



*Universidade Federal da Paraíba*

*Centro de Tecnologia*

*PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA*

*- Mestrado - Doutorado*

**ESTUDO TEÓRICO EXPERIMENTAL DA  
DINÂMICA DE TEMPERATURA NO INTERIOR DE  
UMA CAVIDADE CILÍNDRICA**

Por

Andréa Samara Santos de Oliveira

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da  
Paraíba para obtenção do grau de Doutor*

**ANDRÉA SAMARA SANTOS DE OLIVEIRA**

**ESTUDO TEÓRICO EXPERIMENTAL DA  
DINÂMICA DE TEMPERATURA NO INTERIOR DE  
UMA CAVIDADE CILÍNDRICA**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em engenharia mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Doutor.

**Orientadores : Professor D.Sc. Zaqueu Ernesto da Silva  
Professor D.Sc. Francisco Antônio Belo**

**João Pessoa - Paraíba**

**Julho, 2010**

O48e Oliveira, Andréa Samara Santos de.  
Estudo teórico experimental da dinâmica de temperatura no interior de uma  
cavidade cilíndrica / Andréa Samara Santos de Oliveira . - - João Pessoa : [s.n.], 2010.  
139 f. : il  
Orientadores: Zaqueu Ernesto da Silva e Francisco Antônio Belo.  
Tese (Doutorado) – UFPB /CT.  
1. Engenharia Mecânica. 2. Engenharia Térmica. 3. Controle Térmico .  
4. Difusividade Térmica. 5. Cavidade Cilíndrica.

UFPB/BC

CDU:621(043)

# ESTUDO TEÓRICO EXPERIMENTAL DA DINÂMICA DE TEMPERATURA NO INTERIOR DE UMA CAVIDADE CICLÍNDRICA

por

**Andréa Samara Santos De Oliveira**

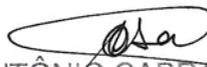
*Tese aprovada em 26 de julho de 2010*



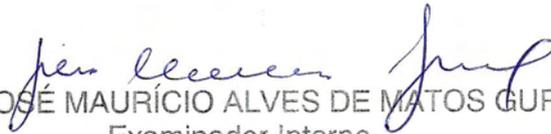
Prof. Dr. ZAQUEU ERNESTO DA SILVA  
Orientador



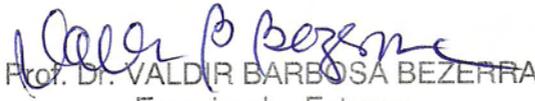
Prof. Dr. FRANCISCO ANTÔNIO BELO  
Orientador



Prof. Dr. CARLOS ANTÔNIO CABRAL DOS SANTOS  
Examinador Interno



Prof. Dr. JOSÉ MAURÍCIO ALVES DE MATOS GURGEL  
Examinador Interno



Prof. Dr. VALDIR BARBOSA BEZERRA  
Examinador Externo



Prof. Dr. HÉLCIO RANGEL BARRETO ORLANDE  
Examinador Externo

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho ao meu filho, Victor Emanuel, ao meu esposo, Wanderlan e ao meu pai, Benoni, os quais me motivaram e apoiaram mais de perto nesta importante jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu Deus, que está comigo todos os dias e a cada instante.

Ao meu esposo e ao meu filho, os quais sacrificaram muitos momentos de convivência para que eu estivesse me dedicando a este trabalho, também me incentivaram em meio a tantas dificuldades.

Ao meu pai, que sempre me impulsionou a ir em frente.

Aos meus orientadores, Francisco Antônio Belo e Zaqueu Ernesto da Silva, por acreditarem em mim e no meu potencial de trabalho.

Aos professores Carlos Antônio Cabral dos Santos, Márcio Rodrigo Araújo Souza e José Maurício Alves de Matos Gurgel.

Aos amigos: Pereira, Abel, Cristiane Kelly, Mirtes, Ágda, Edilma, Frank, Cícero Herbert, Herbert Melo, Jerry, Ruan, Tássio, Leonaldo e Martins, os quais contribuíram pessoal e profissionalmente no desenvolvimento deste projeto.

Aos funcionários da UFPB: Luís, João de Deus, Diógenes, Hernani, Sérgio, Cícero, Andréa e Mônica.

Aos familiares e amigos-irmãos, como tia Sávvia, meu irmão (Edson Heberth), Ana Cláudia e outros, que de perto ou longe torciam e oravam por mim.

A todos os demais que de alguma forma contribuíram para realização deste feito. Sim, porque mesmo constando um só nome na autoria, foi efetuado com o apoio de muitos.

