



Universidade Federal da Paraíba
Campus I – Centro de Tecnologia
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
Mestrado - Doutorado

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE VIGAS LAMINADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por

Paulo Cavalcante do Nascimento Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção do grau de Mestre.

PAULO CAVALCANTE DO NASCIMENTO JÚNIOR

**ANÁLISE ESTATÍCA E DINÂMICA DE VIGAS LAMINADAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Ângelo Vieira Mendonça

João Pessoa – Paraíba

Julho, 2013

N244a Nascimento Júnior, Paulo Cavalcante do.
Análise estática e dinâmica de vigas laminadas pelo
Método dos Elementos de Contorno / Paulo Cavalcante do
Nascimento Júnior.- João Pessoa, 2013.
125f. : il.
Orientador: Ângelo Vieira Mendonça
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CT
1. Engenharia mecânica. 2. Métodos dos Elementos de
Contorno (MEC). 3. Vigas laminadas. 4. Solução fundamental.
5. Equação integral.

UFPB/BC

CDU: 621(043)

ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGAS LAMINADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

PAULO CAVALCANTE DO NASCIMENTO JÚNIOR

Dissertação aprovada em 26 de julho de 2013


Prof. Dr. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA
Orientador – UFPB


Prof. Dr. ROBERTO LEAL PIMENTEL
Examinador Interno - UFPB


Profa. Dra. SELMA HISSAE SHIMURA DA NÓBREGA
Examinadora Externa – UFRN

João Pessoa - PB

2013

*Dedico este trabalho ao meu
pai, meu fã incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por dar-me a condição de perseguir os sonhos com força e coragem durante toda esta longa caminhada.

Agradeço à minha família. Meus amados pais, Paulo e Maria, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida. Às minhas irmãs, Monique e Jaqueline, por serem tão carinhosas, prestativas e cúmplices. Ao meu querido sobrinho, João Flávio, que nos presenteia, todos os dias, com sua alegria. E ao meu primo-irmão, Ednaldo, pela sua fiel e inesgotável amizade.

Agradeço, também, a minha maravilhosa e apaixonante namorada, Camilla, que me conforta com sua gentileza, companherismo e amor.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação pelas contribuições formais e informais, incentivos e exemplos. E, em especial, ao professor Ângelo Viera Mendonça que me recebeu como orientando oferecendo-me todo o apoio acadêmico para desenvolver nossos projetos.

Agradeço aos amigos que me acompanharam durante a vida acadêmica, desde o Colégio Militar, passando pelo Colégio Agrícola Vidal de Negreiros, até a chegar a Graduação e Pós-Graduação na Universidade Federal da Paraíba. E aqueles que de tão especiais tornaram-se meus cumpadres, Wellington Roberto e Adjamir.

À todos, agradeço por acreditarem no meu potencial, nos meus ideais e nos meus devaneios, principalmente quando nem eu mais acreditava.

RESUMO

As vigas de compósitos laminados são componentes estruturais que têm despertado grande interesse na indústria mecânica, principalmente por prover componentes de alta razão resistência-peso, o que as tornam particularmente aplicável à indústria automobilística e aeronáutica. Nas últimas décadas as soluções dos modelos matemáticos de vigas laminadas têm sido estabelecidas na forma analítica ou numérica. Para o último caso, as soluções têm sido construídas na filosofia do método dos elementos finitos (MEF). Nesta dissertação uma nova solução baseada no Método dos Elementos de Contorno (MEC) para as teorias de vigas laminada clássica e de primeira ordem são estabelecidas para carregamentos estáticos. Além disso, a solução para o MEC é estendida para lidar com carregamento dinâmico harmônico sob a hipótese da Teoria Clássica de viga. Nas discussões sobre as etapas matemáticas são descritas as equações integrais e as soluções fundamentais para os problemas de vigas laminadas. A partir das formulações aqui propostas, códigos são implementados na linguagem C++, capaz de fornecer deslocamentos e esforços no contorno e no domínio da viga. Assim como, as frequências naturais. Além disso, os resultados numéricos, comparados com as soluções analíticas disponíveis na literatura, se mostraram de boa qualidade.

Palavras-Chave: MEC, Vigas Laminadas, Solução Fundamental, Equação Integral.

ABSTRACT

The laminated composite beams are structural components which have aroused great interest in mechanical industry due to providing components of high strength-to-weight ratio, which make them particularly suitable to the automotive and aerospace industry. In recent decades the solutions of mathematical models for laminated beam have been established in an analytical or numerical form. The latter have been built based on finite element method (FEM) philosophy. In this work a new solution based on Boundary Element Method (BEM) for both classical and for first order laminated beam theory for static loading is established. In addition, the BEM solution is extended to deal with harmonic loading under classic beams theory hypothesis. Discussions on mathematical steps to write down both integral equations and fundamental solutions for laminated beam problem are properly made. From the formulations here proposed, codes are implemented in C++, providing displacements and efforts at the boundary and domain of the beam. In addition, numerical results for typical cases are presented as well.

Keywords: BEM, Laminated beam, Fundamental solution, Integral Equation.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
1.3 OBJETIVOS	2
1.4 ORGANIZAÇÕES DO TRABALHO	2
CAPÍTULO 2	4
FUNDAMENTOS DE VIGAS LAMINADAS	4
2.1 INTRODUÇÃO	4
2.2 CÓDIGOS DOS LAMINADOS	4
2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O 3D	6
2.3.1 RELAÇÃO TENSÃO DEFORMAÇÃO GENERALIZADA PARA O 3D	9
2.3.2 RELAÇÃO CONSTITUTIVA REDUZIDA AO ESTADO PLANO DE TENSÃO.....	10
2.4 TEORIAS DE VIGAS LAMINADAS	11
2.4.1 TEORIA CLÁSSICA DE VIGAS LAMINADAS (TCVL)	11
2.4.2 TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DE VIGAS LAMINADAS (TPVL)	18
CAPÍTULO 3	24
MEC EM VIGAS CLÁSSICAS LAMINADAS: ANÁLISE ESTÁTICA	24
3.1 INTRODUÇÃO	24
3.2 PROBLEMA FUNDAMENTAL DE VIGAS LAMINADA.....	24
3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL	32
3.4 EQUAÇÃO ALGÉBRICA	35
CAPÍTULO 4.....	50
MEC EM VIGAS LAMINADAS DE PRIMEIRA ORDEM: ANÁLISE ESTÁTICA	50
4.1 INTRODUÇÃO	50
4.2 PROBLEMA FUNDAMENTAL.....	50
4.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS	56
4.4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	60

CAPÍTULO 5	67
TEORIA CLÁSSICA DE VIGAS LAMINADAS (ANÁLISE DINÂMICA)	67
5.1 INTRODUÇÃO	67
5.2 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO	67
5.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL	70
5.4 EQUAÇÃO INTEGRAL	82
5.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA	84
CAPÍTULO 6	90
CONCLUSÃO	99
REFERÊNCIAS	100
ANEXO I	102
ANEXO II	104

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 LAMINADO NÃO SIMÉTRICO: CASO 1	5
FIGURA 2.2 LAMINADO CASO 2.....	5
FIGURA 2.3 LAMINADO CASO 3.....	5
FIGURA 2.4 LAMINADO CASO 4.....	6
FIGURA 2.5 LAMINADO CASO 5.....	6
FIGURA 2.6 ORIENTAÇÃO DAS FIBRAS NA LÂMINA	7
FIGURA 2.7 (A) VIGA LAMINADA; (B) AÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS; (C) EQUILÍBRIO NO ELEMENTO DIFERENCIAL	13
FIGURA 2.8 CINEMÁTICA DA VIGA LAMINADA EM FLEXÃO NO PLANO XZ	14
FIGURA 2.9 NUMERAÇÃO DAS LÂMINAS DA VIGA.....	16
FIGURA 2.10 (A) BARRA LAMINADA SOB CARREGAMENTOS; (B) BARRA ELEMENTAR EM EQUILÍBRIO.....	19
FIGURA 2.11 CINEMÁTICA DA VIGA EM FLEXÃO NO PLANO XZ	20
FIGURA 3.1 EQUILÍBRIO FUNDAMENTAL: (A) PX^* ATIVADO; (B) PZ^* ATIVADO; (C) BARRA FUNDAMENTAL; DESLOCAMENTOS FUNDAMENTAIS: (D) PX^* ATIVADO; (E) PZ^* ATIVADO	25
FIGURA 3.2 (A) ESFORÇOS REAIS (TCVL); (B) DESLOCAMENTOS REAIS (TCVL).....	38
FIGURA 4.1 EQUILÍBRIO FUNDAMENTAL: (A) MY^* ATIVADO; (B) PX^* ATIVADO; (C) PZ^* ATIVADO; (D) BARRA FUNDAMENTAL; DESLOCAMENTOS FUNDAMENTAIS: (E) MY^* ATIVADO; (F) PX^* ATIVADO; (G) PZ^* ATIVADO	51
FIGURA 4.2 (A) ESFORÇOS REAIS (TPVL); (B) DESLOCAMENTOS REAIS (TPVL).....	62
FIGURA 5.1 (A) BARRA LAMINADA SOB CARREGAMENTO; (B) ELEMENTO INFINITESIMAL DA BARRA EM EQUILÍBRIO.....	68
FIGURA 5.2 EQUILÍBRIO FUNDAMENTAL: (A) PX^* ATIVADO; (B) PZ^* ATIVADO; (C) PZ^* ATIVADO. DESLOCAMENTOS FUNDAMENTAIS: (D) PX^* ATIVADO; (E) PZ^* ATIVADO.....	72
FIGURA 6.1 VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOB CARREGAMENTO TRAPEZOIDAL	91

LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL MÁXIMO $w(M)$ DA VIGA BIAPOIDA	90
TABELA 6.2 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL MÁXIMO $w(M)$ DA VIGA BIENGASTADA.....	91
TABELA 6.3 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $w(M)$ E INCLINAÇÃO DA ELÁSTICA $DW/DX(RAD)$ MÁXIMOS COM LAMINADO SIMÉTRICO.....	92
TABELA 6.4 DESLOCAMENTOS AXIAL $u(M)$, TRANSVERSAL $w(M)$ E INCLINAÇÃO DA ELÁSTICA $DW/DX(RAD)$ MÁXIMOS COM LAMINADO SIMÉTRICO.....	93
TABELA 6.5 DESLOCAMENTO ADMENSIONALIZADO $\bar{W}$ COM $[0/90/0]$	94
TABELA 6.6 DESLOCAMENTO ADIMENSIONALIZADO $\bar{W}$ COM $[0/90]$	94
TABELA 6.7 DESLOCAMENTO ADIMENSIONALIZADO $\bar{W}$ COM $[0/90/0]$	94
TABELA 6.8 DESLOCAMENTO ADIMENSIONALIZADO $\bar{W}$ COM $[0/90]$	95
TABELA 6.9 FREQUÊNCIA NATURAL ADIMENSIONAL Ω DE UMA VIGA LAMINADA SIMÉTRICA BIAPOIDA.....	95
TABELA 6.10 FREQUÊNCIA NATURAL ADIMENSIONAL Ω DE UMA VIGA LAMINADA NÃO SIMÉTRICA 02/902 BIAPOIDA	96
TABELA 6.11 FREQUÊNCIA NATURAL ADIMENSIONAL Ω DE UMA VIGA LAMINADA NÃO SIMÉTRICA 302/602 BIAPOIDA	97
TABELA 6.12 FREQUÊNCIA NATURAL ADIMENSIONAL $\bar{\Omega}$ DE UMA VIGA LAMINADA SIMÉTRICA SIMPLEMENTE APOIADA.....	98
TABELA 6.13 FREQUÊNCIA NATURAL ADIMENSIONAL $\bar{\Omega}$ DE UMA VIGA LAMINADA SIMÉTRICA BI ENGASTADA.....	98
TABELA 6.14 FREQUÊNCIA NATURAL ADIMENSIONAL $\bar{\Omega}$ DE UMA VIGA LAMINADA SIMÉTRICA ENGASTADA-LIVRE	98

LISTA DE ABREVIATURAS

ESL	- Equilibrium Single Layer
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
sgn	- Função sinal
TRP	- Técnica dos Resíduos Ponderados
TCVL	- Teoria Clássica Vigas Laminadas
TPVL	- Teoria de Primeira ordem de Vigas Laminadas

LISTA DE SÍMBOLOS

b	- Espessura
p	- Constantes
q	- Constantes
Δ	- Constantes
a_1, a_2, a_3	- Constantes
b_1, b_2, b_3	- Constantes
c_1, c_2, c_3	- Constantes
d_1, d_2, d_3	- Constantes
e_1, e_2, e_3	- Constantes
g_1, g_2, g_3	- Constantes
j_1, j_2, j_3	- Constantes
m_1, m_2, m_3	- Constantes
f_i	- Elementos do vetor carregamento
h	- Altura da seção
m_y	- Momento distribuído externo em y
p_x, p_z	- Forças nas coordenadas indicadas
$\tilde{p}_x$	- Carregamento harmônico axial distribuído para coordenada x
$\tilde{p}_z$	- Carregamento harmônico axial distribuído para coordenada z
r	- Módulo da distância entre o ponto fonte e o ponto campo
u_i	- Componente de deslocamento na direção i
$\tilde{u}$	- Deslocamento harmônico na direção x
u, w, φ	- Deslocamentos segundo as direções x, z e rotação da seção transversal

$\bar{u}, \bar{w}$	- Campo de deslocamentos segundo as coordenadas x e z
χ	- Ponto campo, incógnita
$\hat{\chi}$	- Coordenada do ponto fonte
x, y, z	- Coordenadas do sistema generalizado
z	- Profundidade da linha de interesse em relação a linha neutra
x_1, x_2, x_3	- Coordenadas do sistema principal da lâmina
y	- Variável do polinômio característico
ψ	- Função escalar
w_F^*, w_P^*, w_m^*	- Solução fundamental em deslocamentos
$\phi_F^*, \phi_P^*, \phi_m^*$	- Solução fundamental em rotação
A_1, A_2, A_3	- Constantes
C_1, C_2, C_3	- Coeficientes do polinômio característico
y_1, y_2, y_3	- Raízes do polinômio característico
u_k, v_k	- Variáveis de substituição
θ	- Argumento da solução do polinômio característico
D	- Constantes
L	- Comprimento
N_x	- Força normal
M_y	- Momento fletor
$M_{yF}^*, M_{ym}^*, M_{yP}^*$	- Momentos fletores fundamentais
$N_{xF}^*, N_{xm}^*, N_{xP}^*$	- Forças normais fundamentais
$N_{yP, \hat{\chi}}^*$	- Derivada em $\hat{\chi}$ (ponto fonte) da força normal fundamental
$M_{yP, \hat{\chi}}^*$	- Derivada em $\hat{\chi}$ (ponto fonte) do momento fletor fundamental
V_z	- Força cortante na direção z
$V_{zF}^*, V_{zP}^*, V_{zm}^*$	- Forças cortantes fundamentais
$V_{zP, \hat{\chi}}^*$	- Derivada em $\hat{\chi}$ (ponto fonte) do esforço cortante fundamental
α_{ij}	- Coeficientes da matriz de influência [H]

k_{51}	- Elemento da matriz de influência [G] para TPVL
β_{ij}	- Coeficientes da matriz de influência [G]
φ	- Rotação da seção transversal
$\delta(x, \hat{x})$	- Delta de Dirac
ε_i	- Componentes de deformação do vetor deformação
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	- Deformação no eixo x, deformação no eixo y, deformação no eixo z.
E_{ij}	- Módulo de elasticidade transversal
G_{ij}	- Módulo de cisalhamento
$\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{55}$	- Elementos da matriz de rigidez do material transformada
$A_{11}, B_{11}, D_{11},$	- Módulos de rigidez
A_{55}	- Módulo de rigidez de cisalhamento
ν_{ij}	- Coeficiente de Poisson
σ_i	- Componentes de tensão
σ_x	- Tensão normal à direção x
σ_y	- Tensão normal na direção y
σ_z	- Tensão normal na direção z
τ_{yz}	- Tensão de cisalhamento no plano yz
τ_{xz}	- Tensão de cisalhamento no plano xz
τ_{xy}	- Tensão de cisalhamento no plano xy
ξ	- Valor infinitesimal
$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	- Distorção no plano yz, distorção no plano xz, distorção no plano xy
κ	- Coeficiente de cisalhamento (fator de forma)
$\{f\}$	- Vetor dos carregamentos
$F_1, \dots, F_6$	- Coeficiente da substituição para o vetor dos carregamentos
f_{Ix}, f_{Iz}	- Forças de inércia nas direções x e z
I_1	- Coeficiente para o modelo dinâmico
S_1	- Coeficiente que relaciona I_1 à frequência
ω	- Frequência de trabalho
$\{\sigma\}_x$	- Vetor componente de tensor das coordenadas generalizada
$\{P\}$	- Vetor dos esforços

$\{u\}$	- Vetor dos deslocamentos
$[B]$	- Matriz dos operadores
$[B^{cof}]$	- Matriz dos cofatores da matriz $[B]$
$[C]$	- Matriz dos deslocamentos fundamentais
$[Q]$	- Matriz de rigidez do material
$[G]$	- Matriz dos coeficientes de influência
$[T]$	- Matriz de transformação do material
$[T]^t$	- Matriz transposta de $[T]$
$[I]$	- Matriz identidade

CAPÍTULO 1

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Materiais compostos laminados são, geralmente, feitos de materiais concebidos pela montagem de camadas orientadas que são fabricadas para maximizar a relação resistência-peso, especialmente em aplicações de engenharia (inicialmente na aeronáutica devido à necessidade na diminuição do peso dos materiais). Atualmente, os materiais compostos são também encontrados em outras áreas como nas indústrias automobilística e esportiva.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As vigas laminadas têm sido matematicamente representadas por teorias de vigas associadas com o modelo de Camada Simples Equivalente (CSE) e modelo de Camadas Discretas (CD), segundo REDDY (1997). A família de modelos CSE consiste em substituir convenientemente as diversas camadas por uma única equivalente e graus de liberdade apenas no eixo médio do laminado. Já na família CD cada camada é representada distintamente com graus de liberdade geralmente posicionados nas interfaces que os contém. Recomenda-se REDDY (1997) para um aprofundamento mais adequado nos modelos CD.

Os modelos da família CSE são basicamente: Teoria Clássica, Teoria de Primeira Ordem, Teoria de Segunda Ordem e Teoria de Alta Ordem, sendo as Teorias de vigas Clássicas e de Primeira Ordem as mais usuais, que podem ser vistas como uma adaptação das hipóteses das teorias de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko para materiais compósitos laminados.

A análise estrutural de vigas baseada na Teoria Clássica Vigas Laminadas foi desenvolvida usando soluções analíticas e numéricas. Para o primeiro caso, as soluções podem ser encontradas para os casos especiais, como por exemplo, KHDEIR e REDDY (1997), CHANDRASHEKHARA e KRISHNAMURTHY (1990), KARGARNOVIN et al.

(2013), e, HAN et al. (2010). Quando os problemas de vigas laminadas são resolvidos através de soluções numéricas, elas são realizadas majoritariamente pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), o que pode ser constatado pelo minucioso artigo de revisão de HAJIANMALEKI e QATU (2013).

Para muitos problemas da engenharia, o Método de Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica alternativa ao MEF, no entanto, esse não é o caso de problemas de vigas laminadas. De fato, as soluções do MEC foram aplicadas apenas para análise estática e dinâmica das vigas e pórticos feitos de materiais homogêneos, por exemplo, BANERJEE (1981), ANTES (2003), PROVIDAKIS e BESKOS (1986), CRUZ (2012), ANTES et. al. (2004).

1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar em C++ a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para Teoria Clássica e Teoria de Primeira Ordem de vigas laminadas sob ações estáticas e dinâmicas apenas para Teoria Clássica, o que implica na dedução das equações integrais, soluções fundamentais e representação algébrica do sistema.

1.4 ORGANIZAÇÕES DO TRABALHO

Inicialmente, no Capítulo 2, estabelece-se a equação constitutiva geral para vigas laminadas, em seguida, a fundamentação das Teorias Clássicas e de Primeira Ordem de vigas laminadas.

Nos Capítulo 3, Capítulo 4 e Capítulo 5 serão realizadas as formulações minuciosas do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Bem como, suas equações integrais, soluções fundamentais, equações algébricas, solução do problema no contorno e nos campos do domínio. Para as Teoria Clássica de Vigas Laminadas (TCVL), nos Capítulos 3 (análise estática) e Capítulo 5 (análise dinâmica harmônica), e para Teoria de Primeira ordem de Vigas Laminadas (TPVL), no Capítulo 4 (análise estática).

No Capítulo 6, apresentam-se os resultados para as TCVL e TPVL comparados com os presentes nas literaturas, conclusão, sugestão para trabalhos futuros e referências bibliográficas.

Finalmente, são apresentados dois anexos associados, respectivamente, a solução analítica para as frequências naturais de uma viga simplesmente apoiada e a geração do vetor de carga para carregamentos trapezoidais axial e transversalmente aplicados na viga.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DE VIGAS LAMINADAS

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão desenvolvidas as equações de equilíbrio estático de vigas laminadas para as Teorias Clássica e de Primeira Ordem. As discussões deste capítulo foram baseadas em HAJIANMALEKI e QATU (2011), VINSON e SIERAKOWSKI (2004), REDDY (1997).

Inicialmente serão discutidas as relações constitutivas tridimensionais; em seguida, faz-se uma redução para o estado plano e só então, o equacionamento matemático será deduzido para a representação de vigas.

Inicialmente será desenvolvido os códigos dos laminados; em seguida, serão discutidas as relações constitutivas tridimensionais; posteriormente, faz-se uma redução para o estado plano e só então, o equacionamento matemático será deduzido para a representação de vigas.

2.2 CÓDIGOS DOS LAMINADOS

Os compostos laminados consistem de mais de uma lâmina unida, de naturezas diferentes, ou não, resultando em um material de desempenho superior, aquele de seus componentes, se analisados separadamente. Para as lâminas de fibras reforçadas unidirecionais, suas propriedades mecânicas, na direção transversal das fibras, são severamente limitadas. Portanto, para suprir este problema, fazendo-se empilhamentos de lâminas com diferentes angulações.

Cada lâmina pode ser distinguida por: seu material, a posição e orientação no laminado de fibra em relação ao eixo de referência. Na representação do código quanto à orientação, os ângulos das camadas são representados separadamente por barras. Além disso,

notações especiais são usadas para laminados simétricos e laminados com lâmina adjacente da mesma orientação, ou de ângulos opostos, conforme pode ser encontrada em várias literaturas como discutido por KUMAR (2011). Os exemplos a seguir ilustram a notação de códigos dos laminados:

- a) Caso 1: Seja um laminado não simétrico conforme indicado na Fig. (2.1)

0
-30
45
60
90

Figura 2.1 Laminado não simétrico: caso 1

A representação do caso 1 (Fig. (2.1)) é dado pelo código de laminado $[0/-30/45/60/90]$, o qual indica que o laminado é constituído por cinco camadas, cada uma delas possuindo um ângulo diferente em relação ao eixo de referência x, e a segunda camada, tem ainda, um ângulo oposto, também em relação ao eixo de referência x. O código indica ainda que cada camada é feita do mesmo material e tem a mesma espessura.

- b) Caso 2: Seja um laminado não simétrico conforme mostrado na Fig. (2.2)

0
30
30
60
90

Figura 2.2 Laminado caso 2

O código de laminado indicado na Fig. (2.2) é representado por $[0/30_2/60/90]$ onde as duas camadas de 30° são adjacentes e indicadas por 30_2 , e o índice 2 indica o número de camadas adjacentes de mesmo ângulo.

- c) Caso 3: Seja um laminado não simétrico conforme mostrado na Fig. (2.3)

0
90
0
90
0
90

Figura 2.3 Laminado caso 3

A representação do laminado da Fig. (2.3) tem o código como $[0/90]_3$, onde o subscrito 3 indica que as lâminas com ângulo 0° e 90° se repetem aos pares três vezes.

d) Caso 4: Seja um laminado simétrico como apresentado na Fig. (2.4)

0
30
60
0
30
60

Figura 2.4 Laminado caso 4

O código do caso 4 é dado por $[0/30/60]_s$, sendo o subscrito s o indicador de simetria. As camadas acima do plano médio são da mesma orientação, mesmo material e mesma espessura das camadas abaixo do plano médio, implicando em uma simetria do laminado.

e) Caso 5: Seja um laminado simétrico com materiais distintos como apresentado na Fig. (2.5)

0	Boro Epóxi
60	Grafite Epóxi
-60	Grafite Epóxi
0	Grafite Epóxi
60	Grafite Epóxi
-60	Boro Epóxi

Figura 2.5 Laminado caso 5

O código para o caso da Fig. (2.5) é dado por $[0B/\pm 60Gr]_s$, onde as camadas de angulação 0° são feitas de grafite epóxi e as camadas $\pm 60^\circ$ são concebidas de Boro epóxi. Além disso, a simetria do laminado é seguida a partir da camada 0° e sendo sequenciada pelas camadas $\pm 60^\circ$, que é a notação para indicar que primeiro vem uma camada de angulação $+60^\circ$ e, em seguida, uma camada de ângulo -60° .

2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O 3D

Para os compostos laminados formados de fibras unidirecionais pode ser definido um sistema de eixos ortogonais, como mostrado na Fig.(2.6), contendo orientação x_1 ao longo da direção das fibras, x_2 transversalmente as fibras e x_3 perpendicular aos outros dois eixos. O sistema x_1 , x_2 e x_3 também é conhecido como eixos principais do material.

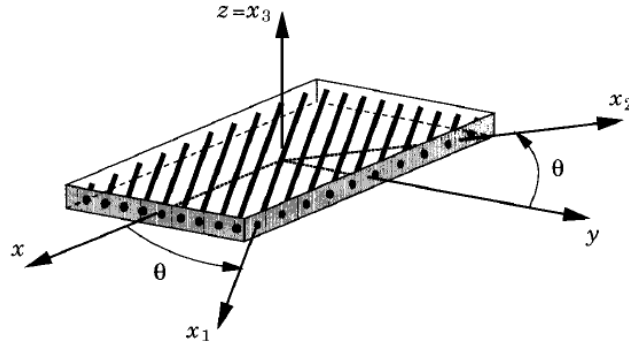


Figura 2.6 Orientação das fibras na lâmina

Fonte: REDDY (1997)

A matriz da relação deformação-tensão de um material ortotrópico em relação ao plano principal do material da Fig. (2.6) pode ser apresentada como REDDY (1997):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

De forma mais simples,

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.2)$$

Onde $\{\sigma\}$ é o vetor das componentes do tensor de tensão, $\{\varepsilon\}$ é o vetor das componentes do tensor de deformação e $[S]$ é a matriz de flexibilidade de um material ortotrópico dada por:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Sendo ν_{ij} os coeficientes de Poisson, E_{ij} os módulos de elasticidade (módulo de Young) e G_{ij} módulos de cisalhamento nas direções principais do material.

