tilde{M}_{zp} \tilde{\varphi} \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left(D_1 \tilde{v}_p^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{v}_p^* + D_1 \tilde{\varphi}_p^{*'} \right) \tilde{v} dx + \\ & + \int_0^L \left(-D_1 \tilde{v}_p^{*'} + D_{2z} \tilde{\varphi}_p^{*''} - D_1 \tilde{\varphi}_p^{*'} + \rho I_z \omega^2 \tilde{\varphi}_p^* \right) \tilde{\varphi} dx = - \int_0^L \left(\tilde{p}_y \tilde{v}_p^* + \tilde{m}_z \tilde{\varphi}_p^* \right) dx\end{aligned}\quad (6.128)$$

Como apenas o impulso em força p_y é ativado, então:

$$D_1 \tilde{v}_p^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{v}_p^* - D_1 \tilde{\varphi}_p^{*'} = \delta(x, \hat{x})$$

e,

$$-D_1 \tilde{v}_p^{*'} + D_{2z} \tilde{\varphi}_p^{*''} - D_1 \tilde{\varphi}_p^{*'} + \rho I_z \omega^2 \tilde{\varphi}_p^* = 0.$$

Com isso, se essas relações e o delta de Dirac forem substituídos na Eq. (6.128) resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\hat{x}) + \left[\tilde{v}(x) \tilde{V}_y^*(x, \hat{x}) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{M}_z^*(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\ \left[\tilde{V}_y(x) \tilde{v}^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_z(x) \tilde{\varphi}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \tilde{p}_y(x) \tilde{v}^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (6.129)$$

Analogamente, ativando-se apenas o impulso em momento m_z , o resíduo ponderado fica:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \rho A \omega^2 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & D_{2z} \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + \rho I_z \omega^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}(x) \\ \tilde{\varphi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_y(x) \\ \tilde{m}_z(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\varphi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (6.130)$$

Após as integrações por partes combinadas com as relações constitutivas e ainda com $D_1 \tilde{v}_m^{*''} + \rho A \omega^2 \tilde{v}_m^* - D_1 \tilde{\varphi}_m^{*'} = 0$ e $-D_1 \tilde{v}_m^{*'} + D_{2z} \tilde{\varphi}_m^{*''} - D_1 \tilde{\varphi}_m^* + \rho I_z \omega^2 \tilde{\varphi}_m^* = \delta(x, \hat{x})$ chega-se a equação integral das rotações:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\hat{x}) + \left[\tilde{v}(x) \tilde{V}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \tilde{\varphi}(x) \tilde{M}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} = \\ \left[\tilde{V}_y(x) \tilde{v}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_z(x) \tilde{\varphi}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{-0}^L [\tilde{p}_y(x) \tilde{v}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] dx \end{aligned} \quad (6.131)$$

Portanto, a expressão geral da representação algébrica da barra da flexão em z no domínio da frequência segundo a teoria de Timoshenko:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} -\tilde{V}_{yp}^*(0,0+\xi) & -\tilde{M}_{zp}^*(0,0+\xi) \\ -\tilde{V}_{ym}^*(0,0+\xi) & -\tilde{M}_{zm}^*(0,0+\xi) \\ -\tilde{V}_{yp}^*(0,L-\xi) & -\tilde{M}_{zp}^*(0,L-\xi) \\ -\tilde{V}_{ym}^*(0,L-\xi) & -\tilde{M}_{zm}^*(0,L-\xi) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{array} \right\} = \quad (6.132)$$

$$\left[\begin{array}{cc} -\tilde{v}_p^*(0,0+\xi) & -\tilde{\varphi}_p^*(0,0+\xi) \\ -\tilde{v}_m^*(0,0+\xi) & -\tilde{\varphi}_m^*(0,0+\xi) \\ -\tilde{v}_p^*(0,L-\xi) & -\tilde{\varphi}_p^*(0,L-\xi) \\ -\tilde{v}_m^*(0,L-\xi) & -\tilde{\varphi}_m^*(0,L-\xi) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{V}_y(0) \\ \tilde{M}_z(0) \\ \tilde{V}_y(L) \\ \tilde{M}_z(L) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{f}_y(0) \\ \tilde{f}_\varphi(0) \\ \tilde{f}_y(L) \\ \tilde{f}_\varphi(L) \end{array} \right\}$$

Para $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_z$ isto é: $\lambda_{1z} < \lambda_{2z} < 0$, após o cálculo de cada termo da Eq. (6.132), o sistema algébrico fica:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \check{v}(0) \\ \check{\varphi}(0) \\ \check{v}(L) \\ \check{\varphi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \check{\alpha}_{1z} & \check{\alpha}_{5z} \\ 0 & -1/2 & -\check{\alpha}_{6z} & \check{\alpha}_{4z} \\ \check{\alpha}_{1z} & -\check{\alpha}_{5z} & -1/2 & 0 \\ \check{\alpha}_{6z} & \check{\alpha}_{4z} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{v}(0) \\ \check{\varphi}(0) \\ \check{v}(L) \\ \check{\varphi}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \check{\beta}_{5z} & -\check{\beta}_{2z} \\ 0 & 0 & \check{\beta}_{3z} & -\check{\beta}_{6z} \\ -\check{\beta}_{5z} & -\check{\beta}_{2z} & 0 & 0 \\ \check{\beta}_{3z} & \check{\beta}_{6z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{V}_y(0) \\ \check{M}_z(0) \\ \check{V}_y(L) \\ \check{M}_z(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \check{f}_y(0) \\ \check{f}_\varphi(0) \\ \check{f}_y(L) \\ \check{f}_\varphi(L) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.133)$$

onde:

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{1z} &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right] \\ \check{\alpha}_{5z} &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\sqrt{-\lambda_{1z}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \sqrt{-\lambda_{2z}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right] \\ \check{\alpha}_{6z} &= \frac{\rho A \omega^2}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \right] \\ \check{\alpha}_{4z} &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right] \\ \check{\beta}_{2z} = \check{\beta}_{3z} &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} L) \right) \\ \check{\beta}_{5z} &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_y \omega^2}{D_{2z}} - \lambda_{2z} \right) - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} - \lambda_{1z} \right) \right] \\ \check{\beta}_{6z} &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.134a-h)$$

e

$$\begin{aligned} \check{f}_{yp}(0) &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ \int_0^L \check{p}_y(x) \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}} x)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} - \lambda_{2z} \right) dx - \right. \\ &\quad \left. \int_0^L \check{p}_y(x) \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} x)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} - \lambda_{1z} \right) dx \right\} - \\ &\quad \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \int_0^L \check{m}_z(x) \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} x) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}} x) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\varphi}(0) &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_y(x) \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}}x) - \cos(\sqrt{-\lambda_{2z}}x) \right) dx - \right. \\
&\quad \left. \int_0^L \tilde{m}_z(x) \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{2z}}x)}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) - \frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}}x)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) \right] dx \right\} \\
\tilde{f}_{yp}(L) &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_y(x) \frac{\text{sen}[\sqrt{-\lambda_{2z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} - \lambda_{2z} \right) dx - \right. \\
&\quad \left. \int_0^L \tilde{p}_y(x) \frac{\text{sen}[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} - \lambda_{1z} \right) dx \right\} + \\
&\quad \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \int_0^L \tilde{m}_z(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)] - \cos[\sqrt{-\lambda_{2z}}(-x+L)] \right) dx \\
f_{\varphi}(L) &= -\frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_y(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)] - \cos[\sqrt{-\lambda_{2z}}(-x+L)] \right) dx + \right. \\
&\quad \left. \int_0^L m_z(x) \left[\frac{\text{sen}[\sqrt{-\lambda_{2z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) - \frac{\text{sen}[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) \right] dx \right\}
\end{aligned} \tag{6.134i-m}$$

Se $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_z$, isto é, $\lambda_{1z} < 0 < \lambda_{2z}$, os valores da representação algébrica, Eq. (6.132) ficam:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \tilde{\alpha}_{1z} & \tilde{\alpha}_{5z} \\ 0 & -1/2 & -\tilde{\alpha}_{6z} & \tilde{\alpha}_{4z} \\ \tilde{\alpha}_{1z} & -\tilde{\alpha}_{5z} & -1/2 & 0 \\ \tilde{\alpha}_{6z} & \tilde{\alpha}_{4z} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{Bmatrix} = \tag{6.135}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\beta}_{5z} & -\tilde{\beta}_{2z} \\ 0 & 0 & \tilde{\beta}_{3z} & \tilde{\beta}_{6z} \\ -\tilde{\beta}_{5z} & -\tilde{\beta}_{2z} & 0 & 0 \\ \tilde{\beta}_{3z} & -\tilde{\beta}_{6z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_y(0) \\ \tilde{M}_z(0) \\ \tilde{V}_y(L) \\ \tilde{M}_z(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_y(0) \\ \tilde{f}_{\varphi}(0) \\ \tilde{f}_y(L) \\ \tilde{f}_{\varphi}(L) \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\tilde{\alpha}_{1z} = \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}}L) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}}L) \right]$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{5z} &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\sqrt{-\lambda_{1z}} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \sqrt{\lambda_{2z}} \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} L) \right] \\
\tilde{\alpha}_{6z} &= \frac{\rho A \omega^2}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} - \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \right] \\
\tilde{\alpha}_{4z} &= \frac{1}{2(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\left(\lambda_{1z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \left(\lambda_{2z} + \frac{\rho A \omega^2}{D_1} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} L) \right] \\
\tilde{\beta}_{5z} &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\lambda_{1z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) - \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\lambda_{2z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) \right] \\
\tilde{\beta}_{z2} = \tilde{\beta}_{z3} &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} L) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} L) \right) \\
\tilde{\beta}_{z6} &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} L)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) - \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} L)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.136a-j}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{yp}(0) &= \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ - \int_0^L \tilde{p}_y(x) \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} x)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\lambda_{2z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) dx + \right. \\
&\quad \left. \int_0^L \tilde{p}_y(x) \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} x)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\lambda_{1z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) dx \right\} - \\
&\quad \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \int_0^L \tilde{m}_z(x) \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} x) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} x) \right) dx \\
f_\varphi(0) &= \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_y(x) \left(\cos(\sqrt{-\lambda_{1z}} x) - \cosh(\sqrt{\lambda_{2z}} x) \right) dx - \right. \\
&\quad \left. \int_0^L m_z(x) \left[\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda_{2z}} x)}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda_{1z}} x)}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) \right] dx \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{yp}(L) = & \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ - \int_0^L \tilde{p}_y(x) \frac{\sinh[\sqrt{\lambda_{2z}}(-x+L)]}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\lambda_{2z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) dx + \right. \\
& \left. \int_0^L \tilde{p}_y(x) \frac{\sinh[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\lambda_{1z} - \frac{D_1 - \rho I_z \omega^2}{D_{2z}} \right) dx \right\} + \\
& \frac{1}{2D_1(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \int_0^L \tilde{m}_z(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)] - \cosh[\sqrt{\lambda_{2z}}(-x+L)] \right) dx \\
f_\varphi(L) = & - \frac{1}{2D_{2z}(\lambda_{2z} - \lambda_{1z})} \left\{ \int_0^L \tilde{p}_y(x) \left(\cos[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)] - \cosh[\sqrt{\lambda_{2z}}(-x+L)] \right) dx + \right. \\
& \left. \int_0^L m_z(x) \left[\frac{\sinh[\sqrt{\lambda_{2z}}(-x+L)]}{\sqrt{\lambda_{2z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{2z} \right) - \frac{\sinh[\sqrt{-\lambda_{1z}}(-x+L)]}{\sqrt{-\lambda_{1z}}} \left(\frac{\rho A \omega^2}{D_1} + \lambda_{1z} \right) \right] dx \right\}
\end{aligned} \tag{6.137a-e}$$

6.6 TRANSFORMAÇÕES NOS SISTEMAS ALGÉBRICOS

Nesta seção será feita a unificação dos sistemas de coordenadas locais de cada barra tendo em vista os problemas independentes estudados em regime dinâmico, a exemplo do que foi feito no capítulo 4, quando do estudo em regime estático. Mais uma vez, será convencionado que todas as grandezas grafadas com uma barra superior referem-se ao sistema de coordenadas locais unificado SCLU e com uma barra inferior, ao SCL.

Cada representação algébrica dos efeitos independentes obtida nas seções anteriores deste capítulo com notação mais concisa, no SCL será referida como:

$$\{\underline{u}\} + [\underline{h}]\{\underline{u}\} = [\underline{g}]\{\underline{p}\} + \{\underline{f}\} \tag{6.138}$$

Conforme discutido no capítulo 4, a unificação é necessária ser aplicada apenas no vetor dos esforços, de forma que as matrizes de transformação para os efeitos axiais, de torção e flexão bidirecional ficam:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \underline{N}_i \\ \underline{N}_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{N}_i \\ \overline{N}_j \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \underline{T}_i \\ \underline{T}_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{T}_i \\ \overline{T}_j \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.139a,b}$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{V}_{zi} \\ \underline{M}_{yi} \\ \underline{V}_{zj} \\ \underline{M}_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{V}_{zi} \\ \overline{M}_{yi} \\ \overline{V}_{zi} \\ \overline{M}_{yj} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{V}_{yi} \\ \underline{M}_{zi} \\ \underline{V}_{yj} \\ \underline{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{V}_{yi} \\ \overline{M}_{zi} \\ \overline{V}_{yi} \\ \overline{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (6.139c,d)$$

Ou ainda de uma forma genérica a matriz de transformação pode ser escrita como:

$$\{\underline{p}\} = [\underline{\beta}]\{\overline{p}\} \quad (6.140)$$

Assim, após a aplicação da matriz de transformação Eq. (6.140) compatível com o problema em estudo dado na Eq.(6.138), o sistema algébrico unificado fica:

$$\{\underline{u}\} + [\underline{h}]\{\underline{u}\} = [\underline{g}]\{\overline{p}\} + \{\underline{f}\} \quad (6.141)$$

$$\text{Onde } [\underline{g}] = [\underline{g}][\underline{\beta}], [\underline{h}] = [\underline{h}], \{\underline{u}\} = \{\underline{u}\} \text{ e } \{\underline{f}\} = \{\underline{f}\}$$

6.7 PROBLEMAS COMBINADOS

A representação algébrica de barra de pórtico para análise dinâmica é feita seguindo as mesmas etapas desenvolvidas para a obtenção da representação equivalente para análise estática. Ela é inicialmente escrita no SCLU para em seguida ser reescrita no SCG. No SCLU, sua obtenção ocorre pela superposição dos efeitos aos quais a barra está submetida, ou seja: a) para barras de pórtico plano: axial e de flexão no plano da estrutura, b) para as de pórtico espacial padrão: axial, de flexão bi-direcional e de torção uniforme.

6.7.1 Pórtico Plano no SCLU

A representação algébrica para barra de pórtico plano é feita a partir da superposição dos efeitos axial e de flexão em z, como mostrado na Fig. 6.8.

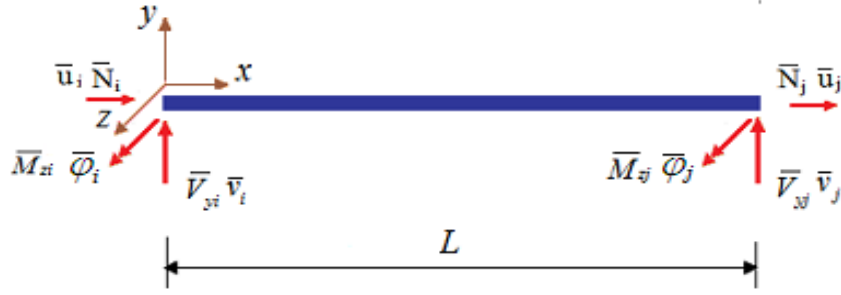


Figura 6.8 - Sistema local unificado de barra de pórtico plano

Se as equações algébricas Eqs. (6.16) e (6.112) após a unificação forem agrupadas, a representação do elemento de contorno de pórtico plano fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\check{\alpha}_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \check{\alpha}_{z2} & 0 & -\check{\alpha}_{z1} & 0 \\ 0 & -\check{\alpha}_{z3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z4} \\ -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\check{\alpha}_{z1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\check{\alpha}_{z2} \\ 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z4} & 0 & \check{\alpha}_{z3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_x & 0 & 0 \\ 0 & \check{\beta}_{z1} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z2} \\ 0 & 0 & \check{\beta}_{z4} & 0 & \check{\beta}_{z3} & 0 \\ -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\beta}_{z2} & 0 & \check{\beta}_{z1} & 0 \\ 0 & -\check{\beta}_{z3} & 0 & 0 & \check{\beta}_{z4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{\phi i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{f}_{\phi j} \end{Bmatrix} \quad (6.142)$$

Onde as constantes $\check{\alpha}_{zi}$ e $\check{\beta}_{zi}$ em Eq. (6.142) estão indicadas nas Eqs. (6.17a-b) e nas Eqs. (6.112a-h), e as componentes do vetor de carga f_i estão indicadas nas Eqs. (6.18a-b) e Eqs. (6.113a-d). Agora se representação algébrica da flexão em z for construída com a solução alternativa Eq. (6.114) em conjunto com a do problema axial Eq. (6.16), então a representação do elemento de contorno de pórtico plano fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\check{\alpha}_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \check{\alpha}_{z18Ls} & \check{\alpha}_{z19L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \check{\alpha}_{z20L} & -\check{\alpha}_{z21Ls} \\ -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \check{\alpha}_{z18Ls} & -\check{\alpha}_{z19L} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\check{\alpha}_{z20L} & -\check{\alpha}_{z21Ls} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z18L} & \check{\beta}_{z19Ls} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z20Ls} & \check{\beta}_{z21L} \\ -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\beta}_{z18L} & -\check{\beta}_{z19Ls} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\check{\beta}_{z20Ls} & \check{\beta}_{z21L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{\phi i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{f}_{\phi j} \end{Bmatrix} \quad (6.143)$$

onde as constantes $\check{\alpha}_x$ e $\check{\beta}_x$ são dadas nas Eqs. (6.17a-b); já as demais constantes na Eq. (6.143) estão mostradas nas Eqs. (6.115a-h).

Se a representação do pórtico plano for montada pelo problema axial Eq. (6.16) e pelo modelo de Timoshenko Eq. (6.133) ou (6.135), conforme frequência de trabalho, resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\check{\alpha}_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \check{\alpha}_{z1} & \check{\alpha}_{z5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\check{\alpha}_{z6} & \check{\alpha}_{z4} \\ -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \check{\alpha}_{z1} & -\check{\alpha}_{z5} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \check{\alpha}_{z6} & \check{\alpha}_{z4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z5} & -\check{\beta}_{z2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z3} & -\check{\beta}_{z6} \\ -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\beta}_{z5} & \check{\beta}_{z2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\check{\beta}_{z3} & -\check{\beta}_{z6} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{\phi i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{yj} \\ \bar{f}_{\phi j} \end{Bmatrix} \quad (6.144)$$

onde as constantes $\check{\alpha}_{zi}$ e $\check{\beta}_{zi}$ estão indicadas nas Eqs. (6.134a-m), se $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_z$ e nas Eqs. (6.136a-d) e (6.137 a-e), se $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_z$.

6.7.2 Pórtico Espacial no SCLU

A representação algébrica para barra de pórtico espacial é feita a partir da superposição dos efeitos axial, de flexão bidirecional e de torção, Fig. 6.9.

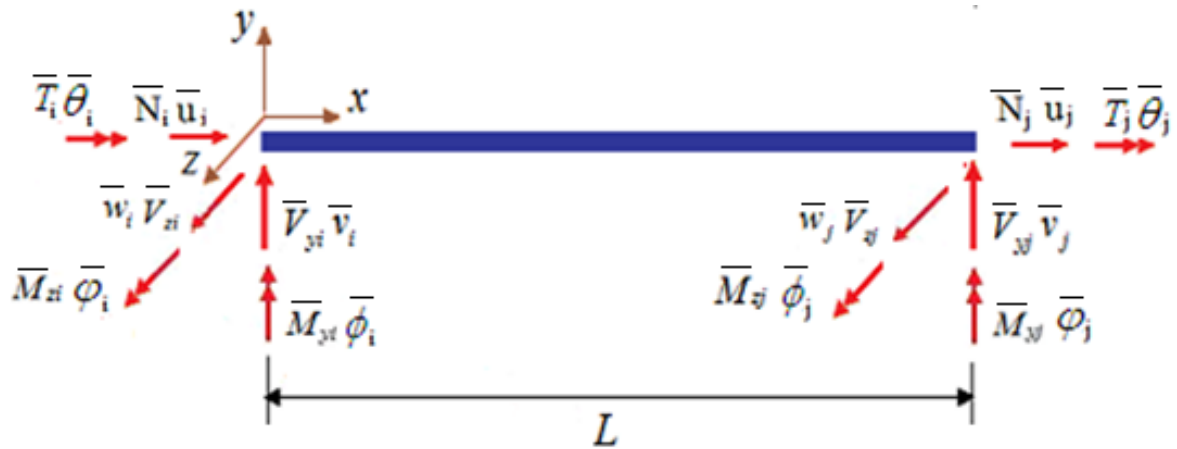


Figura 6.9 - Sistema local unificado de barra de pórtico espacial

A representação algébrica da barra do pórtico espacial utilizando-se o modelo de Euler-Bernoulli pela aplicação da unificação nas Eqs (6.16), (6.32), (6.62) e (6.112) fica:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \check{\alpha}_{z2} & 0 & -\check{\alpha}_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\check{\alpha}_{y2} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{y1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \check{\alpha}_{y3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{y1} & 0 \\
 0 & -\check{\alpha}_{z3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z4} \\
 -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\check{\alpha}_{z1} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z5} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z2} \\
 0 & 0 & -\check{\alpha}_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \check{\alpha}_{y2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{y1} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{y3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & \check{\alpha}_{z6} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z4} & 0 & \check{\alpha}_{z3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{u}_i \\
 \bar{v}_i \\
 \bar{w}_i \\
 \bar{\theta}_i \\
 \bar{\phi}_i \\
 \bar{\varphi}_i \\
 \bar{u}_j \\
 \bar{v}_j \\
 \bar{w}_j \\
 \bar{\theta}_j \\
 \bar{\phi}_j \\
 \bar{\varphi}_j
 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\check{\beta}_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{z5} & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{z2} \\
 0 & 0 & \check{\beta}_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{y2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{y4} & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{y3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z4} & 0 & \check{\beta}_{z3} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z6} \\
 -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \check{\beta}_{z5} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z2} & 0 & -\check{\beta}_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{y2} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{y1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\check{\beta}_{y3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{y4} & 0 \\
 0 & -\check{\beta}_{z3} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z4}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{N}_i \\
 \bar{V}_{yi} \\
 \bar{V}_{zi} \\
 \bar{T}_i \\
 \bar{M}_{yi} \\
 \bar{M}_{zi} \\
 \bar{N}_j \\
 \bar{V}_{yj} \\
 \bar{V}_{zj} \\
 \bar{T}_j \\
 \bar{M}_{yj} \\
 \bar{M}_{zj}
 \end{Bmatrix} +
 \begin{Bmatrix}
 \bar{f}_{xi} \\
 \bar{f}_{yi} \\
 \bar{f}_{zi} \\
 \bar{f}_{ti} \\
 \bar{f}_{\phi i} \\
 \bar{f}_{\varphi i} \\
 \bar{f}_{xj} \\
 \bar{f}_{yj} \\
 \bar{f}_{zj} \\
 \bar{f}_{tj} \\
 \bar{f}_{\phi j} \\
 \bar{f}_{\varphi j}
 \end{Bmatrix}
 \quad (6.145)$$

As constantes $\check{\alpha}_{zi}$ e $\check{\beta}_{zi}$ estão indicadas nas Eqs. (6.112a-h); as $\check{\alpha}_{yi}$ e $\check{\beta}_{yi}$ Eqs. (6.63a-h); $\check{\alpha}_x$ e $\check{\beta}_x$ nas Eqs. (6.17a-b); $\check{\alpha}_t$ e $\check{\beta}_t$ nas Eqs. (6.33a-b); já os coeficientes do vetor das forças estão nas Eqs. (6.18a-b), (6.34a-b), (6.64a-d) e (6.113a-d).

Se forem utilizadas as soluções alternativas propostas nesta tese no modelo de Euler-Bernoulli, o sistema algébrico do pórtico espacial pode ser obtido pela aplicação da unificação nas Eqs (6.16), (6.32), (6.65) e (6.114), sendo:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\alpha}_{z18Ls} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{z19L} \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\alpha}_{y18Ls} & 0 & -\alpha_{y19L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{y20L} & 0 & -\check{\alpha}_{y21Ls} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \alpha_{z20L} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z21Ls} \\
 -\check{\alpha}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \check{\alpha}_{z18Ls} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z19L} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \check{\alpha}_{y18Ls} & 0 & \check{\alpha}_{y19L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \alpha_{y20L} & 0 & -\check{\alpha}_{y21Ls} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & -\check{\alpha}_{z20L} & 0 & 0 & 0 & -\check{\alpha}_{z21Ls} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{u}_i \\
 \bar{v}_i \\
 \bar{w}_i \\
 \bar{\theta}_i \\
 \bar{\phi}_i \\
 \bar{\varphi}_i \\
 \bar{u}_j \\
 \bar{v}_j \\
 \bar{w}_j \\
 \bar{\theta}_j \\
 \bar{\phi}_j \\
 \bar{\varphi}_j
 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z18L} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z19Ls} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{y18L} & 0 & -\check{\beta}_{y19Ls} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{y20Ls} & 0 & \check{\beta}_{y21L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z20Ls} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z21L} \\
 -\check{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \check{\beta}_{z18L} & 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_{z19Ls} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \check{\beta}_{y18L} & 0 & \check{\beta}_{y19Ls} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\check{\beta}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \check{\beta}_{y20Ls} & 0 & \check{\beta}_{y21L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\check{\beta}_{z20Ls} & 0 & 0 & 0 & \check{\beta}_{z21L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{N}_i \\
 \bar{V}_{yi} \\
 \bar{V}_{zi} \\
 \bar{T}_i \\
 \bar{M}_{yi} \\
 \bar{M}_{zi} \\
 \bar{N}_j \\
 \bar{V}_{yj} \\
 \bar{V}_{zj} \\
 \bar{T}_j \\
 \bar{M}_{yj} \\
 \bar{M}_{zj}
 \end{Bmatrix} +
 \begin{Bmatrix}
 \bar{f}_{xi} \\
 \bar{f}_{yi} \\
 \bar{f}_{zi} \\
 \bar{f}_{ti} \\
 \bar{f}_{\phi i} \\
 \bar{f}_{\varphi i} \\
 \bar{f}_{xj} \\
 \bar{f}_{yj} \\
 \bar{f}_{zj} \\
 \bar{f}_{tj} \\
 \bar{f}_{\phi j} \\
 \bar{f}_{\varphi j}
 \end{Bmatrix} =$$

(6.146)

onde as constantes em (6.146) estão dadas nas Eqs.(6.17a-b), (6.33a-b), (6.66a-h) e (6.115a-h).

Quando o modelo de Timoshenko for utilizado, a representação algébrica do pórtico espacial pode ser montada após a unificação das Eqs (6.16), Eq. (6.32), das equações da flexão em y Eq.(6.94) ou (6.97), das equações da flexão em z Eq.(6.133) ou (6.135). Então, o sistema algébrico unificado fica:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{1z} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{5z} \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{1y} & 0 & -\tilde{\alpha}_{5y} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{6y} & 0 & \tilde{\alpha}_{4y} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\tilde{\alpha}_{6z} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{4z} \\
 -\tilde{\alpha}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \tilde{\alpha}_{1z} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_{5z} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{1y} & 0 & \tilde{\alpha}_{5y} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_{6y} & 0 & \tilde{\alpha}_{4y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & \tilde{\alpha}_{6z} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{4z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{u}_i \\
 \bar{v}_i \\
 \bar{w}_i \\
 \bar{\theta}_i \\
 \bar{\phi}_i \\
 \bar{\varphi}_i \\
 \bar{u}_j \\
 \bar{v}_j \\
 \bar{w}_j \\
 \bar{\theta}_j \\
 \bar{\phi}_j \\
 \bar{\varphi}_j
 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_{5z} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{2z} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_{5y} & 0 & \tilde{\beta}_{2y} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\beta}_t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{3y} & 0 & -\tilde{\beta}_{6y} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_{3z} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{6z} \\
 -\tilde{\beta}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \tilde{\beta}_{5z} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_{2z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \tilde{\beta}_{5y} & 0 & -\tilde{\beta}_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \tilde{\beta}_{3y} & 0 & -\tilde{\beta}_{6y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\tilde{\beta}_{3z} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\beta}_{6z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{N}_i \\
 \bar{V}_{yi} \\
 \bar{V}_{zi} \\
 \bar{T}_i \\
 \bar{M}_{yi} \\
 \bar{M}_{zi} \\
 \bar{N}_j \\
 \bar{V}_{yj} \\
 \bar{V}_{zj} \\
 \bar{T}_j \\
 \bar{M}_{yj} \\
 \bar{M}_{zj}
 \end{Bmatrix} +
 \begin{Bmatrix}
 \bar{f}_{xi} \\
 \bar{f}_{yi} \\
 \bar{f}_{zi} \\
 \bar{f}_{ti} \\
 \bar{f}_{\phi i} \\
 \bar{f}_{\varphi i} \\
 \bar{f}_{xj} \\
 \bar{f}_{yj} \\
 \bar{f}_{zj} \\
 \bar{f}_{tj} \\
 \bar{f}_{\phi j} \\
 \bar{f}_{\varphi j}
 \end{Bmatrix}
 \quad (6.147)$$

onde as constantes na flexão em z ($\check{\alpha}_{zi}$, $\check{\beta}_{zi}$, etc.) estão indicadas nas Eqs. (6.134a-m), se $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_z$; nas Eqs. (6.136a-d) e (6.137 a-e), se $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_z$. Agora na flexão em y ($\check{\alpha}_{yi}$, $\check{\beta}_{yi}$, etc.) estão indicadas nas Eqs.(6.95a-h) e (6.96a-d), se $\omega^2 > \kappa GA / \rho I_y$; nas Eqs.(6.98a-j) e (6.99), se $\omega^2 < \kappa GA / \rho I_y$. Já as constantes $\check{\alpha}_x$ e $\check{\beta}_x$ estão nas Eqs. (6.17a-b); $\check{\alpha}_t$ e $\check{\beta}_t$ nas Eqs. (6.33a-b).

6.7.3 Representação Algébrica da Estrutura

Os campos de deslocamentos, de esforços e de forças nas extremidades da barra no SCLU são referenciados ao SCG através de relações geométricas análogas às da análise estática:

$$\{u\} = [R]\{U\}, \quad \{p\} = [R]\{P\} \quad \{b\} = [R]\{B\} \quad (6.148)$$

A representação algébrica no SCG pode ser obtida com as Eqs. (6.148) e (6.141), resultando em:

$$\{U\} + [H]\{U\} = [G]\{P\} + \{B\} \quad (6.149)$$

$$\text{Onde: } [H] = [R]^T [\bar{h}] [R], \quad [G] = [R]^T [\bar{g}] [R] \text{ e } \{B\} = [R]^T \{\bar{f}\}.$$

Com sistema algébrico unificado global Eq. (6.149) de cada barra (elemental), a representação algébrica da estrutura pode ser montada recebendo as contribuições elementais e empregando-se a técnica de sub-regiões. Este procedimento foi explorado na análise estática no capítulo 4.

*Há muito mais entre o céu
e a terra do que imagina
a nossa vã filosofia.
W. Shakespeare*

CAPÍTULO VII

BARRAS DE PAREDES DELGADAS E SEÇÃO ABERTA – NÚCLEOS

7.1 INTRODUÇÃO

O problema da flexo-torção é discutido neste capítulo. Nos casos pertinentes são equacionados os efeitos de torção com aqueles da flexão bidirecional e do esforço axial (vide Fig.7.1) e seus eventuais acoplamentos segundo a filosofia do Método dos Elementos de Contorno.

Desta forma, grande parte deste capítulo é destinado a apresentar as contribuições originais desta tese associadas às equações integrais, soluções fundamentais e representações algébricas, por fim, o MEC em problemas estáticos e dinâmicos (no domínio da frequência) em barras de seções abertas de paredes finas consistente com a teoria de flexo-torção de VLASOV (1961).

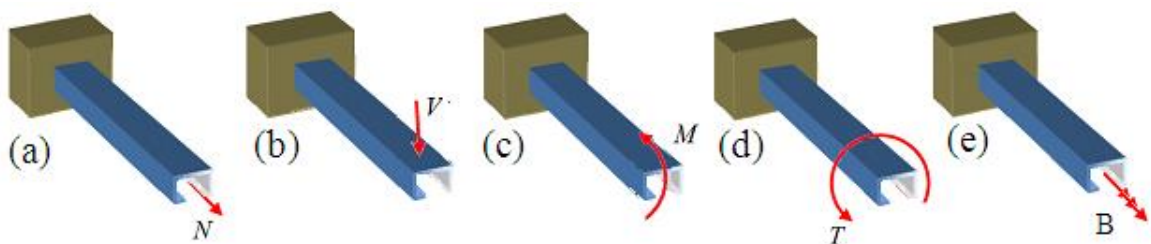


Figura 7.1 – Efeitos axial, da flexão bidirecional e da torção não-uniforme

Tendo em vista facilitar o desenvolvimento matemático necessário e o esclarecimento de alguns conceitos utilizados, inicia-se o presente capítulo com a apresentação de alguns elementos da teoria de Vlasov.

7.2 ELEMENTOS DA TEORIA DE VLASOV E SUA APLICAÇÃO

Neste item serão apresentados elementos da teoria de Vlasov relativos ao estudo da torção em barras de paredes finas e seção aberta.

As hipóteses adotadas podem ser apresentadas em dois grupos, como explicado no capítulo 3. As hipóteses gerais são aquelas hipóteses que devem ser respeitadas para caracterizar o regime estático ou dinâmico, as características elásticas lineares do material e o comportamento linear da estrutura, além de possibilitar a redução do problema originariamente tridimensional (3D) para um problema unidimensional (1D). As hipóteses específicas ou particulares são apresentadas no próximo subitem.

7.2.1 Torção Livre nas Barras de Núcleo

- **Hipóteses particulares**

a) Uma barra é considerada fina ou delgada quando $t \leq 0,1b$ e $b \leq 0,1L$, onde: t e b são a espessura e uma dimensão de referência, L o comprimento da barra, vide Fig.7.2;

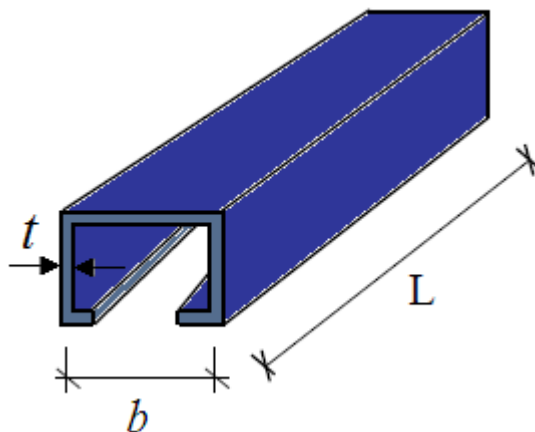


Figura 7.2 - Barra de paredes delgadas e seção aberta
(Adaptada de RESATOGLU, 2005)

b) Após a deformação da barra, a seção transversal projeta-se indeformada no seu plano yz , comportando-se como se fosse rija nesse plano, vide Fig.7.3;

- c) Nos pontos da linha do esqueleto as distorções, associadas ao eixo longitudinal da barra e ao sistema de coordenadas do esqueleto da seção, são nulas;
- d) São admitidas translações e rotações da seção inteira.

- **A geometria da barra de paredes delgadas de seção aberta**

Os elementos de barra comumente empregados nas estruturas reticuladas são caracterizados por duas dimensões que definem a seção transversal de mesma ordem de grandeza, porém bem menores que a outra, a que define o comprimento.

As barras de paredes finas, diferentemente, têm as três dimensões com ordens de grandeza distintas que devem atender às seguintes relações: $t \leq 0,1b \leq 0,1L$, vide Fig. 7.2.

- **O sistema de coordenadas OXS**

Com ao objetivo de facilitar a apresentação da teoria de Vlasov, um tubo de parede fina e seção aberta é inicialmente considerado. A partir desse tubo mostrado na Fig. 7.3, são definidos o sistema de eixos ortogonais OXS, a geratriz e a linha do esqueleto.

Um eixo paralelo à direção longitudinal situado na metade da espessura do tubo é chamado de eixo gerador. A interseção da seção transversal com a superfície gerada pela movimentação do eixo gerador, ao longo da parede do tubo, é chamada de linha do esqueleto ou linha do contorno, onde os pontos S_1 e S_2 indicam as extremidades da seção.

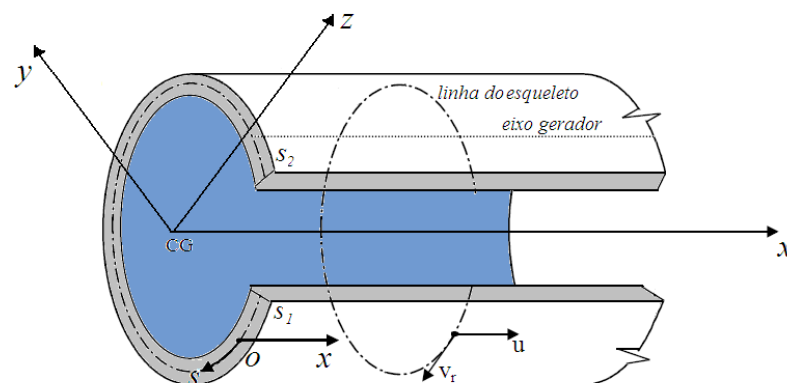


Figura 7.3 - Tubo de seção aberta
(Adaptada de RESATOGLU, 2005)

Um sistema de coordenadas ortogonais formado pelos eixos ox e os é definido. O primeiro deles é paralelo ao eixo gerador e o outro é tangente à linha do esqueleto. A coordenada x começa em uma extremidade da linha do esqueleto e a coordenada s em quaisquer dos eixos geradores.

Além disso, o sistema x,y,z é tomado como coincidente com os eixos principais de inércia.

- **Tensões de cisalhamento de Saint Venant**

Da analogia de membrana, Prandtl mostrou que as tensões tangenciais τ_l devidas à torção livre ou uniforme têm distribuição linear ao longo da espessura, vide Fig. 7.4, de forma que ela pode ser correlacionada com o momento torçor de Saint Venant, T_l .

$$\tau_l = \frac{T_l}{I_t} t \quad (7.1)$$

O momento de inércia à torção é definido como $I_t = \frac{1}{3} \int t^3 ds$. Convém notar que o braço de alavanca efetivo dessas tensões é de $2/3$ da espessura t da parede, fazendo com elas usualmente apresentem baixas rigidezes à torção, GI_t .

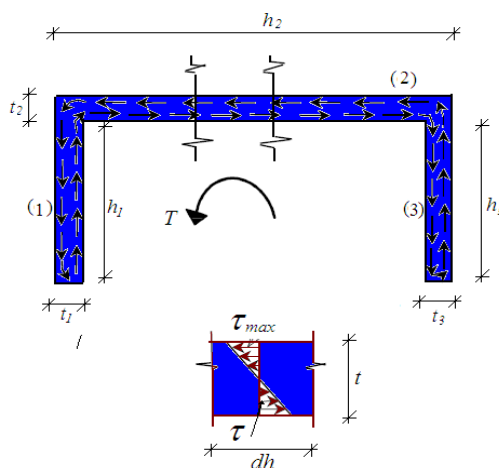


Figura 7.4 – Distribuição das tensões de cisalhamento
(Adaptada de RESATOGLU, 2005)

Em muitos casos as seções abertas são formadas por paredes poliédricas de forma que podem ser entendidas como um conjunto de n seções retangulares de dimensões t e h , com $t \leq 0,1h$, então de acordo com a clássica expressão $I_t = ab^3/3$ na qual o b é substituído pelo t e o a pelo h , o momento de inércia à torção de cada elemento será igual:

$$I_t = \sum_1^n \frac{h_j t_j^3}{3}.$$

- **O deslocamento axial, ângulo de torção e empenamento**

Devido à ação do T_l ocorrem as rotações relativas entre as seções, de forma que o incremento diferencial do ângulo de torção θ pode ser escrito como:

$$d\theta = \frac{T_l}{GI_t} dx \quad (7.2a)$$

Ou ainda em termos de empenamento θ' como:

$$\theta' = \frac{T_l}{GI_t} \quad (7.2b)$$

Das Eqs. (7.1) e (7.2b), têm-se as tensões de cisalhamento de Saint Venant em função do empenamento:

$$\tau_l = GI_t \theta' \quad (7.3)$$

De acordo com TIMOSHENKO e GOODIER (1970), os deslocamentos axiais podem ser relacionados com o empenamento da seção transversal utilizando-se a seguinte expressão.

$$u = \psi(y, z) \theta'(x) \quad (7.4)$$

onde $\psi(y, z)$ é a função de empenamento, θ' é o empenamento, que no caso da torção livre é constante ao longo do eixo longitudinal.

Quando as distorções γ_{xs} forem nulas no esqueleto das paredes da seção, a função de empenamento é usualmente tomada como uma das propriedades setoriais da seção, no caso a área setorial VLASOV (1961).

- **Grandezas setoriais da seção e suas propriedades**

Nesta seção são apresentados brevemente os aspectos relevantes das grandezas setoriais utilizadas nos fundamentos da teoria de barras de seção de paredes finas.

A área setorial ω_p associada a um ponto da seção transversal de coordenada s_p , $P(s_p)$, é obtida usando a linha média da parede e um ponto fora da seção. Ela é igual ao dobro da área varrida pela linha que liga R (centro de rotação arbitrário, um polo inicial) aos pontos sobre a linha do esqueleto que começa na origem O e termina no ponto $P(s_p)$, como na Fig. 7.5.

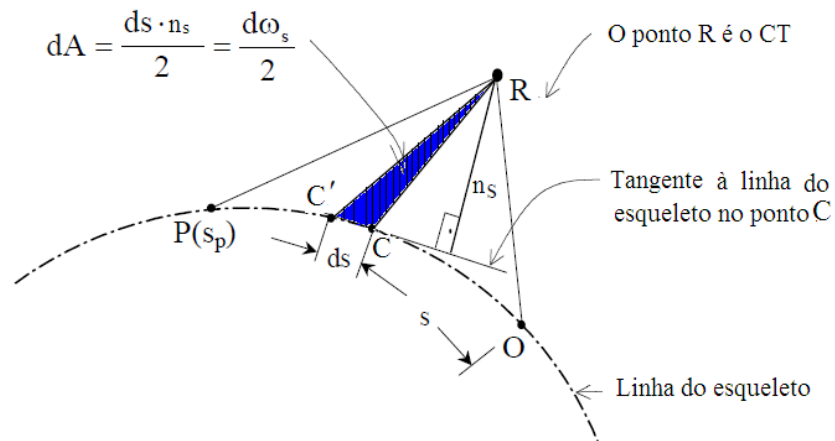


Figura 7.5- Elemento de área setorial da seção transversal de uma viga
(Adaptada de RESATOGLU, 2005)

O incremento de área setorial será tomado como positivo quando o raio de varredura, RC, indicar sentido anti-horário, sendo negativo no caso contrário.

$$\omega_p = \int_0^{s_p} n ds \quad (7.5)$$

onde: n_s é a distância do ponto R à tangente a linha do esqueleto no ponto C e s, a coordenada do ponto sobre a linha do esqueleto.

Por analogia aos momentos estáticos de área ($I_z = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A z^2 dA$), define-se o momento estático setorial:

$$S_\omega = \int_A \omega_p dA \quad (7.6)$$

Já os produtos de inércia setoriais em torno de y ou z são dados respectivamente por:

$$S_{\omega y} = \int_A z \omega_p dA$$

$$S_{\omega z} = \int_A y \omega_p dA \quad (7.7a-b)$$

A área setorial é dita principal quando o momento estático setorial é nulo, $S_\omega = 0$, então $\omega_p = \omega$.

O momento de inércia setorial, I_ω , expressa a resistência ao empenamento da seção, ou seja, ele quantifica a capacidade da seção resistir ao empenamento provocado pela torção. Ele é análogo ao momento principal de inércia à flexão, I , sendo derivado da distribuição de área setorial é calculado através da expressão:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad (7.8)$$

• Centro de cisalhamento

O CC é um ponto importante associado à seção transversal das vigas, pois quando a linha de ação da resultante das forças transversais aplicadas, o contém, não será produzida, nessa seção, solicitação de torção. Isto é, o momento provocado pela resultante das tensões de cisalhamento do cortante no CC é nulo. Decorrendo a seguinte expressão matemática, vide Fig.7.6:

$$M_{CC} = \int_A \tau_q n dA = 0 \quad (7.9)$$

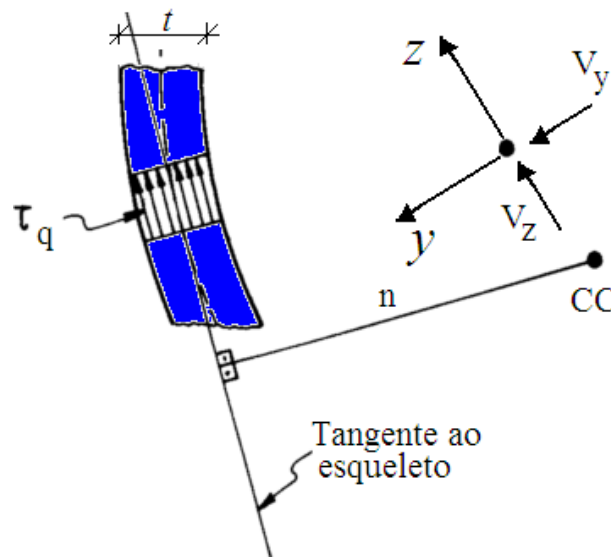


Figura 7.6 - Tensão de cisalhamento devido ao esforço cortante
(Adaptada de RESATOGLU, 2005)

Mas como a tensão cisalhante é $\tau_q = \frac{V_y S_z}{I_z t} + \frac{V_z S_y}{I_y t}$, então o momento resultante no centro de torção Eq. (7.9), fica:

$$M_{CC} = \frac{V_y}{I_z} \int_A S_z n ds + \frac{V_z}{I_y} \int_A S_y n ds = 0 \quad (7.10)$$

Sendo os momentos estáticos de área dados por $S_z = \int_{s_1}^s y t ds$ e $S_y = \int_{s_1}^s z t ds$, então da Eq. (7.10) obtém-se:

$$M_{CC} = \frac{V_y}{I_z} \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s y t ds \right) n ds + \frac{V_z}{I_y} \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s z t ds \right) n ds = 0 \quad (7.11)$$

Para que a Eq. (7.11) seja nula, implica uma dupla condição a ser satisfeita:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s y t ds \right) n ds = 0$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s z t ds \right) n ds = 0 \quad (7.12a-b)$$

Fazendo-se integrações por partes independentemente em cada uma das expressões das Eqs. (7.12) obtém-se, respectivamente:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n ds \right) y t ds = \int_A \omega y dA = 0$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n ds \right) z t ds = \int_A \omega z dA = 0 \quad (7.13a-b)$$

Segundo BARBOSA (1978), a área setorial principal ω pode ser obtida a partir de outra área setorial referida a um polo arbitrário P com coordenadas (y_p, z_p) e do sistema Os com coordenadas (y_o, z_o) . As coordenadas do centro de cisalhamento são (y_{cc}, z_{cc}) , vide Fig. 7.7:

$$\omega = \omega_p + (z - z_o)(y_{cc} - y_p) - (y - y_o)(z_{cc} - z_p) \quad (7.14)$$

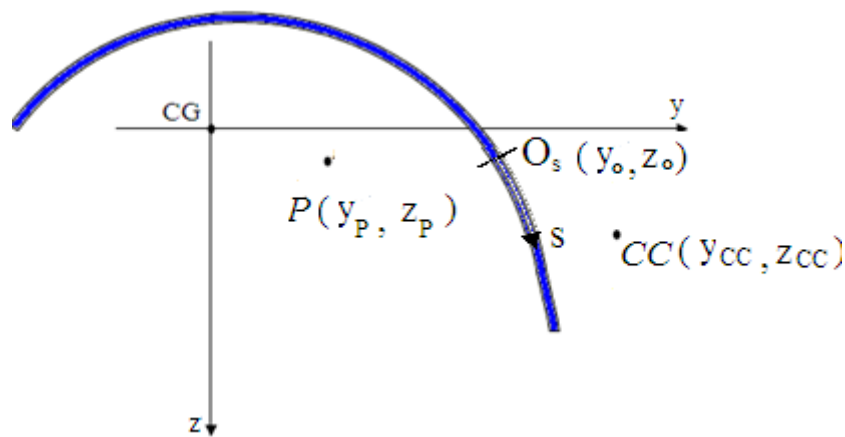


Figura 7.7 – Polo arbitrário P e polo principal CC

Substituindo-se a Eq. (7.14) na Eq. (7.13a-b), obtém-se:

$$\begin{aligned}\int_A \omega y dA &= \int_A \omega_p y dA + \int_A [(z - z_o)(y_{CC} - y_p) - (y - y_o)(z_{CC} - z_p)] y dA = 0 \\ \int_A \omega z dA &= \int_A \omega_p z dA + \int_A [(z - z_o)(y_{CC} - y_p) - (y - y_o)(z_{CC} - z_p)] z dA = 0\end{aligned}\quad (7.15)$$

Lembrando que y e z são os eixos principais referidos ao centro de gravidade ($\int_A y dA = \int_A z dA = \int_A yz dA = 0$, $I_z = \int_A y^2 dA$ e $I_y = \int_A z^2 dA$) e ainda com substituição na Eq. (7.15) resulta em:

$$\begin{aligned}\int_A \omega y ds &= \int_A \omega_p y dA + (z_{CC} - z_p) I_z = 0 \\ \int_A \omega z ds &= \int_A \omega_p z dA + (y_{CC} - y_p) I_y = 0\end{aligned}\quad (7.16a-b)$$

Resolvendo as Eqs. (7.16) em y_{CC} e z_{CC} obtém-se as expressões para o cálculo das coordenadas do CC que estão indicadas nas Eqs. (7.17a-b) e representadas na Fig.7.7.

$$\begin{aligned}y_{CC} &= y_p - \frac{1}{I_y} \int_A \omega_p y dA \\ z_{CC} &= z_p + \frac{1}{I_z} \int_A \omega_p z dA\end{aligned}\quad (7.17a-b)$$

7.2.2 Torção Não-uniforme nas Barras de Núcleo

Numa viga de seção não circular com empenamento impedido (Fig. 7.8) surgem tensões normais à seção engastada. Estas tensões variam tendo intensidade máxima nas seções com empenamento bloqueado e nulas na extremidade livres, provocando nas seções da viga empenamentos que variam ao longo do eixo longitudinal, caracterizando, assim, a torção não-uniforme.