*Os céus anunciam ao mundo a glória de Deus. Eles são uma prova fantástica da capacidade de criação de Deus. Cada dia que passa conta ao dia seguinte mais um pouco dessa glória; cada noite mostra à noite seguinte como se pode conhecer o Criador. Esses discursos são silenciosos; não se ouve uma palavra, mas sua mensagem de louvor é ouvida em todas as partes da terra.*

SI 19:1-4 (A Bíblia Viva, 2002)

# **ESTUDO TEÓRICO EXPERIMENTAL DA DINÂMICA DE TEMPERATURA NO INTERIOR DE UMA CAVIDADE CILÍNDRICA**

## **RESUMO**

São propostos dois métodos de resolução para um problema (direto) de difusão de calor no interior de uma cavidade cilíndrica, cada um dos métodos é aplicado com solução linear e outra não linear. Conjuntamente, é desenvolvido um aparato experimental para validação dos modelos teóricos. E, como uma aplicação do sistema proposto a análise inversa (problema inverso) é usada para determinar a difusividade térmica de um líquido (água). O sistema físico experimental consiste de uma cavidade cilíndrica de material metálico (alumínio) vazada, a ser preenchida com o material líquido do qual se quer estimar a difusividade térmica. Um elemento sensor (PT 1000) deve medir a temperatura no(s) ponto(s) em que a temperatura precisa ser medida e controlada. O controlador deve comparar a temperatura real com o valor desejado e enviar sinal de comando ao atuador (pastilha *Peltier*), o qual está fisicamente em contato com o cilindro metálico, respondendo pelo aquecimento ou resfriamento do sistema. A temperatura no interior do líquido é medida por termopares e salva em arquivo através de *softwares*. O controle de temperatura precisa manter as condições térmicas durante o procedimento experimental real, o que, também, é objeto deste estudo. No que concerne ao problema direto, modelo de condução de calor unidimensional e com simetria cilíndrica radial para obter a resposta transiente da temperatura medida no centro de uma célula cilíndrica. Seguindo os procedimentos formais, a Técnica da Transformada Integral Generalizada é um dos métodos utilizados para resolver o problema direto e, por conseguinte, determinar o campo de temperatura teórico, gerando resultados do tipo padrão. Inicialmente considerando-se a difusividade térmica constante, problema linear, e, em outra abordagem considerando-se uma dependência linear desta com a temperatura. Uma proposta para solução alternativa é feita utilizando-se o Método de Simulação de Rede (NSM), tanto na versão clássica de solução linear, quanto numa versão inovadora através do uso de um elemento cuja resistência

elétrica varia linearmente com o potencial elétrico. Além disso, o meio líquido é considerado estacionário, assim, eventuais trocas convectivas e radiativas no interior do meio são negligenciadas. A viabilidade em se determinar a difusividade térmica desconhecida, através do dispositivo proposto, é inferida analisando a representação matemática deste sistema comparando-a com os resultados experimentais. Um software em MATLAB foi desenvolvido para viabilizar a solução do problema de estimativa de parâmetro para a difusividade térmica, o qual foi resolvido por meio da minimização da norma dos mínimos quadrados pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt. Os resultados obtidos mostram a viabilidade do sistema proposto.

# **EXPERIMENTAL THEORETICAL STUDY OF DYNAMIC TEMPERATURE AT A CYLINDRICAL**

## **ABSTRACT**

Two methods for solving a direct heat diffusion problem inside a cylindrical enclosure are proposed, each one is applied with a linear and plus a non-linear solution. Besides, a experimental apparatus was developed for theoretical models validation purpose. Furthermore, as an application of the proposed system the inverse analysis (inverse problem) is used to determine the thermal diffusivity of a liquid (water). The physical experimental system consists of a hollow cylinder, made from metal material (aluminum), which is filled with a liquid fluid whose thermal diffusivity we want to estimate. A sensor element (PT 1000) should measure the temperature at the points that it must be acquired and controlled. The controller has to compare the actual temperature value with the desired one and send command to actuator (Peltier module), which is physically in contact with the metallic cylinder, responding by heating or cooling system. The temperature inside the liquid is measured by thermocouples and saved in a file through software. Temperature control must ensure the thermal conditions during the actual experimental procedure, what is also object of this study. Regarding the direct problem, heat conduction model, one-dimensional and cylindrical radial symmetry for the transient response of temperature measured at the center of a cylindrical cavity. Following the formal proceedings, the Generalized Integral Transform Technique is one of the methods used to solve the direct problem and thus determine the theoretical temperature field, yielding results of the standard type. Initially, considering the thermal diffusivity constant (linear problem) and, after, another approach considering a linear dependence of the parameter with temperature. A proposal for alternative solution is done using the Network Simulation Method (NSM), first in the classical version of linear solution, and afterward as an innovative version through the use of an element whose electrical resistance varies linearly with the voltage. In addition, the liquid medium is considered stationary, thus, any

convective and radiative exchanges inside the medium are neglected. The feasibility of determining the unknown thermal diffusivity, through the proposed device is inferred by analyzing the mathematical representation of this system by comparing it with the experimental results. A MATLAB software was developed to enable the solution of the parameter estimation, which was solved using the norm minimization of the least-squares by Levenberg-Marquardt algorithm. The results show the feasibility of the proposed system.

## SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO .....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO .....	1
1.2 MOTIVAÇÃO .....	5
1.3 VISÃO GERAL DO SISTEMA PROPOSTO .....	6
1.4 OBJETIVOS .....	7
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	7
2. ESTADO DA ARTE.....	9
2.1 PROBLEMA DIRETO – CONDUÇÃO DE CALOR.....	9
2.1.1 Equacionamento da Difusão de Calor .....	12
2.1.2 Sistema Físico .....	15
2.2 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA .....	16
2.3 O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE .....	18
2.4 O PROBLEMA INVERSO .....	21
3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO.....	23
3.1 MODELO MATEMÁTICO.....	23
3.2 SOLUÇÃO VIA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT).....	27
3.2.1 Solução Formal .....	28
3.2.2 Solução do Problema Linear .....	36
3.3 SOLUÇÃO VIA MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE (NSM) .....	37
3.3.1 Solução do Problema Linear .....	40
3.3.2 Solução do Problema Não Linear .....	45
4. MATERIAL E MÉTODO EXPERIMENTAL .....	47

4.1 O SISTEMA FÍSICO .....	47
4.2 CILINDRO METÁLICO .....	48
4.3 SISTEMA DE CONTROLE TÉRMICO .....	49
4.3.1 Elementos Sensores.....	50
4.3.2 <i>Compact Field Point</i> (cFP – 2000) .....	54
4.3.3 Elementos Atuadores.....	57
4.3.4 Circuito de Potência .....	61
4.3.5 <i>Software</i> de Controle.....	62
4.3.6 Controlador .....	64
5 PROBLEMA INVERSO.....	67
5.1 INTRODUÇÃO .....	67
5.2 MÉTODOS DIRETOS.....	68
5.3 MÉTODOS INVERSOS .....	68
5.4 ESTUDO DA SENSIBILIDADE AOS PARÂMETROS.....	75
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	77
6.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO .....	77
6.1.2 Abordagem da Solução Via GITT .....	77
6.1.2.1 Primeira solução.....	77
6.1.2.2 Segunda solução.....	82
6.1.3 Abordagem da Solução Via NSM.....	85
6.1.3.1 Primeira solução.....	85
6.1.3.2 Segunda solução.....	87
6.2. RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	90
6.3.SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO .....	97
6.3.1 Estudo da Sensibilidade aos Parâmetros .....	99
6.3.2 Identificação da Difusividade Térmica .....	101
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	107
7.1 CONCLUSÕES .....	107
7.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS .....	108

REFERÊNCIAS ..... 110

APÊNDICE A..... 118

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$ , para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas ( $r, \phi, z$ ). .....	13
Figura 2.2: Sistema físico simplificado.....	16
Figura 3.1: Célula, ou volume elementar do circuito elétrico em rede RC.....	42
Figura 3.2: Diagrama esquemático de um circuito em rede RC no <i>PSIPCE</i> .....	43
Figura 3.3: Tela para visualização do resultado da simulação de um circuito em rede RC no <i>PSIPCE</i> .....	44
Figura 3.4: Resistor “termo-dependente” .....	46
Figura 4.1: Diagrama representativo do sistema físico proposto .....	48
Figura 4.2: Sistema de controle térmico .....	50
Figura 4.3: PT 1000 .....	52
Figura 4.4: Localização dos sensores tipo PT 1000.....	53
Figura 4.5: Termopar .....	53
Figura 4.6: Foto ilustrativa do cFP-2000. ....	56

Figura 4.7: Efeito térmico produzido mediante a aplicação de tensão elétrica.....	58
Figura 4.8: Associação de junções.....	58
Figura 4.9: Módulo de efeito <i>Peltier</i> .....	59
Figura 4.10: a – Convecção forçada em uma junção, b – Convecção forçada em ambas as junções.....	61
Figura 4.11: Foto ilustrativa do circuito de potência.....	62
Figura 4.12: Painel frontal do programa de controle desenvolvido.....	64
Figura 6.1: Comportamento dinâmico da temperatura no meio - 3D.....	81
Figura 6.2: Temperatura em função do tempo para cinco posições radiais.....	81
Figura 6.3: Perfis de temperatura resultantes dos modelos linear e não linear, em três posições (séries convergidas).....	83
Figura 6.4: Diferença entre os perfis linear e não linear de temperatura em três posições radiais.....	84
Figura 6.5: Perfil linear de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre GITT (séries convergidas) e NSM (20 volumes).....	86
Figura 6.6: Perfil linear de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre GITT (séries convergidas) e NSM (50 volumes).....	86

Figura 6.7: Perfil linear de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre GITT (séries convergidas) e NSM (100 volumes) .....	87
Figura 6.8: Perfil de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre modelos não lineares GITT (séries convergidas) e NSM (20 volumes) .....	88
Figura 6.9: Perfil de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre modelos não lineares GITT (séries convergidas) e NSM (50 volumes) .....	88
Figura 6.10: Perfis de temperatura obtidos através dos modelos lineares e não lineares NSM (50 volumes) e GITT, em $R = 0$ .....	89
Figuras 6.11a - d: Perfis teóricos e experimentais de temperatura na posição radial central .....	91
Figuras 6.11e - h: Perfis teóricos e experimentais de temperatura na posição radial central .....	92
Figuras 6.12a - d: Diferença entre os perfis experimentais e teóricos de temperatura no centro do cilindro .....	93
Figuras 6.12e - h: Diferença entre os perfis experimentais e teóricos de temperatura no centro do cilindro .....	94
Figuras 6.13a -d: Perfis teóricos não lineares e experimentais, tomados na posição central .....	95
Figura 6.14a -d: Diferença entre os perfis experimentais e teóricos de temperatura no centro do cilindro .....	96