A Eq. (2.1) pode ainda ser escrita na sua forma inversa resultando na relação tensão-deformação, sendo $[Q]$ a matriz de rigidez do material (matriz constitutiva) dada pela inversa da matriz de flexibilidade $[S]$ na Eq. (2.2). Assim, a relação tensão-deformação pode ser expressa como:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\}$$

Que na forma explícita fica,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Onde os elementos Q_{ij} não nulos da matriz de rigidez são dados por REDDY (1997):

$$Q_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, Q_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}, Q_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, Q_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$Q_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta}, Q_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{31}, Q_{66} = G_{12},$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{31}}{E_1 E_2 E_3}$$

2.3.1 RELAÇÃO TENSÃO DEFORMAÇÃO GENERALIZADA PARA O 3D

Para analisar o comportamento mecânico de um sólido laminado é fundamental a definição de um sistema de eixos coordenados generalizado (x, y, z) juntamente com o sistema de eixos coordenados da lâmina (x₁, x₂, x₃), mostrado na Fig. (2.6), onde θ é o ângulo entre os eixos coordenados x₁ (ao longo da direção das fibras) e o eixo de referência x, e é também o ângulo entre os eixos x₂ (transversalmente as fibras) e o eixo de referência y, por fim o eixo direção z coincide com o eixo x₃. Para a determinação da relação tensão-deformação em uma direção qualquer é necessária a definição de uma matriz de transformação [T], que relaciona o vetor das componentes do tensor de tensão da coordenadas generalizadas $\{\sigma\}_x$ e o vetor das componentes de tensor de tensão da coordenadas do laminado $\{\sigma\}$:

$$\{\sigma\}_x = [T]\{\sigma\} \quad (2.5)$$

Com,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Portanto, pode-se escrever a relação tensão-deformação generalizada como:

$$\{\sigma\}_x = [T][Q][T]^T\{\epsilon\}_x \quad (2.6)$$

Onde $[T]^T$ é a matriz transformação transposta, [Q] é a matriz de rigidez de um material ortotrópico,

$$\{\sigma\}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \text{ e } \{\varepsilon\}_x = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

2.3.2 RELAÇÃO CONSTITUTIVA REDUZIDA AO ESTADO PLANO DE TENSÃO

A relação constitutiva para o Estado Plano de Tensão de uma placa laminada pode ser apresentada fazendo-se uma redução de ordem na relação constitutiva generalizada tomando $\sigma_3 = 0$. Para este caso as distorções γ_{yz} e γ_{xz} , nos planos y-z e x-z respectivamente, podem ou não ser negligenciadas, no caso em que as distorções são consideradas, a relação constitutiva para o Estado Plano de Tensão é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.7a-b)$$

Onde $\bar{Q}_{ij}$ os elementos da matriz de rigidez material que são dados por;

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})\sin\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde:

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}$$

$$Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22}$$

$$Q_{44} = G_{23}$$

$$Q_{55} = G_{31}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

No caso em que as distorções são negligenciadas a Eq. (2.7a-b) se resume a Eq. (2.7a).

2.4 TEORIAS DE VIGAS LAMINADAS

Na análise de vigas laminadas as duas teorias mais comumente exploradas da família CSE são: a teoria clássica de vigas laminadas (TCVL) e Teoria de Primeira ordem de Vigas de Laminadas (TPVL), que no caso de vigas homogêneas são denominadas Teoria de Euler-Bernoulli e Teoria de Timoshenko, respectivamente. No desenvolvimento da TCVL a distorção (γ_{xz}), no plano x-z é negligenciada, assim o estudo da viga será em função dos deslocamentos axial e transversal e da derivada do deslocamento transversal (inclinação da elástica transversal). Por outro lado, para TPVL distorção (γ_{xz}), no plano x-z, não é desprezada, fazendo com que a análise da viga seja em função dos deslocamentos axial e transversal e da rotação da seção.

As equações governantes de um sistema de corpos deformáveis são geradas aplicando-se princípios físicos (tais como balanço de forças e momento), descrição do movimento e mudanças de forma (relações cinemáticas), e relações constitutivas que regem a relação entre tensões e deformações do meio constituinte do sistema. Com base nesses três fundamentos, as teorias de vigas laminadas serão apresentadas a seguir.

2.4.1 TEORIA CLÁSSICA DE VIGAS LAMINADAS (TCVL)

Para o desenvolvimento da teoria clássica de vigas laminadas serão assumidas as seguintes hipóteses:

- i. O laminado é composto por camadas que são perfeitamente unidas;
- ii. O material de cada camada deve ser elástico-linear e possuir três planos de simetria (ortotrópico);
- iii. As camadas possuem espessura uniforme;
- iv. As deformações e os deslocamentos são pequenos;
- v. As tensões de cisalhamento transversais sobre as superfícies superior e inferior do laminado são zero;
- vi. A seção transversal inicialmente plana permanece plana e ortogonal ao eixo da viga deformado;
- vii. A flexão é observada segundo um eixo principal de inércia (no caso eixo y).

Para o desenvolvimento da TCVL será adotado um sistema coordenadas onde y e z são os eixos principais de inércia de uma barra prismática de comprimento L submetida aos carregamentos p_x , p_z mostrado na Fig. (2.7a).

Fazendo o equilíbrio de forças e de momentos em vigas, utilizando a segunda lei de Newton, a partir do diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal da viga Fig. (2.7b), na direção x e na direção z, e em torno do eixo y, respectivamente, tem-se:

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = 0$$

$$\frac{dV_z}{dx} + p_z = 0$$

$$V_z - \frac{dM_y}{dx} = 0 \quad (2.9a-c)$$

Onde M_y é o momento fletor, V_z é a força de cisalhamento (cortante) e N_x é a força normal.

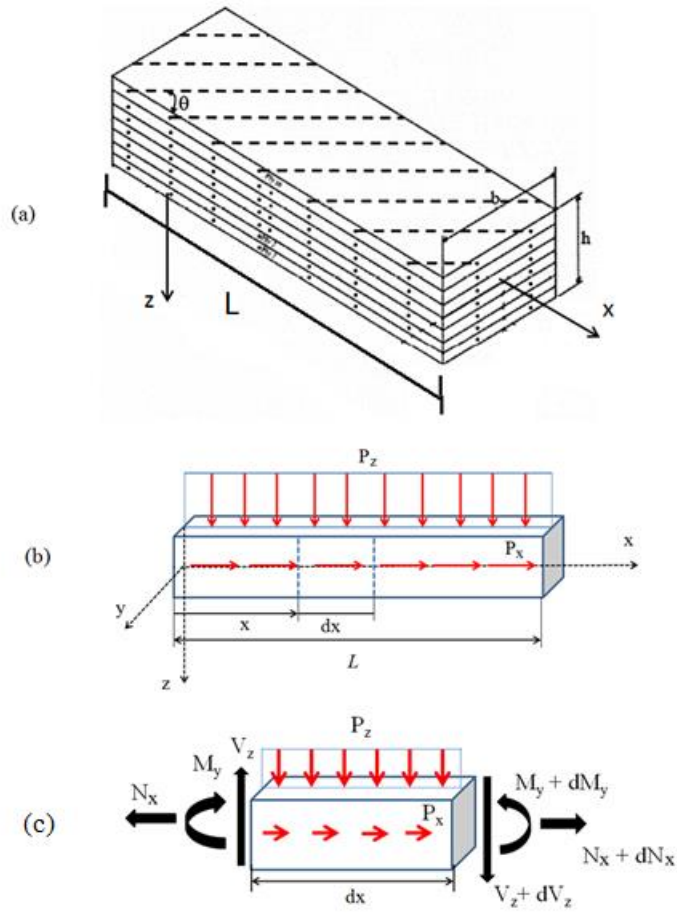


Figura 2.7 (a) Viga laminada; (b) Ação de forças externas; (c) Equilíbrio no elemento diferencial

Portanto, substituindo a Eq. (2.9c) na Eq. (2.9b) tem-se,

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0$$

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + p_z = 0 \quad (2.10a-b)$$

Como as hipóteses da cinemática da viga clássica admitem a ortogonalidade entre a seção transversal e o eixo longitudinal da barra na flexão, isto implica que a deformação por cortante é nula $\gamma_{xz} = 0$. Além disso, devido a conservação da planicidade da seção transversal e aos seus movimentos translacionais e rotacionais indicados na Fig. (2.8), os deslocamentos axial e transversal após a deformação, $\bar{u}(x, z)$ e $\bar{w}(x, z)$, respectivamente, são dados por:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, z) &= u(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \\ \bar{w}(x, z) &= w(x)\end{aligned}\tag{2.11a- b}$$

Onde $u(x)$ e $w(x)$ são os deslocamentos axial e transversal. Já a deformação axial é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{u}(x, z)}{dx}\tag{2.12}$$

Substituindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.12), a deformação fica expressa como,

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2}\tag{2.13}$$

Onde z é a profundidade da fibra de interesse em relação à linha neutra na Fig. (2.8).

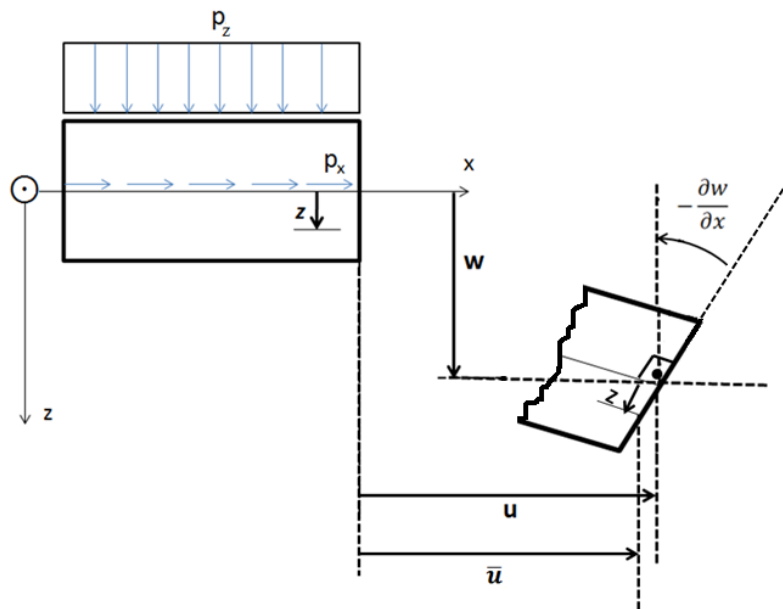


Figura 2.8 Cinemática da viga laminada em flexão no plano xz

Para vigas laminadas, a relação tensão-deformação pode ser deduzida a partir do Estado Plano de Tensão dado pela Eq. (2.7). Como, no caso das vigas, uma dimensão é muito

maior que as outras duas, as tensões normal e tangencial na direção do eixo y (σ_y e τ_{xy}), e a tensão tangencial na direção z (τ_{yz}) são consideradas desprezíveis. Destas relações obtêm-se as equações,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \bar{Q}_{11}\varepsilon_x \\ \tau_{xz} &= \bar{Q}_{55}\gamma_{xz}\end{aligned}\tag{2.14a-b}$$

Onde $\bar{Q}_{11}$ e $\bar{Q}_{55}$ são elementos da matriz de rigidez transformada que podem ser relacionada com a tensão reduzida a um plano de rigidez em eixos principais do material (x_1 , x_2), como se segue

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta\tag{2.15}$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta\tag{2.16}$$

Convém notar que a Eq. (2.15) e Eq. (2.16) fazem parte do conjunto de relações apresentadas na Eq. (2.8), repetidas aqui por comodidade.

Como a viga em análise é formada por várias lâminas, as relações constitutivas (tensão-deformação) na k-ésima lâmina, dada na Eq. (2.14), podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)}\varepsilon_x \\ \tau_{xz}^{(k)} &= \bar{Q}_{55}^{(k)}\gamma_{xz}\end{aligned}\tag{2.17a-b}$$

A Eq. (2.14) é a relação tensão-deformação de uma viga laminada onde a distorção não foi desprezada, logo, para o caso da TCVL temos, $\tau_{yz} = 0$. Assim, substituindo a Eq. (2.13) na Eq. (2.17) tem-se,

$$\sigma_x^{(k)} = \bar{Q}_{11}^{(k)}\left(\frac{du(x)}{dx} - z\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\tag{2.18}$$

Devido à variação na continuidade das tensões de uma camada para outra nos laminados, a força normal (N_x) e o momento fletor (M_y), segundo REDDY (1997) são dados pelas equações:

$$N_x = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_x^{(k)} dz$$

$$M_y = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \sigma_x^{(k)} dz \quad (2.19a-b)$$

Onde b é largura da barra e h_k é a coordenada superior de inércia da lâmina, vide Fig. (2.9).

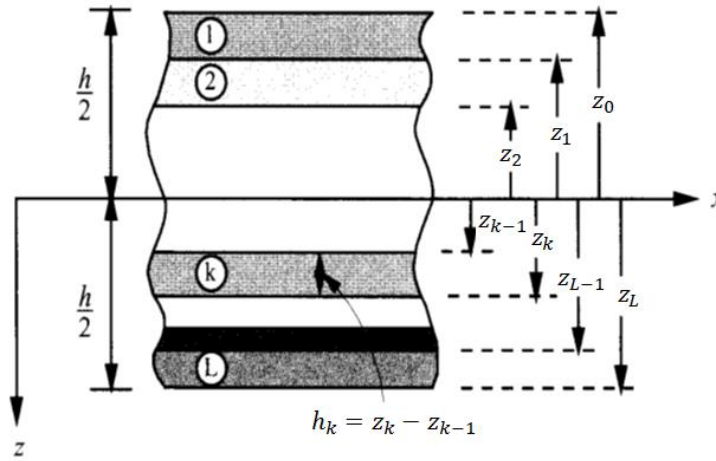


Figura 2.9 Numeração das lâminas da viga

Adaptado: REDDY (1997)

Finalmente as relações esforço-deslocamento podem ser obtidas, substituindo a Eq. (2.18) na Eq. (2.19):

$$N_x = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dz$$

$$M_y = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dz \quad (2.20a-b)$$

De forma resumida a Eq. (2.20) fica:

$$N_x = A_{11} \frac{du}{dx} - B_{11} \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$M_y = B_{11} \frac{du}{dx} - D_{11} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.21a-b)$$

No caso da teoria clássica o esforço cortante não é obtido diretamente da integração na espessura do laminado τ_{xz} (já que o $\gamma_{xz} = 0$) e sim através das equações de equilíbrio resultando em:

$$V_z = \frac{dM_y}{dx} = B_{11} \frac{d^2u}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3w}{dx^3} \quad (2.21c)$$

Onde,

$$A_{11} = \sum_{k=1}^n b \bar{Q}_{11}^{(k)} (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b \bar{Q}_{11}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n b \bar{Q}_{11}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.22a-c)$$

Agora, introduzindo as Eq.(2.21a-b) na Eq.(2.10) obtêm-se a equação governante:

$$A_{11} \frac{d^2u(x)}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3w(x)}{dx^3} = -p_x(x)$$

$$B_{11} \frac{d^3u(x)}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4w(x)}{dx^4} = -p_z(x) \quad (2.23a-b)$$

Que, na forma matricial, ficam assim expressas:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_x \\ -p_z \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

2.4.2 TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DE VIGAS LAMINADAS (TPVL)

As seguintes hipóteses são assumidas para o estudo da TPVL:

- i. As camadas são perfeitamente unidas;
- ii. O material de cada camada deve ser elástico-linear e possuir três planos de simetria (ortotropia);
- iii. As camadas possuem espessura uniforme;
- iv. As deformações e os deslocamentos são pequenos;
- v. As tensões de corte transversais sobre as superfícies superior e inferior do laminado são diferentes de zero;
- vi. A seção transversal permanece plana e não necessariamente ortogonal ao eixo da viga;
- vii. A flexão é observada segundo um dos eixos principais de inércia (no caso y).

As equações de equilíbrio em forças e momentos (real) para a TPVL, que serão geradas a partir de um elemento infinitesimal de barra (ver Fig. (2.10b)) é retirado da barra laminada prismática Fig. (2.10a) de comprimento L, largura b e altura h, submetida aos carregamentos uniformes p_x , p_z e um momento uniformemente distribuído m_y , são dadas por:

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = 0$$

$$\frac{dV_z}{dx} + p_z = 0$$

$$-V_z + \frac{dM_y}{dx} + m_y = 0 \quad (2.25a-c)$$

Onde N_x , V_z , M_y são os esforços reais devidos aos carregamentos p_x , p_z e m_y .

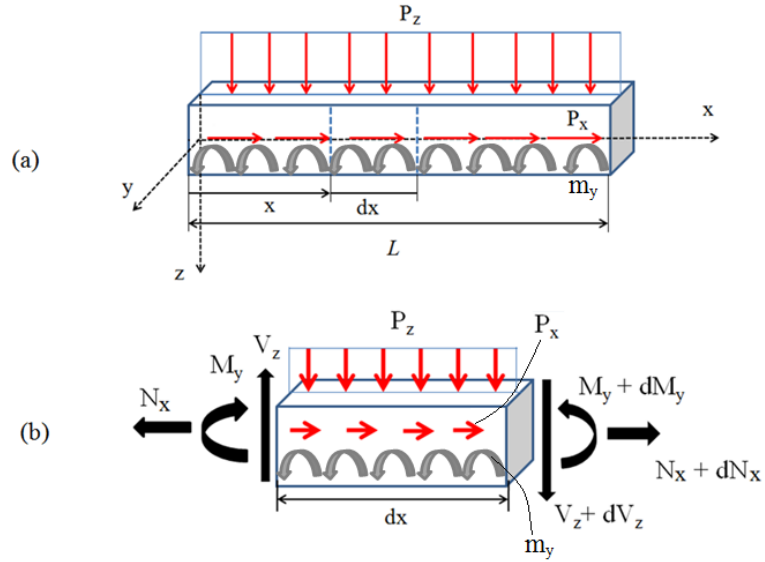


Figura 2.10 (a) Barra laminada sob carregamentos; (b) Barra elementar em equilíbrio

Diferentemente da TCVL, a TPVL não negligencia a distorção γ_{xz} assim, o deslocamento $\bar{u}(x, z)$ é definido em função da rotação da seção transversal $\varphi(x)$. Portanto, os deslocamentos $\bar{u}(x, z)$ e $\bar{w}(x, z)$, ilustrados na Fig. (2.11), são dados por:

$$\bar{u}(x, z) = u(x) + z\varphi(x)$$

$$\bar{w}(x, z) = w(x) \quad (2.26a-b)$$

Onde $u(x)$ é deslocamento axial no eixo longitudinal e $\varphi(x)$ é a rotação da seção transversal.

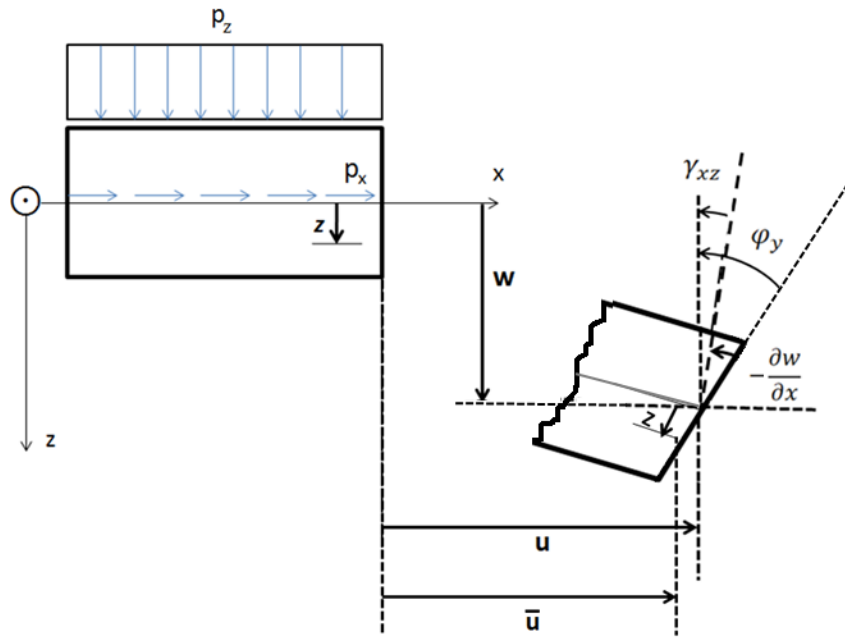


Figura 2.11 Cinemática da viga em flexão no plano xz

A distorção (γ_{xz}) é dada por:

$$\gamma_{xz} = \frac{d\bar{u}(x, z)}{dz} + \frac{d\bar{w}(x, z)}{dx} \quad (2.27)$$

Assim, substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.27), tem-se a relação deformação-deslocamento expressa por:

$$\gamma_{xz} = \varphi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.28)$$

Portanto, substituindo a Eq. (2.26a) na Eq. (2.12), obtém-se a deformação-deslocamento dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} + z \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$\gamma_{xz} = \varphi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.29a-b)$$

Agora, substituindo Eq. (2.29) na relação tensão-deformação dada na Eq. (2.17) tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du}{dx} + z \frac{d\varphi}{dx} \right) \\ \tau_{xz}^{(k)} &= \bar{Q}_{55}^{(k)} \left(\varphi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right)\end{aligned}\tag{2.30a-b}$$

Onde os coeficientes de rigidez da k-ésima lâmina $\bar{Q}_{11}^{(k)}$ e $\bar{Q}_{55}^{(k)}$, já foram citados anteriormente na Eq. (2.15).

Para a determinação dos esforços reais N_x e M_y é necessária à substituição da Eq.(2.30a) na Eq. (2.19), assim as equações ficam:

$$\begin{aligned}N_x &= b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du(x)}{dx} + z \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) dz \\ M_y &= b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{11}^{(k)} z \left(\frac{du(x)}{dx} + z \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) dz\end{aligned}\tag{2.31a-b}$$

Já o esforço cortante real V_z , para a Teoria de Primeira Ordem, segundo HAJIANMALEKI e QATU (2011) pode ser expresso como:

$$V_z = b\kappa \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{xz}^{(k)} dz\tag{2.32}$$

Onde κ é o coeficiente de forma da seção.

Finalmente, a relação esforço-deslocamento, para esforço cortante, pode ser obtida substituindo a Eq. (2.30) na Eq. (2.32) dando:

$$V_z = A_{55} \left(\varphi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (2.33)$$

Onde o módulo de rigidez A_{55} é da forma:

$$A_{55} = b \sum_{k=1}^n \kappa \bar{Q}_{55}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \quad (2.34)$$

Introduzindo na Eq. (2.31) os módulos de rigidez A_{11} , B_{11} , D_{11} , apresentados na Eq. (2.22), e tomando a Eq. (2.33) obtêm-se os esforços reais: normal, momento fletor e o cortante que podem ser expressos como,

$$N_x = A_{11} \frac{du}{dx} + B_{11} \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$M_y = B_{11} \frac{du}{dx} + D_{11} \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$V_z = A_{55} \left(\varphi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (2.35a-c)$$

Por fim, substituindo a Eq. (2.35) na Eq. (2.25) obtém-se a equação governante do problema real dada por:

$$A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -p_x$$

$$A_{55} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -p_z$$

$$B_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) = -m_y \quad (2.36a-c)$$

Reescrevendo a Eq. (2.36) na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & 0 & B_{11} \frac{d^2}{dx^2} \\ 0 & A_{55} \frac{d^2}{dx^2} & A_{55} \frac{d}{dx} \\ B_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -A_{55} \frac{d}{dx} & D_{11} \frac{d^2}{dx^2} - A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_x \\ -p_z \\ -m_y \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

CAPÍTULO 3

MEC EM VIGAS CLÁSSICAS LAMINADAS: ANÁLISE ESTÁTICA

3.1 INTRODUÇÃO

A partir dos fundamentos básicos da TCVL discutidas no Capítulo 2, equações integrais, soluções fundamentais e equações algébricas para o estabelecimento do MEC são aqui apresentadas. Convém notar que as discussões feitas neste capítulo para extensão do MEC à análise da TVCL são originais.

3.2 PROBLEMA FUNDAMENTAL DE VIGAS LAMINADA

O Método dos Elementos de Contorno é construído a partir da discretização das equações integrais que regem o fenômeno físico de interesse no contínuo. Uma das maneiras para o estabelecimento dessas equações integrais é pela transformação das equações diferenciais do problema real ponderada por funções pesos, que são soluções de um problema virtual de domínio infinito: o então chamado problema fundamental. Além disso, o problema fundamental é regido pelas mesmas hipóteses do problema real e está submetido apenas a fontes concentradas que estão associadas ao delta de Dirac.

No caso de interesse deste capítulo será tomada uma viga laminada de comprimento infinito, de largura e altura idênticas ao problema real, apresentada na Fig. (3.1), submetida à ação de fontes pontuais (no caso forças pontuais) $p_x^*(x, \hat{x})$ e $p_z^*(x, \hat{x})$ onde x é denominado ponto campo e $\hat{x}$ é o ponto fonte.