Neste subitem será estudado o problema da torção não-uniforme em barras de paredes finas e seção aberta, através da teoria de Vlasov.

- **Hipóteses particulares**

Além das hipóteses adotadas para o caso da torção uniforme, consideram-se ainda:

- a) Impedimento total ou parcial dos deslocamentos axiais;
- b) Variação do momento torçor.

- **A tensão normal na torção não-uniforme**

Da lei de Hooke para tensão normal tem-se $\sigma_x = E\varepsilon_x$, onde a deformação e $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$. Como na teoria de Vlasov a função empenamento é igual à área setorial então da Eq. 7.4 resulta: $u = -\omega\theta'$. Logo a tensão normal da flexo-torção é dada por:

$$\sigma_x = E \frac{d}{dx}(-\omega\theta') = -E\omega\theta'' \quad (7.18)$$

De acordo com VLASOV (1961) a resultante das tensões normais não provoca esforços normais nem momentos fletores na seção e sim um novo esforço solicitante denominado Bimomento, cuja definição matemática é:

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA = -E\theta'' \int_A \omega^2 dA \quad (7.19a-b)$$

ou, utilizando a Eq. (7.8):

$$B = -EI_{\omega} \theta'' \quad (7.19c)$$

A partir das Eqs. (7.18) e (7.19) a tensão normal pode ser escrita em função do bimomento, e grandezas setoriais:

$$\sigma_x = -\frac{B\omega}{I_\omega} \quad (7.20)$$

- **Tensão tangencial na torção não-uniforme**

Da observação do elemento de área de comprimento dx mostrado na Fig. 7.8, conclui-se pela existência de tensão de cisalhamento τ_{ft} assumida uniforme na espessura t da seção transversal, decorrente da variação de forças axiais R_σ (oriunda da resultante de tensões axiais).

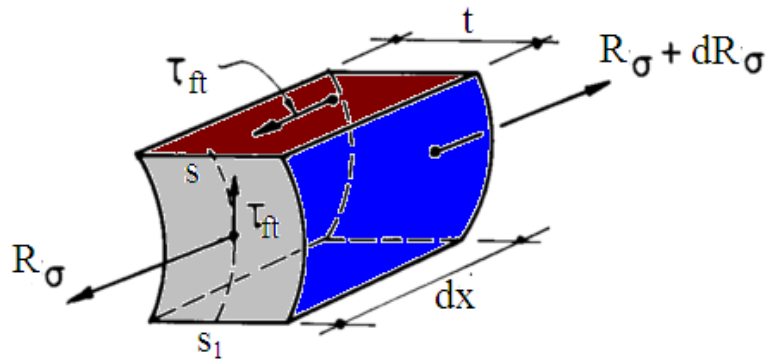


Figura 7.8 – Elemento de comprimento dx da parede da barra de núcleo
(adaptada de RIBEIRO, 1987)

Do equilíbrio longitudinal do elemento da barra (Fig.7.8), obtém-se:

$$\tau_{ft} t dx = dR_\sigma \quad (7.21)$$

onde R_σ é a resultante de tensão normal na área A_e , dada por:

$$R_\sigma = \int_{s1}^s t \sigma_x ds \quad (7.21a)$$

Substituindo σ_z da Eq. (7.18) na Eq. (7.21a), vem que;

$$R_\sigma = \int_{s1}^s E \omega \theta'' ds \quad (7.22)$$

cuja derivada em x é:

$$\frac{dR_{\sigma}}{dx} = E\theta''' \int_{s1}^s \omega ds \quad (7.23)$$

Das Eqs. (7.21) e (7.23) e (7.6), conclui-se que a tensão de cisalhamento da torção não-uniforme fica:

$$\tau_{ft} = \frac{E\theta''' S_{\omega}}{t} \quad (7.24)$$

- **O momento torçor na torção não-uniforme**

Na torção não-uniforme o torque aplicado externamente é equilibrado pelo momento torçor solicitante de torção livre, T_l , e pelo momento torçor que mobiliza a torção não-uniforme, T_{ft} .

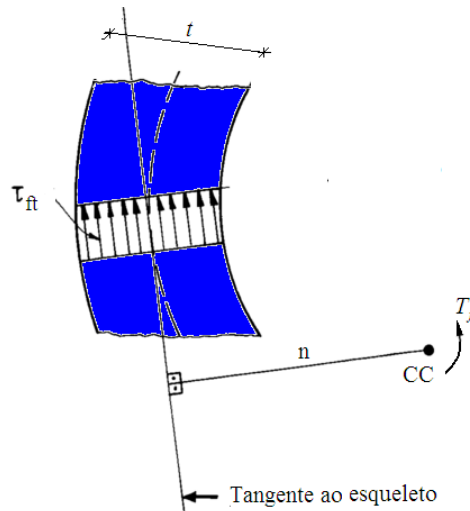


Figura 7.9 – Distribuição das tensões de cisalhamento da flexo-torção
(Adaptada de MORI, 1993)

Sendo, o momento torçor total dado pela relação:

$$T = T_l + T_{ft} \quad (7.25)$$

De acordo com a Fig. 7.9 e aplicando-se o equilíbrio, o momento da torção não-uniforme pode ser expresso por:

$$T_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} t n ds \quad (7.26)$$

Utilizando a Eq. (7.24) na Eq. (7.26), resulta:

$$T_{ft} = E \theta''' \int_{s_1}^{s_2} S_{\omega} n ds \quad (7.27)$$

como: $\int_{s_1}^{s_2} S_{\omega} n ds = S_{\omega} \omega \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 ds = -I_{\omega}$, a Eq. (7.27) fica:

$$T_{ft} = -EI_{\omega} \theta''' \quad (7.28)$$

Substituindo a Eq. (7.28) na Eq. (7.24), obtém-se a tensão de cisalhamento τ_{ft} em função do momento T_{ft} .

$$\tau_{ft} = -\frac{T_{ft} S_{\omega}}{I_{\omega} t} \quad (7.29)$$

Finalmente o torçor total indicado na Eq. (7.25), é obtido da soma dos torques explicitados nas Eqs. (7.3) e (7.28):

$$T = GI_t \theta' - EI_{\omega} \theta''' \quad (7.30)$$

Seja, agora, uma barra de núcleo, sob ação de carregamento distribuído ao longo do seu eixo longitudinal, $t(x)$ da qual é retirado um elemento de comprimento dx , como mostrado na Fig. 7.10.

Fazendo o equilíbrio de bimomentos no elemento da barra (Fig. 7.10), tem-se:

$$dB = T_{ft} dx \quad (7.31)$$

- **O problema fundamental do efeito da torção não-uniforme**

Por analogia ao problema real, Eq. (7.33), o equilíbrio do problema fundamental da torção não-uniforme pode ser expresso como segue:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} = t^*(x, \hat{x})$$

ou,

$$\frac{d^4 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^4} - \lambda_e^2 \frac{d^2 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{1}{EI_{\omega}} \delta(x, \hat{x}) \quad (7.34a-b)$$

onde: $\lambda_e = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_{\omega}}}$.

As relações constitutivas dadas por:

$$T^*(x, \hat{x}) = GI_t \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} - EI_{\omega} \frac{d^3 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^3}$$

$$B^*(x, \hat{x}) = -EI_{\omega} \frac{d^2 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (7.35a-b)$$

Admitindo que a solução da Eq. (7.34b) seja dada pelo polinômio:

$$\theta^*(x, \hat{x}) = A + Br + C \cosh[\lambda_e(r - L)] + D \sinh[\lambda_e(r - L)] \quad (7.36)$$

do qual as duas primeiras derivadas em x são:

$$\psi(x, \hat{x}) = \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} = [B + C\lambda_e \sinh[\lambda_e(r - L)] + D\lambda_e \cosh[\lambda_e(r - L)]] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} &= C\lambda_e^2 \cosh[\lambda_e(r-L)] + D\lambda_e^2 \sinh[\lambda_e(r-L)] + \\ &+ 2[B + C\lambda_e \sinh[\lambda_e(r-L)] + D\lambda_e \cosh[\lambda_e(r-L)]]\delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Por ser nula a primeira derivada de θ em x , Eq. (7.37), para $x=0$ e $\hat{x}=L$, conclui-se que:

$$B + D\lambda_e = 0 \quad (7.39)$$

Consequentemente a parcela multiplicada pelo delta de Dirac na Eq. (7.38) será nula.

Desse modo a Eq. (7.38) pode ser reescrita como indicado na Eq. (7.40):

$$\frac{d^2\theta^*}{dx^2} = C\lambda_e^2 \cosh[\lambda_e(r-L)] + D\lambda_e^2 \sinh[\lambda_e(r-L)] \quad (7.40)$$

As (terceira e quarta) derivadas de $\theta^*(x, \hat{x})$ em x , são calculadas a partir da Eq. (7.40), obtendo-se:

$$\frac{d^3\theta^*(x, \hat{x})}{dx^3} = \{C\lambda_e^3 \sinh[\lambda_e(r-L)] + D\lambda_e^3 \cosh[\lambda_e(r-L)]\} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4\theta^*(x, \hat{x})}{dx^4} &= C\lambda_e^4 \cosh[\lambda_e(r-L)] + D\lambda_e^4 \sinh[\lambda_e(r-L)] + \\ &+ 2[C\lambda_e^3 \sinh[\lambda_e(r-L)] + D\lambda_e^3 \cosh[\lambda_e(r-L)]]\delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (7.42)$$

Substituindo as Eqs. (7.38) e (7.42) na EDO governante do problema fundamental, Eq. (7.34), obtém-se:

$$\frac{d^4\theta^*(x, \hat{x})}{dx^4} - \lambda_e^2 \frac{d^2\theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -2\lambda_e^2 B \delta(x, \hat{x}) \quad (7.43)$$

Comparando as Eq. (7.34b) com a Eq. (7.43), conclui-se que:

$$B = -\frac{1}{2\lambda_e^2 EI_\omega} \quad (7.44)$$

Como a segunda derivada de $\theta^*(x, \hat{x})$ em x é nula para $x = 0$ e $\hat{x} = 0$, então:

$$C\lambda_e^2 \cosh(\lambda_e L) - D\lambda_e^2 \sinh(\lambda_e L) = 0 \quad (7.45)$$

e a rotação $\theta^*(x, \hat{x}) = 0$ para $x = 0$ e $\hat{x} = 0$ então, da Eq. (7.36), obtém-se:

$$A + C \cosh(\lambda_e L) - D \sinh(\lambda_e L) = 0 \quad (7.46)$$

Resolvendo o sistema formado pelas Eqs. (7.45) e (7.46) na qual se faz $A = 0$, obtém-se:

$$C = \frac{\sinh(\lambda_e L)}{k_1}$$

$$D = \frac{\cosh(\lambda_e L)}{k_2} \quad (7.47a-b)$$

Substituindo na Eq. (7.37) os valores de B , C e D , indicados, respectivamente, nas Eqs. (7.44) e (7.47a-b) e observando que o empenamento é nulo para $x = 0$ e $\hat{x} = 0$, conclui-se que:

$$k_1 = k_2 = 2\lambda_e^3 EI_\omega = 2\lambda_e GI_t \quad (7.48)$$

Reescrevendo as Eqs. (7.47.a-b) com os valores de $k_1 = k_2$ indicados na Eq. (7.48), obtém-se:

$$C = \frac{\sinh(\lambda_e L)}{2\lambda_e GI_t}$$

$$D = \frac{\cosh(\lambda_e L)}{2\lambda_e GI_t} \quad (7.49a-b)$$

Determinadas as constantes B , C e D , do polinômio solução do problema fundamental da torção não-uniforme, respectivamente, nas Eqs. (7.44) e (7.49a-b), sendo $A = 0$, escrevem-se as soluções fundamentais e suas derivadas em $\hat{x}$:

$$\theta^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2\lambda_e GI_t} \{-\lambda_e r + \sinh(\lambda_e L) \cosh[\lambda_e(r-L)] + \cosh(\lambda_e L) \sinh[\lambda_e(r-L)]\}$$

$$\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2GI_t} \{-1 + \sinh(\lambda_e L) \sinh[\lambda_e(r-L)] + \cosh(\lambda_e L) \cosh[\lambda_e(r-L)]\}$$

$$B^*(x, \hat{x}) = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{2\lambda_e} \{\sinh(\lambda_e L) \cosh \lambda_e[(r-L)] + \cosh(\lambda_e L) \sinh[\lambda_e(r-L)]\}$$

$$T^*(x, \hat{x}) = -EI_\omega \frac{d^3\theta^*(x, \hat{x})}{dx^3} + GI_t \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x})$$

$$\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \theta_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2GI_t} \{-1 + \sinh(\lambda_e L) \sinh[\lambda_e(r-L)] + \cosh(\lambda_e L) \cosh[\lambda_e(r-L)]\}$$

$$\frac{d^2\theta^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}dx} = \theta_{,\hat{x}}^{*'}(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\lambda_e EI_\omega} \{\sinh(\lambda_e L) \cosh \lambda_e[(r-L)] + \cosh(\lambda_e L) \sinh[\lambda_e(r-L)]\}$$

$$\frac{dB^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = B_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \{\sinh(\lambda_e L) \sinh[\lambda_e(r-L)] + \cosh(\lambda_e L) \cosh[\lambda_e(r-L)]\}$$

$$\frac{dT^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = T_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) \quad (7.50a-h)$$

onde $r = |x - \hat{x}|$.

- **A equação integral do efeito da torção não-uniforme**

A equação diferencial governante do problema da torção não-uniforme, Eq. (7.33), pode ser transformada em uma equação integral através da TRP. Para tanto se pondera a equação governante do problema real para em seguida integrá-la em todo o comprimento da barra. A função ponderadora é a solução em rotação do problema fundamental, $\theta^*(x, \hat{x})$. Assim, tem-se:

$$\int_0^L \left(EI_{\omega} \frac{d^4 \theta(x)}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - t(x) \right) \theta^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.51)$$

Integrando por partes o primeiro membro da Eq. (7.51), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\left(EI_{\omega} \frac{d^3 \theta(x)}{dx^3} - GI_t \frac{d\theta(x)}{dx} \right) \theta^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \\ & - \int_0^L \left(EI_{\omega} \frac{d^3 \theta(x)}{dx^3} - GI_t \frac{d\theta(x)}{dx} \right) \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} dx = \int_0^L (t(x)) \theta^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (7.52)$$

Substituindo o valor de $T(x)$ da Eq. (3.30) na Eq. (7.52) e integrando por partes a integral do seu primeiro membro, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \left[T(x) \theta^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\left(EI_{\omega} \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - GI_t \theta(x) \right) \frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx} \right] + \\ & + \int_0^L \left(EI_{\omega} \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - GI_t \theta(x) \right) \frac{d^2 \theta^*(x, \hat{x})}{dx^2} dx = \int_0^L (t(x)) \theta^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (7.53)$$

Substituindo o valor de $B(x)$ da Eq. (7.19c) na Eq. (7.53) e integrando por partes a primeira parcela da integral do seu primeiro membro, tem-se:

$$\begin{aligned}
& -\left[T(x)\theta^*(x, \hat{x})\right]_0^L + \left[B(x)\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L + \left[GI_t\theta(x)\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L - \\
& -\int_0^L (GI_t\theta(x))\frac{d^2\theta^*(x, \hat{x})}{dx^2}dx + \left[EI_\omega\frac{d\theta(x)}{dx}\frac{d^2\theta^*(x, \hat{x})}{dx^2}\right]_0^L - \\
& -\int_0^L \left(EI_\omega\frac{d\theta(x)}{dx}\right)\frac{d^3\theta^*(x, \hat{x})}{dx^3}dx = \int_0^L (t(x))\theta^*(x, \hat{x})dx
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Substituindo o valor de $B^*(x, \hat{x})$ da Eq. (7.35b) na Eq. (7.54), integrando por partes a segunda integral do seu primeiro membro e utilizando a Eq. (7.34a), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& -\left[T(x)\theta^*(x, \hat{x})\right]_0^L + \left[B(x)\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L + \left[GI_t\theta(x)\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L \\
& -\left[B^*(x, \hat{x})\frac{d\theta(x)}{dx}\right]_0^L - \left[EI_\omega\theta(x)\frac{d^3\theta^*(x, \hat{x})}{dx^3}\right] + \int_0^L \theta(x)\delta(x, \hat{x})dx = \int_0^L (t(x))\theta^*(x, \hat{x})dx
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Com o valor de $T^*(x, \hat{x})$ da Eq. (7.35a) e a utilização da propriedade de filtro do delta de Dirac indicada na Eq. (2.6c), da Eq. (7.55), obtém-se a EI procurada. Assim:

$$\begin{aligned}
& \theta(\hat{x}) + \left[T^*(x, \hat{x})\theta(x)\right]_0^L - \left[B^*(x, \hat{x})\frac{d\theta(x)}{dx}\right]_0^L = \\
& = \left[T(x)\theta^*(x, \hat{x})\right]_0^L - \left[B(x)\frac{d\theta^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L + \int_0^L (t(x))\theta^*(x, \hat{x})dx
\end{aligned} \tag{7.56}$$

Da derivada em $\hat{x}$ da Eq. (7.56) obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\theta(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[T^*_{,\hat{x}}(x, \hat{x})\theta(x)\right]_0^L - \left[B^*_{,\hat{x}}(x, \hat{x})\frac{d\theta(x)}{dx}\right]_0^L = \\
& = \left[T(x)\theta^*_{,\hat{x}}(x, \hat{x})\right]_0^L - \left[B(x)\frac{d\theta^*_{,\hat{x}}(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L + \int_0^L (t(x))\theta^*_{,\hat{x}}(x, \hat{x})dx
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Efetuada as integrações em x nas Eqs. (7.56) e (7.57), resultam:

$$\begin{aligned}
& \theta(\hat{x}) + T^*(L, \hat{x})\theta(L) - T^*(0, \hat{x})\theta(0) - B^*(L, \hat{x})\frac{d\theta(L)}{dx} + B^*(0, \hat{x})\frac{d\theta(0)}{dx} = \\
& = T(L)\theta^*(L, \hat{x}) - T(0)\theta^*(0, \hat{x}) - B(L)\frac{d\theta^*(L, \hat{x})}{dx} + B(0)\frac{d\theta^*(0, \hat{x})}{dx} + \\
& + \int_0^L [t(x)\theta^*(x, \hat{x})]dx
\end{aligned} \tag{7.58}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\theta(\hat{x})}{d\hat{x}} + T_{,\hat{x}}^*(L, \hat{x})\theta(L) - T_{,\hat{x}}^*(0, \hat{x})\theta(0) - B_{,\hat{x}}^*(L, \hat{x})\frac{d\theta(L)}{dx} + \\
& + B_{,\hat{x}}^*(0, \hat{x})\frac{d\theta(0)}{dx} = T(L)\theta_{,\hat{x}}^*(L, \hat{x}) - T(0)\theta_{,\hat{x}}^*(0, \hat{x}) - B(L)\frac{d\theta_{,\hat{x}}^*(L, \hat{x})}{dx} + \\
& + B(0)\frac{d\theta_{,\hat{x}}^*(0, \hat{x})}{dx} + \int_0^L [t(x)\theta_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]dx
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Fazendo a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, isto é, no contorno, quando $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0}(0 + \xi)$ e $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0}(L - \xi)$, respectivamente na Eq. (7.58), obtêm-se as Eqs. (7.60a-b) e na Eq. (7.59), obtêm-se as Eqs. (7.61a-b):

$$\begin{aligned}
& \theta(0) + T^*(L, 0 + \xi)\theta(L) - T^*(0, 0 + \xi)\theta(0) - B^*(L, 0 + \xi)\frac{d\theta(L)}{dx} + \\
& + B^*(0, 0 + \xi)\frac{d\theta(0)}{dx} = T(L)\theta^*(L, 0 + \xi) - T(0)\theta^*(0, 0 + \xi) - B(L)\frac{d\theta^*(L, 0)}{dx} + \\
& + B(0)\frac{d\theta^*(0, 0 + \xi)}{dx} + \int_0^L [t(x)\theta^*(x, 0 + \xi)]dx \\
\\
& \theta(L) + T^*(L, L - \xi)\theta(L) - T^*(0, L - \xi)\theta(0) - B^*(L, L - \xi)\frac{d\theta(L)}{dx} + \\
& + B^*(0, L - \xi)\frac{d\theta(0)}{dx} = T(L)\theta^*(L, L - \xi) - T(0)\theta^*(0, L - \xi) - B(L)\frac{d\theta^*(L, L - \xi)}{dx} + \\
& + B(0)\frac{d\theta^*(0, L - \xi)}{dx} + \int_0^L [t(x)\theta^*(x, L - \xi)]dx
\end{aligned} \tag{7.60a-b}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_{,\hat{x}}(0) + T_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi)\theta(L) - T_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi)\theta(0) - B_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi)\frac{d\theta(L)}{dx} + \\
& + B_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi)\frac{d\theta(0)}{dx} = T(L)\theta_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) - T(0)\theta_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) - B(L)\frac{d\theta_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi)}{dx} + \\
& + B(0)\frac{d\theta_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi)}{dx} + \int_0^L [t(x)\theta_{,\hat{x}}^*(x, 0 + \xi)]dx \\
\\
& \theta_{,\hat{x}}(L) + T_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi)\theta(L) - T_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi)\theta(0) - B_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi)\frac{d\theta(L)}{dx} + \\
& + B_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi)\frac{d\theta(0)}{dx} = T(L)\theta_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) - T(0)\theta_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) - B(L)\frac{d\theta_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi)}{dx} + \\
& + B(0)\frac{d\theta_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi)}{dx} + \int_0^L [t(x)\theta_{,\hat{x}}^*(x, L)]dx
\end{aligned} \tag{7.61a-b}$$

- **A representação algébrica do efeito da torção não-uniforme**

Reescrevendo as Eqs. (7.60a-b) e as Eqs. (7.61a-b) com notação matricial, obtém-se a expressão geral da representação algébrica do efeito da torção não-uniforme.

$$\begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \psi(0) \\ \theta(L) \\ \psi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -T^*(0, 0 + \xi) & B^*(0, 0 + \xi) & T^*(L, 0 + \xi) & -B^*(L, 0 + \xi) \\ -T_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) & B_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) & T_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) & -B_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) \\ -T^*(0, L - \xi) & B^*(0, L - \xi) & T^*(L, L - \xi) & -B^*(L, L - \xi) \\ -T_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) & B_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) & T_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) & -B_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \psi(0) \\ \theta(L) \\ \psi(L) \end{Bmatrix} = \tag{7.62}$$

$$= \begin{bmatrix} -\theta^*(0, 0 + \xi) & \psi^*(0, 0 + \xi) & \theta^*(L, 0 + \xi) & -\psi^*(L, 0 + \xi) \\ -\theta_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) & \psi_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) & \theta_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) & -\psi_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) \\ -\theta^*(0, L - \xi) & \psi^*(0, L - \xi) & \theta^*(L, L - \xi) & -\psi^*(L, L - \xi) \\ -\theta_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) & \psi_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) & \theta_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) & -\psi_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T(0) \\ B(0) \\ T(L) \\ B(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_t(0) \\ m_\psi(0) \\ m_t(L) \\ m_\psi(L) \end{Bmatrix}$$

Através das Eqs. (7.50a-h) calculam-se os valores das soluções fundamentais para as extremidades da barra devidas a aplicação da fonte de torque em cada uma dessas extremidades.

Estes valores serão incorporados ao trabalho para auxiliar o leitor neste primeiro estudo das barras de núcleo.

a) para a fonte na extremidade i

$$\theta^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$\theta^*(L, 0 + \xi) = \beta_{\omega 1}$$

$$\psi^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$\psi^*(L, 0 + \xi) = \beta_{\omega 2}$$

$$\theta_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$\theta_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = -\beta_{\omega 2}$$

$$\psi_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$\psi_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = -\beta_{\omega 3}$$

$$T^*(0, 0 + \xi) = \frac{1}{2}$$

$$T^*(L, 0 + \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$B^*(0, 0 + \xi) = 0$$

$$B^*(L, 0 + \xi) = -\alpha_{\omega 1}$$

$$T_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = 0$$

b) para a fonte na extremidade j

$$\theta^*(0, L - \xi) = \beta_{\omega 1}$$

$$\theta^*(L, L - \xi) = 0$$

$$\psi^*(0, L - \xi) = -\beta_{\omega 2}$$

$$\psi^*(L, L - \xi) = 0$$

$$\theta_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = \beta_{\omega 2}$$

$$\theta_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = 0$$

$$\psi_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = -\beta_{\omega 3}$$

$$\psi_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = 0 \quad (7.63a-q)$$

$$T^*(0, L - \xi) = \frac{1}{2}$$

$$T^*(L, L - \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$B^*(0, L - \xi) = -\alpha_{\omega 1}$$

$$B^*(L, L - \xi) = 0$$

$$T_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = 0$$

$$T_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = 0$$

$$T_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = 0$$

$$B_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = -\frac{1}{2}$$

$$B_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = -\alpha_{\omega 2}$$

$$B_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = \alpha_{\omega 2}$$

$$B_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = \frac{1}{2} \quad (7.64a-q)$$

com:

$$\alpha_{\omega 1} = -B^*(L, 0 + \xi) = -B^*(0, L - \xi) = \frac{1}{2\lambda_e} \sinh(\lambda_e L)$$

$$\alpha_{\omega 2} = -B_{,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) = B_{,\hat{x}}^*(0, L - \xi) = \frac{1}{2} \cosh(\lambda_e L)$$

$$\beta_{\omega 1} = \theta^*(0, L - \xi) = \theta^*(L, 0 + \xi) = \frac{1}{2\lambda_e GI_t} [-\lambda_e L + \sinh(\lambda_e L)]$$

$$\beta_{\omega 2} = \psi^*(L, 0 + \xi) = -\psi^*(0, L - \xi) = \frac{1}{2GI_t} [-1 + \cosh(\lambda_e L)]$$

$$\beta_{\omega 3} = \psi_{,\hat{x}}^*(L, L - \xi) = \psi_{,\hat{x}}^*(0, 0 + \xi) = \frac{\lambda_e}{2GI_t} \sinh(\lambda_e L)$$

(7.65a-f)

Utilizando-se as relações definidas nas Eqs (4.25) e (4.26) expandidas para as quatro coordenadas envolvidas no estudo, a Eq. (7.62) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \psi(0) \\ \theta(L) \\ \psi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 & \alpha_{\omega 1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -\alpha_{\omega 2} \\ -1/2 & -\alpha_{\omega 1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -\alpha_{\omega 2} & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \psi(0) \\ \theta(L) \\ \psi(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{\omega 1} & -\beta_{\omega 2} \\ 0 & 0 & -\beta_{\omega 2} & \beta_{\omega 3} \\ -\beta_{\omega 1} & -\beta_{\omega 2} & 0 & 0 \\ -\beta_{\omega 2} & -\beta_{\omega 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T(0) \\ B(0) \\ T(L) \\ B(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_t(0) \\ m_\psi(0) \\ m_t(L) \\ m_\psi(L) \end{Bmatrix} \quad (7.66)$$

onde:

$$m_t(0) = m_t(L) = \frac{t(x)}{2\lambda_e G I_t} \left[-\frac{\lambda_e L^2}{2} - \frac{1}{\lambda_e} + \frac{\cosh(\lambda_e L)}{\lambda_e} \right]$$

$$m_\psi(0) = -m_\psi(L) = \frac{t(x)}{2\lambda_e G I_t} \left[-\lambda_e L + \frac{\sinh(\lambda_e L)}{\lambda_e} \right] \quad (7.67a-b)$$

7.3.2 Representação Algébrica do Efeito da Flexo-torção na Barra de Núcleo

O problema da flexo-torção surge quando as forças externas são aplicadas excentricamente em relação ao eixo que contém os centros de torção das seções transversais, chamado de eixo de torção. No caso de barras de seção transversal de paredes finas aberta genérica, o eixo de torção não coincide com o eixo baricêntrico (que contém os centróides das seções transversais). Em muitos casos, as forças externas são admitidas aplicadas no eixo baricêntrico (ações gravitacionais, por exemplo), que em barras de seções de paredes finas mobilizará (simultaneamente) a flexão com torção, já que os eixos de torção e baricêntrico são distintos. Na figura 7.11 estão indicadas as forças externas e os esforços em um elemento diferencial.

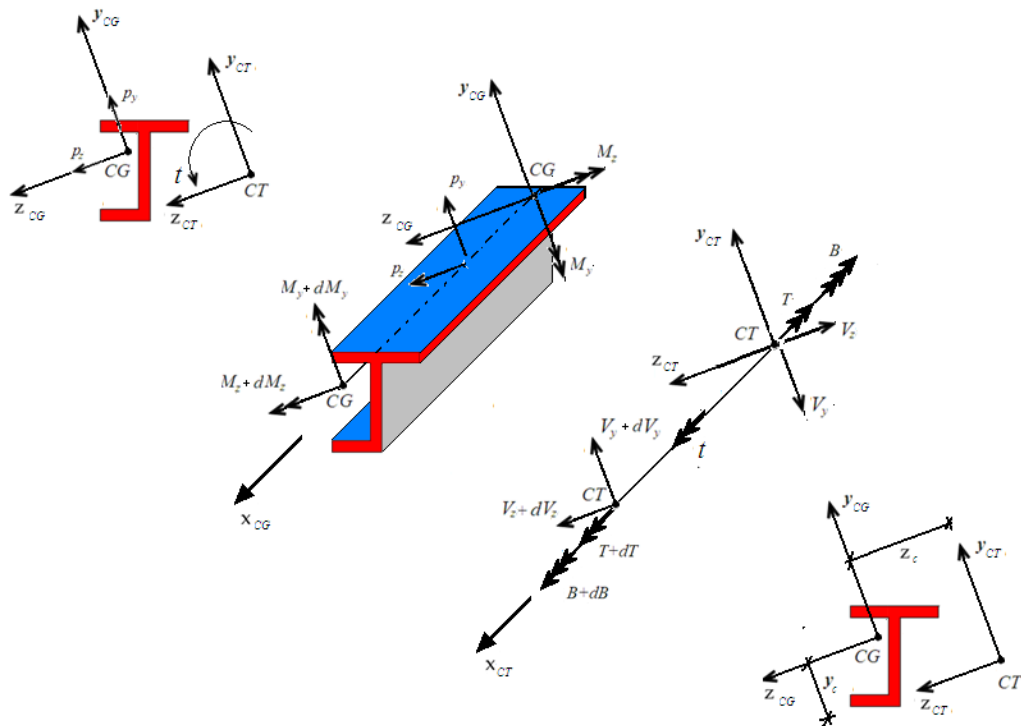


Figura 7.11 – Forças externas e Esforços

As equações de equilíbrio podem ser estabelecidas a partir da aplicação dos princípios da estática para força e momentos.

Do equilíbrio de forças em x do elemento de comprimento dx mostrado na Fig.7.11, obtém-se:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p_x(x) \quad (7.68a)$$

Do equilíbrio de forças em z e de momentos em y no elemento de comprimento dx mostrado na Fig.7.11, obtém-se, respectivamente:

$$\frac{dV_z(x)}{dx} + p_z(x) = 0 \quad (7.68b)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) = 0 \quad (7.68c)$$

Do equilíbrio de forças em y e momentos z no elemento de comprimento dx mostrado na Fig.7.11, obtém-se:

$$\frac{dV_y(x)}{dx} + p_y(x) = 0 \quad (7.68d)$$

$$\frac{dM_z(x,t)}{dx} + V_y(x) = 0 \quad (7.68e)$$

Do equilíbrio de momentos e bimomentos, ao longo do eixo de torção no elemento de comprimento dx mostrado na Fig.7.11, obtém-se, respectivamente:

$$\frac{dT(x)}{dx} + y_c p_z(x) - z_c p_y(x) + t(x,t) = 0 \quad (7.68f)$$

$$\frac{dB(x)}{dx} - T_{ft}(x) = 0 \quad (7.68g)$$

As relações constitutivas para esforços são dadas por:

$$N(x) = EAu'(x) \quad (7.68h)$$

$$M_y(x) = -EI_y w''(x) \quad (7.68i)$$

$$M_z(x) = EI_z v''(x) \quad (7.68j)$$

$$B(x) = -EI_\omega \theta''(x) \quad (7.68k)$$

Outras relações constitutivas podem ser obtidas pela combinação conveniente das Eqs. (7.68i-k) com as Eqs. (7.68b-e), resultando em:

$$V_z(x) = -EI_y w'''(x) \quad (7.68l)$$

$$V_y(x) = -EI_z v'''(x) \quad (7.68m)$$

$$T(x) = GI_t \theta'(x) - EI_\omega \theta'''(x) \quad (7.68n)$$

Se as Eqs. (7.68i-n) forem convenientemente substituídas nas Eq. (7.68b), (7.68d) e (7.68f), então o sistema de equações governantes do problema real pode ser expresso por:

$$\begin{bmatrix} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{dx^2} (D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} \quad (7.69)$$

E o problema axial desacoplado fica $EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p(x) = 0$.

Convém enfatizar que a dedução da Eq. (7.69) é mostrada de uma forma mais elaborada por VLASOV (1961), empregando-se os princípios da estática e condições de compatibilidade a partir do estado de tensões e deformações.

As equações de equilíbrio do problema fundamental associado ao problema real dadas na Eq. (7.69) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{dx^2} (D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^*(x, \hat{x}) \\ v^*(x, \hat{x}) \\ \theta^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x, \hat{x}) \\ p_y(x, \hat{x}) \\ t(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (7.70)$$

E o problema axial fundamental desacoplado fica $EA \frac{d^2 u^*(x, \hat{x})}{dx^2} + p_x^*(x, \hat{x}) = 0$.

Na sequência o enfoque matemático será dado apenas para o acoplamento flexão-torção, já que as equações integrais e algébricas do problema axial foram discutidas no capítulo 3.

As soluções fundamentais do problema acoplado são obtidas para ativação independente de cada fonte, de tal forma que o vetor independente da Eq. (7.70) deve ser isolado, resultando em:

$$\begin{bmatrix} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ -y_c EI_y \frac{d^4}{dx^4} & z_c EI_z \frac{d^4}{dx^4} & \frac{d^2}{dx^2} (D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z^*(x, \hat{x}) \\ p_y^*(x, \hat{x}) \\ t^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (7.70a)$$

ou, se $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, então (7.70a) fica:

$$[B] \begin{Bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) \quad (7.70b)$$

$$\text{Onde } [B] = \begin{bmatrix} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ -y_c EI_y \frac{d^4}{dx^4} & z_c EI_z \frac{d^4}{dx^4} & \frac{d^2}{dx^2} (D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se o método de Hörmander, as soluções da Eq. (7.70b) ficam:

$$\begin{bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{bmatrix} = [B^{co}]^T \det[B] \zeta = \begin{bmatrix} B_{22}B_{33} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}B_{33} & 0 \\ y_c B_{22}B_{11} & -z_c B_{11}B_{22} & B_{11}B_{22} \end{bmatrix} B_{11}B_{22}B_{33}\zeta \quad (7.70c)$$

então $w_p^* = w_t^* = v_r^* = v_t^* = 0$.

Apenas a título de comparação, se as fontes fossem aplicadas no eixo de torção, então $y_c = z_c = 0$ na Eq. (7.70b) geraria um segundo grupo de soluções fundamentais que poderiam ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_r^* & \bar{w}_p^* & \bar{w}_t^* \\ \bar{v}_r^* & \bar{v}_p^* & \bar{v}_t^* \\ \bar{\theta}_r^* & \bar{\theta}_p^* & \bar{\theta}_t^* \end{bmatrix} = [\bar{B}^{co}]^T \det[\bar{B}] \zeta = \begin{bmatrix} B_{22}B_{33} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}B_{33} & 0 \\ 0 & 0 & B_{11}B_{22} \end{bmatrix} B_{11}B_{22}B_{33}\zeta \quad (7.70d)$$

Sendo
$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{dx^2} (D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

$$\bar{w}_p^* = \bar{w}_t^* = \bar{v}_r^* = \bar{v}_t^* = \bar{\theta}_r^* = \bar{\theta}_p^* = 0.$$

Assim, por comparação da Eq. (7.70d) e da Eq. (7.70c) tem-se a relação:

$$\begin{bmatrix} w_r^* & 0 & 0 \\ 0 & v_p^* & 0 \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_c \\ 0 & 1 & -z_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_r^* & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v}_p^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\theta}_t^* \end{bmatrix} \quad (7.70e)$$

Vale ressaltar que as soluções $\bar{w}_r^*$, $\bar{v}_p^*$ e $\bar{\theta}_t^*$ estão associadas ao problema fundamental totalmente desacoplado onde os efeitos de flexão não interferem nos efeitos de torção e vice-versa. Desta forma $\bar{w}_r^*$ (deslocamento da flexão em y) é dado na Eq.

(3.52), $\bar{v}_p^*$ (deslocamento da flexão em z) tem uma forma análoga a Eq.(3.52), trocando-se EI_y por EI_z ; $\bar{\theta}_t^*$ (ângulo de torção da torção não-uniforme) é dado na Eq. (7.50).

Uma das equações integrais do problema pode ser obtida pela ponderação da equação governante real Eq. (7.69) pelos deslocamentos fundamentais $v_r^*(x, \hat{x})=0$, $w_r^*(x, \hat{x})$ e $\theta_r^*(x, \hat{x})$ associados à ativação da fonte de força em z ($p_z^*(x, \hat{x})=\delta(x, \hat{x})$, $p_y^*(x, \hat{x})=0$ e $t^*(x, \hat{x})=0$):

$$\int_0^L \left[\begin{array}{ccc} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ -y_c EI_y \frac{d^4}{dx^4} & z_c EI_z \frac{d^4}{dx^4} & EI_\omega \frac{d^4}{dx^4} - GI_t \frac{d^2}{dx^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_r^* \\ 0 \\ \theta_r^* \end{array} \right\} dx = 0 \quad (7.71)$$

Após o uso de convenientes integrações por partes de Eq. (7.71), e posterior utilização de Eq. (7.68 i-n), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^L [EI_y w_r^{*''''}] w(x) dx + \int_0^L [EI_\omega \theta_r^{*''''} - GI_t \theta_r^{*''} - y_c EI_y w_r^{*''''}] \theta(x) dx + \\ & - [V_z(x) w_r^*]_0^L + [M_y(x) w_r^*]_0^L + [V_{zr}^* w(x)]_0^L - [M_{yr}^* w'(x)]_0^L - [T(x) \theta_r^*]_0^L + \\ & [T_r^* \theta(x)]_0^L + [B(x) \theta_r^*]_0^L - [B_r^* \theta'(x)]_0^L = \int_0^L p_z(x) w_r^* dx + \\ & \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_r^* dx \end{aligned} \quad (7.71a)$$

Estando apenas p_z^* ativado, as equações governantes do problema fundamental dadas na Eq. (7.70a) ficam $EI_y w_r^{*''''} = \delta(x, \hat{x})$ e $EI_\omega \theta_r^{*''''} - GI_t \theta_r^{*''} - y_c EI_y w_r^{*''''} = y_c \delta(x, \hat{x})$, que ao serem substituídas na Eq. (7.71a) e combinadas com a propriedade do delta de Dirac, resultam:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) + y_c \theta(\hat{x}) - \left[V_z(x) w_r^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[M_y(x) w_r^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L \\
& - \left[M_{y_r}^*(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[V_{z_r}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \left[T_r^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L \\
& - \left[T(x) \theta_r^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_r^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_r^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_r^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_r^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.71b}$$

Outra equação integral pode ser obtida ponderando-se a equação do problema real pelas soluções fundamentais com ativação de apenas $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$.

$$\int_0^L \left[\begin{array}{ccc} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ -y_c EI_y \frac{d^4}{dx^4} & z_c EI_z \frac{d^4}{dx^4} & EI_\omega \frac{d^4}{dx^4} - GI_t \frac{d^2}{dx^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ v_p^* \\ \theta_p^* \end{array} \right\} dx = 0 \tag{7.71c}$$

Isso implica em $w_p^*(x, \hat{x}) = 0$ e a Eq. (7.70a) desdobra nas relações $EI_z v_p^{*''''} = \delta(x, \hat{x})$ e $EI_\omega \theta_p^{*''''} - GI_t \theta_p^{*''} + z_c EI_y v_p^{*''''} = -z_c \delta(x, \hat{x})$, que substituídas no resultado de convenientes integrações por partes da Eq. (7.71c) e seguida da aplicação das propriedades do delta de Dirac, resulta em:

$$\begin{aligned}
& v(\hat{x}) - z_c \theta(\hat{x}) - \left[V_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_p^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{y_p}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{z_p}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L + \left[T_p^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L \\
& - \left[T(x) \theta_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_p^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_p^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.71d}$$

O problema real ainda pode ser ponderado por soluções fundamentais decorrentes da ativação da fonte em torque $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} EI_y \frac{d^4}{dx^4} & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \frac{d^4}{dx^4} & 0 \\ -y_c EI_y \frac{d^4}{dx^4} & z_c EI_z \frac{d^4}{dx^4} & EI_\omega \frac{d^4}{dx^4} - GI_t \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_t^* \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (7.71e)$$

Isso implica em $w_t^*(x, \hat{x}) = v_t^*(x, \hat{x}) = 0$ e $EI_\omega \theta_t^{*''''} - GI_t \theta_t^{*''} = \delta(x, \hat{x})$, que quando combinadas com convenientes integrações por partes de (7.71e) e propriedades do delta de Dirac, gera:

$$\theta(\hat{x}) + [T_t^*(x, \hat{x})\theta(x)]_0^L - [T(x)\theta_t^*(x, \hat{x})]_0^L - [B_t^*(x, \hat{x})\theta'(x)]_0^L + \left[B(x)\theta_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_t^*(x, \hat{x}) dx \quad (7.72a)$$

Se a Eq. (7.72a) for multiplicada por y_c e subtraída de Eq. (7.71a), obtém-se a equação integral isolada dos deslocamentos em y:

$$\begin{aligned} & w(\hat{x}) - [V_z(x)w_r^*(x, \hat{x})]_0^L + \\ & \left[M_y(x)w_r^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L - [M_{yr}^*(x, \hat{x})w'(x)]_0^L + [V_{zr}^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L + \\ & [\overline{T_r^*}(x, \hat{x})\theta(x)]_0^L - [T(x)\overline{\theta_r^*}(x, \hat{x})]_0^L - [\overline{B_r^*}(x, \hat{x})\theta'(x)]_0^L + \left[B(x)\overline{\theta_r^{*'}}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\ & \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \overline{\theta_r^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x)w_r^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (7.72b)$$

Onde $\overline{\theta_r^*} = \theta_r^* - y_c \theta_t^*$, $\overline{T_r^*} = T_r^* + z_c T_t^*$, etc.

A equação integral isolada dos deslocamentos em z pode ser obtida pela superposição da Eq. (7.71c) e da Eq. (7.72a) amplificada de z_c :

$$\begin{aligned}
& v(\hat{x}) - \left[V_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_p^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{yp}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zp}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L + \left[\overline{T_p^*}(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L \\
& - \left[T(x) \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{B_p^*}(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \overline{\theta_p^{*'}}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.72c}$$

Onde $\overline{\theta_p^*} = \theta_p^* + z_c \theta_t^*$, $\overline{T_p^*} = T_p^* + z_c T_t^*$, etc.

No entanto, a partir da Eq. (7.70e) tem-se $\theta_t^* = \overline{\theta_t^*}$, $v_p^* = \overline{v_p^*}$, $w_r^* = \overline{w_r^*}$, $\theta_t^* = \overline{\theta_t^*}$, $\theta_r^* = y_c \overline{\theta_t^*}$ e $\theta_p^* = -z_c \overline{\theta_t^*}$, o que leva a $\overline{\theta_p^*} = \theta_p^* + z_c \theta_t^* = 0$, $\overline{\theta_r^*} = \theta_r^* - y_c \theta_t^* = 0$ e respectivas derivadas superiores. Assim, quando as equações integrais Eqs. (7.72a), (7.72b), (7.72c) e suas respectivas derivadas no ponto-fonte forem sequenciadas, um sistema de equações integrais pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
& \{u(\hat{x})\} + \left[\begin{array}{cccccc} \overline{V_{yp}^*} & 0 & 0 & 0 & \overline{M_{zp}^*} & 0 \\ 0 & V_{zr}^* & 0 & -\overline{M_{yr}^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{T_t^*} & 0 & 0 & -\overline{B_t^*} \\ 0 & \overline{V_{zr, \hat{x}}^*} & 0 & -\overline{M_{yz, \hat{x}}^*} & 0 & 0 \\ V_{yp, \hat{x}}^* & 0 & 0 & 0 & \overline{M_{zp, \hat{x}}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{T_{t, \hat{x}}^*} & 0 & 0 & -\overline{B_{t, \hat{x}}^*} \end{array} \right]_{x=0}^{x=L} \{u(x)\} = \\
& = \left[\begin{array}{cccccc} \overline{v_p^*} & 0 & 0 & 0 & \overline{v_p^{*'}} & 0 \\ 0 & \overline{w_r^*} & 0 & -\overline{w_r^{*'}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta_t^*} & 0 & 0 & -\overline{\theta_t^{*'}} \\ 0 & \overline{w_{r, \hat{x}}^*} & 0 & -\overline{w_{r, \hat{x}}^{*'}} & 0 & 0 \\ \overline{v_{p, \hat{x}}^*} & 0 & 0 & 0 & \overline{v_{p, \hat{x}}^{*'}} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta_{t, \hat{x}}^*} & 0 & 0 & -\overline{\theta_{t, \hat{x}}^{*'}} \end{array} \right]_{x=0}^{x=L} \{p(x)\} + \int_0^L \left[\begin{array}{ccc} \overline{v_p^*} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{w_r^*} & 0 \\ y_c \widehat{\theta_t^*} & -z_c \overline{\theta_t^*} & \overline{\theta_t^*} \\ 0 & \overline{w_{r, \hat{x}}^*} & 0 \\ \overline{v_{p, \hat{x}}^*} & 0 & 0 \\ y_c \widehat{\theta_{t, \hat{x}}^*} & -z_c \overline{\theta_{t, \hat{x}}^*} & \overline{\theta_{t, \hat{x}}^*} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ p_z(x) \\ m(x) \end{Bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{7.73}$$

Onde:

$$\{u(\hat{x})\} = \begin{Bmatrix} v(\hat{x}) \\ w(\hat{x}) \\ \theta(\hat{x}) \\ dw(\hat{x})/d\hat{x} \\ dv(\hat{x})/d\hat{x} \\ d\theta(\hat{x})/d\hat{x} \end{Bmatrix}, \quad \{u(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \\ dw(x)/dx \\ dv(x)/dx \\ d\theta(x)/dx \end{Bmatrix} \text{ e } \{p(x)\} = \begin{Bmatrix} V_y(x) \\ V_z(x) \\ T(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \\ B(x) \end{Bmatrix}$$

Assim, é possível concluir que a Eq. (7.73) poderia ter sido deduzida diretamente ponderando a equação governante do problema real (onde as cargas externas são excêntricas em relação ao eixo de torção) por um problema fundamental desacoplado em que as fontes são aplicadas diretamente no eixo de torção. Além disso, a Eq. (7.73) indica que as matrizes de influência podem ser montadas a partir das contribuições independentes dos problemas de flexão e torção. De fato, no caso estático, o acoplamento de flexo-torção se dá externamente no vetor de carga conforme indicado no lado direito da Eq. (7.73).