Figuras 6.15: Taxa de variação da temperatura ao longo do tempo tomada em três posições radiais.....	97
Figura 6.16: Derivada da temperatura em relação a posição ao longo do tempo tomada em três posições radiais .....	98
Figura 6.17: Coeficientes de Sensibilidade Reduzidos da Temperatura em relação aos parâmetros térmicos do modelo.....	100
Figuras 6.18a: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 1.....	103
Figuras 6.18b: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 2 .....	104
Figuras 6.18c: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 3.....	104
Figuras 6.18d: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 4 .....	105
Figuras 6.18e: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 4.....	105
Figuras 6.18f: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 4.....	106

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 3.1 – Analogia entre Grandezas nos Circuitos Elétricos e Térmicos .....	39
Tabela 6.1 – Perfil de temperatura na análise da convergência.....	79
Tabela 6.2 – Propriedades térmicas da água em função da temperatura .....	82
Tabela 6.3 – Estimativas obtidas para Difusividade Térmica .....	102

## LISTA DE SÍMBOLOS

- C – capacitância elétrica [F]  
c<sub>p</sub> – calor específico [J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]  
D – diâmetro [m]  
e (t) – sinal de erro atuante no controlador  
g – aceleração da gravidade [m s<sup>-2</sup>]  
h – coeficiente de transferência de calor por convecção [W m<sup>2</sup> K<sup>-1</sup>]  
I – corrente elétrica [A]  
I – número total de medidas no tempo  
J – coeficiente de sensibilidade  
J<sub>0</sub> – função Bessel do primeiro tipo e ordem zero  
J<sub>1</sub> – função Bessel do primeiro tipo e ordem um  
k – condutividade térmica [W m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>]  
K<sub>p</sub> – constante de proporcionalidade  
L – comprimento do cilindro [m]  
L – número de parâmetros conhecidos  
N – número de termos da série  
N – número de volumes  
N<sub>i</sub> – norma  
P – parâmetro desconhecido  
q – taxa de transferência de calor [W]  
q" - fluxo de calor [Wm<sup>-2</sup>]  
r – posição radial [m]  
r<sub>0</sub> – raio interno da cavidade cilíndrica [m]  
R – posição radial adimensional  
R – resistência elétrica [Ω]  
R<sup>2</sup> – coeficiente de correlação

Ra – número de Rayleigh  
s – desvio padrão  
S – função objetivo  
t – tempo [s]  
T – temperatura [K]  
 $T_i$  – constante de tempo integral [s]  
 $T_{ini}$  – temperatura inicial [K]  
 $T_d$  – constante de tempo derivativo [s]  
 $T_s$  – temperatura da superfície [K]  
u(t) – sinal de saída do controlador [V]  
V – potencial elétrico [V]  
 $X_m$  – posição da medida  
 $Y_{im}$  – medidas transientes de temperatura  
 $\alpha$  – difusividade térmica [ $m^2 s^{-1}$ ]  
 $\alpha^*$  – difusividade térmica adimensional  
 $\beta$  – coeficiente de expansão térmica [ $K^{-1}$ ]  
 $\rho$  - massa específica [ $kg m^{-3}$ ]  
 $\nu$  - viscosidade cinemática [ $s m^{-2}$ ]  
 $\tau$  – tempo adimensional  
 $\tau_i$  – instante de medição  
 $\theta$  - temperatura adimensional  
 $\theta_i$  - temperatura estimada  
 $\psi_i$  – autofunção  
 $\mu_i$  – autovalor  
 $\Phi$  - função potencial  
 $\sigma_i$  – desvio padrão  
 $\mu^k$  – parâmetro de relaxação  
 $\Omega^k$  – matriz diagonal  
 $\varepsilon$  - tolerância

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

Neste capítulo introdutório discutem-se, em linhas gerais, a importância deste estudo nas diversas áreas tecnológicas e as motivações que levaram ao desenvolvimento deste. São apresentadas, também, uma visão global do trabalho e uma explanação sobre a organização do mesmo.

### **1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO**

Um grande número de processos físicos e químicos, espontâneos ou não, está intimamente relacionado à temperatura, tendo a sua realização e evolução em conformidade com as condições térmicas às quais está sendo submetido. Tais processos incluem fenômenos de transporte de calor e/ou de massa e implicam na necessidade do conhecimento das propriedades térmicas dos materiais envolvidos visando o seu gerenciamento e otimização.

O desenvolvimento de técnicas de solução dos sistemas de equações diferenciais parciais que governam os fenômenos de difusão é um campo de pesquisa bem definido, sendo de grande interesse tanto no contexto da matemática aplicada quanto das ciências

físicas. Equações diferenciais parciais parabólicas são de particular importância na área de transferência de calor.

Historicamente, o recente avanço tecnológico no desenvolvimento de computadores e *softwares* possibilitou a concentração e evolução nas aplicações dos métodos numéricos de solução, com destaque para os métodos de diferenças finitas e elementos finitos. Contudo, a pesquisa em técnicas de soluções analíticas nunca foi deixada de lado, alguns grupos prosseguiam no estudo da computação científica voltada ao método analítico, já que por vezes este pode fornecer um resultado mais exato e rápido, tornando menos indicada a utilização de técnicas puramente numéricas, apesar da dificuldade de competição quando a complexidade do problema aumenta. Nas últimas duas décadas do século passado, a técnica da Transformada Integral Generalizada se consolida como uma poderosa ferramenta numérico-analítica de solução das EDP's, oferecendo resultados *benchmarks* para problemas de difícil trato computacional (COTTA, 1993).

