



Universidade Federal da Paraíba
Campus I – Centro de Tecnologia
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
Mestrado - Doutorado

ANÁLISE DA ESTABILIDADE ESTÁTICA E DINÂMICA DE VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por

José Jarbson Salustiano dos Passos

*Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção
do grau de Mestre.*

JOSÉ JARBSON SALUSTIANO DOS PASSOS

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE ESTATÍCA E DINÂMICA DE VIGAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Ângelo Vieira Mendonça

*Dedico este trabalho a minha
família, meu porto seguro.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por dar-me a condição de perseguir os meus sonhos com convicção e coragem durante toda esta longa caminhada.

Agradeço à minha família. Meus amados pais, Edilson José dos Passos e Maria José Salustiano dos Passos, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida. Agradeço, também, a minha maravilhosa e apaixonante noiva, Elize de Castro Corrêa de Oliveira, que me conforta com sua candura, companherismo e amor.

Aos meus irmãos Edilson Júnior Salustiano dos Passos, Rafael Salustiano dos Passos e Rafaela Salustiano Passos de Souza, as lembranças das nossas brincadeiras quando crianças sempre foram uma energia vital nesta caminhada.

À minha sobrinha linda Maria Rebeca Salustiano Passos de Souza, seu sorriso de todas as manhãs renovaram as minhas forças a cada dia.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação pelas contribuições formais e informais, incentivos e exemplos. Agradeço em especial, ao professor Ângelo Viera Mendonça, que me confiou a tarefa de lidar com um tema de dissertação de fato interessante e desafiador. Agradeço também por sua dedicação e disposição durante a construção deste trabalho. Sua generosidade, ética e intensidade me servirão de guias para meus passos futuros.

Agradeço também ao meu segundo pai em Cristo Jesus, Professor José Márcio Filgueiras Cruz a quem só tenho a agradecer por todo apoio. Agradeço aos amigos Thiago José Machado, Joelson Lima da Silva, Petrônio Silva Pereira, Paulo Cavalcante do Nascimento Júnior, Ricardo Costa, Thyago Vasconcelos, Robson Andrade. Todos amigos valorosos demais, estiveram comigo até este momento e me ajudaram muito em mais esta batalha.

RESUMO

Neste trabalho, novas soluções, baseadas no Método dos Elementos de Contorno (MEC) direto, são apresentadas para os problemas de estabilidade estática e dinâmica de vigas. Ambos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko são usados para representar as respostas da viga. Todas as discussões sobre os passos matemáticos para escrever a representação do MEC são apresentadas. Soluções fundamentais alternativas são propostas para o problema da estabilidade estática e dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli, resultando em formas mais simples que as comumente usadas para esses problemas. Além disso, os efeitos de fundações elásticas de Pasternak são incorporadas nas expressões das soluções fundamentais propostas. Para o caso da estabilidade estática e dinâmica de Timoshenko, toda a representação do MEC (equações integrais, soluções fundamentais e equações algébricas) aqui proposta é inovadora. Suas soluções fundamentais incorporam os efeitos da base elástica de Pasternak também. Uma estratégia conveniente é também apresentada para lidar com apoios elásticos no contorno e com discontinuidades no domínio tais como: mudança abrupta de geometria da seção transversal (viga escalonada), carga axial intermediária, apoios rígidos ou elásticos no domínio. Exemplos numéricos incorporando vários tipos de condições de contorno e discontinuidades no domínio são apresentadas para validar as soluções do MEC propostas.

Palavras-Chave: MEC, Flambagem, Solução Fundamental, Equação Integral.

ABSTRACT

In this work new solutions based on the direct Boundary Element Method (BEM) for static and dynamic stability beam problems are presented. Both Euler-Bernoulli and Timoshenko models are used to represent the beam responses. All discussions on mathematical steps to write down the BEM representation are presented. Alternative fundamental solutions for static and dynamic Euler-Bernoulli beam stability problems are proposed, resulting in the simpler forms than conventional fundamental solutions commonly used for the problems. In addition, the effects of Pasternak elastic foundations are incorporated into the expressions of proposed fundamental solutions. For the case of the Timoshenko static and dynamic stability, all the direct BEM representation (integral equations, fundamental solutions and algebraic equations) here proposed are innovative. Their fundamental solutions incorporate Pasternak foundation effects as well. A convenient strategy is also presented in order to deal with elastic end supports and discontinuities at beam domain such as abrupt change of cross section geometry (stepped beams), interdigitated axial load, rigid or elastic supports at beam domain. Numerical examples incorporating various types of boundary conditions and domain discontinuities in order to validate the proposed BEM solution are presented.

Keywords: BEM, Buckling loads, Fundamental solution, Integral Equation.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1.....	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
1.3 OBJETIVOS.....	3
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	4
CAPÍTULO 2.....	5
ESTABILIDADE ESTÁTICA DE VIGAS.....	5
2.1 INTRODUÇÃO.....	5
2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O ESTADO TRIPLO DE TENSÃO.....	5
2.3 PROBLEMA REAL DE EULER-BERNOULLI.....	7
2.3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	7
2.3.2 FUNCIONAL DE ENERGIA.....	10
2.3.2.1 ENERGIA POTENCIAL DA VIGA.....	11
2.3.2.2 ENERGIA POTENCIAL DA BASE ELÁSTICA.....	11
2.3.2.3 TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS.....	15
2.3.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	18
2.4 PROBLEMA REAL DE THIMOSHENKO.....	20
2.4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	20
2.4.2 FUNCIONAL DE ENERGIA.....	22
2.4.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	25
CAPÍTULO 3.....	28
MEC EM ESTABILIDADE ESTÁTICA DE VIGAS.....	28
3.1 INTRODUÇÃO.....	28
3.2 VIGAS DE EULER-BERNOULLI.....	28
3.2.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL.....	28
3.2.2 EQUAÇÃO INTEGRAL.....	34
3.2.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA.....	36
3.3 VIGA DE TIMOSHENKO.....	41
3.3.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL.....	41

3.3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL.....	52
3.2.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA.....	54
CAPÍTULO 4.....	60
ESTABILIDADE DINÂMICA DE VIGAS	60
4.1 INTRODUÇÃO	60
4.2 PROBLEMA REAL DE EULER-BERNOULLI.....	60
4.3 PROBLEMA REAL DE TIMOSHENKO.....	64
CAPÍTULO 5.....	69
MEC NA ESTABILIDADE DINÂMICA DE VIGAS.....	69
5.1 INTRODUÇÃO	69
5.2 VIGA DE EULER-BERNOULLI.....	69
5.2.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL.....	69
5.2.2 EQUAÇÃO INTEGRAL	76
5.2.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA	77
5.3 VIGA DE TIMOSHENKO.....	83
5.3.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL.....	83
5.3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL.....	89
5.3.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA.....	91
CAPÍTULO 6.....	97
TRANSFORMAÇÕES E OPERAÇÕES NO SISTEMA ALGÉBRICO.....	97
6.1 INTRODUÇÃO.....	97
6.2 UNIFICAÇÃO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA.....	97
6.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	99
6.4 DESCONTINUIDADES NO DOMÍNIO.....	102
6.5 RESOLUÇÃO DO SISTEMA ALGÉBRICO.....	110
CAPÍTULO 7.....	112
EXEMPLOS NUMÉRICOS	112
CONCLUSÃO	130
SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	131
REFERÊNCIAS	132

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 ELEMENTO INFINITESIMAL DE UM CORPO EM EQUILÍBRIO.....	5
FIGURA 2.2 BARRA (ELEMENTO ESTRUTURAL UNIDIMENSIONAL).....	8
FIGURA 2.3 COMPONENTES DE DEFORMAÇÃO – EULER-BERNOULLI.....	10
FIGURA 2.4 VIGA APOIADA EM BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	12
FIGURA 2.5 RELAÇÃO FORÇA ELÁSTICA-DESLOCAMENTO DA MOLA.....	12
FIGURA 2.6 VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK	13
FIGURA 2.7 COMPRIMENTO DE BARRA INFINITESIMAL.....	16
FIGURA 2.8 BARRA (ELEMENTO ESTRUTURAL UNIDIMENSIONAL).....	21
FIGURA 2.9 FORÇAS E DESLOCAMENTOS NA VIGA DE TIMOSHENKO.....	22
FIGURA 3.1 VIGA DE EULER: (a) ESFORÇOS; (b) DESLOCAMENTOS.....	38
FIGURA 3.2 VIGA DE TIMOSHENKO: (a) ESFORÇOS; (b) DESLOCAMENTOS.....	55
FIGURA 4.1 BARRA SOB EFEITO DE FLEXÃO DINÂMICA.....	60
FIGURA 6.1 SISTEMA UNIFICADO NO MODELO DE EULER-BERNOULLI.....	98
FIGURA 6.2 SISTEMA UNIFICADO NO MODELO DE TIMOSHENKO.....	98
FIGURA 6.3 (a) VARIÁVEIS NO CONTORNO PARA O MODELO DE EULER; (b) VARIÁVEIS NO CONTORNO PARA O MODELO DE TIMOSHENKO.....	99
FIGURA 6.4 (a) APOIOS ELÁSTICOS; (b) DESLOCAMENTOS; (c) ESFORÇOS; (d) REAÇÕES ELÁSTICAS.....	101
FIGURA 6.5 DESCONTINUIDADES NO DOMÍNIO: (a) MUDANÇA ABRUPTA DA SEÇÃO TRANSVERSAL; (b) NÃO HOMOGENEIDADE FÍSICA; (c) DESCONTINUIDADE DA FORÇA NORMAL.....	102
FIGURA 6.6 DESCONTINUIDADES NO DOMÍNIO: (a) DESCONTINUIDADE DE FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR; (b) DESCONTINUIDADE NA BASE ELÁSTICA.....	103
FIGURA 6.7 DESCONTINUIDADE GEOMÉTRICA NA VIGA.....	103
FIGURA 6.8 DISCRETIZAÇÃO DA BARRA DE EULER COM REPRESENTAÇÃO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS.....	104
FIGURA 6.9 APOIO ELÁSTICO NO DOMÍNIO DA BARRA.....	106
FIGURA 7.0 VIGA COM APOIO RÍGIDO E ELÁSTICO.....	115
FIGURA 7.1 COLUNA EM BAÇANCO COM APOIO NO DOMÍNIO: (a) APOIO ELÁSTICO; (b) APOIO RÍGIDO.....	116
FIGURA 7.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO: (a) C-F (b) A-A.....	125
FIGURA 7.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO: (a) A-C (b) C-A.....	125

FIGURA 7.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO: (a) C-F (b) A-A.....	127
FIGURA 7.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO: (a) A-C (b) C-A.....	127
FIGURA 7.6 VIGA NÃO HOMOGÊNEA COM MUDANÇA ABRUPTA NA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	128
FIGURA 7.7 VIGA NÃO HOMOGÊNEA COM MUDANÇA ABRUPTA NA SEÇÃO TRANSVERSAL SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	129

LISTA DE TABELAS

TABELA 7 CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI.....	112
TABELA 7.1 CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM DE VIGAS DE TIMOSHENKO.....	113
TABELA 7.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM.....	113
TABELA 7.3 PARÂMETROS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM.....	114
TABELA 7.4 PARÂMETROS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM.....	115
TABELA 7.5 PARÂMETROS PARA VIGA DE EULER COM APOIO ELÁSTICO.....	116
TABELA 7.6 PARÂMETROS DE CARGAS DE FLAMBAGEM PARA VIGAS DE EULER COM APOIO RÍGIDO.....	117
TABELA 7.7 CARGAS CRÍTICAS PARA VIGAS DE EULER-BERNOULLI NA BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	118
TABELA 7.8 CARGAS CRÍTICAS PARA VIGAS DE TIMOSHENKO NA BASE DE WINKLER.....	118
TABELA 7.9a PARÂMETROS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DE L/H PARA VIGAS NA BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK.....	119
TABELA 7.9b PARÂMETROS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DE L/H PARA VIGAS NA BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK.....	120
TABELA 7.10 FREQUÊNCIAS NATURAIS EM VIGAS DE EULER-BERNOULLI SOB CARGA AXIAL P.....	121
TABELA 7.11 FREQUÊNCIAS NATURAIS EM VIGAS DE TIMOSHENKO SOB CARGA AXIAL P.....	121
TABELA 7.12 FREQUÊNCIAS NATURAIS EM VIGAS DE EULER-BERNOULLI SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	122
TABELA 7.13 FREQUÊNCIAS NATURAIS EM VIGAS DE TIMOSHENKO SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	122
TABELA 7.14 FREQUÊNCIAS NATURAIS EM VIGAS DE EULER SOBRE BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK.....	123
TABELA 7.15 FREQUÊNCIAS NATURAIS EM VIGAS DE TIMOSHENKO SOBRE BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK.....	123
TABELA 7.16 PARÂMETROS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM EM VIGAS DE EULER-BERNOULLI COM VÁRIAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	124
TABELA 7.17 PARÂMETROS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM EM VIGAS DE EULER-BERNOULLI.....	126
TABELA 7.18 PARÂMETROS DE FREQUÊNCIAS DE VIGAS SUBMETIDAS A CARGAS AXIAIS.....	128

TABELA 7.19 PARÂMETROS DE FREQUÊNCIAS DE CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM.....	129
--	-----

LISTA DE ABREVIATURAS

MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
sgn	- Função sinal
TRP	- Técnica dos Resíduos Ponderados

LISTA DE SÍMBOLOS

b	- Espessura
p	- Constantes
q	- Constantes
Δ	- Constantes
a_1, a_2, a_3	- Constantes
b_1, b_2, b_3	- Constantes
c_1, c_2, c_3	- Constantes
f_i	- Elementos do vetor carregamento
h	- Altura da seção
m_y	- Momento distribuído externo em y
p_x, p_z	- Forças nas coordenadas indicadas
\tilde{p}_x	- Carregamento harmônico axial distribuído para coordenada x
\tilde{p}_z	- Carregamento harmônico axial distribuído para coordenada z
r	- Módulo da distância entre o ponto fonte e o ponto campo
u_i	- Componente de deslocamento na direção i
\tilde{u}	- Deslocamento harmônico na direção x
u, w, φ	- Deslocamentos segundo as direções x, z e rotação da seção transversal
x	- Ponto campo, incógnita
\hat{x}	- Coordenada do ponto fonte
x, y, z	- Coordenadas do sistema generalizado
z	- Profundidade da linha de interesse em relação a linha neutra
x_1, x_2, x_3	- Coordenadas do sistema principal da lâmina
y	- Variável do polinômio característico
ψ	- Função escalar
w_F^*, w_P^*, w_m^*	- Solução fundamental em deslocamentos
y_1, y_2, y_3	- Raízes do polinômio característico
L	- Comprimento

M_y	- Momento fletor
$M_{yF}^*, M_{ym}^*, M_{yP}^*$	- Momentos fletores fundamentais
$N_{yP,\hat{x}}^*$	- Derivada em \hat{x} (ponto fonte) da força normal fundamental
$M_{yP,\hat{x}}^*$	- Derivada em \hat{x} (ponto fonte) do momento fletor fundamental
V_z	- Força cortante na direção z
$V_{zF}^*, V_{zP}^*, V_{zm}^*$	- Forças cortantes fundamentais
$V_{zP,\hat{x}}^*$	- Derivada em \hat{x} (ponto fonte) do esforço cortante fundamental
$\delta(x, \hat{x})$	- Delta de Dirac
ε_i	- Componentes de deformação do vetor deformação
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	- Deformação no eixo x, deformação no eixo y, deformação no eixo z.
E_{ij}	- Módulo de elasticidade transversal
G_{ij}	- Módulo de cisalhamento
ν_{ij}	- Coeficiente de Poisson
σ_i	- Componentes de tensão
σ_x	- Tensão normal à direção x
σ_y	- Tensão normal na direção y
σ_z	- Tensão normal na direção z
τ_{yz}	- Tensão de cisalhamento no plano yz
τ_{xz}	- Tensão de cisalhamento no plano xz
τ_{xy}	- Tensão de cisalhamento no plano xy
ξ	- Valor infinitesimal
$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	- Distorção no plano yz, distorção no plano xz, distorção no plano xy
κ	- Coeficiente de cisalhamento (fator de forma)
$\{f\}$	- Vetor dos carregamentos
$[B^{cof}]$	- Matriz dos cofatores da matriz $[B]$
$[G]$	- Matriz dos coeficientes de influencia
$[T]$	- Matriz de transformação do material
$[T]^t$	- Matriz transposta de $[T]$
$[I]$	- Matriz identidade

CAPÍTULO 1

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Quando uma viga é submetida a um carregamento axial de compressão pode ocorrer de a mesma entrar em “colapso” por perda de estabilidade, caracterizando com isso o fenômeno de flambagem.

Segundo GALAMBOS (1988), CHEN e LUI (1987), a flambagem, também conhecida como instabilidade estrutural, pode ser classificada em duas categorias: (a) flambagem com bifurcação e (b) flambagem por carga limite. No primeiro caso, a deflexão sob carga de compressão muda de uma direção para outra diferente (por exemplo, de encurtamento axial, para deslocamento lateral. A carga para a qual ocorre a bifurcação no espaço de carga-deflexão é chamado a carga crítica. Já no caso da flambagem por carga limite, a estrutura atinge uma carga máxima sem uma bifurcação anterior. Um caso típico dessa situação ocorre em arcos abatidos. Outras classificações para o problema são feitas de acordo com a magnitude do campo de deslocamento (flambagem geometricamente linear ou flambagem geometricamente não linear), natureza da ação (flambagem estática ou dinâmica), comportamento do material (flambagem elástica ou flambagem inelástica), vide EL NASCHIE (1990)

Grande parte dos critérios de segurança em projetos de estruturas é baseada inicialmente em considerações de resistência e rigidez. Contudo, a estrutura pode se tornar insegura antes mesmo que os limites de resistência do material sejam atingidos devido à perda de estabilidade por flambagem. Daí vem a relevância de se caracterizar a estabilidade da estrutura identificando os estados de instabilidade por flambagem tanto estática quanto dinâmica. A flambagem elástica linear por bifurcação é a forma mais elementar do estudo da estabilidade de estruturas sendo, sendo muito importante, pois fornece a base para fórmulas de flambagem comumente usados nos códigos de projeto. além disso, a flambagem elástica linear pode ser considerada um passo essencial para a compreensão do comportamento mais complexo em estruturas, por exemplo comportamento inelástico, imperfeições iniciais, tensões residuais, etc. Para maiores detalhes, recomenda-se as referências BAZANT (2000), BAZANT e CEDOLIN (1991).

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

De acordo com WANG et al. (2000), o primeiro estudo sobre a estabilidade elástica é atribuída a Leonhard Euler, que utilizou a teoria do cálculo variacional para obter as equações de equilíbrio da carga de flambagem em uma coluna elástica comprimida. Já Joseph-Louis Lagrange desenvolveu a abordagem de energia que é mais geral do que a abordagem vetorial de Newton para o estudo de problemas de mecânica. Isto o levou naturalmente ao teorema da total energia potencial mínima que é suficiente para a estabilidade. Outro pesquisador que contribuiu de forma relevante foi Jules Henry Poincaré, que é conhecido como o fundador da teoria da bifurcação e classificação das singularidades. Por outro lado, Aleksandr Mikhailovich Liapunov introduziu as definições básicas de estabilidade e estabeleceu funções de energia generalizadas que levam seu nome.

O problema da estabilidade de vigas utilizando Euler-Bernoulli ou Timoshenko tem sido desenvolvido utilizando soluções analíticas ou numéricas. Algumas dessas soluções foram publicadas em muitas obras tais como WANG et al. (2000), KARNOVSKY e LEBED (2000), TIMOSHENKO e GERE (1961), SHAKER (1975). Quando o problema de estabilidade é resolvido por técnicas numéricas, sua solução tem sido feita majoritariamente pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), por exemplo: ABBAS e THOMAS (1978), YOKOYAMA (1988), CHEN et al. (2013), BANERJEE (1998). Para muitos problemas de engenharia o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica alternativa ao MEF. Desde as primeiras investigações através do MEC o principal foco na Mecânica dos Sólidos tem sido dirigido para os problemas bi e tridimensionais, BECKER(1992), DOMÍNGUEZ (1993), ALIABADI (2002), KATSIKADELIS (2002), SAPOUNTZAKIS e KAMPITSIS (2010), ELFELSOUFI e AZRAR (2005), PROVIDAKIS e BESKOS (1986). Quanto à aplicação do MEC na análise de estruturas reticuladas o cenário tem se mostrado diferente. São poucos os trabalhos encontrados, e na sua maioria apresentam estudos sobre barras e vigas.

Só a partir da década de 1980, soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC foram apresentadas no estudo de barras onde a flexão de vigas de Euler-Bernoulli nos problemas estáticos foi mostrada por BANERJEE e BUTTERFIELD(1981) e nos dinâmicos por PROVIDAKIS e BESKOS (1986). Apenas mais recentemente no início dos anos 2000, a formulação relativa à análise estática da viga de Timoshenko foi

desenvolvida. ANTES (2003) obteve o sistema completo de equações integrais para a teoria de Timoshenko. De acordo com esse autor, o trabalho pode ser considerado como primeiro passo para a importante análise dinâmica de vigas de Timoshenko. De fato, no ano seguinte, ANTES et al.(2004) propuseram a formulação para análise harmônica do modelo de Timoshenko utilizada no estudo de pórticos planos. CRUZ (2012) apresenta uma solução do MEC para pórticos planos e espaciais utilizando tanto soluções fundamentais para os modelos de Euler-Bernoulli quanto para Timoshenko.

Especificamente no problema de estabilidade de vigas, muito menos formulações do MEC tem sido encontradas. Para o caso da estabilidade estática de vigas de Euler-Bernoulli livre de fundação elástica, tem-se o trabalho de MANOLIS et al.(1986), onde são estabelecidas as representações integrais, algébricas e soluções fundamentais. Ainda explorando o modelo de Euler-Bernoulli, agora no problema de estabilidade dinâmica, PROVIDAKIS e BESKOS(1986) apresentaram uma formulação do MEC na qual bases elásticas tipo Winkler eram incluídas na solução fundamental. Todavia, as possibilidades de solução complexa não foram previstas nos modelos apresentados. Apesar dos avanços do MEC no estudo estabilidade de barras de Euler-Bernoulli, ainda existem lacunas a serem preenchidas tais como: presença de apoios elásticos no contorno ou no domínio, vigas escalonadas (mudança abrupta da seção transversal ao longo do eixo), cargas axiais adicionais no domínio e outros. Além disso, há lacunas na literatura de trabalhos propondo uma solução do MEC em problemas da estabilidade da viga Timoshenko.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma formulação direta do MEC para a análise da estabilidade estática e dinâmica de vigas. Como objetivos específicos tem-se:

a) Deduzir equações integrais, soluções fundamentais, equações algébricas para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko, podendo ainda estarem apoiadas em bases elásticas.

b) Incluir na análise a presença de bases elásticas utilizando o modelo de Winkler e Pasternak.

c) Apresentar uma estratégia conveniente de sequenciamento de sistemas algébricos para os casos de apoios elásticos nas extremidades da viga, mudança abrupta de

seção transversal, restrições no domínio (apoios rígidos ou elásticos), e carregamentos axiais adicionais no domínio da viga.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Inicialmente, no Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica da estabilidade estática de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Já no Capítulo 3, para esses problemas são discutidas formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC), fazendo-se o detalhamento de suas equações integrais, soluções fundamentais e equações algébricas. No capítulo 4 são discutidos os fundamentos da estabilidade dinâmica nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, que servirão de base para o desenvolvimento de suas respectivas formulações do MEC tratadas em detalhes no capítulo 5. Continuando com o estudo, no capítulo 6 são apresentadas estratégias convenientes de sequenciamento dos sistemas algébricos para viabilizar análise do MEC para vigas em configurações especiais: mudança abrupta de seção, apoios elásticos no contorno e no domínio e outros. Já no Capítulo 7, são apresentados os resultados para estabilidade estática e dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko e suas devidas comparações com respostas disponíveis na literatura.

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE ESTÁTICA DE VIGAS

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é discutido o problema real de estabilidade em vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko para o caso estático, com e sem base elástica. Inicialmente é abordado de forma sucinta, apenas as relações de elasticidade de interesse para o desenvolvimento deste trabalho, seguidamente será apresentado o método da energia potencial de um sistema elástico e, finalmente são desenvolvidas as deduções das equações reais que regem o fenômeno, inclusive o da flambagem .

2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O ESTADO TRIPLO DE TENSÃO

As componentes de tensão no espaço tridimensional segundo um sistema de eixos cartesianos ortogonais coordenados (x, y, z) , que passa na origem de um elemento infinitesimal, podem ser representadas conforme indicado na Fig. 2.1.

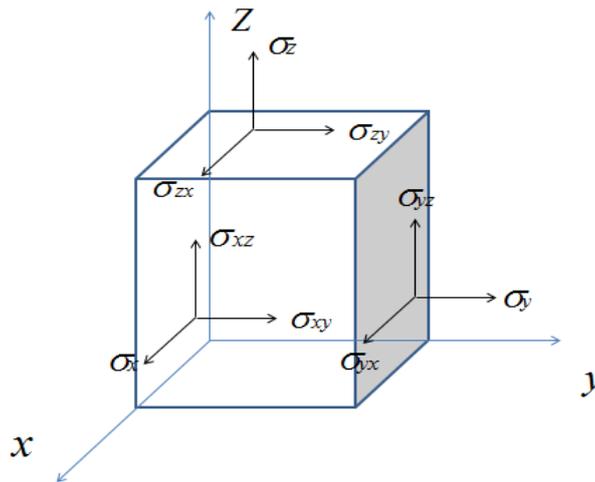


Figura 2.1 - Elemento infinitesimal de um corpo em equilíbrio

As componentes de tensão indicadas na Fig. 2.1 podem ser dadas em função do tensor das tensões dado por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.0)$$

As componentes de deformação em um ponto do corpo estudado podem ser escritas a partir da diferenciação das componentes de deslocamento u , v e w segundo os eixos x , y e z , respectivamente. Se ambos campos suaves (pequenos), então as relações deformação-deslocamento podem ser escritas como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.7)$$

Onde:

ε_x , ε_y e ε_z representam as componentes deformações lineares nas direções x , y , z e γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} representam as componentes de deformação angular (distorção) nas direções xy , xz e yz , respectivamente.

Para o caso de um corpo formado por um material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, as relações tensão-deformação podem ser dadas pela Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad (2.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}; \quad (2.12)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.13)$$

Onde:

E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson.

Em problemas elásticos lineares 3D, a energia potencial de deformação do corpo, aqui denotado por π_{pe} , é dada por:

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (2.14)$$

2.3 PROBLEMA REAL DE EULER-BERNOULLI

Nesta seção será discutido o desenvolvimento do problema real da viga de Euler-Bernoulli estático sob carga axial.

2.3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para o estudo da estabilidade estática (flambagem) de vigas de Euler-Bernoulli apoiadas ou não em base elástica são assumidas as seguintes hipóteses:

a) O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que o comprimento L , seja suficientemente maior que as outras duas, as dimensões b e h da seção transversal, conforme Fig. 2.2.

b) A barra deve ter seção transversal uniforme, ou seja, deve ser prismática;

c) Quando no regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;

d) O material deve ser homogêneo e isotrópico; enquanto a homogeneidade implica que as propriedades e os fenômenos do todo são representados em qualquer região do corpo, a isotropia implica em mesmas propriedades em todas as direções;

e) O material deve ser elástico linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual. Já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;

f) A planicidade das seções transversais deve ser mantida durante o processo de deformação;

g) A ortogonalidade entre o eixo longitudinal e a seção plana é conservada durante o processo de deformação, implicando na desconsideração da distorção transversa.

h) Carregamento axial não varia ao longo da barra;

i) A viga pode ou não estar apoiada em base elástica;

j) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;

k) Os campos de deslocamentos e deformações são assumidos pequenos (suaves) para a viga e base elástica (quando presente) .

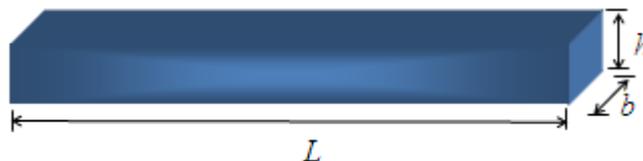


Figura 2.2 – Barra (elemento estrutural unidimensional)

Para a obtenção das relações entre as componentes de deformação, toma-se inicialmente uma parte infinitesimal da viga, tal qual a apresentada na Fig. 2.3. Os deslocamentos axiais da barra podem ser escritos levando-se em conta as hipóteses (f),(h), resultando em:

$$u(x) = -z(-\phi(x)) \quad (2.15)$$

Onde:

z representa a profundidade da fibra e ϕ representa a rotação da seção.