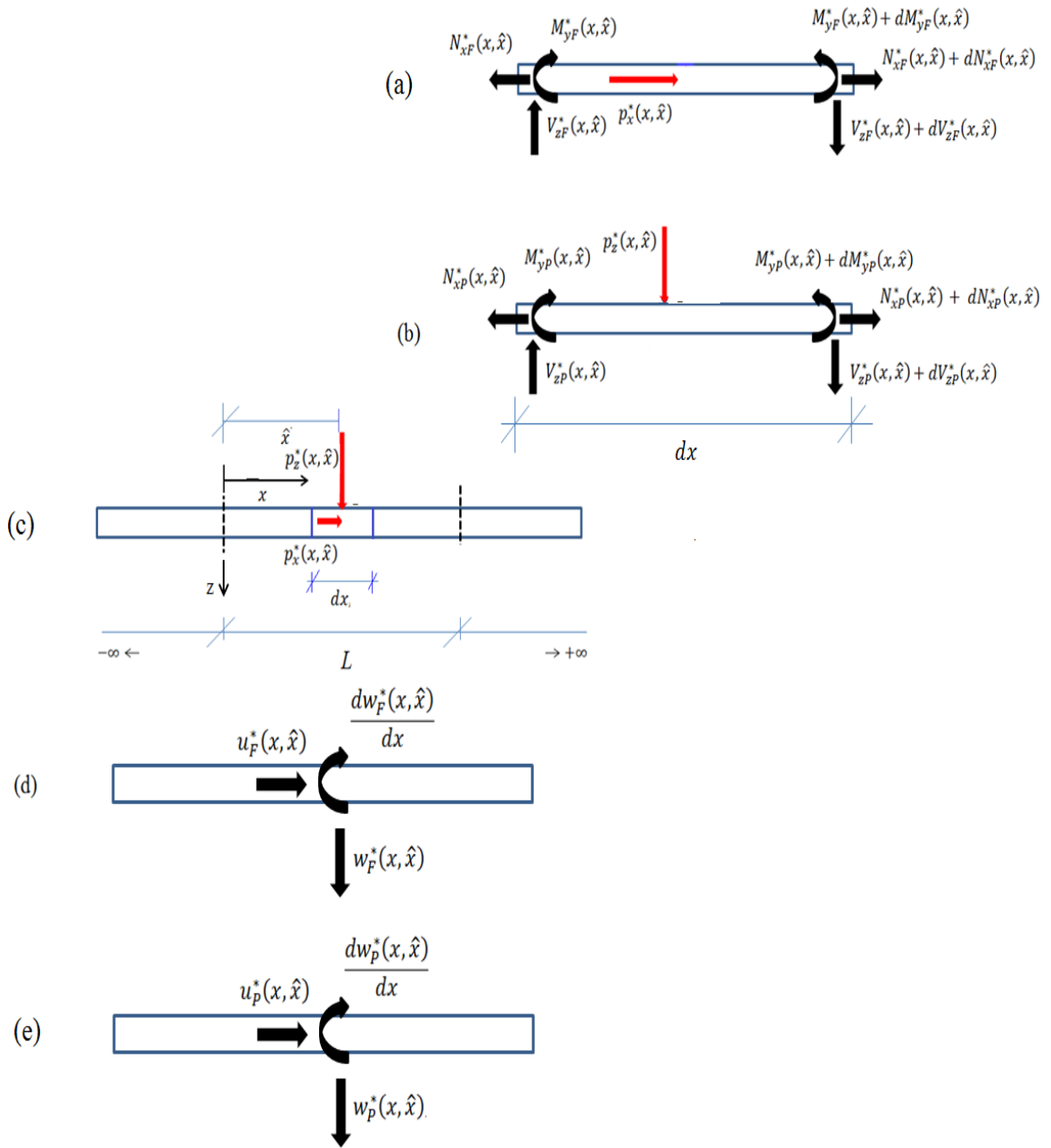


Figura 3.1 Equilíbrio Fundamental: (a) p_x^* ativado; (b) p_z^* ativado; (c) Barra fundamental; Deslocamentos Fundamentais: (d) p_x^* ativado; (e) p_z^* ativado

Ao se fazer o equilíbrio de forças e momentos fundamentais mostrados da Fig. (3.1a), quando a fonte puntual axial na direção x (p_x^*) for ativada tem-se:

$$\frac{dN_{xF}^*(x, \hat{x})}{dx} + p_x^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{zF}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\
\frac{dM_y^*(x, \hat{x})}{dx} - V_{zF}^*(x, \hat{x}) &= 0
\end{aligned} \tag{3.1a- c}$$

Fazendo também o equilíbrio de forças e momentos fundamentais para a Fig. (3.1b), quando a força puntual transversal na direção z (p_z^*) for ativada obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{xP}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\
\frac{dV_{zP}^*(x, \hat{x})}{dx} + p_z^*(x, \hat{x}) &= 0 \\
\frac{dM_{yP}^*(x, \hat{x})}{dx} - V_{zP}^*(x, \hat{x}) &= 0
\end{aligned} \tag{3.1d- f}$$

Por analogia ao problema real, os esforços fundamentais dados na Eq. (3.1) podem ser escritos a partir da Eq. (2.21), resultando em:

$$\begin{aligned}
N_{xF}^*(x, \hat{x}) &= A_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \\
M_{yF}^*(x, \hat{x}) &= B_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \\
V_{zF}^*(x, \hat{x}) &= B_{11} \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} \\
N_{xP}^*(x, \hat{x}) &= A_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x})}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x})}{dx^2} \\
M_{yP}^*(x, \hat{x}) &= B_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x})}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x})}{dx^2}
\end{aligned}$$

$$V_{zP}^*(x, \hat{x}) = B_{11} \frac{d^2 u_P^*(x, \hat{x})}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_P^*(x, \hat{x})}{dx^3} \quad (3.2a-f)$$

Fazendo a substituição dos esforços fundamentais da Eq. (3.2) na equação de equilíbrio fundamental na Eq. (3.1), obtêm-se as equações governantes em deslocamentos do problema fundamental dadas por:

$$[B][C] = [q] \quad (3.3)$$

Sendo

$$[B] = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} \end{bmatrix} \quad (3.3a)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} u_F^*(x, \hat{x}) & u_P^*(x, \hat{x}) \\ w_F^*(x, \hat{x}) & w_P^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

$$[q] = - \begin{bmatrix} p_x^*(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & p_z^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (3.3c)$$

Observando a Eq. (3.3) e Eq. (2.24) pode-se notar uma relação direta entre o problema fundamental e o problema real. Convém notar que os carregamentos apresentados na Eq. (3.3c) são fontes pontuais e representadas pela função delta de Dirac $\delta(x, \hat{x})$, cuja definição e propriedades são respectivamente:

$$\delta(x, \hat{x}) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = \hat{x} \\ 0, & \text{se } x \neq \hat{x} \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x, \hat{x}) dx = f(\hat{x}) \quad (3.4b)$$

Assim, $u_F^*(x, \hat{x})$ e $w_F^*(x, \hat{x})$ na Eq. (3.3b) são os deslocamentos fundamentais mostrados na Fig. (3.1d) quando apenas $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ é aplicado. Em contrapartida,

$u_p^*(x, \hat{x})$ e $w_p^*(x, \hat{x})$ na Eq. (3.3b) são os deslocamentos da Fig. (3.1e) quando $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ for ativado. Além disso, a matriz $[B]$ dada na Eq. (3.3a) é dita matriz de operadores, agora a matriz $[C]$ da Eq.(3.3b) é a matriz dos deslocamentos fundamentais e a matriz $[q]$ da Eq. (3.3c) é a matriz dos carregamentos fundamentais.

A solução do sistema apresentado em (3.3) pode ser encontrado fazendo uso do Método de HÖRMANDER (1963). A primeira etapa do método é fazer uma mudança de variável de $[C]$ dado na Eq. (3.3b) para uma função escalar ψ a partir da equação:

$$[C] = [B^{cof}]^T \psi \quad (3.5)$$

Onde $[B^{cof}]$ é a matriz dos cofatores de $[B]$.

Substituindo a Eq. (3.5) na Eq. (3.3) e, em seguida, efetuando-se algumas operações algébricas, tem-se:

$$[B][B^{cof}]^T \psi = -[I]\delta(x, \hat{x}),$$

Sendo $[I]$ a matriz identidade de ordem três.

No entanto a função inversa $[B]^{-1}$ pode ser descrita como:

$$[B]^{-1} = \frac{[B^{cof}]^T}{\det[B]}$$

Assim, aplicando as propriedades matriciais tem-se:

$$\det[B] [I] = [B][B^{cof}]^T$$

Portanto, chega-se a uma equação diferencial dependente apenas da função escalar ψ como se segue:

$$\det[B]\psi(x, \hat{x}) = -\delta(x, \hat{x}) \quad (3.6)$$

Então, iniciam-se as etapas do Método de HÖRMANDER para resolução da equação governante da viga. Logo, calculado o determinante da matriz dos operadores $[B]$ da Eq. (3.3a), tem-se:

$$\det[B]\psi = (B_{11}^2 - A_{11}D_{11}) \frac{d^6\psi}{dx^6} \quad (3.7)$$

Comparando as Eq.(3.7) e Eq.(3.6) conclui-se que a equação diferencial poder ser apresentada como:

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} = - \frac{\delta(x, \hat{x})}{(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \quad (3.8)$$

A solução homogênea da equação diferencial de sexta ordem na Eq.(3.8) na forma homogênea é expressa por:

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} = 0 \quad (3.9)$$

Onde o polinômio característico associado a Eq.(3.9) é dada por $\lambda^6 = 0$, portanto a solução da Eq.(3.8) pode ser expressa por:

$$\psi(r) = A_1 + A_2r + A_3r^2 + A_4r^3 + A_5r^4 + A_6r^5 \quad (3.10)$$

Onde, $r = |x - \hat{x}|$ e os A_i com $i = 1, 2, \dots, 6$ são constantes a determinar da equação.

As constantes A_i podem ser tomadas com valores de modo a evitar as derivadas de alta ordem do delta de Dirac, tem-se que $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0$. Assim, a função escalar pode ser escrita como:

$$\psi(r) = A_6r^5 + A_1 \quad (3.11)$$

Após derivar a Eq.(3.11) algumas vezes e manipulando algebricamente o resultado, e, em seguida, comparando a Eq. (3.9) pode-se concluir que a constante A_6 é dada por:

$$A_6 = - \frac{1}{240(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \quad (3.12)$$

Assim introduzindo a expressão (3.12) na Eq. (3.11) obtêm-se a solução da equação diferencial Eq. (3.9) que pode ser expressa por:

$$\psi(r) = - \frac{1}{240(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^5 + A_1 \quad (3.13)$$

Convém notar, que a constante A_1 é arbitrária e nesse trabalho ela é assumida como $A_1 = 0$. Portanto, inserindo a Eq.(3.13) na Eq.(3.5) e comparando com a Eq. (3.3b) obtêm-se os deslocamentos fundamentais mostrados na Fig. (3.1) ficando assim definidos:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = \frac{D_{11}r}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}$$

$$u_P^*(x, \hat{x}) = - \frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^2 \text{sgn}(x, \hat{x})$$

$$w_F^*(x, \hat{x}) = \frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^2 \text{sgn}(x, \hat{x})$$

$$w_P^*(x, \hat{x}) = - \frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^3$$

$$\frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{B_{11}r}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}$$

$$\frac{dw_P^*(x, \hat{x})}{dx} = - \frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^2 \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (3.14a-f)$$

Onde $sgn(x, \hat{x})$ é a função sinal unitário, a qual sua definição e propriedade, na mesma ordem, são dadas por:

$$sgn(x, \hat{x}) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < \hat{x} \\ 1, & \text{se } x > \hat{x} \end{cases} \quad (3.15a)$$

$$\frac{d(sgn(x, \hat{x}))}{dx} = 2\delta(x, \hat{x}) \quad (3.15b)$$

As soluções para os esforços fundamentais mostrados na Fig. (3.1a-b) são geradas substituindo adequadamente a Eq. (3.14) na Eq. (3.2), resultando em:

$$N_{xF}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2}sgn(x, \hat{x})$$

$$M_{yF}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$V_{zF}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$N_{xP}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_{yP}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2}r$$

$$V_{zP}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2}sgn(x, \hat{x}) \quad (3.16a-f)$$

Além das soluções fundamentais Eq. (3.14) e Eq. (3.16) serão apresentadas a seguir suas respectivas derivadas em relação ao ponto fonte, já que essas serão necessárias nas equações integrais que posteriormente serão desenvolvidas, vide item 3.3. Assim, os deslocamentos e esforços derivados no ponto fonte podem ser escrito como:

$$u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx}$$

$$w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{dw_P^*(x, \hat{x})}{dx}$$

$$\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \left(\frac{A_{11}}{B_{11}}\right) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.17a-c)$$

$$N_{xP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$V_{zP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$$

$$M_{yP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (3.17d-f)$$

3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL

A aplicação do MEC consiste em transformar as equações diferenciais em equações integrais agindo no contorno e, em seguida, discretiza-las transformando-as em equações algébricas. Uma das maneiras para o equacionamento na forma integral do problema é a utilização do Método dos Resíduos Ponderados (MRP), em que a equação governante do problema real Eq. (2.24) é ponderada pelos respectivos deslocamentos fundamentais, resultando em:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_x \\ p_z \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} u_F^*(x, \hat{x}) & u_P^*(x, \hat{x}) \\ w_F^*(x, \hat{x}) & w_P^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \quad (3.18)$$

Ou na forma expandida:

$$\int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + p_x \right) u_F^* + \left(B_{11} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + p_z \right) w_F^* \right] dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + p_x \right) u_P^* + \left(B_{11} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + p_z \right) w_P^* \right] dx = 0 \quad (3.19a-b)$$

Aplicando convenientemente sucessivas integrações por partes na Eq.(3.19a), quando p_x^* é ativado e, em seguida, inserindo as Eq. (3.2), obtêm-se as equações integrais de deslocamento axial que podem ser apresentadas como:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} \right) u(x) dx + \\
& + \int_0^L \left(B_{11} \frac{d^3 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^4} \right) w(x) dx - [N_{xF}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L + \\
& + [N_x(x) u_F^*(x, \hat{x})]_0^L - [V_{zF}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L + [V_z(x) w_F^*(x, \hat{x})]_0^L + \left[M_{yF}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L + \\
& - \left[M_y(x) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] dx = 0 \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Analisando a Eq. (3.20) observa-se que a segunda integral é nula decorrente da Eq. (3.3), enquanto a primeira integral devido à propriedade do delta Dirac na Eq. (3.4), resultando em:

$$\int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} \right) u(x) dx = - \int_0^L u(x) \delta(x, \hat{x}) = -u(\hat{x})$$

Assim a equação integral (3.20) para os deslocamentos axiais fica reduzida a:

$$\begin{aligned}
& u(\hat{x}) + [N_{xF}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L + [V_{zF}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - \left[M_{yF}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& = [N_x(x) u_F^*(x, \hat{x})]_0^L + [V_z(x) w_F^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\
& + \int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] dx \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Agora, ativando a função puntual p_z^* (que gera os deslocamentos fundamentais u_p^* e w_p^*) e integrando a Eq. (3.19b) algumas vezes e substituindo adequadamente a Eq. (3.2), são geradas então as equações integrais de deslocamentos transversais, assim descritas:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 u_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} \right) u(x) dx + \\
& + \int_0^L \left(B_{11} \frac{d^3 u_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^4} \right) w(x) dx + [N_x(x) u_p^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& - [N_{xP}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L - [V_{zP}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - [V_z(x) w_p^*(x, \hat{x})]_0^L + \left[M_{yP}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L + \\
& - \left[M_y(x) \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L [p_x u_p^*(x, \hat{x}) + p_z w_p^*(x, \hat{x})] dx = 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Analisando agora a Eq. (3.22) nota-se que a primeira integral é nula decorrente da Eq. (3.3), enquanto a segunda integral devido à propriedade do delta Dirac na Eq. (3.4) resultando em:

$$\int_0^L \left(B_{11} \frac{d^3 u_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^4} \right) w(x) dx = - \int_0^L w(x) \delta(x, \hat{x}) = -w(\hat{x})$$

Portanto, a equação integral (3.22) para os deslocamentos transversais fica reduzida a:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) + [N_{xP}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L + [V_{zP}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - \left[M_{yP}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& = [N_x(x) u_p^*(x, \hat{x})]_0^L + [V_z(x) w_p^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\
& + \int_0^L [p_x u_p^*(x, \hat{x}) + p_z w_p^*(x, \hat{x})] dx \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Os problemas de vigas clássicas requerem três incógnitas a determinar no contorno para um completo equacionamento. Assim, uma equação adicional é necessária a fim de

obter o problema solucionável. Portanto, esta equação adicional é desenvolvida derivando a Eq.(3.23), cedendo assim à equação integral da inclinação da elástica transversal no ponto de fonte $\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}}$, logo essa equação pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} + [N_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})u(x)]_0^L + [V_{zP,\hat{x}}^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - \left[M_{yP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\ = [N(x)u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]_0^L + [V_z(x)w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\ + \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.4 EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Para a determinação das equações algébricas do MEC, o ponto fonte é colocado nas extremidades da barra. Assim, quando a colocação ocorrer na extremidade esquerda da barra é equivalente a $\hat{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$, em contrapartida se o ponto for colocado na extremidade direita da barra $\hat{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$. Portanto, fazendo a substituição dos limites de integração e a colocação da fonte na extremidade esquerda da barra nas Eq. (3.21), Eq. (3.23) e Eq. (3.24).

Neste caso, a equação do deslocamento axial com ponto fonte à esquerda;

$$\begin{aligned} u(0) + N_{xF}^*(L, 0 + \xi)u(L) + V_{zF}^*(L, 0 + \xi)w(L) - M_{yF}^*(L, 0 + \xi) \frac{dw(L)}{dx} \\ - N_{xF}^*(0,0)u(0) - V_{zF}^*(0,0 + \xi)w(0) + M_{yF}^*(0,0 + \xi) = N_x(L)u_F^*(L, 0 + \xi) + \\ + V_z(L)w_F^*(L, 0 + \xi) - M_y(L) \frac{dw_F^*(L, 0 + \xi)}{dx} - N_x(0)u_F^*(0,0 + \xi) - V_z(0)w_F^*(0,0 + \xi) + \\ + M_y(0) \frac{dw_F^*(0,0 + \xi)}{dx} + \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0)] dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

Já a equação do deslocamento transversal com ponto fonte à esquerda, resulta:

$$w(0) + N_{xP}^*(L, 0 + \xi)u(L) + V_{zP}^*(L, 0 + \xi)w(L) - M_{yP}^*(L, 0 + \xi) \frac{dw(L)}{dx}$$

$$\begin{aligned}
& -N_{xP}^*(0,0+\xi)u(0) - V_{zP}^*(0,0+\xi)w(0) + M_{yP}^*(0,0+\xi)\frac{dw(0)}{dx} = N(L)u_P^*(L,0+\xi) + \\
& V_z(L)w_P^*(L,0+\xi) - M_y(L)\frac{dw_P^*(L,0+\xi)}{dx} - N(0)u_P^*(0,0+\xi) - V_z(0)w_P^*(0,0+\xi) + \\
& + M_y(0)\frac{dw_P^*(0,0+\xi)}{dx} + \int_0^L [p_x u_P^*(x,0) + p_z w_P^*(x,0)]dx
\end{aligned} \tag{3.23}$$

E, finalmente, a equação da inclinação da elástica transversal com ponto fonte à esquerda fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(0)}{d\hat{x}} + N_{xP,\hat{x}}^*(L,0+\xi)u(L) + V_{zP,\hat{x}}^*(L,0+\xi)w(L) - M_{yP,\hat{x}}^*(L,0+\xi)\frac{dw(L)}{dx} + \\
& -N_{xP,\hat{x}}^*(0,0+\xi)u(0) - V_{zP,\hat{x}}^*(0,0+\xi)w(0) + M_{yP,\hat{x}}^*(0,0+\xi)\frac{dw(0)}{dx} = \\
& = N_x(L)u_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) + V_z(L)w_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) - M_y(L)\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi)}{dx} + \\
& -N_x(L)u_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) - V_z(L)w_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) + M_y(L)\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi)}{dx} + \\
& + \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x,0) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x,0)]dx
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Agora, fazendo a colocação do ponto fonte no extremo direito da barra tem-se:

$$\begin{aligned}
& u(L) + N_{xF}^*(L,L-\xi)u(L) + V_{zF}^*(L,L-\xi)w(L) - M_{yF}^*(L,L-\xi)\frac{dw(L)}{dx} + \\
& -N_{xF}^*(0,L-\xi)u(0) - V_{zF}^*(0,L-\xi)w(0) + M_{yF}^*(0,L-\xi)\frac{dw(0)}{dx} = \\
& = N_x(L)u_F^*(L,L-\xi) + V_z(L)w_F^*(L,L-\xi) - M_y(L)\frac{dw_F^*(L,L-\xi)}{dx} + \\
& -N_x(0)u_F^*(0,L-\xi) + V_z(0)w_F^*(0,L-\xi) + M_y(0)\frac{dw_F^*(0,L-\xi)}{dx} + \\
& + \int_0^L [p_x u_F^*(x,L) + p_z w_F^*(x,L)]dx
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$w(L) + N_{xP}^*(L,L-\xi)u(L) + V_{zP}^*(L,L-\xi)w(L) - M_{yP}^*(L,L-\xi)\frac{dw(L)}{dx} +$$

$$\begin{aligned}
& -N_{xP}^*(0, L - \xi)u(0) - V_{zP}^*(0, L - \xi)w(0) + M_{yP}^*(0, L - \xi) \frac{dw(0)}{dx} = \\
& = N_x(L)u_p^*(L, L - \xi) + V_z(L)w_p^*(L, L - \xi) - M_y(L) \frac{dw_p^*(L, L - \xi)}{dx} + \\
& -N_x(0)u_p^*(0, L - \xi) - V_z(0)w_p^*(0, L - \xi) + M_y(0) \frac{dw_p^*(0, L - \xi)}{dx} + \\
& + \int_0^L [p_x u_p^*(x, L) + p_z w_p^*(x, L)] dx
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(L)}{d\hat{x}} + N_{xP,\hat{x}}^*(L, L - \xi)u(L) + V_{zP,\hat{x}}^*(L, L - \xi)w(L) - M_{yP,\hat{x}}^*(L, L - \xi) \frac{dw(L)}{dx} + \\
& -N_{xP,\hat{x}}^*(0, L - \xi)u(0) - V_{zP,\hat{x}}^*(0, L - \xi)w(0) + M_{yP,\hat{x}}^*(0, L - \xi) \frac{dw(0)}{dx} = \\
& = N_x(L)u_{p,\hat{x}}^*(L, L - \xi) + V_z(L)w_{p,\hat{x}}^*(L, L - \xi) - M_y(L) \frac{dw_{p,\hat{x}}^*(L, L - \xi)}{dx} + \\
& -N_x(0)u_{p,\hat{x}}^*(0, L - \xi) - V_z(0)w_{p,\hat{x}}^*(0, L - \xi) + M_y(0) \frac{dw_{p,\hat{x}}^*(0, L - \xi)}{dx} + \\
& + \int_0^L [p_x u_{p,\hat{x}}^*(x, L) + p_z w_{p,\hat{x}}^*(x, L)] dx
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Uma representação algébrica para Eq. (3.22), Eq. (3.23), Eq. (3.24), Eq. (3.25), Eq. (3.26), Eq. (3.27), em termos das variáveis de contorno (ver Fig. (3.2b)) pode ser escrita como segue:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \tag{3.28}$$

Onde $[H]$, $[G]$ são as matrizes de influência e $\{f\}$ é o vetor de ações externas. $\{u\}$ e $\{p\}$ são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = \left[u_i \quad w_i \quad \frac{dw_i}{dx} \quad u_j \quad w_j \quad \frac{dw_j}{dx} \right]^T = \left[u(0) \quad w(0) \quad \frac{dw(0)}{dx} \quad u(L) \quad w(L) \quad \frac{dw(L)}{dx} \right]^T$$

$$\begin{aligned}
\{p\} &= [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T = \\
&= [N_x(0) \quad V_z(0) \quad M_y(0) \quad N_x(L) \quad V_z(L) \quad M_y(L)]^T
\end{aligned}$$

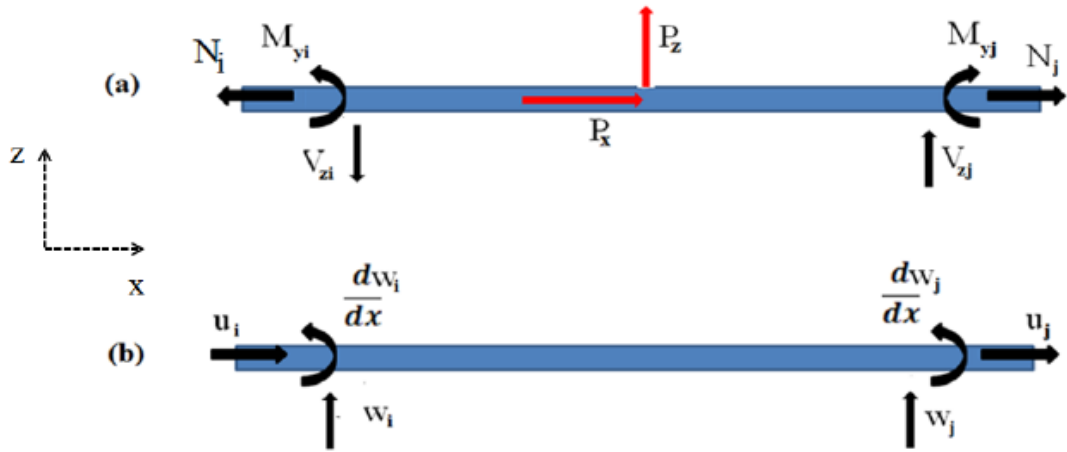


Figura 3.2 (a) Esforços reais (TCVL); (b) Deslocamentos reais (TCVL)

É importante notar que para apresentação da Fig. (3.2) foi realizado uma rotação nos eixos de referente mostrado na Fig. (2.3).