Alternativamente, o Método de Simulação de Rede, um procedimento considerado numérico, o qual tem base na analogia existente entre sistemas elétricos e térmicos, inicialmente implementado através de elementos reais de circuito (KARPLUS, 1958) tem encontrado vasto campo de utilização na última década, particularmente, na resolução de problemas envolvendo fenômenos de transporte, porém agora com o auxílio de ferramenta computacional de simulação, o *software PSPICE*.

O presente estudo apresenta a solução de um problema direto de condução de calor através da aplicação de duas técnicas de solução, uma técnica híbrida (numérico-analítica) e outra tida como numérica, porém com a ressalva de promover discretização apenas espacial, oferecendo resposta contínua no tempo.

Para efeito de validação das soluções obtidas via simulação computacional, foi desenvolvido um procedimento experimental baseado em um sistema de controle térmico. O sistema visa garantir fisicamente as condições impostas do problema para obtenção do campo dinâmico de temperatura, conforme solução teórica. Portanto, fornece os elementos de controle e instrumentação necessários à execução dos ensaios.

Por outro lado, pensando numa aplicação para a solução obtida, o estudo de propriedades para a caracterização térmica de materiais, fluidos líquidos em particular, desempenha um importante papel no controle e aperfeiçoamento de processos físico-

químicos, com destaque aos industriais, abrangendo desde a indústria do petróleo até a de alimentos. A determinação destas propriedades em líquidos é vital não apenas para a prática da engenharia, como também em análises e estudos teóricos. Desta maneira, o projeto de metodologias para medição/determinação das características dos materiais que permitem prever seu comportamento térmico torna-se bastante relevante.

Diversos modelos matemáticos e aparatos experimentais têm sido desenvolvidos visando caracterizar térmica. Importantes parâmetros térmicos são objetos de estudos como, por exemplo, a condutividade térmica, a difusividade térmica e o calor específico. A condutividade e a difusividade térmicas são dois dos parâmetros mais relevantes nestas análises. Sendo propriedades de transporte, são mais difíceis de serem medidas que as propriedades termodinâmicas, tal como massa específica e calor específico, o que implica em maiores dificuldades experimentais de identificação.

É possível classificar os métodos de estimativa de propriedades térmicas em duas categorias, a primeira baseia-se no fluxo de calor em regime estacionário. Tais métodos, comumente, empregam a geometria de placas planas paralelas ou cilindros coaxiais contendo uma amostra de fluido ou sólido no interior da cavidade proposta. Em regime estacionário, duas medições de temperatura dentro da amostra são suficientes para determinar sua condutividade térmica através da aplicação da lei de Fourier e do conhecimento do fluxo de calor gerado pela fonte de calor. Esta técnica apresenta duas dificuldades práticas básicas. A primeira é levar em consideração a resistência de contato entre a superfície da amostra e a superfície das armaduras. A segunda consiste na avaliação das perdas por convecção e/ou radiação, principalmente quando a diferença de temperatura entre o instrumento e o ambiente externo é elevada. Além disso, estes métodos restringem-se unicamente à medição da condutividade térmica do material.

Uma segunda classe de métodos para estimativa de parâmetros térmicos possibilita estimar simultaneamente mais de uma das propriedades térmicas do material, fazendo uso de alguns intervalos transientes ou estados periódicos estacionários. Neste segmento encontram-se dois dos mais referenciados na literatura, são eles: o método *flash* e o método da sonda.

O método *flash*, inicialmente proposto por PARKER et al (1961) consiste em irradiar uma amostra cilíndrica opaca de tamanho reduzido em sua superfície frontal e

medir a elevação da temperatura na face oposta. Apenas a transferência de calor axial é considerada no modelo matemático com a hipótese restritiva de que não ocorrem perdas de calor para o meio externo. A solução matemática deste modelo pode ser obtida através da aplicação do método da impedância térmica descrito por DEFER et al (2001). A máxima sensibilidade para a determinação da difusividade ocorre no tempo requerido para atingir-se metade da máxima elevação de temperatura. Um modelo matemático genérico de pulso, levando em consideração as componentes axial e radial do fluxo de calor foi proposta por WATT et al, em 1966. A solução, utilizando os resultados e os princípios gerais fornecidos por CARLSLAW e JEAGER (1953) é obtida por intermédio das funções de Green, supondo condições constantes na superfície. Evidentemente, esta hipótese implica em uma linearização da lei de radiação (promovendo resfriamento), o que só é admissível para pequenas variações de temperatura durante o transiente. O método *flash* possui a vantagem de evitar o problema da resistência térmica de contato entre a amostra a ser estudada e a fonte de calor ou o detector, uma vez que se utiliza um pulso de *laser* como fonte de calor e a elevação de temperatura na superfície oposta é detectada por um sensor infravermelho. Esta técnica é estendida a materiais semitransparentes utilizando-se um complexo modelo matemático que leva em consideração o acoplamento dos processos de transferência de calor condução-radiação (SILVA et al, 1998). Neste caso, geralmente, a solução é obtida através de simulação computacional, cujo detalhamento é descrito por VOZAR e HOHENAUER (2003). Para materiais granulares, como pós e solos, meios porosos como rochas, gases, etc., o método *flash* não é uma técnica adequada. As principais razões são: a maneira com a qual o material é manipulado durante a experiência e a propagação da radiação através dos poros. WAKEHAM e ASSAEL (2000) fazem um resumo das várias técnicas empregadas na estimação das propriedades térmicas desta classe de materiais.