Convém notar que o sistema Eq. (7.73) está escrito em função das inclinações $dw(x)/dx$, $dv(x)/dx$ para o problema de flexão. Se esse for expresso em função das rotações da seção transversal $\phi(x) = -dw(x)/dx$ e $\varphi(x) = dv(x)/dx$ então:

$$\begin{Bmatrix} v(\hat{x}) \\ w(\hat{x}) \\ \theta(\hat{x}) \\ -\phi(\hat{x}) \\ \varphi(\hat{x}) \\ d\theta(\hat{x})/d\hat{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yp}^* & 0 & 0 & 0 & \bar{M}_{zp}^* & 0 \\ 0 & V_{zr}^* & 0 & \bar{M}_{yr}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_t^* & 0 & 0 & -\bar{B}_t^* \\ 0 & \bar{V}_{zr,\hat{x}}^* & 0 & \bar{M}_{yz,\hat{x}}^* & 0 & 0 \\ V_{yp,\hat{x}}^* & 0 & 0 & 0 & \bar{M}_{zp,\hat{x}}^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{t,\hat{x}}^* & 0 & 0 & -\bar{B}_{t,\hat{x}}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \\ \phi(x) \\ \varphi(x) \\ d\theta(\hat{x})/d\hat{x} \end{Bmatrix} \Big|_{x=0}^{x=L} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{v}_p^* & 0 & 0 & 0 & \bar{v}_p^{*'} & 0 \\ 0 & \bar{w}_r^* & 0 & \phi_r^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\theta}_t^* & 0 & 0 & -\bar{\theta}_t^{*'} \\ 0 & \bar{w}_{r,\hat{x}}^* & 0 & \phi_{r,\hat{x}}^* & 0 & 0 \\ \bar{v}_{p,\hat{x}}^* & 0 & 0 & 0 & \bar{v}_{p,\hat{x}}^{*'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\theta}_{t,\hat{x}}^* & 0 & 0 & -\bar{\theta}_{t,\hat{x}}^{*'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_y(x) \\ V_z(x) \\ T(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \\ B(x) \end{Bmatrix} \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \begin{Bmatrix} \bar{v}_p^* & 0 & 0 \\ 0 & \bar{w}_r^* & 0 \\ y_c \bar{\theta}_t^* & -z_c \bar{\theta}_t^* & \bar{\theta}_t^* \\ 0 & \bar{w}_{r,\hat{x}}^* & 0 \\ \bar{v}_{p,\hat{x}}^* & 0 & 0 \\ y_c \bar{\theta}_{t,\hat{x}}^* & -z_c \bar{\theta}_{t,\hat{x}}^* & \bar{\theta}_{t,\hat{x}}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ p_z(x) \\ m(x) \end{Bmatrix} dx \quad (7.73a)$$

Assim, após a colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra e o cálculo das integrais das cargas externas na Eq. (7.73) e a inclusão das contribuições algébricas do problema axial (discutidas no capítulo 3), um sistema algébrico pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} [h_{bii}] & [h_{bij}] \\ [h_{bji}] & [h_{bjj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_b\}_i \\ \{u_b\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [g_{bii}] & [g_{bij}] \\ [g_{bji}] & [g_{bjj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_b\}_i \\ \{p_b\}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{b_b\}_i \\ \{b_b\}_j \end{Bmatrix} \quad (7.74)$$

com:

$$[h_{bii}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & L/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$[h_{bij}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & \alpha_{\omega 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{\omega 2} \end{bmatrix},$$

$$[h_{bji}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -\alpha_{\omega 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{\omega 2} \end{bmatrix},$$

$$[h_{bjj}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -L/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$[g_{bii}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{y3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{z3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[g_{bij}] = \begin{bmatrix} -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{z2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{\omega 1} & 0 & 0 & -\beta_{\omega 2} \\ 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{\omega 2} & 0 & 0 & \beta_{\omega 3} \end{bmatrix},$$

$$[g_{bji}] = \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{z2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{\omega 1} & 0 & 0 & -\beta_{\omega 2} \\ 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{\omega 2} & 0 & 0 & -\beta_{\omega 3} \end{bmatrix},$$

$$[g_{bjj}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{y3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{z3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Onde

$$\beta_{y1} = \frac{L^3}{6EI_y}, \beta_{y2} = \frac{L^2}{4EI_y}, \beta_{y3} = \frac{L}{2EI_y},$$

$$\beta_{z1} = \frac{L^3}{6EI_z}, \beta_{z2} = \frac{L^2}{4EI_z}, \beta_{z3} = \frac{L}{2EI_z},$$

$$\alpha_{\omega 1} = \frac{1}{2\lambda_e} \sinh(\lambda_e L), \alpha_{\omega 2} = \frac{1}{2} \cosh(\lambda_e L),$$

$$\beta_{\omega 1} = \frac{1}{2\lambda_e GI_t} [-\lambda_e L + \sinh(\lambda_e L)], \beta_{\omega 2} = \frac{1}{2GI_t} [-1 + \cosh(\lambda_e L)],$$

$$\beta_{\omega 3} = \frac{\lambda_e}{2GI_t} \sinh(\lambda_e L), \beta_x = \frac{L}{2EA}, \lambda_e = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}},$$

e,

$$\begin{aligned} \{u_b\}^T &= \{\{u_b\}_i \quad \{u_b\}_j\}^T = \\ &= \{u_{bi} \quad v_{bi} \quad w_{bi} \quad \theta_{bi} \quad w'_{bi} \quad v'_{bi} \quad \theta'_{bi} \quad u_{bj} \quad v_{bj} \quad w_{bj} \quad \theta_{bj} \quad w'_{bj} \quad v'_{bj} \quad \theta'_{bj}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_b\}^T &= \{\{p_b\}_i \quad \{p_b\}_j\}^T = \\ &= \{N_{bi} \quad V_{ybi} \quad V_{zbi} \quad T_{bi} \quad M_{ybi} \quad M_{zbi} \quad B_{bi} \quad N_{bj} \quad V_{ybj} \quad V_{zbi} \quad T_{bj} \quad M_{ybj} \quad M_{zbi} \quad B_{bj}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f_b\}^T &= \{\{f_b\}_i \quad \{f_b\}_j\}^T = \\ &= \{f_{xbi} \quad f_{ybi} \quad f_{zbi} \quad m_{xbi} \quad m_{ybi} \quad m_{zbi} \quad b_{bi} \quad f_{xbj} \quad f_{ybj} \quad f_{zbi} \quad m_{xbj} \quad m_{ybj} \quad m_{zbi} \quad b_{bj}\} \end{aligned}$$

7.4 PROBLEMA DA FLEXO-TORÇÃO: ANÁLISE DINÂMICA

7.4.1 Introdução

Neste subitem serão apresentadas as EDPs governantes dos efeitos dinâmicos: do esforço axial, de flexão em y e em z e da torção não-uniforme a partir do equilíbrio de forças, momentos e bimomentos. Nota-se que alguns efeitos interferem noutros, o que caracteriza o acoplamento das equações dos efeitos de flexão e torção. Na Fig. 7.12 estão indicadas as ações e sollicitações no problema dinâmico das barras de seção aberta de paredes finas.

O equilíbrio de forças em x fica (vide Fig.7.12):

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = -p_x(x,t) + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (7.75)$$

Para o equilíbrio de forças em z e de momentos em y Fig.7.12, obtém-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - y_c \rho A \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + p_z(x,t) &= 0 \\ \frac{\partial M_y(x,t)}{\partial x} - V_z + \rho I_y \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x \partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.76a-b)$$

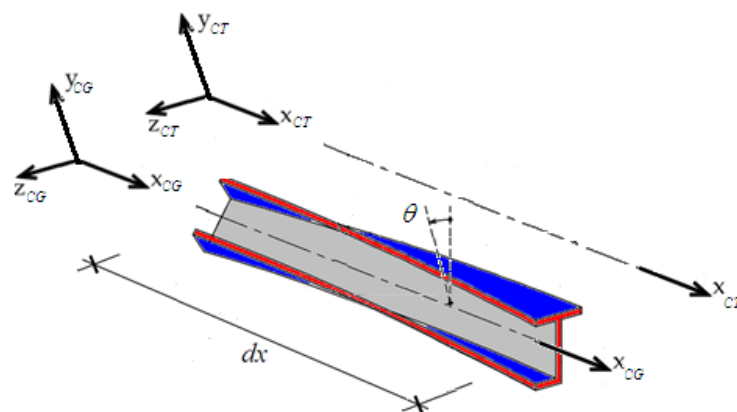
Ao equilibrar forças em y e momentos z , Fig.7.12, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_y(x,t)}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + z_c \rho A \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + p_y(x,t) &= 0 \\ \frac{\partial M_z(x,t)}{\partial x} + V_y(x,t) - \rho I_z \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x \partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.77a-b)$$

Se ao longo do eixo de torção for equilibrado momentos e bimomentos como mostrado na Fig.7.12, obtém-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - \\ - y_c \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + z_c \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + y_c p_z(x,t) - z_c p_y(x,t) + t(x,t) &= 0 \end{aligned}$$

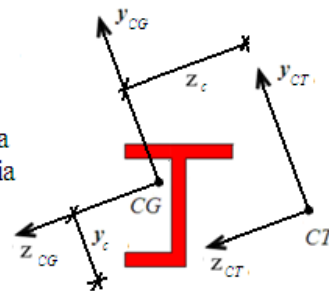
(a) Geometria e sistemas de referencias



Elemento da barra de seção assimétrica e sistemas de referencia

Seção transversal

Coordenadas y_c e z_c do CG a partir do sistema de referencia com origem no CT



(b) Carregamentos externos

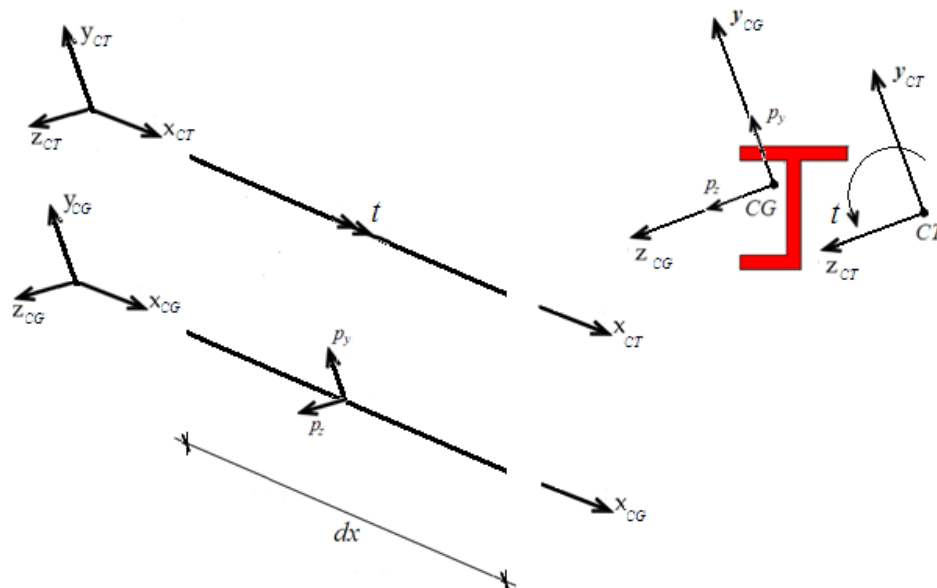
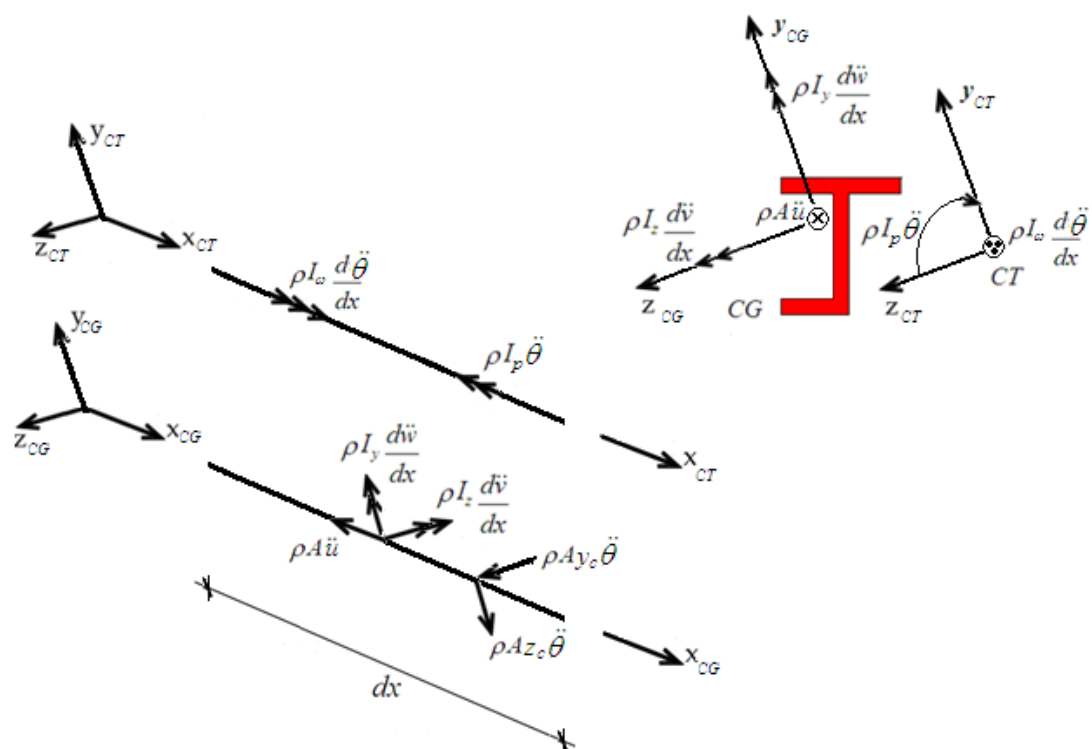


Figura 7.12(a) e (b) - Esforços na barra de núcleo

(c) Forças inerciais



(d) Esforços internos

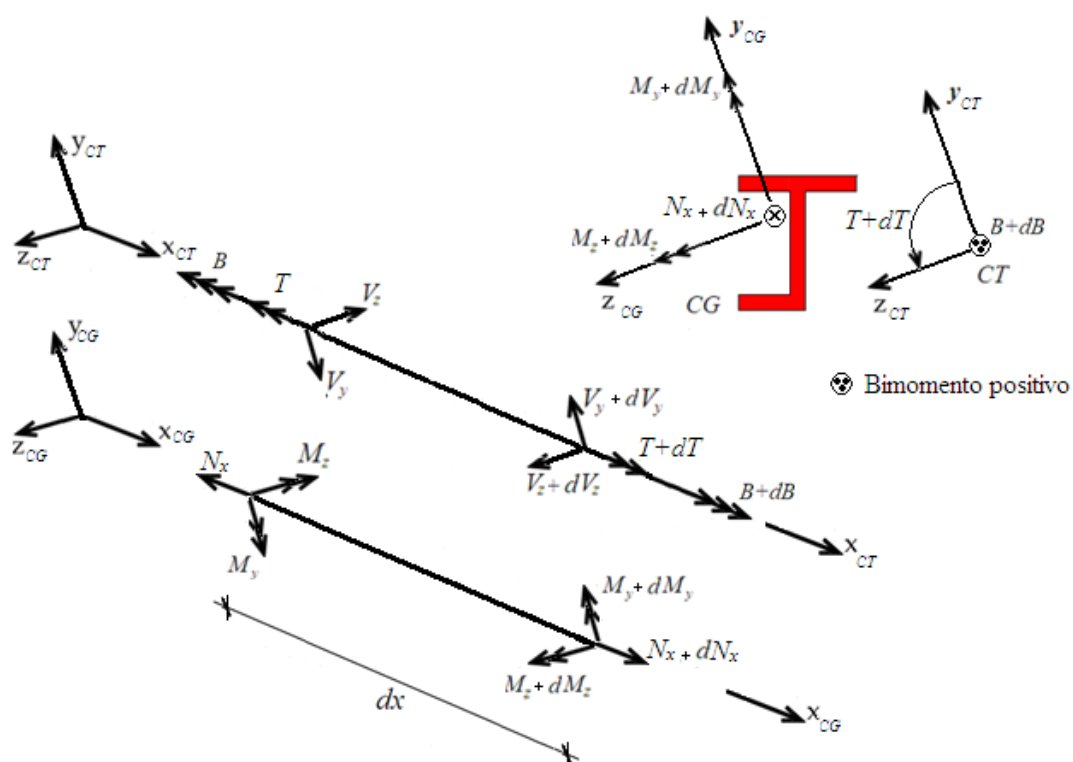


Figura 7.12(c) e (d) - Esforços na barra de núcleo

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} + \rho I_\omega \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial x \partial t^2} - T_t(x,t) = 0 \quad (7.78a-b)$$

Substituindo na Eq. (7.75), $N(x,t) = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, obtém-se:

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + p_x(x,t) = 0 \quad (7.79)$$

Utilizando a Eq. (7.76a) na derivada em x da Eq. (7.76b) onde se faz

$M_y(x,t) = -EI_y \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$, obtém-se:

$$EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + y_c \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right) - p_z(x,t) = 0 \quad (7.80)$$

Analogamente, utilizando a Eq. (7.77a) na derivada em x da Eq. (7.77b) onde faz-se

se $M_z(x,t) = EI_z \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$, obtém-se:

$$EI_z \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \rho I_z \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - z_c \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right) - p_y(x,t) = 0 \quad (7.81)$$

Utilizando-se convenientemente as equações de equilíbrio de momento torçor e de bimomento, Eqs. (7.78a-b), utilizando-se ainda a Eq. (6.150) além da relação:

$B(x,t) = -EI_\omega \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & EI_\omega \frac{\partial^4 \theta(x,t)}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \rho I_\omega \frac{\partial^4 \theta(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & + \rho \left[A \left(y_c \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - z_c \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \right) + I_p \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right] - t(x,t) - y_c p_z(x,t) + z_c p_y(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

Convém observar que as Eqs. (7.79), (7.80), (7.81) e (7.82), são as equações governantes do problema da flexo-torção. Além disso, enfatiza-se que I_z , I_y são os momentos de inércia principais centroidais; I_ω é o momento de inércia setorial principal (isto é, com pólo no centro de torção); $I_p = I_y + I_z + A(y_c^2 + z_c^2)$ é o momento polar de inércia no centro de torção; I_t é o momento de inércia à torção uniforme; A é a área da seção transversal; v , w , θ são os deslocamentos transversais e o ângulo de torção no centro de torção; p_y , p_z são as forças externas distribuídas aplicadas no eixo baricêntrico; t é o torque distribuído aplicado no eixo de torção; y_c , z_c são as coordenadas do centroide em relação ao sistema de coordenadas no centro de torção.

Em VLASOV (1961) as equações de movimento da flexo-torção são deduzidas partindo de equilíbrio das resultantes de tensões e compatibilidade de deformações. Já PROKIÉ (2005) usa princípios variacionais para obtenção dessas equações governantes.

7.4.2 Estudo das Seções Monossimétricas (Problema Bi-acoplado)

Considerado o caso em que são desprezadas as inércias rotatórias e de empenamento em uma seção monossimétrica com simetria em torno do eixo z , (Fig. 7.13), isto é $y_c = 0$, então das Eqs. (7.80), (7.81) e (7.82), resulta:

$$\begin{aligned}
 EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - p_z(x,t) &= 0 \\
 EI_z \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - z_c \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \right) - p_y(x,t) &= 0 \\
 EI_\omega \frac{\partial^4 \theta(x,t)}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - z_c \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - t(x,t) + z_c p_y(x,t) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.83a-c}$$

Das Eqs. (7.83a-c) apenas as duas últimas são acopladas serão discutidas na sequência. Só então, a representação da barra de núcleo será obtida pela superposição dos efeitos de flexo-torção com aqueles dos problemas desacoplados axiais e flexão.

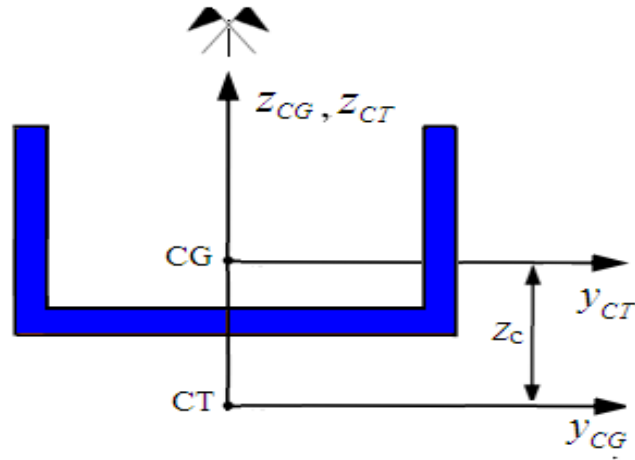


Figura 7.13 – Seção transversal monossimétrica

Então reescrevendo as Eqs. (7.83b) e (7.83c) na forma de uma matriz de operadores diferenciais, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} EI_z \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\rho A z_c \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ -\rho A z_c \frac{\partial^2}{\partial t^2} & EI_\omega \frac{\partial^4}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho I_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x,t) \\ \theta(x,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_y(x,t) \\ t(x,t) - z_c p_y(x,t) \end{Bmatrix} \quad (7.84)$$

Diferentemente dos capítulos anteriores, neste as variáveis no domínio da frequência serão representadas sem sobressímbolo, por exemplo, a força harmônica fica $p_y(x,t) = p_y(x)e^{i\omega t} = p_y(x)$.

Após a aplicação da transformada de Fourier na Eq. (7.84), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c S_1 & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} \quad (7.85)$$

onde: $D_{1z} = EI_z$, $S_1 = \rho A \omega^2$, $D_2 = EI_\omega$, $D_3 = GI_t$, $S_2 = \rho I_p \omega^2$.

7.4.2.1 O problema fundamental bi-acoplado e sua solução

Se as deformações por cortante forem desprezadas uma equação governante do problema fundamental da flexo-torção pode ser obtida por analogia a EDP do problema real, Eq. (7.85). Para tanto é necessário a substituição em duas combinações de carregamentos aplicados de p_y e t por impulsos unitários. Na primeira o impulso em força está ativado $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e o impulso em torque desativado $t^*(x, \hat{x}) = 0$, associando soluções fundamentais em deslocamento e ângulo de torção representado por $v_p^*(x, \hat{x})$, $\theta_p^*(x, \hat{x})$. Na segunda combinação ativa-se apenas o impulso de toque, isto é, $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$, resultando nas contrapartes $v_t^*(x, \hat{x})$ e $\theta_t^*(x, \hat{x})$. Se as equações das duas combinações forem reunidas, fica:

$$\begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c S_1 & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p^*(x) & v_t^*(x) \\ \theta_p^*(x) & \theta_t^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_y^*(x, \hat{x}) \\ t^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (7.86)$$

Para a utilização do método de Hörmander (descrito nos capítulos 3 e 6), as ações devem ser aplicadas independentemente. Para tal fim, pode-se multiplicar o sistema Eq. (7.86) pela inversa da matriz que multiplica o carregamento, resultando.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c S_1 & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p^*(x) & v_t^*(x) \\ \theta_p^*(x) & \theta_t^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (7.87)$$

Ou após a multiplicação

$$\begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 + z_c^2 S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p^*(x) & v_t^*(x) \\ \theta_p^*(x) & \theta_t^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

Por comparação à expressão de Hörmander, $[B][G] = [I]\delta(x, \hat{x})$, as matrizes ficam:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 + z_c^2 S_1 \end{bmatrix} \quad (7.89)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} v_p^*(x) & v_t^*(x) \\ \theta_p^*(x) & \theta_t^*(x) \end{bmatrix} \quad (7.90)$$

O método de Hörmander requer ainda a satisfação da relação $\det[B]_{\zeta} = \delta(x, \hat{x})$, de forma que o determinante de Eq. (7.90) resulta:

$$\det[B] = D_3 S_1 \frac{d^2}{dx^2} - (D_{1z} S_2 + D_2 S_1) \frac{d^4}{dx^4} - S_1^2 z_c^2 + S_2 S_1 + D_{1z} D_2 \frac{d^8}{dx^8} - D_{1z} D_3 \frac{d^6}{dx^6} \quad (7.91)$$

Fazendo-se a mudança de variável $y = \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$ na segunda derivada em x do $\det[B]$,

então a expressão de Hörmander fica:

$$\det[B]_{\zeta} = D_{1z} D_2 y^4 - D_{1z} D_3 y^3 - (D_{1z} S_2 + D_2 S_1) y^2 + D_3 S_1 y + S_1 (S_2 - S_1 z_c^2) = \delta(x, \hat{x}) \quad (7.92)$$

Dividindo a Eq. (7.92) por $D_2 D_{1z}$, e tomando-se sua forma homogênea, tem-se:

$$y^4 - \frac{D_3}{D_2} y^3 - \left(\frac{S_2}{D_2} + \frac{S_1}{D_{1z}} \right) y^2 + \frac{D_3 S_1}{D_{1z} D_2} y + \frac{S_1}{D_{1z} D_2} (S_2 + S_1 z_c^2) = 0 \quad (7.93)$$

cujas raízes são: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{R} + \sqrt{\Delta_1}}{2} - \frac{a}{4}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{R} - \sqrt{\Delta_1}}{2} - \frac{a}{4}$, $\lambda_3 = \frac{-\sqrt{R} + \sqrt{\Delta_2}}{2} - \frac{a}{4}$,

$\lambda_4 = \frac{-\sqrt{R} - \sqrt{\Delta_2}}{2} - \frac{a}{4}$, com $a = -\frac{D_3}{D_2}$, $\Delta_1 = (-\sqrt{R})^2 - 4(p + z_0 + x_0 \sqrt{R})$,

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \left(-\sqrt{R}\right)^2 - 4(p + z_0 - x_0\sqrt{R}), \quad R = p + 2z_0, & p &= -\frac{3}{8}\left(-\frac{D_3}{D_2}\right)^2 - \left(\frac{S_2}{D_2} + \frac{S_1}{D_{1z}}\right), \\
z_0 &= s_0 + k x_0 = \frac{q}{2(2z_0 + p)}, & k &= -5\frac{p}{6}, & s_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\Delta}}, \\
p_1 &= -\frac{p^2}{12} - r, \quad q_1 = \frac{rp}{3} - \frac{p^3}{108} - \frac{q^2}{8}, \\
r &= -\frac{3}{256}\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{S_2}{D_2} + \frac{S_1}{D_{1z}}\right)\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 \frac{S_1}{D_{1z}} + \frac{S_1(S_2 - S_1 z_c^2)}{D_{1z} D_2}
\end{aligned}$$

A solução da Eq. (7.93) possui duas raízes negativas λ_3 e λ_4 e duas positivas λ_1 e λ_2 de forma que a função seguinte pode ser proposta:

$$\varsigma = A_1 \sinh(-\sqrt{\lambda_1} r) + A_2 \sinh(-\sqrt{\lambda_2} r) + A_3 \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + A_4 \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \quad (7.94)$$

Cujas constantes (A_i , $i = 1, 2, 3$ e 4) são obtidas introduzindo a Eq. (7.94) na Eq. (7.93), na qual se faz a seguinte mudança de variável $y = \frac{d^2 \varsigma}{dx^2}$, resultando:

$$\frac{d^8}{dx^8} \varsigma - \frac{D_3}{D_2} \frac{d^6}{dx^6} \varsigma - \left(\frac{S_2}{D_2} + \frac{S_1}{D_{1z}}\right) \frac{d^4}{dx^4} \varsigma + \frac{D_3 S_1}{D_{1z} D_2} \frac{d^2}{dx^2} \varsigma + S_1(S_2 + S_1 z_c^2) \varsigma = \frac{\delta(x, \hat{x})}{D_{1z} D_2} \quad (7.95)$$

Para se evitar as derivadas de ordem superiores do delta de Dirac, decorrentes da aplicação da Eq. (7.95) na Eq. (7.94), as seguintes condições podem ser impostas:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\lambda_1} & -\sqrt{\lambda_2} & \sqrt{-\lambda_3} & \sqrt{-\lambda_4} \\ -\sqrt{\lambda_1} \lambda_1 & -\sqrt{\lambda_2} \lambda_2 & \sqrt{-\lambda_3} \lambda_3 & \sqrt{-\lambda_4} \lambda_4 \\ -\sqrt{\lambda_1} \lambda_1^2 & -\sqrt{\lambda_2} \lambda_2^2 & \sqrt{-\lambda_3} \lambda_3^2 & \sqrt{-\lambda_4} \lambda_4^2 \\ -\sqrt{\lambda_1} \lambda_1^3 & -\sqrt{\lambda_2} \lambda_2^3 & \sqrt{-\lambda_3} \lambda_3^3 & \sqrt{-\lambda_4} \lambda_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 2D_{1z} D_2 \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

Após a solução do sistema, Eq. (7.96), as constantes ficam:

$$A_1 = \frac{1}{2D_{1z}D_2\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1,$$

$$A_2 = -\frac{1}{2D_{1z}D_2\sqrt{\lambda_2}}\alpha_2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2D_{1z}D_2\sqrt{-\lambda_3}}\alpha_3$$

$$A_4 = \frac{1}{2D_{1z}D_2\sqrt{-\lambda_4}}\alpha_4$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \quad (7.97a-d)$$

Então a Eq. (7.96) passa a ser escrita como:

$$\varsigma = \frac{\sinh(-\sqrt{\lambda_1}r)}{2D_{1z}D_2\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1 - \frac{\sinh(-\sqrt{\lambda_2}r)}{2D_{1z}D_2\sqrt{\lambda_2}}\alpha_2 - \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_3}r)}{2D_{1z}D_2\sqrt{-\lambda_3}}\alpha_3 + \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_4}r)}{2D_{1z}D_2\sqrt{-\lambda_4}}\alpha_4 \quad (7.98)$$

As soluções fundamentais estão diretamente correlacionadas com a função escalar ς pela expressão:

$$[G] = [B^{cof}]^T \varsigma = \begin{bmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{bmatrix} \varsigma = \begin{bmatrix} v_p^*(x) & v_t^*(x) \\ \theta_p^*(x) & \theta_t^*(x) \end{bmatrix} \quad (7.99)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_t^*(x, \hat{x}) &= -B_{12}\varsigma = \\ &= \frac{S_1 z_c}{2D_{1z}D_2} \left[-\alpha_1 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}r)}{\sqrt{\lambda_1}} + \alpha_2 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2}r)}{\sqrt{\lambda_2}} - \alpha_3 \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_3}r)}{\sqrt{-\lambda_3}} + \alpha_4 \frac{\sen(\sqrt{-\lambda_4}r)}{\sqrt{-\lambda_4}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_t^*(x, \hat{x}) &= B_{11}\zeta = \\ &= -\frac{1}{2D_2} \left[-\beta_1 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}r)}{\sqrt{\lambda_1}} + \beta_2 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2}r)}{\sqrt{\lambda_2}} - \beta_3 \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_3}r)}{\sqrt{-\lambda_3}} + \beta_4 \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_4}r)}{\sqrt{-\lambda_4}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_p^*(x, \hat{x}) &= B_{22}\zeta = \\ &= \frac{1}{2D_{1z}D_2} \left[\frac{\gamma_1 \sinh(\sqrt{\lambda_1}r)}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\gamma_2 \sinh(\sqrt{\lambda_2}r)}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{\gamma_3 \sin(\sqrt{-\lambda_3}r)}{\sqrt{-\lambda_3}} - \frac{\gamma_4 \sin(\sqrt{-\lambda_4}r)}{\sqrt{-\lambda_4}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_p^*(x, \hat{x}) &= -B_{21}\zeta = \frac{S_1 D_{1z} Z_c}{2D_{1z} D_2} \left[-\alpha_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1}r) + \alpha_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2}r) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3}r) - \alpha_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]\end{aligned}\quad (7.100a-d)$$

onde:

$$\beta_1 = \left(\lambda_1^2 - \frac{S_1}{D_{1z}} \right) \alpha_1, \quad \beta_2 = \left(\lambda_2^2 - \frac{S_1}{D_{1z}} \right) \alpha_2, \quad \beta_3 = \left(\lambda_3^2 - \frac{S_1}{D_{1z}} \right) \alpha_3, \quad \beta_4 = \left(\lambda_4^2 - \frac{S_1}{D_{1z}} \right) \alpha_4$$

$$\gamma_1 = (\lambda_1^2 D_2 - \lambda_1 D_3 - S_2 + S_1 z_c^2) \alpha_1, \quad \gamma_2 = (\lambda_2^2 D_2 - \lambda_2 D_3 - S_2 + S_1 z_c^2) \alpha_2$$

$$\gamma_3 = (\lambda_3^2 D_2 - \lambda_3 D_3 - S_2 + S_1 z_c^2) \alpha_3, \quad \gamma_4 = (\lambda_4^2 D_2 - \lambda_4 D_3 - S_2 + S_1 z_c^2) \alpha_4 \quad (7.101a-h)$$

As derivadas das soluções fundamentais primárias no ponto campo em x ficam:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} v_t^*(x, \hat{x}) &= \phi_t^*(x, \hat{x}) = -\frac{S_1 z_c \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) - \alpha_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) + \right. \\ &\quad \left. \alpha_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) - \alpha_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_t^*(x, \hat{x})}{dx} &= \psi_t^*(x, \hat{x}) = \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_2} \left[\beta_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) - \beta_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) + \right. \\ &\quad \left. \beta_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) - \beta_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]\end{aligned}$$

$$\frac{dv_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \phi_p^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{1z}D_2} \left[\gamma_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) - \gamma_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) + \gamma_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) - \gamma_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{d}{dx} \theta_p^*(x, \hat{x}) = \psi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_{1z}z_c \text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{1z}D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) - \alpha_2 \lambda_2^2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) + \alpha_3 \lambda_3^2 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) - \alpha_4 \lambda_4^2 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

Já as derivadas no ponto-fonte das soluções fundamentais de interesse são:

$$\frac{d}{d\hat{x}} v_t^*(x, \hat{x}) = v_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{S_1 z_c \text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{1z}D_2} \left[\alpha_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) - \alpha_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) + \alpha_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) - \alpha_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{x}} \phi_t^*(x, \hat{x}) = \phi_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{S_1 z_c}{2D_{1z}D_2} \left[\alpha_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1}r) - \alpha_2 \lambda_2 \sinh(\sqrt{\lambda_2}r) - \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3}r) + \alpha_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{d\theta_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \theta_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_2} \left[-\beta_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) + \beta_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) - \beta_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) + \beta_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{d\psi_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \psi_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2D_2} \left[\beta_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1}r) - \beta_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2}r) - \beta_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3}r) + \beta_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{dv_p^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = v_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{1z}D_2} \left[-\gamma_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}r) + \gamma_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}r) - \gamma_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}r) + \gamma_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \phi_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2D_{1z}D_2} \left[\gamma_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1}r) - \gamma_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2}r) - \gamma_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3}r) + \gamma_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4}r) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{x}} \theta_p^*(x, \hat{x}) = \theta_{p, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{S_1 z_c \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) - \alpha_2 \lambda_2^2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) + \right. \\ \left. \alpha_3 \lambda_3^2 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) - \alpha_4 \lambda_4^2 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{x}} \psi_p^* = \psi_{p, \hat{x}}^* = \frac{S_1 z_c}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \alpha_2 \lambda_2^2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\ \left. - (-\lambda_3)^2 \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 (-\lambda_4)^2 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\ (7.102a-m)$$

Já as soluções fundamentais em esforços são:

$$V_{yt}^*(x, \hat{x}) = -D_{1z} \frac{d^3}{dx^3} v_t^*(x, \hat{x}) = \frac{S_1 z_c \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) - \alpha_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) + \right. \\ \left. + \alpha_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) - \alpha_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]$$

$$M_{zt}^*(x, \hat{x}) = D_{1z} \frac{d^2}{dx^2} v_t^*(x, \hat{x}) = -\frac{S_1 z_p}{2D_2} \left[\alpha_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \alpha_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) - \right. \\ \left. \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]$$

$$T_t^* = D_3 \frac{d\theta_t^*(x, \hat{x})}{dx} - D_2 \frac{d^3\theta_t^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2} \left[\beta_1 \delta_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) - \beta_2 \delta_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) + \right. \\ \left. \beta_3 \delta_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) - \beta_4 \delta_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]$$

$$B_t^*(x, \hat{x}) = -D_2 \frac{d^2}{dx^2} \theta_t^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \left[\beta_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \beta_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) - \right. \\ \left. \beta_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \beta_4 \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]$$

$$\text{onde: } \delta_1 = \lambda_1 - \frac{D_3}{D_2}, \delta_2 = \lambda_2 - \frac{D_3}{D_2}, \delta_3 = \lambda_3 - \frac{D_3}{D_2} \text{ e } \delta_4 = \lambda_4 - \frac{D_3}{D_2}.$$

$$V_{yp}^*(x, \hat{x}) = -D_{1z} \frac{d^3 v_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_2} \left[\gamma_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) - \gamma_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) + \right. \\ \left. \gamma_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) - \gamma_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]$$

$$\begin{aligned}
M_{zp}^*(x, \hat{x}) &= D_{1z} \frac{d^2 v_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{1}{2D_2} \left[\gamma_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \gamma_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \gamma_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
T_p^*(x, \hat{x}) &= D_3 \frac{d}{dx} \theta_p^*(x, \hat{x}) - D_2 \frac{d^3}{dx^3} \theta_p^*(x, \hat{x}) = \frac{z_c \operatorname{sgn}(x, \hat{x})}{2} \left[\alpha_1 \delta_1 \lambda_1^2 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) - \right. \\
&\quad \left. \alpha_2 \delta_2 \lambda_2^2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) + \alpha_3 \delta_3 \lambda_3^2 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) - \alpha_4 \delta_4 \lambda_4^2 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
B_p^*(x, \hat{x}) &= -D_2 \frac{d^2}{dx^2} \theta_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{z_c}{2} \left[\alpha_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \right. \\
&\quad \left. \alpha_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) - \alpha_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]
\end{aligned} \tag{7.103a-h}$$

As soluções fundamentais derivadas em $\hat{x}$ das soluções fundamentais em esforços:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\hat{x}} V_{yt}^*(x, \hat{x}) &= V_{yt, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{S_1 z_p \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \right. \\
&\quad \left. \alpha_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) - \alpha_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\frac{d}{d\hat{x}} M_{zt}^*(x, \hat{x}) &= M_{zt, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{S_1 z_p}{2D_2} \left[-\alpha_1 \sqrt{\lambda_1} \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) + \alpha_2 \sqrt{\lambda_2} \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 \sqrt{-\lambda_4} \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\frac{d}{d\hat{x}} T_t^*(x, \hat{x}) &= T_{t, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} \left[\beta_1 \delta_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \beta_2 \delta_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \beta_3 \delta_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \beta_4 \delta_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\frac{d}{d\hat{x}} B_t(x - \hat{x}) &= B_{t, \hat{x}}(x - \hat{x}) = -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2} \left[-\beta_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) + \beta_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \beta_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) + \beta_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\frac{dV_{yp}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} &= V_{yp, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_2} \left[\gamma_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) - \gamma_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) + \gamma_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\hat{x}} M_{zp}^*(x, \hat{x}) &= M_{zp, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2D_2} \left[-\gamma_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) + \gamma_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) + \gamma_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\frac{d}{d\hat{x}} T_p^*(x, \hat{x}) &= \frac{z_c}{2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \sqrt{\lambda_1} \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) + \alpha_2 \lambda_2^2 \sqrt{\lambda_2} \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 (-\lambda_3)^2 \sqrt{-\lambda_3} \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 (-\lambda_4)^2 \sqrt{-\lambda_4} \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\frac{d}{d\hat{x}} B_p^*(x, \hat{x}) &= B_{p, \hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{z_c \text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \left[-\alpha_1 \lambda_1^3 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) + \alpha_2 \lambda_2^3 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 \lambda_3^3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) + \alpha_4 \lambda_4^3 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]
\end{aligned}
\tag{7.104a-h}$$

7.4.2.2 As equações integrais bi-acopladas

Aplicando a TRP na Eq. (7.85) com a utilização das soluções fundamentais em deslocamento $u_p^*(x, \hat{x})$ e $u_t^*(x, \hat{x})$ e em rotação $\varphi_p^*(x, \hat{x})$ e $\varphi_t^*(x, \hat{x})$, obtém-se:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c S_1 & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 d \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ t(x) - z_c p_y(x) \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} v_p^*(x, \hat{x}) & v_t^*(x, \hat{x}) \\ \theta_p^*(x, \hat{x}) & \theta_t^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T
\tag{7.105}$$

Para facilitação do desenvolvimento algébrico o estabelecimento das equações integrais será feito em duas etapas: na primeira faz-se a ponderação da equação governante real pelo deslocamento $v_p^*(x, \hat{x})$ e ângulo de torção $\theta_p^*(x, \hat{x})$ oriundos da fonte em força $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $t^*(x, \hat{x}) = 0$:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c S_1 & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ t(x) - z_c p_y(x) \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} v_p^*(x, \hat{x}) \\ \theta_p^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (7.106)$$

Após a utilização de convenientes integrações por partes e adequadas substituições nas relações constitutivas ($M_{zp}^*(x, \hat{x}) = D_{1z} \frac{d^2 v_p^*(x, \hat{x})}{dx^2}$, $V_{yp}^*(x, \hat{x}) = -D_{1z} \frac{d^3 v_p^*(x, \hat{x})}{dx^3}$, $B_p^*(x, \hat{x}) = -D_2 \frac{d^2 \theta_p^*(x, \hat{x})}{dx^2}$, $T_p^*(x, \hat{x}) = -D_2 \frac{d^3 \theta_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} + D_3 \frac{d \theta_p^*(x, \hat{x})}{dx}$) na Eq. (7.106), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^L [D_{1z} v_p^{*''''}(x, \hat{x}) - S_1 v_p^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c \theta_p^*(x, \hat{x})] v(x) dx - [V_y(x) v_p^*(x, \hat{x})]_0^L \\ & - [M_z(x) v_p^{*'}(x, \hat{x})]_0^L + [V_{yp}^*(x, \hat{x}) v(x)]_0^L + [M_{zp}^*(x, \hat{x}) v'(x)]_0^L - [T(x) \theta_p^*(x, \hat{x})]_0^L \\ & + [T_p^*(x, \hat{x}) \theta(x)]_0^L + [B(x) \theta_p^{*'}(x, \hat{x})]_0^L - [B_p^*(x, \hat{x}) \theta'(x)]_0^L + \\ & + \int_0^L [D_2 \theta_p^{*''''}(x, \hat{x}) - D_3 \theta_p^{*''}(x, \hat{x}) - S_2 \theta_p^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c v_p^*(x, \hat{x})] dx = \\ & \int_0^L p_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \theta_p^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (7.107)$$

Como $p_y^* = \delta(x, \hat{x})$ e $t^* = 0$, a equação do problema fundamental Eq. (7.106) resulta em:

$$D_{1z} v_p^{*''''}(x, \hat{x}) - S_1 v_p^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c \theta_p^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) \text{ e,}$$

$$D_2 \theta_p^{*''''}(x, \hat{x}) - D_3 \theta_p^{*''}(x, \hat{x}) - S_2 \theta_p^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c v_p^*(x, \hat{x}) = -z_c \delta(x, \hat{x}),$$

que ao serem substituídas na Eq. (7.107) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \delta(x, \hat{x}) v(x) dx - \left[V_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_p'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{yp}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zp}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[T_p^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_p'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_p^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L \\
& - z_c \int_0^L \delta(x, \hat{x}) \theta(x) dx = \int_0^L p_y(x) v^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \theta^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.108}$$

Aplicando a propriedade de filtro de delta de Dirac, Eq. (2.6c), a Eq. (7.108) fica:

$$\begin{aligned}
& v(\hat{x}) - z_c \theta(\hat{x}) - \left[V_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_p'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{yp}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zp}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[T_p^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_p'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_p^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \theta_p^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.109}$$

Na segunda etapa, a equação integral do ângulo de torção é estabelecida, fazendo-se a ponderação da equação governante do problema real pelo deslocamento $v_t^*(x, \hat{x})$ e ângulo de torção $\theta_t^*(x, \hat{x})$ oriundos da fonte em força $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 & z_c S_1 \\ z_c S_1 & D_2 \frac{d^4}{dx^4} - D_3 \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ t(x) - z_c p_y(x) \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} v_t^*(x, \hat{x}) \\ \theta_t^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} dx = 0 \tag{7.110}$$

Analogamente ao caso da fonte em força, o estabelecimento das equações integrais com fonte em torque é feita mediante ao uso de convenientes integrações por partes e adequadas substituições nas relações constitutivas

$$M_{zt}^*(x, \hat{x}) = D_{1z} \frac{d^2 v_t^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad V_{yt}^*(x, \hat{x}) = -D_{1z} \frac{d^3 v_t^*(x, \hat{x})}{dx^3}, \quad T_t^*(x, \hat{x}) = -D_2 \frac{d^3 \theta_t^*(x, \hat{x})}{dx^3} + D_3 \frac{d \theta_t^*(x, \hat{x})}{dx} \quad \text{e}$$

$$B_t^*(x, \hat{x}) = -D_2 \frac{d^2 \theta_t^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad \text{na Eq. (7.110), resulta:}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[D_{1z} v_t^{*''''}(x, \hat{x}) - S_1 v_t^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c \theta_t^*(x, \hat{x}) \right] v(x) dx - \left[V_y(x) v_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L \\
& - \left[M_z(x) v_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[V_{yt}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zt}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L \\
& + \left[T_t^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_t^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \\
& + \int_0^L \left[D_2 \theta_t^{*''''}(x, \hat{x}) - D_3 \theta_t^{*''}(x, \hat{x}) - S_2 \theta_t^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c v_t^*(x, \hat{x}) \right] dx = \\
& \int_0^L p_y(x) v_t^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \theta_t^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.111}$$

Como $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$, da equação Eq. (7.110) resulta em:

$$D_{1z} v_t^{*''''}(x, \hat{x}) - S_1 v_t^*(x, \hat{x}) + S_1 z_c \theta_t^*(x, \hat{x}) = 0,$$

e

$$z_c S_1 v_t^*(x, \hat{x}) + D_2 \theta_t^{*''''}(x, \hat{x}) - D_3 \theta_t^{*''}(x, \hat{x}) - S_2 \theta_t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}),$$

que ao serem substituídas na Eq. (7.111) e ainda utilizando-se as propriedades do delta de Dirac, resulta:

$$\begin{aligned}
& \theta(\hat{x}) - \left[V_y(x) v_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{yt}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zt}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[T_t^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_t^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) v_t^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \theta_t^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.112}$$

Para que seja possível o estabelecimento da equação para rotação $\frac{dv}{d\hat{x}}(\hat{x})$ é necessário isolar $v(\hat{x})$ na Eq. (7.109). Para tal, basta multiplicar a Eq. (7.112) por (z_c) e soma-la com Eq. (109), resultando em:

$$\begin{aligned}
& v(\hat{x}) - \left[V_y(x) \overline{v_p^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) \overline{v_p^{*'}}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{V_{yp}^*}(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[\overline{M_{zp}^*}(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[T(x) \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{T_p^*}(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L + \left[B(x) \overline{\theta_p^{*'}}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{B_p^*}(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) \overline{v_p^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.113}$$

onde: $\overline{v_p^*}(x, \hat{x}) = z_c v_t^* + v_p^*$, $\overline{v_p^{*'}}(x, \hat{x}) = z_c v_t^{*'} + v_p^{*'}$, $\overline{V_{yp}^*}(x, \hat{x}) = z_c V_{yt}^* + V_{yp}^*$,
 $\overline{M_{zp}^*}(x, \hat{x}) = z_c M_{zt}^* + M_{zp}^*$, $\overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) = z_c \theta_t^* + \theta_p^*$, $\overline{T_p^*}(x, \hat{x}) = z_c T_t^* + T_p^*$, $\overline{B_p^*}(x, \hat{x}) = z_c B_t^* + B_p^*$.