A forma explícita das matrizes de influência na Eq. (3.28) são:

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0+\xi) & -V_F^*(0,0+\xi) & M_F^*(0,0+\xi) & N_F^*(L,0+\xi) & V_F^*(L,0+\xi) & -M_F^*(L,0+\xi) \\ -N_P^*(0,0+\xi) & -V_P^*(0,0+\xi) & M_P^*(0,0+\xi) & N_P^*(L,0+\xi) & V_P^*(L,0+\xi) & -M_P^*(L,0+\xi) \\ -N_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -V_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & M_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & N_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & V_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -N_F^*(0,L-\xi) & -V_F^*(0,L-\xi) & M_F^*(0,L-\xi) & N_F^*(L,L-\xi) & V_F^*(L,L-\xi) & -M_F^*(L,L-\xi) \\ -N_P^*(0,L-\xi) & -V_P^*(0,L-\xi) & M_P^*(0,L-\xi) & N_P^*(L,L-\xi) & V_P^*(L,L-\xi) & -M_P^*(L,L-\xi) \\ -N_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -V_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & M_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & N_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & V_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0+\xi) & -w_F^*(0,0+\xi) & \frac{dw_F^*}{dx}(0,0+\xi) & u_F^*(L,0+\xi) & w_F^*(L,0+\xi) & -\frac{dw_F^*}{dx}(L,0+\xi) \\ -u_P^*(0,0+\xi) & -w_P^*(0,0+\xi) & \frac{dw_P^*}{dx}(0,0+\xi) & u_P^*(L,0+\xi) & w_P^*(L,0+\xi) & -\frac{dw_P^*}{dx}(L,0+\xi) \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(0,0+\xi) & u_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & w_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(L,0+\xi) \\ -u_F^*(0,L-\xi) & -w_F^*(0,L-\xi) & \frac{dw_F^*}{dx}(0,L-\xi) & u_F^*(L,L-\xi) & w_F^*(L,L-\xi) & -\frac{dw_F^*}{dx}(L,L-\xi) \\ -u_P^*(0,L-\xi) & -w_P^*(0,L-\xi) & \frac{dw_P^*}{dx}(0,L-\xi) & u_P^*(L,L-\xi) & w_P^*(L,L-\xi) & -\frac{dw_P^*}{dx}(L,L-\xi) \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(0,L-\xi) & u_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & w_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(L,L-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.29a-b)$$

Onde os elementos da matriz \$[H]\$ podem ser obtidos a partir das Eq.(3.16) quando substituído os valores do ponto fonte \$\hat{x}\$ e do ponto campo \$x\$ dados nas Eq.(3.21), Eq.(3.23) e Eq.(3.24). Desta forma, os esforços normais no contorno da barra são dados por:

$$\begin{aligned}
-N_{xF}^*(0,0+\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(0,0+\xi) = -\frac{1}{2} \\
N_{xF}^*(L,0+\xi) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L,0+\xi) = -\frac{1}{2} \\
-N_{xF}^*(0,L-\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(0,L-\xi) = -\frac{1}{2} \\
N_{xF}^*(L,L-\xi) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L,L-\xi) = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.30a}$$

Agora, os momentos fletor no contorno da barra resultam em:

$$\begin{aligned}
M_{yP}^*(0,0+\xi) &= -\frac{|0-(0+\xi)|}{2} = 0 \\
-M_{yP}^*(L,0+\xi) &= \frac{|L-(0+\xi)|}{2} = \frac{L}{2} \\
M_{yP}^*(0,L-\xi) &= -\frac{|0-(L-\xi)|}{2} = -\frac{L}{2} \\
-M_{yP}^*(L,0+\xi) &= \frac{|L-(L-\xi)|}{2} = 0
\end{aligned} \tag{3.30b}$$

Já os esforços cortantes no contorno da barra ficam:

$$\begin{aligned}
-V_{zP}^*(0,0+\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(0,0+\xi) = -\frac{1}{2} \\
V_{zP}^*(L,0+\xi) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L,0+\xi) = -\frac{1}{2} \\
-V_{zP}^*(0,L-\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(0,L-\xi) = -\frac{1}{2} \\
V_{zP}^*(L,L-\xi) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L,L-\xi) = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.30c}$$

Agora, para os esforços derivados em relação ao ponto fonte, tem-se apenas o momento fletor derivado que é dado por:

$$M_{yP,\hat{x}}^*(0,0+\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(0,0+\xi) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
-M_{yP,\hat{x}}^*(L, 0 + \xi) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L, 0 + \xi) = -\frac{1}{2} \\
M_{yP,\hat{x}}^*(0, L - \xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(0, L - \xi) = -\frac{1}{2} \\
-M_{yP,\hat{x}}^*(L, L - \xi) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(L, L - \xi) = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.30d}$$

Notadamente, os outros elementos da matriz [H] dados na Eq.(3.29), aqui não especificados na Eq. (3.30), são nulos pela definição da Eq. (3.16). Portanto, substituindo a Eq. (3.30) na Eq.(3.29b), tem-se a matriz de influência [H] na forma algébrica:

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Processo análogo ao adotado para a obtenção dos elementos da matriz [H] será desenvolvido para a definição dos elementos da matriz [G]. Sendo assim, os deslocamentos fundamentais no contorno são para u_F^* de (3.14), tem-se;

$$\begin{aligned}
-u_F^*(0, 0 + \xi) &= -\frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (0 + \xi)| = 0 \\
u_F^*(L, 0 + \xi) &= \frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (0 + \xi)| = \frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L \\
-u_F^*(0, L - \xi) &= -\frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (L - \xi)| = -\frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L \\
u_F^*(L, L - \xi) &= \frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (L - \xi)| = 0
\end{aligned} \tag{3.31a}$$

Agora para o deslocamento w_F^* no contorno tem-se;

$$\begin{aligned}
-w_F^*(0, 0 + \xi) &= -\frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (0 + \xi)|^2 \text{sgn}(0, 0 + \xi) = 0 \\
w_F^*(L, 0 + \xi) &= \frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (0 + \xi)|^2 \text{sgn}(L, 0 + \xi) = \frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 \\
-w_F^*(0, L - \xi) &= -\frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (L - \xi)|^2 \text{sgn}(0, L - \xi) = \frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 \\
w_F^*(L, L - \xi) &= -\frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (L - \xi)|^2 \text{sgn}(L, L - \xi) = 0
\end{aligned} \tag{3.31b}$$

Quanto à inclinação da elástica transversal fundamental no contorno quando p_x é ativado fica;

$$\begin{aligned}
\frac{dw_F^*(0, 0 + \xi)}{dx} &= \frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (0 + \xi)| = 0 \\
-\frac{dw_F^*(L, 0 + \xi)}{dx} &= -\frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (0 + \xi)| = -\frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L \\
\frac{dw_F^*(0, L - \xi)}{dx} &= \frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (L - \xi)| = \frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L \\
-\frac{dw_F^*(L, L - \xi)}{dx} &= -\frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (L - \xi)| = 0
\end{aligned} \tag{3.31c}$$

Os deslocamentos fundamentais quando p_z é ativado no contorno da barra podem ser escritos como: Observando que $u_p^*(x, \hat{x}) = -w_F^*(x, \hat{x})$ tem-se que;

$$\begin{aligned}
-u_p^*(0, 0 + \xi) &= 0 \\
u_p^*(L, 0 + \xi) &= -\frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 \\
-u_p^*(0, L - \xi) &= -\frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 \\
-u_p^*(L, L - \xi) &= 0
\end{aligned} \tag{3.31d}$$

O deslocamento w_p^* no contorno fica;

$$\begin{aligned}
-w_P^*(0, 0 + \xi) &= \frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (0 + \xi)|^3 = 0 \\
w_P^*(L, 0 + \xi) &= -\frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (0 + \xi)|^3 = -\frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 \\
-w_P^*(0, L - \xi) &= \frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |0 - (L - \xi)|^3 = \frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 \\
w_P^*(L, L - \xi) &= \frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} |L - (L - \xi)|^3 = 0
\end{aligned} \tag{3.31e}$$

Já a inclinação da elástica transversal no contorno $\frac{dw_P^*}{dx}$, é dada por;

$$\frac{dw_P^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{A_{11}w_F^*(x, \hat{x})}{B_{11}}$$

Assim, tem-se,

$$\begin{aligned}
\frac{dw_P^*(0, 0 + \xi)}{dx} &= 0 \\
-\frac{dw_P^*(L, 0 + \xi)}{dx} &= \frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 \\
\frac{dw_P^*(0, L - \xi)}{dx} &= -\frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 \\
\frac{dw_P^*(L, L - \xi)}{dx} &= 0
\end{aligned} \tag{3.31f}$$

Agora, para as derivadas em relação ao ponto fonte $u_{P,\hat{x}}^*$, $w_{P,\hat{x}}^*$, $\frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}$ têm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \\
w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{A_{11}w_F^*(x, \hat{x})}{B_{11}} \\
\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} &= \left(\frac{A_{11}}{B_{11}}\right) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx}
\end{aligned}$$

Que, por sua vez, resultam em:

$$\begin{aligned}
-u_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) &= 0 \\
u_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) &= -\frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}L \\
-u_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) &= \frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}L \\
u_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) &= 0
\end{aligned} \tag{3.31g}$$

$$\begin{aligned}
-w_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) &= 0 \\
w_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) &= \frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}L^2 \\
-w_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) &= \frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}L^2 \\
w_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) &= 0
\end{aligned} \tag{3.31h}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi)}{dx} &= 0 \\
-\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi)}{dx} &= -\frac{A_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}L \\
\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi)}{dx} &= \frac{A_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}L \\
-\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi)}{dx} &= 0
\end{aligned} \tag{3.31i}$$

Substituindo a Eq.(3.31) na Eq. (3.29), a matriz de influência [G] fica assim expressa:

$$[G] = \frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{11}L & \frac{B_{11}}{2}L^2 & -B_{11}L \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{11}}{2}L^2 & -\frac{A_{11}}{6}L^3 & \frac{A_{11}}{2}L^2 \\ 0 & 0 & 0 & B_{11}L & \frac{A_{11}}{2}L^2 & -A_{11}L \\ -D_{11}L & \frac{B_{11}}{2}L^2 & B_{11}L & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{B_{11}}{2}L^2 & \frac{A_{11}}{6}L^3 & \frac{A_{11}}{2}L^2 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{11}L & \frac{A_{11}}{2}L^2 & A_{11}L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos vetor de carregamentos $\{f\}$ na sua forma explícita no contorno são dados por:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{3i} \\ f_{1j} \\ f_{2j} \\ f_{3j} \end{Bmatrix}$$

Onde,

$$f_{1i} = \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0)] dx$$

$$f_{2i} = \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0) + p_z w_P^*(x, 0)] dx$$

$$f_{3i} = \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, 0)] dx$$

$$f_{1j} = \int_0^L [p_x u_F^*(x, L) + p_z w_F^*(x, L)] dx$$

$$f_{2j} = \int_0^L [p_x u_P^*(x, L) + p_z w_P^*(x, L)] dx$$

$$f_{3j} = \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, L) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, L)] dx \quad (3.32a-f)$$

Convém notar que as integrais envolvendo o módulo $r = |x - \hat{x}|$, podem ser escritas como:

$$\int_0^L (|x - \hat{x}|)^n dx = \begin{cases} \int_0^L (x - \hat{x})^n dx, & \text{se } x > \hat{x} \\ \int_0^L (\hat{x} - x)^n dx, & \text{se } x < \hat{x} \end{cases}$$

Se os carregamentos p_x e p_z forem uniformes em todo o domínio da barra o vetor $\{f\}$ pode ser escrito da seguinte maneira, substituindo a Eq. (3.14) adequadamente na Eq. (3.28). Assim, para o ponto fonte na extremidade esquerda ($\hat{x} = 0$) resulta em:

$$\begin{aligned} f_{1i} &= p_x \int_0^L \frac{D_{11}x}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx + p_z \int_0^L \frac{B_{11}x^2}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx \\ f_{2i} &= -p_x \int_0^L \frac{B_{11}x^2}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx - p_z \int_0^L \frac{A_{11}x^3}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx \\ f_{3i} &= p_x \int_0^L \frac{B_{11}x}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx + p_z \int_0^L \frac{A_{11}x^2}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx \end{aligned}$$

Caso contrário, quando o ponto fonte na extremidade direita $\hat{x} = L$ obtém-se:

$$\begin{aligned} f_{1j} &= p_x \int_0^L \frac{D_{11}(L - x)}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx - p_z \int_0^L \frac{B_{11}(L - x)^2}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx \\ f_{2j} &= p_x \int_0^L \frac{B_{11}(L - x)^2}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx - p_z \int_0^L \frac{B_{11}(L - x)^3}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx \\ f_{3j} &= p_x \int_0^L \frac{B_{11}(L - x)}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx - p_z \int_0^L \frac{A_{11}(L - x)^2}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} dx \end{aligned}$$

Portanto, o vetor dos carregamentos fica assim definido:

$$\{f\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_x D_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 + \frac{p_z B_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 \\ - \frac{p_x B_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 - \frac{p_z A_{11}}{48(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^4 \\ \frac{p_x B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 + \frac{p_z A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 \\ \frac{p_x D_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 - \frac{p_z B_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 \\ \frac{p_x B_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 - \frac{p_z A_{11}}{48(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^4 \\ \frac{p_x B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^2 - \frac{p_z A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} L^3 \end{array} \right\}$$

Para o caso de uma distribuição polinomial para p_x e p_z o vetor $\{f\}$ pode ser obtido conforme indicado no ANEXO II.

Antes da solução propriamente dita do sistema algébrico dado na Eq. (3.28) é necessário aplicar as condições de contorno do problema, obtendo a matriz de influência das incógnitas $[A]$ e o vetor independente $\{B\}$ resultando em:

$$[A]\{x\} = \{B\} \quad (3.33)$$

Onde $\{x\}$ é o vetor das incógnitas.

Para cada grau de liberdade pertencente a nós de extremidade da viga tem-se que se o deslocamento é prescrito, o esforço correspondente é incógnito e vice-versa. Se o sistema (3.28) for expresso em uma forma genérica tem-se que:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Admitindo-se que só o grau de liberdade 3 esteja prescrito em deslocamento $\bar{u}_3$ (o que implica que as forças nos demais graus de liberdades estão todas prescritas), então o sistema final é obtido substituindo a matriz de influência [H] na coluna 3 pelos valores da matriz [G] na Eq.(3.34). Da mesma forma a matriz [G] é alterada na mesma coluna com os valores da matriz [H] antes da atualização. Resumindo, o processo de imposição de condições de contorno implica em uma permuta de coluna entre as matrizes [H] e [G] na posição do grau de liberdade prescrito em deslocamento, resultando em:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & -G_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & -G_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{31} & H_{32} & -G_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{41} & H_{42} & -G_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{51} & H_{52} & -G_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{61} & H_{62} & -G_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & -H_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & -H_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & -H_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & -H_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & -H_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & -H_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Então, a matriz de influência das incógnitas, o vetor independente e vetor das incógnitas na Eq. (3.33) são dados pela Eq. (3.35) onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & -G_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & -G_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{31} & H_{32} & -G_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{41} & H_{42} & -G_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{51} & H_{52} & -G_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{61} & H_{62} & -G_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & -H_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & -H_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & -H_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & -H_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & -H_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & -H_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Se mais graus de liberdade em deslocamentos forem prescritos, então é necessário fazer outras trocas de colunas análogas ao que foi explicado na Eq. (3.35).

Terminada a imposição das condições de contorno pode-se finalmente aplicar uma técnica de solução de sistemas lineares (direta ou iterativa) para que o vetor das incógnitas $\{x\}$ da Eq. (3.33) seja finalmente determinado.

Depois de todas as variáveis no contorno da viga serem determinadas, então os deslocamentos em qualquer ponto do domínio (por exemplo, $\hat{x} = a$) podem ser calculados aplicando-se as equações integrais apresentadas nas Eq. (3.21), Eq. (3.23) e Eq. (3.24), cujas respectivas equações algébricas na forma matricial podem ser escritas como:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\} \quad (3.36)$$

Onde:

$$\{u(a)\} = \begin{Bmatrix} u(a) \\ w(a) \\ \frac{dw(a)}{dx} \end{Bmatrix}$$

$$H(a) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G(a) = \frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{bmatrix} -D_{11}a & \frac{B_{11}}{2}a^2 & B_{11}a & D_{11}b & \frac{B_{11}}{2}b^2 & -B_{11}b \\ -\frac{B_{11}}{2}a^2 & \frac{A_{11}}{6}a^3 & \frac{A_{11}}{2}a^2 & -\frac{B_{11}}{2}b^2 & -\frac{A_{11}}{6}b^3 & \frac{A_{11}}{2}b^2 \\ -B_{11}a & \frac{A_{11}}{2}a^2 & A_{11}a & B_{11}b & \frac{A_{11}}{2}b^2 & -A_{11}b \end{bmatrix}$$

$$\{f(a)\} = \frac{1}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{Bmatrix} p_x D_{11} a^2 + \frac{p_z B_{11}}{3} a^3 + p_x D_{11} b^2 - \frac{p_z B_{11}}{3} b^3 \\ -\frac{p_x B_{11}}{3} a^3 - \frac{p_z A_{11}}{12} a^4 + \frac{p_x B_{11}}{3} b^3 - \frac{p_z A_{11}}{12} b^4 \\ p_x B_{11} a^2 + \frac{p_z A_{11}}{3} a^3 + p_x B_{11} b^2 - \frac{p_z A_{11}}{3} b^3 \end{Bmatrix}$$

Com, $b = L - a$

Para o caso de uma distribuição polinomial p_x e p_z o vetor $\{f\}$ pode ser obtido conforme indicado no ANEXO II.

CAPÍTULO 4

MEC EM VIGAS LAMINADAS DE PRIMEIRA ORDEM: ANÁLISE ESTÁTICA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será desenvolvida a análise estática da Teoria de Primeira ordem de Vigas Laminadas (TPVL) a partir dos conceitos dados no Capítulo 2. Serão determinadas ainda a equação integral, as soluções fundamentais e as equações algébricas para o estabelecimento do MEC. Novamente, as discussões para extensão do MEC na análise da TPVL são originais.

4.2 PROBLEMA FUNDAMENTAL

Para o desenvolvimento do problema fundamental da TPVL será tomada uma viga laminada de comprimento infinito, de largura e altura idênticas ao problema real, mostrada na Fig. (4.1), sob à ação das forças pontuais $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$. Cada força, quando ativada, aciona apenas os três deslocamentos a ela associados. Assim, p_x^* aciona os deslocamentos fundamentais $u_F^*(x, \hat{x})$, $w_F^*(x, \hat{x})$, $\varphi_F^*(x, \hat{x})$, p_z^* aciona os deslocamentos fundamentais $u_P^*(x, \hat{x})$, $w_P^*(x, \hat{x})$, $\varphi_P^*(x, \hat{x})$, e por fim o momento fundamental m_y^* aciona os deslocamentos fundamentais $u_m^*(x, \hat{x})$, $w_m^*(x, \hat{x})$, $\varphi_m^*(x, \hat{x})$.

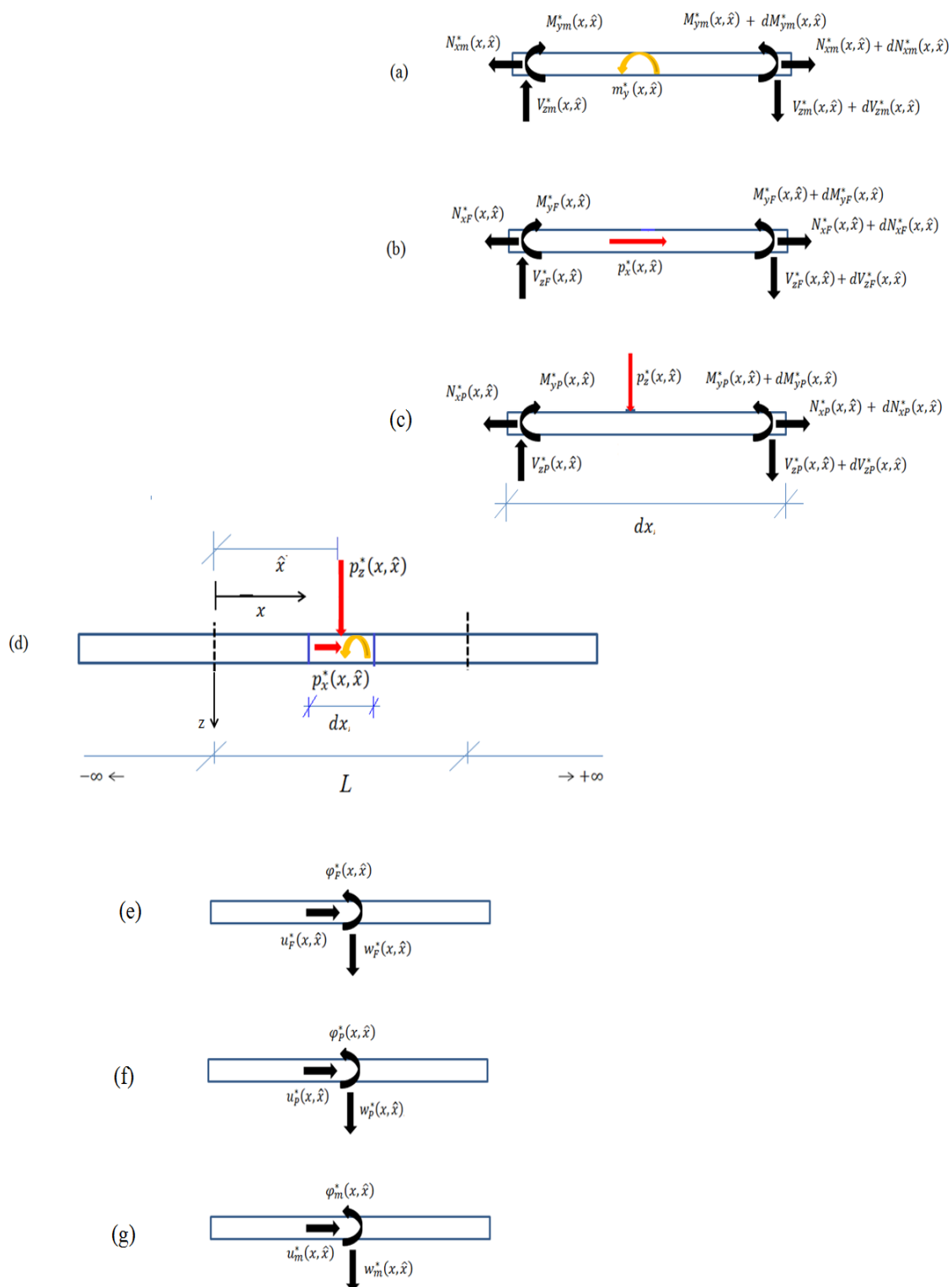


Figura 4.1 Equilíbrio Fundamental: (a) my^* ativado; (b) px^* ativado; (c) pz^* ativado; (d) Barra fundamental; Deslocamentos Fundamentais: (e) my^* ativado; (f) px^* ativado; (g) pz^* ativado

Para o equilíbrio de forças e momentos apresentados na Fig. (4.1b), com a fonte puntual ativada na direção x tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dN_{xF}^*(x, \hat{x})}{dx} + p_x^*(x, \hat{x}) &= 0 \\ \frac{dV_{zF}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{dM_y^*(x, \hat{x})}{dx} - V_{zF}^*(x, \hat{x}) &= 0\end{aligned}\tag{4.1a- c}$$

Realizando agora o equilíbrio de forças e momentos da Fig. (4.1c), para a função puntual aplicada na direção z obtêm-se:

$$\begin{aligned}\frac{dN_{xP}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{dV_{zP}^*(x, \hat{x})}{dx} + p_z^*(x, \hat{x}) &= 0 \\ -V_{zP}^*(x, \hat{x}) + \frac{dM_{yP}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0\end{aligned}\tag{4.1d- f}$$

E, finalmente o equilíbrio de força e momentos apresentados na Fig. (4.1a), se a função puntual em momento for aplicada em torno do eixo y:

$$\begin{aligned}\frac{dN_{xm}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{dV_{zm}^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ -V_{zm}^*(x, \hat{x}) + \frac{dM_{ym}^*(x, \hat{x})}{dx} + m_y^*(x, \hat{x}) &= 0\end{aligned}$$

Analogamente ao problema real apresentado no Capítulo 2, os esforços fundamentais na Eq. (4.1) podem ser desenvolvidos a partir da Eq. (2.35) dando:

$$\begin{aligned}
N_F^*(x, \hat{x}) &= A_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + B_{11} \frac{d\varphi_F^*(x, \hat{x})}{dx} \\
V_{zF}^*(x, \hat{x}) &= A_{55} \left(\frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \varphi_F^*(x, \hat{x}) \right) \\
M_{yF}^*(x, \hat{x}) &= B_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + D_{11} \frac{d\varphi_F^*(x, \hat{x})}{dx} \\
N_P^*(x, \hat{x}) &= A_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x})}{dx} + B_{11} \frac{d\varphi_P^*(x, \hat{x})}{dx} \\
V_{zP}^*(x, \hat{x}) &= A_{55} \left(\frac{dw_P^*(x, \hat{x})}{dx} + \varphi_P^*(x, \hat{x}) \right) \\
M_{yP}^*(x, \hat{x}) &= B_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x})}{dx} + D_{11} \frac{d\varphi_P^*(x, \hat{x})}{dx} \\
N_m^*(x, \hat{x}) &= A_{11} \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + B_{11} \frac{d\varphi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \\
V_{zm}^*(x, \hat{x}) &= A_{55} \left(\frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \varphi_m^*(x, \hat{x}) \right) \\
M_{ym}^*(x, \hat{x}) &= B_{11} \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + D_{11} \frac{d\varphi_m^*(x, \hat{x})}{dx}
\end{aligned} \tag{4.2a-i}$$

Substituindo os esforços fundamentais dados na Eq. (4.2) na equação de equilíbrio fundamental apresentada na Eq. (4.1), são obtidas as equações governantes em deslocamentos que podem ser expressas como:

$$[B][C] = [q] \tag{4.3}$$

Onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & 0 & B_{11} \frac{d^2}{dx^2} \\ 0 & A_{55} \frac{d^2}{dx^2} & A_{55} \frac{d}{dx} \\ B_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -A_{55} \frac{d}{dx} & D_{11} \frac{d^2}{dx^2} - A_{55} \end{bmatrix} \tag{4.3a}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} u_F^*(x, \hat{x}) & u_P^*(x, \hat{x}) & u_m^*(x, \hat{x}) \\ w_F^*(x, \hat{x}) & w_P^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \varphi_F^*(x, \hat{x}) & \varphi_P^*(x, \hat{x}) & \varphi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.3b)$$

$$[q] = - \begin{bmatrix} p_x^*(x, \hat{x}) & 0 & 0 \\ 0 & p_z^*(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & 0 & m_y^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.3c)$$

Para encontrar a solução da equação governante do problema fundamental dada na Eq. (4.3), uma forma que pode ser utilizada é o Método de HÖRMANDER discutido no Capítulo 3, resultando em:

$$[C] = [B^{cof}]^T \psi \quad (4.4)$$

E, portanto, após fazer as derivadas pertinentes tais quais no capítulo 3, a equação diferencial, em termos da função escalar ψ , fica:

$$\frac{d^6 \psi}{dx^6} = \frac{1}{A_{55}(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \delta(x, \hat{x}) \quad (4.5)$$

Notadamente a equação diferencial apresentada na Eq. (4.5) pode ser resolvida de forma análoga a Eq. (3.8), resultando em:

$$\psi(r) = \frac{1}{240A_{55}(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^5 \quad (4.6)$$

Para a obtenção das soluções fundamentais em deslocamento faz-se a substituição da Eq. (4.6) na equação a Eq. (4.4) dado:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = \frac{D_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r$$

$$u_P^*(x, \hat{x}) = -\frac{B_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} r^2 \text{sgn}(x, \hat{x})$$

$$\begin{aligned}
u_m^*(x, \hat{x}) &= -\frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r \\
w_F^*(x, \hat{x}) &= \frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r^2 \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) \\
w_P^*(x, \hat{x}) &= -\frac{r}{2A_{55}} - \frac{A_{11}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r^3 \\
w_m^*(x, \hat{x}) &= -\frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r^2 \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) \\
\varphi_F^*(x, \hat{x}) &= -\frac{B_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r \\
\varphi_P^*(x, \hat{x}) &= \frac{A_{11}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r^2 \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) \\
\varphi_m^*(x, \hat{x}) &= \frac{A_{11}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}r \tag{4.7a-i}
\end{aligned}$$

Já os esforços fundamentais podem ser obtidos substituindo a Eq. (4.7) adequadamente na Eq.(4.2), dando assim:

$$N_{xF}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x, \hat{x})$$

$$V_{zF}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_{yF}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$N_{xP}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$V_{zP}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x, \hat{x})$$

$$M_{yP}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2}r$$

$$N_{xm}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$V_{zm}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_{ym}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (4.8a-i)$$