No modelo de Euler-Bernoulli, conforme descrito na hipótese (g), a distorção transversa é admitida nula. Assim, a Eq. (2.6) fica:

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (2.16)$$

Substituindo-se a Eq. (2.15) na Eq. (2.16), resulta em:

$$\frac{dw}{dx} = -\phi \quad (2.17)$$

Aqui, pode-se notar que no modelo de Euler-Bernoulli, a rotação da seção ϕ tem um sinal contrário ao da inclinação da elástica $\frac{dw}{dx}$. Além disso, a deformação axial em conformidade com a Eq. (2.1), Eq. (2.15) e a Eq. (2.17) pode ser dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (2.18)$$

Levando em conta que as únicas tensões normais que atuam na viga são as axiais e ainda a hipótese (h) de supressão do coeficiente de Poisson na Eq. (2.8), as tensões axiais podem ser escritas como:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.19)$$

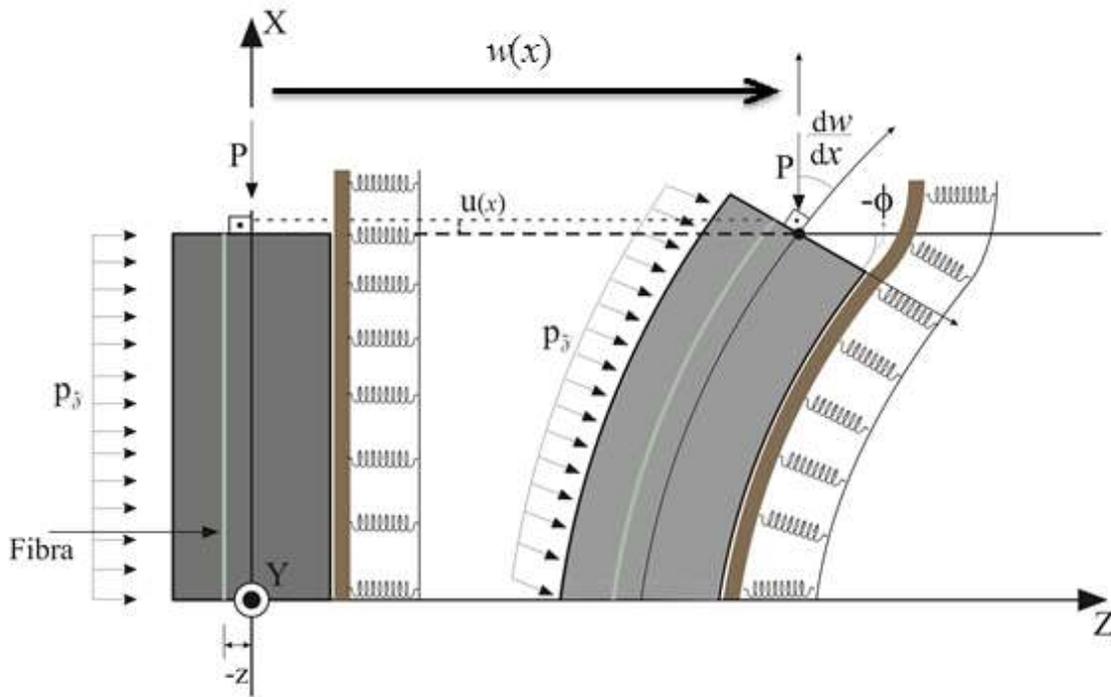


Figura 2.3– Componentes de deformação – Euler-Bernoulli

2.3.2 FUNCIONAL DE ENERGIA

As equações de interesse que regem os problemas reais neste trabalho são obtidas a partir da aplicação dos princípios variacionais, que por sua vez requerem a utilização de funcionais. Aqui, esses funcionais estão associados à energia da estrutura, da base elástica e das cargas externas aplicadas:

$$\pi = \pi_p - W \quad (2.20)$$

Ou ainda na forma:

$$\pi = (\pi_{pv} + \pi_{pb}) - (W_{ct} + W_{ca}) \quad (2.21)$$

Onde:

π_{pv} representa a energia potencial de deformação da viga; π_{pb} , a energia potencial de deformação da base elástica; W_{ct} , o trabalho da força transversal; W_{ca} , o trabalho da força axial.

2.3.2.1 ENERGIA POTENCIAL DA VIGA

Considerando que o modelo de Euler-Bernoulli só mobiliza tensões normais axiais, a energia potencial da viga pode ser obtida daquela do problema 3D dada na Eq. (2.14), resultando em:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x) dV \quad (2.22)$$

Da substituição da Eq. (2.19) e da Eq. (2.18) na Eq. (2.22), tem-se:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V E \left(-z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \left(-z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L E \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx \int_A z^2 dA \quad (2.23)$$

Após a integração ao longo da área da seção e ainda sabendo-se que o momento de inércia é $\int_A z^2 dA = I$, a energia potencial da viga fica:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.24)$$

2.3.2.2 ENERGIA POTENCIAL DA BASE ELÁSTICA

Para a representação do comportamento do sistema de fundação da estrutura, serão adotados neste trabalho os modelos matemáticos associados às bases elásticas de Winkler e Pasternak.

O modelo de Winkler, como apresentado na Fig. 2.4, assume que a base elástica possa ser representada como um conjunto de molas mutuamente independentes

estritamente espaçadas, e que apenas um parâmetro K_1 é necessário para definir suas rigidezes. Além disso, nesse modelo é admitida que a reação da base é proporcional ao deslocamento no ponto de aplicação, vide Fig. 2.5.

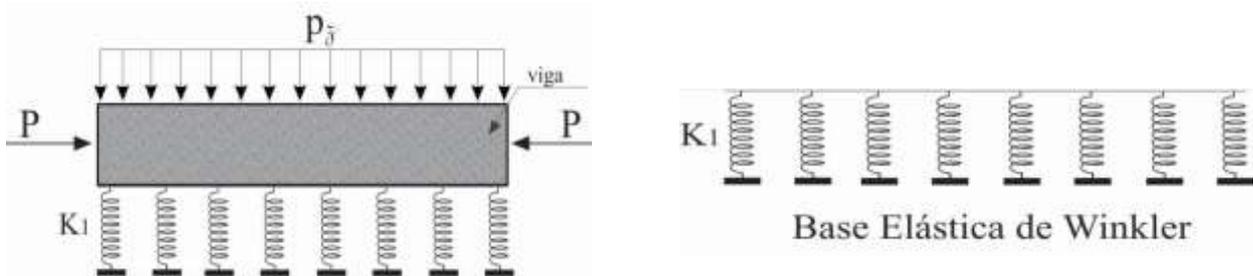


Figura 2.4 – Viga apoiada em base elástica de Winkler

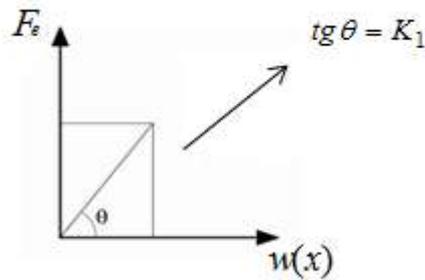


Figura 2.5 – Relação força elástica-deslocamento da mola

De acordo com a hipótese de proporcionalidade da relação reação-deslocamento da base, tem-se que:

$$F_e(x) = K_1 w(x) \tag{2.25}$$

Onde:

F_e representa a reação do base; $w(x)$, a deflexão.

Explorando ainda a proporcionalidade da reação-deslocamento, a energia potencial em cada mola da base pode ser dada pelo cálculo da área do triângulo indicado na Fig. (2.5), resultando em:

$$d\pi_{pbw} = \frac{F_e w(x)}{2} = \frac{(K_1 w(x))w(x)}{2} = \frac{K_1 (w(x))^2}{2} \quad (2.26)$$

Ao computar toda extensão da base, sua energia potencial fica:

$$\pi_{pbw} = \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx \quad (2.27)$$

Por não levar em consideração as interações entre as molas, este modelo não representa a transmissão dos efeitos para fora das regiões diretamente perturbadas. Assim outros modelos são sugeridos na literatura, como por exemplo o modelo de Pasternak.

No modelo de Pasternak, apresentado na Fig. 2.6, é assumido que as molas são integradas por uma camada incompressível que resiste apenas às deformações cisalhantes.

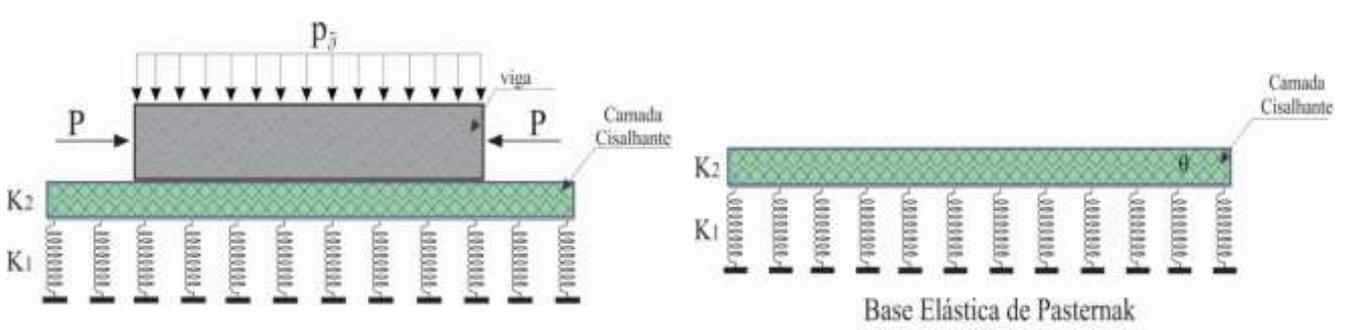


Figura 2.6 – Viga sobre base elástica de Pasternak

Desta forma, este modelo leva em consideração dois parâmetros, K_1 (parâmetro de rigidez da fundação) e K_2 (parâmetro de rigidez cisalhante da camada). Também é assumido que a reação da base é proporcional ao deslocamento transversal das molas e que as tensões cisalhantes da camada de cisalhamento são proporcionais às distorções. Além disso, apenas os deslocamentos transversais da camada são considerados.

A energia potencial da base de Pasternak pode ser subdividida em duas parcelas.

$$\pi_{pbp} = \pi_{pbm} + \pi_{pbc} \quad (2.28)$$

Onde:

π_{pbm} representa a contribuição devida às molas e π_{pbc} representa a contribuição devida à distorção da camada de cisalhamento. A contribuição devida às molas pode ser escrita tal qual em Winkler, isto é:

$$\pi_{pbm} = \pi_{pbw} = \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx \quad (2.29)$$

Já a segunda parcela da energia é devida à distorção da camada de cisalhamento. Como u é admitido zero, então a distorção transversa da base resulta em:

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dx} \quad (2.30)$$

A partir da proporcionalidade tensão-deformação dada na Eq. (2.13) e da Eq. (2.30), as tensões cisalhantes podem ser dadas por:

$$\tau_{xz} = G_s \gamma_{xz} = G_s \frac{dw}{dx} \quad (2.31)$$

Onde:

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \quad (2.32)$$

Sendo E_s , ν_s o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da camada de cisalhamento, respectivamente.

A energia potencial π_{pbc} , devida à distorção da camada de cisalhamento de Pasternak pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\pi_{pbc} &= \int_V \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} dV = \int_V \frac{1}{2} G_s \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dV = \int_0^L \frac{1}{2} G_s \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx \int_A dA \\
&= \int_0^L \frac{1}{2} G_s A \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} p_2 \frac{dw(x)}{dx} dx
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Onde:

$$K_2 = GA \quad \text{e} \quad p_2 = K_2 \frac{dw(x)}{dx}$$

Finalmente, a energia potencial da base elástica de Pasternak pode ser obtida a partir da Eq. (2.28), Eq. (2.29) e Eq. (2.33)

$$\pi_{pbp} = \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \tag{2.34}$$

2.3.2.3 TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS

O trabalho das cargas externas W é o resultado da soma do trabalho realizado pela carga transversal e pela carga axial:

$$W = W_{ct} + W_{ca} \tag{2.35}$$

Onde:

W representa o trabalho das cargas externas; W_{ct} , o trabalho realizado pela carga transversal; W_{ca} , trabalho realizado pela carga axial.

De acordo com a definição, trabalho é dado pelo produto da força pelo deslocamento. Assim, para o caso da força transversal $p_z(x)$ provocando o deslocamento $w(x)$ na viga, tem-se que o trabalho realizado fica:

$$W_{ct} = \int_0^L p_z(x) w(x) dx \tag{2.36}$$

Por outro lado, para a dedução do trabalho realizado pela carga axial, inicialmente, será deduzida a expressão do deslocamento axial elementar $d\Delta$ (na direção do eixo x) relativo a um comprimento dx da coluna para um deslocamento lateral dw (na direção do eixo z) da extremidade superior do trecho dx como representado na Fig. 2.7. A deformação axial da coluna devida à carga P será desprezada.

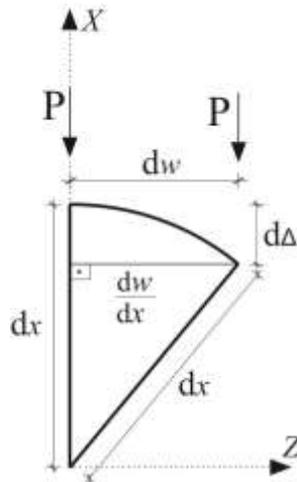


Figura 2.7- Comprimento de barra infinitesimal

Do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Fig. 2.7, tem-se:

$$(dx)^2 = (dx - d\Delta)^2 + (dw)^2 \quad (2.37)$$

Que desenvolvida fica:

$$2dx d\Delta = (d\Delta)^2 + (dw)^2 \quad (2.38)$$

O termo $(d\Delta)^2$ na Eq. (2.38) pode ser desprezado, já que ele tem uma ordem de grandeza muito inferior em relação a $d\Delta$. Desta forma, tem-se:

$$2dx d\Delta = (dw)^2 \quad (2.39)$$

Que reorganizada fica:

$$d\Delta = \frac{(dw)^2}{2(dx)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2.40)$$

O deslocamento vertical Δ na extremidade livre da viga, devido aos deslocamentos verticais incrementais $d\Delta$, pode ser obtido por integração, ou seja:

$$\int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2.41)$$

Donde conclui-se que o deslocamento vertical Δ é:

$$\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2.42)$$

Tendo o deslocamento Δ devido à carga axial de compressão P no elemento infinitesimal de viga, o trabalho realizado fica:

$$W_{ca} = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (2.43)$$

Por fim, a energia potencial do sistema dado pela Eq. (2.20) pode ser escrita em função das contribuições da energia potencial de deformação da viga, da energia potencial da base elástica e do trabalho das forças externas, resultando em:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p_z(x) w(x) dx \quad (2.44)$$

2.3.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Com o intuito de sintetizar as discussões sobre a dedução das equações governantes do problema da estabilidade estática de viga de Euler-Bernoulli sobre base elástica, neste item será efetuado inicialmente o desenvolvimento incorporando apenas o modelo de base elástica de Pasternak no sistema. Em seguida, é mostrado que as equações governantes para os demais casos (vigas sobre base de Winkler ou mesmo vigas isoladas) podem ser obtidas adequando-se convenientemente os valores dos coeficientes das bases.

Uma das maneiras de se obter as equações de equilíbrio desse problema é aplicando os conceitos dos princípios variacionais. Um dos lemas do cálculo variacional diz que a extremização de um funcional é obtida impondo-se a condição que sua primeira variação é nula. Efetuando-se a primeira variação na Eq. (2.44), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx \right] \\ & + \delta \left[-\frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p_z(x) w(x) dx \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Aplicando-se as propriedades do cálculo variacional $\delta(u^n) = nu^{n-1} \delta u$, $\delta \int g(x) dx = \int \delta[g(x)] dx$ e após duas integrações por partes da Eq. (2.45), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} EI \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L - \left[\frac{d^3 w(x)}{dx^3} EI \delta w(x) \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^4 w(x)}{dx^4} EI \delta w(x) dx \\ & + \int_0^L w(x) K_1 \delta(w(x)) dx + \left[K_2 \frac{dw(x)}{dx} \delta w(x) \right]_0^L - \int_0^L K_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \delta w(x) dx \\ & - \left[\frac{dw(x)}{dx} P \delta w(x) \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 w(x)}{dx^2} P \delta w(x) dx - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula, $\left[\delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$, a Eq.

(2.46) fica:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \frac{d^4 w(x)}{dx^4} EI \delta w(x) dx + \int_0^L w(x) K_1 \delta(w(x)) dx - \int_0^L K_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \delta w(x) dx \\ & + \int_0^L \frac{d^2 w(x)}{dx^2} P \delta w(x) dx - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx \end{aligned} \quad (2.47)$$

Simplificando a Eq. (2.47), tem-se:

$$\delta\pi = \int_0^L \left[EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + K_1 w(x) - K_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - p_z(x) \right] \delta w(x) dx \quad (2.48)$$

Levando-se em consideração que a variação de $\delta w(x)$ é arbitrária, a nulidade da Eq. (2.48) será sempre garantida se a seguinte relação for verdadeira:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + K_1 w(x) + (P - K_2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - p_z(x) = 0 \quad (2.49)$$

Ou ainda:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + K_1 w(x) + (P - K_2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p_z(x) \quad (2.50)$$

Fazendo-se $K_2 = 0$ na Eq. (2.50), obtém-se com isso a equação do problema real estático na base elástica de Winkler:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + K_1 w(x) + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p_z(x) \quad (2.51)$$

Por outro lado, zerando simultaneamente os parâmetros K_2 (parâmetro de rigidez cisalhante da camada) e K_1 (parâmetro de rigidez da fundação) na Eq. (2.50), obtém-se, também de forma imediata a equação do problema real estático sem base elástica que fica:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p_z(x) \quad (2.52)$$

Os esforços da viga no modelo de Euler-Bernoulli são dados por:

$$M_y(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2.53)$$

$$V_z(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - (P - K_2) \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.54)$$

Onde:

$M_y(x)$ representa o momento fletor e $V_z(x)$, o esforço cortante.

2.4 PROBLEMA REAL DE TIMOSHENKO

Nesta seção, o foco é o problema real da viga de Timoshenko estático sob carga axial.

2.4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para o desenvolvimento da teoria de vigas de Timoshenko serão assumidas as seguintes hipóteses:

a) O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que a maior dimensão do elemento, o comprimento L , seja suficientemente maior que as outras duas, as dimensões b e h da seção transversal, conforme Fig. 2.8.

b) A barra deve ter seção transversal uniforme, ou seja, deve ser prismática;

c) Quando em regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;

d) O material deve ser homogêneo e isótropo;

e) O material deve ser elasto-linear;

f) A planicidade das seções transversais deve ser mantida durante o processo de deformação;

g) A ortogonalidade entre o eixo longitudinal e a seção plana não necessariamente é conservada durante o processo de deformação, implicando na consideração da distorção transversa;

h) A viga pode ou não estar apoiada em base elástica;

i) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;

j) Os campos de deslocamentos e deformações são assumidos pequenos (suaves) para a viga e base elástica (quando presente).

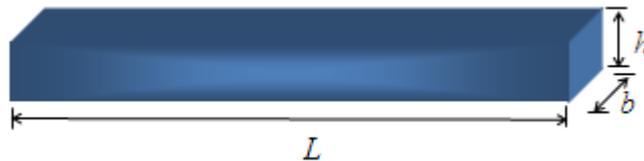


Figura 2.8 – Barra (elemento estrutural unidimensional)

Como na teoria de Timoshenko a distorção devido ao cisalhamento γ_{xz} é levada em conta, a rotação da seção transversal dependerá da inclinação da linha elástica da viga bem como da distorção devido ao cisalhamento. Como é possível perceber na Fig. 2.9, o deslocamento axial pode ser escrito em função da profundidade da fibra z e do ângulo de rotação ϕ resultando em:

$$u(x) = -z(-\phi(x)) \quad (2.55)$$

Além disso, a distorção no plano xz dada na Eq. (2.6) é:

$$\gamma_{xz}(x) = \left(\frac{du(x)}{dz} + \frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (2.56)$$

Assim, após a substituição da Eq. (2.55) na Eq. (2.56), a distorção $\gamma_{xz}(x)$ pode ser reescrita como:

$$\gamma_{xz}(x) = \phi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.57)$$

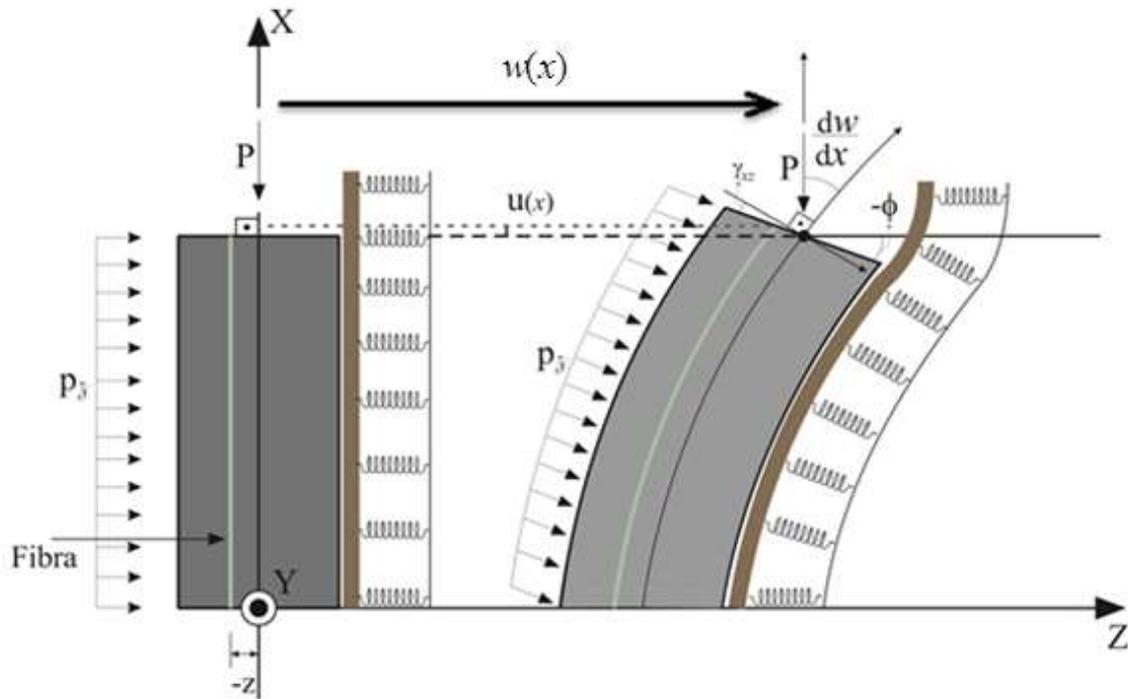


Figura 2.9 – Forças e deslocamentos na viga de Timoshenko

Para a dedução das equações do problema real de Timoshenko, tal qual o caso de Euler-Bernoulli, será efetuado inicialmente para o caso da base de Pasternak. Então, após convenientes manipulações é possível se obter as equações para a viga estática sobre a fundação de Winkler e assim como para o caso da viga livre de base elástica.

2.4.2 FUNCIONAL DE ENERGIA

As equações governantes do problema com flexão em y podem ser obtidas aplicando-se a condição estacionária no funcional de energia:

$$\pi = \pi_p - W \quad (2.58)$$

Ou ainda, tal qual no problema de Euler-Bernoulli, em uma forma particionada dada por:

$$\pi = (\pi_{pv} + \pi_{pb}) - (W_{ct} + W_{ca}) \quad (2.59)$$

Sabendo que no caso de Timoshenko a distorção não é negligenciada, então essa deve ser incorporada na energia potencial da viga :

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (2.60)$$

As tensões cisalhantes transversas τ_{xz} têm uma distribuição parabólica ao longo da altura da viga na seção transversal. Essas podem ser substituídas por uma distribuição constante, desde que sejam majoradas por um coeficiente κ , que depende da forma da seção transversal. Assim, a relação constitutiva na Eq. (2.13) passa a ser escrita como:

$$\tau_{xz} = \kappa G \gamma_{xz} \quad (2.61)$$

Da substituição de Eq. (2.61) e Eq. (2.19) na Eq. (2.60), obtém-se:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V (E(\varepsilon_x)^2 + \kappa G(\gamma_{xz})^2) dV \quad (2.62)$$

Em seguida, partindo da substituição da Eq. (2.1) e da Eq.(2.57) na Eq. (2.62) resulta em:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V \left[E \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 + \kappa G \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)^2 \right] dV \quad (2.63)$$

Finalmente, substituindo a derivada da Eq. (2.55) na Eq. (2.60), obtém-se:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V \left[E \left(z \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 + \kappa G \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)^2 \right] dV \quad (2.64)$$

Onde a Eq. (2.63) ainda pode ser expandida na forma:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E z^2 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dA dx + \int_0^L \int_A \kappa G \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)^2 dA dx \quad (2.65)$$

Após a integração ao longo da área da seção e substituindo-se $I_y = \int_A z^2 dA$ e

$A = \int_A dA$ na Eq. (2.65), tem-se que a energia potencial da viga de Timoshenko fica:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)^2 dx \quad (2.66)$$

Para o caso de Timoshenko, o trabalho das forças externas quando a viga está sujeita a força axial, força transversal e momento é dado por:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L p_z(x) w(x) dx + \int_0^L m_y(x) \phi(x) dx \quad (2.67)$$

A energia de deformação da base elástica ou o trabalho da carga axial externa independem das hipóteses associadas às considerações ou não das deformações por cortantes nos modelos de viga. As expressões para essas contribuições já foram discutidas nas Eqs. (2.34) e (2.35), por este motivo não serão aqui repetidas. Com isso, o funcional de energia do sistema pode ser obtido a partir da substituição das Eqs (2.34), (2.63) e (2.64) na Eq. (2.56), resultando em:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \frac{d^2 w}{dx^2} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p_z(x) w(x) dx - \int_0^L m_y(x) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.4.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Aplicando-se as propriedades do cálculo variacional $\delta(u^n) = nu^{n-1}\delta u$, $\delta \int g(x)dx = \int \delta[g(x)]dx$ na Eq. (2.68), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \frac{1}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right) EI \delta \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA \delta \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) dx \\ & + \int_0^L w(x) K_1 \delta(w(x)) dx + \int_0^L K_2 \frac{dw(x)}{dx} \delta \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^L 2 \frac{dw(x)}{dx} P \delta \frac{dw(x)}{dx} \\ & - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx - \int_0^L m_y(x) \delta \phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.69)$$

Integrando convenientemente por partes a Eq. (2.69), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \left[\frac{d\phi(x)}{dx} EI \delta \phi(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} EI \delta \phi(x) dx + \left[\left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA \delta w(x) \right]_0^L \\ & - \int_0^L \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{d\phi(x)}{dx} \right) \kappa GA \delta w(x) dx + \int_0^L \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA \delta \phi(x) dx + \int_0^L w(x) K_1 \delta(w(x)) dx \\ & + \left[K_2 \frac{dw(x)}{dx} \delta w(x) \right]_0^L - \int_0^L K_2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \delta w(x) dx - \left[P \frac{dw(x)}{dx} \delta w(x) \right]_0^L \\ & + \int_0^L \frac{d^2w(x)}{dx^2} P \delta w(x) dx - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx - \int_0^L m_y(x) \delta \phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.70)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula $[\delta \phi(x)]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$, então a Eq. (2.70) fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & - \int_0^L \left[\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{d\phi(x)}{dx} \right) \kappa GA - w(x) K_1 + K_2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{d^2w(x)}{dx^2} P + p_z(x) \right] \delta w(x) dx \\ & - \int_0^L \left[\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} EI - \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA + m_y(x) \right] \delta \phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.71)$$

Aplicando-se a condição estacionária $\delta\pi = 0$ na Eq. (2.71) e levando em consideração que ambas variações de $\delta w(x)$ e $\delta\phi(x)$ são arbitrárias, a nulidade será sempre garantida se:

$$(\kappa GA - P + K_2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - K_1 w(x) + \frac{d\phi(x)}{dx} \kappa GA = -p_z(x) \quad (2.72)$$

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} EI - \frac{dw(x)}{dx} \kappa GA - \phi(x) \kappa GA = -m_y(x) \quad (2.73)$$

Onde o sistema formado pela Eq. (2.72) e Eq. (2.73) na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Onde:

$$D_1 = \kappa GA \text{ e } D_2 = EI$$

Além disso, o momento fletor e força cortante que atuam na viga são dados por:

$$M_y(x) = EI \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (2.75a)$$

$$\hat{V}_z(x) = \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \quad (2.75b)$$

No problema da estabilidade, a carga axial altera o valor final do esforço cortante, podendo associar uma força cortante equivalente dada por:

$$V_z(x) = \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) - (P - K_2) \frac{dw(x)}{dx} \quad (2.76)$$

Fazendo-se $K_2 = 0$ na Eq. (2.74), obtém-se com isso a equação do problema real de Timoshenko estático na base elástica de Winkler:

$$(\kappa GA - P) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - K_1 w(x) + \frac{d\phi(x)}{dx} \kappa GA = -p_z(x) \quad (2.77)$$

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} EI - \frac{dw(x)}{dx} \kappa GA - \phi(x) \kappa GA = -m_y(x) \quad (2.78)$$

Onde o sistema formado pela Eq. (2.77) e Eq. (2.78) na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} (D_1 - P) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_z(x) \\ -m_y(x) \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

Finalmente, anulando-se simultaneamente os parâmetros K_2 (parâmetro de rigidez cisalhante da camada) e K_1 (parâmetro de rigidez da fundação), obtém-se mais uma vez de forma imediata a equação do problema real estático sem base elástica:

$$(\kappa GA - P) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{d\phi(x)}{dx} \kappa GA = -p_z(x) \quad (2.80)$$

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} EI - \frac{dw(x)}{dx} \kappa GA - \phi(x) \kappa GA = -m_y(x) \quad (2.81)$$

Ou na forma matricial dada por:

$$\begin{bmatrix} (D_1 - P) \frac{d^2}{dx^2} & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_z(x) \\ -m_y(x) \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

CAPÍTULO 3

O MEC EM ESTABILIDADE ESTÁTICA DE VIGAS

3.1 INTRODUÇÃO

A partir da fundamentação sobre o problema da estabilidade estática para os modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko discutida no Captítulo 2, agora parte-se para a discussão e para o estabelecimento do método dos elementos de contorno para o problema.

3.2 VIGA DE EULER-BERNOULLI

Nesta seção serão discutidas as etapas requeridas pelo MEC para estabilidade estática de vigas de Euler-Bernoulli com ou sem base elástica.

3.2.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL

O problema fundamental está associado a uma viga de domínio infinito submetida a carga pontual transversal $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ atuando no ponto fonte \hat{x} . Por analogia ao problema real (vide capítulo 2), a equação governante do problema fundamental da estabilidade estática pode ser escrita de forma similar a Eq. (2.50):

$$\frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} + \left(\frac{P - K_2}{EI} \right) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \left(\frac{K_1}{EI} \right) w^*(x, \hat{x}) = \frac{p_z^*(x, \hat{x})}{EI} \quad (3.0)$$

Os esforços fundamentais são escritos de uma forma análoga aos reais dados na Eq. (2.53) e Eq. (2.54) resultando em:

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.1)$$

$$V_z^*(x) = -EI \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} - (P - K_2) \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.2)$$

A solução para a E.D.O dada na Eq. (3.0) é denominada de solução fundamental. Em MANOLIS et al.(1986) é apresentada uma solução fundamental restrita ao caso de flambagem de vigas de Euler-Bernoulli sem consideração de base elástica, isto é, ($K_1 = K_2 = 0$) na Eq. (3.0). Assim, alguns procedimentos são adotados neste trabalho para efetuar a dedução da solução do problema incluindo os efeitos da base elástica, sendo discutidos os detalhes a seguir.

Uma das primeiras etapas é determinar a equação característica homogênea associada à equação governante do problema fundamental. Então, fazendo-se $y = \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2}$ na Eq. (3.0), a equação característica pode ser escrita como:

$$y^2 + \left(\frac{P - K_2}{EI}\right)y + \left(\frac{K_1}{EI}\right) = 0 \quad (3.3)$$

As raízes da equação quadrática dada em Eq. (3.3) são:

$$y_1 = \frac{-\left(\frac{P - K_2}{EI}\right) + \sqrt{\left(\frac{P - K_2}{EI}\right)^2 - 4\left(\frac{K_1}{EI}\right)}}{2} \quad (3.4)$$

$$y_2 = \frac{-\left(\frac{P - K_2}{EI}\right) - \sqrt{\left(\frac{P - K_2}{EI}\right)^2 - 4\left(\frac{K_1}{EI}\right)}}{2} \quad (3.5)$$

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$.