A técnica da sonda, ou do fio-quente, encontra larga aplicação, pois se adéqua ao estudo térmico de diversos tipos de materiais. Segundo SASSI et al (2009), ela consiste no uso de uma delgada resistência cilíndrica fornecendo um fluxo de calor constante para um meio “infinito”. A medição da temperatura pode ser feita na superfície da resistência, ou em qualquer outro ponto de coordenada  $r$  pertencente ao meio em estudo. Normalmente, um modelo assintótico é aplicado na solução matemática da condução de calor. O perfil de temperatura obtido é logarítmico e, em termos do número de Fourier, é válido apenas no intervalo de tempo em que este é inferior a um. Conseqüentemente, somente medições de

temperatura para tempos maiores são utilizadas para estimar as propriedades térmicas e a eficiência do método está limitada a uma estreita faixa de valores para a difusividade.

Outras metodologias associadas à caracterização térmica de líquidos são as chamadas técnicas fototérmicas. Com o surgimento da cavidade ressonante de ondas térmicas, várias técnicas experimentais foram desenvolvidas para determinar a difusividade térmica de fluidos (gases e líquidos) fornecendo resultados de alta precisão. BALDERAS-LÓPEZ (2003) propõe a medição da efusividade térmica de líquidos transparentes por meio da técnica fotopiroelétrica. DELENCIOS et al (2007) propuseram um método avançado de medição da difusividade térmica de líquidos pela varredura da espessura da amostra analisando a fase do sinal fotopiroelétrico. Fazendo uso dos valores absolutos da fase e da espessura da amostra, o método produz resultados precisos para medidas de difusividade térmica, porém sua aplicação está associada a uma estreita faixa de variação nos parâmetros térmicos.

Diante do exposto, tanto o estudo teórico experimental para obtenção da dinâmica de temperatura no interior de um líquido (método direto - resolução de um problema de difusão de calor), quanto a aplicação para estimativa de uma propriedade térmica com base no campo experimental determinado (método inverso - resolução de um problema de estimativa de parâmetro) constituem-se importantes campos de pesquisa.

## **1.2 MOTIVAÇÃO**

Realizar um trabalho de pesquisa envolvendo instrumentação e controle de processos sempre foi de particular interesse, principalmente, no que tange a aplicações voltadas ao transporte de energia. Ao estudar um processo de difusão de calor, enquanto se desenvolve uma metodologia experimental necessária à análise, então, é a oportuna situação que reúne um anseio pessoal com a possibilidade de contribuição no âmbito acadêmico.

### 1.3 VISÃO GERAL DO SISTEMA PROPOSTO

Duas soluções teóricas diretas, um aparato experimental e uma análise inversa são aplicados para estimar a difusividade térmica de líquidos. Em termos teóricos, o problema direto consiste no modelo de condução de calor unidimensional, em coordenadas cilíndricas, com simetria radial para se obter a resposta transiente da temperatura medida no centro de uma célula cilíndrica. Para resolver o problema direto e, por conseguinte, determinar o campo de temperatura teórico são utilizados dois métodos: a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) e o Método de Simulação de Rede (NSM). É realizada uma comparação entre os resultados obtidos via modelagem matemática e dados experimentais.

O aparato, basicamente, consiste de uma cavidade cilíndrica de material metálico vazada, a qual é preenchida com o líquido em estudo. Elementos sensores “medem” a temperatura da superfície metálica, a qual precisa ser controlada (fixada no valor desejado). Um sistema de controle compara a temperatura real com o valor pré-fixado e envia sinal de comando a um atuador, que responde pelo aquecimento ou resfriamento da cavidade. Outros dispositivos sensores efetuam a medição da temperatura no interior do fluido. Tanto a instrumentação como o controle térmico são desenvolvidos via software, na plataforma *Labview* da *National Instruments*, com a utilização de suas respectivas interfaces de entrada e saída de dados.

Para resolução do problema inverso, a viabilidade em se determinar a difusividade térmica desconhecida, através do dispositivo proposto, é inferida analisando a representação matemática deste sistema. Um programa em linguagem MATLAB foi desenvolvido para viabilizar a solução do problema de estimativa de parâmetro para a difusividade térmica, o qual foi resolvido por meio da minimização da norma dos mínimos quadrados pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt. Os resultados obtidos demonstram a viabilidade do dispositivo proposto.

## 1.4 OBJETIVOS

O presente trabalho possui dois objetivos principais: a obtenção do perfil dinâmico da temperatura no interior de um fluido líquido contido em uma cavidade cilíndrica (teórico + experimental) e a determinação da difusividade térmica do referido líquido (a água), através de uma metodologia alternativa, simples e de custo reduzido.