4.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS

O Método dos Resíduos Ponderados permite ponderar a equação governante do problema real Eq.(2.34) pelas funções fundamentais em deslocamentos Eq. (4.7) convenientes, resultando em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{ccc} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & 0 & B_{11} \frac{d^2}{dx^2} \\ 0 & A_{55} \frac{d^2}{dx^2} & A_{55} \frac{d}{dx} \\ B_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -A_{55} \frac{d}{dx} & D_{11} \frac{d^2}{dx^2} - A_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ w(x) \\ \varphi(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} p_x(x) \\ p_z(x) \\ m_y(x) \end{array} \right\} \right\}^T \times$$

$$\times \left[\begin{array}{ccc} u_F^*(x, \hat{x}) & u_P^*(x, \hat{x}) & u_m^*(x, \hat{x}) \\ w_F^*(x, \hat{x}) & w_P^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \varphi_F^*(x, \hat{x}) & \varphi_P^*(x, \hat{x}) & \varphi_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right] dx = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}^T \quad (4.8)$$

Fazendo as devidas operações algébricas na Eq. (4.8), pode-se obter três equações as quais são acionadas quando p_x^* , p_z^* , ou m_y^* são independentemente ativados. Portanto, a equação associada à função puntual $p_x^*(x, \hat{x})$ pode ser expressa como:

$$\int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + p_x \right) u_F^* + \left(A_{55} \frac{d \varphi}{dx} + A_{55} \frac{d^2 w}{dx^2} + p_z \right) w_F^* \right. \\ \left. + \left(B_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + m_y \right) \varphi_F^* \right] dx = 0 \quad (4.9)$$

Efetando sucessivas integrais por partes na Eq.(4.9) e depois substituindo a equação dos esforços fundamentais Eq.(4.2), obtém-se a equação integral de deslocamentos axial:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u_F^*}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi_F^*}{dx^2} \right) u(x) + \left(A_{55} \frac{d \varphi_F^*}{dx} + A_{55} \frac{d^2 w_F^*}{dx^2} \right) w(x) \right. \\
& \quad \left. + \left(B_{11} \frac{d^2 u_F^*}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi_F^*}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi_P^* + \frac{dw_F^*}{dx} \right) \right) \varphi(x) \right] dx + \\
& - [N_{xF}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L - [V_{zF}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - [M_{yF}^*(x, \hat{x}) \varphi(x)]_0^L = \\
& = - [N_x(x) u_F^*(x, \hat{x})]_0^L - [V_z(x) w_F^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_y(x) \varphi_F^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& - \int_0^L \left[(p_x(x) u_F^*(x, \hat{x})) + (p_z(x) w_F^*(x, \hat{x})) + (m_y(x) \varphi_F^*(x, \hat{x})) \right] dx \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Fazendo uma análise na Eq. (4.10) observa-se que o segundo e terceiro termos da integral são nulos decorrente da Eq. (4.3), já o primeiro termo da integral devido à propriedade do delta Dirac na Eq. (3.4) fica:

$$\int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 u_F^*}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi_F^*}{dx^2} \right) u(x) dx = - \int_0^L u(x) \delta(x, \hat{x}) = -u(\hat{x})$$

Assim, a Eq. (4.10) para o deslocamento axial pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& u(\hat{x}) + [N_{xF}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L + [V_{zF}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L + [M_{yF}^*(x, \hat{x}) \varphi(x)]_0^L = [N_x(x) u_F^*(x, \hat{x})]_0^L \\
& + [V_z(x) w_F^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y(x) \varphi_F^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& + \int_0^L \left[(p_x(x) u_F^*(x, \hat{x})) + (p_z(x) w_F^*(x, \hat{x})) + (m_y(x) \varphi_F^*(x, \hat{x})) \right] dx \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Se a função pulso uniforme p_z^* for ativada, a Eq. (4.8) pode ser então ser dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + p_x \right) u_P^* + \left(A_{55} \frac{d \varphi}{dx} + A_{55} \frac{d^2 w}{dx^2} + p_z \right) w_P^* \right. \\
& \quad \left. + \left(B_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + m_y \right) \varphi_P^* \right] dx = 0 \tag{4.12}
\end{aligned}$$

No entanto, realizando pertinentes integrais por partes na Eq. (4.12) e, em seguida, substituindo de forma adequada a Eq. (4.2) obtém-se a equação integral de deslocamento transversal, que pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u_P^*}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi_P^*}{dx^2} \right) u(x) + \left(A_{55} \frac{d \varphi_P^*}{dx} + A_{55} \frac{d^2 w_P^*}{dx^2} \right) w(x) \right. \\
& \quad \left. + \left(B_{11} \frac{d^2 u_P^*}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi_P^*}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi_P^* + \frac{dw_P^*}{dx} \right) \right) \varphi(x) \right] dx \\
& - [N_{xP}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L - [V_{zP}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - [M_{yP}^*(x, \hat{x}) \varphi(x)]_0^L \\
& = -[N_x(x) u_P^*(x, \hat{x})]_0^L - [V_z(x) w_P^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_y(x) \varphi_P^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& - \int_0^L \left[(p_x(x) u_P^*(x, \hat{x})) + (p_z(x) w_P^*(x, \hat{x})) + (m_y(x) \varphi_P^*(x, \hat{x})) \right] dx \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Fazendo um estudo na Eq. (4.13) observa-se que o primeiro e o terceiro termos da integral são nulos devido a Eq. (4.3), porém o segundo termo da integral, por conta da propriedade do delta de Dirac dada na Eq. (3.4), é expresso como:

$$\int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 u_P^*}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi_P^*}{dx^2} \right) w(x) dx = - \int_0^L w(x) \delta(x, \hat{x}) = -w(\hat{x})$$

Desta forma a Eq. (4.12) para o deslocamento transversal é dada por:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) + [N_{xP}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L + [V_{zP}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L + [M_{yP}^*(x, \hat{x}) \varphi(x)]_0^L = [N_x(x) u_P^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& + [V_z(x) w_P^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y(x) \varphi_P^*(x, \hat{x})]_0^L + \\
& + \int_0^L \left[(p_x(x) u_P^*(x, \hat{x})) + (p_z(x) w_P^*(x, \hat{x})) + (m_y(x) \varphi_P^*(x, \hat{x})) \right] dx \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Por fim, admitindo que o carregamento ativo seja a função puntual em momento m_y^* , assim a Eq. (4.8) pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + p_x \right) u_m^* + \left(A_{55} \frac{d\varphi}{dx} + A_{55} \frac{d^2 w}{dx^2} + p_z \right) w_m^* \\ + \left(B_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + m_y \right) \varphi_m^* = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se for realizada sucessivas integrais por partes na Eq. (4.15) e em seguida for inserida a Eq. (4.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} + B_{11} \frac{d^2 \varphi_m^*}{dx^2} \right) u(x) + \left(A_{55} \frac{d\varphi_m^*}{dx} + A_{55} \frac{d^2 w_m^*}{dx^2} \right) w(x) \right. \\ \left. + \left(B_{11} \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi_m^*}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi_m^* + \frac{dw_m^*}{dx} \right) \right) \varphi(x) \right] dx + \\ - [N_{xm}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L - [V_{zm}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - [M_{ym}^*(x, \hat{x}) \varphi(x)]_0^L = \\ - [N_x(x) u_m^*(x, \hat{x})]_0^L - [V_z(x) w_m^*(x, \hat{x})]_0^L - [M_y(x) \varphi_m^*(x, \hat{x})]_0^L + \\ - \int_0^L \left[(p_x(x) u_m^*(x, \hat{x})) + (p_z(x) w_m^*(x, \hat{x})) + (m_y(x) \varphi_m^*(x, \hat{x})) \right] dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observando a Eq. (4.16) nota-se que os dois primeiros termos da integral são nulos decorrentes da Eq. (4.3), porém o último termo da integral, devido à propriedade do delta de Dirac definida na Eq. (3.4), é dado por:

$$\int_0^L \left(B_{11} \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} + D_{11} \frac{d^2 \varphi_m^*}{dx^2} - A_{55} \left(\varphi_m^* + \frac{dw_m^*}{dx} \right) \right) \varphi(x) dx = - \int_0^L \varphi(x) \delta(x, \hat{x}) = -\varphi(\hat{x})$$

E finalmente a Eq. (4.15) para a rotação da seção transversal pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{x}) + [N_{xm}^*(x, \hat{x}) u(x)]_0^L + [V_{zm}^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L + [M_{ym}^*(x, \hat{x}) \varphi(x)]_0^L = \\ = [N_x(x) u_m^*(x, \hat{x})]_0^L + [V_z(x) w_m^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y(x) \varphi_m^*(x, \hat{x})]_0^L + \\ + \int_0^L \left[(p_x(x) u_m^*(x, \hat{x})) + (p_z(x) w_m^*(x, \hat{x})) + (m_y(x) \varphi_m^*(x, \hat{x})) \right] dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Para o desenvolvimento das equações algébricas do problema será feita a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra juntamente com os limites de integração definidos nas Eq. (4.11), Eq. (4.14), Eq. (4.17) tal qual discutido no Capítulo 3, obtendo assim seis equações: o ponto fonte colocado na extremidade esquerda, dadas por;

$$\begin{aligned}
 & u(0) + N_{xF}^*(L, 0 + \xi)u(x) + V_{zF}^*(L, 0 + \xi)w(x) + M_{yF}^*(L, 0 + \xi)\varphi(x) - \\
 & -N_{xF}^*(0, 0 + \xi)u(0) - V_{zF}^*(0, 0 + \xi)w(0) - M_{yF}^*(0, 0 + \xi)\varphi(0) = \\
 & +N_x(L)u_F^*(L, 0 + \xi) + V_z(L)w_F^*(L, 0 + \xi) + M_y(L)\varphi_F^*(L, 0 + \xi) - \\
 & -N_x(0)u_F^*(0, 0 + \xi) - V_z(0)w_F^*(0, 0 + \xi) - M_y(0)\varphi_F^*(0, 0 + \xi) + \\
 & + \int_0^L \left[(p_x(x)u_F^*(x, 0 + \xi)) + (p_z(x)w_F^*(x, 0 + \xi)) + (m_y(x)\varphi_F^*(x, 0 + \xi)) \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.18a}$$

$$\begin{aligned}
 & w(0) + N_{xP}^*(L, 0 + \xi)u(x) + V_{zP}^*(L, 0 + \xi)w(x) + M_{yP}^*(L, 0 + \xi)\varphi(x) - \\
 & -N_{xP}^*(0, 0 + \xi)u(0) - V_{zP}^*(0, 0 + \xi)w(0) - M_{yP}^*(0, 0 + \xi)\varphi(0) = \\
 & +N_x(L)u_P^*(L, 0 + \xi) + V_z(L)w_P^*(L, 0 + \xi) + M_y(L)\varphi_P^*(L, 0 + \xi) - \\
 & -N_x(0)u_P^*(0, 0 + \xi) - V_z(0)w_P^*(0, 0 + \xi) - M_y(0)\varphi_P^*(0, 0 + \xi) + \\
 & + \int_0^L \left[(p_x(x)u_P^*(x, 0 + \xi)) + (p_z(x)w_P^*(x, 0 + \xi)) + (m_y(x)\varphi_P^*(x, 0 + \xi)) \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.18b}$$

$$\begin{aligned}
 & \varphi(0 + \xi) + N_{xm}^*(L, 0 + \xi)u(x) + V_{zm}^*(L, 0 + \xi)w(x) + M_{ym}^*(L, 0 + \xi)\varphi(x) - \\
 & -N_{xm}^*(0, 0 + \xi)u(0) - V_{zm}^*(0, 0 + \xi)w(0) - M_{ym}^*(0, 0 + \xi)\varphi(0) = \\
 & +N_x(L)u_m^*(L, 0 + \xi) + V_z(L)w_m^*(L, 0 + \xi) + M_y(L)\varphi_m^*(L, 0 + \xi) - \\
 & -N_x(0)u_m^*(0, 0 + \xi) - V_z(0)w_m^*(0, 0 + \xi) - M_y(0)\varphi_m^*(0, 0 + \xi) + \\
 & + \int_0^L \left[(p_x(x)u_m^*(x, 0 + \xi)) + (p_z(x)w_m^*(x, 0 + \xi)) + (m_y(x)\varphi_m^*(x, 0 + \xi)) \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.18c}$$

E o ponto fonte colocado na extremidade direita da barra que são dadas pelas seguintes equações;

$$\begin{aligned}
& u(L) + N_{xF}^*(L, L - \xi)u(x) + V_{zF}^*(L, L - \xi)w(x) + M_{yF}^*(L, L - \xi)\varphi(x) - \\
& - N_{xF}^*(0, L - \xi)u(0) - V_{zF}^*(0, L - \xi)w(0) - M_{yF}^*(0, L - \xi)\varphi(0) = \\
& + N_x(L)u_F^*(L, L - \xi) + V_z(L)w_F^*(L, L - \xi) + M_y(L)\varphi_F^*(L, L - \xi) - \\
& - N_x(0)u_F^*(0, L - \xi) - V_z(0)w_F^*(0, L - \xi) - M_y(0)\varphi_F^*(0, L - \xi) + \\
& + \int_0^L \left[(p_x(x)u_F^*(x, L - \xi)) + (p_z(x)w_F^*(x, L - \xi)) + (m_y(x)\varphi_F^*(x, L - \xi)) \right] dx
\end{aligned} \tag{4.18d}$$

$$\begin{aligned}
& w(L) + N_{xP}^*(L, L - \xi)u(x) + V_{zP}^*(L, L - \xi)w(x) + M_{yP}^*(L, L - \xi)\varphi(x) - \\
& - N_{xP}^*(0, L - \xi)u(0) - V_{zP}^*(0, L - \xi)w(0) - M_{yP}^*(0, L - \xi)\varphi(0) = \\
& + N_x(L)u_P^*(L, L - \xi) + V_z(L)w_P^*(L, L - \xi) + M_y(L)\varphi_P^*(L, L - \xi) - \\
& - N_x(0)u_P^*(0, L - \xi) - V_z(0)w_P^*(0, L - \xi) - M_y(0)\varphi_P^*(0, L - \xi) + \\
& + \int_0^L \left[(p_x(x)u_P^*(x, L - \xi)) + (p_z(x)w_P^*(x, L - \xi)) + (m_y(x)\varphi_P^*(x, L - \xi)) \right] dx
\end{aligned} \tag{4.18e}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi(L - \xi) + N_{xm}^*(L, L - \xi)u(x) + V_{zm}^*(L, L - \xi)w(x) + M_{ym}^*(L, L - \xi)\varphi(x) - \\
& - N_{xm}^*(0, L - \xi)u(0) - V_{zm}^*(0, L - \xi)w(0) - M_{ym}^*(0, L - \xi)\varphi(0) = \\
& + N_x(L)u_m^*(L, L - \xi) + V_z(L)w_m^*(L, L - \xi) + M_y(L)\varphi_m^*(L, L - \xi) - \\
& - N_x(0)u_m^*(0, L - \xi) - V_z(0)w_m^*(0, L - \xi) - M_y(0)\varphi_m^*(0, L - \xi) + \\
& + \int_0^L \left[(p_x(x)u_m^*(x, L - \xi)) + (p_z(x)w_m^*(x, L - \xi)) + (m_y(x)\varphi_m^*(x, L - \xi)) \right] dx
\end{aligned} \tag{4.18f}$$

As equações dos deslocamentos transversais e axiais, e das rotações transversais no contorno da barra dadas na Eq. (4.18) podem ser matricialmente representadas em termos de vetores de deslocamentos e de esforços (ver Fig. (4.1)) no contorno:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \tag{4.19}$$

Onde $[H]$, $[G]$ são as matrizes de influência e $\{f\}$ é o vetor de forças. $\{u\}$ e $\{p\}$ são os vetores de deslocamentos e força, os quais as formas explícita são dadas por:

$$\{u\} = [u_i \quad w_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad w_j \quad \varphi_j]^T = [u(0) \quad w(0) \quad \varphi(0) \quad u(L) \quad w(L) \quad \varphi(L)]^T$$

$$\begin{aligned} \{p\} &= [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T = \\ &= [N_x(0) \quad V_z(0) \quad M_y(0) \quad N_x(L) \quad V_z(L) \quad M_y(L)]^T \end{aligned}$$

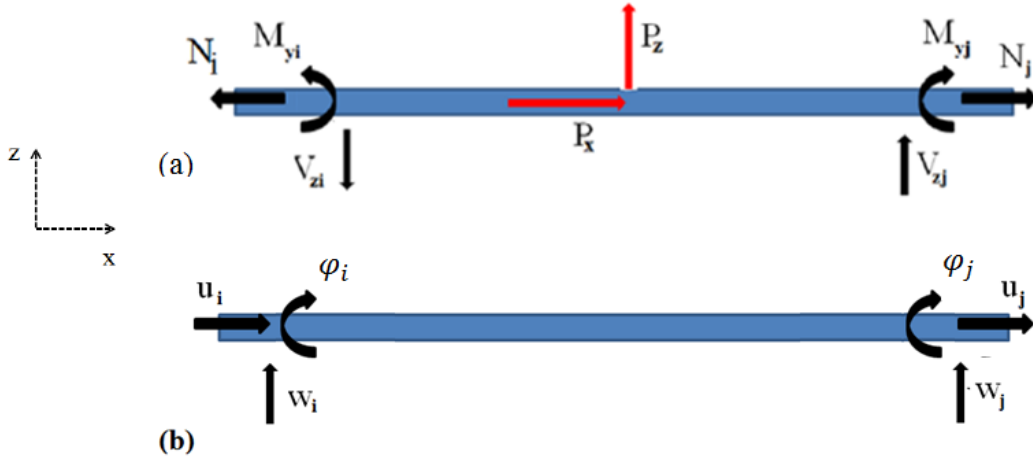


Figura 4.2 (a) Esforços reais (TPVL); (b) Deslocamentos reais (TPVL)

Para apresentação da Fig. (4.2) que descreve os deslocamentos no contorno da barra, foi realizada uma rotação nos eixos de referência em torno do eixo y mostrado na Fig. (2.5).

As matrizes de influência $[G]$ e $[H]$ da Eq. (4.19) em suas formas explícitas são dadas por:

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0+\xi) & -V_F^*(0,0+\xi) & -M_F^*(0,0+\xi) & N_F^*(L,0+\xi) & V_F^*(L,0+\xi) & M_F^*(L,0+\xi) \\ -N_P^*(0,0+\xi) & -V_P^*(0,0+\xi) & -M_P^*(0,0+\xi) & N_P^*(L,0+\xi) & V_P^*(L,0+\xi) & M_P^*(L,0+\xi) \\ -N_m^*(0,0+\xi) & -V_m^*(0,0+\xi) & -M_m^*(0,0+\xi) & N_m^*(L,0+\xi) & V_m^*(L,0+\xi) & M_m^*(L,0+\xi) \\ -N_F^*(0,L-\xi) & -V_F^*(0,L-\xi) & -M_F^*(0,L-\xi) & N_F^*(L,L-\xi) & V_F^*(L,L-\xi) & M_F^*(L,L-\xi) \\ -N_P^*(0,L-\xi) & -V_P^*(0,L-\xi) & -M_P^*(0,L-\xi) & N_P^*(L,L-\xi) & V_P^*(L,L-\xi) & M_P^*(L,L-\xi) \\ -N_m^*(0,L-\xi) & -V_m^*(0,L-\xi) & -M_m^*(0,L-\xi) & N_m^*(L,L-\xi) & V_m^*(L,L-\xi) & M_m^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.20a)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0+\xi) & -w_F^*(0,0+\xi) & -\varphi_F^*(0,0+\xi) & u_F^*(L,0+\xi) & w_F^*(L,0+\xi) & \varphi_F^*(L,0+\xi) \\ -u_P^*(0,0+\xi) & -w_P^*(0,0+\xi) & -\varphi_P^*(0,0+\xi) & u_P^*(L,0+\xi) & w_P^*(L,0+\xi) & \varphi_P^*(L,0+\xi) \\ -u_m^*(0,0+\xi) & -w_m^*(0,0+\xi) & -\varphi_m^*(0,0+\xi) & u_m^*(L,0+\xi) & w_m^*(L,0+\xi) & \varphi_m^*(L,0+\xi) \\ -u_F^*(0,L-\xi) & -w_F^*(0,L-\xi) & -\varphi_F^*(0,L-\xi) & u_F^*(L,L-\xi) & w_F^*(L,L-\xi) & \varphi_F^*(L,L-\xi) \\ -u_P^*(0,L-\xi) & -w_P^*(0,L-\xi) & -\varphi_P^*(0,L-\xi) & u_P^*(L,L-\xi) & w_P^*(L,L-\xi) & \varphi_P^*(L,L-\xi) \\ -u_m^*(0,L-\xi) & -w_m^*(0,L-\xi) & -\varphi_m^*(0,L-\xi) & u_m^*(L,L-\xi) & w_m^*(L,L-\xi) & \varphi_m^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.20b)$$

Os elementos da matriz de influência [H] na Eq. (4.19) são obtidos fazendo as substituições cabíveis dos valores do ponto campo e do ponto fonte no contorno da barra da Eq. (4.18) na Eq. (4.8), de forma análoga ao processo utilizado na Eq. (3.30), resultando em:

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Em processo análogo ao adotado para a obtenção dos elementos da matriz de influência [G] na Eq. (3.31), será realizado para matriz de influência [G] agora da Eq. (4.20b) o que resulta em:

$$[G] = \frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{11}L & \frac{B_{11}}{2}L^2 & -B_{11}L \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{11}}{2}L^2 & -k_{51} & \frac{A_{11}}{2}L^2 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{11}L & -\frac{A_{11}}{2}L^2 & A_{11}L \\ -D_{11}L & \frac{B_{11}}{2}L^2 & B_{11}L & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{B_{11}}{2}L^2 & k_{51} & \frac{A_{11}}{2}L^2 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11}L & -\frac{A_{11}}{2}L^2 & -A_{11}L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$k_{51} = \frac{A_{11}}{6}L^3 + \frac{(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})L}{A_{55}}$$

Já o vetor dos carregamentos da Eq. (4.19) em sua forma explicita pode ser assim apresentado:

$$\{f\} = [f_{1i} \ f_{2i} \ f_{3i} \ f_{1j} \ f_{2j} \ f_{3j}]^T$$

Onde:

$$\begin{aligned} f_{1i} &= \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0 + \xi) + p_z w_F^*(x, 0 + \xi) + m_y \varphi_F^*(x, 0 + \xi)] dx \\ f_{2i} &= \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0 + \xi) + p_z w_P^*(x, 0 + \xi) + m_y \varphi_P^*(x, 0 + \xi)] dx \\ f_{3i} &= \int_0^L [p_x u_m^*(x, 0 + \xi) + p_z w_m^*(x, 0 + \xi) + m_y \varphi_m^*(x, 0 + \xi)] dx \\ f_{1j} &= \int_0^L [p_x u_F^*(x, L - \xi) + p_z w_F^*(x, L - \xi) + m_y \varphi_F^*(x, L - \xi)] dx \\ f_{2j} &= \int_0^L [p_x u_P^*(x, L - \xi) + p_z w_P^*(x, L - \xi) + m_y \varphi_P^*(x, L - \xi)] dx \\ f_{3j} &= \int_0^L [p_x u_m^*(x, L - \xi) + p_z w_m^*(x, L - \xi) + m_y \varphi_m^*(x, L - \xi)] dx \end{aligned} \quad (4.20c)$$

Admitindo que os carregamentos p_x , p_z e m_y sejam uniformes em todo o domínio da barra, logo os elementos do vetor $\{f\}$ dado na Eq. (4.20c) podem ser obtidos de maneira análoga ao procedimento utilizado na Eq. (3.32), assim tem-se:

$$\{f\} = \frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \left\{ \begin{array}{c} \frac{p_x D_{11}}{2} L^2 + \frac{p_z B_{11}}{6} L^3 - \frac{m_y B_{11}}{2} L^2 \\ -\frac{p_x B_{11}}{6} L^3 - \frac{p_z A_{11}}{24} L^4 - \frac{p_z (B_{11}^2 - A_{11} D_{11})}{2A_{55}} L^2 + \frac{m_y A_{11}}{6} L^3 \\ -\frac{p_x B_{11}}{2} L^2 - \frac{p_z A_{11}}{6} L^3 + \frac{m_y A_{11}}{2} L^2 \\ \frac{p_x D_{11}}{2} L^2 - \frac{p_z B_{11}}{6} L^3 - \frac{m_y B_{11}}{2} L^2 \\ \frac{p_x B_{11}}{6} L^3 - \frac{p_z A_{11}}{24} L^4 - \frac{p_z (B_{11}^2 - A_{11} D_{11})}{2A_{55}} L^2 - \frac{m_y A_{11}}{6} L^3 \\ -\frac{p_x B_{11}}{2} L^2 + \frac{p_z A_{11}}{6} L^3 + \frac{m_y A_{11}}{2} L^2 \end{array} \right\}$$

Como a solução do sistema algébrico apresentado na Eq. (4.20) é dada apenas para o contorno da barra, logo, para se obter a solução algébrica para todo domínio é necessário redefinir as Eq. (4.11), Eq. (4.14), Eq. (4.17), em função de um ponto genérico do domínio. Portanto, fazendo a substituição $\hat{x} = a$ e também da solução do sistema algébrico $\{u\}$ nas Eq. (4.11), Eq. (4.14), Eq. (4.17), tem-se então a solução em todo domínio da barra dada por:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\} \quad (4.20)$$

Onde:

$$\{u(a)\} = \left\{ \begin{array}{c} u(a) \\ w(a) \\ \frac{dw(a)}{dx} \end{array} \right\}$$

$$H(a) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G(a) = \frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{bmatrix} -D_{11}a & \frac{B_{11}}{2}a^2 & B_{11}a & D_{11}b & \frac{B_{11}}{2}b^2 & -B_{11}b \\ -\frac{B_{11}}{2}a^2 & k_{51}(a) & \frac{A_{11}}{2}a^2 & -\frac{B_{11}}{2}b^2 & k_{51}(b) & \frac{A_{11}}{2}b^2 \\ B_{11}a & -\frac{A_{11}}{2}a^2 & -A_{11}a & -B_{11}b & -\frac{A_{11}}{2}b^2 & A_{11}b \end{bmatrix}$$

$$\{f(a)\} = \begin{Bmatrix} f_{1a} \\ f_{2a} \\ f_{3a} \end{Bmatrix}$$

Com,

$$\begin{aligned} f_{1a} &= \frac{p_x D_{11}}{2} a^2 + \frac{p_z B_{11}}{6} a^3 - \frac{m_y B_{11}}{2} a^2 + \frac{p_x D_{11}}{2} b^2 - \frac{p_z B_{11}}{6} b^3 - \frac{m_y B_{11}}{2} b^2 \\ f_{2a} &= -\frac{p_x B_{11}}{6} a^3 - \frac{p_z A_{11}}{24} a^4 - \frac{p_z}{4A_{55}D} a^2 + \frac{m_y A_{11}}{6} a^3 + \frac{p_x B_{11}}{3} b^3 - \frac{p_z A_{11}}{12} b^4 \\ &\quad - \frac{p_z}{4A_{55}D} b^2 - \frac{m_y A_{11}}{6} b^3 \\ f_{3a} &= -\frac{p_x B_{11}}{2} a^2 - \frac{p_z A_{11}}{6} a^3 + \frac{m_y A_{11}}{2} a^2 - \frac{p_x B_{11}}{2} b^2 + \frac{p_z A_{11}}{6} b^3 + \frac{m_y A_{11}}{2} b^2 \\ b &= L - a \\ D &= \frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

TEORIA CLÁSSICA DE VIGAS LAMINADAS (ANÁLISE DINÂMICA)

5.1 INTRODUÇÃO

O equacionamento para o problema dinâmico de viga será feito inicialmente no domínio do tempo. Em seguida, admite-se que o elemento estrutural estará submetido apenas a ações periódicas e harmônicas no tempo, de sorte que os campos de deslocamentos e esforços serão dados no domínio da frequência. Com isso, as representações integrais e as soluções fundamentais são propostas apenas no regime permanente. Novamente, as discussões da extensão do MEC para análise de vigas clássicas laminadas no domínio da frequência são originais.