Neste trabalho é proposta a seguinte solução fundamental para Eq. (3.0):

$$w^*(x, \hat{x}) = A_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.6)$$

De modo a determinar a solução fundamental da Eq. (3.0), faz-se necessário a obtenção da segunda e quarta derivada da Eq. (3.6) e posteriormente a substituição desses valores na equação do problema fundamental. Derivando-se duas vezes a Eq. (3.6), tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} &= A_1 y_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 y_2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \\ &+ \left[2A_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Com o intuito de se evitar derivadas de ordem superior do delta de Dirac, impõe-se:

$$2A_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) = 0 \quad (3.8)$$

A partir da Eq. (3.8), impondo-se $x = \hat{x} = r = 0$, a relação entre as constantes é:

$$A_2 = -A_1 \frac{\sqrt{-y_1}}{\sqrt{-y_2}} \quad (3.9)$$

Derivando-se a Eq. (3.6) quatro vezes consecutivas, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} &= A_1 y_1^2 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 y_2^2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \\ &+ \left[2A_1 y_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da substituição das Eqs. (3.6), (3.7), (3.9) e (3.10) na Eq. (3.0) e convenientes manipulações, resulta em:

$$2A_1 y_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) = \frac{1}{EI} \quad (3.11)$$

Substituindo-se Eq. (3.9) na Eq. (3.11) e ainda impondo-se $x = \hat{x} = r = 0$ em Eq. (3.11), obtém-se:

$$A_1 = \frac{1}{2EI \sqrt{-y_1} (y_1 - y_2)}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2EI \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)}$$

Finalmente para obtenção da solução fundamental, substitui-se as constantes A_1 e A_2 na Eq. (3.6), de forma que tem-se:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EI\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \quad (3.12)$$

As grandezas fundamentais associadas à inclinação da elástica são obtidas a partir da derivação da solução fundamental dada pela Eq. (3.6) no ponto campo, resultando em:

$$\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} [\cos(\sqrt{-y_1}r) - \cos(\sqrt{-y_2}r)] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.13)$$

Já a força cortante e o momento fletor fundamentais podem ser obtidos substituindo-se respectivamente a Eq. (3.12) na Eq. (3.2) e a Eq. (3.12) na Eq. (3.1):

$$V_z^*(x, \hat{x}) = -\left[\frac{EIy_1 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_1}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) + \left[\frac{EIy_2 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.14)$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} [\sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r)] \quad (3.15)$$

Outras soluções fundamentais de interesse estão associadas à derivação das Eq. (3.12) e Eq. (3.13) no ponto-fonte, resultando em:

$$w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} [\cos(\sqrt{-y_1}r) - \cos(\sqrt{-y_2}r)] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.16)$$

$$\frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} [\sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r)] \quad (3.17)$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{-EIy_1\sqrt{-y_1} - (P - K_2)\sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) \right] + \left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + (P - K_2)\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (3.18)$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(\sqrt{-y_1}r) - y_2 \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.19)$$

Caso 2- Raízes complexas e conjugadas.

Procedendo de forma semelhante ao Caso 1, a solução proposta para Eq. (3.0) neste trabalho fica:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EI\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)i} \text{sen}(i\sqrt{y_1}r) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)i} \text{senh}(i\sqrt{-y_2}r) \quad (3.20)$$

E as demais de interesse são:

$$\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(i\sqrt{y_1}r) - \cosh(i\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.21)$$

$$V_z^*(x, \hat{x}) = - \left[\frac{EIy_1 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(i\sqrt{y_1}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) + \left[\frac{EIy_2 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cosh(i\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.22)$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \text{sen}(i\sqrt{y_1}r) + i\sqrt{-y_2} \text{senh}(i\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (3.23)$$

$$w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(i\sqrt{y_1}r) - \cosh(i\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.24)$$

$$\frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \text{sen}(i\sqrt{y_1}r) + i\sqrt{-y_2} \text{senh}(i\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (3.25)$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{-EIy_1 i \sqrt{y_1} - (P - K_2) i \sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(i \sqrt{y_1} r) \right] + \left[\frac{-EIy_2 i \sqrt{-y_2} - (P - K_2) i \sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{senh}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.26)$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} [y_1 \cos(i \sqrt{y_1} r) - y_2 \cosh(\sqrt{-y_2} r)] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.27)$$

Caso 3- $K = 0$ e $K_2 = 0$

Aqui a viga está livre de fundação elástica, implicando em $y_1 = 0$ e $y_2 = -\frac{P}{EI}$.

Essas raízes não podem ser diretamente aplicadas em todas suas soluções fundamentais do Caso 1, já aquelas que possuem o termo $\frac{\operatorname{Sen}(\sqrt{-y_1} r)}{\sqrt{-y_1}}$ vão produzir uma indeterminação para

$y_1 = 0$. Daí, a necessidade de se criar uma condição de análise adicional, aqui denominado de Caso 3, cuja solução pode ser obtida conforme discutido a seguir.

O problema da indeterminação pode ser solucionado, se os valores das soluções fundamentais forem tomados no limite com $y_1 \rightarrow 0$, resultando em:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{Sen}(\sqrt{-y_1} r)}{\sqrt{-y_1}} \right] = r$$

Desta forma, efetuando-se os limites com $y_1 \rightarrow 0$ para as Eqs. (3.12) e (3.13) e procedendo-se com os cálculos de forma semelhante ao primeiro caso, as soluções do Caso 1 podem ser reduzidas a:

$$w^*(x, \hat{x}) = -\frac{r}{2EIy_2} + \frac{1}{2EIy_2 \sqrt{-y_2}} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.28)$$

$$\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2EIy_2} [1 - \cos(\sqrt{-y_2} r)] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.29)$$

$$V_z^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{P}{2EIy_2} \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) - \left[\frac{EIy_2 + P}{2EIy_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.30)$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2y_2} \left[\sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.31)$$

$$w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EIy_2} \left[1 - \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.32)$$

$$\frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EIy_2} \left[\sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.33)$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \left[\frac{EIy_2 \sqrt{-y_2} + P \sqrt{-y_2}}{2EIy_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.34)$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \frac{1}{2} \left[\cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.35)$$

3.2.2 EQUAÇÃO INTEGRAL

A equação integral do problema pode ser encontrada utilizando-se a técnica dos resíduos ponderados TRP, que estabelece que se a equação governante do problema real, Eq. (2.50), for ponderada pelo deslocamento fundamental $w^*(x, \hat{x})$, resulta em:

$$\int_0^L \left[EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + K_1 w(x) - p_z(x) \right] w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.36)$$

Realizando sucessivas integrações por partes na Eq. (3.36) e substituindo-se as relações dos esforços dados na Eq. (3.1) e Eq. (3.2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[EI \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} + K_1 w^*(x, \hat{x}) \right] w(x) dx \\
& + \left[\left(EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + (P - K_2) \frac{dw(x)}{dx} \right) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[M_y(x) \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
& - \left[\frac{dw(x)}{dx} M_y^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\left(EI \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} + (P - K_2) \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} \right) w(x) \right] = \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Como o problema fundamental é governado por Eq. (3.0) e os esforços são dados pela Eq. (3.1) e Eq. (3.2), e ainda aplicando-se a propriedade do delta de Dirac

$\int_0^L w(x) \delta(x, \hat{x}) dx = w(\hat{x})$ na Eq. (3.37), a equação integral para o deslocamento transversal pode

ser escrita como:

$$\begin{aligned}
w(\hat{x}) + \left[V_z^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[M_y^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
\left[V_z(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Como o problema de vigas de Euler-Bernoulli requer duas incógnitas em cada extremidade, então uma equação adicional é necessária a fim de obter um problema solucionável. Portanto, esta equação adicional é desenvolvida derivando-se a Eq. (3.38) no ponto fonte, resultando na equação integral da inclinação da elástica transversal $\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
\left[V_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Convém notar que as equações integrais dadas pela Eq. (3.38) e Eq. (3.39) valem tanto para os casos de viga com ou sem base elástica. A presença ou não dessa é incorporada nas expressões das soluções fundamentais descritas no item (3.3.1) e cujas expressões dependem dos sinais das raízes da equação característica.

3.2.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA

O sistema algébrico do MEC possui apenas variáveis a serem determinadas no contorno. Assim, é necessário que as equações integrais da Eq. (3.38) e Eq. (3.39) tenham pontos de colocação no contorno da viga. Já que parte das soluções fundamentais é singular, então as colocações do ponto-fonte tendendo às extremidades da barra, isto é, fazendo $\hat{x} = \varepsilon$ e $\hat{x} = L - \varepsilon$ implicando em $\varepsilon \rightarrow 0$ na Eq. (3.38) e na Eq. (3.39), obtém-se:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} w(0) + [V_z^*(x,0)w(x)]_0^L - \left[M_y^*(x,0) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\ [V_z(x)w^*(x,0)]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw^*(x,0)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x)w^*(x,0)dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw(0)}{d\hat{x}} + [V_{z,\hat{x}}^*(x,0)w(x)]_0^L - \left[M_{y,\hat{x}}^*(x,0) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\ [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,0)]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x,0)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,0)dx \end{aligned} \quad (3.41)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$

$$\begin{aligned} w(L) + [V_z^*(x,L)w(x)]_0^L - \left[M_y^*(x,L) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\ [V_z(x)w^*(x,L)]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw^*(x,L)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x)w^*(x,L)dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw(L)}{d\hat{x}} + [V_{z,\hat{x}}^*(x,L)w(x)]_0^L - \left[M_{y,\hat{x}}^*(x,L) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\ [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,L)]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x,L)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,L)dx \end{aligned} \quad (3.43)$$

Expandido as Eqs (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43), respectivamente, resulta em:

$$\begin{aligned}
& w(0) - V_z^*(0,0)w(0) + M_y^*(0,0)\frac{dw(0)}{dx} + V_z^*(L,0)w(L) - M_y^*(L,0)\frac{dw(L)}{dx} = \\
& -V_z(0)w^*(0,0) + M_y(0)\frac{dw^*(0,0)}{dx} + V_z(0)w^*(L,0) - M_y(L)\frac{dw^*(L,0)}{dx} + \int_0^L p_z(x)w^*(x,0)dx
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(0)}{dx} - V_{z,\hat{x}}^*(0,0)w(0) + M_{y,\hat{x}}^*(0,0)\frac{dw(0)}{dx} + V_{z,\hat{x}}^*(L,0)w(L) - M_{y,\hat{x}}^*(L,0)\frac{dw(L)}{dx} = \\
& -V_z(0)w_{,\hat{x}}^*(0,0) + M_y(0)\frac{dw_{,\hat{x}}^*(0,0)}{dx} + V_z(L)w_{,\hat{x}}^*(L,0) - M_y(L)\frac{dw_{,\hat{x}}^*(L,0)}{dx} + \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,0)dx
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
& w(L) - V_z^*(0,L)w(0) + M_y^*(0,L)\frac{dw(0)}{dx} + V_z^*(L,L)w(L) - M_y^*(L,L)\frac{dw(L)}{dx} = \\
& -V_z(0)w^*(0,L) + M_y(0)\frac{dw^*(0,L)}{dx} + V_z(L)w^*(L,L) - M_y(L)\frac{dw^*(L,L)}{dx} + \int_0^L p_z(x)w^*(x,L)dx
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(L)}{dx} - V_{z,\hat{x}}^*(0,L)w(0) + M_{y,\hat{x}}^*(0,L)\frac{dw(0)}{dx} + V_{z,\hat{x}}^*(L,L)w(L) - M_{y,\hat{x}}^*(L,L)\frac{dw(L)}{dx} = \\
& -V_z(0)w_{,\hat{x}}^*(0,L) + M_y(0)\frac{dw_{,\hat{x}}^*(0,L)}{dx} + V_z(L)w_{,\hat{x}}^*(L,L) - M_y(L)\frac{dw_{,\hat{x}}^*(L,L)}{dx} + \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x,L)dx
\end{aligned} \tag{3.47}$$

As Eqs (3.44-3.47) podem ser escritas em uma forma matricial dada por:

$$\{\mathbf{u}\} + [\bar{H}] \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}] \{\mathbf{p}\} + \{\mathbf{f}\} \tag{3.48}$$

Na Fig. 3.1 estão mostrados os graus de liberdade em forças e deslocamentos associados aos vetores $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{p}\}$ da Eq. (3.48), cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{\mathbf{u}\} = \left[w_i \quad \frac{dw_i}{dx} \quad w_j \quad \frac{dw_j}{dx} \right]^T = \left[w(0) \quad \frac{dw(0)}{dx} \quad w(L) \quad \frac{dw(L)}{dx} \right]^T$$

$$\{\mathbf{p}\} = \left[V_{zi} \quad M_{yi} \quad V_{zj} \quad M_{yj} \right]^T = \left[V_z(0) \quad M_y(0) \quad V_z(L) \quad M_y(L) \right]^T$$

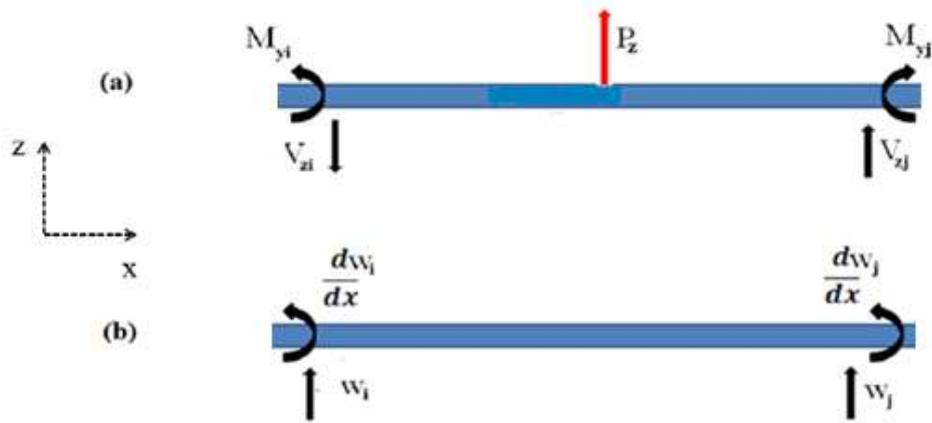


Figura 3.1 Viga de Euler:(a) Esforços ; (b) Deslocamentos

Na Eq. (3.48) as matrizes $[\bar{H}]$, $[G]$ e $\{f\}$ o vetor de carga, dados por:

$$[\bar{H}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -V_z^*(0,0+\varepsilon) & M_y^*(0,0+\varepsilon) & V_z^*(L,0+\varepsilon) & -M_y^*(L,0+\varepsilon) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon) & M_{y,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon) & V_{z,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon) & -M_{y,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon) \\ -V_z^*(0,L-\varepsilon) & M_y^*(0,L-\varepsilon) & V_z^*(L,L-\varepsilon) & -M_y^*(L,L-\varepsilon) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon) & M_{y,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon) & V_{z,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon) & -M_{y,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -w^*(0,0+\varepsilon) & \frac{dw^*(0,0+\varepsilon)}{dx} & w^*(L,0+\varepsilon) & -\frac{dw^*(L,0+\varepsilon)}{dx} \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon) & \frac{dw_{,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon)}{dx} & w_{,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon) & -\frac{dw_{,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon)}{dx} \\ -w^*(0,L-\varepsilon) & \frac{dw^*(0,L-\varepsilon)}{dx} & w^*(L,L-\varepsilon) & -\frac{dw^*(L,L-\varepsilon)}{dx} \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon) & \frac{dw_{,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon)}{dx} & w_{,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon) & -\frac{dw_{,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon)}{dx} \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L \begin{bmatrix} w^*(x,0+\varepsilon) \\ w_{,\hat{x}}^*(x,0+\varepsilon) \\ w^*(x,L-\varepsilon) \\ w_{,\hat{x}}^*(x,L-\varepsilon) \end{bmatrix} \{p_z(x)\} dx$$

Após o cálculo dos elementos das matrizes da Eq. (3.48), tem-se:

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Sempre que a análise de interesse não for a determinação das cargas de flambagem, o vetor de cargas {f} deverá ser calculado. Além disso, os valores finais de {f} dependem da função que interpola $p_z(x)$.

Os valores das matrizes na Eq. (3.49) dependem dos sinais das raízes da equação característica y_1 e y_2 da Eq. (3.3), recaindo-se em três casos:

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = -\left[\frac{EIy_1 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{-EIy_1 \sqrt{-y_1} - (P - K_2) \sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2 \sqrt{-y_2} + (P - K_2) \sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(\sqrt{-y_1}L) - y_2 \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2EI \sqrt{-y_1} (y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \frac{1}{2EI \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(\sqrt{-y_1}L) - \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 2- Raízes são complexas e conjugadas

$$\alpha_1 = - \left[\frac{EIy_1 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(i\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cosh(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) + i\sqrt{-y_2} \operatorname{senh}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{-EIy_1 i\sqrt{y_1} - (P - K_2)i\sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\frac{-EIy_2 i\sqrt{-y_2} - (P - K_2)i\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{senh}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(i\sqrt{y_1}L) - y_2 \cosh(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2EI\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)i} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)i} \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(i\sqrt{y_1}L) - \cosh(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) + i\sqrt{-y_2} \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 3- $y_1 = 0$ e $y_2 < 0$ (viga livre de fundação elástica)

$$\alpha_1 = \left[\frac{P}{2EIy_2} \right] - \left[\frac{EIy_2 + P}{2EIy_2} \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2y_2} \left[\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_3 = - \left[\frac{Ely_2 \sqrt{-y_2} + P \sqrt{-y_2}}{2Ely_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{2} \left[\cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_1 = -\frac{L}{2Ely_2} + \frac{1}{2Ely_2 \sqrt{-y_2}} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2Ely_2} \left[1 - \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2Ely_2} \left[\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

3.3 VIGA DE TIMOSHENKO

Nesta seção são discutidas as etapas do MEC para o problema da estabilidade estática de vigas de Timoshenko apoiadas ou não em base elástica.

3.3.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL

Por analogia ao problema real na Eq. (2.74), escreve-se o sistema de equações governantes do problema fundamental devido à aplicação independente das cargas(fontes)

$$p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) \text{ e } m_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) :$$

$$\begin{bmatrix} (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Já os esforços fundamentais, por analogia aos esforços reais na Eq. (2.75a) e Eq. (2.76), são:

$$V_{zp}^*(x, \hat{x}) = D_1 \left(\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_p^*(x, \hat{x}) \right) - (P - K_2) \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.51)$$

$$M_{yp}^*(x, \hat{x}) = D_2 \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.52)$$

$$V_{zm}^*(x, \hat{x}) = D_1 \left(\frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_m^*(x, \hat{x}) \right) - (P - K_2) \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.53)$$

$$M_{ym}^*(x, \hat{x}) = D_2 \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (3.54)$$

Diferentemente da equação governante do problema fundamental de Euler-Bernoulli Eq. (3.0), a equação do problema fundamental de Timoshenko, Eq. (3.50), constitui-se em um sistema acoplado, o que exigiria manipulações matemáticas mais árduas para sua solução. Alternativamente, neste trabalho, utiliza-se o método de HÖRMANDER(1963) para fazer seu desacoplamento, viabilizando o uso de recursos mais simplificados para solução das equações diferenciais agora desacopladas. O método de Hörmander constitui-se nas etapas a seguir:

Inicialmente escreve-se a equação Eq. (3.50) na forma:

$$[B][G] = -[I]\delta(x, \hat{x}) \quad (3.55)$$

Onde: [I] é a matriz identidade,

$$[B] = \begin{bmatrix} (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{Bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix}$$

A solução da Eq. (3.55) é dada por:

$$[G] = [B^{cof}]^T \zeta \quad (3.56)$$

Substituindo a Eq. (3.56) na Eq. (3.55), tem-se: $[B][B^{cof}]^T \zeta = -[I]\delta(x, \hat{x})$, que após a utilização das propriedades $[B][B]^{-1} = [I]$ e $[B^{cof}]^T / \det[B] = [B]^{-1}$, resulta em:

$$\det[B]\zeta(x, \hat{x}) = -\delta(x, \hat{x}) \quad (3.57)$$

Assim, calculando-se o determinante de $[B]$ e substituindo-se a Eq. (3.57) fica:

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \left[\frac{D_1(P - K_2) - K_1 D_2}{D_2(D_1 - P + K_2)} \right] \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \left[\frac{K_1 D_1}{D_2(D_1 - P + K_2)} \right] \zeta = -\frac{\delta(x, \hat{x})}{D_2(D_1 - P + K_2)} \quad (3.58)$$

Assim, tem-se a forma desacoplada equivalente à Eq. (3.50) escrita em função de ζ , conforme mostrado na Eq. (3.58). Além disso, fazendo $y = \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$, uma equação característica associada a forma homogênea da Eq. (3.58) é dada por:

$$y^2 + \left[\frac{D_1(P - K_2) - K_1 D_2}{D_2(D_1 - P + K_2)} \right] y + \left[\frac{K_1 D_1}{D_2(D_1 - P + K_2)} \right] = 0 \quad (3.59)$$

cujas raízes são:

$$y_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda}}{2} \quad (3.60)$$

$$y_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda}}{2} \quad (3.61)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{D_1(P - K_2) - K_1 D_2}{D_2(D_1 - P + K_2)}$$

$$\lambda = \frac{K_1 D_1}{D_2(D_1 - P + K_2)}$$

As soluções da Eq. (3.58) aqui propostas, dependem dos sinais das raízes da equação característica Eq. (3.59), recaindo-se em quatro casos:

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

Para este caso, neste trabalho é proposta a seguinte solução fundamental para Eq. (3.58):

$$\xi = A_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.62)$$

Para completa determinação da solução da Eq. (3.58), faz-se necessário a obtenção da segunda e quarta derivada da Eq. (3.62). Após duas derivações da Eq. (3.62) tem-se que:

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = A_1 y_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 y_2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) + [2A_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r)] \delta(x, \hat{x}) \quad (3.63)$$

Para se evitar derivadas de ordem superior do delta de Dirac, impõe-se na Eq. (3.63) a condição:

$$2A_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) = 0 \quad (3.64)$$

A relação entre as constantes é obtida a partir da Eq. (3.64) quando $x = \hat{x} = r = 0$, resultando em:

$$A_2 = -A_1 \frac{\sqrt{-y_1}}{\sqrt{-y_2}} \quad (3.65)$$

A quarta derivada da Eq. (3.62), fica:

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} = A_1 y_1^2 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 y_2^2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) + [2A_1 y_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r)] \delta(x, \hat{x}) \quad (3.66)$$

Após a substituição das Eqs. (3.62), (3.63), (3.65) e (3.66) na Eq. (3.58) e convenientes manipulações, tem-se:

$$2A_1 y_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) = -\frac{1}{D_2(D_1 - P + K_2)} \quad (3.67)$$

Após a substituição da Eq. (3.65) em Eq. (3.67) e impondo-se $x = \hat{x} = 0$ ainda em Eq. (3.67), obtém-se:

$$A_1 = -\frac{1}{2D_2 \sqrt{-y_1} (y_1 - y_2) (D_1 - P + K_2)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2D_2 \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2) (D_1 - P + K_2)}$$

Para obtenção da solução fundamental da Eq. (3.58), substitui-se as constantes A_1 e A_2 na Eq. (3.62), de forma que a solução proposta fica:

$$\zeta = -\frac{\text{sen}(\sqrt{-y_1}r)}{2D_2\sqrt{-y_1}(y_1-y_2)(D_1-P+K_2)} + \frac{\text{sen}(\sqrt{-y_2}r)}{2D_2\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)(D_1-P+K_2)} \quad (3.68)$$

As soluções fundamentais em deslocamento podem ser obtidas em função do parâmetro ζ utilizando Eq. (3.50), que na forma explícita fica:

$$\begin{Bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 & -D_1 \frac{d}{dx} \\ D_1 \frac{d}{dx} & (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 \end{bmatrix} \zeta \quad (3.69)$$

Substituindo-se a Eq. (3.68) em Eq. (3.69), as soluções fundamentais em deslocamento ficam:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-y_1 D_2 + D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(r\sqrt{-y_1}) + \left(\frac{y_2 D_2 - D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \quad (3.70)$$

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cos(r\sqrt{-y_1}) + \cos(r\sqrt{-y_2}) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.71)$$

$$w_m^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[\cos(r\sqrt{-y_1}) - \cos(r\sqrt{-y_2}) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.72)$$

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-(D_1 - P + K_2)y_1 + K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(r\sqrt{-y_1}) + \left(\frac{(D_1 - P + K_2)y_2 - K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(r\sqrt{-y_2}) \quad (3.73)$$

Os esforços fundamentais podem ser escritos em função dos deslocamentos a partir das Eqs. (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54), resultando em:

$$V_{zp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(-D_2 y_1 + D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\ + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.74)$$

$$M_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{D_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1} r) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.75)$$

$$V_{zm}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1} r) \\ + \left(\frac{-K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.76)$$

$$M_{ym}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-y_1(D_1 - P + K_2) + K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\ + \left(\frac{y_2(D_1 - P + K_2) - K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.77)$$

Caso 2- $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$,

Procedendo de forma semelhante ao Caso 1, a solução da Eq. (3.58) proposta aqui é:

$$\zeta = -\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{y_1} r)}{2D_2\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)(D_1 - P + K_2)} + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r)}{2D_2\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)(D_1 - P + K_2)} \quad (3.78)$$

Já os deslocamentos fundamentais, escritos em função da substituição da Eq. (3.78) na Eq. (3.69), ficam:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-y_1 D_2 + D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1} r) + \left(\frac{y_2 D_2 - D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.78)$$

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cosh(\sqrt{y_1} r) + \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.79)$$

$$w_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cosh(\sqrt{y_1} r) + \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.80)$$

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-(D_1 - P + K_2)y_1 + K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1} r) + \left(\frac{(D_1 - P + K_2)y_2 - K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.81)$$

E os esforços fundamentais escritos em função dos deslocamentos a partir das Eqs. (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54), ficam:

$$V_{zp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(-D_2 y_1 + D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1} r) \text{sgn}(x - \hat{x}) + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} r) \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.82)$$

$$M_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(-\frac{D_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{y_1} \text{senh}(\sqrt{y_1} r) + \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.83)$$

$$V_{zm}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1} r) + \left(\frac{-K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned}
M_{ym}^*(x, \hat{x}) &= \left(\frac{-y_1(D_1 - P + K_2) + K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\
&+ \left(\frac{y_2(D_1 - P + K_2) - K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x})
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Caso 3- Raízes complexas e conjugadas.

Procedendo com os cálculos de forma semelhante ao Caso 1, a solução da Eq. (3.58) proposta neste trabalho é:

$$\zeta = -\frac{\operatorname{sen}(i\sqrt{y_1} r)}{2D_2\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)(D_1 - P + K_2)i} + \frac{\operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2} r)}{2D_2\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)(D_1 - P + K_2)i} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
w_p^*(x, \hat{x}) &= \left(\frac{y_1 D_2 i - D_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1} r) \\
&+ \left(\frac{-y_2 D_2 i + D_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2} r)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cos(i\sqrt{y_1} r) + \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \right] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \tag{3.88}$$

$$w_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cos(i\sqrt{y_1} r) + \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \right] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m^*(x, \hat{x}) &= \left(\frac{(D_1 - P + K_2)y_1 i - K_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1} r) \\
&+ \left(\frac{-(D_1 - P + K_2)y_2 i - K_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2} r)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
V_{zp}^*(x, \hat{x}) = & \left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(-D_2 y_1 + D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\
& + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x})
\end{aligned} \quad (3.91)$$

$$M_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{D_1 i}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1} r) + \sqrt{-y_2} \operatorname{senh}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
V_{zm}^*(x, \hat{x}) = & \left(\frac{-K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1} r) \\
& + \left(\frac{-K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2} r)
\end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned}
M_{ym}^*(x, \hat{x}) = & \left(\frac{-y_1(D_1 - P + K_2) - K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\
& + \left(\frac{y_2(D_1 - P + K_2) + K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x})
\end{aligned} \quad (3.94)$$

Caso 4- $y_1 = 0$ e $y_2 < 0$

Aqui a viga está livre de fundações elásticas, implicando em $y_1 = 0$. Tal qual o caso da viga de Euler-Bernoulli, as soluções do Caso 1 não podem ser diretamente aplicadas em todas suas soluções fundamentais devido à indeterminação do termo

$\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-y_1} r)}{\sqrt{-y_1}}$ para $y_1 = 0$. Com isso, toma-se o limite desse termo $y_1 \rightarrow 0$, resultando em:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-y_1} r)}{\sqrt{-y_1}} \right] = r$$

Procedendo de forma semelhante ao Caso 1, a solução de Eq. (3.58) fica:

$$\zeta = \frac{r}{2D_2y_2(D_1-P)} - \frac{\text{sen}(\sqrt{-y_2}r)}{2D_2y_2\sqrt{-y_2}(D_1-P)} \quad (3.95)$$

Com isso, os deslocamentos fundamentais, escritos em função da substituição da escritos em função da substituição da Eq. (3.95) na Eq. (3.69), ficam:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = -\left(\frac{D_1r}{2D_2y_2(D_1-P)}\right) - \left(\frac{y_2D_2 - D_1}{2D_2y_2(D_1-P)\sqrt{-y_2}}\right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \quad (3.96)$$

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2y_2(D_1-P+K_2)} \left[-1 + \cos(r\sqrt{-y_2})\right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.97)$$

$$w_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2y_2(D_1-P)} \left[1 - \cos(r\sqrt{-y_2})\right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.98)$$

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = -\left(\frac{(D_1-P)y_2}{2D_2y_2(D_1-P)\sqrt{-y_2}}\right) \text{sen}(r\sqrt{-y_2}) \quad (3.99)$$

Já os esforços podem ser calculados em funções dos deslocamentos a partir das Eqs. (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54), resultando em:

$$V_{zp}^*(x, \hat{x}) = -\left[\left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1-P)(D_1)}{2D_2y_2(D_1-P)}\right) + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1-P)(D_2y_2 - D_1)}{2D_2y_2(D_1-P)}\right) \cos(\sqrt{-y_2}r)\right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.100)$$

$$M_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{D_1}{2y_2(D_1-P)}\right) \left[\sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r)\right] \quad (3.101)$$

$$V_{zm}^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.102)$$

$$M_{ym}^*(x, \hat{x}) = -\left(\frac{y_2(D_1-P)}{2y_2(D_1-P)}\right) \cos(\sqrt{-y_2}r) \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (3.103)$$

3.3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL

Tendo em vista a obtenção das equações integrais do problema, aplica-se o TRP ao sistema de equações governantes do problema real ponderado pelas soluções fundamentais correspondentes, resultando em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ \phi(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ m_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} w_p^*(x, \hat{x}) & w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}^T \quad (3.104)$$

Ativando-se apenas a fonte em carga, $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m_y^*(x, \hat{x}) = 0$, então a Eq.(3.104) fica:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ \phi(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ m_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_p^*(x, \hat{x}) \\ \phi_p^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (3.105)$$

Por outro lado, se apenas a fonte em momento for ativada, $p_z^*(x, \hat{x}) = 0$ e $m_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, a Eq.(3.104) resulta em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} (D_1 - P + K_2) \frac{d^2}{dx^2} - K_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w(x) \\ \phi(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} p_z(x) \\ m_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_m^*(x, \hat{x}) \\ \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (3.106)$$

Após sucessivas integrações por partes em x da Eq. (3.105) e a convenientes substituições, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \left[V_z(x)w_p^*(x, \hat{x}) - V_{zp}^*(x, \hat{x})w(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[M_y(x)\phi_p^*(x, \hat{x}) - M_{yp}^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \\
& \int_0^L \left((D_1 - P + K_2)w_p^{*''}(x, \hat{x}) - K_1w_p^*(x, \hat{x}) + D_1\phi_p^{*'}(x, \hat{x}) \right) w(x) dx + \\
& \int_0^L \left[-D_1w_p^{*'}(x, \hat{x}) + D_2\phi_p^{*''}(x, \hat{x}) - D_1\phi_p^*(x, \hat{x}) \right] \phi(x) dx = \\
& - \int_0^L \left[p_z(x)w_p^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_p^*(x, \hat{x}) \right] dx \tag{3.107}
\end{aligned}$$

De acordo com a Eq. (3.50), a segunda parcela do integrando do primeiro membro da Eq. (3.107) é nula, enquanto da primeira parcela resulta:

$$\int_0^L \left((D_1 - P + K_2)w_p^{*''}(x, \hat{x}) - K_1w_p^*(x, \hat{x}) + D_1\phi_p^{*'}(x, \hat{x}) \right) w(x) dx = - \int_0^L w(x)\delta(x, \hat{x})dx = -w(x) \tag{3.107a}$$

Convém notar que a última igualdade na Eq(3.107a) decorre do fato do efeito do

filtro do delta de Dirac $-\int_0^L w(x)\delta(x, \hat{x})dx = -w(x)$.