Agora sim, a equação integral da rotação da seção pode ser escrita pela derivação da Eq. (7.113) no ponto-fonte.

$$\begin{aligned}
& \frac{dv(\hat{x})}{d\hat{x}} - \left[V_y(x) \frac{d \overline{v_p^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[M_z(x) \frac{d \overline{v_p^{*'}}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \\
& \left[v(x) \frac{d \overline{V_{yp}^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \left[v'(x) \frac{d \overline{M_{zp}^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[T(x) \frac{d \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \\
& \left[\theta(x) \frac{d \overline{T_p^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \left[B(x) \frac{d \overline{\theta_p^{*'}}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[\theta'(x) \frac{d \overline{B_p^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) \frac{d \overline{v_p^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \frac{d \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x})}{d\hat{x}} dx
\end{aligned} \tag{7.114}$$

Já a equação integral do empenamento pode ser estabelecida pela derivada da Eq. (7.112),

$$\begin{aligned}
& \frac{d\theta(\hat{x})}{d\hat{x}} - \left[V_y(x) \frac{d v_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[M_z(x) \frac{d v_t'^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \\
& \left[v(x) \frac{d V_{yt}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \left[v'(x) \frac{d M_{zt}^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[T(x) \frac{d \theta_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \\
& \left[\theta(x) \frac{d T_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L + \left[B(x) \frac{d \theta_t'^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L - \left[\theta'(x) \frac{d B_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} \right]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) \frac{d v_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \frac{d \theta_t^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} dx
\end{aligned} \tag{7.115}$$

7.4.2.3 As representações algébricas do problema bi-acoplado

As equações integrais Eqs. (7.112-7.115) podem ser reagrupadas como:

$$\begin{aligned}
& \{u(\hat{x})\} + [A_R] \begin{bmatrix} V_{yp}^* & T_p^* & M_{zp}^* & -B_p^* \\ V_{yt}^* & T_t^* & M_{zt}^* & -B_t^* \\ V_{yp,\hat{x}}^* & T_{p,\hat{x}}^* & M_{zp,\hat{x}}^* & -B_{p,\hat{x}}^* \\ V_{yt,\hat{x}}^* & T_{t,\hat{x}}^* & M_{zt,\hat{x}}^* & -B_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} V_{yp}^* & T_p^* & M_{zp}^* & -B_p^* \\ V_{yt}^* & T_t^* & M_{zt}^* & -B_t^* \\ V_{yp,\hat{x}}^* & T_{p,\hat{x}}^* & M_{zp,\hat{x}}^* & -B_{p,\hat{x}}^* \\ V_{yt,\hat{x}}^* & T_{t,\hat{x}}^* & M_{zt,\hat{x}}^* & -B_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix} \{u(x)\} \right]_{x=0}^{x=L} = \\
& [A_R] \begin{bmatrix} v_p^* & \theta_p^* & v_{p,\hat{x}}^* & -\theta_{p,\hat{x}}^* \\ v_t^* & \theta_t^* & v_{t,\hat{x}}^* & -\theta_{t,\hat{x}}^* \\ v_{p,\hat{x}}^* & \theta_{p,\hat{x}}^* & v_{p,\hat{x}}^* & -\theta_{p,\hat{x}}^* \\ v_{t,\hat{x}}^* & \theta_{t,\hat{x}}^* & v_{t,\hat{x}}^* & -\theta_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} v_p^* & \theta_p^* & v_{p,\hat{x}}^* & -\theta_{p,\hat{x}}^* \\ v_t^* & \theta_t^* & v_{t,\hat{x}}^* & -\theta_{t,\hat{x}}^* \\ v_{p,\hat{x}}^* & \theta_{p,\hat{x}}^* & v_{p,\hat{x}}^* & -\theta_{p,\hat{x}}^* \\ v_{t,\hat{x}}^* & \theta_{t,\hat{x}}^* & v_{t,\hat{x}}^* & -\theta_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix} \{p(x)\} \right]_{x=0}^{x=L} + [A_R] \{b\}
\end{aligned} \tag{7.116}$$

Onde

$$\begin{aligned}
& \{b\} = \int_0^L [u]^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} dx, \quad [A_R] = \begin{bmatrix} 1 & z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{u(\hat{x})\} = \begin{Bmatrix} v(\hat{x}) \\ \theta(\hat{x}) \\ dv(\hat{x})/d\hat{x} \\ d\theta(\hat{x})/d\hat{x} \end{Bmatrix}, \\
& \{u(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \\ dv(x)/dx \\ d\theta(x)/dx \end{Bmatrix}, \quad \{p(x)\} = \begin{Bmatrix} V_y(x) \\ T(x) \\ M_z(x) \\ B(x) \end{Bmatrix} e [u^*] = \begin{bmatrix} v_p^* & \theta_p^* \\ v_t^* & \theta_t^* \\ v_{p,\hat{x}}^* & \theta_{p,\hat{x}}^* \\ v_{t,\hat{x}}^* & \theta_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Fazendo a colocação do ponto fonte na extremidade esquerda da barra, $\hat{x} = 0 + \xi$ onde $\xi \rightarrow 0$, nas Eqs (7.115a) ficam:

$$\begin{aligned}
& v(0) + V_y(0)\overline{v_p^*}(0,0+\xi) - V_y(L)\overline{v_p^*}(L,0+\xi) + \\
& M_z(0)\overline{v_p^{*\prime}}(0,0+\xi) - M_z(L)\overline{v_p^{*\prime}}(L,0+\xi) \\
& - \overline{V_{yp}^*}(0,0+\xi)v(0) + \overline{V_{yp}^*}(L,0+\xi)v(L) - \overline{M_{zp}^*}(0,0+\xi)v'(0) + \\
& \overline{M_{zp}^*}(L,0+\xi)v'(L) + T(0)\overline{\theta_p^*}(0,0+\xi) - T(L)\overline{\theta_p^*}(L,0+\xi) - \\
& - \overline{T_p^*}(0,0+\xi)\theta(0) + \overline{T_p^*}(L,0+\xi)\theta(L) - B(0)\overline{\theta_p^{*\prime}}(0,0+\xi) + \\
& B(L)\overline{\theta_p^{*\prime}}(L,0+\xi) + \overline{B_p^*}(0,0+\xi)\theta'(0) - \overline{B_p^*}(L,0+\xi)\theta'(L) - \\
& \int_0^L p_y(x)\overline{v_p^*}(x,0+\xi)dx - \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\}\overline{\theta_p^*}(x,0+\xi)dx = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta(0) + V_y(0)v_t^*(0,0+\xi) - V_y(L)v_t^*(L,0+\xi) + \\
& M_z(0)v_t^{*\prime}(0,0+\xi) - M_z(L)v_t^{*\prime}(L,0+\xi) - V_{yt}^*(0,0+\xi)v(0) + \\
& V_{yt}^*(L,0+\xi)v(L) - Mz_t^*(0,0+\xi)v'(0) + M_{zt}^*(L,0+\xi)v'(L) \\
& + T(0)\theta_t^*(0,0+\xi) - T(L)\theta_t^*(L,0+\xi) - T_t^*(0,0+\xi)\theta(0) + \\
& T_t^*(L,0+\xi)\theta(L) - B(0)\theta_t^{*\prime}(0,0+\xi) + B(L)\theta_t^{*\prime}(L,0+\xi) + \\
& B_t^*(0,0+\xi)\theta'(0) - B_t^*(L,0+\xi)\theta'(L) - \\
& \int_0^L p_y(x)v_t^*(x,0+\xi)dx - \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\}\theta_t^*(x,0+\xi)dx = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dv}{d\hat{x}}(0) + V_y(0) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{v_p^*}(0, 0 + \xi) - V_y(L) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{v_p^*}(L, 0 + \xi) + \\
& M_z(0) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{v_p^{*'}}(0, 0 + \xi) - M_z(L) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{v_p^{*'}}(L, 0 + \xi) - \\
& (0, 0 + \xi) v'(0) + \\
& \frac{d}{d\hat{x}} \overline{M_{zp}^*}(L, 0 + \xi) v'(x) + T(0) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{\theta_p^*}(0, 0 + \xi) - T(L) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{\theta_p^*}(L, 0 + \xi) - \\
& \frac{d}{d\hat{x}} \overline{T_p^*}(0, 0 + \xi) \theta(0) + \frac{d}{d\hat{x}} \overline{T_p^*}(L, 0 + \xi) \theta(L) - B(0) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{\theta_p^{*'}}(0, 0 + \xi) + \\
& B(L) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{\theta_p^{*'}}(L, 0 + \xi) + \frac{d}{d\hat{x}} \overline{B_p^*}(0, 0 + \xi) \theta'(0) - \frac{d}{d\hat{x}} \overline{B_p^*}(L, 0 + \xi) \theta'(L) - \\
& - \int_0^L p_y(x) \frac{d}{d\hat{x}} \overline{v_p^*}(x, 0 + \xi) dx - \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \frac{d}{d\hat{x}} \overline{\theta_p^*}(x, 0 + \xi) dx = 0
\end{aligned} \tag{7.117}$$

Fazendo a colocação na extremidade direita da barra, $\hat{x} = L - \xi$ onde $\xi \rightarrow 0$, fica:

$$\begin{aligned}
& v(L) + V_y(0) \overline{v_p^*}(0, L - \xi) - V_y(L) \overline{v_p^*}(L, L - \xi) + \\
& M_z(0) \overline{v_p^{*'}}(0, L - \xi) - M_z(L) \overline{v_p^{*'}}(L, L - \xi) \\
& - \overline{V_{yp}^*}(0, L - \xi) v(0) + \overline{V_{yp}^*}(L, L - \xi) v(L) - \overline{M_{zp}^*}(0, L - \xi) v'(0) + \\
& \overline{M_{zp}^*}(L, L - \xi) v'(L) + T(0) \overline{\theta_p^*}(0, L - \xi) - T(L) \overline{\theta_p^*}(L, L - \xi) - \\
& - T_p^*(0, L - \xi) \theta(0) + \overline{T_p^*}(L, L - \xi) \theta(L) - B(0) \overline{\theta_p^{*'}}(0, L - \xi) + \\
& B(L) \overline{\theta_p^{*'}}(L, L - \xi) + \overline{B_p^*}(0, L - \xi) \theta'(0) - \overline{B_p^*}(L, L - \xi) \theta'(L) - \\
& \int_0^L p_y(x) \overline{v_p^*}(x, L - \xi) dx - \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\} \overline{\theta_p^*}(x, L - \xi) dx = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta(L) + V_y(0)v_t^*(0, L - \xi) - V_y(L)v_t^*(L, L - \xi) + \\
& M_z(0)v_t^{*'}(0, L - \xi) - M_z(L)v_t^{*'}(L, L - \xi) - V_{yt}^*(0, L - \xi)v(0) + \\
& V_{yt}^*(L, L - \xi)v(L) - M_{zt}^*(0, L - \xi)v'(0) + M_{zt}^*(L, L - \xi)v'(L) \\
& + T(0)\theta_t^*(0, L - \xi) - T(L)\theta_t^*(L, L - \xi) - T_t^*(0, L - \xi)\theta(0) + \\
& T_t^*(L, L - \xi)\theta(L) - B(0)\theta_t^{*'}(0, L - \xi) + B(L)\theta_t^{*'}(L, L - \xi) + \\
& B_t^*(0, L - \xi)\theta'(0) - B_t^*(L, L - \xi)\theta'(L) - \\
& \int_0^L p_y(x)v_t^*(x, L - \xi)dx - \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\}\theta_t^*(x, L - \xi)dx = 0 \\
& \frac{dv}{d\hat{x}}(L) + V_y(0)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{v_p^*}(0, L - \xi) - V_y(L)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{v_p^*}(L, L - \xi) + \\
& M_z(0)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{v_p^{*'}}(0, L - \xi) - M_z(L)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{v_p^{*'}}(L, L - \xi) - \frac{d}{d\hat{x}}\overline{V_{yp}^*}(0, L - \xi)v(0) + \\
& \frac{d}{d\hat{x}}\overline{V_{yp}^*}(L, L - \xi)v(L) - \frac{d}{d\hat{x}}\overline{M_{zp}^*}(0, L - \xi)v'(0) + \frac{d}{d\hat{x}}\overline{M_{zp}^*}(L, L - \xi)v'(L) \\
& + T(0)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{\theta_p^*}(0, L - \xi) - T(L)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{\theta_p^*}(L, L - \xi) - \frac{d}{d\hat{x}}\overline{T_p^*}(0, L - \xi)\theta(0) + \\
& \frac{d}{d\hat{x}}\overline{T_p^*}(L, L - \xi)\theta(L) - B(0)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{\theta_p^{*'}}(0, L - \xi) + B(L)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{\theta_p^{*'}}(L, L - \xi) + \\
& \frac{d}{d\hat{x}}\overline{B_p^*}(0, L - \xi)\theta'(0) - \frac{d}{d\hat{x}}\overline{B_p^*}(L, L - \xi)\theta'(L) - \\
& \int_0^L p_y(x)\frac{d}{d\hat{x}}\overline{v_p^*}(x, L - \xi)dx - \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x)\}\frac{d}{d\hat{x}}\overline{\theta_p^*}(x, L - \xi)dx = 0
\end{aligned} \tag{7.118}$$

Após o cálculo das integrais, o sistema algébrico Eq. (7.116) fica:

$$\begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[H_{ii}] & [H_{ij}] \\ -[H_{ji}] & [H_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G_{ii}] & [G_{ij}] \\ -[G_{ji}] & [G_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}_i \\ \{p\}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{b\}_i \\ \{b\}_j \end{Bmatrix} \quad (7.119)$$

onde:

$$\begin{aligned} \{u\}_i &= \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v'_i \\ \theta'_i \end{Bmatrix}, \quad \{b\}_i = \begin{Bmatrix} f_i \\ t_i \\ f_{i,\hat{x}} \\ t_{i,\hat{x}} \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_j = \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v'_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix}, \quad \{b\}_j = \begin{Bmatrix} f_j \\ t_j \\ f_{j,\hat{x}} \\ t_{j,\hat{x}} \end{Bmatrix}, \\ [G_{ii}] &= -[G_{jj}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1\omega} & \beta_{3\omega} & \beta_{2\omega} & -\beta_{4\omega} \\ \beta_{5\omega} & \beta_{7\omega} & \beta_{6\omega} & -\beta_{8\omega} \\ \beta_{9\omega} & \beta_{11\omega} & \beta_{10\omega} & -\beta_{12\omega} \\ \beta_{13\omega} & \beta_{15\omega} & \beta_{14\omega} & -\beta_{16\omega} \end{bmatrix}, \\ [G_{ji}] &= \begin{bmatrix} 1 & z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1\omega} & \beta_{3\omega} & -\beta_{2\omega} & \beta_{4\omega} \\ \beta_{5\omega} & \beta_{7\omega} & -\beta_{6\omega} & \beta_{8\omega} \\ -\beta_{9\omega} & -\beta_{11\omega} & \beta_{10\omega} & -\beta_{12\omega} \\ -\beta_{13\omega} & -\beta_{15\omega} & \beta_{14\omega} & -\beta_{16\omega} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.120)$$

$$[H_{ii}] = -[H_{jj}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [H_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1\omega} & \alpha_{3\omega} & \alpha_{2\omega} & -\alpha_{4\omega} \\ \alpha_{5\omega} & \alpha_{7\omega} & \alpha_{6\omega} & -\alpha_{8\omega} \\ \alpha_{9\omega} & \alpha_{11\omega} & \alpha_{10\omega} & -\alpha_{12\omega} \\ \alpha_{13\omega} & \alpha_{15\omega} & \alpha_{14\omega} & -\alpha_{16\omega} \end{bmatrix},$$

$$[H_{ji}] = \begin{bmatrix} 1 & z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_{1\omega} & -\alpha_{3\omega} & \alpha_{2\omega} & -\alpha_{4\omega} \\ -\alpha_{5\omega} & -\alpha_{7\omega} & \alpha_{6\omega} & -\alpha_{8\omega} \\ \alpha_{9\omega} & \alpha_{11\omega} & -\alpha_{10\omega} & \alpha_{12\omega} \\ \alpha_{13\omega} & \alpha_{15\omega} & -\alpha_{14\omega} & \alpha_{16\omega} \end{bmatrix} \quad (7.121)$$

Onde os resultados finais para esses coeficientes β_ω são:

$$\beta_{\omega 1} = -\frac{1}{2D_{1z}D_2} \left[-\gamma_1 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}L)}{\sqrt{\lambda_1}} + \gamma_2 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2}L)}{\sqrt{\lambda_2}} - \gamma_3 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_3}L)}{\sqrt{-\lambda_3}} + \gamma_4 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_4}L)}{\sqrt{-\lambda_4}} \right]$$

$$\beta_{2\omega} = \frac{1}{2D_{1z}D_2} \left[\gamma_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}L) - \gamma_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}L) + \gamma_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}L) - \gamma_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}L) \right]$$

$$\begin{aligned} \beta_{3\omega} = \frac{S_1 D_{1z} z_c}{2D_{1z}D_2} & \left[-\alpha_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1}L) + \alpha_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2}L) \right. \\ & \left. + \alpha_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sinh(\sqrt{-\lambda_3}L) - \alpha_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sinh(\sqrt{-\lambda_4}L) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{4\omega} = -\frac{D_1 z_c}{2D_{1z}D_2} & \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \cosh(\sqrt{\lambda_1}L) - \alpha_2 \lambda_2^2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}L) + \right. \\ & \left. \alpha_3 \lambda_3^2 \cos(\sqrt{-\lambda_3}L) - \alpha_4 \lambda_4^2 \cos(\sqrt{-\lambda_4}L) \right] \end{aligned}$$

$$\beta_{5\omega} = \frac{S_1 z_c}{2D_{1z}D_2} \left[-\alpha_1 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}L)}{\sqrt{\lambda_1}} + \alpha_2 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2}L)}{\sqrt{\lambda_2}} - \alpha_3 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_3}L)}{\sqrt{-\lambda_3}} + \alpha_4 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_4}L)}{\sqrt{-\lambda_4}} \right]$$

$$\begin{aligned} \beta_{6\omega} = -\frac{S_1 z_c}{2D_{1z}D_2} & \left[\alpha_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}L) - \alpha_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}L) + \right. \\ & \left. \alpha_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}L) - \alpha_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}L) \right] \end{aligned}$$

$$\beta_{7\omega} = -\frac{1}{2D_2} \left[-\beta_1 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}L)}{\sqrt{\lambda_1}} + \beta_2 \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2}L)}{\sqrt{\lambda_2}} - \beta_3 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_3}L)}{\sqrt{-\lambda_3}} + \beta_4 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_4}L)}{\sqrt{-\lambda_4}} \right]$$

$$\beta_{8\omega} = \frac{1}{2D_2} \left[\beta_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}L) - \beta_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}L) + \beta_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}L) - \beta_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}L) \right]$$

$$\beta_{9\omega} = \frac{1}{2D_{1z}D_2} \left[-\gamma_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1}L) + \gamma_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2}L) - \gamma_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3}L) + \gamma_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4}L) \right]$$

$$\begin{aligned} \beta_{10\omega} = -\frac{1}{2D_{1z}D_2} & \left[\gamma_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1}L) - \gamma_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2}L) - \gamma_3 \sqrt{-\lambda_3} \sinh(\sqrt{-\lambda_3}L) \right. \\ & \left. + \gamma_4 \sqrt{-\lambda_4} \sinh(\sqrt{-\lambda_4}L) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11\omega} &= \frac{S_1 z_c}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \lambda_2^2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_3 \lambda_3^2 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) - \alpha_4 \lambda_4^2 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\beta_{12\omega} &= \frac{S_1 z_c}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \lambda_2^2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. - (-\lambda_3)^2 \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 (-\lambda_4)^2 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\beta_{13\omega} &= \frac{S_1 z_c}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) - \alpha_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\beta_{14\omega} &= \frac{S_1 z_c}{2D_{1z} D_2} \left[\alpha_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \lambda_2 \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\beta_{15\omega} &= \frac{1}{2D_2} \left[-\beta_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) + \beta_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) - \beta_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) + \beta_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\beta_{16\omega} &= -\frac{1}{2D_2} \left[\beta_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \beta_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. - \beta_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \beta_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]
\end{aligned} \tag{7.122}$$

Já os coeficientes α_ω ficam:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1\omega} &= -\frac{1}{2D_2} \left[\gamma_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) - \gamma_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) - \gamma_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\alpha_{2\omega} &= -\frac{1}{2D_2} \left[-\gamma_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} r) + \gamma_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) + \right. \\
&\quad \left. \gamma_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} r) - \gamma_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} r) \right] \\
\alpha_{3\omega} &= \frac{z_c}{2} \left[\alpha_1 \delta_1 \lambda_1^2 \cosh(\sqrt{\lambda_1} r) - \alpha_2 \delta_2 \lambda_2^2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) + \right. \\
&\quad \left. \alpha_3 \delta_3 \lambda_3^2 \cos(\sqrt{-\lambda_3} r) - \alpha_4 \delta_4 \lambda_4^2 \cos(\sqrt{-\lambda_4} r) \right]
\end{aligned}$$

$$\alpha_{4w} = -\frac{Z_c}{2} \left[\alpha_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) - \right. \\ \left. \alpha_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{5w} = \frac{S_1 Z_c}{2D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) + \right. \\ \left. \alpha_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) - \alpha_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{6w} = -\frac{S_1 Z_c}{2D_2} \left[-\alpha_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) + \alpha_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) + \right. \\ \left. \alpha_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) - \alpha_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{7w} = -\frac{1}{2} \left[\beta_1 \delta_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) - \beta_2 \delta_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) + \beta_3 \delta_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) - \beta_4 \delta_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{8w} = \frac{1}{2} \left[-\beta_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) + \beta_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\ \left. + \beta_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) - \beta_4 \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{9w} = \frac{1}{2D_2} \left[\gamma_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \gamma_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\ \left. - \gamma_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \gamma_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{10w} = \frac{1}{2D_2} \left[-\gamma_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) + \gamma_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\ \left. - \gamma_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) + \gamma_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{11w} = \frac{Z_c}{2} \left[\alpha_1 \lambda_1^2 \sqrt{\lambda_1} \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) + \alpha_2 \lambda_2^2 \sqrt{\lambda_2} \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\ \left. - \alpha_3 (-\lambda_3)^2 \sqrt{-\lambda_3} \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 (-\lambda_4)^2 \sqrt{-\lambda_4} \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\alpha_{12w} = \frac{Z_c}{2} \left[-\alpha_1 \lambda_1^3 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) + \alpha_2 \lambda_2^3 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) - \alpha_3 \lambda_3^3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 \lambda_4^3 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{13\omega} &= -\frac{S_1 z_c}{2D_2} \left[\alpha_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \alpha_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\alpha_{14\omega} &= -\frac{S_1 z_c}{2D_2} \left[-\alpha_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) + \alpha_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) + \alpha_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\alpha_{15\omega} &= \frac{1}{2} \left[\beta_1 \delta_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} L) - \beta_2 \delta_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} L) - \right. \\
&\quad \left. \beta_3 \delta_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(\sqrt{-\lambda_3} L) + \beta_4 \delta_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(\sqrt{-\lambda_4} L) \right] \\
\alpha_{16\omega} &= -\frac{1}{2} \left[-\beta_1 \lambda_1 \cosh(\sqrt{\lambda_1} L) + \beta_2 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} L) \right. \\
&\quad \left. - \beta_3 \lambda_3 \cos(\sqrt{-\lambda_3} L) + \beta_4 \lambda_4 \cos(\sqrt{-\lambda_4} L) \right]
\end{aligned} \tag{7.123}$$

As forças do vetor independente são definidas nas Eqs. (7.117):

$$\begin{aligned}
f_i &= \int_0^L p_y(x) \bar{v}_p^*(x, 0 + \xi) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \bar{\theta}_p^*(x, 0 + \xi) dx \\
f_j &= \int_0^L p_y(x) \bar{v}_p^*(x, L - \xi) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \bar{\theta}_p^*(x, L - \xi) dx \\
f_{i,\hat{x}} &= \int_0^L p_y(x) \bar{v}_{p,\hat{x}}^*(x, 0 + \xi) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \bar{\theta}_{p,\hat{x}}^*(x, 0 + \xi) dx \\
f_{j,\hat{x}} &= \int_0^L p_y(x) \bar{v}_{p,\hat{x}}^*(x, L - \xi) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \bar{\theta}_{p,\hat{x}}^*(x, L - \xi) dx \\
t_i &= \int_0^L p_y(x) \bar{v}_t^*(x, 0 + \xi) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \bar{\theta}_t^*(x, 0 + \xi) dx
\end{aligned}$$

$$t_j = \int_0^L p_y(x) v_t^*(x, L - \xi) dx + \int_0^L (t(x) - z_c p_y(x)) \theta_t^*(x, L - \xi) dx$$

$$t_{i,\hat{x}} = \int_0^L p_z(x) v_{t,\hat{x}}^*(x, 0 + \xi) dx + \int_0^L t(x) \theta_{t,\hat{x}}^*(x, 0 + \xi) dx$$

$$t_{j,\hat{x}} = \int_0^L p_x(x) u_{,\hat{x}t}^*(x, L - \xi) dx + \int_0^L t(x) \phi_{,\hat{x}t}^*(x, L - \xi) dx \quad (7.124a-g)$$

7.4.2.4 Representação algébrica dos efeitos combinados: axial, de flexão livre (em z) e de flexo-torção na barra de núcleo, no SCL.

As representações algébricas do efeito axial e de flexão livre em torno do eixo z no SCL foram estudadas no capítulo 6, respectivamente, na Eq. (6.21) e na Eq. (6.59). Desse modo, a representação algébrica dos efeitos combinados (axial, flexão livre e flexo-torção) pode ser escrita como segue:

$$\begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[H]_{ii} & [H]_{ij} \\ -[H]_{ji} & [H]_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G]_{ii} & [G]_{ij} \\ -[G]_{ji} & [G]_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}_i \\ \{p\}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{b\}_i \\ \{b\}_j \end{Bmatrix} \quad (7.125)$$

Onde as matrizes de influência e vetores nodais da Eq. (7.165) ficam

$$[H]_{ii} = -[H]_{jj} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [G]_{ii} = [G]_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[H]_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{17w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{1w} & 0 & \alpha_{3w} & 0 & \alpha_{2w} & -\alpha_{4w} \\ 0 & 0 & \alpha_{18w} & 0 & -\alpha_{19w} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{5w} & 0 & \alpha_{7w} & 0 & \alpha_{6w} & -\alpha_{8w} \\ 0 & 0 & \alpha_{20w} & 0 & -\alpha_{21w} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{9w} & 0 & \alpha_{11w} & 0 & \alpha_{10w} & -\alpha_{12w} \\ 0 & \alpha_{13w} & 0 & \alpha_{15w} & 0 & \alpha_{14w} & -\alpha_{16w} \end{bmatrix},$$

$$[H]_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_{17w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{1w} & 0 & -\alpha_{3w} & 0 & \alpha_{2w} & -\alpha_{4w} \\ 0 & 0 & -\alpha_{18w} & 0 & -\alpha_{19w} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{5w} & 0 & -\alpha_{7w} & 0 & \alpha_{6w} & -\alpha_{8w} \\ 0 & 0 & \alpha_{20w} & 0 & \alpha_{21w} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{9w} & 0 & \alpha_{11w} & 0 & -\alpha_{10w} & \alpha_{12w} \\ 0 & \alpha_{13w} & 0 & \alpha_{15w} & 0 & -\alpha_{14w} & \alpha_{16w} \end{bmatrix}$$

$$[G]_{lj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{17w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{1w} & 0 & \beta_{3w} & 0 & \beta_{2w} & -\beta_{4w} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{18w} & 0 & -\beta_{19w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{5w} & 0 & \beta_{7w} & 0 & \beta_{6w} & -\beta_{8w} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{20w} & 0 & -\beta_{21w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{9w} & 0 & \beta_{11w} & 0 & \beta_{10w} & -\beta_{12w} & 0 \\ 0 & \beta_{13w} & 0 & \beta_{15w} & 0 & \beta_{14w} & -\beta_{16w} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[G]_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{17w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{1w} & 0 & \beta_{3w} & 0 & -\beta_{2w} & \beta_{4w} \\ 0 & 0 & \beta_{18w} & 0 & \beta_{19w} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{5w} & 0 & \beta_{7w} & 0 & -\beta_{6w} & \beta_{8w} \\ 0 & 0 & -\beta_{20w} & 0 & -\beta_{21w} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{9w} & 0 & -\beta_{11w} & 0 & \beta_{10w} & -\beta_{12w} \\ 0 & -\beta_{13w} & 0 & -\beta_{15w} & 0 & \beta_{14w} & -\beta_{16w} \end{bmatrix}$$

$$\{u\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ w'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \end{Bmatrix}, \{u\}_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \\ w'_j \\ v'_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix}, \{p\}_i = \begin{Bmatrix} N_i \\ V_{yi} \\ V_{zi} \\ T_i \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ B_i \end{Bmatrix}, \{p\}_j = \begin{Bmatrix} N_j \\ V_{yj} \\ V_{zj} \\ T_j \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ B_j \end{Bmatrix}, \{b\}_i = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{zi} \\ t_i \\ f_{zi,\hat{x}} \\ f_{yi,\hat{x}} \\ t_{i,\bar{x}} \end{Bmatrix}, \{b\}_j = \begin{Bmatrix} f_{xj} \\ f_{yj} \\ f_{zj} \\ t_j \\ f_{zj,\hat{x}} \\ f_{yj,\hat{x}} \\ t_{j,\bar{x}} \end{Bmatrix} \quad (7.126)$$

E as constantes suplementares na Eq. (7.126) são:

$$\beta_{17\omega} = -\frac{1}{2EA\omega} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{sen}(\omega L \sqrt{\frac{E}{\rho}})$$

$$\beta_{18\omega} = -\frac{1}{2D_{1y}(\lambda_5 - \lambda_6)} \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{-\lambda_6}L)}{\sqrt{-\lambda_6}} - \frac{\text{senh}(\sqrt{\lambda_5}L)}{\sqrt{\lambda_5}} \right)$$

$$\beta_{19\omega} = -\frac{1}{2D_{1y}(\lambda_5 - \lambda_6)} (\cos(\sqrt{-\lambda_6}L) - \cosh(\sqrt{\lambda_5}L))$$

$$\beta_{20\omega} = -\beta_{19\omega}$$

$$\beta_{21\omega} = -\frac{1}{2D_{1y}(\lambda_5 - \lambda_6)} (\sqrt{-\lambda_6} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_6}L) + \sqrt{\lambda_5} \text{senh}(\sqrt{\lambda_5}L))$$

$$\alpha_{18\omega} = -\frac{1}{2(\lambda_5 - \lambda_6)} (\lambda_6 \cos(\sqrt{-\lambda_6}L) - \lambda_5 \cosh(\sqrt{\lambda_5}L))$$

$$\alpha_{17\omega} = -\frac{1}{2} \cos(\omega L \sqrt{\frac{E}{\rho}})$$

$$\alpha_{19\omega} = -\frac{1}{2(\lambda_5 - \lambda_6)} (\sqrt{-\lambda_6} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_6}L) + \sqrt{\lambda_5} \text{senh}(\sqrt{\lambda_5}L))$$

$$\alpha_{20\omega} = -\alpha_{19\omega}, \alpha_{21\omega} = -\alpha_{18\omega}$$

7.4.3 Estudo das Seções Não Simétricas (O Problema Tri-acoplado)

A descrição matemática de barras de seções com paredes finas, dispostas sem simetria incorporando todos os efeitos de inércia e desprezando a deformação por cortante do problema tri-acoplado (o efeito axial é desacoplado), está mostrada nas Eqs. (7.80), (7.81) e (7.82), que na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{D_{1y}d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dt^2}(\rho A - \frac{D_{1y}d^2}{dx^2}) & 0 & y_c \rho A \frac{d^2}{dt^2} \\ 0 & \frac{D_{1z}d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dt^2}(\rho A - \frac{D_{1z}d^2}{dx^2}) & -z_c \rho A \frac{d^2}{dt^2} \\ y_c \rho A \frac{d^2}{dt^2} & -z_c \rho A \frac{d^2}{dt^2} & \frac{d^2}{dx^2}(\frac{D_2d^2}{dx^2} - D_3) + \rho(I_p - I_\omega \frac{d^2}{dx^2}) \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x,t) \\ v(x,t) \\ \theta(x,t) \end{Bmatrix} =$$

$$= [A] \begin{Bmatrix} p_z(x,t) \\ p_y(x,t) \\ t(x,t) \end{Bmatrix} \quad (7.127)$$

$$\text{Sendo: } [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix}$$

Após a aplicação da transformada de Fourier na Eq. (7.127), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_1 y_c \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_1 z_c \\ -S_1 y_c & S_1 z_c & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} \quad (7.128)$$

$$\text{onde: } D_{1y} = EI_y, \quad D_{1z} = EI_z, \quad D_3 = GI_t, \quad S_1 = \rho A \omega^2, \quad S_2 = \rho I_p \omega^2, \quad S_{3y} = \rho I_y \omega^2, \\ S_{3z} = \rho I_z \omega^2 \text{ e } S_4 = \rho I_\omega \omega^2.$$

7.4.3.1 O problema fundamental tri-acoplado e sua solução

A equação governante do problema fundamental da flexo-torção desprezando-se a deformação por cortante pode ser obtida por analogia a EDP do problema real, Eq.(7.128). No problema tri-acoplado são necessárias três combinações de fontes.

Na primeira, se apenas o impulso em força em z ($p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$ e $t^*(x, \hat{x}) = 0$) for ativado, obtém-se as soluções $v_r^*(x, \hat{x})$, $w_r^*(x, \hat{x})$, $\theta_r^*(x, \hat{x})$; no caso da ativação só do impulso de força em y ($p_z^*(x, \hat{x}) = 0$, $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $t^*(x, \hat{x}) = 0$), tem-se as soluções $v_p^*(x, \hat{x})$, $w_p^*(x, \hat{x})$, $\theta_p^*(x, \hat{x})$. E, finalmente, ao ser ativado apenas o impulso em torque ($p_z^*(x, \hat{x}) = 0$, $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$ e $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$) recai-se nas soluções $v_t^*(x, \hat{x})$, $w_t^*(x, \hat{x})$ e $\theta_t^*(x, \hat{x})$.

$$\begin{bmatrix} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_1 y_c \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_1 z_c \\ -S_1 y_c & S_1 z_c & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} p_z^* \\ p_y^* \\ t^* \end{Bmatrix} \quad (7.129)$$

Tal qual comentado no problema bi-acoplado, na utilização do método de Hörmander, as ações/impulsos devem ser aplicadas independentemente. Para tal fim, pode-se multiplicar o sistema da Eq. (7.129) por $[A]^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_c & z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_1 y_c \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_1 z_c \\ -S_1 y_c & S_1 z_c & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_z^* \\ p_y^* \\ t^* \end{Bmatrix} \quad (7.130)$$

Quando apenas $p_z^*(x, \hat{x})$ estiver ativado, os esforços são dados por:

$$\begin{aligned}
M_{zr}^*(x, \hat{x}) &= D_{1z} \frac{d^2 v_r^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad V_{yr}^*(x, \hat{x}) = -D_{1z} \frac{d^3 v_r^*(x, \hat{x})}{dx^3} - S_{3z} \frac{dv_r^*(x, \hat{x})}{dx}, \\
M_{yr}^*(x, \hat{x}) &= -D_{1y} \frac{d^2 w_r^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad V_{zr}^*(x, \hat{x}) = -D_{1y} \frac{d^3 w_r^*(x, \hat{x})}{dx^3} - S_{3y} \frac{dw_r^*(x, \hat{x})}{dx} \\
B_r^*(x, \hat{x}) &= -D_2 \frac{d^2 \theta_r^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad T_r^*(x, \hat{x}) = D_3 \frac{d\theta_r^*(x, \hat{x})}{dx} - S_4 \frac{d\theta_r^*(x, \hat{x})}{dx} - D_2 \frac{d^3 \theta_r^*(x, \hat{x})}{dx^3}
\end{aligned} \tag{7.131a-c}$$

Convém notar que para as demais ativações independentes, os esforços têm suas contrapartes da Eq. (7.131a-c).

Por comparação à expressão de Hörmander, $[B][G] = [I]\delta(x, \hat{x})$, as matrizes ficam:

$$[B] = [A]^{-1}[B_1] \tag{7.132}$$

onde,

$$[B_1] = \begin{bmatrix} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_{1y_c} \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_{1z_c} \\ -S_{1y_c} & S_{1z_c} & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{bmatrix}.$$

O método de Hörmander requer ainda satisfação da relação $\det[B]_{\xi} = \delta(x, \hat{x})$, em vista da Eq. (7.132) o $\det[B] = \det[A]^{-1} \det[B_1]$ isto é, $\det[B] = \det[B_1]$. Assim:

$$\det[B] = \left(\eta_0 + \eta_1 \frac{d^2}{dx^2} + \eta_2 \frac{d^4}{dx^4} + \eta_3 \frac{d^6}{dx^6} + \eta_4 \frac{d^8}{dx^8} + \eta_5 \frac{d^{10}}{dx^{10}} + \frac{d^{12}}{dx^{12}} \right) \zeta = \frac{\delta(x, \hat{x})}{D_{1y} D_{1z} D_2} \quad (7.133)$$

onde:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= k_1 k_2 (k_3 - k_6 - k_8 - k_9), \quad \eta_1 = [(k_3 - k_6 - k_8) k_5 - k_2 k_7] k_1 + k_2 k_4 (k_3 - k_6 - k_9), \\ \eta_2 &= (k_2 + k_3 - k_6 - k_8 + k_7 k_5) k_1 + k_2 (k_3 - k_6 - k_9 + k_4 k_7) - k_5 k_4 (k_3 - k_6), \\ \eta_3 &= (k_6 - k_3 - k_2 + k_7 k_5) k_4 - k_5 (k_1 + k_3 - k_6) + k_7 (k_1 + k_2), \\ \eta_4 &= -[k_2 + k_1 - k_5 k_6 + k_3 - k_6 + k_7 (k_5 + k_4)] \text{ e } \eta_5 = k_4 - k_7 + k_5. \end{aligned}$$

$$\text{Sendo: } k_1 = \frac{S_1}{D_{1y}}, \quad k_2 = \frac{S_1}{D_{1z}}, \quad k_3 = \frac{S_2}{D_2}, \quad k_4 = \frac{S_{3y}}{D_{1y}}, \quad k_5 = \frac{S_{3z}}{D_{1z}}, \quad k_6 = \frac{S_4}{D_2}, \quad k_7 = \frac{D_3}{D_2}, \quad k_8 = \frac{y_c^2 S_1}{D_2},$$

$$k_9 = \frac{z_c^2 S_1}{D_2}.$$

Fazendo-se a mudança de variável $y = \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$ na segunda derivada em x do $\det[B]$,

na Eq. (7.133) e tomando-se sua forma homogênea, tem-se:

$$\eta_0 + \eta_1 y + \eta_2 y^2 + \eta_3 y^3 + \eta_4 y^4 + \eta_5 y^5 + y^6 = 0 \quad (7.134)$$

As raízes do polinômio Eq. (7.134) podem ser obtidas em duas etapas. Na primeira é utilizado o método de Newton-Raphson para encontrar numericamente as duas primeiras raízes (essas de sinais opostos). Então, faz-se uma dupla redução de ordem no polinômio original, resultando em um de quarta ordem. A partir de então, entra-se na segunda etapa que é a determinação analítica das raízes desse polinômio reduzido.

Com o intuito de auxiliar a escolha dos valores iniciais de disparo do método iterativo de Newton-Raphson, uma estratégia é identificar os possíveis intervalos de ocorrência das mesmas. Em BANERJEE e SU (2006) é apresentado um procedimento de identificação desses intervalos para um polinômio de quinta ordem advindo da vibração de problema de flexo-torção tri-acoplado em que a rigidez de empenamento é desprezada.

A seguir é apresentada uma extensão desse procedimento para o problema completo (polinômio de sexta ordem). Tomando-se a rigidez de empenamento infinita, $D_2 \rightarrow \infty$, então a Eq. (7.134) fica:

$$y^2[k_1k_2 - (k_2k_4 + k_1k_5)y - (k_1 + k_2)y^2 + (k_2 + k_4)y^3 + y^4] = 0 \quad (7.135)$$

Se forem tomadas as constantes $a = (k_2 + k_4)$, $b = -(k_1 + k_2)$, $c = -(k_2k_4 + k_1k_5)$, $d = k_1k_2$ as raízes não nulas da Eq. (7.135) podem ser escritas analiticamente por:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\sqrt{R} + \sqrt{\Delta_1}}{2} - \frac{a}{4} \\ r_2 &= \frac{\sqrt{R} - \sqrt{\Delta_1}}{2} - \frac{a}{4} \\ r_3 &= \frac{-\sqrt{R} + \sqrt{\Delta_2}}{2} - \frac{a}{4} \\ r_4 &= \frac{-\sqrt{R} - \sqrt{\Delta_2}}{2} - \frac{a}{4} \end{aligned} \quad (7.136a-d)$$

$$R = p + 2z_0,$$

$$z_0 = s_0 - 5\frac{p}{6},$$

$$\Delta_1 = (-\sqrt{R})^2 - 4(p + z_0 + \sqrt{R}x_0)$$

$$\Delta_2 = (\sqrt{R})^2 - 4(p + z_0 - \sqrt{R}x_0)$$

$$x_0 = \frac{q}{2(2z_0 + p)},$$

$$s_0 = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\Delta}},$$

$$p = -\frac{3a}{8} + b,$$

$$q = \frac{a^3}{8} + \frac{ab}{2} + c,$$

$$r = -3 \frac{a^4}{256} - \frac{ba^2}{16} - \frac{ac}{4} + d,$$

$$p_1 = -\frac{p^2}{12} - r,$$

$$q_1 = \frac{rp}{3} - \frac{p^3}{108} - \frac{q^2}{8},$$

$$\Delta = \frac{p_1^3}{27} + \frac{q_1^2}{4}$$

Assim os intervalos para ocorrência das raízes da Eq. (7.134) são:

$$]-\infty, r_4[,]r_4, r_3[,]r_3, 0[,]0, r_2[,]r_2, r_1[\text{ e }]r_1, \infty[\quad (7.137)$$

Para reduzir os limites impróprios para valores finitos, aplicar-se a cota de Fujiwara, que estabelece que todas as raízes de um polinômio real ou complexo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z^0$ devem ser menores que:

$$|z| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|^{1/2}, \dots, \left| \frac{a_1}{a_n} \right|^{1/(n-1)}, \left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{1/n} \right\}.$$

No caso de interesse, a cota fica:

$$|z| \leq 2 \max \left\{ 1, |\eta_5|^{1/2}, |\eta_4|^{1/3}, |\eta_3|^{1/4}, |\eta_2|^{1/5}, |\eta_1|^{1/6}, |\eta_0|^{1/7} \right\}$$

De um modo geral no problema tri-acoplado, a cota de Fujiwara para a Eq. (7.135) será dado por $2\sqrt{\eta_5}$, de forma que esse valor pode limitar os domínios infinitos nos intervalos em Eq. (7.137).

Definidos estes limites, dois valores de partida (um positivo e outro negativo) mais adequados poderão alimentar com mais eficácia o algoritmo de Newton-Raphson, com intuito de encontrar as duas raízes do polinômio Eq. (7.135), aqui denominadas λ_5 e λ_6 , onde a primeira é positiva e a segunda é negativa.

Nos casos de simetria da seção transversal, a utilização do Newton-Raphson para determinar as raízes λ_5 e λ_6 pode ser dispensada, já que essas podem ser determinadas

analiticamente. Por exemplo, se a simetria for no eixo z, então $y_c = 0$, $\lambda_5 = -\frac{S_{3y} + \sqrt{\Delta_{3y}}}{2D_{1y}}$

e $\lambda_6 = -\frac{S_{3y} - \sqrt{\Delta_{3y}}}{2D_{1y}}$ com $\Delta_{3y} = S_{3y}^2 - 4S_1D_{1y}$; agora, se a simetria ocorrer em y tem-se que

$z_c = 0$, $\lambda_5 = -\frac{S_{3z} + \sqrt{\Delta_{3z}}}{2D_{1z}}$ e $\lambda_6 = -\frac{S_{3z} - \sqrt{\Delta_{3z}}}{2D_{1z}}$ com $\Delta_{3z} = S_{3z}^2 - 4S_1D_{1z}$.

De posse dessas raízes, passe-se para a redução da ordem do polinômio de sexta, da Eq. (7.134), para um de quarta ordem expresso por:

$$d + cy + by^2 + ay^3 + y^4 = 0 \quad (7.138)$$

onde: $a = \lambda_5 + \lambda_6 + \eta_5$, $b = a\lambda_6 + \lambda_5(\lambda_5 + \eta_5) + \eta_4$, $c = b\lambda_6 + \lambda_5[\lambda_5(\lambda_5 + \eta_5) + \eta_4] + \eta_3$,
 $d = c\lambda_6 + \lambda_5\{\lambda_5[\lambda_5(\lambda_5 + \eta_5) + \eta_4] + \eta_3\} + \eta_2$.