5.2 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Para a obtenção da equação do movimento do sistema dinâmico será aplicado o princípio de D'Alembert. Tomando um elemento infinitesimal da viga laminada mostrada na Fig. (5.1b), onde $N_x(x, t)$ é a força normal, $M_y(x, t)$ é o momento fletor, $V_z(x, t)$ é a força cortante, p_x e p_z são os carregamentos nas direções x e z, f_{Ix} e f_{Iz} são forças de inércia que agem sobre o elemento da viga contrárias aos deslocamentos. Assim, as equações de movimento nas direções dos eixos coordenados são dadas por:

$$\frac{dN_x(x, t)}{dx} + p_x(x, t) - f_{Ix}(x, t) = 0$$

$$\frac{dV_z(x, t)}{dx} + p_z(x, t) - f_{Iz}(x, t) = 0$$

$$V_z(x, t) - \frac{dM_y(x, t)}{dx} = 0 \quad (5.1a-c)$$

Onde, as forças de inércia são definidas como:

$$f_{Ix} = I_1 \left(\frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} \right)$$

$$f_{Iz} = I_1 \left(\frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} \right)$$

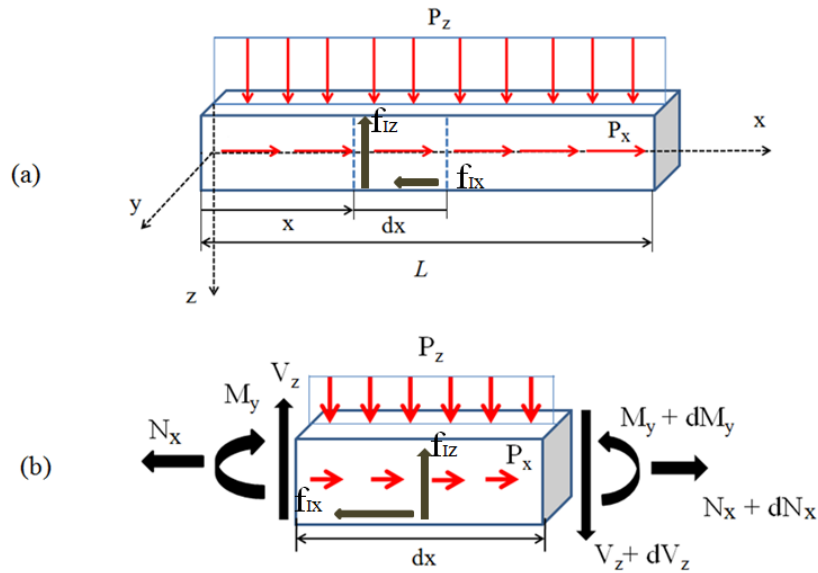


Figura 5.1 (a) Barra laminada sob carregamento; (b) Elemento infinitesimal da barra em equilíbrio

Para TCVL dinâmica pode-se definir I_1 em função da densidade por lamina $\rho^{(k)}$, da largura b e da altura h da seguinte forma:

$$I_1 = \sum_{k=1}^n b \rho^{(k)} (h_k - h_{k-1})$$

Para TCVL a Eq. (5.1) pode ser resumida substituindo a Eq. (5.1c) na Eq. (5.1b), dando:

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = I_1 \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right)$$

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + p_z = I_1 \left(\frac{d^2 w}{dt^2} \right) \quad (5.2a-b)$$

Obviamente, como no Capítulo 2 foram desenvolvidas a TCVL na forma estática, todas as equações da TCVL na forma dinâmica podem ser desenvolvidas a partir desta. É de suma importância observar que para o modelo dinâmico os deslocamentos e esforços variam no tempo. Assim, analogamente ao modelo estático, a equação governante para TCVL dinâmica pode ser dada a partir da Eq. (2.24), apenas superpondo os termos de inércia dados na Eq. (5.2), portanto tem-se:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} &= I_1 \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) - p_x \\ B_{11} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} &= I_1 \left(\frac{d^2 w}{dt^2} \right) - p_z \end{aligned} \quad (5.3a-b)$$

Matricialmente, a equação governante do problema dinâmico descrito na Eq. (5.3) fica:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} - I_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} - I_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_x \\ -p_z \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Como, para a análise do modelo dinâmico um dos interesses é o estudo vibratório da viga, em particular, para as ações que agem harmonicamente e periodicamente no tempo ($p_x = \check{p}_x e^{i\omega t}$ e $p_z = \check{p}_z e^{i\omega t}$). Como resultado, a estrutura responde harmonicamente com campos de deslocamentos e esforços após estabelecer o regime permanente. Uma das maneiras de transformar o equacionamento da viga no domínio do tempo no regime permanente é através da transformada de Fourier a qual é dada por:

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.5)$$

Se $f(x, t)$ for a função delta de Dirac no tempo, então a Eq. (5.5) resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \tau) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (5.5a)$$

Portanto, aplicando a Transformada de Fourier (Eq. (5.5)) nas equações governantes do problema no tempo (Eq. (5.4)), obtêm-se a equação governante do sistema no domínio da frequência dada por:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} + S_1 & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} + S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{u}(x) \\ \check{w}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\check{p}_x \\ -\check{p}_z \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Onde $\check{u}(x)$ e $\check{w}(x)$ são os deslocamentos reais no domínio da frequência, $\check{p}_x$ e $\check{p}_z$ são os carregamentos reais no domínio da frequência e S_1 é uma variável dada em função de I_1 e da frequência ω definida pela equação;

$$S_1 = I_1 \omega^2$$

5.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL

As equações que compõem o problema fundamental dinâmico serão desenvolvidas a partir da Fig. (5.2) de uma barra fundamental análoga ao problema estático proposto no Capítulo 2. Assim, as equações de equilíbrio em forças e momentos para o problema fundamental dinâmico da Fig. (5.2a) podem ser escritas como:

$$\frac{dN_{xF}^*(x, \hat{x}, t)}{dx} + p_x^*(x, \hat{x}, t) - f_{LxF}^*(x, t) = 0$$

$$\frac{dV_{zF}^*(x, \hat{x}, t)}{dx} = 0$$

$$V_{zF}^*(x, \hat{x}, t) - \frac{dM_{yF}^*(x, \hat{x}, t)}{dx} = 0 \quad (5.7a-c)$$

Fazendo também o equilíbrio de forças e momentos na Fig. (5.2d), para a função puntual p_z^* aplicada na direção z obtêm-se:

$$\frac{dN_{xP}^*(x, \hat{x}, t)}{dx} = 0$$

$$\frac{dV_{zP}^*(x, \hat{x}, t)}{dx} + p_z^*(x, \hat{x}, t) - f_{IzP}^*(x, t) = 0$$

$$V_{zP}^*(x, \hat{x}, t) - \frac{dM_{yP}^*(x, \hat{x}, t)}{dx} = 0 \quad (5.7d-f)$$

Onde $f_{IxP}^*(x, \hat{x}, t)$ e $f_{IzP}^*(x, \hat{x}, t)$ são as forças de inércia fundamentais dependentes dos deslocamentos fundamentais $u_F^*(x, \hat{x}, t)$ e $w_P^*(x, \hat{x}, t)$ dadas por:

$$f_{IxP}^*(x, \hat{x}, t) = I_1 \left(\frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x}, t)}{dt^2} \right)$$

$$f_{IzP}^*(x, \hat{x}, t) = I_1 \left(\frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x}, t)}{dt^2} \right)$$

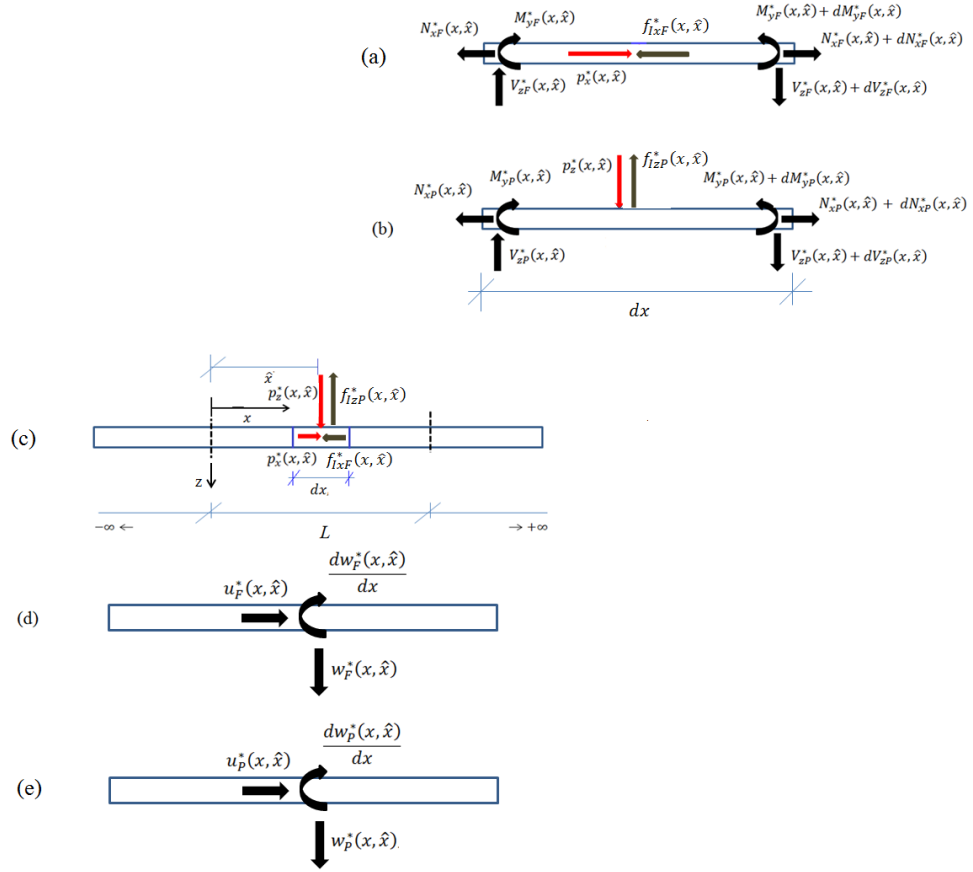


Figura 5.2 Equilíbrio fundamental: (a) p_x^* ativado; (b) p_z^* ativado; (c) p_z^* ativado. Deslocamentos fundamentais: (d) p_x^* ativado; (e) p_z^* ativado

A definição dos esforços fundamentais para o modelo dinâmico é análogo à do problema estático apresentado na Eq. (3.2), resultando em:

$$N_{xF}^*(x, \hat{x}, t) = A_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x}, t)}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x}, t)}{dx^2}$$

$$M_{yF}^*(x, \hat{x}, t) = B_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x}, t)}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x}, t)}{dx^2}$$

$$V_{zF}^*(x, \hat{x}, t) = B_{11} \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x}, t)}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x}, t)}{dx^3}$$

$$N_{xP}^*(x, \hat{x}, t) = A_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x}, t)}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x}, t)}{dx^2}$$

$$M_{yP}^*(x, \hat{x}, t) = B_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x}, t)}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x}, t)}{dx^2}$$

$$V_{zP}^*(x, \hat{x}, t) = B_{11} \frac{d^2 u_P^*(x, \hat{x}, t)}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_P^*(x, \hat{x}, t)}{dx^3} \quad (5.8a-f)$$

Portanto, fazendo a substituição dos esforços fundamentais da Eq. (5.8) na equação de equilíbrio fundamental Eq. (5.7), obtêm-se as equações governantes do problema dinâmico em deslocamentos dadas por:

$$[B][C] = [q] \quad (5.9)$$

Onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} - I_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} - I_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} u_F^*(x, \hat{x}, t) & u_P^*(x, \hat{x}, t) \\ w_F^*(x, \hat{x}, t) & w_P^*(x, \hat{x}, t) \end{bmatrix}$$

$$[q] = - \begin{bmatrix} p_x^*(x, \hat{x}, t) & 0 \\ 0 & p_z^*(x, \hat{x}, t) \end{bmatrix}$$

Sendo $u_F^*(x, \hat{x}, t)$ e $w_F^*(x, \hat{x}, t)$ os deslocamentos fundamentais no tempo acionados pela função pontual $p_x^*(x, \hat{x}, t) = \delta(x, \hat{x})\delta(t, \tau)$ e $u_P^*(x, \hat{x}, t)$, $w_P^*(x, \hat{x}, t)$ são deslocamentos fundamentais no tempo ativados pela função pontual $p_z^*(x, \hat{x}, t) = \delta(x, \hat{x})\delta(t, \tau)$. Já a função $\delta(t, \tau)$ é a função delta de Dirac definida no tempo na Eq. (5.5a).

Portanto, aplicando a transformada de Fourier da Eq.(5.5) na equação governante do problema fundamental dinâmico harmônico dado na Eq. (5.9), obtêm-se a equação governante dependente dos deslocamentos no domínio da frequência dada por:

$$[\check{B}][\check{C}] = [\check{q}] \quad (5.10)$$

$$[\check{B}] = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} + S_1 & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} + S_1 \end{bmatrix} \quad (5.10a)$$

$$[\check{q}] = - \begin{bmatrix} \check{p}_x^*(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \check{p}_z^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (5.10b)$$

$$[\check{C}] = \begin{bmatrix} \check{u}_F^*(x, \hat{x}) & \check{u}_P^*(x, \hat{x}) \\ \check{w}_F^*(x, \hat{x}) & \check{w}_P^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (5.10c)$$

Onde $\check{u}_F^*(x, \hat{x})$, $\check{w}_F^*(x, \hat{x})$ são deslocamentos fundamentais no domínio da frequência ativados pela função pontual $\check{p}_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$; e $\check{u}_P^*(x, \hat{x})$, $\check{w}_P^*(x, \hat{x})$ deslocamentos fundamentais no domínio da frequência ativados pela função pontual $\check{p}_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$.

Uma forma de encontrar a solução da equação governante do problema fundamental no domínio da frequência dada na Eq. (5.10) pode ser utilizando o método de HÖRMANDER como no Capítulo 3 para a análise estática, tem-se:

$$[\check{C}] = [\check{B}^{cof}]^T \psi \quad (5.11)$$

Logo, após fazer as derivadas pertinentes tais quais as no capítulo 3, a equação diferencial em termo da função escalar ψ fica

$$\det[B]\psi = -\delta(x, \hat{x}) \quad (5.12)$$

Calculando o determinante da matriz $[B]$ e depois o substituindo na Eq. (5.12) obtém-se a equação diferencial de sexta ordem dependente função escalar ψ dada por:

$$\frac{d^6\psi}{dx^6} + C_1 \frac{d^4\psi}{dx^4} + C_2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + C_3 = \frac{-\delta(x, \hat{x})}{(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \quad (5.13)$$

Onde C_1, C_2, C_3 são coeficientes da equação diferencial que podem ser expressos por;

$$C_1 = -\frac{D_{11}S_1}{(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}$$

$$C_2 = \frac{A_{11}S_1}{(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}$$

$$C_3 = \frac{S_1^2}{(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})}$$

Tomando a Eq. (5.13) na forma homogênea e fazendo a substituição $\frac{d^2\psi}{dx^2} = y$, para obter a equação característica da Eq.(5.13) tem-se:

$$y^3 + C_1y^2 + C_2y + C_3 = 0 \quad (5.14)$$

De sorte que uma das três raízes da Eq. (5.14) de terceiro grau, é dada por:

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{C_1}{3} \quad (5.15)$$

Onde,

$$q = 2\left(\frac{C_1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}C_1C_2 + C_3$$

$$p = C_2 - \frac{1}{3}C_1^2$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (5.16a-c)$$

Estando de posse de uma das raízes da Eq. (5.14), para obter as outras duas raízes basta aplicar o método prático de Briot-Ruffini. O método consiste em reduzir em um grau o polinômio quando de posse de uma das suas raízes. Logo, a Eq. (5.14) torna-se de segundo grau que pode ser resolvido aplicando a fórmula de Bhaskara. Resultando em:

$$y_1 = \frac{-(y_2 + C_1) + \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (5.17a)$$

$$y_3 = \frac{-(y_2 + C_1) - \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (5.17b)$$

Onde,

$$\Delta_1 = (y_1 + C_1)^2 - 4(C_2 + y_1(y_1 + C_1))$$

Analisando as raízes do polinômio característico apresentadas nas Eq. (5.15), Eq. (5.17a), Eq. (5.17b) pode-se concluir que, a partir de Δ , duas das raízes são negativas e uma positiva. Portanto, supondo que y_1 e y_3 sejam negativas, consequentemente y_2 é positiva e, desta forma, a solução para Eq. (5.13) pode ser apresentada como:

$$\psi = A_1 \sin(\sqrt{-y_1}r) - A_2 \sinh(\sqrt{y_2}r) + A_3 \sin(\sqrt{-y_3}r) \quad (5.18)$$

Onde A_1, A_2, A_3 são constantes a determinar e $r = |x - \hat{x}|$.

Para a determinação das constantes A_1, A_2 e A_3 é necessário realizar sucessivas derivadas na Eq. (5.18) acarretando em derivadas de alta ordem do delta de Dirac dado na Eq. (3.4). Logo, para evitar estas derivadas, as seguintes condições são empregadas:

Para a segunda derivada da Eq. (5.18) quando $x = 0$ e $\hat{x} = 0$ tem-se:

$$\sqrt{-y_1}A_1 - \sqrt{y_2}A_2 + \sqrt{-y_3}A_3 = 0 \quad (5.19)$$

Agora, para a quarta derivada da Eq. (5.18), quando $x = 0$ e $\hat{x} = 0$, tem-se a segunda relação, dada por:

$$y_1\sqrt{-y_1}A_1 - y_2\sqrt{y_2}A_2 + y_3\sqrt{-y_3}A_3 = 0 \quad (5.20)$$

Por último, para a sexta derivada da Eq. (5.18) com $x = 0$ e $\hat{x} = 0$ e comparando a Eq. (5.13), obtêm-se;

$$y_1^2 \sqrt{-y_1} A_1 - y_2^2 \sqrt{y_2} A_2 + y_3^2 \sqrt{-y_3} A_3 = -\frac{1}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \quad (5.21)$$

Por fim, para determinar as constantes A_1, A_2, A_3 da Eq. (5.18) basta resolver o sistema formado pelas Eq. (5.19), Eq. (5.20) e Eq. (5.21) dado por:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-y_1} & -\sqrt{y_2} & \sqrt{-y_3} \\ y_1 \sqrt{-y_1} & -y_2 \sqrt{y_2} & y_3 \sqrt{-y_3} \\ y_1^2 \sqrt{-y_1} & -y_2^2 \sqrt{y_2} & y_3^2 \sqrt{-y_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Após a resolução do sistema apresentado na Eq. (5.22), as constantes A_1, A_2, A_3 , são definidas como;

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{D\sqrt{-y_1}} a_1 \\ A_2 &= \frac{1}{D\sqrt{y_2}} a_2 \\ A_3 &= \frac{1}{D\sqrt{-y_3}} a_3 \end{aligned} \quad (5.23a-c)$$

Onde,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}, \\ a_2 &= \frac{1}{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)}, \\ a_3 &= \frac{1}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)}, \end{aligned}$$

$$\text{e } D = -2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})$$

Substituindo a Eq. (5.23) na Eq. (5.18), obtém-se a solução da equação diferencial definida na Eq. (5.13) que pode ser apresentada como:

$$\psi = \frac{1}{D} \left(\frac{a_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \frac{a_2}{\sqrt{y_2}} \text{senh}(\sqrt{y_2}r) \frac{a_3}{\sqrt{y_3}} \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) \right) \quad (5.24)$$

Para a obtenção das soluções fundamentais no domínio da frequência em deslocamentos faz-se a substituição da Eq. (5.24) na Eq. (5.11)

$$\tilde{u}_F^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \left(\frac{b_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) + \frac{b_2}{\sqrt{y_2}} \text{senh}(\sqrt{y_2}r) + \frac{b_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) \right) \quad (5.25)$$

As constantes dos deslocamentos $\tilde{u}_F^*$ da Eq. (5.25) podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} b_1 &= (-D_{11}y_1^2 + S_1)a_1 \\ b_2 &= -(-D_{11}y_2^2 + S_1)a_2 \\ b_3 &= (-D_{11}y_3^2 + S_1)a_3 \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_F^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \left(c_1 \cos(\sqrt{-y_1}r) + c_2 \cosh(\sqrt{y_2}r) + c_3 \cos(\sqrt{-y_3}r) \right) \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (5.26)$$

As constantes dos deslocamentos $\tilde{w}_F^*$ na Eq. (5.26) são dadas por:

$$\begin{aligned} c_1 &= -B_{11}y_1a_1 \\ c_2 &= B_{11}y_2a_2 \\ c_3 &= -B_{11}y_3a_3 \end{aligned}$$

Já os deslocamentos $\tilde{u}_p^*$ e $\tilde{w}_p^*$ quando o carregamento $\check{p}_z^*$ é ativado são:

$$\tilde{u}_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{D} \left(c_1 \cos(\sqrt{-y_1}r) + c_2 \cosh(\sqrt{y_2}r) + c_3 \cos(\sqrt{-y_3}r) \right) \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} & \left(\frac{1}{\sqrt{-y_1}} d_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + \frac{1}{\sqrt{y_2}} d_2 \text{senh}(\sqrt{y_2} r) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{-y_3}} d_3 \text{sen}(\sqrt{-y_3} r) \right)\end{aligned}\quad (5.28)$$

As constantes do deslocamento fundamental no domínio da frequência na Eq. (5.28) são dadas como:

$$\begin{aligned}d_1 &= (A_{11}y_1 + S_1)a_1 \\ d_2 &= -(A_{11}y_2 + S_1)a_2 \\ d_3 &= (A_{11}y_3 + S_1)a_3\end{aligned}$$

Por outro lado, a inclinação da elástica $\frac{d\tilde{w}_F^*}{dx}$, quando $\check{p}_x^*$ for ativado, fica;

$$\frac{d\tilde{w}_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{D} \left(-c_1 \sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + c_2 \sqrt{y_2} \text{senh}(\sqrt{y_2} r) - c_3 \sqrt{-y_3} \text{sen}(\sqrt{-y_3} r) \right) \quad (5.29)$$

E ainda, a inclinação da elástica quando $\check{p}_z^*$ for ativado, $\frac{d\tilde{w}_p^*}{dx}$ é representada assim;

$$\frac{d\tilde{w}_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{D} \left(d_1 \cos(\sqrt{-y_1} r) + d_2 \cosh(\sqrt{y_2} r) + d_3 \cos(\sqrt{-y_3} r) \right) \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (5.30)$$

As derivadas dos deslocamentos fundamentais e da inclinação da elástica dados nas Eq. (5.27), Eq. (5.28) e Eq. (5.30) em relação ao ponto fonte, que serão usadas nas equações integrais e que posteriormente serão desenvolvidas no item 5.5, podem ser dadas por:

$$\check{u}_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\tilde{w}_F^*}{dx}(x, \hat{x}) \quad (5.31)$$

$$\tilde{w}_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{d\tilde{w}_p^*}{dx}(x, \hat{x}) \quad (5.32)$$

$$\frac{d\tilde{w}_{P,\hat{x}}^*}{dx}(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} (d_1 \sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - d_2 \sqrt{y_2} \text{senh}(\sqrt{y_2}r) + d_3 \sqrt{-y_3} \text{sen}(\sqrt{-y_3}r)) \quad (5.33)$$

As equações dos esforços fundamentais dinâmicas no estudo da TCVL no domínio da frequência são análogas às equações dos esforços fundamentais dinâmicas no domínio do tempo dados na Eq. (5.8). Portanto, substituindo as Eq. (5.25), Eq. (5.26), Eq. (5.27), Eq. (5.28), Eq. (5.29) e Eq. (5.30) na Eq. (5.8), obtêm-se as equações fundamentais no domínio da frequência dos esforços normais, cortantes e momentos dados por:

$$\tilde{N}_F^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} (e_1 \cos(\sqrt{-y_1}r) + e_2 \cosh(\sqrt{y_2}r) + e_3 \cos(\sqrt{-y_3}r)) \text{sgn} \quad (5.34)$$

As constantes do esforço Normal N_F^* na Eq. (5.34) são dadas por;

$$\begin{aligned} e_1 &= A_{11}b_1 - B_{11}y_1c_1 \\ e_2 &= A_{11}b_2 - B_{11}y_2c_2 \\ e_3 &= A_{11}b_3 - B_{11}y_3c_3 \end{aligned}$$

Já o momento fletor fundamental para $\check{p}_x^*$ ativado;

$$\tilde{M}_{Fy}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} (g_1 \cos(\sqrt{-y_1}r) + g_2 \cosh(\sqrt{y_2}r) + g_3 \cos(\sqrt{-y_3}r)) \text{sgn} \quad (5.35)$$

As constantes do momento fletor fundamental M_{Fy}^* da Eq. (5.35) são definidas como:

$$\begin{aligned} g_1 &= B_{11}b_1 - D_{11}y_1c_1 \\ g_2 &= B_{11}b_2 - D_{11}y_2c_2 \\ g_3 &= B_{11}b_3 - D_{11}y_3c_3 \end{aligned}$$