Assim, das Eqs. (3.107) e (3.107a), obtém-se a equação integral dos deslocamentos:

$$\begin{aligned}
w(\hat{x}) + \left[V_{zp}^*(x, \hat{x})w(x) + M_{yp}^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} &= \left[V_z(x)w_p^*(x, \hat{x}) + M_y(x)\phi_p^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} \\
+ \int_0^L \left[p_z(x)w_p^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_p^*(x, \hat{x}) \right] dx & \tag{3.108}
\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga com a Eq. (3.106), obtém-se a equação integral das rotações das seções:

$$\begin{aligned}
\phi(\hat{x}) + \left[V_{zm}^*(x, \hat{x})w(x) + M_{ym}^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_{x=0}^{x=L} &= \left[V_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + M_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} \\
+ \int_0^L \left[p_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}) \right] dx & \tag{3.109}
\end{aligned}$$

Escrevendo com notação matricial a Eq. (3.107) e Eq. (3.108), tem-se:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} w(\hat{x}) \\ \phi(\hat{x}) \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \left[\begin{matrix} V_{zp}^*(x, \hat{x}) & M_{yp}^* \\ V_{zm}^*(x, \hat{x}) & M_{ym}^* \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{matrix} \right\} \Big|_0^L \\ \left[\begin{matrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} V_z(x) \\ M_y(x) \end{matrix} \right\} \Big|_0^L \\ + \int_0^L \left[\begin{matrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} P_z(x) \\ m_y(x) \end{matrix} \right\} dx \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left[\begin{matrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} V_z(x) \\ M_y(x) \end{matrix} \right\} \Big|_0^L \\ + \int_0^L \left[\begin{matrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} P_z(x) \\ m_y(x) \end{matrix} \right\} dx \end{matrix} \right\} \quad (3.110)
\end{aligned}$$

3.3.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA

A transição das equações integrais para as algébricas requer inicialmente a colocação da fonte de força e de momento, uma de cada vez, nas extremidades da barra, ou seja, na extremidade inicial quando $\hat{x} = \varepsilon$ e na extremidade final, quando $\hat{x} = L - \varepsilon$, implicando em $\varepsilon \rightarrow 0$ na Eq.(3.110). Em seguida, após o cálculo das integrais e limites, a transição para representação algébrica do efeito de flexão em y é finalizada podendo ser escrita como:

$$\{u\} + [\bar{H}] \{u\} = [G] \{p\} + \{f\} \quad (3.111)$$

Onde $[\bar{H}]$, $[G]$ são as matrizes de influência e $\{f\}$ o vetor de carga, dados por:

$$[\bar{H}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -V_{zp}^*(0, 0 + \varepsilon) & -M_{yp}^*(0, 0 + \varepsilon) & V_{zp}^*(L, 0 + \varepsilon) & M_{yp}^*(L, 0 + \varepsilon) \\ -V_{zm}^*(0, 0 + \varepsilon) & -M_{ym}^*(0, 0 + \varepsilon) & V_{zm}^*(L, 0 + \varepsilon) & M_{ym}^*(L, 0 + \varepsilon) \\ -V_{zp}^*(0, L - \varepsilon) & -M_{yp}^*(0, L - \varepsilon) & V_{zp}^*(L, L - \varepsilon) & M_{yp}^*(L, L - \varepsilon) \\ -V_{zm}^*(0, L - \varepsilon) & -M_{ym}^*(0, L - \varepsilon) & V_{zm}^*(L, L - \varepsilon) & M_{ym}^*(L, L - \varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -w_p^*(0, 0 + \varepsilon) & -\phi_p^*(0, 0 + \varepsilon) & w_p^*(L, 0 + \varepsilon) & \phi_p^*(L, 0 + \varepsilon) \\ -w_m^*(0, 0 + \varepsilon) & -\phi_m^*(0, 0 + \varepsilon) & w_m^*(L, 0 + \varepsilon) & \phi_m^*(L, 0 + \varepsilon) \\ -w_p^*(0, L - \varepsilon) & -\phi_p^*(0, L - \varepsilon) & w_p^*(L, L - \varepsilon) & \phi_p^*(L, L - \varepsilon) \\ -w_m^*(0, L - \varepsilon) & -\phi_m^*(0, L - \varepsilon) & w_m^*(L, L - \varepsilon) & \phi_m^*(L, L - \varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L \begin{bmatrix} w_p^*(x, 0 + \varepsilon) & \phi_p^*(x, 0 + \varepsilon) \\ w_m^*(x, 0 + \varepsilon) & \phi_m^*(x, 0 + \varepsilon) \\ w_p^*(x, L - \varepsilon) & \phi_p^*(x, L - \varepsilon) \\ w_m^*(x, L - \varepsilon) & \phi_m^*(x, L - \varepsilon) \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} P_z(x) \\ m_y(x) \end{matrix} \right\} dx$$

Já $\{u\}$ e $\{p\}$ são os vetores de deslocamentos e esforços em Eq. (3.111), mostrados na Fig. 3.2, são dados por:

$$\{u\} = [w_i \ \phi_i \ w_j \ \phi_j]^T = [w(0) \ \phi(0) \ w(L) \ \phi(L)]^T$$

$$\{p\} = [V_{zi} \ M_{yi} \ V_{zj} \ M_{yj}]^T = [V_z(0) \ M_y(0) \ V_z(L) \ M_y(L)]^T$$

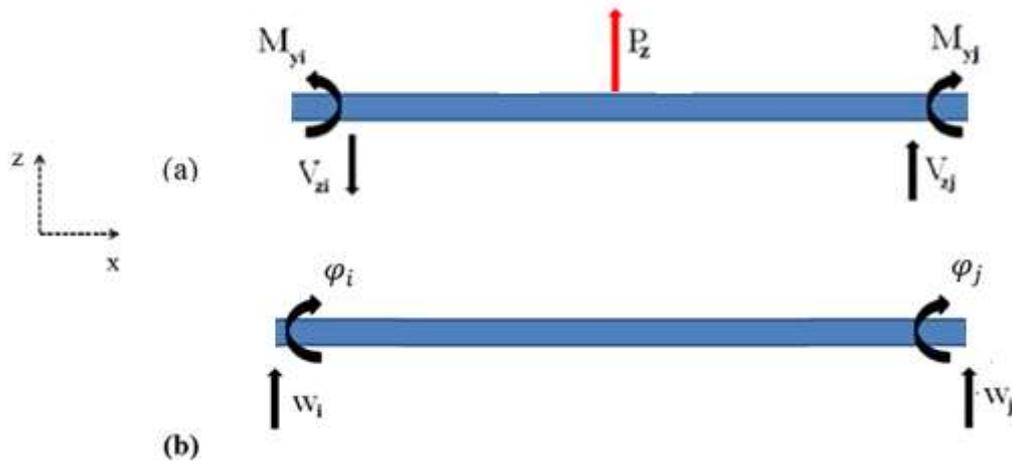


Figura 3.2 Viga de Timoshenko: (a) Esforços; (b) Deslocamentos

As formas explícitas das matrizes $[\bar{H}]$, $[G]$ após o cálculo dos limites ficam:

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.112)

Sempre que a análise de interesse não for a determinação das cargas de flambagem, o vetor de cargas $\{f\}$ deverá ser calculado. Além disso, os valores finais de $\{f\}$ dependem da função que interpola $p_z(x)$ e $m_y(x)$.

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = \left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(-D_2 y_1 + D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_1}L) \\ + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{D_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) \\ + \left(\frac{-K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{-y_1(D_1 - P + K_2) + K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_1}L) + \left(\frac{y_2(D_1 - P + K_2) - K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_1 = \left(\frac{-y_1 D_2 + D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) \\ + \left(\frac{y_2 D_2 - D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cos(\sqrt{-y_1}L) + \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \left(\frac{-(D_1 - P + K_2)y_1 + K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) \\ + \left(\frac{(D_1 - P + K_2)y_2 - K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L)$$

Caso 2 - $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = \left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(-D_2 y_1 + D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1} L) \\ + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\alpha_2 = \left(-\frac{D_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{y_1} \operatorname{senh}(\sqrt{y_1} L) + \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(\sqrt{y_1} L) \\ + \left(\frac{-K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{-y_1(D_1 - P + K_2) + K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1} L) + \left(\frac{y_2(D_1 - P + K_2) - K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\beta_1 = \left(\frac{-y_1 D_2 + D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(\sqrt{y_1} L) \\ + \left(\frac{y_2 D_2 - D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\beta_2 = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cosh(\sqrt{y_1} L) + \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_3 = \left(\frac{-(D_1 - P + K_2)y_1 + K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(\sqrt{y_1} L) \\ + \left(\frac{(D_1 - P + K_2)y_2 - K_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L)$$

Caso 3 - Raízes complexas e conjugadas

$$\alpha_1 = \left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(-D_2 y_1 + D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1}L) \\ + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P + K_2)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(i\sqrt{-y_2}L)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{D_1 i}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) + \sqrt{-y_2} \operatorname{senh}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{-K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) \\ + \left(\frac{-K_1 D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L)$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{-y_1(D_1 - P + K_2) - K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1}L) + \left(\frac{y_2(D_1 - P + K_2) + K_1}{2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \right) \cosh(i\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_1 = \left(\frac{y_1 D_2 i - D_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) \\ + \left(\frac{-y_2 D_2 i + D_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{D_1}{2D_2(D_1 - P + K_2)(y_1 - y_2)} \left[-\cos(i\sqrt{y_1}L) + \cosh(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \left(\frac{(D_1 - P + K_2)y_1 i - K_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) + \left(\frac{-(D_1 - P + K_2)y_2 i - K_1 i}{2D_2(D_1 - P + K_2)\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L)$$

Caso 4 - $y_1 = 0$ e $y_2 < 0$ (viga sem fundação elástica)

$$\alpha_1 = - \left[\left(\frac{-(D_1)^2 + (D_1 - P)(D_1)}{2D_2 y_2 (D_1 - P)} \right) + \left(\frac{(D_1)^2 + (D_1 - P)(D_2 y_2 - D_1)}{2D_2 y_2 (D_1 - P)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{D_1}{2y_2(D_1 - P)} \right) \left[\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = - \left(\frac{y_2(D_1 - P)}{2y_2(D_1 - P)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\beta_1 = - \left(\frac{D_1 L}{2D_2 y_2 (D_1 - P)} \right) - \left(\frac{y_2 D_2 - D_1}{2D_2 y_2 (D_1 - P) \sqrt{-y_2}} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L)$$

$$\beta_2 = - \frac{D_1}{2D_2 y_2 (D_1 - P)} \left[-1 + \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_3 = - \left(\frac{(D_1 - P)y_2}{2D_2 y_2 (D_1 - P) \sqrt{-y_2}} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} L)$$

CAPÍTULO 4

ESTABILIDADE DINÂMICA DE VIGAS

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as equações que descrevem o fenômeno da estabilidade dinâmica sob as hipóteses da teoria de Euler-Bernoulli e da teoria de Timoshenko, para vigas com ou sem base elástica.

4.2. PROBLEMA REAL DE EULER-BERNOULLI

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli sob carga axial P para o problema dinâmico é admitido que a deformação por cortante e a inércia rotatória sejam desprezadas. Seja uma barra prismática submetida a uma flexão em y devido ao carregamento dinâmico $p_z(x,t)$, com seção transversal de área A e material com densidade ρ e módulo de Young E mostrados em um elemento diferencial na Fig. 4.1.

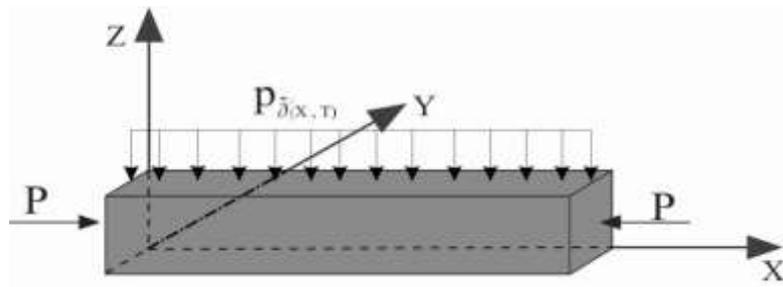


Figura 4.1 - Barra sob efeito de flexão dinâmica

A energia total do sistema é dado por:

$$\pi = \pi_c - \pi_p + W \quad (4.0)$$

Onde:

π_c representa a energia cinética translacional da viga; π_p , a soma das energias de deformação da viga e da base elástica, dadas na Eq. (2.24) e Eq. (2.34); W , a soma do trabalho realizado pela carga transversal $p_z(x, t)$ e carga axial P apresentada na Eq. (2.67).

Por uma questão de concisão, aqui não serão reapresentadas as deduções das energias de deformação da viga e da base elástica nem o trabalho das cargas externas, haja visto que tais discussões já foram discutidas no capítulo 2.

Já a parcela π_c , referente à energia cinética translacional da viga, é dada por:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_m \left(\frac{dw(x, t)}{dt} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \int_v \rho \left(\frac{dw(x, t)}{dt} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left(\frac{dw(x, t)}{dt} \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dw(x, t)}{dt} \right)^2 dx \quad (4.1)$$

Onde:

A representa a área transversal e ρ , a densidade.

O princípio de Hamilton estabelece relações entre as variações de energia cinética, energia potencial e trabalho do carregamento externo dado por, PETYT (1990):

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W] dt = 0 \quad (4.2)$$

Após substituição da energia de deformação da viga Eq.(2.24), energia de deformação da base elástica Eq. (2.34), energia cinética translacional da viga Eq. (4.1) e o trabalho realizado pelas cargas externas Eq. (2.43) na Eq. (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w(x,t)}{d^2 x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x,t))^2 dx \right] \right\} dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^L (P - K_2) \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L p_z(x,t) w(x,t) dx \right] \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Aplicando-se as propriedades do cálculo variacional $\delta(u^n) = nu^{n-1} \delta u$, $\delta \int g(x) dx = \int \delta[g(x)] dx$ em Eq. (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^t \left[\int_0^L \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right) \rho A \delta \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right) dx - \int_0^L \left(\frac{d^2 w(x,t)}{d^2 x} \right) EI \delta \left(\frac{d^2 w(x,t)}{d^2 x} \right) dx - \int_0^L w(x,t) K_1 \delta(w(x,t)) dx \right] dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right) (P - K_2) \delta \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right) dx + \int_0^L p_z(x,t) \delta w(x,t) dx \right] dt = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Integrando-se por partes no tempo as parcelas da energia cinética e no espaço as parcelas da energia potencial na Eq. (4.4) e levando-se em consideração que a variação dos campos no contorno é nula, $[\delta w(x,t)]_0^L = 0$ e $[\delta w(x,t)]_{t_1}^{t_2} = 0$, a Eq. (4.4) fica:

$$\int_{t_1}^t \left\{ \int_0^L \left[-\rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} - EI \frac{d^4 w(x,t)}{d^4 x} - (P - K_2) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} - K_1 w(x,t) + p_z(x,t) \right] dx \right\} \delta w(x,t) dt = 0 \tag{4.5}$$

Para variações arbitrárias de $\delta w(x,t)$, a nulidade da Eq. (4.5) só é verificada se a relação seguinte for verdadeira:

$$EI \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + K_1 w(x,t) + \rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} = p_z(x,t) \tag{4.6}$$

Com esforços dados por:

$$M_y(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (4.7a)$$

$$V_z(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - (P - K_2) \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.7b)$$

Fazendo-se $K_2 = 0$ na Eq. (4.6), obtém-se com isso a equação do problema real dinâmico na base elástica de Winkler:

$$EI \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + K_1 w(x,t) + \rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} = p_z(x,t) \quad (4.8)$$

Com momento fletor expresso na Eq. (4.7a) e força cortante dado por:

$$V_z(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - P \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.9)$$

Por outro lado, zerando simultaneamente os parâmetros K_2 e K_1 na Eq. (4.6), obtém-se, a equação do problema real dinâmico sem base elástica que fica:

$$EI \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + \rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} = p_z(x,t) \quad (4.10)$$

E os esforços dados por Eq.(4.7a) e Eq.(4.9).

Se a viga for submetida a cargas dinâmicas harmonicamente no tempo, então a estrutura responde também harmonicamente, implicando em:

$$p_z(x, t) = \tilde{p}_z(x)e^{i\omega t} \quad (4.11)$$

$$w(x, t) = \tilde{w}(x)e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

Assim, fazendo-se as devidas substituições da Eq. (4.11) e Eq. (4.12) na Eq. (4.6), a equação governante da estabilidade dinâmica no regime permanente de viga na base elástica de Pasternak fica:

$$EI \frac{d^4 \tilde{w}(x)}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 \tilde{w}(x)}{dx^2} + (K_1 - \rho A \omega^2) \tilde{w}(x) = \tilde{p}_z(x) \quad (4.13)$$

4.3 PROBLEMA REAL DE TIMOSHENKO

A representação da energia total do sistema no caso dinâmico da viga de Timoshenko sobre base elástica é dada tal qual na viga de Euler-Bernoulli por Eq. (4.0). No entanto, no caso de Timoshenko uma parcela adicional à energia cinética é incluída, de forma π_c passa a ser escrita por duas parcelas dadas, respectivamente, por PETYT (1990):

$$\pi_c = \pi_{ct} + \pi_{cr} \quad (4.12)$$

Onde:

π_{ct} representa a energia cinética para velocidade transversal da barra e π_{cr} energia cinética associada à velocidade axial dos pontos na seção transversal causada pela rotação.

A parcela π_{ct} da energia cinética para velocidade transversal da barra fica:

$$\pi_{ct} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dw(x, t)}{dt} \right)^2 dx \quad (4.13)$$

Por outro lado, a parcela π_{cr} , está associada à velocidade axial dos pontos na seção transversal causada pela rotação da mesma. Essa energia cinética rotatória pode ser escrita como:

$$\pi_{cr} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{d\phi(x, t)}{dx} \right)^2 dx \quad (4.14)$$

Por fim, efetuando-se as devidas substituições, tanto da energia de deformação interna(formada pela energia de deformação da viga e energia de deformação da base elástica), quanto o trabalho das forças externas e da Eq. (4.10) e Eq. (4.11) na Eq. (4.0) tem-se:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{d\phi(x,t)}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_2 \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p_z(x) w(x) dx - \int_0^L m_y(x) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aplicando-se o princípio de Hamilton na Eq. (4.15), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dw(x,t)}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{d\phi(x,t)}{dt} \right)^2 dx \right] \right\} dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[- \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d\phi(x,t)}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(\frac{dw(x,t)}{dx} + \phi(x,t) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L K_1 (w(x,t))^2 dx \right] \right\} dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \left[+ \frac{1}{2} \int_0^L (P - K_2) \left(\frac{dw(x,t)}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L p_z(x,t) w(x,t) dx + \int_0^L m_y(x,t) \phi(x,t) dx = 0 \right] \right\} dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

Efetuada a primeira variação, com as devidas integrações por partes e tendo em vista que $[\delta\phi(x)]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ na Eq. (4.16), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_0^L \left(\frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} \right) \rho A \delta w(x,t) dx - \int_0^L \left(\frac{d^2 \phi(x,t)}{dt^2} \right) \rho I \delta \phi(x,t) dx \right] dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\frac{d^2 \phi(x,t)}{dx^2} \right) EI \delta \phi dx \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + \frac{d\phi(x,t)}{dx} \right) \kappa GA \delta w(x,t) dx \right] dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\frac{dw(x,t)}{dx} + \phi(x,t) \right) \kappa GA \delta \phi(x,t) dx \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L K_1 \delta w(x,t) dx \right] dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_0^L \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} (P - K_2) \delta w(x,t) dx + \int_0^L p_z(x,t) \delta w(x,t) dx + \int_0^L m_y(x,t) \delta \phi(x,t) dx \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Impondo-se as condições de contorno nas variações $\delta\phi(x)$ e $\delta w(x)$ da Eq. (4.17), resulta em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[- \left(\frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} \right) \rho A + \left(\frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + \frac{d\phi(x,t)}{dx} \right) \kappa GA - K_1 w(x,t) - (P - K_2) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + p_z(x,t) \right] \delta w(x,t) dx \right\} dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\left(\frac{d^2 \phi(x,t)}{dx^2} \right) EI - \left(\frac{d^2 \phi(x,t)}{dt^2} \right) \rho I - \left(\frac{dw(x,t)}{dx} + \phi(x,t) \right) \kappa GA + m_y(x,t) \right] \delta \phi(x,t) dx \right\} dt = 0 \quad (4.18)$$

Para variações arbitrárias de $\delta w(x,t)$ e $\delta \phi(x,t)$, a nulidade da Eq. (4.18) só é verificada se as relações seguintes forem verdadeiras:

$$(\kappa GA - P + K_2) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} - K_1 w(x,t) - \rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} + \kappa GA \frac{d\phi(x,t)}{dx} = -p_z(x,t) \quad (4.19)$$

$$-\kappa GA \frac{dw(x,t)}{dx} + EI \frac{d^2 \phi(x,t)}{dx^2} - \kappa GA \phi(x,t) - \rho I \frac{d^2 \phi(x,t)}{dt^2} = -m_y(x,t) \quad (4.20)$$

Fazendo-se $K_2 = 0$ na Eq. (4.19), obtém-se a equação do problema real de Timoshenko dinâmico na base elástica de Winkler:

$$(\kappa GA - P) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} - K_1 w(x,t) - \rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} + \kappa GA \frac{d\phi(x,t)}{dx} = -p_z(x,t) \quad (4.21)$$

$$-\kappa GA \frac{dw(x,t)}{dx} + EI \frac{d^2 \phi(x,t)}{dx^2} - \kappa GA \phi(x,t) - \rho I \frac{d^2 \phi(x,t)}{dt^2} = -m_y(x,t) \quad (4.22)$$

Com a finalidade de se obter as equações que regem o problema real dinâmico sem base elástica, zeram-se simultaneamente os parâmetros K_2 e K_1 na Eq. (4.19). Desta forma, tem-se:

$$(\kappa GA - P) \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} - \rho A \frac{d^2 w(x,t)}{dt^2} + \kappa GA \frac{d\phi(x,t)}{dx} = -p_z(x,t) \quad (4.23)$$

$$-\kappa GA \frac{dw(x,t)}{dx} + EI \frac{d^2 \phi(x,t)}{dx^2} - \kappa GA \phi(x,t) - \rho I \frac{d^2 \phi(x,t)}{dt^2} = -m_y(x,t) \quad (4.24)$$

Para o caso de Timoshenko, assim como no caso de Euler-Bernoulli Dinâmico, quando a viga é submetida a cargas dinâmicas harmonicamente no tempo $p_z(x,t) = \check{p}_z(x)e^{i\omega t}$, a estrutura responde também harmonicamente, $w(x,t) = \check{w}(x)e^{i\omega t}$ e $\phi(x,t) = \check{\phi}(x)e^{i\omega t}$. Com o interesse de simplificar a notação, neste trabalho adota-se:

$$\check{p}_z(x)e^{i\omega t} = p_z(x,t) \quad (4.25)$$

$$\check{w}(x)e^{i\omega t} = w(x,t) \quad (4.26)$$

$$\check{\phi}(x)e^{i\omega t} = \phi(x,t) \quad (4.27)$$

Assim, substituindo-se as Eqs (4.25), (4.26) e (4.27) nas Eqs (4.19) e (4.20), tem-se:

$$(\kappa GA - P + K_2) \frac{d^2 \check{w}(x)}{dx^2} + (-K + \rho A \omega^2) \check{w}(x) + \kappa GA \frac{d \check{\phi}(x)}{dx} = -\check{p}_z(x) \quad (4.28)$$

$$-\kappa GA \frac{d \check{w}(x)}{dx} + EI \frac{d^2 \check{\phi}(x)}{dx^2} + (-\kappa GA + \rho I \omega^2) \check{\phi}(x) = -\check{m}_y(x) \quad (4.29)$$

Onde o sistema de equações formado pela Eq. (4.28) e Eq. (4.29) na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} [D_1 - (P - K_2)] \frac{d^2}{dx^2} - K_1 + S_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{w}(x) \\ \check{\phi}_p(x) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \check{p}_z(x) \\ \check{m}_y(x) \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Além disso, os esforços mobilizados na viga apoiada na base de Pasternak são dados por:

$$\tilde{M}_y(x) = EI \frac{d\tilde{\phi}(x)}{dx} \quad (4.31)$$

$$\tilde{V}_z(x) = \kappa GA \left(\frac{d\tilde{w}(x)}{dx} + \tilde{\phi}(x) \right) - (P - K_2) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \quad (4.32)$$

Para o caso de base de Winkler, $K_2 = 0$ deve ser substituído nas Eqs (4.30) e (4.32). Correções análogas nessas equações devem ser feitas no problema da estabilidade dinâmica de viga sem base elástica, atribuindo-se $K_1 = K_2 = 0$.

CAPÍTULO 5

O MEC NA ESTABILIDADE DINÂMICA DE VIGAS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidas as etapas requeridas pelo método dos elementos de contorno para o problema da estabilidade dinâmica de vigas a partir de conceitos apresentados no capítulo 4.

5.2. VIGA DE EULER-BERNOULLI

Nesta seção, os tópicos requeridos para o estabelecimento de estabilidade dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli são discutidos.

5.2.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL

No problema fundamental o carregamento consiste em uma carga pontual harmônica $\tilde{p}_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ atuando no ponto fonte, \hat{x} . Por analogia ao problema real Eq. (4.13), obtém-se a equação governante do problema fundamental que fica:

$$\frac{d^4 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^4} + \frac{(P - K_2)}{EI} \frac{d^2 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \frac{(K_1 - \rho A \omega^2)}{EI} \tilde{w}^*(x, \hat{x}) = \frac{\tilde{p}_z^*(x, \hat{x})}{EI} \quad (5.0)$$

Os esforços fundamentais são escritos de uma forma análoga aos reais dados em Eq. (4.7.a) e Eq. (4.7.b), resultando em:

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = -EI \frac{d^3 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^3} - (P - K_2) \frac{d \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (5.1)$$

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = -EI \frac{d^2 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (5.2)$$

Então, fazendo-se $y = \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2}$ na Eq. (5.0), uma equação característica homogênea associada à equação governante do problema fundamental pode ser escrita como:

$$y^2 + \frac{(P-K_2)}{EI} y + \frac{(K_1 - \rho A \omega^2)}{EI} = 0 \quad (5.3)$$

As raízes da equação quadrática dada em Eq. (5.3) são:

$$y_1 = \frac{-\frac{(P-K_2)}{EI} + \sqrt{\left(\frac{P-K_2}{EI}\right)^2 - 4\left(\frac{K_1 - \rho A \omega^2}{EI}\right)}}{2} \quad (5.4)$$

$$y_2 = \frac{-\frac{(P-K_2)}{EI} - \sqrt{\left(\frac{P-K_2}{EI}\right)^2 - 4\left(\frac{K_1 - \rho A \omega^2}{EI}\right)}}{2} \quad (5.5)$$

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

Para este caso, neste trabalho é proposta a seguinte solução fundamental para Eq. (5.0):

$$\tilde{w}^*(x, \hat{x}) = A_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (5.6)$$

Para a determinação das constantes da solução fundamental o procedimento aqui utilizado é semelhante ao adotado no problema estático, de forma que a segunda derivada fica:

$$\frac{d^2 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} = A_1 y_1 \text{sen}(\sqrt{-y_1} r) + A_2 y_2 \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) + [2A_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1} r) + 2A_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2} r)] \delta(x, \hat{x}) \quad (5.7)$$

Com o intuito de se evitar derivadas de ordem superior, na Eq. (5.7) impõe-se:

$$2A_1\sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1}r) + 2A_2\sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2}r) = 0 \quad (5.8)$$

A relação entre as constantes, obtida a partir da Eq. (5.8) sob a condição $x = \hat{x} = r = 0$, fica:

$$A_2 = -A_1 \frac{\sqrt{-y_1}}{\sqrt{-y_2}} \quad (5.9)$$

Derivando-se a Eq. (5.6) quatro vezes, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} &= A_1 y_1^2 \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) + A_2 y_2^2 \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \\ &+ [2A_1 y_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1}r) + 2A_2 y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2}r)] \delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Finalmente, da substituição das Eqs. (5.6), (5.7), (5.9) e (5.10) na Eq. (5.0) e convenientes manipulações, tem-se:

$$2A_1 y_1 \sqrt{-y_1} \cos(\sqrt{-y_1}r) + 2A_2 y_2 \sqrt{-y_2} \cos(\sqrt{-y_2}r) = \frac{1}{EI} \quad (5.11)$$

Fazendo-se $x = \hat{x} = 0$ na Eq. (5.11), resulta em:

$$A_1 = \frac{1}{2EI\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)}$$

Substituindo-se as constantes A_1 e A_2 na Eq. (5.6), tem-se como proposta a seguinte solução fundamental para Eq. (5.0):

$$\tilde{w}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EI\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \quad (5.12)$$

Da primeira derivada da Eq. (5.12), tem-se:

$$\frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(\sqrt{-y_1}r) - \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.13)$$

De acordo com a Eq. (5.1) e Eq. (5.2), os esforços fundamentais devidamente calculados ficam:

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = - \left[\frac{EIy_1 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_1}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) + \left[\frac{EIy_2 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.14)$$

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (5.15)$$

As grandezas fundamentais relacionadas com a derivação em \hat{x} , estão associadas à derivação das Eqs (5.12), (5.13), (5.14) e (5.15) no ponto-fonte, resultando em:

$$w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(\sqrt{-y_1}r) - \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.16)$$

$$\frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) - \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (5.17)$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{-EIy_1\sqrt{-y_1} - (P - K_2)\sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) \right] + \left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + (P - K_2)\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (5.18)$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(\sqrt{-y_1} r) - y_2 \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.19)$$

Caso 2- $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$

Neste caso, procedendo de forma semelhante à dedução do Caso 1, a solução proposta para Eq. (5.0) neste trabalho é:

$$\tilde{w}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EI\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \sinh(\sqrt{y_1} r) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (5.20)$$

Da primeira derivada da Eq. (5.20), tem-se:

$$\frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cosh(\sqrt{y_1} r) - \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.21)$$

As demais equações de interesse ficam:

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = - \left[\frac{EIy_1 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cosh(\sqrt{y_1} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) + \left[\frac{EIy_2 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.22)$$

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = - \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{y_1} \sinh(\sqrt{y_1} r) + \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.23)$$

$$\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cosh(\sqrt{y_1} r) - \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.24)$$

$$\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = - \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{y_1} \sinh(\sqrt{y_1} r) + \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.25)$$

$$\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{EIy_1\sqrt{y_1} + (P - K_2)\sqrt{y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \sinh(\sqrt{y_1} r) \right] + \left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + (P - K_2)\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.26)$$

$$\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cosh(\sqrt{y_1} r) - y_2 \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.27)$$

Caso 3- Raízes complexas conjugadas.