Com isso, as quatro raízes restantes podem ser calculadas analiticamente utilizando as Eqs. (7.136a-d)

Como o polinômio da Eq. (7.134) possui três raízes negativas $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$ e três positivas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5$ a função escalar ζ pode ser proposta:

$$\begin{aligned} \zeta = & A_1 \sinh(-\sqrt{\lambda_1} r) + A_2 \sinh(-\sqrt{\lambda_2} r) + A_3 \sinh(\sqrt{-\lambda_3} r) + \\ & + A_4 \sinh(\sqrt{-\lambda_4} r) + A_5 \sinh(-\sqrt{\lambda_5} r) + A_6 \sinh(\sqrt{-\lambda_6} r) \end{aligned} \quad (7.139)$$

As constantes ($A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6) são obtidas introduzindo a Eq. (7.139) na Eq. (7.133), resultando em:

$$\eta_0 \zeta + \eta_1 \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \eta_2 \frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \eta_3 \frac{d^6 \zeta}{dx^6} + \eta_4 \frac{d^8 \zeta}{dx^8} + \eta_5 \frac{d^{10} \zeta}{dx^{10}} + \frac{d^{12} \zeta}{dx^{12}} = \frac{\delta(x, \hat{x})}{D_{1y} D_{1z} D_2} \quad (7.140)$$

Para evitar as derivadas de ordens superiores do delta de Dirac (decorrentes da aplicação da Eq. (7.140) na Eq. (7.138)) as seguintes condições podem ser impostas:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\lambda_1} & -\sqrt{\lambda_2} & \sqrt{-\lambda_3} & \sqrt{-\lambda_4} & -\sqrt{\lambda_5} & \sqrt{-\lambda_6} \\ -\lambda_1\sqrt{\lambda_1} & -\lambda_2\sqrt{\lambda_2} & \lambda_3\sqrt{-\lambda_3} & \lambda_4\sqrt{-\lambda_4} & -\lambda_5\sqrt{\lambda_5} & \lambda_6\sqrt{-\lambda_6} \\ -\lambda_1^2\sqrt{\lambda_1} & -\lambda_2^2\sqrt{\lambda_2} & \lambda_3^2\sqrt{-\lambda_3} & \lambda_4^2\sqrt{-\lambda_4} & -\lambda_5^2\sqrt{\lambda_5} & \lambda_6^2\sqrt{-\lambda_6} \\ -\lambda_1^3\sqrt{\lambda_1} & -\lambda_2^3\sqrt{\lambda_2} & \lambda_3^3\sqrt{-\lambda_3} & \lambda_4^3\sqrt{-\lambda_4} & -\lambda_5^3\sqrt{\lambda_5} & \lambda_6^3\sqrt{-\lambda_6} \\ -\lambda_1^4\sqrt{\lambda_1} & -\lambda_2^4\sqrt{\lambda_2} & \lambda_3^4\sqrt{-\lambda_3} & \lambda_4^4\sqrt{-\lambda_4} & -\lambda_5^4\sqrt{\lambda_5} & \lambda_6^4\sqrt{-\lambda_6} \\ -\lambda_1^5\sqrt{\lambda_1} & -\lambda_2^5\sqrt{\lambda_2} & \lambda_3^5\sqrt{-\lambda_3} & \lambda_4^5\sqrt{-\lambda_4} & -\lambda_5^5\sqrt{\lambda_5} & \lambda_6^5\sqrt{-\lambda_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2D_2D_{1y}D_{1z}} \quad (7.141)$$

Após a solução do sistema, Eq. (7.141), fica:

$$A_1 = -\frac{1}{2(D_2D_{1y}D_{1z})\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1, \quad A_2 = \frac{1}{2(D_2D_{1y}D_{1z})\sqrt{\lambda_2}}\alpha_2, \quad A_3 = \frac{1}{2(D_2D_{1y}D_{1z})\sqrt{-\lambda_3}}\alpha_3, \\ A_4 = -\frac{1}{2(D_2D_{1y}D_{1z})\sqrt{-\lambda_4}}\alpha_4, \quad A_5 = -\frac{1}{2(D_2D_{1y}D_{1z})\sqrt{\lambda_5}}\alpha_5, \quad A_6 = -\frac{1}{2(D_2D_{1y}D_{1z})\sqrt{-\lambda_6}}\alpha_6$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{1}{[(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)]}, \\ \alpha_2 = \frac{1}{[(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)]}, \\ \alpha_3 = \frac{1}{[(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)]}, \\ \alpha_4 = \frac{1}{[(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)]}, \\ \alpha_5 = \frac{1}{[(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_6)]}, \\ \alpha_6 = \frac{1}{[(\lambda_1 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)]}$$

Então a Eq. (7.139) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} \varsigma = & \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_1}r)}{2D_{1y}D_{2y}D_2\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1 - \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2}r)}{2D_{1y}D_{2y}D_2\sqrt{\lambda_2}}\alpha_2 + \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_3}r)}{2D_{1y}D_2\sqrt{-\lambda_3}}\alpha_3 \\ & - \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_4}r)}{2D_{1y}D_{2y}D_2\sqrt{-\lambda_4}}\alpha_4 + \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_5}r)}{2D_{1y}D_{2y}D_2\sqrt{\lambda_5}}\alpha_5 - \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_6}r)}{2D_{1y}D_2\sqrt{-\lambda_6}}\alpha_6 \end{aligned} \quad (7.142)$$

As soluções fundamentais estão diretamente correlacionadas com a função escalar ς pela expressão:

$$[G] = [B^{cof}]^T \varsigma = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \varsigma = \begin{bmatrix} w_r^* & w_p^* & w_t^* \\ v_r^* & v_p^* & v_t^* \\ \theta_r^* & \theta_p^* & \theta_t^* \end{bmatrix} \quad (7.143)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{11} = & D_2D_{1z} \frac{d^8}{dx^8} + (D_2S_{3z} - D_3D_{1z} + D_{1z}S_4) \frac{d^6}{dx^6} + \\ & + (D_{1z}S_1y_c^2 - D_2S_1 - D_{1z}S_2 - D_3S_{3z} + S_4S_{3z}) \frac{d^4}{dx^4} + \\ & + (S_1S_3y_c^2 + D_3S_1 - S_1S_4 - S_2S_{3z}) \frac{d^2}{dx^2} + S_2S_1 - S_1^2y_c^2 - S_1^2z_c^2 \\ A_{12} = & -(D_{1y}S_1y_cz_c \frac{d^4}{dx^4} + S_1S_{3y}y_cz_c \frac{d^2}{dx^2}) \\ A_{13} = & D_{1y}D_{1z}y_c \frac{d^8}{dx^8} + (D_{1y}S_{3z}y_c + D_{1z}S_{3y}y_c) \frac{d^6}{dx^6} + (S_{3y}S_{3z}y_c - D_{1y}S_1y_c) \frac{d^4}{dx^4} + \\ & + (-S_1S_{3y}y_c) \frac{d^2}{dx^2} \\ A_{21} = & -(D_{1z}S_1y_c \frac{d^4}{dx^4} + S_1S_{3z}y_c \frac{d^2}{dx^2})z_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= D_2 D_{1y} \frac{d^8}{dx^8} + (D_2 S_{3y} - D_3 D_{1y} + D_{1y} S_4) \frac{d^6}{dx^6} + \\
&\quad + (D_{1y} S_1 z_c^2 - D_2 S_1 - D_{1y} S_2 - D_3 S_{3y} + S_4 S_{3y}) \frac{d^4}{dx^4} + \\
&\quad + (S_1 S_{3y} z_c^2 + D_3 S_1 - S_1 S_4 - S_2 S_{3y}) \frac{d^2}{dx^2} + S_2 S_1 - S_1^2 y_c^2 - S_1^2 z_c^2 \\
A_{23} &= -[D_{1y} D_{1z} \frac{d^8}{dx^8} + (D_{1y} S_{3z} + D_{1z} S_{3y}) \frac{d^6}{dx^6} + (D_{1z} S_1 + S_{3y} S_{3z}) \frac{d^4}{dx^4} - S_1 S_{3z} \frac{d^4}{dx^4}] z_c \\
A_{31} &= (D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2}) y_c S_1 \\
A_{32} &= -(D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} - S_1 + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2}) z_c S_1 \\
A_{33} &= D_{1y} D_{1z} \frac{d^8}{dx^8} + (D_{1y} S_{3z} + D_{1z} S_{3y}) \frac{d^6}{dx^6} + (S_{3y} S_{3z} - D_{1z} S_1 - D_{1y} S_1) \frac{d^4}{dx^4} + \\
&\quad + (-S_1 S_{3z} - S_1 S_{3y}) \frac{d^2}{dx^2} + S_1^2
\end{aligned} \tag{7.144a-i}$$

Assim, as formas explícitas das soluções fundamentais em deslocamentos ficam:

$$\begin{aligned}
w_r^* = A_{11} \zeta &= \frac{1}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[\frac{a_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1})}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{a_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{a_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3})}{\sqrt{-\lambda_3}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{a_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4})}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{a_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5})}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{a_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6})}{\sqrt{-\lambda_6}} \right] \\
v_r^* = A_{12} \zeta &= \frac{1}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[e_{1y} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_{3y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\
&\quad \left. e_{4y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_{5y} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_{6y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_r^* &= A_{13}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\
&\quad \left. d_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) + d_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
w_p^* &= A_{21}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\
&\quad \left. e_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
v_p^* &= A_{22}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{a_{1y} \sinh(r\sqrt{\lambda_1})}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{a_{2y} \sinh(r\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{a_{3y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3})}{\sqrt{-\lambda_3}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_{4y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4})}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{a_{5y} \sinh(r\sqrt{\lambda_5})}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{a_{6y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6})}{\sqrt{-\lambda_6}} \right] \\
\theta_p^* &= A_{23}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_{2y} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_{3y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\
&\quad \left. + d_{4y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_{5y} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) + d_{6y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
w_t^* &= A_{31}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{b_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1})}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{b_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{b_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3})}{\sqrt{-\lambda_3}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4})}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{b_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5})}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{b_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6})}{\sqrt{-\lambda_6}} \right] \\
v_t^* &= A_{32}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{b_{1y} \sinh(r\sqrt{\lambda_1})}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{b_{2y} \sinh(r\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{b_{3y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3})}{\sqrt{-\lambda_3}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_{4y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4})}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{b_{5y} \sinh(r\sqrt{\lambda_5})}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{b_{6y} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6})}{\sqrt{-\lambda_6}} \right] \\
\theta_t^* &= A_{33}\zeta = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{c_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1})}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{c_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{c_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3})}{\sqrt{-\lambda_3}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{c_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4})}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{c_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5})}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{c_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6})}{\sqrt{-\lambda_6}} \right]
\end{aligned}$$

(7.145a-h)

Onde as constantes (a) nas Eqs (7.145) são dadas por:

$$\begin{aligned}
a_1 &= [f_{a4}\lambda_1^4 + f_{a3}\lambda_1^3 + f_{a2}\lambda_1^2 + f_{a1}\lambda_1 + f_{a0}]\alpha_1 \\
a_2 &= -[f_{a4}\lambda_2^4 + f_{a3}\lambda_2^3 + f_{a2}\lambda_2^2 + f_{a1}\lambda_2 + f_{a0}]\alpha_2 \\
a_3 &= [f_{a4}(-\lambda_3)^4 - f_{a3}(-\lambda_3)^3 + f_{a2}(-\lambda_3)^2 - f_{a1}(-\lambda_3) + f_{a0}]\alpha_3 \\
a_4 &= -[f_{a4}(-\lambda_4)^4 - f_{a3}(-\lambda_4)^3 + f_{a2}(-\lambda_4)^2 - f_{a1}(-\lambda_4) + f_{a0}]\alpha_4 \\
a_5 &= [f_{a4}\lambda_5^4 + f_{a3}\lambda_5^3 + f_{a2}\lambda_5^2 + f_{a1}\lambda_5 + f_{a0}]\alpha_5 \\
a_6 &= -[f_{a4}(-\lambda_6)^4 - f_{a3}(-\lambda_6)^3 + f_{a2}(-\lambda_6)^2 - f_{a1}(-\lambda_6) + f_{a0}]\alpha_6
\end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}
f_{a4} &= D_2 D_{1z} \\
f_{a3} &= -(D_3 D_{1z} - D_2 S_{3z} - D_{1z} S_4) \\
f_{a2} &= -(D_2 S_1 + D_{1z} S_2 + D_3 S_{3z} - S_4 S_{3z} - S_1 D_{1z} y_c^2) \\
f_{a1} &= D_3 S_1 - S_1 S_4 - S_2 S_{3z} + S_1 S_{3z} y_c^2 \\
f_{a0} &= S_1 S_2 - S_1^2 y_c^2 - S_1^2 z_c^2
\end{aligned}$$

As constantes (a_y) nas Eqs (7.145) são dadas por:

$$\begin{aligned}
a_{1y} &= [f_{a4y}\lambda_1^4 + f_{a3y}\lambda_1^3 + f_{a2y}\lambda_1^2 + f_{a1y}\lambda_1 + f_{a0y}]\alpha_1 \\
a_{2y} &= -[f_{a4y}\lambda_2^4 + f_{a3y}\lambda_2^3 + f_{a2y}\lambda_2^2 + f_{a1y}\lambda_2 + f_{a0y}]\alpha_2 \\
a_{3y} &= [f_{a4y}(-\lambda_3)^4 - f_{a3y}(-\lambda_3)^3 + f_{a2y}(-\lambda_3)^2 - f_{a1y}(-\lambda_3) + f_{a0y}]\alpha_3 \\
a_{4y} &= -[f_{a4y}(-\lambda_4)^4 - f_{a3y}(-\lambda_4)^3 + f_{a2y}(-\lambda_4)^2 - f_{a1y}(-\lambda_4) + f_{a0y}]\alpha_4 \\
a_{5y} &= [f_{a4y}\lambda_5^4 + f_{a3y}\lambda_5^3 + f_{a2y}\lambda_5^2 + f_{a1y}\lambda_5 + f_{a0y}]\alpha_5 \\
a_{6y} &= -[f_{a4y}(-\lambda_6)^4 - f_{a3y}(-\lambda_6)^3 + f_{a2y}(-\lambda_6)^2 - f_{a1y}(-\lambda_6) + f_{a0y}]\alpha_6
\end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}
f_{a4y} &= D_2 D_{1y} \\
f_{a3y} &= -(D_3 D_{1y} - D_2 S_{3y} - D_{1y} S_4) \\
f_{a2y} &= -(D_2 S_1 + D_{1y} S_2 + D_3 S_{3y} - S_4 S_{3y} - S_1 D_{1y} z_c^2) \\
f_{a1y} &= D_3 S_1 - S_1 S_4 - S_2 S_{3y} + S_1 S_{3y} z_c^2
\end{aligned}$$

$$f_{a0y} = S_1 S_2 - S_1^2 y_c^2 - S_1^2 z_c^2$$

Já as constantes (d) nas Eqs (7.145) ficam:

$$\begin{aligned} d_1 &= [f_{d4}\lambda_1^3 + f_{d3}\lambda_1^2 + f_{d2}\lambda_1 + f_{d1}\lambda_1]\alpha_1\sqrt{\lambda_1} \\ d_2 &= -[f_{d4}\lambda_2^3 + f_{d3}\lambda_2^2 + f_{d2}\lambda_2 + f_{d1}\lambda_2]\alpha_2\sqrt{\lambda_2} \\ d_3 &= [f_{d4}(-\lambda_3)^3 - f_{d3}(-\lambda_3)^2 + f_{d2}(-\lambda_3) - f_{d1}]\alpha_3\sqrt{-\lambda_3} \\ d_4 &= -[f_{d4}(-\lambda_4)^3 - f_{d3}(-\lambda_4)^2 + f_{d2}(-\lambda_4) - f_{d1}]\alpha_4\sqrt{-\lambda_4} \\ d_5 &= [f_{d4}\lambda_5^3 + f_{d3}\lambda_5^2 + f_{d2}\lambda_5 + f_{d1}]\alpha_5\sqrt{\lambda_5} \\ d_6 &= -[f_{d4}(-\lambda_6)^3 - f_{d3}(-\lambda_6)^2 + f_{d2}(-\lambda_6) - f_{d1}]\alpha_6\sqrt{-\lambda_6} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} f_{d4} &= D_{1y}D_{1z}y_c \\ f_{d3} &= (D_{1y}S_{3z} + D_{1z}S_{3y})y_c \\ f_{d2} &= (S_{3y}S_{3z} - S_1D_{1y})y_c \\ f_{d1} &= -S_1S_{3y}y_c \end{aligned}$$

As constantes (d_y) nas Eqs (7.145) ficam:

$$\begin{aligned} d_{1y} &= [f_{d4y}\lambda_1^3 + f_{d3y}\lambda_1^2 + f_{d2y}\lambda_1 + f_{d1y}]\alpha_1\sqrt{\lambda_1} \\ d_{2y} &= -[f_{d4y}\lambda_2^3 + f_{d3y}\lambda_2^2 + f_{d2y}\lambda_2 + f_{d1y}]\alpha_2\sqrt{\lambda_2} \\ d_{3y} &= [f_{d4y}(-\lambda_3)^3 - f_{d3y}(-\lambda_3)^2 + f_{d2y}(-\lambda_3) - f_{d1y}]\alpha_3\sqrt{-\lambda_3} \\ d_{4y} &= -[f_{d4y}(-\lambda_4)^3 - f_{d3y}(-\lambda_4)^2 + f_{d2y}(-\lambda_4) - f_{d1y}]\alpha_4\sqrt{-\lambda_4} \\ d_{5y} &= [f_{d4y}\lambda_5^3 + f_{d3y}\lambda_5^2 + f_{d2y}\lambda_5 + f_{d1y}]\alpha_5\sqrt{\lambda_5} \\ d_{6y} &= -[f_{d4y}(-\lambda_6)^3 - f_{d3y}(-\lambda_6)^2 + f_{d2y}(-\lambda_6) - f_{d1y}]\alpha_6\sqrt{-\lambda_6} \end{aligned}$$

com:

$$f_{d4y} = D_{1y}D_{1z}z_c$$

$$f_{d3y} = (D_{1y}S_{3z} + D_{1z}S_{3y})z_c$$

$$f_{d2y} = (S_{3y}S_{3z} - S_{1y}D_{1z})z_c$$

$$f_{d1y} = -S_{1y}S_{3z}z_c$$

As constantes (b) nas Eqs. (7.145) são:

$$b_1 = [f_{b2}\lambda_1^2 + f_{b1}\lambda_1 + f_{b0}]\alpha_1$$

$$b_2 = -[f_{b2}\lambda_2^2 + f_{b1}\lambda_2 + f_{b0}]\alpha_2$$

$$b_3 = [f_{b2}(-\lambda_3)^2 - f_{b1}(-\lambda_3) + f_{b0}]\alpha_3$$

$$b_4 = -[f_{b2}(-\lambda_4)^2 - f_{b1}(-\lambda_4) + f_{b0}]\alpha_4$$

$$b_5 = [f_{b2}\lambda_5^2 + f_{b1}\lambda_5 + f_{b0}]\alpha_5$$

$$b_6 = -[f_{b2}(-\lambda_6)^2 - f_{b1}(-\lambda_6) + f_{b0}]\alpha_6$$

onde:

$$f_{b0} = -S_{1y}^2 y_c$$

$$f_{b1} = S_{1y}S_{3z}y_c$$

$$f_{b2} = S_{1y}D_{1z}y_c$$

As constantes (b_y) nas Eqs. (7.145) são:

$$b_{1y} = [f_{b2y}\lambda_1^2 + f_{b1y}\lambda_1 + f_{b0y}]\alpha_1$$

$$b_{2y} = -[f_{b2y}\lambda_2^2 + f_{b1y}\lambda_2 + f_{b0y}]\alpha_2$$

$$b_{3y} = [f_{b2y}(-\lambda_3)^2 - f_{b1y}(-\lambda_3) + f_{b0y}]\alpha_3$$

$$b_{4y} = -[f_{b2y}(-\lambda_4)^2 - f_{b1y}(-\lambda_4) + f_{b0y}]\alpha_4$$

$$b_{5y} = [f_{b2y}\lambda_5^2 + f_{b1y}\lambda_5 + f_{b0y}]\alpha_5$$

$$b_{6y} = -[f_{b2y}(-\lambda_6)^2 - f_{b1y}(-\lambda_6) + f_{b0y}]\alpha_6$$

onde:

$$f_{b2y} = S_1 D_{1y} z_c$$

$$f_{b1y} = S_1 S_{3y} z_c$$

$$f_{b0} = -S_1^2 z_c$$

As constantes (e) nas Eqs. (7.145) são:

$$e_1 = [f_{e2}\lambda_1 + f_{e1}]\alpha_1\sqrt{\lambda_1}$$

$$e_2 = -[f_{e2}\lambda_2 + f_{e1}]\alpha_2\sqrt{\lambda_2}$$

$$e_3 = [f_{e2}(-\lambda_3) - f_{e1}]\alpha_3\sqrt{-\lambda_3}$$

$$e_4 = -[f_{e2}(-\lambda_4) - f_{e1}]\alpha_4\sqrt{-\lambda_4}$$

$$e_5 = [f_{e2}\lambda_5 + f_{e1}]\alpha_5\sqrt{\lambda_5}$$

$$e_6 = -[f_{e2}(-\lambda_6) - f_{e1}]\alpha_6\sqrt{-\lambda_6}$$

onde:

$$f_{e2} = S_1 D_{1z} y_c z_c$$

$$f_{e1} = S_1 S_{3z} y_c z_c$$

E as constantes (e_y) nas Eqs. (7.145) são:

$$e_{1y} = [f_{e2y}\lambda_1 + f_{e1y}]\alpha_1\sqrt{\lambda_1}$$

$$e_{2y} = -[f_{e2y}\lambda_2 + f_{e1y}]\alpha_2\sqrt{\lambda_2}$$

$$e_{3y} = [f_{e2y}(-\lambda_3) - f_{e1y}]\alpha_3\sqrt{-\lambda_3}$$

$$e_{4y} = -[f_{e2y}(-\lambda_4) - f_{e1y}]\alpha_4\sqrt{-\lambda_4}$$

$$e_{5y} = [f_{e2y}\lambda_5 + f_{e1y}]\alpha_5\sqrt{\lambda_5}$$

$$e_{6y} = -[f_{e2y}(-\lambda_6) - f_{e1y}] \alpha_6 \sqrt{-\lambda_6}$$

onde:

$$f_{e2y} = S_1 D_{1y} y_c z_c$$

$$f_{e1y} = S_1 S_{3y} y_c z_c$$

Onde as constantes (c) nas Eqs. (7.145) são dadas por:

$$c_1 = [f_{c4} \lambda_1^4 + f_{c3} \lambda_1^3 + f_{c2} \lambda_1^2 + f_{c1} \lambda_1 + f_{c0}] \alpha_1$$

$$c_2 = -[f_{c4} \lambda_2^4 + f_{c3} \lambda_2^3 + f_{c2} \lambda_2^2 + f_{c1} \lambda_2 + f_{c0}] \alpha_2$$

$$c_3 = [f_{c4}(-\lambda_3)^4 - f_{c3}(-\lambda_3)^3 + f_{c2}(-\lambda_3)^2 - f_{c1}(-\lambda_3) + f_{c0}] \alpha_3$$

$$c_4 = -[f_{c4}(-\lambda_4)^4 - f_{c3}(-\lambda_4)^3 + f_{c2}(-\lambda_4)^2 - f_{c1}(-\lambda_4) + f_{c0}] \alpha_4$$

$$c_5 = [f_{c4} \lambda_5^4 + f_{c3} \lambda_5^3 + f_{c2} \lambda_5^2 + f_{c1} \lambda_5 + f_{c0}] \alpha_5$$

$$c_6 = -[f_{c4}(-\lambda_6)^4 - f_{c3}(-\lambda_6)^3 + f_{c2}(-\lambda_6)^2 - f_{c1}(-\lambda_6) + f_{c0}] \alpha_6$$

onde:

$$f_{c4} = D_{1y} D_{1z}$$

$$f_{c3} = (D_{1y} S_{3z} + D_{1z} S_{3y})$$

$$f_{c2} = S_{3y} S_{3z} - S_1 (D_{1z} + D_{1y})$$

$$f_{c1} = -S_1 (S_{3z} + S_{3y})$$

$$f_{a0} = S_1^2$$

As derivadas das soluções fundamentais em deslocamentos, no ponto-campo, ficam:

$$\frac{dw_r^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[a_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + a_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + a_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dv_r^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y}\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_{3y}\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. e_{4y}\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_{5y}\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_{6y}\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d\theta_r^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_2\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_3\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. d_4\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_5\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + d_6\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dw_p^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_3\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. e_4\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_5\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_6\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dv_p^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_{2y} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_{3y} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. a_{4y} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_{5y} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + a_{6y} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d\theta_p^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_{2y}\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_{3y}\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. d_{4y}\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_{5y}\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + d_{6y}\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dw_t^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[b_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. b_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + b_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dv_t^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[b_{1y} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_{2y} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_{3y} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. b_{4y} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_{5y} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + b_{6y} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d\theta_t^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[c_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + c_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + c_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. c_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + c_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + c_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \quad (7.146a-i)$$

Já as derivadas das soluções fundamentais em deslocamentos, no ponto-fonte, são:

$$\frac{dw_r^*}{d\hat{x}} = -\frac{dw_r^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. a_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + a_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dv_r^*}{d\hat{x}} = -\frac{dv_r^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y}\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. e_{3y}\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + e_{4y}\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_{5y}\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_{6y}\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d\theta_r^*}{d\hat{x}} = -\frac{d\theta_r^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_2\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_3\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. d_4\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_5\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + d_6\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dw_p^*}{d\hat{x}} = -\frac{dw_p^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_3\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. e_4\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_5\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_6\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dv_p^*}{d\hat{x}} = -\frac{dv_p^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_{2y} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_{3y} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. a_{4y} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_{5y} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + a_{6y} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d\theta_p^*}{d\hat{x}} = -\frac{d\theta_p^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_{2y}\sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_{3y}\sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. + d_{4y}\sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_{5y}\sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + d_{6y}\sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dw_t^*}{d\hat{x}} = -\frac{dw_t^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[b_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. b_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + b_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dv_t^*}{d\hat{x}} = -\frac{dv_t^*}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[b_{1y} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_{2y} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_{3y} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. b_{4y} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_{5y} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + b_{6y} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d\theta_t^*}{d\hat{x}} = -\frac{d\theta_t}{dx} = -\frac{\text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[c_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + c_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + c_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. c_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + c_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + c_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

(7.147a-i)

As duplas derivadas (no ponto-fonte e no ponto-campo) das soluções fundamentais em deslocamentos ficam:

$$\frac{d^2 w_r^*}{d\hat{x}dx} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1\sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_2\sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_5\sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - a_3\sqrt{-\lambda_3} \sen(r\sqrt{-\lambda_3}) - a_4\sqrt{-\lambda_4} \sen(r\sqrt{-\lambda_4}) - a_6\sqrt{-\lambda_6} \sen(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d^2 v_r^*}{d\hat{x}dx} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}\lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y}\lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_{5y}\lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - \right. \\ \left. e_{3y}\lambda_3 \sen(r\sqrt{-\lambda_3}) - e_{4y}\lambda_4 \sen(r\sqrt{-\lambda_4}) - e_{6y}\lambda_6 \sen(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d^2 \theta_r^*}{d\hat{x}dx} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1\lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_2\lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_5\lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - \right. \\ \left. d_3\lambda_3 \sen(r\sqrt{-\lambda_3}) - d_4\lambda_4 \sen(r\sqrt{-\lambda_4}) - d_6\lambda_6 \sen(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d^2 w_p^*}{d\hat{x}dx} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2\lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_5\lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - \right. \\ \left. e_3\lambda_3 \sen(r\sqrt{-\lambda_3}) - e_4\lambda_4 \sen(r\sqrt{-\lambda_4}) - e_6\lambda_6 \sen(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{d^2 v_p^*}{d\hat{x}dx} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}\sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_{2y}\sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_{y5}\sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - a_{3y}\sqrt{-\lambda_3} \sen(r\sqrt{-\lambda_3}) - a_{4y}\sqrt{-\lambda_4} \sen(r\sqrt{-\lambda_4}) - a_{6y}\sqrt{-\lambda_6} \sen(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \theta_p^*}{d\hat{x}dx} &= \frac{1}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[d_{1y} \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_{2y} \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_{5y} \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) + \right. \\
&\quad \left. d_{3y} \lambda_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + d_{4y} \lambda_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_{6y} \lambda_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
\frac{d^2 w_t^*}{d\hat{x}dx} &= -\frac{1}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_5 \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\
&\quad \left. - b_3 \sqrt{-\lambda_3} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) - b_4 \sqrt{-\lambda_4} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - b_6 \sqrt{-\lambda_6} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
\frac{d^2 v_t^*}{d\hat{x}dx} &= \frac{1}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_{1y} \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_{2y} \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_{5y} \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\
&\quad \left. - b_{3y} \sqrt{-\lambda_3} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) - b_{4y} \sqrt{-\lambda_4} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - b_{6y} \sqrt{-\lambda_6} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
\frac{d^2 \theta_t^*}{d\hat{x}dx} &= -\frac{1}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[c_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + c_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + c_5 \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\
&\quad \left. - c_3 \sqrt{-\lambda_3} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) - c_4 \sqrt{-\lambda_4} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - c_6 \sqrt{-\lambda_6} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]
\end{aligned}
\tag{7.148a-i}$$

As formas explícitas das soluções fundamentais em esforços ficam:

$$\begin{aligned}
V_{yp}^* &= -D_{1z} \frac{d^3 v_p^*}{dx^3} - S_{3z} \frac{dv_p^*}{dx} = -\frac{D_{1z} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[a_{1y} (\lambda_1 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \right. \\
&\quad a_{2y} (\lambda_2 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_{5y} (\lambda_5 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + a_{3y} (\lambda_3 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{-\lambda_3}) + \\
&\quad \left. + a_{4y} (\lambda_4 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_{6y} (\lambda_6 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \\
M_{zp}^* &= D_{1z} \frac{d^2 v_p^*}{dx^2} = \frac{D_{1z}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[a_{1y} \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_{2y} \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_{5y} \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\
&\quad \left. - a_{3y} \sqrt{-\lambda_3} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) - a_{4y} \sqrt{-\lambda_4} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - a_{6y} \sqrt{-\lambda_6} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]
\end{aligned}$$

$$V_{zp}^* = -D_{1y} \frac{d^3 w_p^*}{dx^3} - S_{3y} \frac{dw_p^*}{dx} = \frac{D_{1y} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[e_1 (\lambda_1 + \xi_y) \sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \right. \\ \left. e_2 (\lambda_2 + \xi_y) \sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_5 (\lambda_5 + \xi_y) \sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + \right. \\ \left. e_3 (\lambda_3 + \xi_y) \sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. + e_4 (\lambda_4 + \xi_y) \sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_6 (\lambda_6 + \xi_y) \sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$M_{yp}^* = -D_{1y} \frac{d^2 w_p^*}{dx^2} = \frac{D_{1y}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[e_1 \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2 \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_5 \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + e_3 \lambda_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + e_4 \lambda_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_6 \lambda_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$T_p^* = (D_3 - S_4) \frac{d\theta_p^*}{dx} - D_2 \frac{d^3 \theta_p^*}{dx^3} = -\frac{\operatorname{sgn}(r) D_3}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[\gamma_{1y} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \gamma_{2y} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. \gamma_{5y} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + \gamma_{3y} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \gamma_{4y} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + \gamma_{6y} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$B_p^* = -D_2 \frac{d^2 \theta_p^*}{dx^2} = \frac{D_2}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[d_{1y} \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_{2y} \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_{5y} \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + d_{3y} \lambda_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + d_{4y} \lambda_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_{6y} \lambda_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$V_{yr}^* = D_{1z} \frac{d^3 v_r^*}{dx^3} - S_{3z} \frac{dv_r^*}{dx} = \frac{D_{1z} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[e_{1y} (\lambda_1 + \xi_z) \sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \right. \\ \left. + e_{2y} (\lambda_2 + \xi_z) \sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_{5y} (\lambda_5 + \xi_z) \sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - e_{3y} (\lambda_3 + \xi_z) \sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. - e_{4y} (\lambda_4 + \xi_z) \sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) - e_{6y} (\lambda_6 + \xi_z) \sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$V_{zr}^* = -D_{1y} \frac{d^3 w_r^*}{dx^3} - S_{3y} \frac{dw_r^*}{dx} = -\frac{D_{1y} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[a_1 (\lambda_1 + \xi_y) \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \right. \\ \left. + a_2 (\lambda_2 + \xi_y) \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_5 (\lambda_5 + \xi_y) \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + a_3 (\lambda_3 + \xi_y) \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + a_4 (\lambda_4 + \xi_y) \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_6 (\lambda_6 + \xi_y) \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$M_{zr}^* = D_{1z} \frac{d^2 v_r^*}{dx^2} = -\frac{D_{1z}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[e_{1y} \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y} \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_{5y} \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + e_{3y} \lambda_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) + e_{4y} \lambda_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_{6y} \lambda_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right] \quad 283$$

$$M_{yr}^* = -D_{1y} \frac{d^2 w_r^*}{dx^2} = -\frac{D_{1y}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[a_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_5 \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - a_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) - a_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - a_6 \sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$T_r^* = (D_3 - S_4) \frac{d\theta_r^*}{dx} - D_2 \frac{d^3 \theta_r^*}{dx^3} = \frac{\text{sgn}(r) D_3}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[\gamma_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \gamma_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. \gamma_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + \gamma_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \gamma_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + \gamma_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$B_r^* = -D_2 \frac{d^2 \theta_r^*}{dx^2} = -\frac{D_2}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[d_1 \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_2 \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_5 \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + d_3 \lambda_3 \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) + d_4 \lambda_4 \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_6 \lambda_6 \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$V_{zt}^* = -D_{1y} \frac{d^3 w_t^*}{dx^3} - S_{3y} \frac{dw_t^*}{dx} = -\frac{D_{1y} \text{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_1 (\lambda_1 + \xi_y) \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \right. \\ \left. b_2 (\lambda_2 + \xi_y) \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_5 (\lambda_5 + \xi_y) \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + b_3 (\lambda_3 + \xi_y) \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \right. \\ \left. b_4 (\lambda_4 + \xi_y) \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_6 (\lambda_6 + \xi_y) \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$V_{yt}^* = -D_{1z} \frac{d^3 v_t^*}{dx^3} - S_{3z} \frac{dv_t^*}{dx} = \frac{D_{1z} \text{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_{1y} (\lambda_1 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \right. \\ \left. b_{2y} (\lambda_2 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_{5y} (\lambda_5 + \xi_z) \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) + \right. \\ \left. b_{3y} (\lambda_3 + \xi_z) \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + b_{4y} (\lambda_4 + \xi_z) \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_{6y} (\lambda_6 + \xi_z) \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$M_{zt}^* = D_{1z} \frac{d^2 v_t^*}{dx^2} = \frac{-D_{1z}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_{1y} \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_{2y} \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_{5y} \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - b_{y3} \sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) - b_{4y} \sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - b_{y6} \sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$M_{yt}^* = -D_{1y} \frac{d^2 w_t^*}{dx^2} = \frac{-D_{1y}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_5 \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - b_3 \sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) - b_4 \sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - b_6 \sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$T_t^* = (D_3 - S_4) \frac{d\theta_t^*}{dx} - D_2 \frac{d^3\theta_t^*}{dx^3} = \frac{\text{sgn}(r)D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\beta_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + \beta_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + \beta_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + \beta_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + \beta_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + \beta_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$B_t^* = -D_2 \frac{d^2\theta_t^*}{dx^2} = -\frac{D_2}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[c_1\sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + c_2\sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + c_5\sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - c_3\sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) - c_4\sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - c_6\sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

As derivadas dos esforços fundamentais no ponto-fonte são dadas por:

$$\frac{dV_{zr}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1(\lambda_1 + \xi_y)\sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_2(\lambda_2 + \xi_y)\sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. a_5(\lambda_5 + \xi_y)\sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - a_3(\lambda_3 + \xi_y)\sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. - a_4(\lambda_4 + \xi_y)\sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - a_6(\lambda_6 + \xi_y)\sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dV_{yr}^*}{d\hat{x}} = -\frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}(\lambda_1 + \xi_z)\lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y}(\lambda_2 + \xi_z)\lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. + e_{5y}(\lambda_5 + \xi_z)\lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) + e_{3y}(\lambda_3 + \xi_z)\lambda_3 \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. + e_{4y}(\lambda_4 + \xi_z)\lambda_4 \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_{6y}(\lambda_6 + \xi_z)\lambda_6 \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dM_{yr}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1y} \text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1\lambda_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_2\lambda_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_5\lambda_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + a_3\lambda_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + a_4\lambda_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_6\lambda_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dM_{zr}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1z} \text{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}\lambda_1^{\frac{3}{2}} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_{2y}\lambda_2^{\frac{3}{2}} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_{5y}\lambda_5^{\frac{3}{2}} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + e_{3y}\lambda_3^{\frac{3}{2}} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + e_{4y}\lambda_4^{\frac{3}{2}} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_{6y}\lambda_6^{\frac{3}{2}} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dT_r^*}{d\hat{x}} = \frac{-D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\gamma_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + \gamma_2 \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \gamma_5 \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - \gamma_3 \sqrt{-\lambda_3} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) - \gamma_4 \sqrt{-\lambda_4} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - \gamma_y \sqrt{-\lambda_6} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dB_r^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1y} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_2 \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_5 \lambda_5 \sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + d_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \cosh(r\sqrt{-\lambda_3}) + d_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \cosh(r\sqrt{-\lambda_4}) - e_{d6} \lambda_6 \sqrt{-\lambda_6} \cosh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

(7.149a-z)

$$\frac{dV_{yp}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y} (\lambda_1 + \xi_z) \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_{2y} (\lambda_2 + \xi_z) \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. + a_{5y} (\lambda_5 + \xi_z) \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - a_{3y} (\lambda_3 + \xi_z) \lambda_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. - a_{4y} (\lambda_4 + \xi_z) \lambda_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - a_{6y} (\lambda_6 + \xi_z) \lambda_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dV_{zp}^*}{d\hat{x}} = -\frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1 (\lambda_1 + \xi_y) \lambda_1 \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2 (\lambda_2 + \xi_y) \lambda_2 \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. + e_5 (\lambda_5 + \xi_y) \lambda_5 \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - e_3 (\lambda_3 + \xi_y) \lambda_3 \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. - e_4 (\lambda_4 + \xi_y) \lambda_4 \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - e_6 (\lambda_6 + \xi_y) \lambda_6 \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dM_{zp}^*}{d\hat{x}} = \frac{-D_{1z} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y} \lambda_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + a_{2y} \lambda_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + a_{5y} \lambda_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + a_{3y} \lambda_3 \cosh(r\sqrt{-\lambda_3}) + a_{4y} \lambda_4 \cosh(r\sqrt{-\lambda_4}) + a_{6y} \lambda_6 \cosh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dM_{yp}^*}{d\hat{x}} = -\frac{D_{1y} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1 \lambda_1^{\frac{3}{2}} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + e_2 \lambda_2^{\frac{3}{2}} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + e_5 \lambda_5^{\frac{3}{2}} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + e_3 \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \cosh(r\sqrt{-\lambda_3}) + e_4 \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \cosh(r\sqrt{-\lambda_4}) + e_6 \lambda_6 \sqrt{-\lambda_6} \cosh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dT_p^*}{d\hat{x}} = \frac{D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\gamma_{1y} \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + \gamma_{2y} \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \gamma_{5y} \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - \gamma_{3y} \sqrt{-\lambda_3} \sinh(r\sqrt{-\lambda_3}) - \gamma_{4y} \sqrt{-\lambda_4} \sinh(r\sqrt{-\lambda_4}) - \gamma_{6y} \sqrt{-\lambda_6} \sinh(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dB_p^*}{d\hat{x}} = \frac{-D_2 \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[d_{1y} \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + d_{2y} \lambda_2 \sqrt{\lambda_2} \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + d_{5y} \lambda_5 \sqrt{\lambda_5} \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + d_{3y} \lambda_3 \sqrt{-\lambda_3} \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + d_{4y} \lambda_4 \sqrt{-\lambda_4} \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + d_{6y} \lambda_6 \sqrt{-\lambda_6} \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dV_{yt}^*}{d\hat{x}} = \frac{-D_{1z}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_{1y} (\lambda_1 + \xi_z) \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_{2y} (\lambda_2 + \xi_z) \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) \right. \\ \left. + b_{5y} (\lambda_5 + \xi_z) \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - b_{3y} (\lambda_3 + \xi_z) \sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. - b_{4y} (\lambda_4 + \xi_z) \sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - b_{6y} (\lambda_6 + \xi_z) \sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dM_{zt}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1z} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_{1y} \lambda_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_{2y} \lambda_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_{5y} \lambda_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + b_{3y} \lambda_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + b_{4y} \lambda_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_{6y} \lambda_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dV_{zt}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1y}}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_1 (\lambda_1 + \xi_y) \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_2 (\lambda_2 + \xi_y) \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \right. \\ \left. + b_5 (\lambda_5 + \xi_y) \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) - b_3 (\lambda_3 + \xi_y) \sqrt{\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) \right. \\ \left. - b_4 (\lambda_4 + \xi_y) \sqrt{\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - b_6 (\lambda_6 + \xi_y) \sqrt{\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dM_{yt}^*}{d\hat{x}} = \frac{D_{1y} \operatorname{sgn}(r)}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[b_1 \lambda_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + b_2 \lambda_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + b_5 \lambda_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + b_3 \lambda_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + b_4 \lambda_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + b_6 \lambda_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dT_t^*}{d\hat{x}} = -\frac{D_3}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[\beta_{1t} \sqrt{\lambda_1} \sinh(r\sqrt{\lambda_1}) + \beta_{2t} \sqrt{\lambda_2} \sinh(r\sqrt{\lambda_2}) + \beta_{5t} \sqrt{\lambda_5} \sinh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. - \beta_{3t} \sqrt{-\lambda_3} \sin(r\sqrt{-\lambda_3}) - \beta_{4t} \sqrt{-\lambda_4} \sin(r\sqrt{-\lambda_4}) - \beta_{6t} \sqrt{-\lambda_6} \sin(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

$$\frac{dB_t^*}{d\hat{x}} = \frac{D_2}{2D_2 D_{1z} D_{1y}} \left[c_1 \lambda_1 \cosh(r\sqrt{\lambda_1}) + c_2 \lambda_2 \cosh(r\sqrt{\lambda_2}) + c_5 \lambda_5 \cosh(r\sqrt{\lambda_5}) \right. \\ \left. + c_3 \lambda_3 \cos(r\sqrt{-\lambda_3}) + c_4 \lambda_4 \cos(r\sqrt{-\lambda_4}) + c_6 \lambda_6 \cos(r\sqrt{-\lambda_6}) \right]$$

(7.150a-m)

Onde as constantes (β_t) das Eqs.(7.150) são dadas por:

$$\beta_{t1} = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_1 \frac{D_2}{D_3})c_1$$

$$\beta_{t2} = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_2 \frac{D_2}{D_3})c_2$$

$$\beta_{t3} = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_3 \frac{D_2}{D_3})c_3$$

$$\beta_{t4} = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_4 \frac{D_2}{D_3})c_4$$

$$\beta_{t5} = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_5 \frac{D_2}{D_3})c_5$$

$$\beta_{t6} = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_6 \frac{D_2}{D_3})c_6$$

As constantes (γ) das Eqs. (7.150) são dadas por:

$$\gamma_1 = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_1 \frac{D_2}{D_3})d_1\sqrt{\lambda_1}$$

$$\gamma_2 = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_2 \frac{D_2}{D_3})d_2\sqrt{\lambda_2}$$

$$\gamma_3 = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_3 \frac{D_2}{D_3})d_3\sqrt{-\lambda_3}$$

$$\gamma_4 = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_4 \frac{D_2}{D_3})d_4\sqrt{-\lambda_4}$$

$$\gamma_5 = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_5 \frac{D_2}{D_3})d_5\sqrt{\lambda_5}$$

$$\gamma_6 = (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_6 \frac{D_2}{D_3})d_6\sqrt{-\lambda_6}$$

As constantes (γ_y) das Eqs(7.150) são dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_{1y} &= (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_1 \frac{D_2}{D_3}) d_{1y} \sqrt{\lambda_1} \\ \gamma_{2y} &= (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_2 \frac{D_2}{D_3}) d_{2y} \sqrt{\lambda_2} \\ \gamma_{3y} &= (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_3 \frac{D_2}{D_3}) d_{3y} \sqrt{-\lambda_3} \\ \gamma_{4y} &= (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_4 \frac{D_2}{D_3}) d_{4y} \sqrt{-\lambda_4} \\ \gamma_{5y} &= (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_5 \frac{D_2}{D_3}) d_{5y} \sqrt{\lambda_5} \\ \gamma_{6y} &= (1 - \frac{S_4}{D_3} - \lambda_6 \frac{D_2}{D_3}) d_{6y} \sqrt{-\lambda_6}\end{aligned}$$

Além disso, nas Eqs. (7.150) tem-se também as constantes $\xi_y = S_{3y}/D_{1y}$ e $\xi_z = S_{3z}/D_{1z}$.

7.4.3.2 As equações integrais tri-acopladas

Procurando simplificar a apresentação do estabelecimento das equações integrais do problema tri-acoplado, os procedimentos serão desenvolvidos em cinco etapas: na primeira faz-se a ponderação da equação governante real pelos deslocamentos $v_r^*(x, \hat{x})$, $w_r^*(x, \hat{x})$ e ângulo de torção $\theta_r^*(x, \hat{x})$ quando apenas a fonte de força em z for ativada ($p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$ e $t^*(x, \hat{x}) = 0$):

$$\int_0^L \left[\begin{array}{ccc} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_1 y_c \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_1 z_c \\ -S_1 y_c & S_1 z_c & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{array} \right\} - [A] \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_r^* \\ v_r^* \\ \theta_r^* \end{array} \right\} dx = 0 \quad (7.151)$$

onde a matriz $[A]$ é dada em Eq. (7.127).

Após a utilização de convenientes integrações por partes e adequadas substituições nas relações constitutivas da Eq. (7.131) na Eq. (151), resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [D_{1z} v_r^{*''''} - S_1 v_r^* + S_{3z} v_r^{*''} + S_1 z_c \theta_r^*] v(x) dx + \\
& \int_0^L [D_{1y} w_r^{*''''} - S_1 w_r^* + S_{3z} w_r^{*''} - S_1 y_c \theta_r^*] w(x) dx + \\
& \int_0^L [D_2 \theta_r^{*''''} + (S_4 - D_3) \theta_r^{*''} - S_2 \theta_r^* + S_1 z_c v_r^* - S_1 y_c w_r^*] \theta(x) dx + \\
& [V_{yr}^* v(x)]_0^L + [M_{zr}^* v'(x)]_0^L - [V_z(x) w_r^*]_0^L + [M_y(x) w_r^{*'}]_0^L - [V_y(x) v_r^*]_0^L - [M_z(x) v_r^{*'}]_0^L \\
& [V_{zr}^* w(x)]_0^L - [M_{yr}^* w'(x)]_0^L - [T(x) \theta_r^*]_0^L + [T_r^* \theta(x)]_0^L + [B(x) \theta_r^{*'}]_0^L - [B_r^* \theta'(x)]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) v_r^* dx + \int_0^L p_z(x) w_r^* dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_r^* dx
\end{aligned} \tag{7.152}$$

Estando apenas p_z^* ativado, as equações governantes do problema fundamental Eqs. (7.129) ficam:

$$D_{1y} w_r^{*''''} - S_1 w_r^{*''} + S_{3y} w_r^* - S_1 y_c \theta_r^* = \delta(x, \hat{x}),$$

$$D_{1z} v_r^{*''''} - S_1 v_r^* + S_{3z} v_r^{*''} + S_1 z_c \theta_r^* = 0$$

e,

$$D_2 \theta_r^{*''''} + (S_4 - D_3) \theta_r^{*''} - S_2 \theta_r^* - S_1 y_c w_r^* + S_1 z_c v_r^* = y_c \delta(x, \hat{x}),$$

que ao serem substituídas na Eq. (7.152) e combinadas com a propriedade do delta de Dirac, fica:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) + y_c \theta(\hat{x}) - \left[V_y(x) v_r^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_r'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{yr}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zr}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) w_r^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) w_r'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_{yr}^*(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[V_{zr}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[T_r^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_r^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_r^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_r'^*(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_r^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) v_r^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_r^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.153}$$

Na segunda etapa faz-se a ponderação da equação governante real pelos deslocamentos $v_p^*(x, \hat{x})$, $w_p^*(x, \hat{x})$ e ângulo de torção $\theta_p^*(x, \hat{x})$ quando apenas a fonte de força em y for ativada ($p_z^*(x, \hat{x}) = 0$, $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m^*(x, \hat{x}) = 0$):

$$\int_0^L \left[\begin{array}{ccc} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_1 y_c \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_1 z_c \\ -S_1 y_c & S_1 z_c & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{array} \right\} - [A] \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_p^* \\ v_p^* \\ \theta_p^* \end{array} \right\} dx = 0
\tag{7.154}$$

Após a utilização de convenientes integrações por partes e adequadas substituições nas relações constitutivas Eq. (7.131) na Eq. (7.154), resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [D_{1z} v_p^{****} - S_1 v_p^* + S_{3z} v_p^{**} + S_1 z_c \theta_p^*] v(x) dx + \\
& \int_0^L [D_{1y} w_p^{****} - S_1 w_p^* + S_{3z} w_p^{**} - S_1 y_c \theta_p^*] w(x) dx + \\
& \int_0^L [D_2 \theta_p^{****} + (S_4 - D_3) \theta_p^{**} - S_2 \theta_p^* + S_1 z_c v_p^* - S_1 y_c w_p^*] \theta(x) dx + \\
& [V_{yp}^* v(x)]_0^L + [M_{zp}^* v'(x)]_0^L - [V_z(x) w_p^*]_0^L + [M_y(x) w_p^{*'}]_0^L - [V_y(x) v_p^*]_0^L - [M_z(x) v_p^{*'}]_0^L \\
& + [V_{zp}^* w(x)]_0^L - [M_{yp}^* w'(x)]_0^L - [T(x) \theta_p^*]_0^L + [T_p^* \theta(x)]_0^L + [B(x) \theta_p^{*'}]_0^L - [B_p^* \theta'(x)]_0^L = \\
& \int_0^L p_y(x) v_p^* dx + \int_0^L p_z(x) w_p^* dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_p^* dx
\end{aligned} \tag{7.155}$$

Estando apenas p_y^* ativado, tem-se:

$$\begin{aligned}
& D_{1y} w_p^{****} - S_1 w_p^* + S_{3y} w_p^{**} - S_1 y_c \theta_p^* = 0, \quad D_{1z} v_p^{****} - S_1 v_p^* + S_{3z} v_p^{**} + S_1 z_c \theta_p^* = \delta(x, \hat{x}) \\
& \text{e, } D_2 \theta_p^{****} + (S_4 - D_3) \theta_p^{**} - S_2 \theta_p^* - S_1 y_c w_p^* + S_1 z_c v_p^* = -z_c \delta(x, \hat{x}),
\end{aligned}$$

que ao serem substituídas na Eq. (7.155) combinadas com a propriedade do delta de Dirac fica:

$$\begin{aligned}
& v(\hat{x}) - z_c \theta(\hat{x}) - [V_y(x) v_p^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_z(x) v_p^{*'}(x, \hat{x})]_0^L + \\
& [V_{yp}^*(x, \hat{x}) v(x)]_0^L + [M_{zp}^*(x, \hat{x}) v'(x)]_0^L - [V_z(x) w_p^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& [M_y(x) w_p^{*'}(x, \hat{x})]_0^L - [M_{yp}^*(x, \hat{x}) w'(x)]_0^L + [V_{zp}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L + \\
& [T_p^*(x, \hat{x}) \theta(x)]_0^L - [T(x) \theta_p^*(x, \hat{x})]_0^L - [B_p^*(x, \hat{x}) \theta'(x)]_0^L + [B(x) \theta_p^{*'}(x, \hat{x})]_0^L \\
& = \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) v_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.156}$$

Na terceira etapa faz-se a ponderação da equação governante real pelos deslocamentos $v_t^*(x, \hat{x})$, $w_t^*(x, \hat{x})$ e ângulo de torção $\theta_t^*(x, \hat{x})$ quando apenas a fonte de torque for ativada ($p_z^*(x, \hat{x}) = 0$, $p_y^*(x, \hat{x}) = 0$ e $t^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$):

$$\int_0^L \begin{bmatrix} D_{1y} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3y} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & 0 & -S_1 y_c \\ 0 & D_{1z} \frac{d^4}{dx^4} + S_{3z} \frac{d^2}{dx^2} - S_1 & S_1 z_c \\ -S_1 y_c & S_1 z_c & D_2 \frac{d^4}{dx^4} + (S_4 - D_3) \frac{d^2}{dx^2} - S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} - [A] \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ p_y(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_t^* \\ v_t^* \\ \theta_t^* \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (7.157)$$

Após a utilização de convenientes integrações por partes e adequadas substituições nas relações constitutivas Eq. (7.131) na Eq. (7.157), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_0^L [D_{1z} v_t^{*''''} - S_1 v_t^* + S_{3z} v_t^{*''} + S_1 z_c \theta_t^*] v(x) dx + \\ & \int_0^L [D_{1y} w_t^{*''''} - S_1 w_t^* + S_{3y} w_t^{*''} - S_1 y_c \theta_t^*] w(x) dx + \\ & \int_0^L [D_2 \theta_t^{*''''} + (S_4 - D_3) \theta_t^{*''} - S_2 \theta_t^* + S_1 z_c v_t^* - S_1 y_c w_t^*] \theta(x) dx + \\ & [V_{yt}^* v(x)]_0^L + [M_{zt}^* v'(x)]_0^L - [V_z(x) w_t^*]_0^L + [M_y(x) w_t^{*'}]_0^L - [M_z(x) v_t^{*'}]_0^L - [V_y(x) v_t^*]_0^L + \\ & [V_{zt}^* w(x)]_0^L - [M_{yt}^* w'(x)]_0^L - [T(x) \theta_t^*]_0^L + [T_t^* \theta(x)]_0^L + [B(x) \theta_t^{*'}]_0^L - [B_t^* \theta'(x)]_0^L = \\ & \int_0^L p_y(x) v_t^* dx + \int_0^L p_z(x) w_t^* dx + \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_t^* dx \end{aligned} \quad (7.158)$$

Estando apenas t^* ativado, as equações governantes fundamentais Eq. (7.129) ficam:

$$D_{1y} w_t^{*''''} - S_1 w_t^{*''} + S_{3y} w_t^* - S_1 y_c \theta_t^* = 0, \quad D_{1z} v_t^{*''''} - S_1 v_t^{*''} + S_{3z} v_t^* + S_1 z_c \theta_t^* = 0$$

$$\text{e, } D_2 \theta_t^{*''''} + (S_4 - D_3) \theta_t^{*''} - S_2 \theta_t^* - S_1 y_c w_t^* + S_1 z_c v_t^* = \delta(x, \hat{x}),$$

que ao serem substituídas na Eq. (7.158) combinadas com a propriedade do delta de Dirac fica:

$$\begin{aligned}
& \theta(\hat{x}) - \left[V_y(x) v_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{yt}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zt}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) w_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) w_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_{yt}^*(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[V_{zt}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[T_t^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_t^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_t^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_t^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_t^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) v_t^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_t^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.159}$$

A equação integral do empenamento é obtida pela derivação em $\hat{x}$ da Eq. (7.159), resultando em:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\theta(\hat{x})}{d\hat{x}} - \left[V_y(x) v_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) v_{t,\hat{x}}^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[V_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[M_{zt,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) w_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) w_{t,\hat{x}}^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_{yt,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[V_{zt,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[T_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \theta_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[B_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \theta_{t,\hat{x}}^{*'}(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \theta_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) v_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_{t,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.160}$$

Para a completa definição do problema tri-acoplado são necessárias seis equações integrais ($v, w, \theta, dv/d\hat{x}, dw/d\hat{x}, d\theta/d\hat{x}$). Para o estabelecimento das derivadas das duas primeiras equações integrais faz-se inicialmente o isolamento dessas nas respectivas expressões Eqs. (7.153), (7.156) e (7.159), seguida da diferenciação independente em cada uma delas. Assim, após esse algebrismo, as quatro equações integrais (as duas de deslocamentos e suas derivadas) ficam:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) - \left[V_y(x) \overline{v_r^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) \overline{v_r^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{V_{yr}^*}(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[\overline{M_{zr}^*}(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) \overline{w_r^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) \overline{w_r^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{M_{yr}^*}(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[\overline{V_{zr}^*}(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{T_r^*}(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \overline{\theta_r^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{B_r^*}(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \overline{\theta_r^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \overline{\theta_r^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) \overline{v_r^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) \overline{w_r^*}(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.161}$$

onde $\overline{v_r^*} = v_r^* - y_c v_t^*$, $\overline{w_r^*} = w_r^* - y_c w_t^*$, $\overline{\theta_r^*} = \theta_r^* - y_c \theta_t^*$, etc.