Para tanto, os seguintes objetivos específicos são identificados:

- Proposição de um modelo de difusão de calor adequado;
- Resolução direta do problema de condução de calor unidimensional, em coordenadas cilíndricas para determinação do campo de temperatura, aplicando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT);
- Resolução do problema direto através do Método da Simulação de Rede (NSM), através da analogia existente entre sistemas elétricos e térmicos;
- Comparação entre os métodos de solução para o problema direto;
- Proposta de um sistema de controle de temperatura para manter as condições térmicas necessárias ao procedimento experimental real;
- Análise de sensibilidade dos parâmetros que intervêm no modelo matemático;
- Estimativa da difusividade térmica do material estudado, mediante modelo experimental e aplicação do método de Levenberg-Marquardt.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho de tese encontra-se estruturado em sete capítulos, organizados da forma descrita a seguir.

Podem ser vistos no Capítulo I uma introdução ao assunto cerne da pesquisa, incluindo a motivação para a realização deste trabalho, uma visão sintética da proposta da tese, os objetivos deste estudo e uma descrição da organização deste relatório.

No capítulo seguinte, Capítulo II, faz-se uma revisão do estado da arte nas técnicas aqui aplicadas, os métodos de resolução dos problemas direto e inverso. Define-

se, ainda, o sistema físico em questão e confrontam-se as técnicas para resolução do problema de condução de calor a ser resolvido.

O Capítulo III apresenta a modelagem matemática utilizada na solução do problema direto de determinação do campo de temperatura no interior do fluido em estudo. Tanto a metodologia de resolução via GITT para alcançar os resultados de referência, como também, o método de simulação de rede (NSM) são expostos.

No Capítulo IV é descrito o aparato experimental utilizado, o qual é composto de um sistema de instrumentação para medição e controle de temperatura, com conceituação e detalhamento das funções de seus principais constituintes.

Já no Capítulo V é discorrido sobre o paradigma referenciado como Métodos Inversos, cuja ênfase é voltada aos conceitos fundamentais e definições necessárias ao desenvolvimento e entendimento do problema inverso, bem como ao estudo teórico dos coeficientes de sensibilidade, em seguida apresentam-se os métodos de minimização, em particular, o método de Levenberg-Marquardt e, finalmente, a solução do problema proposto.

Os resultados alcançados são apresentados e discutidos no Capítulo VI, tanto no que concerne à resolução do problema teórico, quanto aos dados obtidos experimentalmente. São analisados e comparados os métodos de solução do problema direto. Faz-se a exposição do estudo de sensibilidade do sistema. A partir do método inverso de estimativa de parâmetro e dos dados experimentais chega-se à determinação do coeficiente de difusão térmica do líquido. Estudos a cerca do erro obtido são efetuados.

No Capítulo VII são expostas as conclusões a cerca dos resultados alcançados e são oferecidas sugestões e perspectivas para futuros trabalhos de pesquisa.

## **CAPÍTULO II**

### **ESTADO DA ARTE**

O objetivo central deste capítulo é situar o problema que será estudado, tanto do ponto de vista físico, como do ponto de vista matemático em relação a outros trabalhos encontrados na literatura. Inicialmente discorre-se sobre as leis básicas que regem o fenômeno físico. Em seguida examinam-se as contribuições mais relevantes existentes na literatura voltadas para a resolução do problema direto, em termos dos modelos matemáticos que permitem sua solução. Por fim, faz-se uma abordagem sobre o método inverso, enfatizando-se a técnica aplicada na solução do problema de estimativa de parâmetros deste trabalho, em particular.

#### **2.1 PROBLEMA DIRETO - CONDUÇÃO DE CALOR**

A energia transferida pelas partículas constituintes da matéria como os átomos, moléculas ou elétrons livres a partir das regiões mais quentes de um corpo (níveis superiores de agitação) para aquelas regiões mais frias (níveis inferiores de agitação) é chamada de calor (ÖZİŞİK, 1993). Portanto, calor é um fenômeno transitório (SONNTAG et al, 2003).

Condução é o modo de transferências de calor, no qual a troca de energia ocorre em sólidos ou fluidos estáticos (ou seja, não há movimento macroscópico no meio) partindo de regiões com temperaturas mais elevadas para outras de menor temperatura devido à existência de um gradiente térmico no corpo. O mecanismo físico que sustenta este fenômeno é a difusão de energia promovida pelo movimento molecular aleatório (INCROPERA e DEWITT, 2003).

A lei básica que estabelece a relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura, fundamentada em observações experimentais, é denominada lei de Fourier, em homenagem ao físico e matemático francês, Joseph Fourier, que a aplicou em sua teoria analítica sobre calor. Para um sólido isotrópico e homogêneo (isto é, um material no qual a condutividade térmica seja independente da direção), a lei de Fourier é dada pela seguinte expressão:

$$q''(r,t) = -k \nabla T(r,t) \quad \text{W/m}^2 \quad (2.1)$$

onde o gradiente de temperatura é um vetor normal à superfície isotérmica, o vetor fluxo de calor  $q''(r,t)$  representa a difusão de calor por unidade de tempo, por unidade de área da superfície isotérmica na direção de valores decrescentes de temperatura e  $k$  é uma grandeza escalar positiva, denominada condutividade térmica do material. A propagação da energia ocorrendo no sentido decrescente da temperatura justifica o sinal negativo do lado direito da equação.