As constantes da solução fundamental podem ser obtidas seguindo os mesmos passos do Caso 1, de forma que a solução da Eq. (5.0) proposta neste trabalho é:

$$\tilde{w}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EI\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)i} \text{sen}(i\sqrt{y_1} r) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)i} \text{senh}(i\sqrt{-y_2} r) \quad (5.28)$$

Já as demais soluções fundamentais de interesse são:

$$\frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(i\sqrt{y_1} r) - \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.29)$$

$$\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) = - \left[\frac{EIy_1 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(i\sqrt{y_1} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) + \left[\frac{EIy_2 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.30)$$

$$\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \text{sen}(i\sqrt{y_1} r) + i\sqrt{-y_2} \text{senh}(i\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.31)$$

$$\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(i\sqrt{y_1} r) - \cosh(i\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.32)$$

$$\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \text{sen}(i\sqrt{y_1} r) + i\sqrt{-y_2} \text{senh}(i\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.33)$$

$$\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{-EIy_1 i\sqrt{y_1} - (P - K_2) i\sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{sen}(i\sqrt{y_1} r) \right] + \left[\frac{-EIy_2 i\sqrt{-y_2} - (P - K_2) i\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \text{senh}(i\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.34)$$

$$\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x,\hat{x}) = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(i\sqrt{y_1} r) - y_2 \cosh(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.35)$$

Caso 4 - $K_1 = 0$ e $K_2 = 0$.

Neste caso, de forma semelhante ao estático, o fato de suprimir a base elástica acarreta $y_1 = 0$ e $y_2 < 0$, recaindo no fato de algumas soluções do Caso 1 não poderem ser calculadas diretamente por possuírem termos da forma $\frac{\text{Sen}(\sqrt{-y_1} r)}{\sqrt{-y_1}}$, que produzirão indeterminações quando $y_1 = 0$. Para tal caso, os valores das soluções fundamentais são calculados no limite com $y_1 \rightarrow 0$, que quando calculado fica:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \left[\frac{\text{Sen}(\sqrt{-y_1} r)}{\sqrt{-y_1}} \right] = r$$

Desta forma, efetuando-se os limites com $y_1 \rightarrow 0$ para as soluções do Caso 1, é proposta a seguinte solução fundamental:

$$\tilde{w}^*(x,\hat{x}) = -\frac{r}{2EIy_2} + \frac{1}{2EIy_2\sqrt{-y_2}} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \quad (5.36)$$

$$\frac{d\tilde{w}^*(x,\hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2EIy_2} \left[1 - \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.37)$$

$$\tilde{V}_z^*(x,\hat{x}) = \left[\frac{P}{2EIy_2} \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) - \left[\frac{EIy_2 + P}{2EIy_2} \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.38)$$

$$\tilde{M}_y^*(x,\hat{x}) = \frac{1}{2y_2} \left[\sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.39)$$

$$w_{,\hat{x}}^*(x,\hat{x}) = \frac{1}{2EIy_2} \left[1 - \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.40)$$

$$\frac{dw_{,\hat{x}}^*(x,\hat{x})}{dx} = \frac{1}{2EIy_2} \left[\sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.41)$$

$$V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = - \left[\frac{EIy_2 \sqrt{-y_2} + P \sqrt{-y_2}}{2EIy_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.42)$$

$$M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} \left[\cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.43)$$

5.2.2 EQUAÇÃO INTEGRAL

Tal qual o caso estático, aqui a equação integral pode ser estabelecida utilizando-se a técnica dos resíduos ponderados TRP, onde a equação governante do problema real, Eq. (4.13), é ponderada pelo deslocamento fundamental $\tilde{w}^*(x, \hat{x})$ resultando em:

$$\int_0^L \left[EI \frac{d^4 \tilde{w}(x)}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 \tilde{w}(x)}{dx^2} + (K_1 - \rho A \omega^2) \tilde{w}(x) - \tilde{p}_z(x) \right] \tilde{w}^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (5.44)$$

Realizando sucessivas integrações por partes na Eq. (5.44) e substituindo-se as relações dos esforços dados na Eq. (5.1) e na Eq.(5.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[EI \frac{d^4 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^4} + (P - K_2) \frac{d^2 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^2} + (K_1 - \rho A \omega^2) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) \right] \tilde{w}(x) dx \\ & + \left[\left(EI \frac{d^3 \tilde{w}(x)}{dx^3} + (P - K_2) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[M_y(x) \frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - \left[\frac{d\tilde{w}(x)}{dx} M_y^*(x, \hat{x}) \right]_0^L \\ & - \left[\left(EI \frac{d^3 \tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx^3} + (P - K_2) \frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} \right) \tilde{w}(x) \right]_0^L = \int_0^L \tilde{p}_z(x) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (5.45)$$

Aplicando-se a propriedade do delta de Dirac $\int_0^L \tilde{w}(x) \delta(x, \hat{x}) dx = \tilde{w}(\hat{x})$ na Eq. (5.45), a

equação integral para o deslocamento transversal pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(\hat{x}) + \left[\tilde{V}_z^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) \right]_0^L - \left[\tilde{M}_y^*(x, \hat{x}) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\ & + \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x) \frac{d\tilde{w}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \tilde{p}_z(x) \tilde{w}^*(x, \hat{x}) dx \end{aligned} \quad (5.46)$$

Como a resolução do problema de vigas de Euler-Bernoulli não fica definida apenas com Eq.(5.46), é necessária a obtenção de uma equação integral adicional, esta é desenvolvida derivando-se a Eq. (5.46) no ponto fonte, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}(\hat{x})}{d\hat{x}} + [\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x})\tilde{w}(x)] - \left[\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\ + [\tilde{V}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x) \frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})dx \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.2.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA

A transição da representação integral para equações algébricas requer que colocações do ponto-fonte nas extremidades da barra, isto é, fazendo $\hat{x} \rightarrow 0$ e $\hat{x} \rightarrow L$ na Eq. (5.46) e na Eq. (5.47), resultando em:

Para $\hat{x} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0) + [\tilde{V}_z^*(x,0)\tilde{w}(x)]_0^L - \left[\tilde{M}_y^*(x,0) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L \\ + [\tilde{V}_z(x)\tilde{w}^*(x,0)]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x) \frac{d\tilde{w}^*(x,0)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}^*(x,0)dx \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}(0)}{d\hat{x}} + [\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x,0)\tilde{w}(x)]_0^L - \left[\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x,0) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\ + [\tilde{V}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,0)]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x) \frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,0)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,0)dx \end{aligned} \quad (5.49)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(L) + [\tilde{V}_z^*(x,L)\tilde{w}(x)]_0^L - \left[\tilde{M}_y^*(x,L) \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\ + [\tilde{V}_z(x)\tilde{w}^*(x,L)]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x) \frac{d\tilde{w}^*(x,L)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}^*(x,L)dx \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{w}(L)}{d\hat{x}} + \left[\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(x,L)\tilde{w}(x) \right]_0^L - \left[\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(x,L)\frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \right]_0^L = \\ & + \left[\tilde{V}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,L) \right]_0^L - \left[\tilde{M}_y(x)\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,L)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,L)dx \end{aligned} \quad (5.51)$$

Expandido as Eqs. (5.48), (5.49), (5.50) e (5.51), respectivamente, resulta em:

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(0) - \tilde{V}_z^*(0,0)\tilde{w}(0) + \tilde{M}_y^*(0,0)\frac{d\tilde{w}(0)}{dx} + \tilde{V}_z^*(L,0)\tilde{w}(L) - \tilde{M}_y^*(L,0)\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} = \\ & - \tilde{V}_z(0)\tilde{w}^*(0,0) + \tilde{M}_y(0)\frac{d\tilde{w}^*(0,0)}{dx} + \tilde{V}_z(0)\tilde{w}^*(L,0) - \tilde{M}_y(L)\frac{d\tilde{w}^*(L,0)}{dx} + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}^*(x,0)dx \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{w}(0)}{d\hat{x}} - \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(0,0)\tilde{w}(0) + \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(0,0)\frac{d\tilde{w}(0)}{dx} + \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(L,0)\tilde{w}(L) - \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(L,0)\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} = \\ & - \tilde{V}_z(0)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,0) + \tilde{M}_y(0)\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,0)}{dx} + \tilde{V}_z(L)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,0) - \tilde{M}_y(L)\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,0)}{dx} + \int_0^L p_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,0)dx \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(L) - \tilde{V}_z^*(0,L)\tilde{w}(0) + \tilde{M}_y^*(0,L)\frac{d\tilde{w}(0)}{dx} + \tilde{V}_z^*(L,L)\tilde{w}(L) - \tilde{M}_y^*(L,L)\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} = \\ & - \tilde{V}_z(0)\tilde{w}^*(0,L) + \tilde{M}_y(0)\frac{d\tilde{w}^*(0,L)}{dx} + \tilde{V}_z(L)\tilde{w}^*(L,L) - \tilde{M}_y(L)\frac{d\tilde{w}^*(L,L)}{dx} + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}^*(x,L)dx \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{w}(L)}{d\hat{x}} - \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(0,L)\tilde{w}(0) + \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(0,L)\frac{d\tilde{w}(0)}{dx} + \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(L,L)\tilde{w}(L) - \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(L,L)\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} = \\ & - \tilde{V}_z(0)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,L) + \tilde{M}_y(0)\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,L)}{dx} + \tilde{V}_z(L)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,L) - \tilde{M}_y(L)\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,L)}{dx} + \int_0^L \tilde{p}_z(x)\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,L)dx \end{aligned} \quad (5.55)$$

Uma representação algébrica para as Eqs. (5.52), (5.53), (5.54) e (5.55), em termos das variáveis de contorno pode ser escrita como segue:

$$\{ \tilde{u} \} + [H] \{ \tilde{u} \} = [G] \{ \tilde{p} \} + \{ \tilde{f} \} \quad (5.56)$$

Onde $[H]$, $[G]$ são as matrizes de influência e $\{\tilde{f}\}$ é o vetor de ações externas. $\{\tilde{u}\}$ e $\{\tilde{p}\}$ são os vetores de deslocamentos e esforços, vide Fig. 3.1, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{\tilde{u}\} = [\tilde{w}_i \frac{d\tilde{w}_i}{dx} \tilde{w}_j \frac{d\tilde{w}_j}{dx}]^T = [\tilde{w}(0) \frac{d\tilde{w}(0)}{dx} \tilde{w}(L) \frac{d\tilde{w}(L)}{dx}]^T$$

$$\{\tilde{p}\} = [\tilde{V}_{zi} \tilde{M}_{yi} \tilde{V}_{zj} \tilde{M}_{yj}]^T = [\tilde{V}_z(0) \tilde{M}_y(0) \tilde{V}_z(L) \tilde{M}_y(L)]^T$$

$$[H] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\tilde{V}_z^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{M}_y^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{V}_z^*(L,0+\varepsilon) & -\tilde{M}_y^*(L,0+\varepsilon) \\ -\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon) & -\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon) \\ -\tilde{V}_z^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{M}_y^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{V}_z^*(L,L-\varepsilon) & -\tilde{M}_y^*(L,L-\varepsilon) \\ -\tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{V}_{z,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon) & -\tilde{M}_{y,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\tilde{w}^*(0,0+\varepsilon) & \frac{d\tilde{w}^*(0,0+\varepsilon)}{dx} & \tilde{w}^*(L,0+\varepsilon) & -\frac{d\tilde{w}^*(L,0+\varepsilon)}{dx} \\ -\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon) & \frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,0+\varepsilon)}{dx} & \tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon) & -\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,0+\varepsilon)}{dx} \\ -\tilde{w}^*(0,L-\varepsilon) & \frac{d\tilde{w}^*(0,L-\varepsilon)}{dx} & \tilde{w}^*(L,L-\varepsilon) & -\frac{d\tilde{w}^*(L,L-\varepsilon)}{dx} \\ -\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon) & \frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(0,L-\varepsilon)}{dx} & \tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon) & -\frac{d\tilde{w}_{,\hat{x}}^*(L,L-\varepsilon)}{dx} \end{bmatrix}$$

$$\{\tilde{f}\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L \begin{bmatrix} \tilde{w}^*(x,0+\varepsilon) \\ \tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,0+\varepsilon) \\ \tilde{w}^*(x,L-\varepsilon) \\ \tilde{w}_{,\hat{x}}^*(x,L-\varepsilon) \end{bmatrix} \{\tilde{p}_z(x)\} dx$$

Após o cálculo dos Elementos da Eq. (5.56), tem-se:

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Sempre que a análise de interesse não for a determinação das cargas de flambagem e/ou frequências naturais, o vetor de cargas {f} deverá ser calculado. Além disso, os valores finais de {f} dependem da função que interpola $\tilde{p}_z(x)$.

Os valores das constantes na Eq. (5.57) dependem dos valores das raízes da equação característica, subdividida em quatro casos:

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = - \left[\frac{EIy_1 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{-EIy_1\sqrt{-y_1} - (P - K_2)\sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + (P - K_2)\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(\sqrt{-y_1}L) - y_2 \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2EI\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(\sqrt{-y_1}L) - \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1}L) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 2- $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = -\left[\frac{EIy_1 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cosh(\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2 + (P - K_2)}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{y_1} \sinh(\sqrt{y_1}L) + \sqrt{-y_2} \sen(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{EIy_1\sqrt{y_1} + (P - K_2)\sqrt{y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \sinh(\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + (P - K_2)\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \sen(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cosh(\sqrt{y_1}L) - y_2 \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2EI\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \sinh(\sqrt{y_1}L) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \sen(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cosh(\sqrt{y_1}L) - \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\sqrt{y_1} \sinh(\sqrt{y_1}L) + \sqrt{-y_2} \sen(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 3- Raíces complejas conjugadas

$$\alpha_1 = -\left[\frac{EIy_1 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cos(i\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\frac{EIy_2 + P - K_2}{2EI(y_1 - y_2)} \cosh(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \sen(i\sqrt{y_1}L) + i\sqrt{-y_2} \sinh(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{-EIy_1 i\sqrt{y_1} - (P - K_2) i\sqrt{-y_1}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\frac{-EIy_2 i\sqrt{-y_2} - (P - K_2) i\sqrt{-y_2}}{2EI(y_1 - y_2)} \operatorname{senh}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2(y_1 - y_2)} \left[y_1 \cos(i\sqrt{y_1}L) - y_2 \cosh(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2EI\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)i} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) - \frac{1}{2EI\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)i} \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[\cos(i\sqrt{y_1}L) - \cosh(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2EI(y_1 - y_2)} \left[i\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) + i\sqrt{-y_2} \operatorname{senh}(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 4- $y_1 = 0$ e $y_2 < 0$ (viga sem base elástica)

$$\alpha_1 = \left[\frac{P}{2EIy_2} \right] - \left[\frac{EIy_2 + P}{2EIy_2} \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2y_2} \left[\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = - \left[\frac{EIy_2 \sqrt{-y_2} + P\sqrt{-y_2}}{2EIy_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \left[\cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = - \frac{L}{2EIy_2} + \frac{1}{2EIy_2 \sqrt{-y_2}} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L)$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2EIy_2} \left[1 - \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2EIy_2} \left[\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

5.3 VIGA DE TIMOSHENKO

Nesta seção, o problema da estabilidade dinâmica de vigas de Timoshenko, segundo à filosofia do método dos elementos de contorno, é investigado.

5.3.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL

A partir do problema real no domínio da frequência da Eq. (4.30), escreve-se o sistema de equações governantes do problema fundamental devido aos impulsos $\tilde{p}_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $\tilde{m}_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$:

$$\begin{bmatrix} [D_1 - (P - K_2)] \frac{d^2}{dx^2} - K_1 + S_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta(x, \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x, \hat{x}) \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

Onde:

$$S_1 = \rho A \omega^2 \text{ e } S_2 = \rho I \omega^2$$

Por analogia aos esforços reais na Eq. (4.31) e Eq. (4.32) os esforços fundamentais são:

$$\tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) = D_1 \left(\frac{d\tilde{w}_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right) - (P - K_2) \frac{d\tilde{w}_p^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (5.59)$$

$$\tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) = D_2 \frac{d\tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (5.60)$$

$$\tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) = D_1 \left(\frac{d\tilde{w}_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \right) - (P - K_2) \frac{d\tilde{w}_m^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (5.61)$$

$$\tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) = D_2 \frac{d\tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (5.62)$$

Após aplicação do método de Hörmander na Eq. (5.58) e procedendo de forma semelhante ao caso de Timoshenko estático no capítulo 3, tem-se que:

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \alpha \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \lambda \zeta = - \frac{\delta(x, \hat{x})}{D_2(D_1 - p)} \quad (5.63)$$

Onde:

$$\alpha = \left[\frac{[D_1 - (P - K_2)]S_2 + D_1(P - K_2) + D_2(S_1 - K_1)}{D_2[D_1 - (P - K_2)]} \right]$$

$$\lambda = \left[\frac{(K_2 - S_1)(D_1 - S_2)}{D_2[D_1 - (P - K_2)]} \right]$$

Fazendo-se $y = \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$ na Eq. (5.63), uma equação característica homogênea associada à equação governante do problema fundamental pode ser escrita como:

$$y^2 + \alpha y + \lambda = 0 \quad (5.64)$$

As raízes da equação quadrática ficam:

$$y_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda}}{2} \quad (5.65)$$

$$y_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda}}{2} \quad (5.66)$$

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

Aqui também, para obtenção da solução fundamental, procede-se de maneira análoga ao problema de Timoshenko estático, de forma que a solução proposta neste trabalho para Eq. (5.63) é:

$$\zeta = -\frac{\text{sen}(\sqrt{-y_1}r)}{2D_2[D_1-(P-K_2)](D_1-p)\sqrt{-y_1}(y_1-y_2)} + \frac{\text{sen}(\sqrt{-y_2}r)}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)} \quad (5.67)$$

Procedendo de forma análoga ao desenvolvimento dos deslocamentos fundamentais apresentados no capítulo 3, tem-se:

$$\begin{aligned} \check{w}_p^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-y_1 D_2 + D_1 - S_2}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_1}(y_1-y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) \right] \\ & + \left[\left(\frac{y_2 D_2 - D_1 + S_2}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\check{\phi}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)](y_1-y_2)} \left[-\cos(\sqrt{-y_1}r) + \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x-\hat{x}) \quad (5.69)$$

$$\check{w}_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)](y_1-y_2)} \left[-\cos(\sqrt{-y_1}r) + \cosh(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x-\hat{x}) \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \check{\phi}_m^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-[D_1-(P-K_2)]y_1 - S_1}{2D_2(D_1-p)\sqrt{-y_1}(y_1-y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_1}r) \right] \\ & + \left[\left(\frac{[D_1-(P-K_2)]y_2 + S_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

Os esforços fundamentais podem obtidos por analogias aos esforços das Eqs (5.59), (5.60), (5.61), (5.62), resultando em:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) = & \left[\frac{-(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](-D_2 y_1 + D_1 - S_2)}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right] \cos(\sqrt{-y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\ & \left[\frac{(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](D_2 y_2 - D_1 + S_2)}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right] \cos(\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{D_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) [\sqrt{-y_1} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1} r) - \sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r)] \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) = & \left[\frac{-S_1 D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_1} (y_1 - y_2)} \right] \operatorname{sen}(\sqrt{-y_1} r) \\ & + \left[\frac{S_1 D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \right] \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r) \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) = & \left[\frac{-y_1 [D_1 - (P - K_2)](D_1 - p) - S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right] \cos(\sqrt{-y_1} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \\ & + \left[\frac{y_2 [D_1 - (P - K_2)] + S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right] \cos(\sqrt{-y_2} r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Caso 2 - $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$

Aqui a solução proposta para Eq. (5.63) neste trabalho é:

$$\zeta = -\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{y_1} r)}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{y_1} (y_1 - y_2)} + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r)}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \quad (5.76)$$

Então, os deslocamentos fundamentais ficam:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) = & \left[\frac{-y_1 D_2 + D_1 - S_2}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{y_1} (y_1 - y_2)} \right] \operatorname{senh}(\sqrt{y_1} r) \\ & - \left[\frac{y_2 D_2 - D_1 + S_2}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \right] \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2} r) \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\check{\phi}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \left[-\cosh(\sqrt{y_1} r) + \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.78)$$

$$\check{w}_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \left[-\cosh(\sqrt{y_1} r) + \cos(\sqrt{-y_2} r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \check{\phi}_m^*(x, \hat{x}) &= \left[\left(\frac{-[D_1 - (P - K_2)]y_1 - S_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1} r) \right] \\ &+ \left[\left(\frac{[D_1 - (P - K_2)]y_2 + S_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

Já os esforços fundamentais são dados como:

$$\begin{aligned} \check{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) &= \left[\left(\frac{-(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](-D_2 y_1 + D_1 - S_2)}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1} r) \text{sgn}(x - \hat{x}) \right] \\ &+ \left[\left(\frac{(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](D_2 y_2 - D_1 + S_2)}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} r) \text{sgn}(x - \hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\check{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(-\frac{D_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{y_1} \text{senh}(\sqrt{y_1} r) + \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \check{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) &= \left[\left(\frac{-S_1 D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1} r) \right] \\ &+ \left[\left(\frac{S_1 D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} r) \right] \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \check{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) &= \left[\left(\frac{-y_1[D_1 - (P - K_2)] - S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1} r) \text{sgn}(x - \hat{x}) \right] \\ &+ \left[\left(\frac{y_2[D_1 - (P - K_2)] + S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} r) \text{sgn}(x - \hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (5.84)$$

Caso 3- Raízes (y_1 e y_2) complexas e conjugadas

Aqui a solução proposta da Eq. (5.63) é:

$$\zeta = -\frac{\text{sen}(i\sqrt{y_1}r)}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{y_1}(y_1-y_2)i} + \frac{\text{senh}(i\sqrt{-y_2}r)}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)i} \quad (5.85)$$

Resultando nos deslocamentos fundamentais dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-y_1D_2 + D_1 - S_2}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{y_1}(y_1-y_2)} \right) \text{sen}(i\sqrt{y_1}r) \right] \\ & + \left[\left(\frac{y_2D_2 - D_1 + S_2}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)} \right) \text{senh}(i\sqrt{-y_2}r) \right] \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) = \frac{D_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)](y_1-y_2)} \left[-\cos(i\sqrt{y_1}r) + \cosh(i\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x-\hat{x}) \quad (5.87)$$

$$\tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{D_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)](y_1-y_2)} \left[-\cos(i\sqrt{y_1}r) + \cosh(i\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x-\hat{x}) \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-[D_1-(P-K_2)]y_1 - S_1 + K_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{y_1}(y_1-y_2)} \right) \text{sen}(i\sqrt{y_1}r) \right] \\ & + \left[\left(\frac{[D_1-(P-K_2)]y_2 + S_1 - K_1}{2D_2[D_1-(P-K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1-y_2)} \right) \text{senh}(i\sqrt{-y_2}r) \right] \end{aligned} \quad (5.89)$$

E os esforços fundamentais escritos como:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-(D_1)^2 + [D_1-(P-K_2)](-D_2y_1i + D_1i - S_2i)}{2D_2[D_1-(P-K_2)](y_1-y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1}r) \text{sgn}(x-\hat{x}) \right] \\ & + \left[\left(\frac{(D_1)^2 + [D_1-(P-K_2)](D_2y_2i - D_1i + S_2i)}{2D_2[D_1-(P-K_2)](y_1-y_2)} \right) \cosh(\sqrt{-y_2}r) \text{sgn}(x-\hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) = \left(\frac{D_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \left[i\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}r) + i\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(i\sqrt{-y_2}r) \right] \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-S_1 D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{y_1} (y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}r) \right] \\ & + \left[\left(\frac{S_1 D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{-y_2}r) \right] \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) = & \left[\left(\frac{-y_1 i [D_1 - (P - K_2)] - S_1 i}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1}r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \right] \\ & + \left[\left(\frac{y_2 i [D_1 - (P - K_2)] + S_1 i}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(i\sqrt{-y_2}r) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (5.93)$$

Convém notar que para os problemas estático e dinâmico de Euler-Bernoulli e Timoshenko estático, as soluções fundamentais de vigas apoiadas em base elástica não poderiam ser aplicadas diretamente para os problemas de viga sem base elástica. O motivo dessa restrição era que a raiz y_1 era nula, o que promovia uma indeterminação no termo $\frac{\operatorname{Sen}(\sqrt{-y_1}r)}{\sqrt{-y_1}}$. No entanto, as soluções fundamentais da estabilidade dinâmica (isto é, $\omega > 0$) de vigas de Timoshenko com base elástica podem ser aplicadas diretamente no problema livre de base elástica, já que mesmo atribuindo $K_1 = 0$ e $K_2 = 0$ na Eq.(5.67), tem-se que $y_1 \neq 0$. Isto implica que y_1 pode ser negativa, positiva ou complexa, resultando na possibilidade das soluções fundamentais serem dadas nos três casos previamente discutidos.