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} - \left[V_y(x) \overline{v_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) \overline{v_{r,\hat{x}}^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{V_{yr,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[\overline{M_{zr,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) \overline{w_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) \overline{w_{r,\hat{x}}^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{M_{yr,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[\overline{V_{zr,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{T_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \overline{\theta_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{B_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \overline{\theta_{r,\hat{x}}^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \overline{\theta_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) \overline{v_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) \overline{w_{r,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.162}$$

onde $\overline{v_{r,\hat{x}}^*} = v_{r,\hat{x}}^* - y_c v_{t,\hat{x}}^*$, $\overline{w_{r,\hat{x}}^*} = w_{r,\hat{x}}^* - y_c w_{t,\hat{x}}^*$, $\overline{\theta_{r,\hat{x}}^*} = \theta_{r,\hat{x}}^* - y_c \theta_{t,\hat{x}}^*$, etc.

$$\begin{aligned}
& v(\hat{x}) - \left[V_y(x) \overline{v_p^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) \overline{v_p^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{V_{yp}^*}(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[\overline{M_{zp}^*}(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) \overline{w_p^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) \overline{w_p^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{M_{yp}^*}(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[\overline{V_{zp}^*}(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{T_p^*}(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{B_p^*}(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \overline{\theta_p^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \overline{\theta_p^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) \overline{v_p^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) \overline{w_p^*}(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.163}$$

onde $\overline{v_p^*} = v_p^* + z_c v_t^*$, $\overline{w_p^*} = w_p^* + z_c w_t^*$, $\overline{\theta_p^*} = \theta_p^* + z_c \theta_t^*$, etc.

$$\begin{aligned}
& \frac{dv(\hat{x})}{d\hat{x}} - \left[V_y(x) \overline{v_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_z(x) \overline{v_{p,\hat{x}}^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{V_{yp,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) v(x) \right]_0^L + \left[\overline{M_{zp,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) v'(x) \right]_0^L - \left[V_z(x) \overline{w_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\
& \left[M_y(x) \overline{w_{p,\hat{x}}^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{M_{yp,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) w'(x) \right]_0^L + \left[\overline{V_{zp,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \\
& \left[\overline{T_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \theta(x) \right]_0^L - \left[T(x) \overline{\theta_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\overline{B_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) \theta'(x) \right]_0^L + \left[B(x) \overline{\theta_{p,\hat{x}}^*}'(x, \hat{x}) \right]_0^L = \\
& \int_0^L \{t(x) - z_c p_y(x) + y_c p_z(x)\} \overline{\theta_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_y(x) \overline{v_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) \overline{w_{p,\hat{x}}^*}(x, \hat{x}) dx
\end{aligned} \tag{7.164}$$

onde $\overline{v_{p,\hat{x}}^*} = v_{p,\hat{x}}^* + z_c v_{t,\hat{x}}^*$, $\overline{w_{p,\hat{x}}^*} = w_{p,\hat{x}}^* + z_c w_{t,\hat{x}}^*$, $\overline{\theta_{p,\hat{x}}^*} = \theta_{p,\hat{x}}^* + z_c \theta_{t,\hat{x}}^*$, etc.

As equações integrais Eqs. (7.157), (7.158), (7.159), (7.160), (7.162), (7.163) e (7.164) podem ser reagrupadas na ordem em equações matriciais sob a forma:

$$\{u(\hat{x})\} + [A_R] \mathbb{I}[\tilde{h}] \{u(x)\}_{x=0}^{x=L} = [A_R] \mathbb{I}[\tilde{g}] \{p(x)\}_{x=0}^{x=L} + [A_R] \{b\} \tag{7.164}$$

onde:

$$[\tilde{h}] = \begin{bmatrix} V_{yp}^* & V_{zp}^* & T_p^* & -M_{yp}^* & M_{zp}^* & -B_p^* \\ V_{yr}^* & V_{zr}^* & T_r^* & -M_{yr}^* & M_{zr}^* & -B_r^* \\ V_{yt}^* & V_{zt}^* & T_t^* & -M_{yt}^* & M_{zt}^* & -B_t^* \\ V_{yr,\hat{x}}^* & V_{zr,\hat{x}}^* & T_{r,\hat{x}}^* & -M_{yr,\hat{x}}^* & M_{zr,\hat{x}}^* & -B_{r,\hat{x}}^* \\ V_{yp,\hat{x}}^* & V_{zp,\hat{x}}^* & T_{p,\hat{x}}^* & -M_{yp,\hat{x}}^* & M_{zp,\hat{x}}^* & -B_{p,\hat{x}}^* \\ V_{yt,\hat{x}}^* & V_{zt,\hat{x}}^* & T_{t,\hat{x}}^* & -M_{yt,\hat{x}}^* & M_{zt,\hat{x}}^* & -B_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{g}] = \begin{bmatrix} v_p^* & w_p^* & \theta_p^* & -w_p^{*'} & v_p^{*'} & -\theta_p^{*'} \\ v_r^* & w_r^* & \theta_r^* & -w_r^{*'} & v_r^{*'} & -\theta_r^{*'} \\ v_t^* & w_t^* & \theta_t^* & -w_t^{*'} & v_t^{*'} & -\theta_t^{*'} \\ v_{r,\hat{x}}^* & w_{r,\hat{x}}^* & \theta_{r,\hat{x}}^* & -w_{r,\hat{x}}^{*'} & v_{r,\hat{x}}^{*'} & -\theta_{r,\hat{x}}^{*'} \\ v_{p,\hat{x}}^* & w_{p,\hat{x}}^* & \theta_{p,\hat{x}}^* & -w_{p,\hat{x}}^{*'} & v_{p,\hat{x}}^{*'} & -\theta_{p,\hat{x}}^{*'} \\ v_{t,\hat{x}}^* & w_{t,\hat{x}}^* & \theta_{t,\hat{x}}^* & -w_{t,\hat{x}}^{*'} & v_{t,\hat{x}}^{*'} & -\theta_{t,\hat{x}}^{*'} \end{bmatrix},$$

$$\{b\} = \int_0^L [u]^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_y(x) \\ p_z(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} dx,$$

$$[A_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{u(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \\ dw(x)/dx \\ dv(x)/dx \\ d\theta(x)/dx \end{Bmatrix},$$

$$\{p(x)\} = \begin{Bmatrix} V_y(x) \\ V_z(x) \\ T(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \\ B(x) \end{Bmatrix} \text{ e}$$

$$[u^*] = \begin{bmatrix} v_p^* & w_p^* & \theta_p^* \\ v_r^* & w_r^* & \theta_r^* \\ v_t^* & w_t^* & \theta_t^* \\ v_{r,\hat{x}}^* & w_{r,\hat{x}}^* & \theta_{r,\hat{x}}^* \\ v_{p,\hat{x}}^* & w_{p,\hat{x}}^* & \theta_{p,\hat{x}}^* \\ v_{t,\hat{x}}^* & w_{t,\hat{x}}^* & \theta_{t,\hat{x}}^* \end{bmatrix}$$

Quando o ponto-fonte for colocado na extremidade inicial $\hat{x} \rightarrow 0$, então $\{u(\hat{x})\} = \{u\}_i$; agora, se a colocação for na outra extremidade $\hat{x} \rightarrow L$ então $\{u(\hat{x})\} = \{u\}_j$. Ainda sabendo-se que $\{p(0)\} = \{p\}_i$, $\{b(0)\} = \{b\}_i$, $\{p(L)\} = \{p\}_j$ e $\{b(L)\} = \{b\}_j$ um sistema algébrico pode ser obtido a partir da colocação em Eq(7.164a) e expresso como:

$$\begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[H]_{ii} & [H]_{ij} \\ -[H]_{ji} & [H]_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G]_{ii} & [G]_{ij} \\ -[G]_{ji} & [G]_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}_i \\ \{p\}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{b\}_i \\ \{b\}_j \end{Bmatrix} \quad (7.165)$$

Onde as matrizes de influência e vetores nodais em (7.165) ficam

$$[H_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{15Ls} & \alpha_{13Ls} & \alpha_{17Ls} & -\alpha_{14L} & \alpha_{16L} & -\alpha_{18L} \\ \alpha_{3Ls} & \alpha_{1Ls} & \alpha_{5Ls} & -\alpha_{2L} & \alpha_{4L} & -\alpha_{6L} \\ \alpha_{27Ls} & \alpha_{25Ls} & \alpha_{29Ls} & -\alpha_{26L} & \alpha_{28L} & -\alpha_{30L} \\ \alpha_{9L} & \alpha_{7L} & \alpha_{11L} & -\alpha_{8Ls} & \alpha_{10Ls} & -\alpha_{12Ls} \\ \alpha_{21L} & \alpha_{19L} & \alpha_{23L} & -\alpha_{20Ls} & \alpha_{22Ls} & -\alpha_{24Ls} \\ \alpha_{33L} & \alpha_{31L} & \alpha_{35L} & -\alpha_{32Ls} & \alpha_{34Ls} & -\alpha_{36Ls} \end{bmatrix}$$

$$[H_{ii}] = [H_{jj}] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[H_{ji}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_{15Ls} & -\alpha_{13Ls} & -\alpha_{17Ls} & -\alpha_{14L} & \alpha_{16L} & -\alpha_{18L} \\ -\alpha_{3Ls} & -\alpha_{1Ls} & -\alpha_{5Ls} & -\alpha_{2L} & \alpha_{4L} & -\alpha_{6L} \\ -\alpha_{27Ls} & -\alpha_{25Ls} & -\alpha_{29Ls} & -\alpha_{26L} & \alpha_{28L} & -\alpha_{30L} \\ \alpha_{9L} & \alpha_{7L} & \alpha_{11L} & \alpha_{8Ls} & -\alpha_{10Ls} & \alpha_{12Ls} \\ \alpha_{21L} & \alpha_{19L} & \alpha_{23L} & \alpha_{20Ls} & -\alpha_{22Ls} & \alpha_{24Ls} \\ \alpha_{33L} & \alpha_{31L} & \alpha_{35L} & \alpha_{32Ls} & -\alpha_{34Ls} & \alpha_{36Ls} \end{bmatrix}$$

(7.166a-d)

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{15L} & \beta_{13L} & \beta_{17L} & -\beta_{14Ls} & \beta_{16Ls} & -\beta_{18Ls} \\ \beta_{3L} & \beta_{1L} & \beta_{5L} & -\beta_{2Ls} & \beta_{4Ls} & -\beta_{6Ls} \\ \beta_{27L} & \beta_{25L} & \beta_{29L} & -\beta_{26Ls} & \beta_{28Ls} & -\beta_{30Ls} \\ \beta_{9Ls} & \beta_{7Ls} & \beta_{11Ls} & -\beta_{8L} & \beta_{10L} & -\beta_{12L} \\ \beta_{21Ls} & \beta_{19Ls} & \beta_{23Ls} & -\beta_{20L} & \beta_{22L} & -\beta_{24L} \\ \beta_{33Ls} & \beta_{31Ls} & \beta_{35Ls} & -\beta_{32L} & \beta_{34L} & -\beta_{36L} \end{bmatrix}$$

$$[G_{ji}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{15L} & \beta_{13L} & \beta_{17L} & \beta_{14Ls} & -\beta_{16Ls} & \beta_{18Ls} \\ \beta_{3L} & \beta_{1L} & \beta_{5L} & \beta_{2Ls} & -\beta_{4Ls} & \beta_{6Ls} \\ \beta_{27L} & \beta_{25L} & \beta_{29L} & \beta_{26Ls} & -\beta_{28Ls} & \beta_{30Ls} \\ -\beta_{9Ls} & -\beta_{7Ls} & -\beta_{11Ls} & -\beta_{8L} & \beta_{10L} & -\beta_{12L} \\ -\beta_{21Ls} & -\beta_{19Ls} & -\beta_{23Ls} & -\beta_{20L} & \beta_{22L} & -\beta_{24L} \\ -\beta_{33Ls} & -\beta_{31Ls} & -\beta_{35Ls} & -\beta_{32L} & \beta_{34L} & -\beta_{36L} \end{bmatrix}$$

$$[G_{ii}] = [G_{jj}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.167a-d)$$

$$\{u_i\} = \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ dw_i/dx \\ dv_i/dx \\ d\theta_i/dx \end{bmatrix}, \quad \{u_j\} = \begin{bmatrix} v_j \\ w_j \\ \theta_j \\ dw_j/dx \\ dv_j/dx \\ d\theta_j/dx \end{bmatrix}, \quad \{p_i\} = \begin{bmatrix} V_{yi} \\ V_{zi} \\ T_i \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ B_i \end{bmatrix}, \quad \{p_j\} = \begin{bmatrix} V_{yj} \\ V_{zj} \\ T_j \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ B_j \end{bmatrix} \quad (7.168a-d)$$

As constantes α , β utilizadas nas matrizes de influência de deslocamentos e de esforços em (7.165) são:

$$\alpha_{1Ls} = -\frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [a_1\lambda_1ch_1 + a_2\lambda_2ch_2 + a_5\lambda_5ch_5 + a_3\lambda_3\cos_3 + a_4\lambda_4\cos_4 + a_6\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{2L} = -\frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [a_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + a_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + a_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - a_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - a_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - a_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{3Ls} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [e_{1y}\lambda_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_{2y}\lambda_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_{5y}\lambda_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + e_{3y}\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + e_{4y}\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_{6y}\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6]$$

$$\alpha_{4L} = -\frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [e_{1y}\lambda_1sh_1 + e_{2y}\lambda_2sh_2 + e_{5y}\lambda_5sh_5 + e_{3y}\lambda_3sen_3 + e_{4y}\lambda_4sen_4 + e_{6y}\lambda_6sen_6]$$

$$\alpha_{5Ls} = \frac{D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [\gamma_1ch_1 + \gamma_2ch_2 + \gamma_5ch_5 + \gamma_3\cos_3 + \gamma_4\cos_4 + \gamma_6\cos_6]$$

$$\alpha_{6L} = -\frac{D_2}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[d_1\lambda_1sh_1 + d_2\lambda_2sh_2 + d_5\lambda_5sh_5 + d_3\lambda_3sen_3 + d_4\lambda_4sen_4 + d_6\lambda_6sen_6]$$

$$\alpha_{7L} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[e_{1y}\lambda_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + e_{2y}\lambda_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + e_{5y}\lambda_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 \\ - e_{3y}\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - e_{4y}\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - e_{6y}\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{8Ls} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[a_1\lambda_1ch_1 + a_2\lambda_2ch_2 + a_5\lambda_5ch_5 + a_3\lambda_3\cos_3 + a_4\lambda_4\cos_4 + a_6\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{9L} = -\frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[e_{1y}\lambda_1^2sh_1 + e_{2y}\lambda_2^2sh_2 + e_{5y}\lambda_5^2sh_5 + e_{3y}\lambda_3^2sen_3 + e_{4y}\lambda_4^2sen_4 + e_{6y}\lambda_6^2sen_6]$$

$$\alpha_{10Ls} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[e_{1y}\lambda_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_{2y}\lambda_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_{5y}\lambda_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + \\ e_{3y}\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + e_{4y}\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_{6y}\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6]$$

$$\alpha_{11L} = \frac{-D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[\gamma_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + \gamma_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + \gamma_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - \gamma_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - \gamma_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - \gamma_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{12Ls} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[d_1\lambda_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + d_2\lambda_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + d_5\lambda_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + \\ d_3\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + d_4\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + d_6\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6]$$

$$\alpha_{13Ls} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[e_1\lambda_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_2\lambda_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_5\lambda_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + \\ e_3\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + e_4\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_6\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6]$$

$$\alpha_{14L} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[e_1\lambda_1sh_1 + e_2\lambda_2sh_2 + e_5\lambda_5sh_5 + e_3\lambda_3sen_3 + e_4\lambda_4sen_4 + e_6\lambda_6sen_6]$$

$$\alpha_{15Ls} = \frac{-D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}}[a_{1y}\lambda_1ch_1 + a_{2y}\lambda_2ch_2 + a_{5y}\lambda_5ch_5 + a_{3y}\lambda_3\cos_3 + a_{4y}\lambda_4\cos_4 + a_{6y}\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{16L} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}\sqrt{\lambda_1}sh_1 + a_{2y}\sqrt{\lambda_2}sh_2 + a_{5y}\sqrt{\lambda_5}sh_5 \right. \\ \left. - a_{y3}\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - a_{4y}\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - a_{y6}\sqrt{-\lambda_6}sen_6 \right]$$

$$\alpha_{17Ls} = -\frac{D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\gamma_{1y}ch_1 + \gamma_{2y}ch_2 + \gamma_{5y}ch_5 + \gamma_{3y}\cos_3 + \gamma_{4y}\cos_4 + \gamma_{6y}\cos_6 \right]$$

$$\alpha_{18L} = \frac{D_2}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\lambda_1sh_1 + d_{2y}\lambda_2sh_2 + d_{5y}\lambda_5sh_5 + d_{3y}\lambda_3sen_3 + d_{4y}\lambda_4sen_4 + d_{6y}\lambda_6sen_6 \right] \quad (7.169a-s)$$

$$\alpha_{19L} = -\frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\lambda_1^2sh_1 + e_2\lambda_2^2sh_2 + e_5\lambda_5^2sh_5 + e_3\lambda_3^2sen_3 + e_4\lambda_4^2sen_4 + e_6\lambda_6^2sen_6 \right]$$

$$\alpha_{20Ls} = -\frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\lambda_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_2\lambda_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_5\lambda_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + \right. \\ \left. e_3\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + e_4\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_6\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right]$$

$$\alpha_{21L} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}\lambda_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + a_{2y}\lambda_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + a_{5y}\lambda_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 \right. \\ \left. - a_{3y}\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - a_{4y}\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - a_{6y}\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6 \right]$$

$$\alpha_{22Ls} = \frac{-D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}\lambda_1ch_1 + a_{2y}\lambda_2ch_2 + a_{5y}\lambda_5ch_5 + a_{3y}\lambda_3\cos_3 + a_{4y}\lambda_4\cos_4 + a_{6y}\lambda_6\cos_6 \right]$$

$$\alpha_{23L} = \frac{D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\gamma_{1y}\sqrt{\lambda_1}sh_1 + \gamma_{2y}\sqrt{\lambda_2}sh_2 + \gamma_{5y}\sqrt{\lambda_5}sh_5 - \gamma_{3y}\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - \gamma_{4y}\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - \gamma_{6y}\sqrt{-\lambda_6}sen_6 \right]$$

$$\alpha_{24Ls} = -\frac{D_2}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\lambda_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + d_{2y}\lambda_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + d_{5y}\lambda_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + \right. \\ \left. d_{3y}\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + d_{4y}\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + d_{6y}\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right]$$

$$\alpha_{25Ls} = \frac{-D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_1\lambda_1ch_1 + b_2\lambda_2ch_2 + b_5\lambda_5ch_5 + b_3\lambda_3\cos_3 + b_4\lambda_4\cos_4 + b_6\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{26L} = \frac{-D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + b_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + b_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - b_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - b_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - b_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{27Ls} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_{1y}\lambda_1ch_1 + b_{2y}\lambda_2ch_2 + b_{5y}\lambda_5ch_5 + b_{3y}\lambda_3\cos_3 + b_{4y}\lambda_4\cos_4 + b_{6y}\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{28L} = \frac{-D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_{1y}\sqrt{\lambda_1}senh_1 + b_{2y}\sqrt{\lambda_2}sh_2 + b_{5y}\sqrt{\lambda_5}sh_5 - b_{3y}\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - b_{4y}\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - b_{6y}\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{29Ls} = \frac{D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [\beta_1ch_1 + \beta_2ch_2 + \beta_5ch_5 + \beta_3\cos_3 + \beta_4\cos_4 + \beta_6\cos_6]$$

$$\alpha_{30L} = -\frac{D_2}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [c_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + c_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + c_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - c_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - c_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - c_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{31L} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_1\lambda_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + b_2\lambda_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + b_5\lambda_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - b_3\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - b_4\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - b_6\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{32Ls} = \frac{D_{1y}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_1\lambda_1ch_1 + b_2\lambda_2ch_2 + b_5\lambda_5ch_5 + b_3\lambda_3\cos_3 + b_4\lambda_4\cos_4 + b_6\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{33L} = \frac{-D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_{1y}\lambda_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + b_{2y}\lambda_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + b_{5y}\lambda_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - b_{3y}\lambda_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - b_{4y}\lambda_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - b_{6y}\lambda_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\alpha_{34Ls} = \frac{D_{1z}}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_{1y}\lambda_1ch_1 + b_{2y}\lambda_2ch_2 + b_{5y}\lambda_5ch_5 + b_{3y}\lambda_3\cos_3 + b_{4y}\lambda_4\cos_4 + b_{6y}\lambda_6\cos_6]$$

$$\alpha_{35L} = \frac{-D_3}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\gamma_1 \sqrt{\lambda_1} sh_1 + \gamma_2 \sqrt{\lambda_2} sh_2 + \gamma_5 \sqrt{\lambda_5} sh_5 - \gamma_3 \sqrt{-\lambda_3} sen_3 - \gamma_4 \sqrt{-\lambda_4} sen_4 - \gamma_6 \sqrt{-\lambda_6} sen_6 \right]$$

$$\alpha_{36Ls} = \frac{D_2}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[c_1 \lambda_1 ch_1 + c_2 \lambda_2 ch_2 + c_5 \lambda_5 ch_5 + c_3 \lambda_3 \cos_3 + c_4 \lambda_4 \cos_4 + c_6 \lambda_6 \cos_6 \right] \quad (7.170a-s)$$

$$\beta_{1L} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{a_1 sh_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{a_2 sh_2}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{a_3 sen_3}{\sqrt{-\lambda_3}} + \frac{a_4 sen_4}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{a_5 sh_5}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{a_6 sen_6}{\sqrt{-\lambda_6}} \right]$$

$$\beta_{2Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1 ch_1 + a_2 ch_2 + a_3 \cos_3 + a_4 \cos_4 + a_5 ch_5 + a_6 \cos_6 \right]$$

$$\beta_{3L} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y} sh_1 + e_{2y} sh_2 + e_{3y} sen_3 + e_{4y} sen_4 + e_{5y} sh_5 + e_{6y} sen_6 \right]$$

$$\beta_{4Ls} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y} \sqrt{\lambda_1} ch_1 + e_{2y} \sqrt{\lambda_2} ch_2 + e_{3y} \sqrt{-\lambda_3} \cos_3 + e_{4y} \sqrt{-\lambda_4} \cos_4 + e_{5y} \sqrt{\lambda_5} ch_5 + e_{6y} \sqrt{-\lambda_6} \cos_6 \right]$$

$$\beta_{5L} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1 sh_1 + d_2 sh_2 + d_3 sen_3 + d_4 sen_4 + d_5 sh_5 + d_6 sen_6 \right]$$

$$\beta_{6Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1 \sqrt{\lambda_1} ch_1 + d_2 \sqrt{\lambda_2} ch_2 + d_3 \sqrt{-\lambda_3} \cos_3 + d_4 \sqrt{-\lambda_4} \cos_4 + d_5 \sqrt{\lambda_5} ch_5 + d_6 \sqrt{-\lambda_6} \cos_6 \right]$$

$$\beta_{7Ls} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1 ch_1 + a_2 ch_2 + a_3 \cos_3 + a_4 \cos_4 + a_5 ch_5 + a_6 \cos_6 \right]$$

$$\beta_{8L} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_1 \sqrt{\lambda_1} sh_1 + a_2 \sqrt{\lambda_2} sh_2 + a_5 \sqrt{\lambda_5} sh_5 - a_3 \sqrt{-\lambda_3} sen_3 - a_4 \sqrt{-\lambda_4} sen_4 - a_6 \sqrt{-\lambda_6} sen_6 \right]$$

$$\begin{aligned}
\beta_{9Ls} &= \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_{2y}\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_{3y}\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + \right. \\
&\quad \left. e_{4y}\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_{5y}\sqrt{\lambda_5}ch_5 + e_{6y}\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right] \\
\beta_{10L} &= \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_{1y}\lambda_1sh_1 + e_{2y}\lambda_2sh_2 + e_{5y}\lambda_5sh_5 - e_{3y}\lambda_3sen_3 - e_{4y}\lambda_4sen_4 - e_{6y}\lambda_6sen_6 \right] \\
\beta_{11Ls} &= -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + d_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + d_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + d_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + d_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + d_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right] \\
\beta_{12L} &= -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_1\lambda_1sh_1 + d_2\lambda_2sh_2 + d_5\lambda_5sh_5 - d_3\lambda_3sen_3 - d_4\lambda_4sen_4 - d_6\lambda_6sen_6 \right] \\
\beta_{13L} &= -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1sh_1 + e_2sh_2 + e_3sen_3 + e_4sen_4 + e_5sh_5 + e_6sen_6 \right] \\
\beta_{14Ls} &= -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + e_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + e_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right] \\
\beta_{15L} &= \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{a_{1y}sh_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{a_{2y}sh_2}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{a_{3y}sen_3}{\sqrt{-\lambda_3}} + \frac{a_{4y}sen_4}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{a_{5y}sh_5}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{a_{6y}sen_6}{\sqrt{-\lambda_6}} \right] \\
\beta_{16Ls} &= \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}ch_1 + a_{2y}ch_2 + a_{3y}\cos_3 + a_{4y}\cos_4 + a_{5y}ch_5 + a_{6y}\cos_6 \right] \\
\beta_{17L} &= -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}sh_1 + d_{2y}sh_2 + d_{3y}sen_3 + d_{4y}sen_4 + d_{5y}sh_5 + d_{6y}sen_6 \right] \\
\beta_{18Ls} &= -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\sqrt{\lambda_1}ch_1 + d_{2y}\sqrt{\lambda_2}ch_2 + d_{3y}\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + \right. \\
&\quad \left. d_{4y}\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + d_{5y}\sqrt{\lambda_5}ch_5 + d_{6y}\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right]
\end{aligned}$$

(7.171a-s)

$$\beta_{19Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\sqrt{\lambda_1}ch_1 + e_2\sqrt{\lambda_2}ch_2 + e_3\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + \right. \\ \left. e_4\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + e_5\sqrt{\lambda_5}ch_5 + e_6\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right]$$

$$\beta_{20L} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[e_1\lambda_1sh_1 + e_2\lambda_2sh_2 + e_5\lambda_5sh_5 - e_3\lambda_3sen_3 - e_4\lambda_4sen_4 - e_6\lambda_6sen_6 \right]$$

$$\beta_{21Ls} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}ch_1 + a_{2y}ch_2 + a_{3y}\cos_3 + a_{4y}\cos_4 + a_{5y}ch_5 + a_{6y}\cos_6 \right]$$

$$\beta_{22L} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[a_{1y}\sqrt{\lambda_1}sh_1 + a_{2y}\sqrt{\lambda_2}sh_2 + a_{5y}\sqrt{\lambda_5}sh_5 \right. \\ \left. - a_{3y}\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - a_{4y}\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - a_{6y}\sqrt{-\lambda_6}sen_6 \right]$$

$$\beta_{23Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\sqrt{\lambda_1}ch_1 + d_{2y}\sqrt{\lambda_2}ch_2 + d_{3y}\sqrt{-\lambda_3}\cos_3 + \right. \\ \left. d_{4y}\sqrt{-\lambda_4}\cos_4 + d_{5y}\sqrt{\lambda_5}ch_5 + d_{6y}\sqrt{-\lambda_6}\cos_6 \right]$$

$$\beta_{24L} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[d_{1y}\lambda_1sh_1 + d_{2y}\lambda_2sh_2 + d_{5y}\lambda_5sh_5 + d_{3y}\lambda_3sen_3 + d_{4y}\lambda_4sen_4 + d_{6y}\lambda_6sen_6 \right]$$

$$\beta_{25L} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{b_1sh_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{b_2sh_2}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{b_3sen_3}{\sqrt{-\lambda_3}} + \frac{b_4sen_4}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{b_5sh_5}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{b_6sen_6}{\sqrt{-\lambda_6}} \right]$$

$$\beta_{26Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[b_1ch_1 + b_2ch_2 + b_3\cos_3 + b_4\cos_4 + b_5ch_5 + b_6\cos_6 \right]$$

$$\beta_{27L} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[\frac{b_{1y}sh_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{b_{2y}sh_2}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{b_{3y}sen_3}{\sqrt{-\lambda_3}} + \frac{b_{4y}sen_4}{\sqrt{-\lambda_4}} + \frac{b_{5y}sh_5}{\sqrt{\lambda_5}} + \frac{b_{6y}sen_6}{\sqrt{-\lambda_6}} \right]$$

$$\beta_{28Ls} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} \left[b_{1y}ch_1 + b_{2y}ch_2 + b_{3y}\cos_3 + b_{4y}\cos_4 + b_{5y}ch_5 + b_{6y}\cos_6 \right]$$

$$\beta_{30Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [c_1ch_1 + c_2ch_2 + c_3 \cos_3 + c_4 \cos_4 + c_5ch_5 + c_6 \cos_6]$$

$$\beta_{31Ls} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_1ch_1 + b_2ch_2 + b_3 \cos_3 + b_4 \cos_4 + b_5ch_5 + b_6 \cos_6]$$

$$\beta_{32L} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + b_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + b_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - b_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - b_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - b_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\beta_{33Ls} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_{1y}ch_1 + b_{2y}ch_2 + b_{3y} \cos_3 + b_{4y} \cos_4 + b_{5y}ch_5 + b_{6y} \cos_6]$$

$$\beta_{34L} = \frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [b_{1y}\sqrt{\lambda_1}sh_1 + b_{2y}\sqrt{\lambda_2}sh_2 + b_{5y}\sqrt{\lambda_5}sh_5 - b_{3y}\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - b_{4y}\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - b_{6y}\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

$$\beta_{35Ls} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [c_1ch_1 + c_2ch_2 + c_3 \cos_3 + c_4 \cos_4 + c_5ch_5 + c_6 \cos_6]$$

$$\beta_{36L} = -\frac{1}{2D_2D_{1z}D_{1y}} [c_1\sqrt{\lambda_1}sh_1 + c_2\sqrt{\lambda_2}sh_2 + c_5\sqrt{\lambda_5}sh_5 - c_3\sqrt{-\lambda_3}sen_3 - c_4\sqrt{-\lambda_4}sen_4 - c_6\sqrt{-\lambda_6}sen_6]$$

(7.172a-s)

onde: $sh_1 = \sinh(L\sqrt{\lambda_1})$, $sh_2 = \sinh(L\sqrt{\lambda_2})$, $sh_5 = \sinh(L\sqrt{\lambda_5})$, $sen_3 = \sin(L\sqrt{-\lambda_3})$, $sen_4 = \sin(L\sqrt{-\lambda_4})$, $sen_6 = \sin(L\sqrt{-\lambda_6})$, $ch_1 = \cosh(L\sqrt{\lambda_1})$, $ch_2 = \cosh(L\sqrt{\lambda_2})$, $ch_5 = \cosh(L\sqrt{\lambda_5})$, $\cos_3 = \cos(L\sqrt{-\lambda_3})$, $\cos_4 = \cos(L\sqrt{-\lambda_4})$, $\cos_6 = \cos(L\sqrt{-\lambda_6})$. As demais constantes nas Eqs. (7.171) e (7.172) já foram definidas nas Eqs. (7.145), (7.146) e (7.150).

*A sabedoria da natureza é tal
que ela não produz nada de
supérfluo ou inútil.
Nicolau Copérnico*

Capítulo VIII

APLICAÇÕES

8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados das análises estáticas e dinâmicas de vários tipos de estruturas reticuladas a partir da formulação do MEC proposta. As teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko são utilizadas e uma análise de interação solo estrutura é realizada.

Resultados de análises de barras de paredes finas e seção aberta nas quais se aplicam a teoria da flexo-torção de Vlasov integram também as aplicações que compoem este capítulo.

Sempre que possível os resultados obtidos são validados a partir daqueles apresentados na literatura ou calculados por programas computacionais já consagrados.

8.2 ANÁLISES ESTÁTICAS

Este item é composto por resultados da análise de estruturas reticuladas em regime estático, que são idealizadas tanto assentes em sapatas rígidas e solo indeformável quanto em solo deformável. Vigas de paredes finas e seção aberta, chamadas de núcleos, são também analisadas.

8.2.1 Análise Estática de PP e de PE Apoiados em Sapatas Rígidas e Indeslocáveis

Resultados de interesse das análises dos pórticos da Fig. 8.1 e da Fig. 8.2 são apresentados nas Tab. 8.1 a 8.8. Estes resultados são validados a partir dos valores encontrados em Queiroz (2010).

- **Análise estática de pórtico plano apoiado em sapatas rígidas e indeslocáveis**

Dados relativos ao pórtico plano indicado na Fig. 8.1 (Gere e Weaver, 1981): $P = 44,48 \text{ kN}$ (10 kip), $E = 6,867 \times 10^4 \text{ MPa}$ (10000 ksi), $A = 6,452 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ (10 in²), $I_z = 4,162 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ (1000 in⁴) e $L = 2,54 \text{ m}$ (100 in).

Aqui são calculados os deslocamentos e esforços nas extremidades das barras (1) e (2) para os modelos de Euler-Bernoulli, Tab. 8.1 e 8.2, e de Timoshenko, Tab. 8.3 e 8.4.

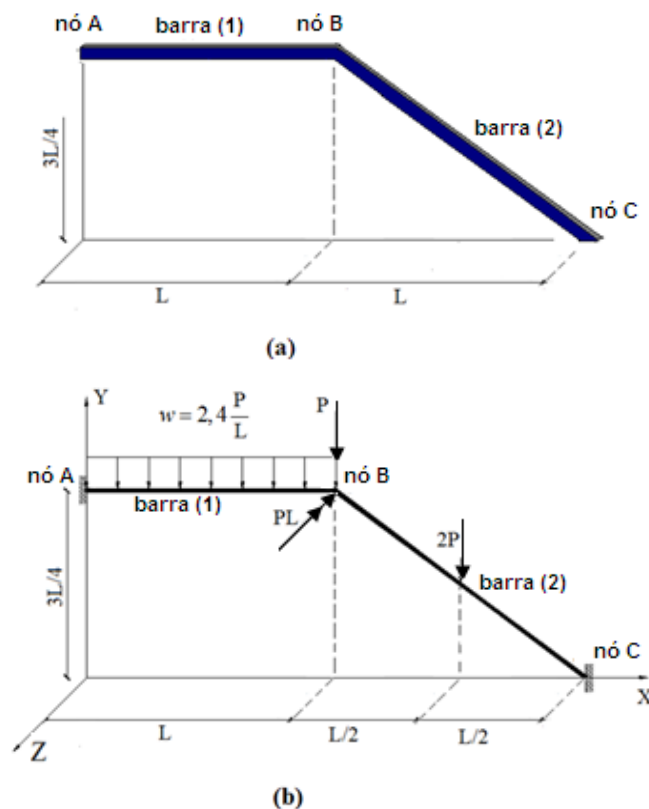


Figura 8.1 – Pórtico plano, carregamento, discretização e SCG
(Adaptada de GERE e WEAVER, 1981)

Notar que nas Tab. 8.1 a Tab.8.4 a notação utilizada para a representação das grandezas nas extremidades das barras referidas ao SCL tem o seguinte significado: $dx_A^{(1)}$ e $\phi_C^{(2)}$: deslocamento segundo o eixo x do SCL da extremidade da barra (1) que se liga ao nó A; rotação segundo o eixo z da extremidade da barra (2), que se liga ao nó C; $f_{xA}^{(1)}$ e $m_{zC}^{(2)}$: força na extremidade da barra (1) que se liga ao nó A (eixo x do SCL) e momento segundo o eixo z (SCL) na extremidade da barra (2) que se liga ao nó C.

Tabela 8.1 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PP no SCL

Barra (1) (Teoria de Euler-Bernoulli)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_A^{(1)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{xA}^{(1)}$	90,1165	90,1165
$dy_A^{(1)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{yA}^{(1)}$	58,4467	58,4467
$\varphi_A^{(1)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{zA}^{(1)}$	49,3267	49,3267
$dx_B^{(1)}$	-5,1460E-04	-5,1460E-04	$f_{xB}^{(1)}$	-90,1165	-90,1165
$dy_B^{(1)}$	-25,237E-04	-25,237E-04	$f_{yB}^{(1)}$	48,3053	48,3053
$\varphi_B^{(1)}$	-1,7981E-03	-1,7981E-03	$m_{zB}^{(1)}$	-36,4810	-36,4810

Tabela 8.2 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PP no SCL

Barra (2) (Teoria de Euler-Bernoulli)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_B^{(2)}$	11,0261E-04	11,0261E-04	$f_{xB}^{(2)}$	127,7466	127,7466
$dy_B^{(2)}$	-23,2765E-04	-23,2765E-04	$f_{yB}^{(2)}$	-20,1494	-20,1494
$\varphi_B^{(2)}$	-1,7981E-03	-1,7981E-03	$m_{zB}^{(2)}$	-76,4982	-76,4982
$dx_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{xC}^{(2)}$	-181,1670	-181,1670
$dy_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{yC}^{(2)}$	91,3174	91,3174
$\varphi_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{zC}^{(2)}$	-100,4950	-100,4950

Tabela 8.3 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PP no SCL

Barra (1) (Teoria de Timoshenko)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_A^{(1)}$	0,0000	0,0000	$f_A^{(1)}$	115,2330	115,2330
$dy_A^{(1)}$	0,0000	0,0000	$f_{yA}^{(1)}$	20,3165	20,3165
$\varphi_A^{(1)}$	0,0000	0,0000	$m_{zA}^{(1)}$	-2,9174E-03	-2,9174E-03
$dx_B^{(1)}$	-6,5803E-04	-6,5803E-04	$f_{xB}^{(1)}$	-115,2330	-115,2330
$dy_B^{(1)}$	-3,391954	-3,391954	$f_{yB}^{(1)}$	109,6699	109,6699
$\varphi_B^{(1)}$	-4,2664E-03	-4,2664E-03	$m_{zB}^{(1)}$	-112,7769	-112,7769

Tabela 8.4 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PP no SCL

Barra (2) (Teoria de Timoshenko)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_B^{(2)}$	1,5087-E03	1,5087-E03	$f_{xB}^{(2)}$	184,6710	184,6710
$dy_B^{(2)}$	-3,0700-E03	-3,0700-E03	$f_{yB}^{(2)}$	-54,1816	-54,1816
$\varphi_B^{(2)}$	-4,2663-E03	-4,2663-E03	$m_{zB}^{(2)}$	-0,1972	-0,1972
$dx_C^{(2)}$	0,0000	0,0000	$f_{xC}^{(2)}$	-238,0446	-238,0446
$dy_C^{(2)}$	0,0000	0,0000	$f_{yC}^{(2)}$	58,9898	58,9898
$\varphi_C^{(2)}$	0,0000	0,0000	$m_{zC}^{(2)}$	-132,1851	-132,1851

- **Análise estática de pórtico espacial apoiado em sapatas rígidas e indeslocáveis**

Dados relativos ao pórtico espacial indicado na Fig. 8.2 (Gere e Weaver, 1981): $P = 4,45 \text{ kN}$ (1 kip), $E = 2,060 \times 10^5 \text{ MPa}$ (30000 ksi), $G = 8,240 \times 10^4 \text{ MPa}$ (12000 ksi), $A = 7,097 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (11 in²), $I_x = 3,455 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (83 in⁴), $I_y = 2,331 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (56 in⁴), $I_z = 2,331 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (56 in⁴) e $L = 3,048 \text{ m}$ (120 in).

Desse pórtico são calculados os deslocamentos e esforços nas extremidades das barras (1) e (2) para os modelos de Euler-Bernoulli, Tab. 8.5 e 8.6, e de Timoshenko, Tab. 8.7 e 8.8.

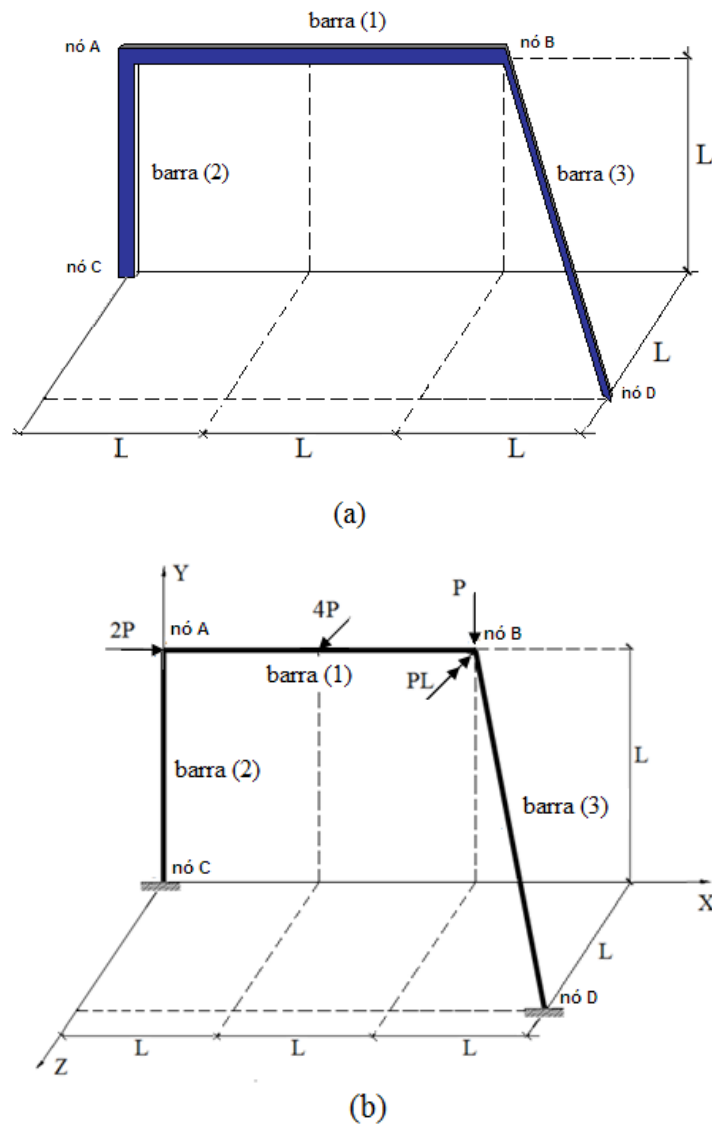


Figura 8.2 - Pórtico espacial, carregamento, discretização e SCG
(Adaptada de GERE e WEAVER, 1981)

O SCG do pórtico espacial, Fig.8.2, bem como o SCL das suas barras (1) e (2) estão mostrados na Fig. 8.3.

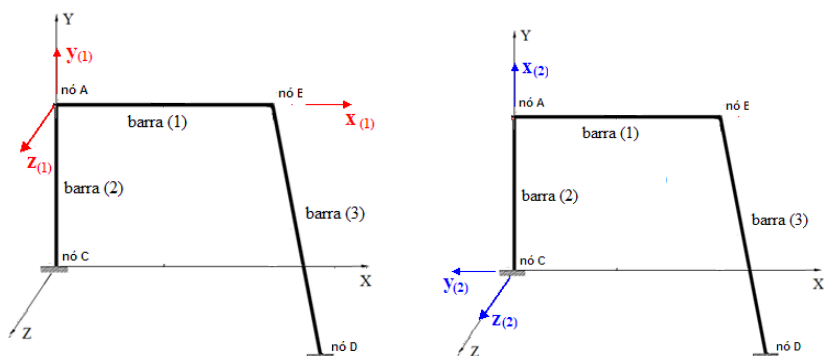


Figura 8.3 - Pórtico da Fig.8.2, SCG e SCL da barra (1) e da barra (2)

Tabela 8.5 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PE, no SCL

Barra (1) (Teoria de Euler-Bernoulli)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_A^{(1)}$	-3,8811E-03	-3,8811E-03	$f_{xA}^{(1)}$	8,4957	8,4957
$dy_A^{(1)}$	-6,1874E-06	-6,1874E-06	$f_{yA}^{(1)}$	-2,9802	-2,9802
$dz_A^{(1)}$	1,5908E-02	1,5908E-02	$f_{zA}^{(1)}$	-9,0294	-9,0294
$\theta_A^{(1)}$	0,7536E-02	0,7536E-02	$m_{xA}^{(1)}$	1,8529	1,8529
$\phi_A^{(1)}$	-0,5463E-02	-0,5463E-02	$m_{yA}^{(1)}$	5,1225	5,1225
$\varphi_A^{(1)}$	0,2674E-02	0,2674E-02	$m_{zA}^{(1)}$	-4,8299	-4,8299
$dx_B^{(1)}$	-3,9167E-03	-3,9167E-03	$f_{xB}^{(1)}$	-8,4957	-8,4957
$dy_B^{(1)}$	1,1587E-02	1,1587E-02	$f_{yB}^{(1)}$	2,9802	2,9802
$dz_B^{(1)}$	1,5593E-02	1,5593E-02	$f_{zB}^{(1)}$	-8,7626	-8,7626
$\theta_B^{(1)}$	0,3584E-02	0,3584E-02	$m_{xB}^{(1)}$	-1,8529	-1,8529
$\phi_B^{(1)}$	0,5748E-02	0,5748E-02	$m_{yB}^{(1)}$	-4,2604	-4,2604
$\varphi_B^{(1)}$	-0,2701E-02	-0,2701E-02	$m_{zB}^{(1)}$	-13,3315	-13,3315

Notar que enquanto $\langle dx_A^{(1)} \quad dy_A^{(1)} \quad dz_A^{(1)} \quad \theta_A^{(1)} \quad \phi_A^{(1)} \quad \varphi_A^{(1)} \rangle^T$ é o vetor dos deslocamentos e rotações, $\langle f_{xA}^{(1)} \quad f_{yA}^{(1)} \quad f_{zA}^{(1)} \quad m_{xA}^{(1)} \quad m_{yA}^{(1)} \quad m_{zA}^{(1)} \rangle^T$ é o vetor das forças e momentos na extremidade da barra (1), que se liga ao nó A, referido ao SCL.