A força cortante quando for ativado $\check{p}_x^*$ fica;

$$\begin{aligned}\check{V}_{Fz}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} & \left(-\sqrt{-y_1} g_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + \sqrt{y_2} g_2 \text{senh}(\sqrt{y_2} r) \right. \\ & \left. - \sqrt{-y_3} g_3 \text{sen}(\sqrt{-y_3} r) \right)\end{aligned}\quad (5.36)$$

Já ativando $\check{p}_z^*$, a força normal fica;

$$\check{N}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \left(\frac{j_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + \frac{j_2}{\sqrt{y_2}} \text{senh}(\sqrt{y_2} r) + \frac{j_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}(\sqrt{-y_3} r) \right) \quad (5.37)$$

As constantes do esforço normal fundamental $\check{N}_p^*$ na Eq. (5.37) são apresentadas como,

$$\begin{aligned}j_1 &= A_{11} c_1 (-y_1) - B_{11} y_1 d_1 \\ j_2 &= -A_{11} c_2 (y_2) - B_{11} y_2 d_2 \\ j_3 &= A_{11} c_3 (-y_3) - B_{11} y_3 d_3\end{aligned}$$

O momento fletor para $\check{p}_z^*$ ativado fica;

$$\check{M}_{Py}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \left(\frac{m_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + \frac{m_2}{\sqrt{y_2}} \text{senh}(\sqrt{y_2} r) + \frac{m_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}(\sqrt{-y_3} r) \right) \quad (5.38)$$

As constantes do momento fletor fundamental M_{Py}^* são definidas como:

$$\begin{aligned}m_1 &= -B_{11} c_1 y_1 - D_{11} y_1 d_1 \\ m_2 &= -B_{11} c_2 y_2 - D_{11} y_2 d_2 \\ m_3 &= -B_{11} c_3 y_3 - D_{11} y_3 d_3\end{aligned}$$

O esforço cortante para $\check{p}_z^*$ ativado fica;

$$\check{V}_{zP}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \left(m_1 \cos(\sqrt{-y_1} r) + m_2 \cosh(\sqrt{y_2} r) + m_3 \cos(\sqrt{-y_3} r) \right) \text{sgn}(x, \hat{x})$$

(5.39)

Agora, a partir das Eq.(5.37), Eq.(5.38), Eq.(5.39) podem ser desenvolvidas as equações dos esforços derivados em relação ao ponto fonte, que são dados por:

$$\tilde{M}_{yP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\tilde{V}_{pZ}^*(x, \hat{x}) \quad (5.40)$$

$$\tilde{N}_{xP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{D} \left(j_1 \cos(\sqrt{-y_1}r) + j_2 \cosh(\sqrt{y_2}r) + j_3 \cos(\sqrt{-y_3}r) \right) \text{sgn}(x, \hat{x}) \quad (5.41)$$

$$\tilde{V}_{zP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{D} \left(-\frac{m_1 y_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \frac{m_2 y_2}{\sqrt{y_2}} \text{senh}(\sqrt{y_2}r) - \frac{m_3 y_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}(\sqrt{-y_3}r) \right) \quad (5.42)$$

5.4 EQUAÇÃO INTEGRAL

Fazendo uma ponderação da Eq. (5.10) pelas soluções fundamentais em deslocamentos da Eq.(5.6), o método dos resíduos ponderados estabelece que:

$$\int_0^L \left\{ \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} + S_1 & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} + S_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{w}(x) \end{matrix} \right\} + \begin{Bmatrix} \check{p}_x \\ \check{p}_z \end{Bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \tilde{u}_F^*(x, \hat{x}) & \tilde{u}_P^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{w}_F^*(x, \hat{x}) & \tilde{w}_P^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \quad (5.43)$$

Realizando as operações matriciais da Eq. (5.43), tem como resultado duas integrais que podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + S_1 \tilde{u} - B_{11} \frac{d^3 \tilde{w}}{dx^3} + \check{p}_x \right) \tilde{u}_F^* + \left(B_{11} \frac{d^3 \tilde{u}}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + S_1 \tilde{w} + \check{p}_z \right) \tilde{w}_F^* \right] dx = \\ & = 0 \\ & \int_0^L \left[\left(A_{11} \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + S_1 \tilde{u} - B_{11} \frac{d^3 \tilde{w}}{dx^3} + \check{p}_x \right) \tilde{u}_P^* + \left(B_{11} \frac{d^3 \tilde{u}}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + S_1 \tilde{w} + \check{p}_z \right) \tilde{w}_P^* \right] dx = \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.44a-b)$$

Efetuada sucessivas integrais por parte na Eq.(5.44a), supondo $\check{p}_x^*$ ativado e depois substituindo as Eq. (5.34), Eq. (5.35), Eq. (5.36), têm-se assim as equações integrais de deslocamento axial, dadas por:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(A_{11} \frac{d^2 \check{u}_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} + S_1 \check{u}_F^*(x, \hat{x}) - B_{11} \frac{d^3 \check{w}_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} \right) \check{u}(x) dx + \\
& \int_0^L \left(B_{11} \frac{d^3 \check{u}_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 \check{w}_F^*(x, \hat{x})}{dx^4} + S_1 \check{w}_F^*(x, \hat{x}) \right) \check{w}(x) dx + \\
& + \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_F^*(x, \hat{x}) + \check{p}_z \check{w}_F^*(x, \hat{x})] dx - [N_x(x) \check{u}_F^*(x, \hat{x})]_0^L + [N_F^*(x, \hat{x}) \check{u}(x)]_0^L + \\
& [\check{V}_{zF}^*(x, \hat{x}) \check{w}(x)]_0^L - [\check{V}_z(x) \check{w}_F^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[\check{M}_{yF}^*(x, \hat{x}) \frac{d\check{w}(x)}{dx} \right]_0^L + \left[\check{M}_y(x) \frac{d\check{w}_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L = 0
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Utilizando processo análogo ao descrito na Eq. (3.20), pode-se então descrever a Eq. (5.45) para o deslocamento axial no domínio da frequência na forma de:

$$\begin{aligned}
& \check{u}(\hat{x}) + [\check{N}_{xF}^*(x, \hat{x}) \check{u}(x)]_0^L + [\check{V}_{zF}^*(x, \hat{x}) \check{w}(x)]_0^L - \left[\check{M}_{yF}^*(x, \hat{x}) \frac{d\check{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& [\check{N}_x(x) \check{u}_F^*(x, \hat{x})]_0^L + [\check{V}_z(x) \check{w}_F^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[\check{M}_y(x) \frac{d\check{w}_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\
& + \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_F^*(x, \hat{x}) + \check{p}_z \check{w}_F^*(x, \hat{x})] dx
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Fazendo uso dos procedimentos realizados na Eq.(5.45), pode-se descrever também as equações integrais em deslocamento transversal:

$$\begin{aligned}
& \check{w}(\hat{x}) + [\check{N}_{xP}^*(x, \hat{x}) \check{u}(x)]_0^L + [\check{V}_{zP}^*(x, \hat{x}) \check{w}(x)]_0^L - \left[\check{M}_{yP}^*(x, \hat{x}) \frac{d\check{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& [\check{N}_x(x) \check{u}_P^*(x, \hat{x})]_0^L + [\check{V}_z(x) \check{w}_P^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[\check{M}_y(x) \frac{d\check{w}_P^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\
& + \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_P^*(x, \hat{x}) + \check{p}_z \check{w}_P^*(x, \hat{x})] dx
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Para o total equacionamento dos problemas clássicos de vigas laminadas são necessárias três incógnitas no contorno a determinar. Assim, uma equação adicional é necessária a fim de tornar o problema solucionável. Logo, a equação para a incógnita adicional é gerada a partir da derivação da Eq. (5.47) em relação ao ponto fonte, resultando na equação integral da inclinação da elástica transversal:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\tilde{w}(\hat{x})}{d\hat{x}} + [\tilde{N}_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})\tilde{u}(x)]_0^L + [\tilde{V}_{zP,\hat{x}}^*(x, \hat{x})\tilde{w}(x)]_0^L - \left[\tilde{M}_{yP,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L \\
& = [\tilde{N}_x(x)\tilde{u}_P^*(x, \hat{x})]_0^L + [\tilde{V}_z(x)\tilde{w}_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x) \frac{d\tilde{w}_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\
& + \int_0^L [\tilde{p}_x\tilde{u}_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \tilde{p}_z\tilde{w}_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]dx
\end{aligned} \tag{5.48}$$

5.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

A representação algébrica do problema fundamental consiste em fazer a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, ou seja, no contorno. Para isso, faz-se o ponto fonte tender a zero (extremidade esquerda da barra) ou tender a L (extremidade direita), o que equivale a $\hat{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0}(0 + \xi)$ e $\hat{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0}(L - \xi)$. Assim, aplicando a substituição dos limites de integração e a colocação da fonte na extremidade esquerda da barra nas Eq. (5.46), Eq. (5.47) e Eq. (5.48), obtêm-se os deslocamentos fundamentais e inclinação da elástica em relação às funções de ativação $\tilde{p}_x^*$, $\tilde{p}_z^*$:

$$\{\tilde{u}\} + [H]\{\tilde{u}\} = [G]\{\tilde{p}\} + \{\tilde{f}\} \tag{5.49}$$

Onde [H] e [G] são as matrizes de influência e {f} é o vetor dos carregamentos. { $\tilde{u}$ } e { $\tilde{p}$ } são os vetores dos deslocamentos e dos esforços mostrados na Fig.(3.2), que explicitamente são descritos como:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{u}\} &= \left[\tilde{u}_i \quad \tilde{w}_i \quad \frac{d\tilde{w}_i}{dx} \quad \tilde{u}_j \quad \tilde{w}_j \quad \frac{d\tilde{w}_j}{dx} \right]^T \\
\{\tilde{p}\} &= \left[\tilde{N}_i \quad \tilde{V}_{zi} \quad \tilde{M}_{yi} \quad \tilde{N}_j \quad \tilde{V}_{zj} \quad \tilde{M}_{yj} \right]^T
\end{aligned}$$

Sendo,

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_i & \tilde{w}_i & \frac{d\tilde{w}_i}{dx} & \tilde{u}_j & \tilde{w}_j & \frac{d\tilde{w}_j}{dx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \tilde{u}(0) & \tilde{w}(0) & \frac{d\tilde{w}(0)}{dx} & \tilde{u}(L) & \tilde{w}(L) & \frac{d\tilde{w}(L)}{dx} \end{bmatrix}^T$$

Os elementos das matrizes de influência [H] e [G] são encontrados fazendo as devidas substituições dos valores do ponto campo x e do ponto fonte $\hat{x}$ da Eq. (5.25) à Eq. (5.42). Portanto, a matriz de influência [H] da Eq. (5.49), na forma explícita, pode expressa como:

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_{5c}(L) & -\alpha_{6s}(L) & \alpha_{7c}(L) \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\alpha_{8s}(L) & \alpha_{9c}(L) & -\alpha_{10s}(L) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_{11c}(L) & -\alpha_{12s}(L) & \alpha_{9c}(L) \\ \alpha_{5c}(L) & \alpha_{6s}(L) & \alpha_{7c}(L) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \alpha_{8s}(L) & \alpha_{9c}(L) & \alpha_{10c}(L) & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \alpha_{11c}(L) & \alpha_{12s}(L) & \alpha_{9c}(L) & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Onde os elementos da matriz de influência [H] são dados por,

$$\alpha_{5c}(z) = -\tilde{N}_F^*(0, z - \xi) = \frac{1}{D} \left(\frac{e_1}{\sqrt{-y_1}} \cos_1 z + \frac{e_2}{\sqrt{y_2}} \cosh_2 z + \frac{e_3}{\sqrt{-y_3}} \cos_3 z \right)$$

$$\alpha_{6s}(z) = -\tilde{V}_F^*(0, z - \xi) = -\frac{1}{D} (-g_1 \sin_1 z + g_2 \sinh_2 z - g_3 \sin_3 z)$$

$$\alpha_{7c}(z) = \tilde{M}_F^*(0, z - \xi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{g_1}{\sqrt{-y_1}} \cos_1 z + \frac{g_2}{\sqrt{y_2}} \cosh_2 z + \frac{g_3}{\sqrt{-y_3}} \cos_3 z \right)$$

$$\alpha_{8s}(z) = -\tilde{N}_P^*(0, z - \xi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{j_1}{\sqrt{-y_1}} \sin_1 z + \frac{j_2}{\sqrt{y_2}} \sinh_2 z + \frac{j_3}{\sqrt{-y_3}} \sin_3 z \right)$$

$$\alpha_{9c}(z) = -\check{V}_P^*(0, z - \xi) = \frac{1}{D}(m_1 \cos_1 z + m_2 ch_2 z + m_3 \cos_3 z)$$

$$\alpha_{10s}(z) = \check{M}_P^*(0, z - \xi) = \frac{1}{D} \left(\frac{m_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}_1 z + \frac{m_2}{\sqrt{y_2}} sh_2 z + \frac{m_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}_3 z \right)$$

$$\alpha_{11c}(z) = -\check{N}_{P,\hat{x}}^*(0, z - \xi) = -\frac{1}{D}(j_1 \cos_1 z + j_2 ch_2 z + j_3 \cos_3 z)$$

$$\alpha_{12s}(z) = -\check{V}_{P,\hat{x}}^*(0, z - \xi) = \frac{1}{D} \left(\frac{m_1 y_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}_1 z + \frac{m_2 y_2}{\sqrt{y_2}} sh_2 z + \frac{m_3 y_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}_3 z \right) \quad (5.50a-h)$$

Para determinar os elementos das matrizes de influência [G] e [H], e do vetor dos carregamentos {f} apresentados na Eq. (5.49) é atribuído $z = L$.

Expondo a matriz de influência [G] apresentada na Eq.(5.49), explicitamente tem-se:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta_{3s}(L) & \beta_{4c}(L) & -\beta_{5s}(L) \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{4c}(L) & -\beta_{6s}(L) & \beta_{7c}(L) \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{5s}(L) & \beta_{7c}(L) & -\beta_{8s}(L) \\ \beta_{3s}(L) & \beta_{4c}(L) & \beta_{5s}(L) & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{4c}(L) & \beta_{6s}(L) & \beta_{7c}(L) & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{5s}(L) & \beta_{7c}(L) & \beta_{8s}(L) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde os elementos da matriz [G] são definidos como:

$$\beta_{3s}(z) = -\check{u}_F^*(0, z - \xi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{b_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}_1 z + \frac{b_2}{\sqrt{y_2}} sh_2 z + \frac{b_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}_3 z \right)$$

$$\beta_{4c}(z) = -\check{w}_F^*(0, z - \xi) = \frac{1}{D}(c_1 \cos_1 z + c_2 ch_2 z + c_3 \cos_3 z)$$

$$\beta_{5s}(z) = \frac{d\check{w}_F^*}{dx}(0, z - \xi) = \frac{1}{D}(-c_1 \sqrt{-y_1} \text{sen}_1 z + c_2 \sqrt{y_2} sh_2 z - c_3 \sqrt{-y_3} \text{sen}_3 z)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{6s}(z) &= -\tilde{w}_P^*(0, z - \xi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{d_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}_1 z + \frac{d_2}{\sqrt{y_2}} sh_2 z + \frac{d_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}_3 z \right) \\
\beta_{7c}(z) &= \frac{d\tilde{w}_P^*}{dx}(0, z - \xi) = -\frac{1}{D} (d_1 \cos_1 z + d_2 ch_2 z + d_3 \cos_3 z) \\
\beta_{8s}(z) &= \frac{d\tilde{w}_{P,\hat{x}}^*}{dx}(0, z - \xi) = \frac{1}{D} (d_1 \sqrt{-y_1} \text{sen}_1 z - d_2 \sqrt{y_2} sh_2 z + d_3 \sqrt{-y_3} \text{sen}_3 z)
\end{aligned} \tag{5.50i-n}$$

Sendo,

$$\text{sen}_1 z = \text{sen}(z\sqrt{-y_1})$$

$$sh_2 z = \text{senh}(z\sqrt{y_2})$$

$$\text{sen}_3 z = \text{sen}(z\sqrt{-y_3})$$

$$\cos_1 z = \cos(z\sqrt{-y_1})$$

$$ch_2 z = \cosh(z\sqrt{y_2})$$

$$\cos_3 z = \cos(z\sqrt{-y_3})$$

Com $z = L$.

Por fim, o vetor dos carregamentos da Eq. (5.49) na forma expandida fica:

$$\begin{Bmatrix} f_{1i} \\ f_{3i} \\ f_{3i} \\ f_{1j} \\ f_{2j} \\ f_{3j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_F^*(x, 0) + \check{p}_z \check{w}_F^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_P^*(x, 0) + \check{p}_z \check{w}_P^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + \check{p}_z \check{w}_{P,\hat{x}}^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_F^*(x, L) + \check{p}_z \check{w}_F^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_P^*(x, L) + \check{p}_z \check{w}_P^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [\check{p}_x \check{u}_{P,\hat{x}}^*(x, L) + \check{p}_z \check{w}_{P,\hat{x}}^*(x, L)] dx \end{Bmatrix} \tag{5.51}$$

Utilizando processo análogo ao do capítulo 3, se os carregamentos $\check{p}_x$ e $\check{p}_z$ são uniformes em todo o domínio da barra, o vetor dos carregamentos da Eq. (5.51) pode ser escrito como:

$$\{f\} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} \check{p}_x F_1(L) + \check{p}_z F_2(L) \\ -\check{p}_x F_2(L) + \check{p}_z F_3(L) \\ \check{p}_x F_4(L) + \check{p}_z F_5(L) \\ \check{p}_x F_1(L) - \check{p}_z F_2(L) \\ \check{p}_x F_2(L) + \check{p}_z F_3(L) \\ \check{p}_x F_4(L) - \check{p}_z F_5(L) \end{Bmatrix}$$

Sendo,

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \left(\frac{b_1}{y_1} (\cos_1 z - 1) + \frac{b_2}{y_2} (ch_2 z - 1) + \frac{b_3}{y_3} (\cos_3 z - 1) \right) \\ F_2(z) &= \left(\frac{c_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}_1 z + \frac{c_2}{\sqrt{y_2}} sh_2 z + \frac{c_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}_3 z \right) \\ F_3(z) &= \left(-\frac{d_1}{y_1} (\cos_1 z - 1) + \frac{d_2}{y_2} (ch_2 z - 1) - \frac{d_3}{y_3} (\cos_3 z - 1) \right) \\ F_4(z) &= (c_1 (\cos_1 z - 1) + c_2 (ch_2 z - 1) + c_3 (\cos_3 z - 1)) \\ F_5(z) &= -\left(\frac{d_1}{\sqrt{-y_1}} \text{sen}_1 z + \frac{d_2}{\sqrt{y_2}} sh_2 z + \frac{d_3}{\sqrt{-y_3}} \text{sen}_3 z \right) \end{aligned} \quad (5.51a-f)$$

Com $z = L$.

Então, após aplicar as condições de contorno na matriz das incógnitas $[A]$ e no vetor independente da Eq. (5.49), resulta em:

$$[\check{A}]\{\check{x}\} = \{\check{b}\}$$

Convém notar que $[\check{A}]$, $\{\check{x}\}$, $\{\check{b}\}$ dependem do vetor de frequência de trabalho. Se o interesse da análise é determinar as frequências e os modos de vibração, duas estratégias podem ser utilizadas. Na primeira, faz-se uma varredura de frequência no sistema, observando possíveis mudanças de sinal em $\{\check{x}\}$, caracterizando pontos de ressonância ou

antirressonância. No caso em que existir ressonância há então descontinuidade em $\{\tilde{x}\}$. Outra maneira de se caracterizar as frequências naturais é encontrando os valores de ω que tornem $\det[A]$ nulo.

Para as determinações dos campos de domínio da viga, basta escrever as representações algébricas referentes às equações integrais Eq. (5.46), Eq. (5.47) e Eq. (5.48), resultando em:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\} \quad (5.52)$$

Onde:

$$\{u(a)\} = \begin{Bmatrix} u(a) \\ w(a) \\ \frac{dw(a)}{dx} \end{Bmatrix}$$

$$[H(a)] = \begin{bmatrix} \alpha_{5c}(a) & \alpha_{6s}(a) & \alpha_{7c}(a) & \alpha_{5c}(b) & -\alpha_{6s}(b) & \alpha_{7c}(b) \\ \alpha_{8s}(a) & \alpha_{9c}(a) & \alpha_{10c}(a) & -\alpha_{8s}(b) & \alpha_{9c}(b) & -\alpha_{10s}(b) \\ \alpha_{11c}(a) & \alpha_{12s}(a) & \alpha_{9c}(a) & \alpha_{11c}(b) & -\alpha_{12s}(b) & \alpha_{9c}(b) \end{bmatrix}$$

$$[G(a)] = \begin{bmatrix} \beta_{3s}(a) & \beta_{4c}(a) & \beta_{5s}(a) & -\beta_{3s}(b) & \beta_{4c}(b) & -\beta_{5s}(b) \\ -\beta_{4c}(a) & \beta_{6s}(a) & \beta_{7c}(a) & -\beta_{4c}(b) & -\beta_{6s}(b) & \beta_{7c}(b) \\ -\beta_{5s}(a) & \beta_{7c}(a) & \beta_{8s}(a) & \beta_{5s}(b) & \beta_{7c}(b) & -\beta_{8s}(b) \end{bmatrix}$$

$$\{f(a)\} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} \check{p}_x F_1(a) + \check{p}_z F_2(a) + \check{p}_x F_1(b) - \check{p}_z F_2(b) \\ -\check{p}_x F_2(a) + \check{p}_z F_3(a) + \check{p}_x F_2(b) + \check{p}_z F_3(b) \\ \check{p}_x F_4(a) + \check{p}_z F_5(a) + \check{p}_x F_4(b) - \check{p}_z F_5(b) \end{Bmatrix}$$

Onde os elementos das matrizes $[H(a)]$, $[G(a)]$ e do vetor $\{f(a)\}$ são dados na Eq. (5.50a-h), Eq. (5.50i-n) e Eq. (5.51a-f), respectivamente, quando tomado $z = a$. E ainda, é feita a substituição $b = L - a$ nas equações descritas.

CAPÍTULO 6

Neste capítulo são apresentados os resultados para a formulação do MEC para casos de vigas envolvendo diversos tipos de carregamento, condições de contorno e laminações. Todos os exemplos foram executados em um código implementado em C++.

EXEMPLO 1: Análise estática de vigas laminadas simétricas

Seja uma viga laminada de seção transversal retangular de 1 m comprimento, largura 0,025 m e altura 0,05 m. As seguintes propriedades mecânicas são utilizadas: $E_1 = 180$ GPa, $E_2 = 8,96$ GPa; $G_{12} = 7,1$ GPa; $\nu_{12} = 0,3$, estando submetida a um carregamento uniformemente distribuído de 250 kN/m sob duas condições de contorno (biapoida ou biengastada). O deslocamento transversal máximo da viga é analisado para diferentes angulações das lâminas. Os resultados da análise estática via TCVL para vigas biapoidas são mostrados na Tab. (6.1) enquanto as respostas da análise estática para vigas engastadas são mostrados na Tab. (6.2). Os resultados do MEC via TCVL são comparados com a solução analítica via Método de Euler dada em HAJIANMALEKI e QATU (2011).

Tabela 6.1 Deslocamento transversal máximo $w(m)$ da viga biapoida

Laminação	Teoria Clássica	
	Método de Euler	MEC
$[0]_4$	0,0901	0,0901
$[0/90]_s$	0,1019	0,1020
$[45]_4$	0,2753	0,2753

Tabela 6.2 Deslocamento transversal máximo $w(m)$ da viga biengastada

Laminação	Teoria Clássica	
	Método de Euler	MEC
$[0]_4$	0,01801	0,01801
$[0/90]_s$	0,02039	0,02039
$[45]_4$	0,05506	0,05506

EXEMPLO 2: Análise estática de vigas sob carregamento transversal triangular

Seja uma viga laminada ortotrópica de comprimento $L = 10$ m, altura $h = 0,05$ m, largura $b = 0,025$ m e com área da seção transversal retangular igual A , com as seguintes propriedades do material: $E_1 = 25$ GPa; $E_2 = 1$ GPa; $G_{12} = G_{13} = 0,5$ GPa; $G_{23} = 0,2$ GPa e $\nu_{12} = 0,25$. A Viga, ainda, é submetida a um carregamento distribuído triangular com $P_{z1} = 0$ N/m, $P_{z2} = 3$ N/m e condição de contorno Apoiado-Apoiado (A-A), vide Fig.6.1 . Já as laminações que compõem a viga podem ser simétricas $[45]_4$ e $[0/90]_s$, ou não simétricas $[0/90]$, $[30_2/60_2]$. Nas Tab. (6.3) e Tab. (6.4) são comparados os resultados do MEC e os valores analíticos para os deslocamentos transversal, axial e inclinação da elástica. Os dois primeiros valores analíticos utilizando a TCVL, segundo VINSON e SIERAKOWSKI (2004), são dados respectivamente por:

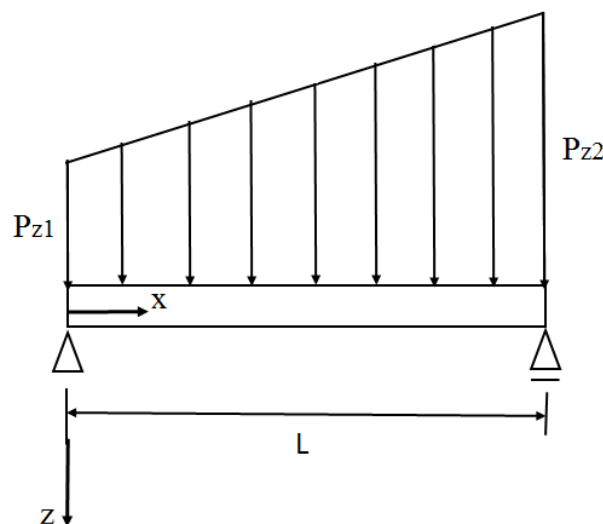


Figura 6.1 Viga simplesmente apoiada sob carregamento trapezoidal

$$w(x) = \frac{A_{11}KL^5}{120(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^5 - \frac{10}{3} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{7}{3} \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$u(x) = \frac{B_{11}KL^4}{24(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

Onde,

$$k = \frac{P_{z2}}{L}$$

E a equação da inclinação da elástica pode ser calculada derivando-se o deslocamento transversal $w(x)$, resultando em:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{A_{11}KL^4}{24(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{7}{15} \right]$$

Convém notar que na Tab. (6.3) os resultados dos deslocamentos axiais não são apresentados, já que eles são nulos devido à simetria do laminado (B_{11} nulo).