5.3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL

Para obtenção das equações integrais do problema, aplica-se o TRP ao sistema de equações governantes do problema real ponderado pelas soluções fundamentais correspondentes, resultando em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} [D_1 - (K_2 - P)] \frac{d^2}{dx^2} - K_1 + S_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + S_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}^T \quad (5.94)$$

Ativando-se apenas a fonte em carga, $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ e $m_y^*(x, \hat{x}) = 0$, então a Eq.(5.94) fica:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} [D_1 - (K_2 - P)] \frac{d^2}{dx^2} - K_1 + S_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + S_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (5.95)$$

Por outro lado, se apenas a fonte em momento for ativada, $p_z^*(x, \hat{x}) = 0$ e $m_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$, a Eq.(5.94) resulta em:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} [D_1 - (K_2 - P)] \frac{d^2}{dx^2} - K_1 + S_1 & D_1 \frac{d}{dx} \\ -D_1 \frac{d}{dx} & D_2 \frac{d^2}{dx^2} - D_1 + S_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} dx = 0 \quad (5.96)$$

Após sucessivas integrações por partes em x da Eq. (5.95) e convenientes substituições, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) - \tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[\tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) - \tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) \tilde{\phi}(x) \right]_{x=0}^{x=L} \\ & + \int_0^L \left([D_1 - (P - K_2)] \tilde{w}_p^{**}(x, \hat{x}) + (-K_1 + S_1) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + D_1 \tilde{\phi}_p^{*'}(x, \hat{x}) \right) \tilde{w}(x) dx \\ & + \int_0^L \left[-D_1 \tilde{w}_p^{*'}(x, \hat{x}) + D_2 \tilde{\phi}_p^{**}(x, \hat{x}) - D_1 \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) + S_2 \tilde{\phi}_p^{*'}(x, \hat{x}) \right] \tilde{\phi}(x) dx = - \int_0^L \left[\tilde{p}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{m}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right] dx \end{aligned} \quad (5.97)$$

De acordo com a Eq. (5.52), a segunda parcela do integrando do primeiro membro da Eq. (5.97) é nula, enquanto da primeira parcela resulta:

$$\int_0^L \left([D_1 - (P - K_2)] \tilde{w}_p^{**}(x, \hat{x}) + (-K_1 + S_1) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + D_1 \tilde{\phi}_p^{**}(x, \hat{x}) \right) \tilde{w}(x) dx = - \int_0^L \tilde{w}(x) \delta(x, \hat{x}) dx \quad \text{que pelo efeito}$$

do filtro do delta de Dirac é igual a $-\tilde{w}(\hat{x})$. Assim, a partir da Eq. (5.97) obtém-se a equação integral dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\hat{x}) + \left[\tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) + \tilde{M}_{yp}^*(x, \hat{x}) \tilde{\phi}(x) \right]_{x=0}^{x=L} &= \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} \\ + \int_0^L \left[\tilde{p}_z(x) \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) + \tilde{m}_y(x) \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \right] dx & \end{aligned} \quad (5.98)$$

Procedendo de maneira análoga com a Eq. (5.96), obtém-se a equação integral das rotações das seções:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\hat{x}) + \left[\tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) \tilde{w}(x) + \tilde{M}_{ym}^*(x, \hat{x}) \tilde{\phi}(x) \right]_{x=0}^{x=L} &= \left[\tilde{V}_z(x) \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) + \tilde{M}_y(x) \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \right]_{x=0}^{x=L} \\ + \int_0^L \left[\tilde{p}_z(x) \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) + \tilde{m}_y(x) \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \right] dx & \end{aligned} \quad (5.99)$$

Escrevendo com notação matricial a Eq. (5.98) e Eq. (5.99), tem-se:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(\hat{x}) \\ \tilde{\phi}(\hat{x}) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{cc} \tilde{V}_{zp}^*(x, \hat{x}) & \tilde{M}_{yp}^* \\ \tilde{V}_{zm}^*(x, \hat{x}) & \tilde{M}_{ym}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{w}(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{array} \right\}_0^L &= \\ \left\{ \begin{array}{cc} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{V}_z(x) \\ \tilde{M}_y(x) \end{array} \right\}_0^L + \int_0^L \left\{ \begin{array}{cc} \tilde{w}_p^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_p^*(x, \hat{x}) \\ \tilde{w}_m^*(x, \hat{x}) & \tilde{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{array} \right\} dx & \end{aligned} \quad (5.100)$$

5.3.3 EQUAÇÃO ALGÉBRICA

A transição das equações integrais para as algébricas requer inicialmente a colocação da fonte de força e de momento, uma de cada vez, nas extremidades da barra, ou seja, na extremidade inicial quando $\hat{x} = \varepsilon$ e na extremidade final, quando $\hat{x} = L - \varepsilon$, implicando em $\varepsilon \rightarrow 0$ na Eq.(5.100). Em seguida, após o cálculo das integrais e limites, a transição para representação algébrica do efeito de flexão em y é finalizada podendo ser escrita como:

$$\{ \tilde{u} \} + [H] \{ \tilde{p} \} = [G] \{ \tilde{p} \} + \{ \tilde{f} \} \quad (5.101)$$

Onde $[H]$, $[G]$ são as matrizes de influência e $\{ \tilde{f} \}$ é o vetor de ações externas. $\{ \tilde{u} \}$ e $\{ \tilde{p} \}$ são os vetores de deslocamentos e esforços, vide Fig. 3.2, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{ \tilde{u} \} = [\tilde{w}_i \quad \tilde{\phi}_i \quad \tilde{w}_j \quad \tilde{\phi}_j]^T = [\tilde{w}(0) \quad \tilde{\phi}(0) \quad \tilde{w}(L) \quad \tilde{\phi}(L)]^T \quad (5.102)$$

$$\{ \tilde{p} \} = [\tilde{V}_{zi} \quad \tilde{M}_{yi} \quad \tilde{V}_{zj} \quad \tilde{M}_{yj}]^T = [\tilde{V}_z(0) \quad \tilde{M}_y(0) \quad \tilde{V}_z(L) \quad \tilde{M}_y(L)]^T \quad (5.103)$$

$$[H] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\tilde{V}_{zp}^*(0,0+\varepsilon) & -\tilde{M}_{yp}^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{V}_{zp}^*(L,0+\varepsilon) & \tilde{M}_{yp}^*(L,0+\varepsilon) \\ -\tilde{V}_{zm}^*(0,0+\varepsilon) & -\tilde{M}_{ym}^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{V}_{zm}^*(L,0+\varepsilon) & \tilde{M}_{ym}^*(L,0+\varepsilon) \\ -\tilde{V}_{zp}^*(0,L-\varepsilon) & -\tilde{M}_{yp}^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{V}_{zp}^*(L,L-\varepsilon) & \tilde{M}_{yp}^*(L,L-\varepsilon) \\ -\tilde{V}_{zm}^*(0,L-\varepsilon) & -\tilde{M}_{ym}^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{V}_{zm}^*(L,L-\varepsilon) & \tilde{M}_{ym}^*(L,L-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\tilde{w}_p^*(0,0+\varepsilon) & -\tilde{\phi}_p^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{w}_p^*(L,0+\varepsilon) & \tilde{\phi}_p^*(L,0+\varepsilon) \\ -\tilde{w}_m^*(0,0+\varepsilon) & -\tilde{\phi}_m^*(0,0+\varepsilon) & \tilde{w}_m^*(L,0+\varepsilon) & \tilde{\phi}_m^*(L,0+\varepsilon) \\ -\tilde{w}_p^*(0,L-\varepsilon) & -\tilde{\phi}_p^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{w}_p^*(L,L-\varepsilon) & \tilde{\phi}_p^*(L,L-\varepsilon) \\ -\tilde{w}_m^*(0,L-\varepsilon) & -\tilde{\phi}_m^*(0,L-\varepsilon) & \tilde{w}_m^*(L,L-\varepsilon) & \tilde{\phi}_m^*(L,L-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$\{ \tilde{f} \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L \begin{bmatrix} \tilde{w}_p^*(x,0+\varepsilon) & \tilde{\phi}_p^*(x,0+\varepsilon) \\ \tilde{w}_m^*(x,0+\varepsilon) & \tilde{\phi}_m^*(x,0+\varepsilon) \\ \tilde{w}_p^*(x,L-\varepsilon) & \tilde{\phi}_p^*(x,L-\varepsilon) \\ \tilde{w}_m^*(x,L-\varepsilon) & \tilde{\phi}_m^*(x,L-\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_z(x) \\ \tilde{m}_y(x) \end{Bmatrix} dx$$

Após o cálculo dos Elementos da Eq.(5.101), tem-se:

$$[G] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \tilde{\alpha}_3 & \tilde{\alpha}_4 \\ \tilde{\alpha}_1 & -\tilde{\alpha}_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\tilde{\alpha}_3 & \tilde{\alpha}_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_2 \\ 0 & 0 & -\tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_3 \\ -\tilde{\beta}_1 & -\tilde{\beta}_2 & 0 & 0 \\ -\tilde{\beta}_2 & -\tilde{\beta}_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Sempre que a análise de interesse não for a determinação das cargas de flambagem e/ou frequências naturais, o vetor de cargas {f} deverá ser calculado. Além disso, os valores finais de {f} dependem da função que interpola $\tilde{p}_z(x)$ e $\tilde{m}_y(x)$.

Caso 1- $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = \left[\left(\frac{-(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](-D_2 y_1 + D_1 - S_2)}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_1} L) \right] \\ + \left[\left(\frac{(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](D_2 y_2 - D_1 + S_2)}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{D_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{-y_1} \text{sen}(\sqrt{-y_1} L) - \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\left(\frac{-S_1 D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_1} (y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_1} L) \right] \\ + \left[\left(\frac{S_1 D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\alpha_4 = \left[\left(\frac{-y_1 [D_1 - (P - K_2)](D_1 - P) - S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_1} L) \right] \\ + \left[\left(\frac{y_2 [D_1 - (P - K_2)] + S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_1 = \left[\left(\frac{-y_1 D_2 + D_1 - S_2}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_1} (y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_1} L) \right] \\ + \left[\left(\frac{y_2 D_2 - D_1 + S_2}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2} (y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_2 = \frac{D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \left[-\cos(\sqrt{-y_1} L) + \cos(\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_3 = \left[\left(\frac{-[D_1 - (P - K_2)]y_1 - S_1}{2D_2(D_1 - p)\sqrt{-y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{[D_1 - (P - K_2)]y_2 + S_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 2- $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$

$$\alpha_1 = \left[\left(\frac{-(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](-D_2y_1 + D_1 - S_2)}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](D_2y_2 - D_1 + S_2)}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \left(-\frac{D_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \left[\sqrt{y_1} \text{senh}(\sqrt{y_1}L) + \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\left(\frac{-S_1D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{S_1D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \left[\left(\frac{-y_1[D_1 - (P - K_2)] - S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{y_1}L) \right] + \left[\left(\frac{y_2[D_1 - (P - K_2)] + S_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = - \left[\left(\frac{-y_1D_2 + D_1 - S_2}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \text{senh}(\sqrt{y_1}L) \right] \\ - \left[\left(\frac{y_2D_2 - D_1 + S_2}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \text{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_2 = \frac{D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \left[-\cosh(\sqrt{y_1}L) + \cos(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_3 = \left[\left(\frac{-[D_1 - (P - K_2)]y_1 - S_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{senh}(\sqrt{y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{[D_1 - (P - K_2)]y_2 + S_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

Caso 3- Raízes são complexas

$$\alpha_1 = \left[\left(\frac{-(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](-D_2 y_1 i + D_1 i - S_2 i)}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{(D_1)^2 + [D_1 - (P - K_2)](D_2 y_2 i - D_1 i + S_2 i)}{2D_2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{D_1}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \left[i\sqrt{y_1} \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) + i\sqrt{-y_2} \operatorname{sen}(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_3 = \left[\left(\frac{-S_1 D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{y_1}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{S_1 D_1}{2D_2[D_1 - (P - K_2)]\sqrt{-y_2}(y_1 - y_2)} \right) \operatorname{sen}(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\alpha_4 = \left[\left(\frac{-y_1 i [D_1 - (P - K_2)] - S_1 i}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cos(i\sqrt{y_1}L) \right] \\ + \left[\left(\frac{y_2 i [D_1 - (P - K_2)] + S_1 i}{2[D_1 - (P - K_2)](y_1 - y_2)} \right) \cosh(i\sqrt{-y_2}L) \right]$$

$$\beta_1 = \left[\left(\frac{-y_1 D_2 + D_1 - S_2}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{y_1 (y_1 - y_2)}} \right) \text{sen}(i\sqrt{y_1} L) \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{y_2 D_2 - D_1 + S_2}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2 (y_1 - y_2)}} \right) \text{senh}(i\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_2 = \frac{D_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] (y_1 - y_2)} \left[-\cos(i\sqrt{y_1} L) + \cosh(i\sqrt{-y_2} L) \right]$$

$$\beta_3 = \left[\left(\frac{-[D_1 - (P - K_2)] y_1 - S_1 + K_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{y_1 (y_1 - y_2)}} \right) \text{sen}(i\sqrt{y_1} L) \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{[D_1 - (P - K_2)] y_2 + S_1 - K_1}{2D_2 [D_1 - (P - K_2)] \sqrt{-y_2 (y_1 - y_2)}} \right) \text{senh}(i\sqrt{-y_2} L) \right]$$

CAPÍTULO 6

TRANSFORMAÇÕES E OPERAÇÕES NO SISTEMA ALGÉBRICO

6.1. INTRODUÇÃO

A unificação dos sistemas de coordenadas locais de cada barra que aqui é desenvolvida, tem por objetivo principal possibilitar a adequação rápida e segura das equações e dos resultados obtidos na análise de problemas em que se verifique a necessidade de reescrevê-las levando em conta outros referenciais.

Nesta dissertação, a utilização de um sistema de coordenadas unificado é decorrente da ideia de utilização das matrizes para mudança de referencial de aplicação decorrente do MEF, na solução desses mesmos problemas de estabilidade, nos quais se aplica o MEC. Além disso, descontinuidades devido às cargas axiais no domínio, mudança abrupta de seção, presença de apoios intermediários e outros serão tratados nesse capítulo.

6.2. UNIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Convém notar que nos sistemas algébricos do MEC discutidos nos capítulos anteriores as orientações dos deslocamentos não coincidem totalmente com as dos esforços, vide Figs 3.1 e 3.2. Para o caso do modelo de Euler, a unificação se dá invertendo o sentido da força cortante no nó inicial ($\bar{V}_i = -V_i$) e o momento fletor do nó final do elemento de contorno ($\bar{M}_j = -M_j$) de forma que a Eq. (3.43) ou a Eq. (5.51) podem ser reescritas como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \frac{dw_i}{dx} \\ w_j \\ \frac{dw_j}{dx} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \frac{dw_i}{dx} \\ w_j \\ \frac{dw_j}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ \beta_2 & -\beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \bar{V}_{zi} \\ M_{yi} \\ V_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_{zi} \\ f_{z,\hat{x}i} \\ f_{zj} \\ f_{z,\hat{x}j} \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

Já o sistema de graus de liberdade no modelo de Euler unificado são mostrados na

Fig. 6.1

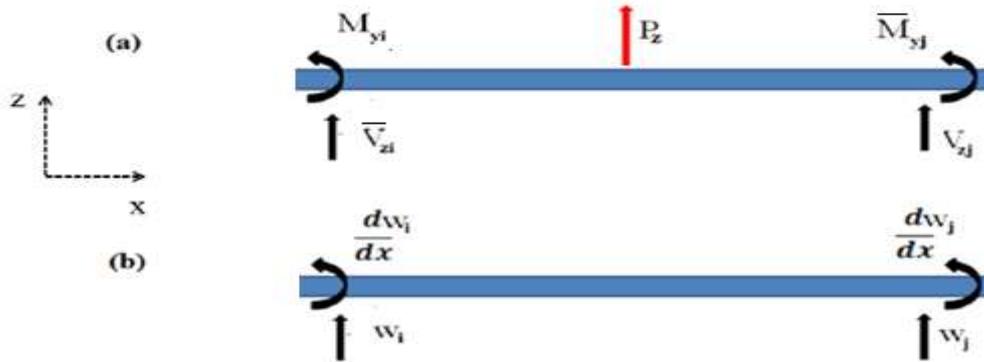


Figura 6.1 Sistema unificado no modelo de Euler

O sistema algébrico para o problema de Timoshenko pode ser unificado de forma análoga, contudo as correções de direção são feitas apenas no primeiro nó ($\bar{V}_i = -V_i$) e ($\bar{M}_i = -M_i$) de forma que as Eqs. (3.101) ou (5.96) passam a ser reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ V_{zj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_z(0) \\ \hat{f}_\phi(0) \\ f_z(L) \\ \hat{f}_\phi(L) \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Já na Fig. 6.2 estão indicados os graus de liberdade unificados no modelo de Timoshenko.

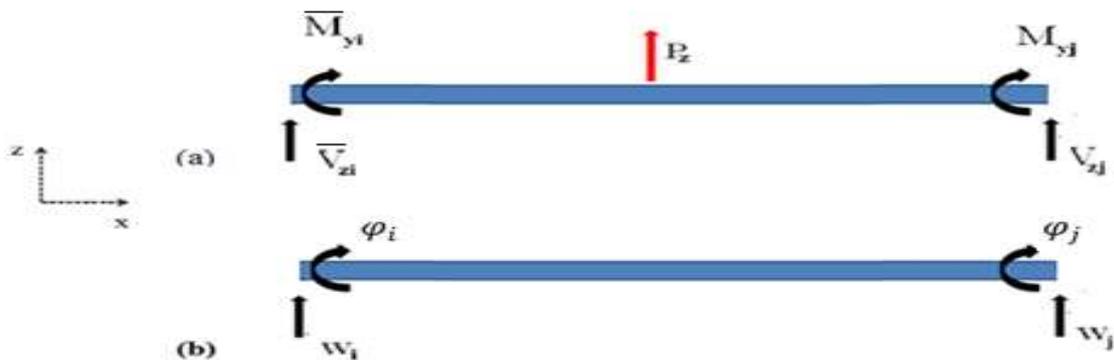


Figura 6.2 Sistema unificado no modelo de Timoshenko

6.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Nessa seção é discutida a imposição condições de contorno com vínculos rígidos ou elásticos em vigas com domínio homogêneo. A forma geral da Eq. (6.1) no modelo de Euler, ou Eq. (6.2) no modelo de Timoshenko pode ser dada por:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{13} & G_{14} \\ 0 & 0 & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

A representação dos vetores de deslocamento e de forças da Eq. (6.3) para os modelos de Euler e Timoshenko estão indicados respectivamente nas Figs. (6.3a-6.3b)

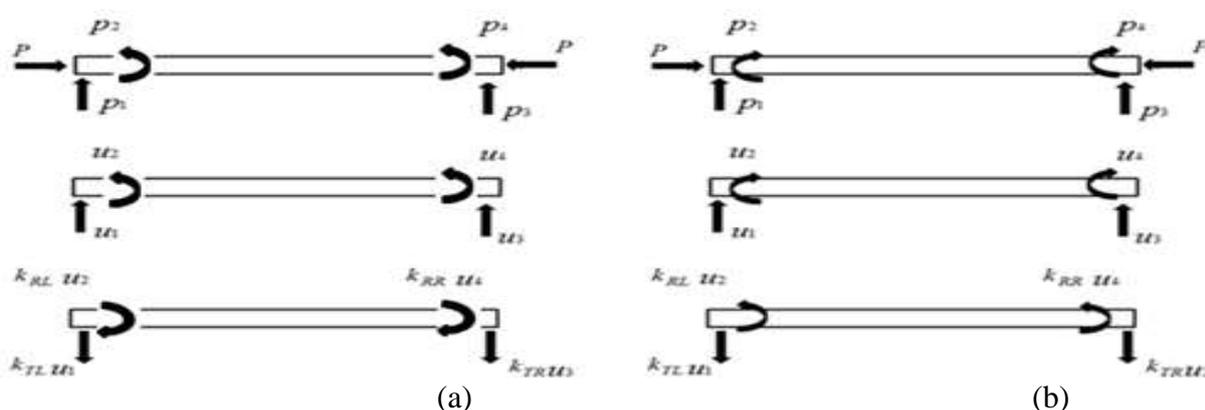


Figura 6.3 : (a) Variáveis no contorno para o modelo de Euler (b) Variáveis no contorno para o modelo de Timoshenko

O sistema algébrico na Eq. (6.3) não pode ser resolvido se não houver a prescrição de um ou mais apoios rígidos ou elásticos. Assim, utilizando-se uma estratégia apropriada para aplicação das condições de contorno, tanto na matriz de influência [R] quanto no vetor {p}, pode-se formar a partir da Eq. (6.3) a seguinte equação:

$$[R] \{x\} = \{p'\} \quad (6.4)$$

Onde:

{x} é o vetor das incógnitas e {p'} = {p}

Neste trabalho são apresentadas diferentes estratégias para formação de $[R]$ e $\{p\}$, dependendo se a restrição em questão for rígida ou elástica.

Se for considerado apenas uma restrição (suporte de rotação rígida na extremidade esquerda) associado com \bar{u}_2 , então os valores restantes de $\{p\}$ são prescritos. Uma estratégia para formar $[R]$ e $\{p\}$ da Eq. (6.3) é permutar os valores associados da terceira colunas de $[H]$ e $[G]$. A terceira linhas dos vetores $\{u\}$ e $\{p\}$ devem ser permutados sem alteração de sinais. Assim, após estas operações com matrizes, os vetores da Eq. (6.4) podem ser escritos como segue:

$$[R] = \begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & -G_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & -G_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & -G_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} G_{11} & -H_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & -H_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & -H_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & -H_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

Para mais restrições específicas, um procedimento análogo pode ser utilizado para formar a Eq. (6.4).

Se for considerada apenas uma restrição elástica na extremidade esquerda associada com u_2 , uma reação elástica agindo em direção oposta a u_2 é gerada, resultando em:

$$p_2 = M_i = -k_{RL} u_2 \quad (6.7)$$

Onde:

k_{RL} é a constante de mola de rotação na extremidade esquerda da viga

Por outro lado, são exibidos na Fig. 6.4. de modo mais geral, a viga com presença de apoios elásticos nas extremidade, deslocamentos, esforços e reações elásticas.

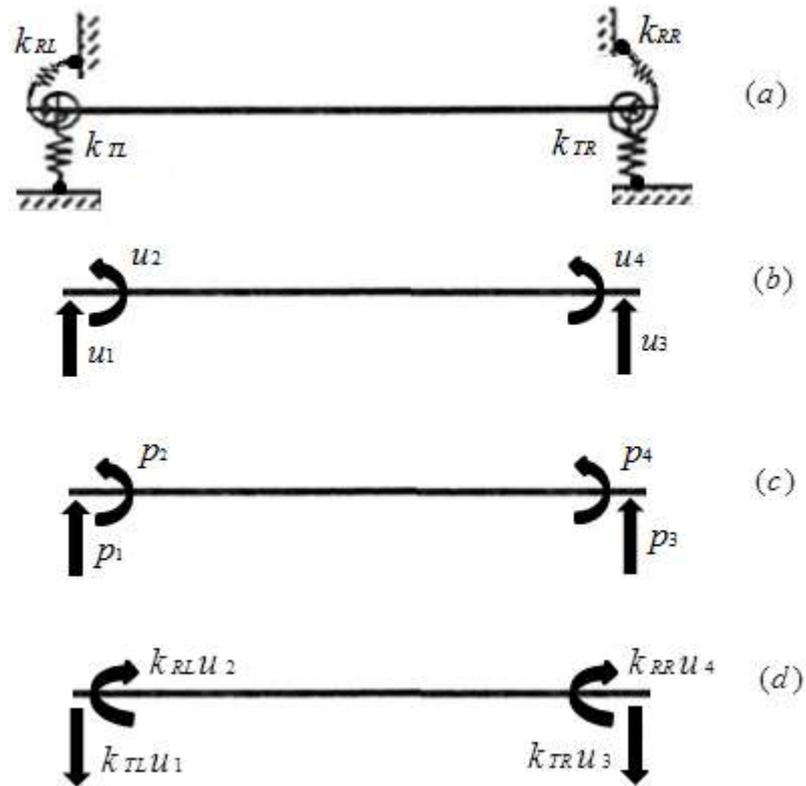


Figura 6.4- (a) Apoios elásticos, (b) Deslocamentos, (c) Esforços, (d) Reações elásticas.

Substituindo a Eq. (6.7) na Eq. (6.3) e considerando-se todas as forças de fronteira prescritas, então $\{x\} = \{u\}$, a matriz $[R]$ e vetor $\{p\}$ da Eq. (6.4) são:

$$[R] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} + k_{RL}G_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} + k_{RL}G_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} + k_{RL}G_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} + k_{RL}G_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

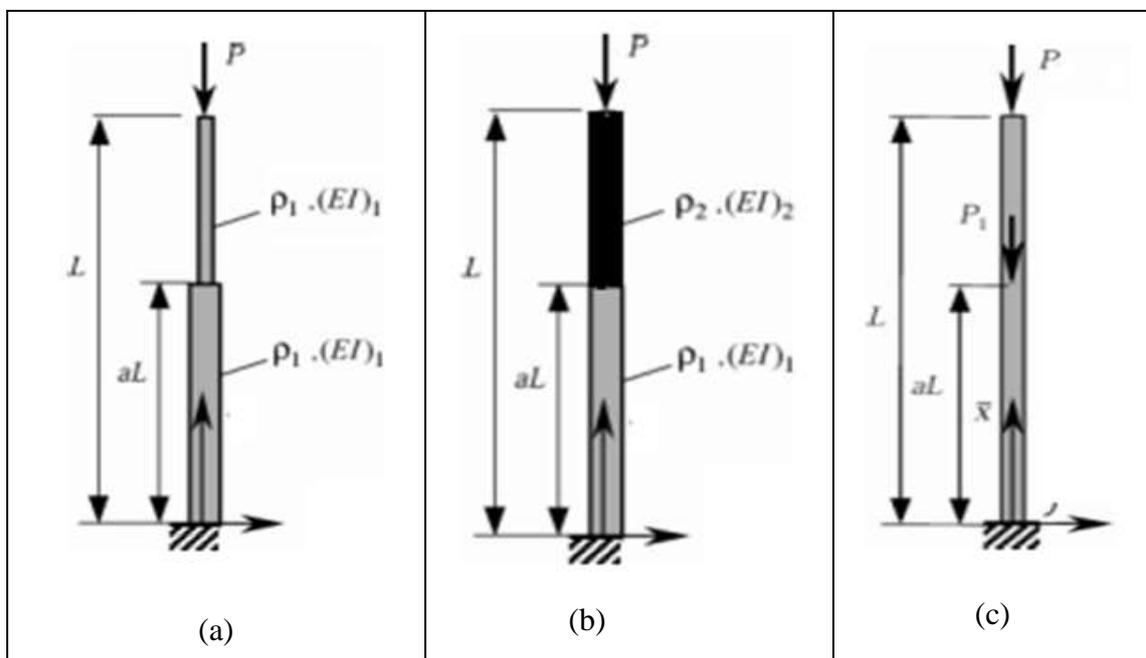
$$\{p\} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

Procedendo de forma análoga e independente para u_4 , $[R]$ pode ser formada substituindo a quarta coluna de $[H]$ na Eq. (6.3) por $(H_{i4} + K_{RR}G_{i4})$. Para suporte elástico na u_1 e u_3 as respectivas colunas devem ser trocadas por $(H_{i1} + K_{RR}G_{i4})$ e $(H_{i3} + K_{TR}G_{i3})$. Além disso, o vetor $\{p\}$ deve ser formado de modo análogo Eq.(6.9). K_{TL} e K_{TR} são os coeficientes de mola na extremidade esquerda e à direita.

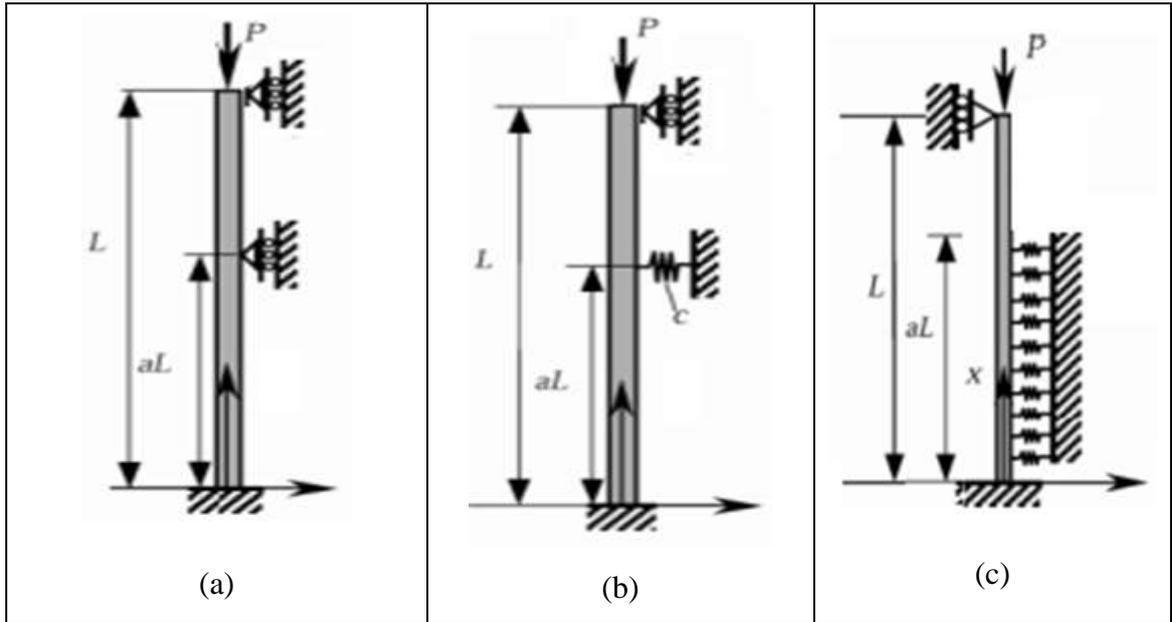
6.4 DESCONTINUIDADES NO DOMÍNIO

Existem alguns casos que podem causar descontinuidades no domínio da viga:

- Mudança abrupta da seção transversal(Descontinuidade geométrica, vide Fig. 6.5a);
- Não homogeneidade (Descontinuidade física, vide Fig. 6.5b);
- Força axial no domínio (Descontinuidade de força normal, vide Fig. 6.5c);
- Apoio rígido/elástico intermediário(Descontinuidade de força cortante e momento fletor, vide Fig. 6.6a);
- Não homogeneidade de base elástica(Descontinuidade física, vide Fig. 6.6b).



Figuras 6.5- Descontinuidades no domínio: (a) Mudança abrupta da seção transversal; (b) Não homogeneidade física; (c) Descontinuidade de força normal



Figuras 6.6- Descontinuidades no domínio: (a) Descontinuidade de força cortante; (b) momento fletor; (c) Descontinuidade da base elástica

Devido a estas descontinuidades, as soluções fundamentais não podem ser aplicadas diretamente. Assim, é necessário subdividir o domínio da viga em regiões com propriedades homogêneas. Em princípio as descontinuidades de cada um dos problemas mostradas na Fig. 6.7. podem ocorrer em seções transversais distintas. Aqui, por uma questão de concisão na explicação, admite-se que todas ocorram em uma única. Assim, o domínio é dividido em dois trechos e elementos de contorno são discretizados neles conforme indicado na Fig. 6.8.