Os deslocamentos e rotações e as forças e momentos da outra extremidade da barra, a que se liga ao nó B, são representados por vetores semelhantes, respectivamente, aos anteriormente indicados, tendo o índice A substituído por B.

Tabela 8.6 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PE, no SCL

Barra (2) (Teoria de Euler-Bernoulli)					
Deslocamentos (m, rad)			Deslocamentos (m, rad)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{xC}^{(2)}$	-2,9802	-2,9802
$dy_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{yC}^{(2)}$	0,4003	0,4003
$dz_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{zC}^{(2)}$	-9,0294	-9,0294
$\theta_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{xC}^{(2)}$	5,1225	5,1225
$\phi_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{yC}^{(2)}$	25,6926	25,6926
$\varphi_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{zC}^{(2)}$	-3,6278	-3,6278
$dx_A^{(2)}$	6,1874E-06	6,1874E-06	$f_{xA}^{(2)}$	2,9802	2,9802
$dy_A^{(2)}$	3,8811E-03	3,8811E-03	$f_{yA}^{(2)}$	-0,4003	-0,4003
$dz_A^{(2)}$	1,5908E-02	1,5908E-02	$f_{zA}^{(2)}$	9,0294	9,0294
$\theta_A^{(2)}$	-0,5463E-02	-0,5463E-02	$m_{xA}^{(2)}$	-5,1225	-5,1225
$\phi_A^{(2)}$	-0,7536E-02	-0,7536E-02	$m_{yA}^{(2)}$	1,8529	1,8529
$\varphi_A^{(2)}$	0,2674E-02	0,2674E-02	$m_{zA}^{(2)}$	4,8297	4,8297

Analogamente, $\left\langle dx_C^{(2)} \quad dy_C^{(2)} \quad dz_C^{(2)} \quad \theta_C^{(2)} \quad \phi_C^{(2)} \quad \varphi_C^{(2)} \right\rangle^T$ é o vetor dos deslocamentos enquanto $\left\langle f_{xC}^{(2)} \quad f_{yC}^{(2)} \quad f_{zC}^{(2)} \quad m_{xC}^{(2)} \quad m_{yC}^{(2)} \quad m_{zC}^{(2)} \right\rangle^T$ é o vetor das forças e momentos na extremidade da barra (2) que se liga ao nó C, referidos ao SCL.

Os deslocamentos e rotações e as forças e momentos da outra extremidade da barra, a que se liga ao nó B, são representados por vetores semelhantes, respectivamente, aos anteriormente indicados, tendo o índice C substituído por A.

Tabela 8.7 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (1) do PE, no SCL

Barra (1) (Teoria de Timoshenko)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_A^{(1)}$	-3,8786E-03	-3,8786E-03	$f_{xA}^{(1)}$	8,5035	8,5035
$dy_A^{(1)}$	6,1851E-06	6,1851E-06	$f_{yA}^{(1)}$	-2,9786	-2,9786
$dz_A^{(1)}$	1,5963E-02	1,5963E-02	$f_{zA}^{(1)}$	-9,0358	-9,0358
$\theta_A^{(1)}$	7,5353E-03	7,5353E-03	$m_{xA}^{(1)}$	1,8519	1,8519
$\phi_A^{(1)}$	-5,4573E-03	-5,4573E-03	$m_{yA}^{(1)}$	5,1175	5,1175
$\varphi_A^{(1)}$	2,6726E-03	2,6726E-03	$m_{zA}^{(1)}$	-4,8255	-4,8255
$dx_B^{(1)}$	-3,9139E-03	-3,9139E-03	$f_{xB}^{(1)}$	-8,5035	-8,5035
$dy_B^{(1)}$	1,1606E-02	1,1606E-02	$f_{yB}^{(1)}$	2,9786	2,9786
$dz_B^{(1)}$	1,5609E-02	1,5609E-02	$f_{zB}^{(1)}$	9,0358	9,0358
$\theta_B^{(1)}$	3,5854E-03	3,5854E-03	$m_{xB}^{(1)}$	-1,8519	-1,8519
$\phi_B^{(1)}$	5,7536E-03	5,7536E-03	$m_{yB}^{(1)}$	-4,2651	-4,2651
$\varphi_B^{(1)}$	-2,7055E-03	-2,7055E-03	$m_{zB}^{(1)}$	-13,3321	-13,3321

Tabela 8.8 - Deslocamentos e esforços nas extremidades da barra (2) do PE, no SCL

Barra (2) (Teoria de Timoshenko)					
Deslocamentos (m, rad)			Esforços (kN, kNm)		
GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)	GDL	Obtidos	(QUEIROZ, 2010)
$dx_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{xC}^{(2)}$	-2,9786	-2,9786
$dy_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{yC}^{(2)}$	0,3925	0,3925
$dz_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$f_{zC}^{(2)}$	-9,0358	-9,0358
$\theta_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{xC}^{(2)}$	5,1175	5,1175
$\phi_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{yC}^{(2)}$	25,6892	25,6892
$\varphi_C^{(2)}$	0,0000E 00	0,0000E 00	$m_{zC}^{(2)}$	-3,6292	-3,6292
$dx_A^{(2)}$	6,1851E-06	6,1851E-06	$f_{xA}^{(2)}$	2,9786	2,9786
$dy_A^{(2)}$	3,8786E-03	3,8786E-03	$f_{yA}^{(2)}$	-0,3925	-0,3925
$dz_A^{(2)}$	15,9628E-03	15,9628E-03	$f_{zA}^{(2)}$	9,0358	9,0358
$\theta_A^{(2)}$	-5,4573E-03	-5,4573E-03	$m_{xA}^{(2)}$	-5,1175	-5,1175
$\phi_A^{(2)}$	-7,5353E-03	-7,5353E-03	$m_{yA}^{(2)}$	1,8519	1,8519
$\varphi_A^{(2)}$	2,6726E-03	2,6726E-03	$m_{zA}^{(2)}$	4,8255	4,8255

8.2.2 Análise Estática de Barras de Núcleo (seção bi-simétrica)

As duas estruturas de paredes finas analisadas têm as mesmas características geométricas e físicas, sendo: $L = 4,0m$, $A = 23,75cm^2$, $E = 2,10 \times 10^6 N / cm^2$; $G = 0,80 \times 10^6 N / cm^2$, $Y_{CT} = Z_{CT} = 0,0 cm$, $I_t = 2cm^4$ e $I_\omega = 20736cm^6$.

As Tabs. 8.9 e 8.10 mostram os esforços (momento torçor e bimomento) e os deslocamentos (rotações e empenamentos), respectivamente, calculados nas extremidades das barras (a) e (b) da Fig. 8.4. Os resultados analíticos nelas indicados foram extraídos de MORI E NETO (2009). Nesta Fig. 8.4, também, são indicados os carregamentos das estruturas dessas barras de núcleo.

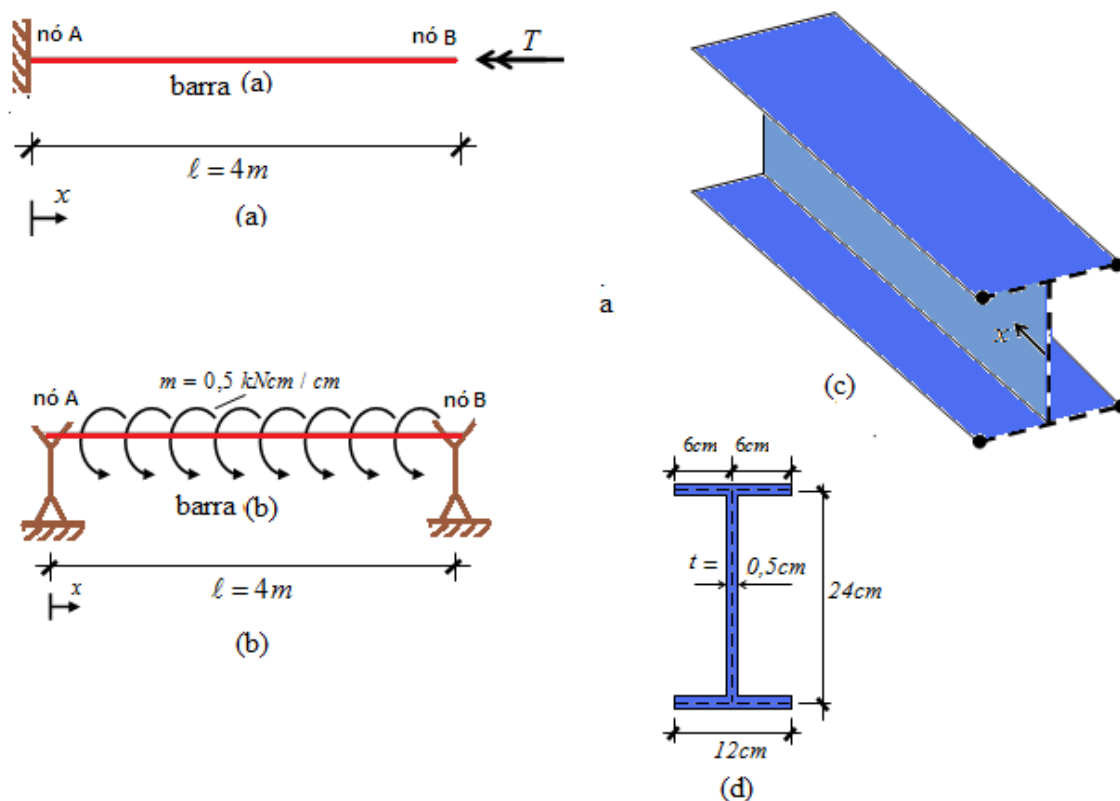


Figura 8.4 – Barras de paredes finas com seção bissimétrica (perfil I)
(Adaptada de MORI e NETO, 2009)

Tabela 8.9 - Resultados para as extremidades da barra (a)

Viga (a) – Engastada-livre					
Torção/Bimomento (kN.cm, kN.cm ²)			Rotações/Empenamento (rad/cm)		
GDL	Obtidos	Analíticos	GDL	Obtidos	Mori e Neto (2009)
T_A	-50,0000	-50,0000	θ_A	0,000000	0,000000
B_A	-8120,4020	-8120,4018	ψ_A	0,000000	0,000000
T_B	50,0000	50,0000	θ_B	-0,7424750	-0,7424749
B_B	0,0000	0,0000	ψ_B	-2,5761614E-03	-2,5761614E-03

Tabela 8.10 - Resultados para as extremidades da viga (b)

Viga (b) – Bi-apoiada (vínculos de garfo)					
Torção/Bimomento (kN.cm, kN.cm ²)			Rotações/Empenamento (rad/cm)		
GDL	Obtidos	Mori e Neto (2009)	GDL	Obtidos	Mori e Neto (2009)
T_A	100,0000	100,0000	θ_A	0,0000	0,0000
B_A	0,0000	0,0000	ψ_A	1,933000E-03	1,933001E-03
T_B	-100,0000	-100,0000	θ_B	0,0000	0,0000
B_B	0,0000	0,0000	ψ_B	-1,933000E-03	-1,933001E-03

Onde: $[T_A \ T_B \ B_A \ B_B]^T$ e $[\theta_A \ \theta_B \ \psi_A \ \psi_B]^T$ são os vetores dos momentos torçores e bimomentos e das rotações e empenamentos nas extremidades da barra.

É importante notar que o vínculo de garfo (da viga da Fig. (8.4b)) impede a rotação de torção da seção, permitindo o seu empenamento (MORI, 1993).

8.2.3 Análise Estática de Barras de Núcleo (seção mono-simétrica)

Para a viga mostrada na Fig. 8.5, admitindo vinculação tipo garfo nas suas extremidades, são determinados o momento de torção e o empenamento das seções nos apoios cujos, valores são apresentados na Tab. 8.11.

Os dados da estrutura são: comprimento $L = 4,50m$, área $A = 40,00cm^2$, módulo de elasticidade longitudinal, $E = 2,10 \times 10^6 kN/cm^2$; módulo de elasticidade transversal $G = 0,80 \times 10^6 kN/cm^2$, coordenadas do centro de torção $Y_{CT} = Z_{CT} = 0,00cm$, momento de inércia setorial $I_\omega = 41666,67cm^6$ e momento de inércia à torção $I_t = 13,33cm^4$ e bimomento $B = -5000kNcm^2$.

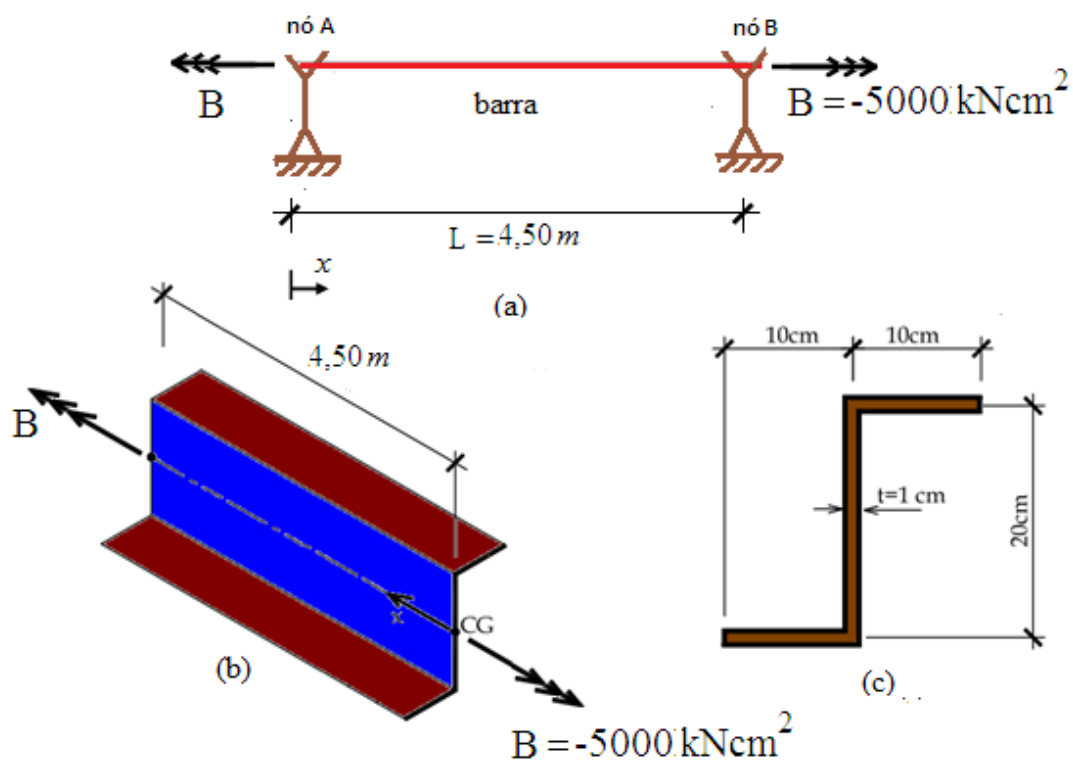


Figura 8.5 – Viga de paredes finas com seção mono-simétrica
(Adaptada de MORI, 1993)

Tabela 8.11 - Resultados para as extremidades da viga

Viga seção Z – Engastada-livre					
Torção/Bimomento (kN.cm, kN.cm²)			Rotações/Empenamento (rad/cm)		
GDL	Obtidos	Mori (1993)	GDL	Obtidos	Mori (1993)
T_A	0,00	0,00	θ_A	0,00	0,00
B_A	-5000	-5000	ψ_A	-0,04623	-0,04623
T_B	0,00	0,00	θ_B	0,00	0,00
B_B	-5000	-5000	ψ_B	0,04623	0,04623

8.2.4 Análise estática de interação solo-estrutura

Neste subitem serão apresentados resultados numéricos dos deslocamentos e reações nos apoios obtidos da análise estática de interação solo-estrutura de PP e PE.

Os pórticos são formados por vigas (seção 15cm x 45cm) e pilares (seção 20cm x 40cm), nestes a maior dimensão da seção transversal é paralela ao eixo Y e a menor, paralela ao eixo X do SCG da estrutura. Todas as barras horizontais e verticais têm $L = 4,00m$, $E = 28,00GPa$ e $G = 14,00GPa$. O solo é considerado meio contínuo semi-infinito, cujo módulo de elasticidade é 2 MPa e o coeficiente de Poisson 0,5.

As estruturas planas estão submetidos a 2 casos de carregamentos, onde $F_1 = 10,00kN$ e $F_2 = F_3 = 15,00kN$. CCI e CCII, indicam os casos de carregamento, como mostrado nas Figs.8.6, 8.7 e 8.8.

Além disso há que ser observado que nos pórticos da Fig. 8.6 cada sapata apoia apenas uma barra, enquanto nas estruturas das Figs 8.7 e 8.8 a cada sapata chegam duas barras. No caso da Fig. 8.7, os pórticos são formados por quatro barras de modo que cada sapata apoia uma barra vertical e a viga baldrame que interliga as duas sapatas. No outro caso, Fig. 8.8, cujos pórticos têm cinco barras, cada sapata é ligada aos dois nós não vinculados. Nos pórticos das Figs 8.9, 8.10 e 8.11, também podem ser observadas sapatas apoiando mais de uma barra. A existência de sapatas apoiando varias barras é relevante, pois no acoplamento solo-estrutura a compatibilidade de deslocamentos e rotações bem como o equilíbrio de forças e momentos no nó de ligação sapata-barras deve levar em conta a participação dessas barras.

Devido à dificuldade na obtenção de resultados na literatura para a validação dos valores obtidos na AISE aqui realizada, pelo menos um dos casos de carregamentos foi adotado de modo a permitir concluir, devido a sua simetria, sobre as relações entre as reações do solo nas extremidades das barras da estrutura, que se apoiam nas sapatas, bem como sobre as relações entre os deslocamentos desses elementos individuais de fundação.

As forças estão representadas por F e os momentos por M , os deslocamentos por D , os índices x , y ou z que os especificam indicam o eixo do SCG (indicado em cada uma das figuras) da ação do vetor de cada uma dessas grandezas. As rotações segundo os eixos x , y e z estão representadas, respectivamente, por: θ , ϕ e φ . Observa-se que nas Tabs. 8.12, 8.14, 8.16, 8.18, 8.20 e 8.22 estão apresentadas as forças e os momentos reativos do

solo em cada sapata. Os deslocamentos lineares e as rotações estão indicados nas Tabs. 8.13, 8.15, 8.17, 8.19, 8.21 e 8.23.

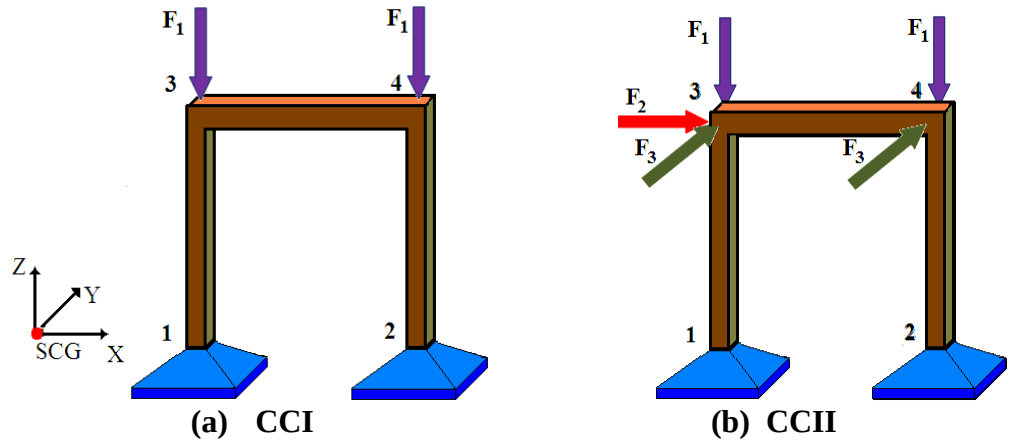


Figura 8.6 - Estrutura unifilar espacial com três barras

Tabela 8.12 - Reações de Apoio no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.6

CC	Nó 1			Nó 2		
	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$
	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$
I	1,6448E-2	-6,4050E-5	1,0000E+1	-1,6448E-2	6,4050E-5	1,0000E+1
	8,8328E-4	6,6154E-2	-1,2802E-4	-8,8328E-4	-6,6154E-2	-1,2802E-4
II	-7,4877E+0	-1,5000E+1	-6,8419E0	-7,5123E+0	-1,5000E+1	2,6842E+1
	7,5001E+1	-3,6191E+0	9,8335E-2	7,4999E+1	-3,8809E+0	-9,8336E-2

Tabela 8.13 - Deslocamentos nos Apoios no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.6

CC	Nó 1			Nó 2		
	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$
	θ (rad)	ϕ (rad)	φ (rad)	θ (rad)	ϕ (rad)	φ (rad)
I	-6,0910E-7	6,5191E-9	-3,2147E-4	6,0910E-7	-6,5191E-9	-3,2147E-4
	-1,4405E-8	-4,5064E-7	1,2784E-8	1,4405E-8	4,5064E-7	1,2784E-8
II	3,6347E-4	6,8987E-4	1,2160E-4	3,6438E-4	6,8986E-4	-7,6455E-4
	-8,0517E-3	5,5126E-4	-2,3377E-6	-8,0517E-3	5,5006E-4	2,3079E-6

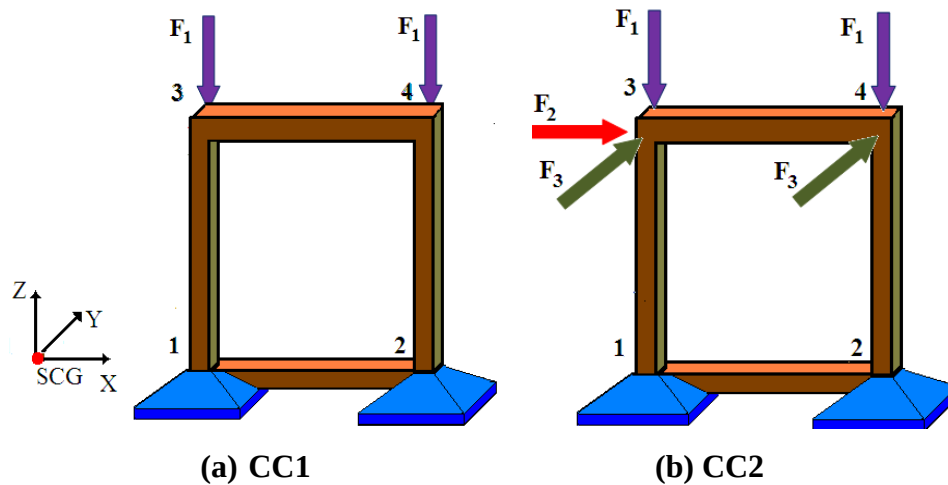


Figura 8.7 – Estrutura unifilar espacial com quatro barras

Tabela 8. 14 - Reações de Apoio no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.7

CC	Nó 1			Nó 2		
	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$
	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$
I	7,2635E-2	-5,7268E-6	1,0000E+1	-7,2635E-2	5,7268E-6	1,0000E+1
	8,6363E-4	6,1473E-2	1,1453E-5	-8,6363E-4	-6,1473E-2	1,1453E-5
II	-7,4101E+0	-1,5000E+1	-8,3089E+0	-7,5898E+0	-1,5000E+1	2,8309E+1
	6,5001E+1	-8,2258E-1	-4,6751E-1	5,4999E+1	-9,4175E-1	4,6758E-1

Tabela 8.15 - Deslocamentos nos Apoios no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.7

CC	Nó 1			Nó 2		
	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$
	θ (rad)	ϕ (rad)	φ (rad)	θ (rad)	ϕ (rad)	φ (rad)
I	-2,6897E-6	1,7704E-8	-3,2148E-4	2,6897E-6	-1,7704E-8	-3,2148E-4
	-8,3391E-9	-9,5358E-7	-1,6783E-9	8,3392E-9	9,5358E-7	-1,6783E-9
II	3,6062E-4	6,9032E-4	1,5772E-4	3,6728E-4	6,9028E-4	-5,6386E-5
	-8,0465E-3	2,3989E-4	5,6386E-5	-8,0466E-3	2,3757E-4	-5,6386E-5

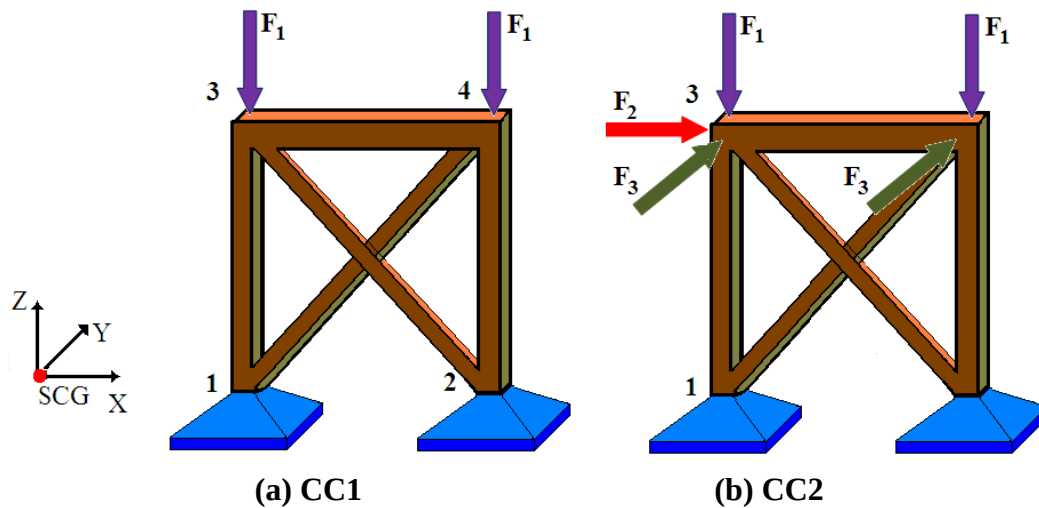


Figura 8.8 – Estrutura unifilar espacial com cinco barras

Tabela 8.16 - Reações de Apoio no da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.8

CC	Nó 1			Nó 2		
	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$
	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$
I	2,3219E-5	-1,7493E-6	1,0000E+1	-2,3219E-5	1,74930E-6	1,0000E+1
	1,0200E-3	6,8523E-2	-3,4986E-6	-1,0200E-3	-6,8523E-2	-3,4986E-6
II	-7,5000E+0	-1,5000E+1	-8,1285E+0	-7,5000E+0	-1,5000E+1	2,8128E+1
	6,0001E+1	5,8877E+0	1,1641E-1	5,9999E+1	6,5923E+0	-1,1642E-1

Tabela 8.17 - Deslocamentos nos Apoios no SCG da Estrutura Unifilar Espacial da Fig. 8.8

CC	Nó 1			Nó 2		
	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$
	θ (rad)	ϕ (rad)	φ (rad)	θ (rad)	ϕ (rad)	φ (rad)
I	-8,6037E-10	7,2959E-11	-3,2147E-4	8,6037E-10	-7,2959E-11	-3,2147E-4
	-3,9302E-9	-1,9641E-7	3,3313E-10	3,9302E-9	1,9641E-7	3,3313E-10
II	3,6393E-4	6,8985E-4	1,5328E-4	3,6393E-4	6,8985E-4	-7,9623E-4
	-8,0472E-3	-2,7739E-4	-6,1049E-7	-8,0472E-3	-2,7881E-4	6,0983E-7

A seguir são apresentadas algumas comentários sobre os resultados da análise dos pórticos indicadas nas Tabs 8.12, 8.13, 8.14, 8.15, 8.16 e 8.17. Tais considerações são fundamentadas no senso físico das respostas esperadas da estrutura observada quando nela atua um carregamento simétrico, o CCI, ou um carregamento assimétrico com algumas peculiaridades que aqui é chamado de CCII.

É importante observar que em cada uma das estruturas mostradas nas Figs. 8.6a, 8.7a e 8.8a, quando submetidas ao carregamento CCI, as reações de apoio na direção x têm a mesma intensidade, cujos sentidos garantam o equilíbrio de forças nesta direção, o mesmo acontecendo com as reações de apoio segundo a direção z . Já as reações na direção y verifica-se que elas têm a mesma intensidade porém sentidos opostos.

Quanto as reações em forças na direção x vê-se que elas atuam de modo a impedir que os nós 1 e 2 tendam a se afastar um do outro, sendo a reação no nó 1 positiva e a do nó 2 negativa.

No caso do carregamento CCII, Figs. 8.6b, 8.7b e 8.8b, as reações de apoio na direção x têm o mesmo sinal (negativo), o que garante o equilíbrio de forças segundo esta direção. Sendo, nestes casos, a reação no nó 1 menor em módulo que a atuante no nó 2. Em relação às reações verticais em cada uma das três estruturas, tem-se que a reação no nó 1 é sempre menor que a do nó 2. Já as reações horizontais em y têm sinais negativos sendo em todos os casos de mesma intensidade.

Qualquer que seja a estrutura analisada a da Fig. 8.6a, 8.7a ou a da Fig. 8.8a, tanto para o carregamento CCI como para o carregamento CCII, o equilíbrio de forças e momentos é observado em quaisquer das direções.

Em cada uma das coordenadas o deslocamento calculado sempre tem sinal oposto ao da reação de apoio (Tabs. 8.13, 8.15 e 8.17) o que é compatível com o fato de que elas decorrem da ação da estrutura sobre o solo. Além disso, verifica-se que para reações de apoios iguais em módulo os deslocamentos a elas associados são também iguais em módulo entre si.

Convém notar, ainda, que mesmo para o carregamento vertical simétrico os pórticos (Figs. 8.6a, 8.7a e 8.8a) sofrem rotação em torno do eixo y .

Os dois pórticos espaciais analisados também estão submetidos a 2 casos de carregamento com a aplicação das forças, $F_1 = 10,00kN$ e $F_2 = F_3 = 15,00kN$, conforme mostrado nas Fig. 8.9 e Fig. 8.10.

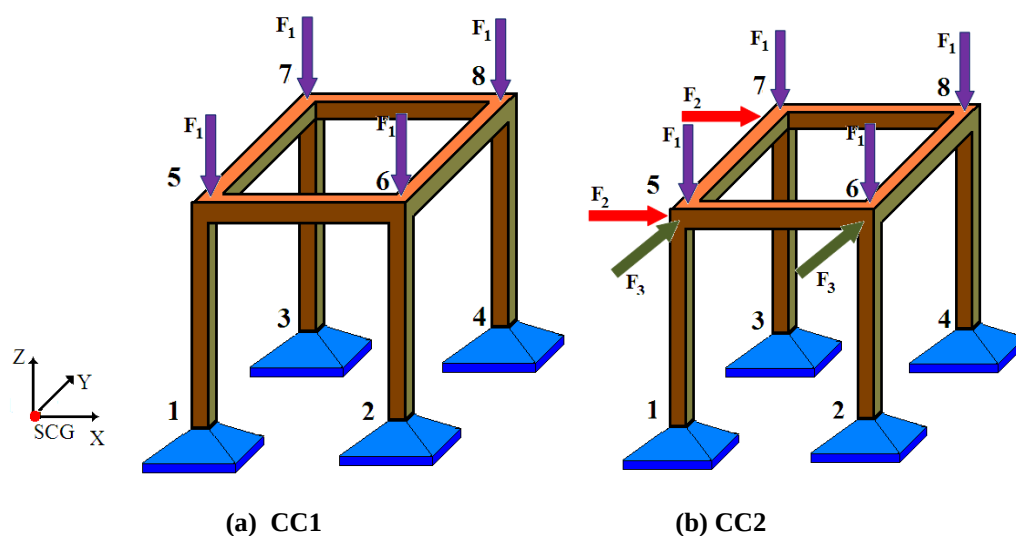


Figura 8.9 - Pórticos espaciais com oito barras

Tabela 8.18 - Reações de Apoio no SCG do Pórtico da Fig. 8.9

Esforços						
Nº	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$
CCI						
1	2,2084E-02	2,2084E-02	1,0000E+01	-8,8055E-02	8,8055E-02	1,3270E-15
2	-2,2084E-02	2,2084E-02	1,0000E+01	-8,8055E-02	-8,8055E-02	1,3270E-15
3	2,2084E-02	-2,2084E-02	1,0000E+01	8,8055E-02	8,8055E-02	-1,3270E-15
4	-2,2084E-02	-2,2084E-02	1,0000E+01	8,8055E-02	-8,8055E-02	-1,3270E-15
CCII						
1	-7,4454E+00	-7,4454E+00	-1,6478E+01	-3,4783E+00	3,4783E+00	-3,8844E-15
2	-7,5546E+00	-7,5171E+00	1,0000E+01	-3,3899E+00	3,5683E+00	-1,4381E-01
3	-7,5171E+00	-7,5546E+00	1,0000E+01	-3,5683E+00	3,3899E+00	1,4381E-01
4	-7,4829E+00	-7,4829E+00	3,6478E+01	-3,6515E+00	3,6515E+00	3,8844E-15

Tabela 8.19 - Deslocamentos nos Apoios no SCG do Pórtico da Fig. 8.9

Deslocamentos						
Nº	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$	$\Theta(rad)$	$\phi(rad)$	$\varphi(rad)$
CCI						
1	-7,8619E-07	-7,8619E-07	-3,7263E-04	-5,9143E-07	5,9143E-07	-9,4914E-20
2	8,1803E-07	-8,1803E-07	-3,7263E-04	6,1369E-07	6,1369E-07	-8,9522E-20
3	-8,1803E-07	8,1803E-07	-3,7263E-04	-6,1369E-07	-6,1369E-07	9,5812E-20
4	7,8619E-07	7,8619E-07	-3,7263E-04	-5,9143E-07	5,9143E-07	8,9522E-20
CCII						
1	4,1808E-04	4,1808E-04	3,5008E-04	3,9460E-04	-3,9460E-04	4,6286E-19
2	4,0693E-04	4,0554E-04	-3,7263E-04	3,9897E-04	-3,9743E-04	2,1846E-06
3	4,0554E-04	4,0693E-04	-3,7263E-04	3,9743E-04	-3,9897E-04	-2,1846E-06
4	4,1941E-04	4,1941E-04	-1,0953E-03	3,9310E-04	-3,9310E-04	4,6286E-19

É importante observar que os resultados tanto em esforços (forças e momentos) quanto em deslocamentos (deslocamentos lineares e rotações) nos apoios do pórtico da Fig. 8.9a, decorrentes da aplicação do carregamento CCI, refletem a simetria da estrutura e do carregamento.

Desse modo, por exemplo, as reações verticais nos apoios são iguais entre si, bem como as horizontais segundo as direções X e Y do SCG que sendo iguais em módulo atuam em sentidos que garantem o equilíbrio de forças e momentos.

No caso do carregamento CCII, que é assimétrico, porém apresenta certas peculiaridades, o que torna possível algumas conclusões, por exemplo: os deslocamentos lineares do apoio 2, D_X e D_Y devem ser iguais, na ordem, aos deslocamentos D_Y e D_X do apoio 3.

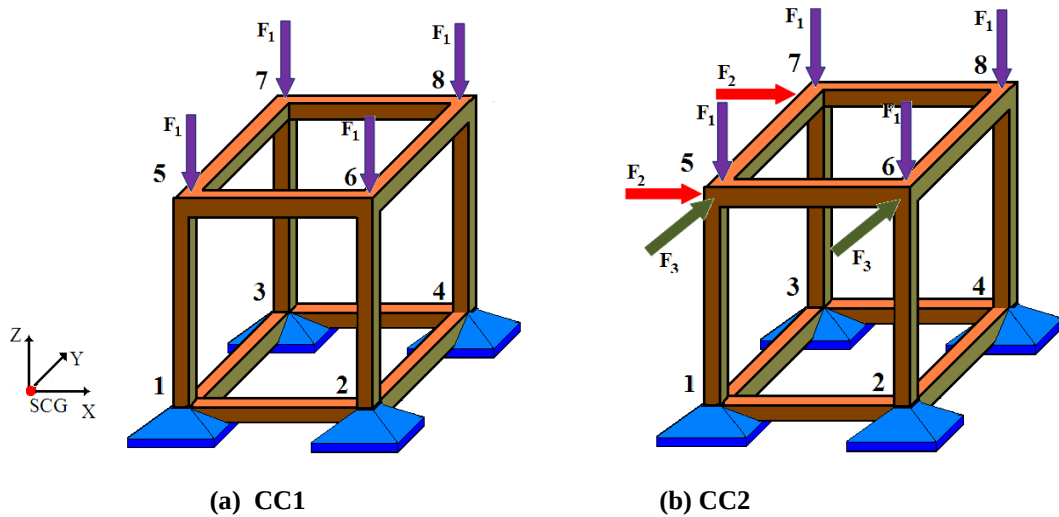


Figura 8.10 - Pórticos espaciais com doze barras

Tabela 8.20 - Reações de Apoio no SCG do Pórtico da Fig. 8.10

Esforços						
Nº	$F_X(kN)$	$F_Y(kN)$	$F_Z(kN)$	$M_X(kNm)$	$M_Y(kNm)$	$M_Z(kNm)$
CCI						
1	1,4271E-05	1,4271E-05	1,0000E+01	-9,1329E-02	9,1329E-02	1,2803E-13
2	-1,4271E-05	1,4271E-05	1,0000E+01	-9,1329E-02	-9,1329E-02	1,2803E-13
3	1,4271E-05	-1,4271E-05	1,0000E+01	9,1329E-02	9,1329E-02	-1,2803E-13
4	-1,4271E-05	-1,4271E-05	1,0000E+01	9,1329E-02	-9,1329E-02	-1,2803E-13
CCII						
1	-7,4796E 00	-7,4796E 00	-1,8098E 01	1,8746E 00	-1,8746E 00	-1,7658E-13
2	-7,5204E 00	-7,5204E 00	1,0000E 01	1,7442E 00	-1,9304E 00	-1,6209E-01
3	-7,5204E 00	-7,5204E 00	1,0000E+01	1,9304E 00	-1,7442E 00	1,6209E-01
4	-7,4796E 00	-7,4796E 00	3,8098E 01	2,0550E 00	-2,0550E 00	-1,3981E-13

Tabela 8.21 - Deslocamentos nos Apoios no SCG do Pórtico da Fig. 8.10

Deslocamentos						
Nº	$D_X(m)$	$D_Y(m)$	$D_Z(m)$	$\Theta(rad)$	$\phi(rad)$	$\varphi(rad)$
CCI						
1	-3,4248E-10	-3,4248E-10	-3,7262E-04	2,3265E-07	-2,3265E-07	-1,2350E-17
2	2,7487E-09	-2,7487E-09	-3,7262E-04	2,3741E-07	2,3741E-07	-1,2267E-17
3	-2,7487E-09	2,7487E-09	-3,7262E-04	2,3741E-07	-2,3741E-07	1,2239E-17
4	3,4248E-10	3,4248E-10	-3,7262E-04	2,3265E-07	2,3265E-07	1,2288E-17
CCII						
1	4,1233E-04	4,1233E-04	3,9055E-04	-2,2107E-04	2,2107E-04	1,7776E-17
2	4,1229E-04	4,1229E-04	-3,7262E-04	-2,2131E-04	2,2059E-04	-2,6021E-07
3	4,1229E-04	4,1229E-04	-3,7262E-04	-2,2059E-04	2,2131E-04	2,6021E-07
4	4,1233E-04	4,1233E-04	-1,1358E-03	-2,2036E-04	2,2036E-04	1,7818E-17

Tal como observado na análise do pórtico da Fig. 8.9a, neste caso quando da análise da estrutura da Fig. 8.10a, os resultados tanto em esforços (forças e momentos) quanto em deslocamentos (deslocamentos lineares e rotações) nos apoios, decorrentes da aplicação do carregamento CCI também refletem a simetria da estrutura e do carregamento.

No caso do carregamento CCII indicado na Fig. 8.10b sendo antissimétrico, em relação a um plano YZ, torna possível algumas conclusões, por exemplo: a) os deslocamentos do apoio 2, D_X e D_Y devem ser iguais em módulo, respectivamente, aos deslocamentos D_X e D_Y do apoio 3 e, b) os deslocamentos do apoio 1, D_X e D_Y devem ser iguais em módulo, respectivamente, aos deslocamentos D_X e D_Y do apoio 4.

8.3. ANÁLISE DINÂMICA

Este item é composto por resultados da análise de estruturas reticuladas em regime dinâmico.

As estruturas analisadas são: duas vigas, quatro pórticos planos e um pórtico espacial que estão sob a ação de carregamento nodal ou aplicado fora dos nós. Dessas estruturas são calculadas as primeiras frequências naturais segundo a teoria de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

8.3.1 Análise de vigas

Uma viga engastada-apoiada e outra, engastada-livre serão submetidas à análise dinâmica segundo a teoria de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko.

As características geométricas e físicas das vigas são: comprimento: $L = 1,00m$, área da seção transversal; $A = 0,01m^2$, momento de inércia: $I_y = 8,3333 \times 10^{-6} m^4$, módulo de Young: $E = 2,1 \times 10^{11} N/m^2$, massa específica $\rho = 7850 kg/m^3$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$. A carga (impulso) $P = 1000N$ é aplicada no meio do vão, exceto para a viga engastada-livre, na qual a carga será aplicada na extremidade livre.

- **Análise de viga engastada-apoiada**

Da viga mostrada na Fig. 8.11 serão calculados os quatro valores mais baixos das frequências naturais determinados a partir de análise dinâmica segundo a teoria de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. Os valores obtidos estão apresentados na Tab. 8.22 juntamente com valores correspondentes apresentados por ANTAS et al (2004) calculados via MEC e por Queiroz (2010), neste ultimo a barra é discretizada em 4 elementos finitos.

Valores das frequências naturais calculadas via MEF para a barra discretizada com 2 e com 16 elementos finitos podem ser comparados com os valores aqui obtidos com a barra discretizada em um unico elemento de contorno, na Tab.8.23.

Na Fig. 8.12 vê-se o gráfico da variação do logaritmo do ângulo φ (em rad) em função da frequência (em Hz) para valores do intervalo de zero até 4000 Hz.

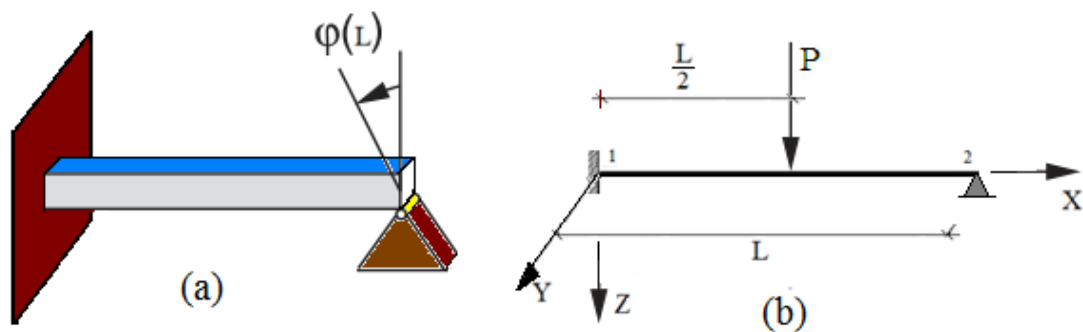


Figura 8.11 - Viga engastada-apoiada

Tabela 8.22 As frequências procuradas da viga engastada-apoiada

Modo	Frequência (Hz)					
	Euler-Bernoulli			Timoshenko		
	Obtidas (MEC)	ANTES et al (2004) (MEC)	QUEIROZ (2010) (MEF)*	Obtidas (MEC)	ANTES et al (2004) (MEC)	QUEIROZ (2010) (MEF)*
1	364,60	364,6	366,61	352,50	352,5	353,27
2	1166,00	1166,6	1194,71	1076,30	1076,5	1095,94
3	1437,00	1438,3	1301,37	1276,90	1277,2	1301,37
4	2384,70	2385,6	2533,03	2084,60	2084,9	2206,21

(*) discretização com 4 elementos finitos em cada barra

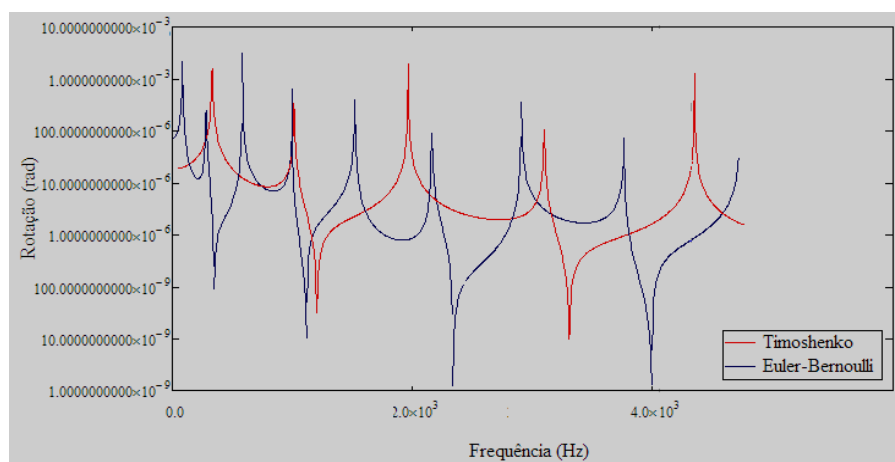


Figura 8.12 – $\log|\varphi|$ x frequência da viga engastada-apoiada

Tabela 8.23 - Precisão nos valores calculados das frequências naturais

Modo	Frequência (Hz)					
	Euler-Bernoulli			Timoshenko		
	Obtidas (MEC)	QUEIROZ (2010) (MEF)*	QUEIROZ (2010) (MEF)**	Obtidas (MEC)	QUEIROZ (2010) (MEF)*	QUEIROZ (2010) (MEF)**
1	364,60	369,77	366,38	352,50	357,50	352,58
2	1166,00	1326,48	1187,33	1076,30	1326,49	1077,43
3	1437,00	1387,88	1293,57	1276,90	1336,45	1293,57
4	2384,70	3698,40	2477,48	2084,60	3582,97	2091,28

(*) discretização com 2 e (**) discretização com 16 elementos finitos em cada barra

- **Viga engastada-livre**

Da viga mostrada na Fig. 8.13 serão apresentados dois gráficos do deslocamento da extremidade livre em função da frequência. Eles foram construídos a partir de valores obtidos nesta gtese, um com a utilização da teoria de Euler-Bernoulli e o outro com a teoria de Timoshenko e estão mostrados na Fig. 8.14. Estes gráficos podem ser comparados com os correspondentes também obtidos via MEC por Antes et al (2004) que estão na Fig.8.15.