Tabela 6.3 Deslocamento transversal $w(m)$ e inclinação da elástica $dw/dx(rad)$ máximos com laminado simétrico

	[0/90] _s		[45] ₄	
	Exata	MEC	Exata	MEC
w	$3,401 \times 10^{-1}$	$3,4006 \times 10^{-1}$	$1,050 \times 10^{-1}$	$1,0502 \times 10^{-1}$
$\frac{dw}{dx}$	$6,348 \times 10^{-3}$	$6,3477 \times 10^{-3}$	$1,960 \times 10^{-3}$	$1,9603 \times 10^{-3}$

Tabela 6.4 Deslocamentos axial $u(m)$, transversal $w(m)$ e inclinação da elástica $dw/dx(rad)$ máximos com laminado simétrico

	[0/90]		[30 ₂ /60 ₂]	
	Exata	MEC	Exata	MEC
u	$5,151 \times 10^{-4}$	$5,1510 \times 10^{-4}$	$3,354 \times 10^{-4}$	$3,3544 \times 10^{-4}$
w	$1,594 \times 10^{-1}$	$1,5944 \times 10^{-1}$	$1,373 \times 10^{-1}$	$1,3725 \times 10^{-1}$
$\frac{dw}{dx}$	$2,976 \times 10^{-3}$	$2,9761 \times 10^{-3}$	$2,562 \times 10^{-3}$	$2,5621 \times 10^{-3}$

EXEMPLO 3: Análise estática de vigas com diferentes condições de contorno e laminação

Seja uma viga laminada ortotrópica de comprimento L , altura h e com área da seção transversal igual A , com as seguintes propriedades do material: $E_1/E_2 = 25$; $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$; $\nu_{12} = 0,25$ e fator de forma para TPVL dado por $\kappa = 5/6$. Os deslocamentos transversais adimensionais podem ser calculados pela equação,

$$\bar{W} = \frac{wAE_2h^210^2}{fL^4}$$

Onde f é uma força uniformemente distribuída em todo o domínio da viga. As condições de contorno Apoiado-Apoiado (A-A), Engastado-Engastado (E-E), Engastado-livre (E-L), Engastado-Apoiado (E-A) são utilizadas para a análise estática segundo a TCVL e TPVL apresentadas neste trabalho. Já as laminações que formam a viga podem ser simétricas [0/90/0], ou não simétricas [0/90]. Nas Tab. (6.5) e Tab. (6.6), Tab. (6.7) e Tab. (6.8) são comparados os resultados dos deslocamentos adimensionalizados transversais máximos para TCVL e TPVL pelo MEC (presente trabalho) com a solução exata para a flexão de vigas laminadas KHDEIR e REDDY (1997).

Tabela 6.5 Deslocamento adimensionalizado W^- com [0/90/0]

Condições de Contorno	Teoria Clássica	
	Exata	MEC
Apoiado – Apoiado	0,646	0,6464
Engastado – Engastado	0,259	0,2586
Engastado – Apoiado	0,129	0,1293
Engastado – Livre	2,198	2,1978

Tabela 6.6 Deslocamento adimensionalizado W^- com [0/90]

Condições de Contorno	Teoria Clássica	
	Exata	MEC
Apoiado – Apoiado	3,322	3,3216
Engastado – Apoiado	1,329	1,3286
Engastado – Engastado	0,664	0,6643
Engastado – Livre	11,293	11,2934

Tabela 6.7 Deslocamento adimensionalizado W^- com [0/90/0]

L/h	Teoria de Primeira Ordem							
	Apoiado- Apoiado		Engastado- Engastado		Engastado- Livre		Engastado- Apoiado	
	Exata	MEC	Exata	MEC	Exata	MEC	Exata	MEC
5	2,146	2,1464	1,629	1,6293	6,698	6,6978	1,922	1,9216
10	1,021	1,0214	0,504	0,5043	3,323	3,3228	0,693	0,6931
50	0,661	0,6614	0,144	0,1442	2,243	2,2428	0,276	0,2764

Tabela 6.8 Deslocamento adimensionalizado $\bar{W}$ com [0/90]

L/h	Teoria de Primeira Ordem							
	Simples-Suporte		Engastado-Engastado		Engastado-Livre		Engastado-Apoiado	
	Exata	MEC	Exata	MEC	Exata	MEC	Exata	MEC
5	5,036	5,0359	2,379	2,3786	16,436	16,4363	3,320	3,3197
10	3,750	3,7502	1,093	1,0929	12,579	12,5791	1,834	1,845
50	3,339	3,3387	0,681	0,6815	11,345	11,3449	1,349	1,3490

EXEMPLO 4: Análise vibratória de uma viga simplesmente apoiada

Para a análise dinâmica harmônica pela TCVL será utilizada uma viga biapoiada de comprimento L , altura h e área da seção transversal A , com as seguintes propriedades do material: $E_1/E_2 = 15,4$; $G_{12}/E_2 = 0,79$; $\nu_{12} = 0,3$ e densidade $\rho = 1580 \text{ kg/m}^3$.

Os resultados das cinco primeiras frequências naturais adimensionais para vigas com laminações simétricas e com diferentes angulações obtidos neste trabalho são comparados aos resultados analíticos de HAJIANMALEKI e QATU (2011) conforme indicado na Tab. (6.9):

Tabela 6.9 Frequência natural adimensional Ω de uma viga laminada simétrica biapoiada

n	[0] ₄		[0/90] _s		[45] ₄	
	Solução Analítica	MEC	Solução Analítica	MEC	Solução Analítica	MEC
1	9,898	9,897	9,302	9,304	5,6613	5,656
2	39,593	39,587	37,207	37,207	22,6450	22,6401
3	89,084	89,085	83,716	83,718	50,9513	50,9514
4	158,372	158,347	148,829	148,829	90,5801	90,5814
5	247,457	247,455	232,546	232,547	141,5314	141,5341

A frequência natural adimensional pode ser calculada por:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{12\rho}{E_1 h^2}}$$

Como HAJIANMALEKI e QATU (2011) apresenta os resultados analíticos de vigas biapoiadas segundo a TCVL para frequências naturais até o quinto modo, neste trabalho optou-se por apresentar a solução analítica para as frequências de todos modos de vibração, que estão descritas no ANEXO I. Nas Tab. (6.10) e Tab. (6.11) são apresentados os resultados das frequências via MEC para os casos de laminados não simétricos $[0_2/90_2]$ e $[30_2/60_2]$, respectivamente, e comparados com os analíticos até o décimo modo.

Tabela 6.10 Frequência natural adimensional Ω de uma viga laminada não simétrica $[0_2/90_2]$ biapoida

	$[0_2/90_2]$	
n	Exata	MEC
1	4,6880	4,6874
2	18,7186	18,7185
3	41,9915	41,9910
4	74,3395	74,3388
5	115,5294	115,5291
6	159,3846	159,3860
7	165,2626	165,2632
8	223,1769	223,1771
9	288,8501	288,8498
10	319,3390	319,3969

Tabela 6.11 Frequência natural adimensional Ω de uma viga laminada não simétrica $[30_2/60_2]$ biapoiada

	$[30_2/60_2]$	
n	Exata	MEC
1	5,1434	5,1433
2	20,5555	20,5555
3	46,1809	46,1802
4	81,9254	81,9248
5	127,6535	127,6535
6	134,3317	134,3306
7	183,1839	183,1840
8	248,2847	248,2836
9	268,9020	268,9014
10	322,6673	322,6676

EXEMPLO 5: Análise vibratória de uma viga a várias condições de contorno

Uma viga laminada ortotrópica de seção transversal retangular de comprimento $L = 1$, altura $h = 0,1$ com propriedades do material: $E_1 = 25$ Pa; $E_2 = 1$ Pa; $G_{12} = G_{13} = 0,5$ Pa; $G_{23} = 0,2$ Pa; $\nu_{12} = 0,25$ e densidade $\rho = 1$ kg/m³. A viga é submetida as diferentes condições de contorno simplesmente apoiada, bi engastada e engastada livre, com laminação simétrica $[0/90]$ composta por quatro lâminas. Para o primeiro caso, os resultados do MEC, do MEF misto e solução analítica (vide ANEXO I) são apresentados na Tab. (6.12). Já para as vigas biengastada e engastada-livre as comparações são feitas apenas entre o MEC e MEF misto, cujos resultados estão apresentados nas Tab. (6.13) e Tab. (6.14). Convém notar que em todas análises via MEF misto foram feitas por ÖZÜTOK e MADENCI (2013). A frequência natural adimensional $\bar{\omega}$ pode ser calculada por:

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}}$$

Tabela 6.12 Frequência natural adimensional $\bar{\omega}$ de uma viga laminada simétrica simplesmente apoiada

	[0/90] _s		
n	MEF Misto	Exata	MEC
1	13,390	13,380	13,380
2	53,673	53,521	53,521
3	121,200	120,422	120,422

Tabela 6.13 Frequência natural adimensional $\bar{\omega}$ de uma viga laminada simétrica bi engastada

	[0/90] _s	
n	MEF Misto	MEC
1	30,358	30,331
2	83,887	83,610
3	165,080	163,909

Tabela 6.14 Frequência natural adimensional $\bar{\omega}$ de uma viga laminada simétrica engastada-livre

	[0/90] _s	
n	MEF Misto	MEC
1	4,766	4,766
2	29,901	29,872
3	83,919	83,643

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estabelecida uma abordagem dos elementos de contorno para problemas de vigas laminadas compostas sob as hipóteses da Teoria Clássica de Vigas Laminadas (TCVL) e da Teoria de Primeira ordem de Vigas laminadas (TPVL) para o caso estático. Para o caso dinâmico harmônico, a solução em elementos de contorno ficou restrita às vigas clássicas laminadas. Para TCVL foram constituída equações integrais para os deslocamentos axiais, transversais e inclinação da elástica transversa. Além disso, foram deduzidas as soluções fundamentais pertinentes aos casos estático e dinâmico harmônico. Para a TPVL as equações integrais, nos problemas estáticos, foram estabelecidas para deslocamentos axiais e transversais e rotação da seção, assim como para as suas respectivas soluções fundamentais.

Nos problemas estáticos e dinâmicos foram gerados sistemas algébricos para determinação, primeiramente, das variáveis de contorno e, em seguida, sistemas para descrição dos campos no domínio.

Os resultados do MEC sugerem a um bom desempenho e elegância da formulação apresentada aqui.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Extensão do MEC para análises dinâmicas em teorias de vigas laminadas de primeira ordem.

Análises estáticas e dinâmicas pelo MEC de vigas laminadas com teorias de segunda e terceira ordem.

REFERÊNCIAS

ANTES, H., SHANZ, M., ALVERMANN, S., 2004. “Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams”. *Journal of sound and vibration*, p. 807-836.

ANTES, H., 2003. “Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams”. *Computers and Structures*, Vol. 81, p. 383-396.

BANERJEE, P.K. AND BUTTERFIELD, R., 1981. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill.

CHANDRASHEKHARA, K., KRISHNAMURTHY, K. AND ROY, S., 1990. “Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation”. *Composite Structures*, Vol. 14, p. 269-279.

CRUZ, J.M.F., 2012. *Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno*. Tese(doutorado), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

HAJIANMALEKI, M. AND QATU, M.S., 2013 “Vibrations of straight and curved composite beams: A review”. *Composite Structures*, Vol. 100, p. 218-232.

HAJIANMALEKI, M. AND QATU, M.S., 2011. *Advances in Composite Materials - Analysis of Natural and Man-Made Materials*. In Tech Europe, Rijeka, 1st edition.

HAN, H.T., ZHANG, Z. AND LU, Z.X., 2010. “General analytical solution to bending of composite laminated beams with delaminations”. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, Vol. 31, p. 883-894.

HORMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, 1963.

KARGARNOVIN, M.H., AHMADIAN, M.T., TALOOKOLAEI, R.A. AND ABEDI, M., 2013. “Semi-analytical solution for the free vibration analysis of generally laminated composite Timoshenko beams with single delamination”. *Composite: Part B*, Vol. 45, p. 587-600.

KHDEIR, A.A. AND REDDY, J.N., 1994. "Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions". *International Journal of Engineering Science*, Vol. 32, N° 12, p. 1971-1980.

KHDEIR, A.A. AND REDDY, J.N., 1997. "An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams". *Composite Structures*, Vol. 37, p. 195-203.

KUMAR, N., 2011. *Vibrational Analysis Of Laminated Composite Beam*. Bachelor of Technology in Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Rourkela.

ÖZÜTOK, A. AND MADENCI, E., 2013. "Free vibration analysis of cross-ply laminated composite beams by mixed finite element formulation". *International journal of structural stability and dynamics*, Vol. 13, N° 2, p. 17.

PROVIDAKIS, C.V. AND BESKOS, D.E., 1986. "Dynamic analysis of beams by the boundary element method". *Composite Structures*, Vol. 22, p. 957-964.

REDDY, J.N., 1997. *Mechanics of Composite Materials Plates and Shells Theory and Analysis*. CRC press, Boca Raton, 2nd edition..

RIOS, G. AND CHAN, W. S., 2010. "A Unified Analysis of stiffened Reinforced Composite beams". In: *Proceedings of 25th ASC conference*. Dayton, USA.

VINSON, J.R. AND SIERAKOWSKI, R.L., 2004. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Kluwer Academic Publishers, New York, 2nd edition.

ANEXO I

DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA LAMINADA DE EULER-BERNOULLI SIMPLEMENTE APOIADA

Das condições de contorno, para uma viga simplesmente apoiada, tem-se:

$$N_x = 0, M_y = 0 \text{ e } w = 0 \quad (A1)$$

A solução em série (Método de Euler) para os deslocamentos compatíveis com as condições de contorno dadas na Eq. (A1) em série, ficam:

$$u = \sum_{m=1}^n [A_m \cos(\alpha_m x)] \operatorname{sen}(\omega t) \quad (A2. a)$$

$$w = \sum_{m=1}^n [C_m \operatorname{sen}(\alpha_m x)] \operatorname{sen}(\omega t) \quad (A2. b)$$

Onde: $\alpha_m = \frac{m\pi}{L}$. A_m e C_m são os termos a determinar da série.

Substituindo a Eq. (A2) na Eq. (5.4), tem-se:

$$\begin{bmatrix} -A_{11}\alpha_m^2 + I_1\omega^2 & -B_{11}\alpha_m^3 \\ B_{11}\alpha_m^3 & -D_{11}\alpha_m^4 + I_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_m \cos(\alpha_m x) \\ C_m \operatorname{sen}(\alpha_m x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A3)$$

Assumindo,

$$\lambda = \omega^2 \quad (A4)$$

E,

$$L = \begin{bmatrix} -A_{11}\alpha_m^2 + I_1\lambda & -B_{11}\alpha_m^3 \\ B_{11}\alpha_m^3 & -D_{11}\alpha_m^4 + I_1\lambda \end{bmatrix} \quad (A5)$$

Para a determinação das frequências naturais uma condição necessária e suficiente é :

$$\det(L) = 0 \quad (A6)$$

Daí, a partir da Eq. (A6), obtém-se os autovalores :

$$\lambda_1 = \frac{A_{11}\alpha_m^2 + D_{11}\alpha_m^4 + \alpha_m^2 \sqrt{(A_{11} - \alpha_m^2 D_{11})^2 + 4B_{11}\alpha_m^2}}{2I_1} \quad (A7. a)$$

$$\lambda_2 = \frac{A_{11}\alpha_m^2 + D_{11}\alpha_m^4 - \alpha_m^2 \sqrt{(A_{11} - \alpha_m^2 D_{11})^2 + 4B_{11}\alpha_m^2}}{2I_1} \quad (A7. b)$$

Logo, substituindo a Eq.(A7) na Eq.(A4) obtém-se as frequências naturais:

$$\omega_1(m) = \sqrt{\frac{A_{11}\alpha_m^2 + D_{11}\alpha_m^4 + \alpha_m^2 \sqrt{(A_{11} - \alpha_m^2 D_{11})^2 + 4B_{11}\alpha_m^2}}{2I_1}} \quad (A8. a)$$

$$\omega_2(m) = \sqrt{\frac{A_{11}\alpha_m^2 + D_{11}\alpha_m^4 - \alpha_m^2 \sqrt{(A_{11} - \alpha_m^2 D_{11})^2 + 4B_{11}\alpha_m^2}}{2I_1}} \quad (A8. b)$$

ANEXO II

GERAÇÃO DO VETOR DE CARGA PARA UM CARREGAMENTO POLINOMIAL

Do teorema do binômio de Newton, tem-se:

$$(x + y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (A8)$$

Agora, assumindo que:

$$|x - \hat{x}|^n = F^n (x - \hat{x})^n \quad (A9)$$

$$\text{Onde: } F = \begin{cases} \text{sgn}(x, \hat{x}) & \text{se } x \neq \hat{x} \\ 0 & \text{se } x = \hat{x} \end{cases}.$$

Assim, multiplicando ambos os lados da Eq. (A9) pelo polinômio de ordem m x^m , a equação fica:

$$|x - \hat{x}|^n x^m = F^n (x - \hat{x})^n x^m \quad (A10)$$

Logo, substituindo a Eq. (A10) na Eq. (A8), tem-se:

$$F^n (x - \hat{x})^n x^m = F^n \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-\hat{x})^{n-k} x^{k+m} \quad (A11)$$

Por fim, integrando ambos os lados da Eq. (A11), obtêm-se:

$$\int F^n(x - \hat{x})^n x^m dx = F^n \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-\hat{x})^{n-k} \frac{x^{k+m+1}}{k+m+1} \quad (A12)$$

Para um caso particular, quando o carregamento distribuído é linear a Eq. (A12) fica:

$$\begin{aligned} \int F^n(x - \hat{x})^n \left[P_1 + \left(\frac{P_2 - P_1}{L} \right) x \right] dx = \\ = F^n \left[P_1 + \left(\frac{P_2 - P_1}{L} \right) x \right] \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-\hat{x})^{n-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned} \quad (A13a)$$

$$\begin{aligned} \int F^n(x - \hat{x})^n \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) \left[P_1 + \left(\frac{P_2 - P_1}{L} \right) x \right] dx = \\ = F^{n+1} \left[P_1 + \left(\frac{P_2 - P_1}{L} \right) x \right] \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-\hat{x})^{n-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned} \quad (A13b)$$

Onde: P_2 e P_1 são carregamentos final e inicial, respectivamente, da viga.

Para a determinação do vetor dos carregamentos $\{f\}$, a partir das Eq. (3.21), Eq. (3.23) e Eq. (3.24), têm-se as integrais:

$$\int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] dx \quad (A14.a)$$

$$\int_0^L [p_x u_P^*(x, \hat{x}) + p_z w_P^*(x, \hat{x})] dx \quad (A14.b)$$

$$\int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] dx \quad (A14.c)$$

Agora, assumindo que p_x e p_z são carregamentos trapezoidais, como na Fig. (A1) da forma:

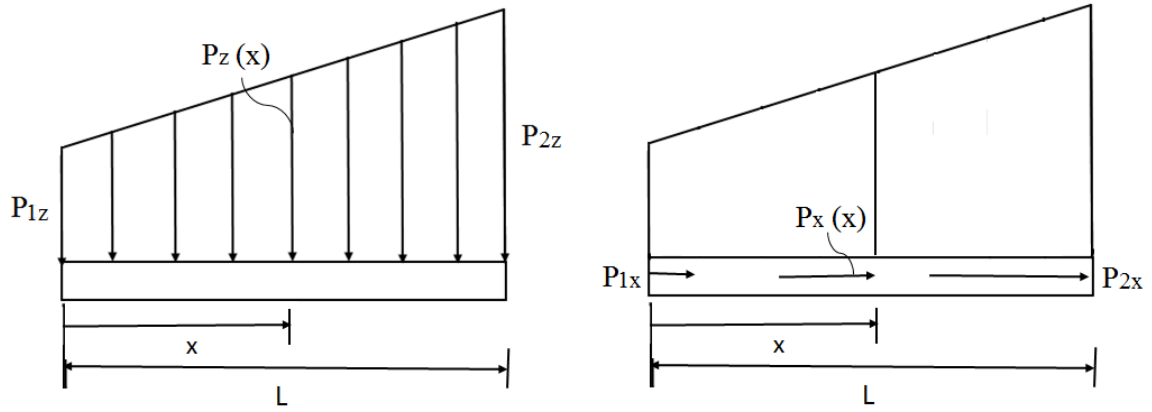


Figura A1. Carregamentos Trapezoidais

Então, eles podem ser escritos como:

$$p_x = P_{1x} + \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{L} \right) x \quad (A15. a)$$

$$p_z = P_{1z} + \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{L} \right) x \quad (A15. b)$$

Onde: P_{1x} , P_{1z} são carregamentos quando $x = 0$ e P_{2x} , P_{2z} são carregamentos quando $x = L$ na viga.

Assim, substituindo a Eq. (A15) na Eq. (A14), obtêm-se:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (A16)$$

Onde,

$$f_1 = \int_0^L \left[\left(P_{1x} + \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{L} \right) x \right) u_F^*(x, \hat{x}) + \left(P_{1z} + \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{L} \right) x \right) w_F^*(x, \hat{x}) \right] dx$$

$$f_2 = \int_0^L \left[\left(P_{1x} + \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{L} \right) x \right) u_P^*(x, \hat{x}) + \left(P_{1z} + \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{L} \right) x \right) w_P^*(x, \hat{x}) \right] dx$$

$$f_3 = \int_0^L \left[\left(P_{1x} + \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{L} \right) x \right) u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + \left(P_{1z} + \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{L} \right) x \right) w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right] dx$$

Agora, Substituindo as Eq. (3.14) e Eq. (3.17) na Eq. (A16) e depois desta substituição levar {f} nas Eq. (A13) e Eq. (A14), adequadamente, obtém-se o vetor dos carregamentos na forma de série, dado por:

$$\begin{aligned}
 f_1(x, \hat{x}) = & \frac{D_{11}F^1P_{1x}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \sum_{k=1}^1 \frac{1!}{k!(1-k)!} (-\hat{x})^{1-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \\
 & + F^1D_{11} \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{2L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \right) \sum_{k=1}^1 \frac{1!}{k!(1-k)!} (-\hat{x})^{1-k} \frac{x^{k+2}}{k+2} + \\
 & + \frac{B_{11}F^3P_{1z}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} (-\hat{x})^{2-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right] + \\
 & + F^3B_{11} \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{4L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \right) \sum_{k=1}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} (-\hat{x})^{2-k} \frac{x^{k+2}}{k+2}
 \end{aligned} \tag{A17. a}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(x, \hat{x}) = & - \frac{B_{11}F^3P_{1x}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} (-\hat{x})^{2-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right] - \\
 & - \left[F^3B_{11} \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{4L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \right) \sum_{k=1}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} (-\hat{x})^{2-k} \frac{x^{k+2}}{k+2} \right] + \\
 & - \frac{A_{11}F^3P_{1z}}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \left[\sum_{k=1}^3 \frac{3!}{k!(3-k)!} (-\hat{x})^{3-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right] - \\
 & - F^3A_{11} \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{12L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \right) \sum_{k=1}^3 \frac{3!}{k!(3-k)!} (-\hat{x})^{3-k} \frac{x^{k+2}}{k+2}
 \end{aligned} \tag{A17. b}$$

$$f_3(x, \hat{x}) = \frac{B_{11}F^1P_{1x}}{2(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \sum_{k=1}^1 \frac{1!}{k!(1-k)!} (-\hat{x})^{1-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} +$$

$$\begin{aligned}
& + F^1 B_{11} \left(\frac{P_{2x} - P_{1x}}{2L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \right) \sum_{k=1}^1 \frac{1!}{k!(1-k)!} (-\hat{x})^{1-k} \frac{x^{k+2}}{k+2} + \\
& + \frac{A_{11}F^3 P_{1z}}{4(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} (-\hat{x})^{2-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right] + \\
& + F^3 A_{11} \left(\frac{P_{2z} - P_{1z}}{4L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \right) \sum_{k=1}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} (-\hat{x})^{2-k} \frac{x^{k+2}}{k+2} \quad (A17.c)
\end{aligned}$$

Fazendo a colocação dos limites de integração na Eq. (A17), observa-se que em $x = 0$, $f_1(0, \hat{x}) = f_2(0, \hat{x}) = f_3(0, \hat{x}) = 0$. Logo, para determinar o vetor dos carregamentos no contorno, basta expandir as séries na Eq. (A17), assumir $x = L$ e fazer a colocação dos pontos fontes nas extremidades da viga. Portanto,

$$\begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{3i} \\ f_{1j} \\ f_{2j} \\ f_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(L, 0) \\ f_2(L, 0) \\ f_3(L, 0) \\ f_1(L, L) \\ f_2(L, L) \\ f_3(L, L) \end{pmatrix} = \frac{L^2}{12(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{pmatrix} D_{11}(P_{1x} + 2P_{2x}) + \frac{B_{11}L}{4}(P_{1z} + 3P_{2z}) \\ -\frac{B_{11}L}{4}(P_{1x} + 3P_{2x}) - \frac{A_{11}L^2}{20}(P_{1z} + 4P_{2z}) \\ B_{11}(P_{1x} + 2P_{2x}) + \frac{A_{11}L}{4}(P_{1z} + 3P_{2z}) \\ D_{11}(2P_{1x} + P_{2x}) - \frac{B_{11}L}{4}(3P_{1z} + P_{2z}) \\ \frac{B_{11}L}{4}(3P_{1x} + P_{2x}) - \frac{A_{11}L^2}{20}(4P_{1z} + P_{2z}) \\ B_{11}(2P_{1x} + P_{2x}) + \frac{A_{11}L}{4}(3P_{1z} + P_{2z}) \end{pmatrix}$$

Agora, o vetor dos carregamentos no domínio, assumindo $a = \hat{x}$ e $b = L - \hat{x}$, pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12L(B_{11}^2 - A_{11}D_{11})} \begin{pmatrix} D_{11}(\alpha_1 P_{1x} + \alpha_2 P_{2x}) + B_{11}(\beta_1 P_{1z} + \beta_2 P_{2z}) \\ -B_{11}(\beta_1 P_{1x} + \beta_2 P_{2x}) + A_{11}(\gamma_1 P_{1z} + \gamma_2 P_{2z}) \\ B_{11}(\alpha_1 P_{1x} + \alpha_2 P_{2x}) + A_{11}(\beta_1 P_{1z} + \beta_2 P_{2z}) \end{pmatrix}$$

Onde os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ são dados por:

$$\alpha_1 = a^3 + 2a^2b + La^2 + b^3$$

$$\beta_1 = \frac{a^4 - 4La^3 + b^4}{4}$$

$$\beta_2 = \frac{-a^4 + 4ab^3 + 3b^4}{4}$$

$$\gamma_1 = \frac{-(-a^5 + 5La^4 - ab^4 + Lb^4)}{20}$$

$$\gamma_2 = \frac{-(a^5 + ab^4 + 4Lb^4)}{20}$$

Agora, se a viga estiver submetida a carregamentos uniformemente distribuídos basta

$$P_{1x} = P_{2x} \text{ e } P_{1z} = P_{2z}.$$