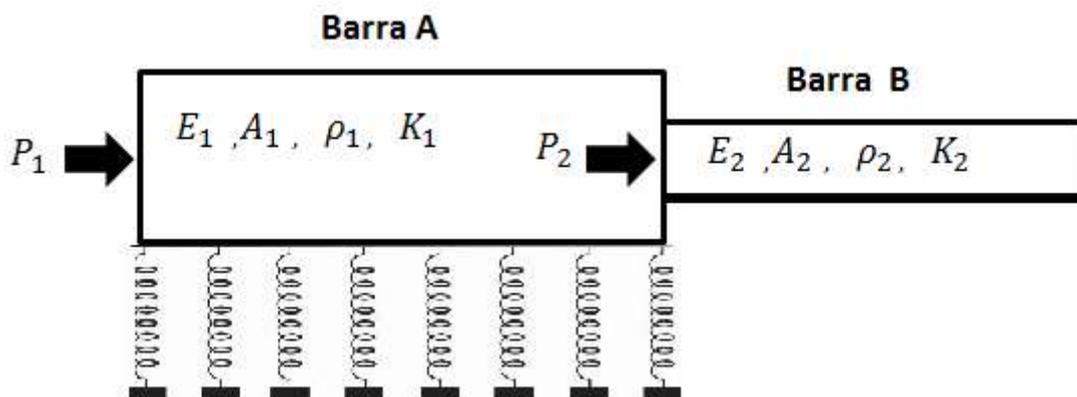


Figura 6.7 Descontinuidade geométrica na viga

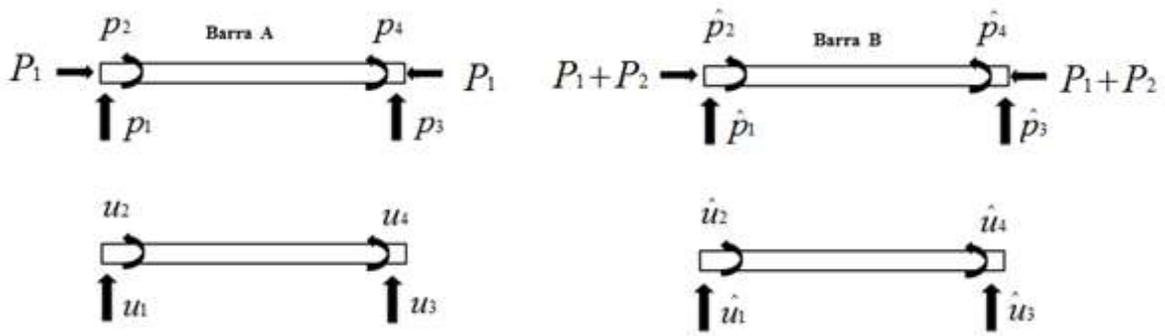


Figura 6.8. Discretização da barra de Euler com representação dos esforços e deslocamentos

Atribuindo-se as propriedades físicas e geométricas da barra A na Eq.(6.1), com carga axial $P = P_1$, sua representação algébrica fica:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{13} & G_{14} \\ 0 & 0 & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

Já para a barra B, após a inserção de suas propriedades físicas e geométricas, inclusive a carga axial $P = P_1 + P_2$, a representação integral fica:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} & \hat{H}_{13} & \hat{H}_{14} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} & \hat{H}_{23} & \hat{H}_{24} \\ \hat{H}_{31} & \hat{H}_{32} & \hat{H}_{33} & \hat{H}_{34} \\ \hat{H}_{41} & \hat{H}_{42} & \hat{H}_{43} & \hat{H}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{G}_{13} & \hat{G}_{14} \\ 0 & 0 & \hat{G}_{23} & \hat{G}_{24} \\ \hat{G}_{31} & \hat{G}_{32} & 0 & 0 \\ \hat{G}_{41} & \hat{G}_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

As Eqs. (6.10) e (6.11) podem ainda ser escritas em uma forma compacta como:

$$\begin{aligned} [H_{11}]\{U_1\} + [H_{12}]\{U_2\} &= [G_{11}]\{P_1\} + [G_{12}]\{P_2\} \\ [H_{21}]\{U_1\} + [H_{22}]\{U_2\} &= [G_{21}]\{P_1\} + [G_{22}]\{P_2\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Onde:

$$[H_{11}] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad [G_{11}] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad \{U_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \{P_1\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$[H_{12}] = \begin{bmatrix} H_{13} & H_{14} \\ H_{23} & H_{24} \end{bmatrix}, \quad [G_{12}] = \begin{bmatrix} G_{13} & G_{14} \\ G_{23} & G_{24} \end{bmatrix}, \quad \{U_2\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad \{P_2\} = \begin{Bmatrix} p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$$

$$[H_{21}] = \begin{bmatrix} H_{31} & H_{32} \\ H_{41} & H_{42} \end{bmatrix}, \quad [G_{21}] = \begin{bmatrix} G_{31} & G_{32} \\ G_{41} & G_{42} \end{bmatrix}$$

$$[H_{22}] = \begin{bmatrix} H_{33} & H_{34} \\ H_{43} & H_{44} \end{bmatrix}, \quad [G_{22}] = \begin{bmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{H}_{11}]\{\hat{U}_1\} + [\hat{H}_{12}]\{\hat{U}_2\} = [\hat{G}_{11}]\{\hat{P}_1\} + [\hat{G}_{12}]\{\hat{P}_2\}$$

$$[\hat{H}_{21}]\{\hat{U}_1\} + [\hat{H}_{22}]\{\hat{U}_2\} = [\hat{G}_{21}]\{\hat{P}_1\} + [\hat{G}_{22}]\{\hat{P}_2\}$$

(6.13)

Onde:

$$[\hat{H}_{11}] = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix}, \quad [\hat{G}_{11}] = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}, \quad \{\hat{U}_1\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{P}_1\} = \begin{Bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{Bmatrix}$$

$$[H_{12}] = \begin{bmatrix} H_{13} & H_{14} \\ H_{23} & H_{24} \end{bmatrix}, \quad [\hat{G}_{12}] = \begin{bmatrix} \hat{G}_{13} & \hat{G}_{14} \\ \hat{G}_{23} & \hat{G}_{24} \end{bmatrix}, \quad \{\hat{U}_2\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{P}_2\} = \begin{Bmatrix} \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \end{Bmatrix}$$

$$[\hat{H}_{21}] = \begin{bmatrix} \hat{H}_{31} & \hat{H}_{32} \\ \hat{H}_{41} & \hat{H}_{42} \end{bmatrix}, \quad [\hat{G}_{21}] = \begin{bmatrix} \hat{G}_{31} & \hat{G}_{32} \\ \hat{G}_{41} & \hat{G}_{42} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{H}_{22}] = \begin{bmatrix} \hat{H}_{33} & \hat{H}_{34} \\ \hat{H}_{43} & \hat{H}_{44} \end{bmatrix}, \quad [G_{22}] = \begin{bmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento na interface de contato das barras e impondo as condições de equilíbrio, tem-se que:

$$\{U_2\} = \{\hat{U}_1\} \tag{6.14}$$

$$\{P_2\} + \{\hat{P}_1\} = 0 \tag{6.15}$$

Onde:

$\{P_2\}$ e $\{\hat{P}_1\}$ são os vetores que contém os esforços nas extremidades das barras em contato.

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Eq. (6.14), e as condições de equilíbrio, conforme a Eq. (6.15), nas representações algébricas indicadas nas Eq. (6.10) e Eq. (6.11), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [0] & [0] & [-G_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & [0] & [0] & [-G_{22}] \\ [0] & [\hat{H}_{21}] & [\hat{H}_{22}] & [-\hat{G}_{21}] & [0] \\ [0] & [\hat{H}_{11}] & [\hat{H}_{12}] & [-\hat{G}_{11}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{\hat{U}_2\} \\ \{\hat{P}_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G_{21}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\hat{G}_{22}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\hat{G}_{12}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_2\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

No caso de apoio elástico no domínio, tem-se que a equação de equilíbrio no nó de interface das barras, vide Fig. 6.9 a Eq. (6.15), deve ser alterada para:

$$\{P_2\} + \{\hat{P}_1\} + [K]\{U_2\} = \{0\} \quad (6.17)$$

Onde:

$[K] = \begin{Bmatrix} K_{TA} \\ K_{DA} \end{Bmatrix}$ são as constantes de mola translacional e rotacional do apoio.

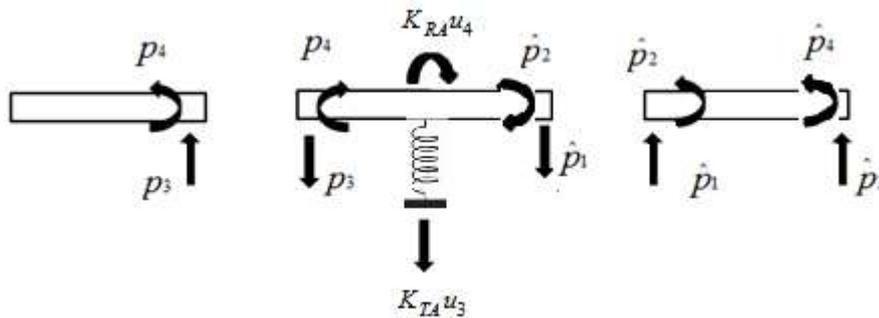


Figura 6.9 Apoio elástico no domínio da barra de Euler-Bernoulli

No caso da viga de Timoshenko, apenas os sentidos dos momentos fletores devem ser invertidos na Fig. 6.9. No entanto a relação da Eq. (6.17) é preservada já que o sentido das rotações em Timoshenko tem sentido contrário aos de Euler-Bernoulli.

Da substituição da Eq. (6.17) na Eq. (6.35), tem-se:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [0] & [0] & [-G_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & [0] & [0] & [-G_{22}] \\ [0] & [\hat{H}_{21}] & [\hat{H}_{22}] & [-\hat{G}_{21}] & [0] \\ [0] & [\hat{H}_{11}] & [\hat{H}_{12}] & [-\hat{G}_{11}] & [0] \\ [0] & [K] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{\hat{U}_2\} \\ \{\hat{P}_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G_{21}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\hat{G}_{22}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\hat{G}_{12}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{\hat{P}_2\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

No caso de apoio rígido no domínio, adaptações adicionais devem ser feitas em (6.16). Se ambos apoios translacional e rotacional forem rígidos, o sistema (6.16) fica desacoplada de forma que cada barra pode ser resolvida independentemente isto é:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [-G_{12}] \\ [H_{21}] & [-G_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] \\ [G_{21}] \end{bmatrix} \{P_1\} \quad (6.19)$$

$$\begin{bmatrix} [\hat{H}_{22}] & [-\hat{G}_{21}] \\ [\hat{H}_{12}] & [-\hat{G}_{11}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{U}_2\} \\ \{\hat{P}_1\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{G}_{22}] \\ [\hat{G}_{12}] \end{bmatrix} \{\hat{P}_2\} \quad (6.20)$$

Agora, quando apenas um dos graus de liberdade no domínio for admitido rígido, algumas operações matemáticas devem ser feitas nos sistemas (6.10) e (6.11). Por concisão, será apresentado apenas o caso de apoio rígido inibindo o deslocamento transversal. Assim, deve-se impor a condição de $u_3 = 0$ na Eq. (6.10) fica:

$$H_{11}u_1 + H_{12}u_2 + H_{14}u_4 = G_{13}p_3 + G_{14}p_4 \quad (6.21)$$

$$H_{21}u_1 + H_{22}u_2 + H_{24}u_4 = G_{23}p_3 + G_{24}p_4 \quad (6.22)$$

$$H_{31}u_1 + H_{32}u_2 + H_{34}u_4 = G_{31}p_1 + G_{32}p_2 \quad (6.23)$$

$$H_{41}u_1 + H_{42}u_2 + H_{44}u_4 = G_{41}p_1 + G_{42}p_2 \quad (6.24)$$

Isolando-se p_3 na Eq. (6.21) tem-se que:

$$p_3 = \frac{1}{G_{13}} [H_{11}u_1 + H_{12}u_2 + H_{14}u_4 - G_{14}p_4] \quad (6.25)$$

Da substituição da Eq. (6.25) na Eq. (6.22), o sistema formado pelas Eqs. (6.22), (6.23) e (6.24) fica:

$$\left[H_{21} - \frac{H_{11}G_{23}}{G_{13}} \right] u_1 + \left[H_{22} - \frac{H_{12}G_{23}}{G_{13}} \right] u_2 + \left[H_{24} - \frac{H_{14}G_{23}}{G_{13}} \right] u_4 = \left[G_{24} - \frac{H_{23}G_{14}}{G_{13}} \right] p_4 \quad (6.26)$$

$$H_{31}u_1 + H_{32}u_2 + H_{34}u_4 = G_{31}p_1 + G_{32}p_2 \quad (6.27)$$

$$H_{41}u_1 + H_{42}u_2 + H_{44}u_4 = G_{41}p_1 + G_{42}p_2 \quad (6.28)$$

Onde o sistema formado pelas Eqs (6.26), (6.27) e (6.28) na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ H_{31} & H_{32} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 \\ G_{31} & G_{32} & 0 \\ G_{41} & G_{42} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

Onde:

$$\alpha_1 = \left[H_{21} - \frac{H_{11}G_{23}}{G_{13}} \right], \quad \beta_1 = \left[G_{24} - \frac{H_{23}G_{14}}{G_{13}} \right]$$

$$\alpha_2 = \left[H_{22} - \frac{H_{12}G_{23}}{G_{13}} \right]$$

$$\alpha_3 = \left[H_{24} - \frac{H_{14}G_{23}}{G_{13}} \right]$$

Aplicando um procedimento análogo ao anterior na Eq. (6.11), com a condição $\hat{u}_1 = 0$, obtém-se :

$$\hat{H}_{12}\hat{u}_2 + \hat{H}_{13}\hat{u}_3 + \hat{H}_{14}\hat{u}_4 = \hat{G}_{13}\hat{p}_3 + \hat{G}_{14}\hat{p}_4 \quad (6.31)$$

$$\hat{H}_{22}\hat{u}_2 + \hat{H}_{23}\hat{u}_3 + \hat{H}_{24}\hat{u}_4 = \hat{G}_{23}\hat{p}_3 + \hat{G}_{24}\hat{p}_4 \quad (6.32)$$

$$\hat{H}_{32}\hat{u}_2 + \hat{H}_{33}\hat{u}_3 + \hat{H}_{34}\hat{u}_4 = \hat{G}_{31}\hat{p}_1 + \hat{G}_{32}\hat{p}_2 \quad (6.33)$$

$$\hat{H}_{42}\hat{u}_2 + \hat{H}_{43}\hat{u}_3 + \hat{H}_{44}\hat{u}_4 = \hat{G}_{41}\hat{p}_1 + \hat{G}_{42}\hat{p}_2 \quad (6.34)$$

Isolando-se \hat{p}_1 na Eq. (6.33), tem-se:

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{\hat{G}_{31}} \left[\hat{H}_{32}\hat{u}_2 + \hat{H}_{33}\hat{u}_3 + \hat{H}_{34}\hat{u}_4 - \hat{G}_{32}\hat{p}_2 \right] \quad (6.35)$$

Substituindo-se a Eq. (6.35) na Eq. (6.34), o sistema formado pelas Eqs. (6.31), (6.32) e (6.34) fica:

$$\left[\hat{H}_{42} - \frac{\hat{H}_{32}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{31}} \right] \hat{u}_2 + \left[\hat{H}_{43} - \frac{\hat{H}_{33}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{31}} \right] \hat{u}_3 + \left[\hat{H}_{44} - \frac{\hat{H}_{34}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{31}} \right] \hat{u}_4 = \left[\hat{G}_{42} - \frac{\hat{G}_{32}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{31}} \right] \hat{p}_2 \quad (6.36)$$

$$\hat{H}_{12}\hat{u}_2 + \hat{H}_{13}\hat{u}_3 + \hat{H}_{14}\hat{u}_4 = \hat{G}_{13}\hat{p}_3 + \hat{G}_{14}\hat{p}_4 \quad (6.37)$$

$$\hat{H}_{22}\hat{u}_2 + \hat{H}_{23}\hat{u}_3 + \hat{H}_{24}\hat{u}_4 = \hat{G}_{23}\hat{p}_3 + \hat{G}_{24}\hat{p}_4 \quad (6.38)$$

De forma que o sistema formado pelas Eqs. (6.36), (6.37) e (6.38), na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 \\ \hat{H}_{12} & \hat{H}_{13} & \hat{H}_{14} \\ \hat{H}_{22} & \hat{H}_{23} & \hat{H}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{G}_{13} & \hat{G}_{14} \\ 0 & \hat{G}_{23} & \hat{G}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_3 \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

Onde:

$$\hat{\alpha}_1 = \left[\hat{H}_{42} - \frac{\hat{H}_{32}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{31}} \right], \quad \hat{\beta}_1 = \left[\hat{G}_{42} - \frac{\hat{G}_{32}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{13}} \right]$$

$$\hat{\alpha}_2 = \left[\hat{H}_{43} - \frac{\hat{H}_{33}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{13}} \right]$$

$$\hat{\alpha}_3 = \left[\hat{H}_{44} - \frac{\hat{H}_{34}\hat{G}_{41}}{\hat{G}_{13}} \right]$$

Finalmente, para montar a matriz de influência das incógnitas impõe-se condições de compatibilidade de rotações na interface das barras $u_4 = \hat{u}_2$ e equações de equilíbrio e $p_4 + \hat{p}_2 = 0$ nas Eq.(6.30) e Eq. (6.39), resultando em:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 \\ H_{31} & H_{32} & H_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_{12} & 0 & \hat{H}_{13} & \hat{H}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_{22} & 0 & \hat{H}_{23} & \hat{H}_{24} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_1 & 0 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & -\hat{\beta}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{p}_2 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{G}_{13} & \hat{G}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{G}_{23} & \hat{G}_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

6.5. RESOLUÇÃO DO SISTEMA ALGÉBRICO

Dependendo do tipo de problema a ser analisado, duas estratégias de solução podem ser aplicadas na Eq. (6.4). Se o interesse é a determinação dos campos de deslocamento, esforços na viga fora da situação de instabilidade estática ou dinâmica, então basta aplicar um método de solução de sistema tais como: eliminação de Gauss. Nesse caso é necessário a construção tanto da matriz [R] quanto do vetor independente {p'}. Por outro lado, se o interesse for a determinação dos campos que causam instabilidade no sistema (cargas de flambagem, frequências naturais) apenas o comportamento do determinante da matriz [R] requer que seja investigado, dispensando a formação do vetor independente. Mais especificamente, as instabilidades serão caracterizadas quando o determinante de [R] for nulo. Convém notar que essa matriz [R] é dependente das cargas axiais e/ou das frequências que a estrutura é excitada, de forma que

é necessário utilizar um algoritmo para encontrar quais os valores desses campos que tornam o determinante de $[R]$ nulo. Existem vários algoritmos disponíveis na literatura para esse fim. Um deles é o método da posição falsa HAMIMID et al. (2010), que procura iterativamente em um dado intervalo de valores previamente informados, se há algum ponto em que o determinante muda de sinal. Se houver, esse caracteriza o determinante de $[R]$ nulo. Além disso, uma outra maneira de se fazer a investigação do determinante é por varredura, onde estabelece-se um ponto de partida para carga ou frequência, um acréscimo desses campos e o número de iterações e monitora-se o valor do determinante para cada iteração.

Convém notar, que o método da posição falsa é mais eficaz que o da varredura, já que não se tem um acréscimo previamente estabelecido. No entanto, nos casos em que o determinante for estritamente positivo ou estritamente negativo o método da posição falsa falhará, já que não encontrará mudanças de sinais no intervalo analisado. Nesse caso, o método da varredura é recomendado.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados das análises estáticas e dinâmicas de vigas submetidas a carregamentos axiais. Para os cálculos usados no desenvolvimento dos exemplos foram usados o fator de forma $\kappa = \frac{5}{6}$, exceto nos casos devidamente informados.

EXEMPLO 1: Cargas críticas de vigas com diversas condições de contorno

Seja uma viga de seção retangular de comprimento 10m, largura 0,12m e altura 1m. As propriedades do material utilizadas são: $E=13\text{Pa}$; $G=5\text{Pa}$ e $\nu=0,3$. Nas Tabs. 7 e 7.1 são mostradas respectivamente as cinco primeiras cargas críticas de flambagem para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko para diferentes condições de contorno. Os resultados obtidos com o MEC são comparados com as soluções analíticas exibidas na Tab. 7.2 em função do modo de flambagem (n). As representações das condições de contorno são mostradas nas tabelas como Engastado-Engastado(E-E), Engastado-Livre(E-L), Engastado-Deslizante (E-D) e Apoiado –Apoiado(A-A)

Tabela 7 - Cargas críticas de flambagem $P_c (10^2 N)$

n	Euler-Bernoulli L/h=10							
	E-E		E-L		E-D		A -A	
	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC
1	5,1321	5,1321	0,3207	0,3207	1,2830	1,2830	1,2830	1,2830
2	20,5287	20,5287	2,8868	2,8868	11,5474	11,5474	5,1321	5,1321
3	46,1897	46,1897	8,0190	8,0190	32,0762	32,0762	11,5474	11,5474
4	82,1151	82,1151	15,7173	15,7173	62,8693	62,8693	20,5287	20,5287
5	128,3048	128,3048	25,9817	25,9817	103,9269	103,9269	32,0762	32,0762

Tabela 7.1 Cargas críticas de flambagem P_c ($10^2 N$)

n	Timoshenko L/h=10							
	E-E		E-L		E-D		A-A	
	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC
1	4,6542	4,6542	0,3187	0,3187	1,2509	1,2509	1,25093	1,2509
2	14,5517	14,5517	2,7292	2,7292	9,3802	9,3802	4,65427	4,6542
3	24,0050	24,0050	6,9103	6,9103	19,5374	19,5374	9,38022	9,3802
4	31,0693	31,0693	11,957	11,9571	27,8443	27,8443	14,55178	14,551
5	35,9687	35,9687	17,095	17,0950	33,7494	33,7494	19,5374	19,537

Tabela 7.2 Soluções analíticas de cargas críticas em função do modo de flambagem

	E-L	A-A	E -E	E-D
Euler	$\frac{\pi^2 EI(2n-1)^2}{4L^2}$	$\frac{\pi^2 EIn^2}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EIn^2}{L^2}$	$\frac{\pi^2 EI(2n-1)^2}{L^2}$
Timo	$\frac{\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4L^2}}{\frac{1}{EI} + \frac{\pi^2}{4L^2 \kappa GA} (2n-1)^2}$	$\frac{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}}{\frac{1}{EI} + \frac{\pi^2}{L^2 \kappa GA} n^2}$	$\frac{\frac{4\pi^2 n^2}{L^2}}{\frac{1}{EI} + \frac{4\pi^2}{L^2 \kappa GA} n^2}$	$\frac{\frac{\pi^2(2n-1)^2}{L^2}}{\frac{1}{EI} + \frac{\pi^2}{L^2 \kappa GA} (2n-1)^2}$

Convém notar que há boa concordância entre as respostas do MEC e a exata conforme indicado nas Tabs. 7 e 7.1.

EXEMPLO 2: Parâmetros de Cargas críticas em vigas em balanço e em função da razão L/h

Neste exemplo são comparados parâmetros de cargas críticas de flambagem de Euler-Bernoulli com os de Timoshenko para vigas em balanço. Os resultados são dados em função de um parâmetro de flambagem B e as repostas do MEC são comparados com as soluções analíticas YOKOYAMA(1988) exibidas na Tab. 7.3. O parâmetro B é dado na Eq. (7.1).

Tabela 7.3 Parâmetro de carga crítica de flambagem (B)

n	λ	5	10	15	Euler
1	Exato	2,463	2,466	2,467	2,467
	MEC	2,462	2,466	2,467	2,467
2	Exato	21,819	22,108	22,163	22,206
	MEC	21,821	22,108	22,163	22,206
3	Exato	58,784	60,933	61,349	61,685
	MEC	58,784	60,933	61,349	61,685
4	Exato	110,240	118,048	119,617	120,902
	MEC	110,239	118,048	119,617	120,902
5	Exato	172,309	192,178	196,371	199,859
	MEC	172,309	192,177	196,370	199,859

$$B = \frac{P_{crit} L^2}{EI} \quad (7.1)$$

$$\lambda = \frac{L}{h} \quad (7.2)$$

Convém notar que para relações menores da relação vão-altura, há uma maior diferença entre o modelo de Timoshenko e Euler. Isso implica numa influência direta da deformação do cortante na carga crítica. Além disso, pode-se notar que $\lambda = 15$ as diferenças entre os modelos não são expressivas. Usualmente em vigas submetidas a flexão, $\lambda = 15$ a influência por deformação por cortante já seria desprezível, configurando um caso de barra longa. No caso do estudo da estabilidade esse conceito de barra longa fica vinculado também ao número do modo de flambagem.

EXEMPLO 3: Viga de Euler com apoios elásticos rotacionais nas extremidades

Seja uma viga de comprimento L, altura h e área A. As propriedades do material são: módulo de elasticidade E, modo de elasticidade transversal G e Coeficiente de Poisson ν . Na Tab. 7.4, os parâmetros B calculados pelo MEC são comparados com os do método DQM(Método da Quadratura Diferencial) desenvolvido por TAHA e ESSAM (2013).

Os valores das constantes das molas deste exemplo variam para os valores exibidos na Tab. 7.4. K_{RR} e K_{RL} , que são os parâmetros de constante de mola à rotação nas extremidades direita e esquerda, respectivamente, calculados de acordo com as Eqs. (7.3), (7.4) e exibidos na Fig.7.0.

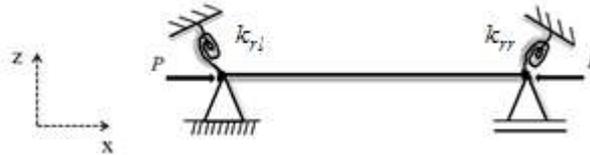


Figura. 7.0- Viga com apoios rígidos e elásticos

Tabela 7.4 Parâmetros de cargas críticas de flambagem (B)

K_{RL}	$K_{RR} = 0$		$K_{RR} = 10$		$K_{RR} = 100$	
	DQM	MEC	DQM	MEC	DQM	MEC
0	3,1413	3,14159	4,1319	4,13235	4,4504	4,44938
1	3,4053	3,40561	4,4226	4,42281	4,7476	4,74804
10	4,1319	4,13235	5,3071	5,30732	5,7044	5,70503
100	4,4504	4,44938	5,7044	5,70503	6,1578	6,16014

Onde:

$$K_{RR} = \frac{k_{rr}L}{EI} \quad (7.3)$$

$$K_{RL} = \frac{k_{rl}L}{EI} \quad (7.4)$$

Sendo:

k_{rl} , k_{rr} constante de mola rotacional à esquerda e direita.

Na Tab. 7.4 pode-se observar um bom desempenho do MEC frente ao DQM, que é uma solução analítica expressa em uma série. No exemplo em questão, TAHA e ESSAM (2013) usaram 15 termos.

EXEMPLO 4: Parâmetros de cargas críticas de flambagem para vigas de Euler-Bernoulli com apoios rígidos e elásticos entre as extremidades com diversas condições de contorno.

Considera-se uma coluna de rigidez à flexão EI , comprimento L e apoio intermediário em $\bar{x} = aL$. Representado por uma vinculação elástica c , Fig.7.1a, ou uma vinculação rígida Fig. 7.1b. A coluna é carregada na sua extremidade superior por uma força P . Na Tab. 7.5 são apresentadas os resultados exatos WANG et al.(2000) e os do MEC para os parâmetros de flambagem com apoio intermediário elástico e na Tab. 7.6 os apoios intermediários considerados são rígidos.

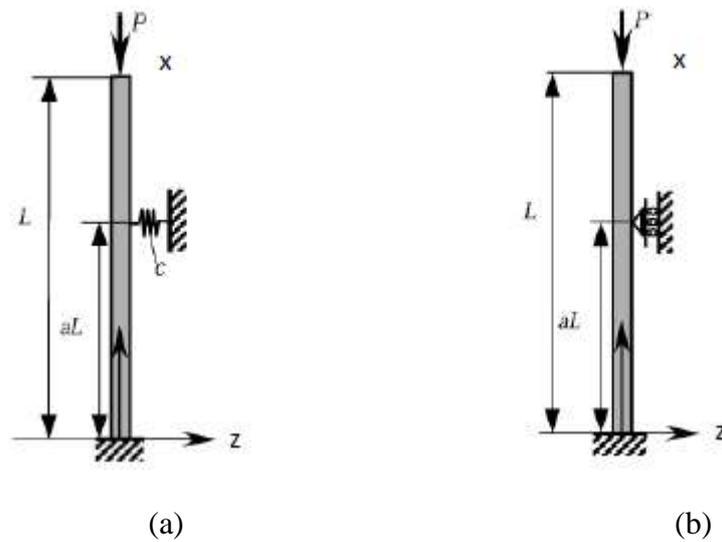


Figura. 7.1- Coluna em balanço com apoio no domínio: (a)apoio elástico (b) apoio rígido.

Tabela 7.5 Parâmetros (\sqrt{B}) para vigas de Euler com apoio elástico

		E -L	A-A	E-A	E-E
$a = 0.5$	Exato	2,0373	4,2258	5,1490	2,0312
	MEC	2,0372	4,2258	5,1489	2,0311
$a = 0.9$	Exato	3,7616	3,2582	4,6196	3,0889
	MEC	3,7616	3,2581	4,6196	3,0897

Tabela 7.6 Parâmetros de cargas de flambagem para vigas de Euler com apoios rígidos.

		E -L	A-A	E-A	E-E
$a = 0.5$	Exato	2,5031	6,2832	7,1497	2,3311
	MEC	2,5031	6,2831	7,1497	2,3310
$a = 0.9$	Exato	4,1515	4,8192	6,7286	3,1043
	MEC	4,1515	4,8192	6,7286	3,1043

A partir das Tabs. 7.5 e 7.5, pode-se notar que o MEC recupera com sucesso as soluções exatas.

EXEMPLO 5: Cargas críticas para viga simplesmente apoiada sobre base elástica de Winkler.

Seja uma viga retangular de comprimento 8m, altura 1m e com a rigidez à flexão $EI=3166,666 \text{ Nm}^2$. Considera-se ainda a viga sobre a base elástica de Winkler, tal que os valores das constantes da base adotadas neste exemplo são: $K_1 = 10\text{N/m}$ e $K_1 = 30\text{N/m}$ e $K_2 = 0$. Nas Tabs. 7.7 e 7.8 são apresentadas os resultados analíticos e do MEC para as cinco primeiras cargas críticas de flambagem para a condição de contorno(Apoiado-Apoiado). As soluções analíticas dadas em KARNOVSKY e LEBED (2000) e indicadas nas Eqs(7.5) e (7.6), para os modelos de Euler e Timoshenko, respectivamente.

$$P_{crit} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} + \frac{K_1 L^2}{n^2 \pi^2} + K_2 \quad (7.5)$$

$$P_{crit} = \frac{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}}{\frac{1}{EI} + \frac{\pi^2}{L^2 \kappa GA} n^2} + \frac{K_1 L^2}{n^2 \pi^2} + K_2 \quad (7.6)$$

Tabela 7.7 Cargas críticas $P_c (10^2 N)$ para viga de Euler-Bernoulli na base Winkler

n	Euler-Bernoulli $\lambda=8, K_2=0$			
	Exato		MEC	
	$K_1=10$	$K_1=30$	$K_1=10$	$K_1=30$
1	553,1854	682,8765	553,1853	682,8764
2	1969,5706	2001,9934	1969,5705	2001,9933
3	4402,2633	4416,6734	4402,2632	4416,6733
4	7817,4897	7825,5954	7817,4896	7825,5953
5	12211,0888	12216,2765	12211,0888	12216,2764

Tabela 7.8 Cargas críticas $P_c (10^2 N)$ para viga de Timoshenko na base Winkler

n	Timoshenko $\lambda=8, K_2=0$			
	Exato		MEC	
	$K_1=10$	$K_1=30$	$K_1=10$	$K_1=30$
1	538,5744	668,2655	538,5743	668,2654
2	1755,0500	1787,4728	1755,0500	1787,4727
3	3447,3412	3461,7514	3447,3412	3461,7513
4	5235,7504	5243,8561	5235,7504	5243,8560
5	6895,9094	6901,0970	6895,9093	6901,0970

Bons resultados foram obtidos para o MEC frente às respostas analíticas conforme indicado nas Tabs. 7.7 e 7.8. Além disso, os resultados sugerem que para os dois valores de constantes de mola utilizadas na base de Winkler, os modos mais baixos foram os que sofreram alterações mais expressivas.

EXEMPLO 6: Parâmetros de cargas críticas de flambagem em função de L/h , em vigas na base de Pasternak para a condição de contorno(A-A).

Neste exemplo é estudada a influência da relação $\lambda = \frac{L}{h}$ para vigas apoiadas em base elástica de Pasternak. Além disso, a viga possui Comprimento L , módulo de elasticidade E , módulo de elasticidade transversal G e coeficientes de base elástica K_1 e K_2 . Nas Tabs. 7.9a, 7.9b são apresentadas os valores dos Parâmetros de cargas críticas de flambagem para vigas de Timoshenko na base elástica de Pasternak em comparação com as de Euler-Bernoulli. Convém notar que os resultados exatos dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko são dados respectivamente pelas Eqs. (7.5) e (7.6). Nas Tab. 7.9a, 7.9b os rótulos 5T e 5E denotam $\lambda = 5$ nos modelos de Timoshenko e Euler, respectivamente.