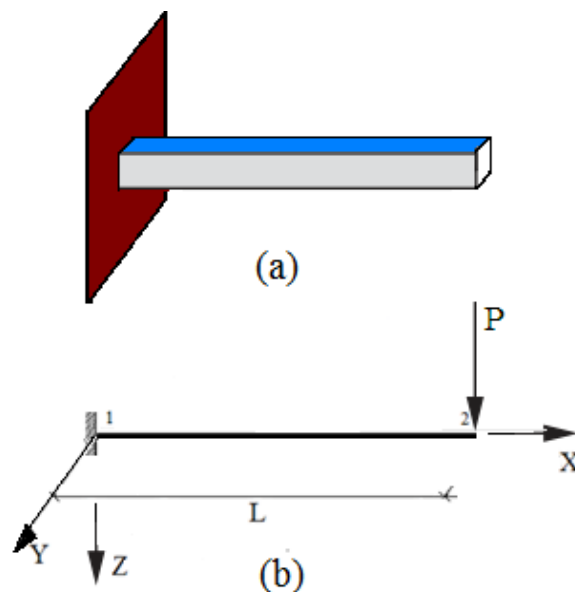


Figura 8.13 - Viga engastada-livre

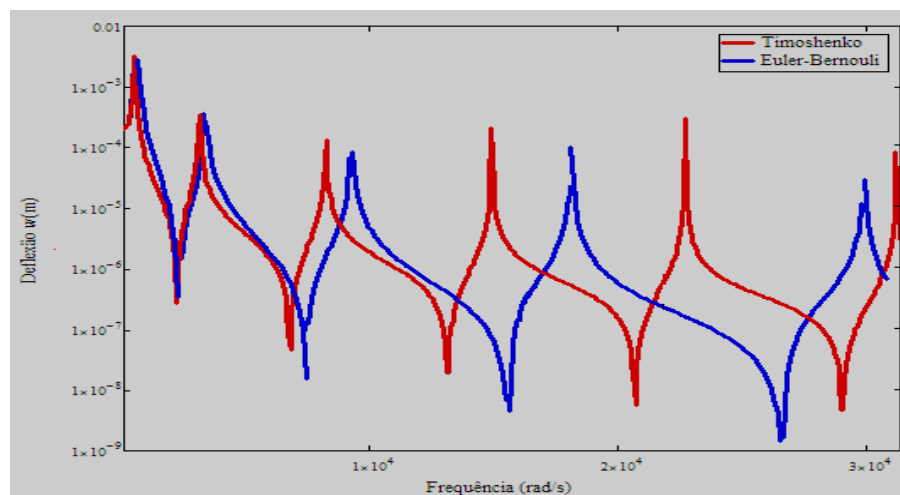


Figura 8.14 – $\log|w|$ x frequência da viga engastada-livre

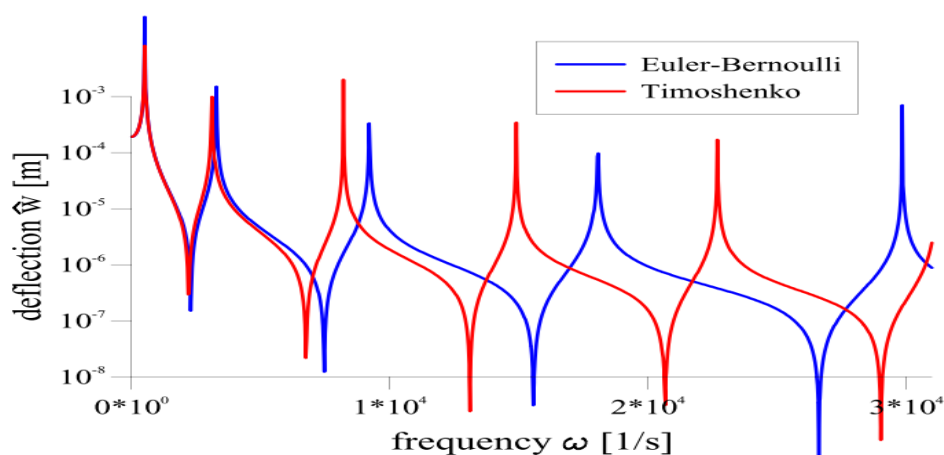


Figura 8.15 – $\log|w|$ x frequência da viga engastada-livre (ANTES *et al*, 2004)

8.3.2. Análise de pórticos planos

Neste subitem serão analisados quatro pórticos planos. Será apresentado o resultado do cálculo das primeiras frequências naturais de cada um deles.

- **Pórtico plano com três vãos**

Na Fig. 8.16 vê-se um pórtico plano formado por sete barras idênticas rigidamente conectadas. As características geométricas e físicas das barras são: $L=0,1524\text{ m}$, $A=6,048 \times 10^{-5}\text{ m}^2$, $I_z=1,143 \times 10^{-10}\text{ m}^4$, $E=2,07 \times 10^9\text{ N/m}^2$, $\rho=7786\text{ kg/m}^3$.

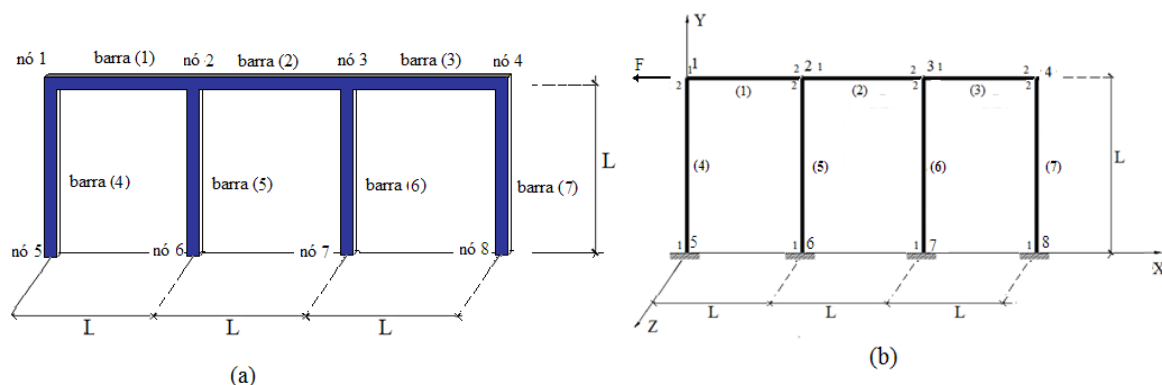


Figura 8.16 – Pórtico com três vãos

Deste pórtico serão calculadas as primeiras quatro frequências, cujos valores estão na Tab. 8.24. Tendo em vista a validação destes resultados, as frequências calculadas via MEF por PETTY (1990) também estão apresentadas na referida tabela.

Tabela 8.24 – As primeiras quatro frequências naturais do pórtico plano com três vãos

Modo	Frequencia (Hz) (Teoria de Euler-Bernoulli)	
	Obtido	(PETYT, 1990)*
1	140,18	138,3
2	583,49	575,0
3	624,86	663,0
4	672,38	812,0

(*) valores calculados via MEF.

• Pórtico plano tri-engastado

Todas as barras do pórtico mostrado na Fig. 8.17 são iguais entre si. Suas características físicas e geométricas são assim definidas: $E = 206,01 \times 10^6 \text{ MPa}$ ($30 \times 10^6 \text{ psi}$), $8G = 3E$, $\kappa = 5/6$ e ρ é escolhido atendendo a relação: $\sqrt{EI_z} = \sqrt{\rho AL^4}$.

As frequências naturais serão calculadas (a partir do modelo de Euler-Bernoulli e do modelo de Timoshenko) em função do índice de esbeltez das barras (L/r). Seus valores estão apresentados na Tab. 8.25. Valores obtidos por DONG e WOLF (1971) também são encontrados na tabela mencionada.

Aqui, L é o comprimento das barras; r , o raio de giração; E , o módulo de deformação longitudinal; G , o módulo de deformação transversal; ρ , a massa específica e κ é o fator de correção do cisalhamento. Será considerado o valor $(L/r) = 10$

O carregamento é constituído pelo impulso horizontal $F = 1,0kN$ atuando no nó 1.

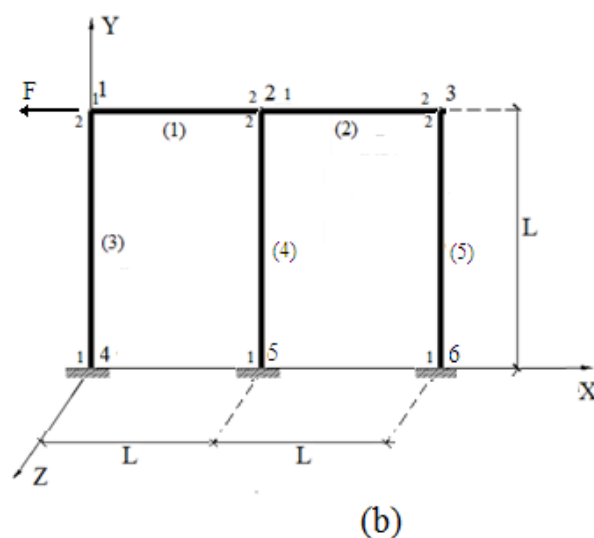
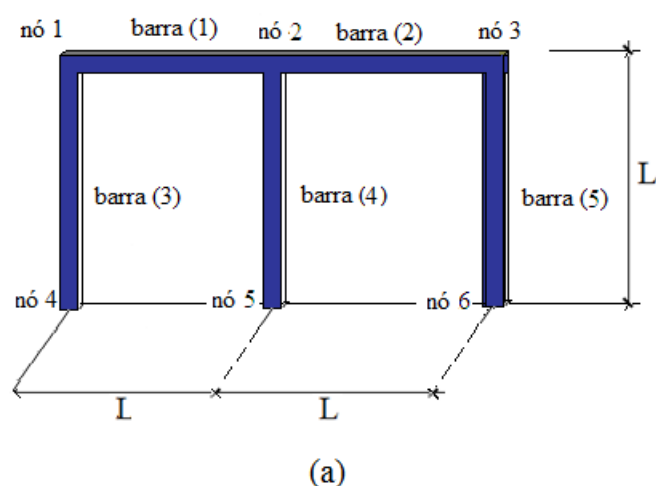


Figura 8.17 – Pórtico tri-engastado

Tabela 8.25 - As seis primeiras frequências naturais do pórtico tri-engastado

L/r=10	Frequência (Hz)			
Modo	Euler-Bernoulli		Timoshenko	
	Obtidas	DONG e WOLF (1971)	Obtidas	DONG e WOLF (1971)
1	2,910	2,914	2,50	2,527
2	8,491	8,497	7,80	7,794
3	9,748	9,754	8,50	8,579
4	11,62	11,590	10,20	10,260
5	13,45	13,190	12,00	12,020
6	14,52	14,480	12,80	12,820

• Pórtico plano cruciforme articulado nos apoios

Neste exemplo o MEC é utilizado para detectar as cinco frequências naturais mais baixas do pórtico plano cruciforme mostrado na Fig. 8.18.

O módulo de Young e a densidade de massa são, respectivamente, $E = 200GPa$ and $\rho = 8000kg/m^3$. As barras têm seção transversal quadrada de lado $17,5cm$.

É aplicado um carregamento harmônico no tempo no nó definido pela interseção das barras composto por duas forças $F = 1,0kN$: uma horizontal e outra vertical

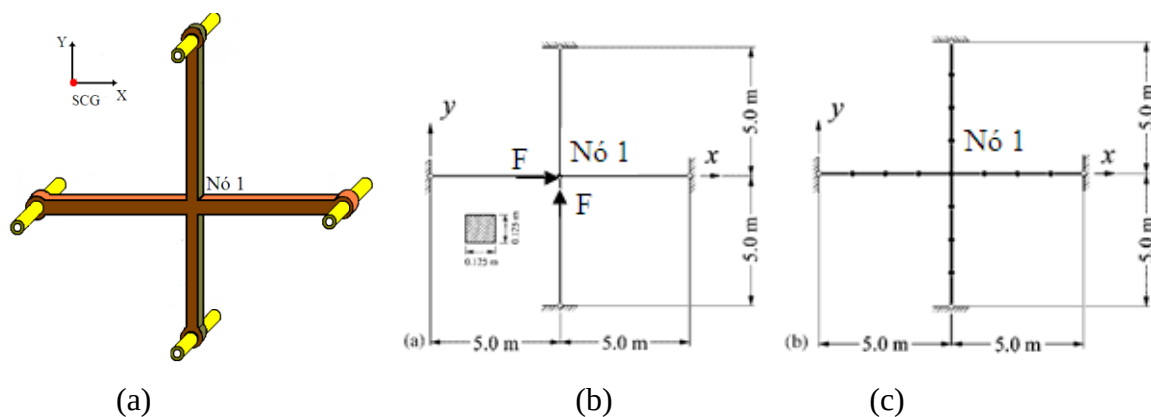


Figura 8.18 – Pórtico cruciforme (a) O pórtico, geometria e SCG, (a) Geometria e carregamento e (c) Discretização.

Na Tab. 8.26 estão os valores das frequências obtidas via MEC e os resultados de duas soluções através do MEF uma de ABBASSIAN *et al.* (1987) e outra de MA (2008).

O grupo de Abbassian utilizou elementos finitos padrão (interpolação polinomial) onde cada membro do pórtico foi modelado com quatro elementos de igual comprimento, enquanto MA utilizou um elemento finito especial com interpolação exponencial, sendo cada membro do pórtico discretizado com um único elemento.

Tab. 8.26 – As frequências naturais mais baixas no pórtico cruziforme

Frequência (Hz)			
(Teoria de Euler-Bernoulli)			
Modo	Obtido (MEC)	ABBASSIAN et al. (1987) (MEF)	MA (2008) (MEF)
1	11,3455	11,336	11,33626
2	17,6910	17,709	17,68079
3	17,6910	17,709	17,68079
4	17,7547	17,709	17,68079
5	45,3562	45,345	45,34504

- **Pórtico plano bi-engastado**

O pórtico plano bi-engastado formado por seis barras rigidamente conectadas mostrado na Fig. 8.19 é submetido a carregamento vertical harmônico no tempo aplicado no centro da barra horizontal superior. Dele procuram-se as quatro primeiras frequências naturais associadas à deflexão no ponto médio da barra horizontal inferior.

Todas as barras são de mesmo material e têm mesma seção transversal, com $E = 2,10 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$ e $A = 0,01 \text{ m}^2$. As barras verticais têm

comprimento $L=1,00m$ e as horizontais, $2L$. O fator de correção do cisalhamento $\kappa=5/6$.

Na Tab.8.27 os valores das freqüências aqui obtidas podem ser comparados com os valores correspondentes calculados por Antes *et. al.* (2004) também via MEC.

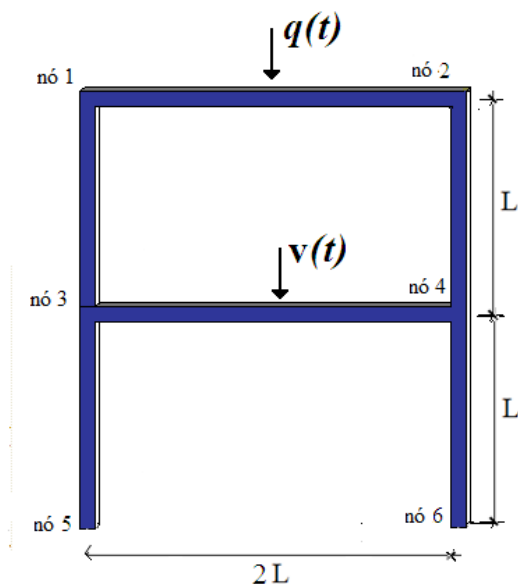


Figura 8.19 – Pórtico bi-engastado

Tabela. 8.27 – As quatro primeiras freqüências naturais do pórtico bi-engastado

Modo	Obtido (MEC)	ANTES et al. (2004) (MEC)
1	91,19	91,2
2	108,20	108,2
3	334,39	334,4
4	432,99	433,1

8.3.3 Análise Dinâmica de Pórtico Espacial

Nesta aplicação as duas freqüências naturais axissimétricas mais baixas do pórtico mostrado na Fig. 8.20 são obtidas através do MEC. O módulo de Young e a massa

específica são, respectivamente, $E = 219.9\text{GPa}$, e $\rho = 7900\text{kg/m}^3$. Componentes de forças harmônicas no tempo com amplitude $F = 1,0\text{kN}$ são aplicadas no nó 8 paralelamente a cada uma das direções do SCG. Todas as barras têm comprimento $L = 1.0\text{m}$. As verticais têm seção quadrada de lado 5cm e as horizontais, seção transversal retangular $5\text{cm} \times 15\text{cm}$, como mostrado na Fig. 8.20b.

PETYT (1990) sugere as seguintes condições de contorno para nós intermediários (em $0,5L$) das barras horizontais: nós 3 e 7, deslocamento $U_z = 0$ e rotações em torno dos eixos X e Z nulos ou seja, $\theta = \varphi = 0$; nós 5 e 9, deslocamentos $U_y = U_z = 0$ e rotação nula em torno do eixo X , $\theta = 0$. Ver Fig. 8.20c.

Na Tab. 8.28 encontram-se os valores das frequências axisimétricas obtidos através do MEF, que utilizou dois elementos finitos padrão por cada membro do pórtico extraídos de PETYT (1990). Na Tab 8.29, estão os resultados das cinco primeiras frequências naturais obtidos no presente trabalho a partir dos modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via MEC.

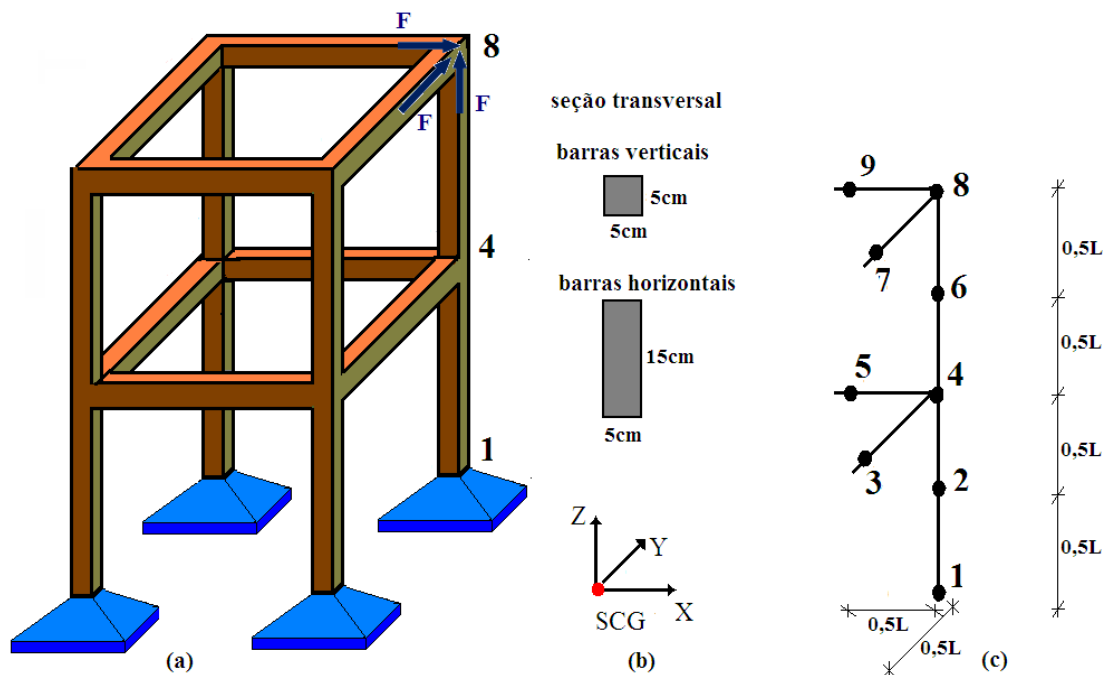


Fig. 8. 20 – Pórtico espacial, dimensões, carregamento, SCG e discretização.

(Adaptada de PETYT (1990))

Tabela 8.28 – As duas frequências naturais axisimétricas mais baixas

Modo	Frequencia (Hz)	
	Teo. de Euler-Bernoulli	
	Obtido	PETYT (1990)*
1	11,7774	11,8
2	34,0591	34,1

(*) calculados via MEF.

Tabela 8.29 - As cinco primeiras frequências naturais

Modo	Frequência (Hz)	
	Teo. de Euler-Bernoulli	Teo. de Timoshenko
	Obtido	Obtido
1	11,7774	11,7038
2	34,0591	33,9968
3	191,1451	190,8268
4	197,1930	195,9197
5	222,4986	220,5887

8.3.4 Análise Dinâmica de Núcleos

Neste subitem serão apresentadas duas aplicações que envolvem a análise dinâmica de núcleos sob as hipóteses de Euler-Bernoulli.

Na primeira o núcleo tem seção transversal monossimétrica, cujo eixo de simetria é o z. Neste caso, o problema a ser resolvido envolve acoplamento duplo em que a flexão em torno do eixo z e a torção não-uniforme são acopladas. Na outra aplicação a seção é

assimétrica, estando acopladas à torção não-uniforme a flexão segundo o eixo z e a flexão segundo o eixo y , caracterizando um problema de triplo acoplamento.

Neste subitem os resultados obtidos serão validados com os correspondentes calculados por SAPOUNTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009) que utilizam formulação de MEC com integrais de domínio. No trabalho em questão para os resultados apresentados foram utilizados 80 células no domínio da barra.

- **Análise dinâmica de barra de núcleo com seção transversal monossimétrica**

A viga de paredes delgadas e seção aberta, engastada-livre, como mostrada na Fig. 8.21 será analisada e suas seis primeiras frequências naturais calculadas. Os resultados serão apresentados na Tab. 8.30 juntamente com os valores correspondentes calculados por SAPOUNTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009).

Suas características são: $L = 0,82m$, $A = 3,08 \times 10^{-4} m^2$, $G = 16,5 \times 10^6 kN/m^2$, $\rho = 2,711 \times 10^3 kg/m^3$, $E = 68 \times 10^6 kN/m^2$, $I_t = 1,64 \times 10^{-9} m^4$, $I_\omega = 1,52 \times 10^{-12} m^6$, $Z_c = 0,0155m$, $I_y = 1,764 \times 10^{-8} m^4$, $I_z = 9,260 \times 10^{-8} m^4$, $I_p = 1,85 \times 10^{-7} m^4$.

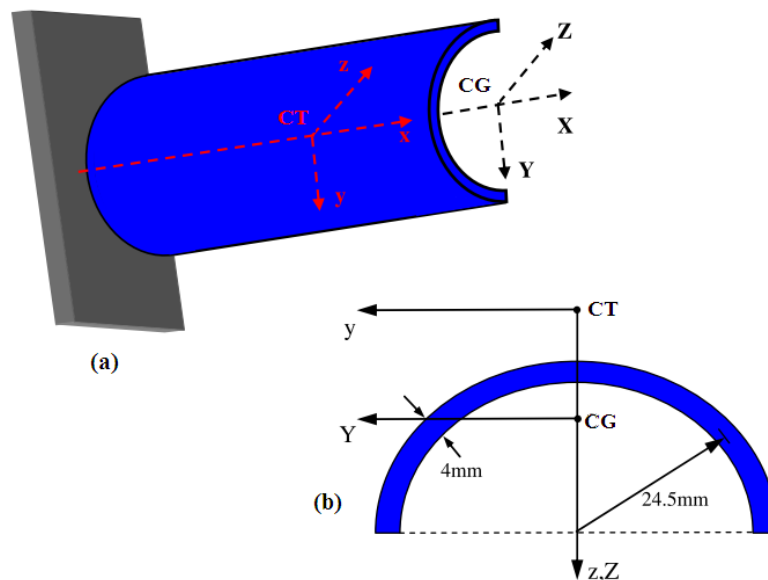


Figura 8. 21 – Viga de parede fina e seção aberta, perspectiva, seção transversal e SCG

(Adaptada de SAPOUNTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009))

Tabela 8.30 - As seis primeiras frequências naturais

Frequência (Hz)		
Teo. de Euler-Bernoulli		
Modo	Obtidos	SAPOUTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009)(*)
1	31,665467	31,751
2	63,598315	63,777
3	137,382547	137,656
4	198,829087	198,990
5	278,419291	278,293
6	484,531309	484,653

(*) Valores calculados via MEC com integrais de domínio.

- **Análise dinâmica de barra de núcleo com seção transversal assimétrica**

A viga de paredes delgadas e seção aberta, engastada-livre, como mostrada na Fig. 8.22 será analisada e suas cinco primeiras frequências naturais calculadas. Neste caso (seção transversal assimétrica, estão acopladas à torção não-uniforme, à flexão segundo o eixo z e à flexão segundo o eixo y, caracterizando um problema de triplo acoplamento.

Os resultados serão apresentados na Tab. 8.32 ao lado dos valores correspondentes calculados por SAPOUNTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009).

A viga tem: $L = 2,00m$, $A = 1.504 \times 10^{-2} m^2$, $\rho = 7,85 \times 10^3 kg/m^3$, $v = 0,30$,
 $E = 2,1 \times 10^8 kN/m^2$, $I_t = 3,60 \times 10^{-6} m^4$, $I_\omega = 9,0886 \times 10^{-7} m^6$, $I_p = 4,99 \times 10^{-4} m^4$,
 $I_y = 3,3313 \times 10^{-4} m^4$, $y_c = 0,02524m$, $y_c = 3,3313 \times 10^{-4} m^4$, $z_c = 0,08386m$,
 $\theta = -35,1759 rad$.

Notar que a carga aplicada é um degrau.

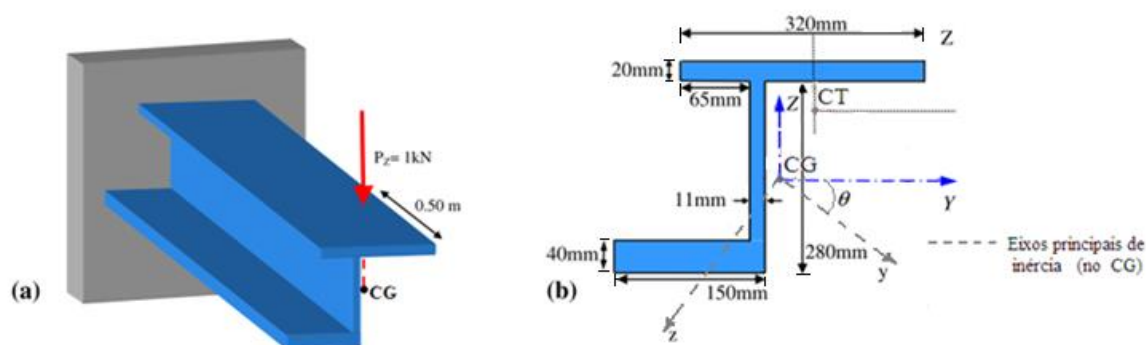


Figura 8. 22 – Viga de parede fina e seção aberta (assimétrica), seção transversal e SCG

(Adaptada de SAPOUNTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009))

Tabela 8.31 - As cinco primeiras frequências naturais

Frequência (Hz)			
Teo. de Euler-Bernoulli			
Modo	Obtidos		SAPOUNTZAKIS e DOURAKOPOULOS (2009)(*)
	Sem inércia rotatoria	Com inércia rotatoria	Com inercia rotatoria
1	38,155	38,166	38,025
2	66,211	66,175	67,365
3	109,741	108,313	108,630
4	201,343	201,006	200,193
5	336,914	335,383	339,379

(*) Valores calculados via MEC com integrais de dominio.

*“Se eu vi mais longe, foi por estar de
pé sobre ombros de gigante”
Isaac Newton*

Capítulo IX

CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho foram apresentadas algumas contribuições à análise estática e dinâmica de pórticos através do MEC, incluindo a análise de interação solo-estrutura e o estudo de barras de paredes delgadas e seção aberta.

As análises foram formuladas a partir de uma conveniente sistematização dos efeitos normais, de flexão e de torção nas chamadas representações algébricas dessas solicitações, culminando com a obtenção da representação algébrica da estrutura. Para este objetivo foram utilizados sistemas de coordenadas adequados e a observância das condições de equilíbrio de forças e de momentos além da compatibilidade de deslocamentos.

Quanto à análise estática de pórticos foram obtidas representações algébricas dos efeitos das solicitações presentes nessas estruturas.

Para a obtenção das representações algébricas foram utilizadas soluções fundamentais nem sempre disponíveis na literatura específica, sendo, quando necessário, foram aqui desenvolvidas pela primeira vez ou como alternativas àquelas já existentes. Tais como as soluções fundamentais do problema da flexão em z da viga de Euler-Bernoulli, do núcleo de rigidez (barra de parede finas de seção aberta) e da flexão em y da viga de Timoshenko.

No caso da barra de núcleo, foi obtida a representação numérica do MEC do efeito da torção não-uniforme a partir das equações integrais que contemplam diretamente grandezas típicas da torção não-uniforme, tais como o bimomento e o empenamento.

Além dessas contribuições ao estado-da-arte, a interação solo-estrutura de pórticos planos e espaciais aqui apresentada é, salvo melhor juízo, também inédita. Pois, pela primeira vez, tanto a estrutura quanto o solo são sistematizados através do MEC.

No que diz respeito à análise dinâmica foram desenvolvidas representações algébricas dos efeitos das solicitações constantes das barras de pórticos planos e de pórticos espaciais. Essas representações algébricas foram obtidas para análise harmônica (no domínio da frequência) levando em conta, quanto à flexão, as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

Ainda quanto a análise dinâmica é importante salientar que na obtenção da representação algébrica do efeito da flexão em y foram utilizadas as soluções fundamentais de PROVIDAKIS e BESKOS (1985) para a teoria de Euler-Bernoulli, enquanto a representação algébrica da flexão em z foi estabelecida com as soluções fundamentais apresentadas nesta tese. No caso da teoria de Timoshenko, a representação algébrica do efeito de flexão em y foi obtida a partir das soluções fundamentais de ANTES *et al.* (2004), enquanto a representação algébrica do efeito da flexão em z foi estabelecida a partir das soluções fundamentais aqui adotadas.

É importante observar que as barras de núcleo também foram estudadas em regime dinâmico, sendo obtidas as equações integrais, as soluções fundamentais e a representação algébrica da barra sob o efeito da flexo-torção com duplo acoplamento, para barras de núcleo monossimétricas e com triplo acoplamento no caso das barras de seção assimétricas.

Aplicações considerando vários tipos de estruturas foram apresentadas com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do MEC em estruturas reticuladas planas e espaciais e a boa aproximação dos resultados obtidos (exatidão nos resultados de análises em regime estático) através dos procedimentos desenvolvidos.

De modo geral, constata-se a boa aplicabilidade do MEC na análise de estruturas reticuladas planas e espaciais e a superioridade do seu desempenho nas análises dinâmicas dessas estruturas tendo em vista a boa aproximação dos resultados obtidos com a discretização de um elemento por barra, além de ótimo enfrentamento da modelagem do solo (semi-espaço infinito) nas análises de interação solo-estrutura.

No caso da análise dinâmica via MEC a boa aproximação dos resultados acima referida pode ser constatada nas seguintes aplicações:

a) Na análise da viga mostrada na Fig. 8.11 cujos resultados estão nas Tabs. 8.22 e 8.23, ao serem comparados os resultados calculados via MEF, que utilizou malha com dois, quatro e dezesseis elementos por barra, com os obtidos neste trabalho;

b) Na análise do pórtico mostrado na Fig. 8.18, cujos resultados estão na Tab. 8.26. Pois os resultados apresentados por ABBASSIAN *et al* (1987) foram calculados usando um modelo de elemento finito padrão (interpolação polinomial) em que cada barra do pórtico foi discretizada em quatro elementos de mesmo comprimento, como mostrado na Fig. 8.18c, enquanto os resultados apresentados por MA (2008) foram calculados usando um modelo de elemento finito com interpolação exponencial em que cada barra é discretizada com um único elemento;

c) Na análise das vigas de seção aberta de paredes finas, (Fig. 8.21 e 8.22), cujos resultados estão respectivamente, nas Tab. 8.30 e 8.31. Pois, para os resultados apresentados por SAPOUNTZAKIS E DOURAKOPOULOS (2009) foram utilizados 80 células no domínio da barra.

Em QUEIROZ, 2010, lê-se: *“Isto é devido ao fato de que os resultados são calculados pelo MEF utilizando a interpolação das variáveis estáticas para o caso dinâmico.”* numa explicação com poucas palavras da necessidade de subdividir cada vez mais as barras para obter resultados mais próximos aos obtidos via MEC, nas análises dinâmicas de estruturas reticuladas via MEF.

9.2 FUTURAS CONTRIBUIÇÕES A ESSE TRABALHO

São várias as contribuições possíveis para enriquecimento do presente trabalho.

No que tange à análise estática, a formulação para a AISE de pórticos planos e espaciais assentes em sapatas flexíveis e a formulação para análise de pórticos espaciais enrijecidos por núcleos de rigidez, são algumas sugestões.

Relativamente à análise dinâmica, as sugestões apresentadas no parágrafo anterior incluída a AISE de pórticos assentes em sapatas rígidas, são sugestões pertinentes.

REFERÊNCIAS

- ABBASSIAN F., DAWSWELL, D.J., KNOWELS, N.C., 1987, *Selected benchmarks for natural frequency analysis frame structures*. NAFEMS Report SBNFA, Glasgow.
- ABNT, NBR 6122, 2003. Projeto e Execução de Fundações.
- ALIABADI, M. H., 2002, The boundary element method: Applications in solids and structures. Wiley.
- ALEXANDER H.-D.CHENG, DAISY, T. C., 2005, “Heritage and early history of the boundary element method”, *Elsevier Ltd. Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, pp. 268–302.
- ANDERSEN, I.,NIELSEN, S.R.K., 2008. *Elastic Beams in three Dimensions*. Aa.23.lborg University, Denmark, ISSN 1901-7268 DCE Lecture Notes n
- ANTES, H., 2003, “Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams”. *Computers and Structures*, v. 81, pp. 383–396.
- ANTES, H., SHANZ, M., ALVERMANN, S., 2004, “Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams”, *Journal of sound and vibration*, pp. 807-836.
- AOKI, N., 1997, Aspectos geotécnicos da interação estrutura/maciço de solos, XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos. V. 1, pp. VII-XX.
- ARPACI, A., BOZDAG, 2002, On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections. *Computers and Structures* 80 pp. 691-695.

- AUGARDE, C.E., DEEKS, A.J., 2008, “*The use of Timoshenko’s exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis*”, Finite Elem. Anal. Des. doi: 10.1016/j.finel.2008.01.010.
- BANERJEE, J.R.,1991. *A FORTRAN routine for computation of coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of beam elements*. Advances in Engineering Software, vol 13, pp17-24.
- BANERJEE, J.R.,WILLIAMS, F. W., 1994, Clamped-clamped natural frequencies of a bending-torsion coupled beam. Journal of Sound and Vibration, v. 176, pp.301-306.
- BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R.,1977. Boundary Element Method in Geomechanics. In: Finite Elements in Geomechanics, G. Gudehus(ed) pp 529-570, J. Wiley, London;
- BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R., 1981, *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill.
- BARBOSA, J.A.,1978, *Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral*. Dissertação, Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.
- BARBIRATO, J.C.C., 1991, *Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin*. Dissertação, Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.
- BARBIRATO, J.C.C., 1999, *Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento*. Tese, doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.
- BECKER, A.A., 1992, *The boundary element method in engineering: a complete course*, McGraw-Hill.

- BERCIM, A.N., TANAKA, M., 1997, *Coupled flexural-torsional vibrations of Timoshenko beams*, J. Sound Vib. 207, pp45-79.
- BESKOS, D.E., 1991, *Boundary element analysis of plates and shells*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
- BELTRÁN, F., 1999, “*Ideas generales sobre el Método de los Elementos de Contorno*” Depto. Mecánica Estructural y Construcciones Industriales E. T. S. Ingenieros Industriales de Madrid.
- BOUSSINESQ, J., 1885, “*Applications des potentials à L’étude de L’équilibre et du Moviment des Solides Elastique*”. Gualtier-Villars, Paris.
- BRAJA, M. D., 2007, *Fundamentos de Engenharia Geotécnica*. Trad. da 6. Ed. Americana. São Paulo.
- BREBBIA, C.A., 1978, *Weight residual classification of apporximate methods*. Applide Mathematical Modelling, v.2, n.3, pp.160-164.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C. E WROBEL, L.C., 1983, *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag: Berlim-Heidelberg, New York, Tokio.
- CALDERÓN, E. T., 1991, “*Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno.*” Dissertação, mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- CALDERÓN, E.T., 1996, *Sobre o uso do metodo dos elememtos de contorno-mec para o estudo de interação de placas com o meio continuo*. Tese, doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- CALDERÓN, E.T., VENTURINI, W.S., 1991, “*Um processo alternativo para o tratamento de integrais de domínio no método dos elementos de contorno: aplicação em placa sobre fundação elástica.*” In: XXV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estructural, v. 1, pp. 409-419. Porto Alegre, R. G. S.

- CAVALCANTI, M.C.R., 2002, *Análise por elementos de contorno de meios poro elásticos saturados pela teoria de Biot*.
- CERRUTI, V., 1882, “*Acc. Lincei., Mem. Fis. Mat.*”, Roma.
- CHOW, Y.K., TEH, C.I., 1991, “*Pile-cap-pile-group interaction in nonhomogeneous soil*”. *Journal of Geotechnical Engineering*, v. 117, n. 11, pp. 1655-1668.
- CLOUGH, R.W., 1960. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proc 2nd ASCE conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept.
- CODA, H.B., 1990, *Análise de Vibração Livre de Meios Elásticos Bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação, mestrado. Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- CODA, H.B., 2000, *Contribuição à análise dinâmica de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno*. Tese, LD. Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- CODA, H.B., VENTURINI, W.S., 1995, “*Three-dimensional transient BEM analysis.*” *Comput Struct*, v. 56, n. 5, pp. 751–768.
- COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E., 1989, *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley and Sons Ed., New York, 3a ed.
- CRUSE, T.A., 1968, “*A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem*”. *Int. J. Math. Anal. Appl.*, v. 22, pp 341-355.
- CRUSE, T.A., 1969, “*Numerical solutions in three-dimensional elastostatics*”. *Int J. Solids Struct.*, v. 5, pp. 1259–74.
- CRUSE, T.A., RIZZO, F.J., 1968, “*A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem*”. *J. Math. Anal. Applic.*, v. 22, pp. 244.

- DOKUMACI, E., 1987. *An exact solution for coupled bending and torsion vibrations of uniform beams having single cross-sectional symmetry*. Journal of Sound and Vibration. Vol 119, pp443-449.
- DOMÍNGUEZ, J., 1977, *Computation of stresses near anchor plates: an application of the boundary element method*. Ph.D. Thesis, Univ. of Seville, Spanish.
- DOMÍNGUEZ, J., 1993, “*Boundary elements in dynamics*”. Computational Mechanics Publications, ISBN 1562521829.
- DOMÍNGUEZ, J., GALLEGU, R., 1991, “*The Time Domain Boundary Element Method For Elastodynamic Problems*”, Journal of Mathematical and Computer Modelling, v. 15, pp. 119-129.
- DOMÍNGUEZ, J., 1993, “*Boundary elements in dynamics*”. Computational Mechanics Publications.
- DÓRIA, L.E.S., 2007, PROJETO DE ESTRUTURA DE FUNDAÇÃO EM CONCRETO DO TIPO RADIER, Dissertação, mestrado, Universidade Federal de Alagoas. Maceió.
- DORIA, L.E.S., LIMAF. B., 2008, Análise de fundação tipo radier empregando o modelo de analogia de grelha, Anais do 50º Congresso Brasileiro do Concreto, ISBN 978-85-98576-13-8, IBRACON.
- DUARTE, R.W.R., 2005, Fundações no projeto de arquitetura total; uma abordagem integrada, dissertação, mestrado, IPT, São Paulo, SP.
- FRERDOLM, I., 1903. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math, v. 27, p. 363-390.
- FRIBERG, P.O., 1985, *Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams*. Int. J. Number Methods Eng. Vol 21, pp1205-1228.

GERE, J. M., WEAVER, W., 1981, *Análise de Estruturas Reticuladas*, Guanabara Dois, RJ.

GUSMÃO, A.D., 1994, “Aspectos Relevantes da Interação Solo-Estrutura em Edificações”, *Solos e Rochas*, v.17, n.1, pp. 47-55.

JASWON, M.A., 1963. Integral equation methods in potencial theory I. *Proc. Royal Society, A* 275:23-32

HALL, W. S; OLIVETO, G., 2003, *Boundary Element Methods for Soil-Structure Interaction*. Kluwer Academic Publishers.

KAPUR, K.K., 1966, “*Vibrations of a Timoshenko beam, using a finite element approach*”. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 40, pp. 1058–1063.

KATSIKADELIS, J.T., 2002, *Boundary Elements: Theory and Applications*. Elsevier, 1st edition.

KATSIKADELIS, J.T., SAPOUNTZAKIS, E.J., 1985, “*Torsion of composite bars by the boundary element method*”. *ASCE J EngngMech*; v. 111, n. 9, pp. 1197-1210.

KURRER, K.F., 2008, *The history of the theory of structures: from arch analysis to computational*, Ernst & Sohn Verlag Fur Architektur und Technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin, Germany.

KUPRADZE, V.D., 1965. *Potential methods in theory of elasticity*. Jerusalem. Israel Program for Scientific Translations.

LACHAT, J.C., 1975, *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. PhD, Thesis. Southampton University, Southampton.

LI, Z-C et al., 2007, *Trefftz, Collocation, and Other Boundary Methods—A Comparison; On line Publish in most accurate solution with the best numerical stability*. Numer

Methods Partial Differential Eq 23: 93–144. Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com), V. 10, n. 20159, pp.1002.

LIVESLEY, R.K., 1975, *Matrix Methods of Structural Analysis*. Oxford: Pergamon Press, 2.ed.

MA, H., 2010, “Exact solution of vibration problems of frame structures”. International Journal for Numerical Methods in Biomechanical Engineering, v. 26, 587–596.

MACKERLE, J., 2000, “Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements an addendum. A bibliography (1996-1999)”. Engineering Computations, pp. 17274-360.

MANOLIS, G.D., BESKOS, D.E., PINEROS, M.F., 1986, “Beam and plate stability by boundary elements”, Computers & Structures, v. 22, n. 22, pp. 917-923.

MANOLIS G. D., BESKOS, D. E., 1988, *Boundary element methods in elastodynamics*, Unwin-Hyman, London. ISBN 044-6200-19-3.

MANSUR, W.J., BREBBIA, C.A., 1982, “Numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional transient scalar wave propagation problems”, Appl. Math. Modelling, v. 6, pp. 299-306.

MARTINS, C.H., 2001, *Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifício de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes*. Tese, doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

MATIAS JUNIOR, I.G., 1997, *Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis*. Dissertação, mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

MATOS FILHO, R., MENDONÇA, A.V., PAIVA, J. B., 2005, “Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads”. Engineering Analysis With Boundary Elements, Holanda, v. 29, n. 3, pp. 195-203.

- MENDONÇA, A.V., 1997, *Análise da interação placa-estaca-solo utilizando a combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno*. Dissertação, mestrado Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- MENDONÇA, A.V., 2010, Métodos Numéricos. Notas de Aula, PPGEM, CT-UFPB.
- MENDONÇA, A.V., 2002, *Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno*. Dissertação, mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- MENDONÇA, A.V., PAIVA, J.B., 2000, “A boundary element formulation for the static analysis of raft foundations on piles”. Engineering Analysis With Boundary Elements, v. 24, pp. 237-247.
- MENDONÇA, A.V., PAIVA, J.B., 2003, “An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation”. Engineering Analysis With Boundary Elements. v. 27, pp. 919-931.
- MEGSON, T.H.G., 2003, AIRCRAFT STRUCTURES for Engineerig Students Butterworth-Heinemann, imprint Elsevier Science, Oxford, Third Edition 1999, Reprinted by Butterworth-Heinemann.
- MINDLIN, R.D., 1936, Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. J. Physics, v.7, pp.195-202.
- MIKHLIN, S.G., 1964, *Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology*. 2nded. New York: Pergamon Press.
- MORI, D.D., 1992, *Os núcleos estruturais e a não linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. Tese, doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP..
- MORI, D.D., 1993, *Flexo-Torção: Barras com Seção Transversal Aberta e Paredes Delgadas*. Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

- NAKAGUMA, R.K., 1979. Three Dimensional Elastostatics using the Boudary Element Method. Southampton. Ph D. Thesis, University of Southamton.
- NICKEL, R.E., SECOR, G.A., 1972, “*Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 5, pp. 243–253.
- ONU, G., 1990, “*Inclusion of warping shear effect in thin-walled core element for multistory building*”. Computers & Structures, v.35, n.2, pp. 175-182.
- OTTAVIANI, M., 1975, “*Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups*”. Géotechnique, v. 25, n.2, pp. 159-174.
- PAIVA, J. B., 1993, *Formulação do método dos elementos de contorno para a análise da interação solo-estrutura*. Tese, Livre-docência, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- PAIVA, J.B., BUTTERFIELD, R., 1997, *Boundary element analysis of plate-soil interaction*. Computers and Structures. v. 64, n. 1-4, pp. 319-328.
- PAIVA, J.B., TRONDI, R.R., 1999, “*Boundary element analysis of capped and uncapped pile groups*”. Advances in Engineering Software, v.30, n.9-11, pp.715-724.
- PAIVA, J. B., ALMEIDA, V.S., 2004, *A mixed BEM-FEM formulation for layered soil-superstruture interaction*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, *Inglaterra*, v. 28, pp.1111-1121.
- PETTYT, M., 1990, *Introduction to finite element vibration analyis*. Cambridge University Press.
- PROKIĆ, A., 2005., On triply coupled vibrations of thin-walled beams with arbitrary cross-section. ELSERVIER, Journal of Sound and Vibration 279 (2005) 723-737.

- PROVIDASKIS, C.P., BESKOS, D.E., 1986, “Dynamic analysis of beams by the boundary element method”. *Computers and Structures*, v. 22, n. 6, pp. 957-964.
- QUEIROZ, P.C. DE O., 2010, *Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: ambiente de simulação em JAVA*. Dissertação, mestrado, UFPB, João Pessoa, PB.
- REDDY, J N. , 1993, *An Introduction to the Finite Element Method*. Second Edition, McGraw-Hill.
- RESATOGLU, R., 2005. THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF NON-PLANAR COUPLED SHEAR WALLS SUBJECT TO LATERALS FORCES. PHD THESIS, CUKUROVA UNIVERSITY.
- RIBEIRO, S.R. de S., 2007, ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PÓRTICOS E PAREDES DE SECÇÃO ABERTA EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS. Dissertação, mestrado. USP – São Carlos, SP.
- RIZZO, F.J., 1967, “An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics”. *Q Appl Math*, v. 25, pp. 83–95.
- SADD, H. M., 2009, *Elasticity – Theory, Applications and Numerics*. Elsevier Inc – Oxford, UK, 2-Ed.
- SAINT-VENANT, B., 1855, *Memoire sur la torsion des prismes. memoires des savants etrangers.*, v.14, pp.233-56.
- SAPOUNTZAKIS, E.J., DOURAKOPOULOS, J.A., 2008, “Shear deformation effect in flexural-torsional vibrations of beams by BEM” *Springer-Verlag Computers and Structures*, v. 77, pp. 659-667.
- SAPOUNTZAKIS, E.J., 2000, “Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method”. *Computers and Structures*, v. 77, pp. 659-667.

- SAPOUNTZAKIS. E.J., MOKOS. V.G., 2003, “*Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM*”. Computat DOI 10.1007/s00466-002-0373-4, journal Mechanics, v.30, pp. 131–142, Springer-Verlag.
- SCHANZ, M.; ANTES H., 2001, “*A Boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko Beam*”. In: *Advances in Boundary Element Techniques II* , pp. 475-482.
- SCHERYER, H., RAMM, W., W, WAGNER., 1967, *Estatica de las Estructuras*. Editorial Blume, Tomo 2. Madrid.
- SILVA, M.R., 1996, *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado*. Tese, doutorado, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- SOUZA JUNIOR, E., 2001, *Analysis of interaction between shear/core walls and slab in high buildings*. Tese,doutorado, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- SOUZA, M.R.A., MENDONÇA. A.V., 2008, “*Análise dinâmica de uma viga de timoshenko apoiada sobre base elastica utilizando equações integrais: um caso particular*”. VIII ERMAC, 8^o Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. UFRN.
- SOUZA, V.J. , 2001, *Algoritmos de integração eficientes para os métodos dos elementos de contorno tridimensional*. Dissertação, mestrado, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- TANAKA, M. BERCIM., A. N.,1999, *Free vibration solution for uniform beams of nonssymmetrical cross section using Matematica*. Comput. Struct. V.71, pp1-8.
- TARANATH, B.S. 1968, *Torsional behaviour of open section shear wall structures*. PhD Thesis. University of Southampton.

- TEIXEIRA, A. H., GODOY, N. S., Análise projeto e execução de fundações rasas. In: Hachich, W. et al., ed. Fundações, teoria e prática. São Paulo, PINI. Cap 7, pp. 227-264.
- TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., 1970, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York.
- TIMOSHENKO, S. P., YOUNG, D.Y., 1961, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Edition, D. van Nostrand, New York.
- TORRES, I.F.R., 1999, *Efeito da deformação por cortante no cálculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais*. Dissertação, Mestrado, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.
- VANZUIT, R.J., 2007, *Análise do fluxo bidimensional de calor pelo método dos elementos de contorno com soluções fundamentais independentes do tempo*, Dissertação, mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
- VLASOV, V. Z., 1961, *Thin walled elastic structures*, translated for the Russian–Israeli Program for Scientific Translation, Jerusalem.
- WANG, C.M., 1995, “*Timoshenko Beam-Bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions*”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE.
- WANG,C.M., READDY, J.W., LEE, K.H., 2000, *Shear deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions*, Elsevier Science Ltd, Kidlington, Oxford, UK.