Tabela 7.9a Parâmetros de Cargas críticas de flambagem(B)
em função de L/h para viga na base Pasternak($K_2 = 0,1K_1$, $K_1 = 10$).

n	λ	5T	5E	10T	10E	15T	15E
1	Exato	9,355	10,077	12,910	13,100	26,052	26,138
	MEC	9,355	10,077	12,910	13,100	26,055	26,138
2	Exato	30,060	39,536	37,420	40,309	42,260	43,599
	MEC	30,060	39,536	37,420	40,309	42,260	43,599
3	Exato	51,956	88,856	75,813	89,213	84,197	90,697
	MEC	51,956	88,856	75,813	89,213	84,197	90,697
4	Exato	69,791	157,934	120,242	158,145	139,559	158,997
	MEC	69,791	157,934	120,242	158,145	139,559	158,997
5	Exato	82,983	246,756	165,371	246,899	203,077	247,459
	MEC	82,983	246,756	165,371	246,899	203,076	247,459

Tabela 7.9b Parâmetros de Cargas críticas de flambagem(B)
em função de L/h para viga na base Pasternak($K_2 = 0,1K_1$, $K_1 = 30$).

n	λ	5T	5E	10T	10E	15T	15E
1	Exato	9,771	10,493	19,372	19,563	50,501	51,840
	MEC	9,771	10,493	19,383	19,563	50,501	51,840
2	Exato	30,176	39,652	39,083	41,972	58,591	58,676
	MEC	30,176	39,652	39,083	41,972	58,591	58,676
3	Exato	52,017	88,916	76,587	89,987	87,938	94,439
	MEC	52,017	88,916	76,588	89,987	87,938	94,438
4	Exato	69,832	157,974	120,705	158,608	141,726	161,164
	MEC	69,832	157,974	120,705	158,608	141,726	161,163
5	Exato	83,015	246,787	165,690	247,218	204,515	248,897
	MEC	83,015	246,787	165,690	247,218	204,514	248,897

Os resultados nas Tabs. 7.9a e 7.9b, indicam uma boa concordância entre os resultados do MEC e as soluções analíticas. Além disso, diferenças mais acentuadas entre os modelos podem ser notadas nos casos de vigas mais curtas(baixa relação vão/altura), principalmente nos modos mais altos. Os valores das constantes elásticas da base de Pasternak utilizados influíram de forma mais acentuada nos primeiros modos.

EXEMPLO 7: Frequências naturais em vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko submetidas a uma carga axial P.

Seja uma viga de seção retangular de comprimento 30m, largura 0,10m, altura 1m densidade $\rho = 3960 \text{kg} / \text{m}^3$ e com a rigidez à flexão $EI = 3166,666 \text{ Nm}^2$. Nas Tabs. 7.10 e 7.11 são mostradas respectivamente as cinco primeiras frequências naturais para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko com a condição de contorno Apoiado-Apoiado(A-A). Os resultados obtidos com o MEC são comparados com as soluções analíticas para Euler e Timoshenko exibidas nas Eqs. (7.7) e (7.8) respectivamente, as quais são dadas por KARNOVSKY et al. (2000).

Tabela 7.10 Frequências naturais (rad/s) em vigas de Euler –Bernoulli sob carga axial P.

n	Euler-Bernoulli P=10 N	
	Exato	MEC
1	0,0261	0,0261
2	0,1194	0,1191
3	0,2745	0,2745
4	0,4916	0,4917
5	0,7707	0,7707

Tabela 7.11 Frequências naturais(rad/s) em vigas Timoshenko sob carga axial P

n	Timoshenko P =10 N	
	Exato	MEC
1	0,0082	0,0082
2	0,0377	0,0377
3	0,0867	0,0867
4	0,1550	0,1551
5	0,2427	0,2420

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{1 - \frac{(P - K_2)L^2}{EIn^2 \pi^2} + \frac{K_1 L^4}{EIn^4 \pi^4}} \quad (7.7)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa GA}{2\rho A r^2} \left(B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - \frac{4r^2 B_2}{\kappa GA}} \right)} \quad (7.8)$$

Onde:

$$B_1 = 1 + \frac{EI\mu^2 + r^2 K_1}{\kappa GA} + r^2 \left(1 - \frac{P}{\kappa GA} \right) \mu^2, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$B_2 = K_1 \left[1 + \frac{EI\mu^2}{\kappa GA} \right] + \left(1 - \frac{P}{\kappa GA} \right) EI\mu^4 + (K_2 - P)\mu^2, \quad \mu = \frac{n\pi}{L}$$

Pode-se notar que nas Tabs. 7.10 e 7.11, a resposta do MEC recupera com sucesso as soluções analíticas.

EXEMPLO 8: Frequências naturais para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko sobre base elástica de Winkler submetidas à carga axial P.

Neste exemplo é considerada uma viga de comprimento 30m, largura 0,10m, altura 1m, densidade $\rho = 3960 \text{ kg / m}^2$ e com a rigidez à flexão $EI = 3166,666 \text{ Nm}^2$. Nas Tabs. 7.12 e 7.13 são mostradas respectivamente as cinco primeiras frequências naturais para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko axialmente carregadas com a condição de contorno Apoiado -Apoiado. Os resultados obtidos com o MEC são comparados com as soluções analíticas para Euler e Timoshenko exibidas nas Eqs. (7.7) e (7.8).

Tabela 7.12 Frequências naturais (rad/s) em vigas de Euler -Bernoulli sobre base elástica de Winkler

n	Euler-Bernoulli P=10N			
	Exato		MEC	
	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$
1	0,1611	0,2765	0,1611	0,2764
2	0,1988	0,3001	0,1988	0,3000
3	0,3173	0,3888	0,3172	0,3887
4	0,5167	0,5635	0,5167	0,5634
5	0,7870	0,8185	0,7869	0,8184

Tabela 7.13 Frequências naturais (rad/s) em vigas de Timoshenko sobre elástica de Winkler

n	Timoshenko P=10N			
	Exato		MEC	
	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$
1	0,0509	0,0874	0,0509	0,0874
2	0,0629	0,0949	0,0628	0,0948
3	0,1002	0,1228	0,1002	0,1228
4	0,1630	0,1778	0,1630	0,1778
5	0,2479	0,2579	0,2479	0,2578

Pode-se notar boa convergência da solução numérica com a analítica. A partir das Tabs. 7.12 e 7.13, verifica-se diferenças consideráveis entre os modelos de Euler e Timoshenko apesar do $\lambda = 30$.

EXEMPLO 9: Frequências naturais para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko sobre base elástica de Pasternak.

Para o exemplo em questão, é admitida a vida de comprimento 30m, largura 0,10m e altura 1m, densidade $\rho = 3960 \text{ kg/m}^2$ e rigidez à flexão $EI = 3166,666 \text{ Nm}^2$. Nas Tabs. 7.14 e 7.15 são mostradas respectivamente as cinco primeiras frequências naturais para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko axialmente carregadas com a condição de contorno (A-A). Os resultados obtidos com o MEC, tais quais os exemplos 7 e 8, são comparados com as soluções analíticas exibidas nas Eqs. (7.7) e (7.8).

Tabela 7.14 Frequências naturais (rad/s) em vigas de Euler sobre base de Pasternak

n	Euler-Bernoulli $P=10\text{N}, K_1 = K_2$			
	Exato		MEC	
	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$
1	0,1619	0,2780	0,1619	0,2779
2	0,2016	0,3055	0,2015	0,3055
3	0,3212	0,3983	0,3211	0,3982
4	0,5210	0,5752	0,5210	0,5751
5	0,7914	0,8310	0,7913	0,8310

Tabela 7.15 Frequências naturais (rad/s) em vigas de Timoshenko sobre base de Pasternak

n	Timoshenko $P=10\text{N}, K_1 = K_2$			
	Exato		MEC	
	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$	$K_1 = 10 \text{ N/m}$	$K_1 = 30 \text{ N/m}$
1	0,0512	0,0879	0,0511	0,0879
2	0,0637	0,0966	0,0637	0,0965
3	0,1014	0,1258	0,1014	0,1258
4	0,1644	0,1815	0,1643	0,1815
5	0,2493	0,2619	0,2493	0,2618

De acordo com os resultados apresentados nas Tabs. 7.14 e 7.15, os resultados analíticos e numéricos estão em boa concordância. No modelo de Timoshenko, as frequências naturais deram valores menores, mesmo para uma esbelteza de $\lambda = 30$.

EXEMPLO 10: Parâmetros de cargas críticas de flambagem (\sqrt{B}) para vigas uniformes de Euler-Bernoulli com carga no domínio em várias condições de contorno.

Considere uma viga de comprimento L , altura h , comprimento intermediário sL e flexão à rigidez EI . Na Tab. 7.16 são exibidos os primeiros modos dos parâmetros de flambagem (\sqrt{B}) para vigas de Euler-Bernoulli, submetidas à cargas axiais adicionais P_2 no domínio posicionadas em s , com diversas condições de contorno como visto nas Figs. 7.2 e 7.3. As cargas axiais se relacionam segundo o parâmetro $m = \frac{P_2 + P_1}{P_1}$ e as soluções exatas são dadas por TAHA e ESSAM (2013).

Tabela 7.16 Parâmetros de cargas críticas de flambagem em vigas de Euler-Bernoulli (\sqrt{B}) com varias condições de contorno.

	m	s = 0,3		s = 0,5	
		Exata	MEC	Exata	MEC
C-F	4	1,01112	1,011105	1,23095	1,230951
	2	1,30081	1,300809	1,43779	1,437778
	1,33	1,46498	1,464968	1,52425	1,524706
A-A	4	1,89495	1,894948	1,96601	1,966010
	2	2,50864	2,508634	2,55657	2,556564
	1,33	2,88509	2,885083	2,90675	2,908864
C-A	4	2,94442	2,944421	3,01150	3,011490
	2	3,76424	3,764238	3,80247	3,802467
	1,33	4,21207	4,212070	4,22846	4,230924
C-C	4	3,54153	3,541518	3,93102	3,931019
	2	4,82979	4,829783	5,11300	5,112997
	1,33	5,67979	5,679796	5,81351	5,813500

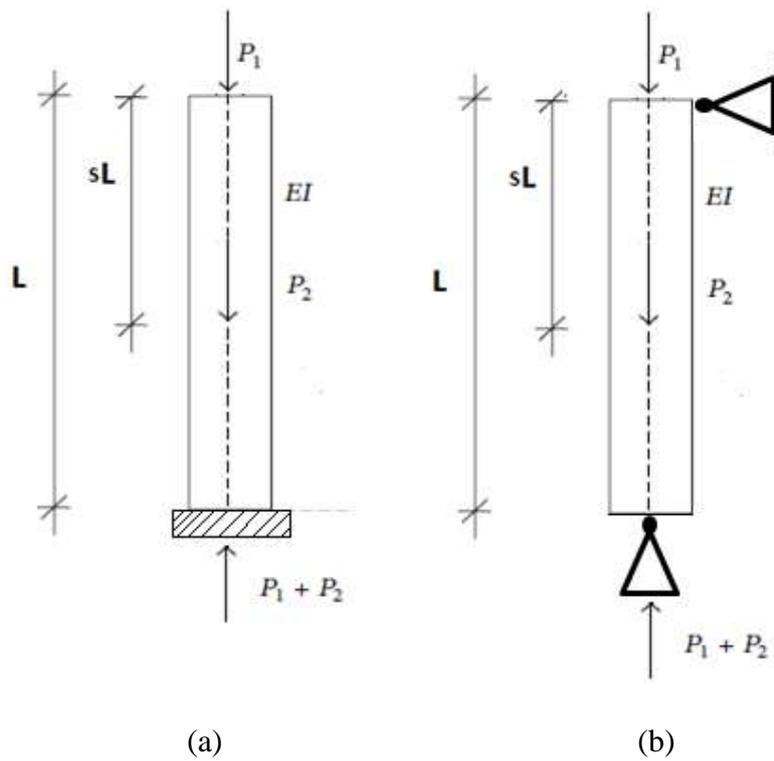


Figura 7.2 condições de contorno: (a) C-F, (b) A-A.

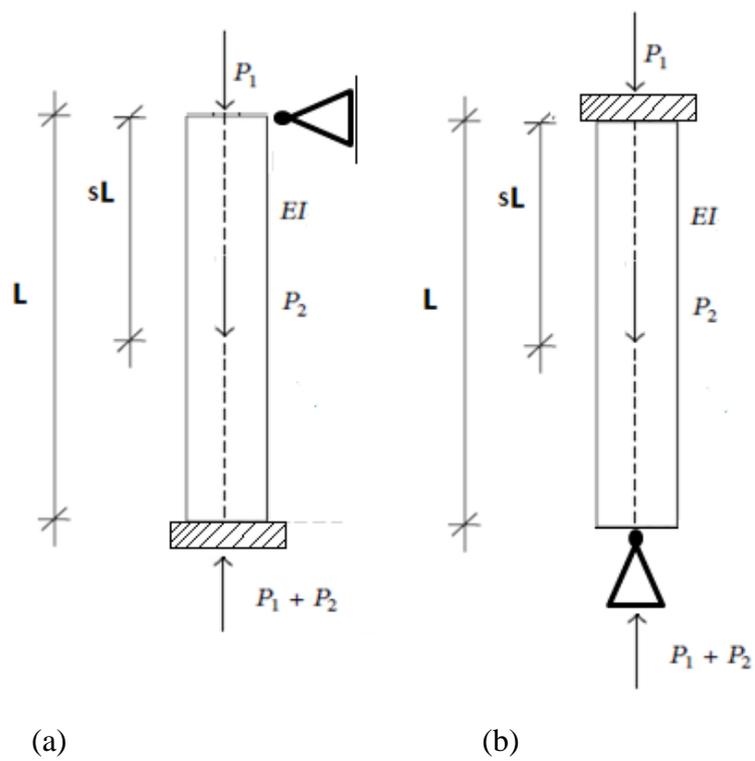


Figura 7.3 condições de contorno: (a) A-C, (b) C-A

EXEMPLO 11: Parâmetros de cargas críticas de flambagem(\sqrt{B}) para vigas escalonadas de Euler-Bernoulli com várias condições de contorno.

Considere uma viga escalonada de comprimento L, cujo primeiro trecho é limitado por sL e possuindo rigidez à flexão E_1I_1 . Já o segundo trecho possui rigidez à flexão E_2I_2 . São apresentadas na Tab. 7.17 os parâmetros de cargas críticas de flambagem(\sqrt{B}) em vigas de Euler-Bernoulli submetidas a cargas axiais adicionais no domínio. Além disso, de acordo com as Fig. 7.4 e 7.5, são considerados os casos de mudança abrupta da seção transversal e descontinuidade da força normal em diversos casos de condições de contorno. As rigidezes à flexão de cada trecho relacionam-se através do parâmetro $N = \frac{E_2I_2}{E_1I_1}$ e as soluções exatas são dadas por TAHA e ESSAM (2013).

Tabela 7.17 Parâmetros de cargas críticas de flambagem em vigas de Euler-Bernoulli(\sqrt{B})

	n	m	s = 0,3		s = 0,5	
			Exata	MEC	Exata	MEC
C-F	2	4	1,42537	1,42536	1,68681	1,686798
		2	1,82208	1,82208	1,91063	1,90632
		1,33	2,03862	2,038616	1,99225	1,992663
		1	2,17345	2,146405	2,03334	2,033332
A-A	2	4	2,60062	2,600618	2,35390	2,353902
		2	3,37891	3,378904	2,99339	2,993386
		1,33	3,82251	3,825118	3,35033	3,352422
		1	4,10715	4,107148	3,57986	3,579859
C-A	2	4	3,913770	3,9130765	3,517460	3,517462
		2	4,830420	4,830422	4,348370	4,348367
		1,33	5,289040	5,291623	4,768080	4,768078
		1	5,563920	5,563923	5,018280	5,018274
C-C	2	4	4,79301	4,793009	4,71153	4,711527
		2	6,44874	6,448734	5,99937	5,999371
		1,33	7,45760	7,457602	6,72061	6,720608
		1	8,11453	8,114529	7,18459	7,184585

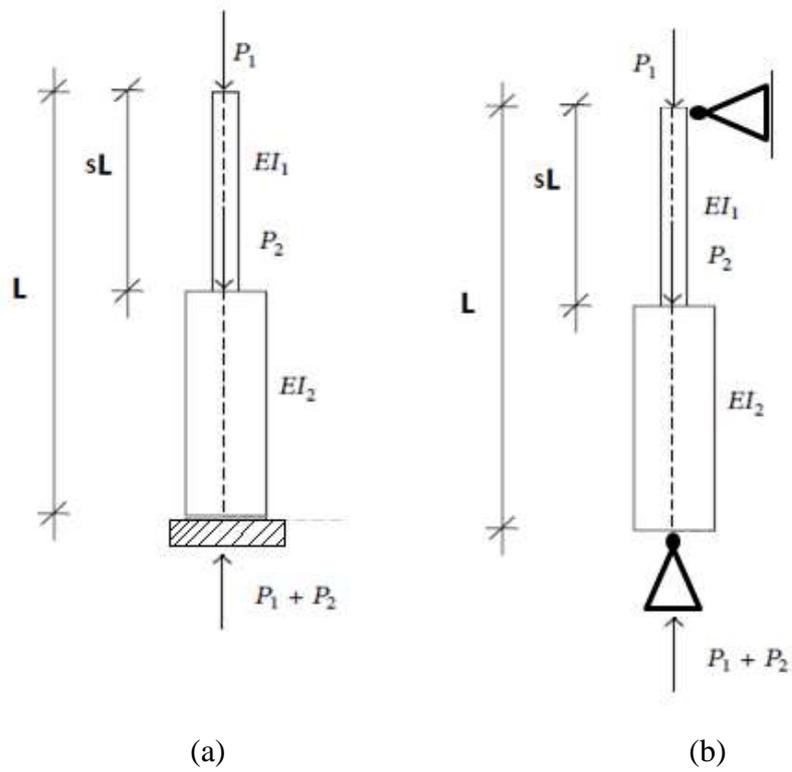


Figura 7.4 condições de contorno: (a) C-F, (b) A-A.

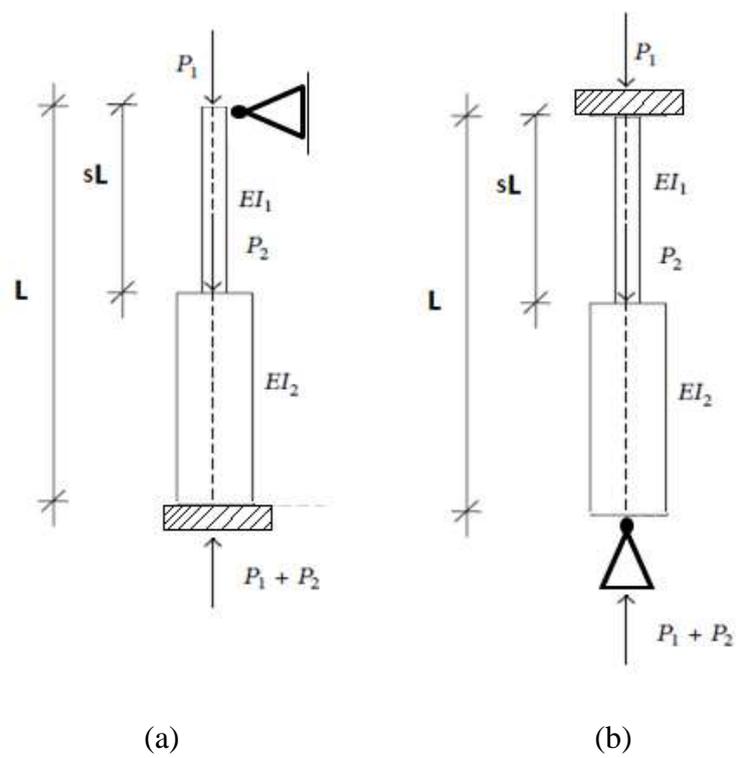


Figura 7.5 condições de contorno: (a) A-C, (b) C-A.

EXEMPLO 12: Parâmetros de frequências (Ω) para vigas de Euler-Bernoulli sob carga axial parcialmente apoiadas em base elástica de Winkler

No exemplo em questão é considerada uma viga de comprimento L , altura h , rigidez à flexão EI e comprimento intermediário αL . Na Tab. 7.18 são mostrados os parâmetros do primeiro modo de frequência de vigas de Euler-Bernoulli com várias condições de contorno. Além disso, considera-se que a viga seja não homogênea, sofra mudança abrupta na seção transversal e uma das sub-regiões encontra-se apoiada sobre a base elástica de Winkler como mostrado na Fig 7.6. Os resultados obtidos no MEC são comparados com os apresentados por KARNOVSKY IGOR e LEBED(2000). Os parâmetros utilizados na Tab. 7.18 são dados por:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\omega^2 L^4 \rho_0 A_0}{E_0 I_0}}, \quad K_0 = \frac{25 E_0 I_0}{L^4}, \quad p^2 = \frac{P L^2}{EI}, \quad E_1 I_1 = 0,512 E_0 I_0, \quad \rho_1 A_1 = 0,8 \rho_0 A_0$$

Tabela 7.18 parâmetros de frequências(Ω) de vigas submetidas a cargas axiais(P)

p^2	A-A		C-C		A-C		C-A	
	s = 0,5		s = 0,5		s = 0,5		s = 0,5	
	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC
2	7,9717	7,9715	19,3454	19,3451	13,1513	13,1513	13,0287	13,0285
3	7,2219	7,2217	18,9705	18,9705	12,6840	12,6838	12,4577	12,4575
5	5,4119	5,4117	18,1941	18,1939	11,6917	11,6915	11,2168	11,2166
10	-		16,0647	16,0644	8,7171	8,7170	7,1072	7,1072
20	-		10,3917	10,3917	-		-	
25	-		5,5051	5,5050	-		-	

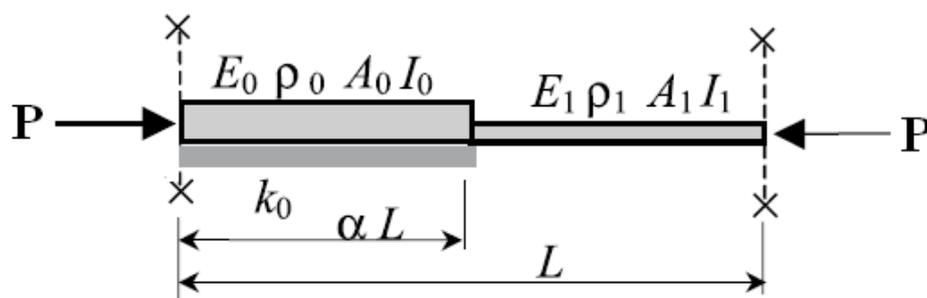


Figura 7.6 Viga não homogênea com mudança abrupta na seção transversal

EXEMPLO 13: Parâmetros de frequências(Ω) para vigas de Euler-Bernoulli axialmente carregadas(P) sobre base elástica de Winkler.

Neste problema é adotada uma viga de comprimento L , altura h , rigidez à flexão EI e comprimento intermediário αL . Na Tab. 7.19 são apresentados os parâmetros para o primeiro modo de frequência para vigas de Euler-Bernoulli com várias condições de contorno. Também considera-se que a viga seja não homogênea, sofra mudança abrupta na seção transversal e suas duas sub-regiões encontram-se apoiada sobre a base elástica de Winkler como mostrado na Fig 7.7. Os resultados obtidos no MEC são comparados com os apresentados por KARNOVSKY IGOR e LEBED(2000) tais quais o exemplo 12.

Tabela 7.19 parâmetros de frequências de cargas críticas de flambagem(Ω)

p^2	A-A		C-C		A-C		C-A	
	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC
2	8,8187	8,9187	19,7650	19,7649	13,5689	13,5689	13,8146	13,8146
3	8,2607	8,2609	19,3993	19,3992	13,1159	13,1157	13,2818	13,2818
5	6,7499	6,7498	18,6430	18,6430	12,1576	12,1574	12,1355	12,1354
10	-	-	16,5784	16,5784	9,3279	9,3277	8,5241	8,5241
20	-	-	11,1956	11,1953	-	-	-	-
25	-	-	6,9393	6,9302	-	-	-	-

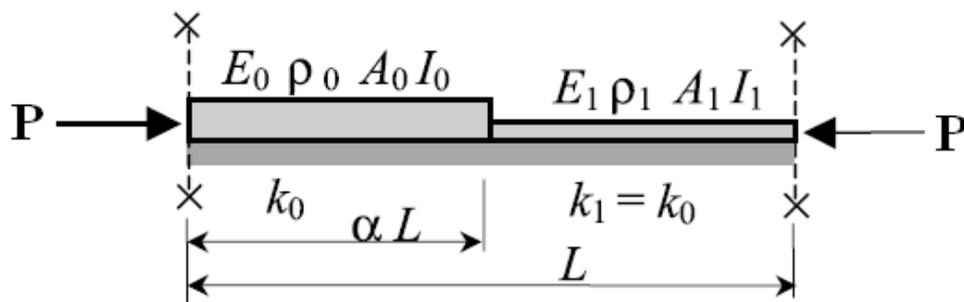


Figura 7.7 Viga não homogênea, com mudança abrupta na seção transversal sobre base elástica de Winkler.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estabelecida uma abordagem dos elementos de contorno para problemas de estabilidade estática e dinâmica de vigas utilizando-se os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. As principais contribuições originais para o MEC no modelo de vigas de Euler apoiadas ou não base elástica ficaram a nível de soluções fundamentais estáticas e dinâmicas mais simples que as até então disponíveis na literatura. Já para o modelo de viga de Timoshenko apoiadas ou não em base elástica, as contribuições originais para o MEC foram mais amplas desde o estabelecimento das próprias equações integrais, passando pelas soluções fundamentais, até as representações algébricas. Apoios elásticos no contorno e descontinuidades no domínio (devido a cargas axiais, mudança abrupta de seção transversal e apoios intermediários rígidos ou elásticos) também foram abordados. Os resultados sugerem a um bom desempenho e elegância da formulação apresentada aqui.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O assunto de soluções do MEC para estabilidade estática e dinâmica de vigas está longe de estar finalizado. Alguns desdobramentos imediatos que poderiam ser investigados seriam aqueles a nível de modelos para viga quanto para as bases elástica, por exemplo:

- a) Utilização de modelos de bases elásticas com três parâmetros tais como as bases de Kerr e Vlasov;
- b) Utilização de modelos de vigas com deformação por cortante de alta ordem;
- c) Utilização de modelos para vigas compostas de materiais compósitos laminados e materiais funcionalmente graduados.

REFERÊNCIAS

- ABBAS, B. A. H. e THOMAS J., 1978. “Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elast foundation”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, Nº 1, p. 33-44.
- ALIABADI, M. H., 2002. *The boundary element method: Applications in solids and structures*. Wiley.
- ANTES, H. e SHANZ, M. AND ALVERMANN, S., 2004. “Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams”. *Journal of sound and vibration*, p.807-836.
- ANTES. H., 2003. “ Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams”. *Computers and Structures*, Vol. 81, p. 383-396.
- BANERJEE, J. R., 1998. “Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method”. *Computers and Structures*, Vol. 69, p. 197-208.
- BANERJEE. P. K. e BUTTERFIELD, R., 1981. *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill.
- BAZANT, Z.P. e CEDOLIN, L., 1991. *Stability Structures. Elastic, Inelastic Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, New York, 3st edition.
- BAZANT, Z.P., 2000. “Stability of elastic, Inelastic, and disintegrating structures: a conspectus of main results,” *ZAMM*, Vol. 80, p. 709-732.
- BECKER, A. A., 1992. *The boundary element method in engineering: a complete course*, McGraw-Hill.
- CHEN, T., MA, HAITAO e GAO WEI., 2013. “A new approach to stability analysis of frame structures using trefftz-type elements”. *Journal of Construcional Steel Research*, Vol. 82, Nº 2013, p. 153-163.
- CHEN, W.F. AND LUI, E.M.,1987. *Structural Stability. Theory and Implementation*. New York, 1st edition.
- CRUZ, J.M.F., 2012. *Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno*. Tese(doutorado), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- DOMÍNGUEZ, J., 1993. “*Boundary elements in dynamics*” Computational Mechanics Publicatios.

EL NASHIE, M.S., 1990. Stress, Stability, and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach. McGraw-Hill, London, UK.

ELFELSOUFI, Z. e AZRAR L., 2005. "Buckling, flutter and vibration analyses of beams by integral equation formulations". *Computers and Structures*, Vol. 83, p. 2632-2649.

GALAMBOS, T.V., 1988. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. John Wiley, New York, 4st edition.

HAMIMID, M., FELICIACHI M. e MIMOUNE, S.M., 2010. "Modified Jiles-Atherton Model and Parameters Identification Using False Position Method". *Physica B*, Vol 405, p. 1947-1950.

HÖRMANDER, L., Linear Partial Differential Operators, Springer, Berlin, 1963.

KARNOVSKY IGOR A., LEBED OLGA I., 2000. Formulas for Structural Dynamics: Tables, Graphs, and Solutions. New York. 1st edition.

KATSIKADELIS, J. T., 2002. Boundary Elements: Theory and Applications. Elsevier, 1st edition.

MANOLIS, G.D., BESKOS, D.E e PINEROS, MF., 1986. "Beam and plate stability by boundary elements". *Computers and Structures*, Vol. 22, N° 22, p. 917-923.

PETTYT, M., 1990, *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press.

PROVIDASKIS, C. P. e BESKOS, D. E., 1986. "Dynamic analysis of beams by the boundary element method". *Computers and Structures*, Vol. 22, N° 6, p. 957-964.

SAPOUNTZAKIS, E. J. e KAMPITSIS A. E., 2010. "Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation". *Computers and Structures*, Vol. 88, p. 1206-1219.

SHAKER, FRANCIS J., 1975. "Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams". Lewis research center, Report n° d-8109.

Structural Members. CRC press, Boca Raton, 1st edition.

TAHA, MOHAMED e ESSAM, MAHMOUND, 2013. "Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method". *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 48, N° 1, p. 63-73.

TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M., 1961., Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York.

WANG, C.M., WANG C.Y, REDDY J.N., 2000. Exact Solutions for Buckling of Structural Members. CRC Press

YOKOYAMA, T., 1988. "Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation". *Pegamos Journals Ltd*, Vol. 28, N° 2, p. 207-216.