No estudo de transferência de calor algumas propriedades do material são bastante relevantes, são as chamadas propriedades termofísicas, as quais englobam propriedades de transporte e propriedades termodinâmicas. Enquanto as propriedades de transporte incluem os coeficientes de taxa de difusão, como a condutividade térmica  $k$  (para transferência de calor) e a viscosidade cinemática  $\nu$  (para transferência de momentum), as propriedades termodinâmicas, referem-se ao estado de equilíbrio de um sistema, como, por exemplo, massa específica ( $\rho$ ) e calor específico ( $c_p$ ).

Uma propriedade intrínseca do material que indica a taxa pela qual a energia é transferida pelo processo de difusão é a condutividade térmica, a qual precisa ser conhecida a fim de que se possa aplicar a lei de Fourier. Ela depende da estrutura física, atômica e molecular da matéria, o que, evidentemente, relaciona-se ao estado físico da matéria. Considerando que a definição de condutividade térmica vem da lei de Fourier, tal grandeza depende da direção, portanto existe a possibilidade de que ela assuma valores distintos para cada direção. Quando seu valor não muda com a direção, dizemos que o meio é isotrópico.

Essa propriedade controla a taxa de transferência de calor para um dado gradiente de temperatura existente no meio em análise. Os materiais apresentam uma larga faixa de valores para a condutividade térmica, o que permite classificá-los de acordo com tal propriedade em isolantes (baixa condutividade térmica) ou condutores térmicos (alta condutividade térmica).

Considerando-se um meio fluido, o espaçamento intermolecular é muito maior do que no estado sólido, assim o movimento das moléculas é mais aleatório, a energia térmica transportada nesse estado é menos efetiva do que no estado sólido. A condutividade térmica dos gases e líquidos é, por esta razão, geralmente menor do que a dos sólidos.

A condutividade térmica de líquidos não-metálicos, em geral, diminui com a elevação da temperatura, sendo as exceções mais notáveis a glicerina e a água, para as quais há uma independência da pressão, exceto próximo ao ponto crítico. Outro fato é que, geralmente, a condutividade térmica diminui com o aumento do peso molecular. São freqüentes as tabelas com valores de condutividade térmica em função da temperatura do líquido no estado de saturação.

Chama-se capacidade calorífica volumétrica o produto  $\rho c_p$ , que representa a capacidade de um material armazenar energia térmica. Observa-se que para substâncias com grande massa específica, geralmente possuem baixo calor específico, tal como muitos sólidos e líquidos, tipicamente são bons meios de armazenamento de energia ( $\rho c_p > 1 \text{ MJ/m}^3 \cdot \text{K}$ ), o que não ocorre com substâncias gasosas, devido aos baixíssimos valores de suas massas específicas.

Durante o processo de difusão de calor no interior de um meio define-se difusividade térmica como sendo a relação entre a capacidade de conduzir energia térmica e a capacidade de armazená-la, a qual pode ser expressa na forma de relação entre a condutividade térmica e a capacidade térmica volumétrica:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.2)$$

Através da difusividade térmica podemos avaliar quão rapidamente um material responde às alterações nas condições de temperatura sobre ele impostas. Assim, substâncias com alto valor de difusividade térmica respondem rapidamente a variações térmicas, ocorrendo o oposto para substâncias de baixa difusividade térmica.

De acordo com INCROPERA e DEWITT (2003), inúmeros exemplos de falhas de equipamentos ou no projeto de processos poderiam ser citados, além do não-entendimento das especificações de desempenho, que poderiam ser atribuídos à falta de informações quando da seleção dos valores das propriedades chaves usadas na análise inicial dos sistemas. Portanto, o conhecimento dos valores mais precisos das propriedades termofísicas dos materiais é imprescindível para a engenharia de processos. Deve-se evitar o uso de dados obtidos na literatura ou em manuais, os quais não tenham sido bem caracterizados ou avaliados.

### **2.1.1 Equacionamento da Difusão de Calor**

O foco de estudo na condução de calor é a determinação do campo de temperatura no interior de um material resultante das condições impostas em suas fronteiras, ou seja, a obtenção do perfil de temperatura dentro do meio, variando conforme o tempo e a posição.

Mediante o conhecimento da distribuição de temperatura no meio, pode-se aplicar diretamente a lei de Fourier e calcular o fluxo de calor por condução em qualquer ponto.

No caso de um sólido, através do perfil de temperatura pode-se verificar a integridade de sua estrutura por meio das tensões térmicas, expansões e deflexões. Outras aplicações importantes são a otimização de um material isolante, a determinação da compatibilidade entre revestimentos especiais ou adesivos e a superfície sobre a qual são aplicados.

Qualquer que seja o sistema, ele deve obedecer à exigência da conservação de energia, cabendo sua aplicação a um volume finito (resultando numa expressão que rege todo o comportamento do sistema) ou infinitesimal (resultando numa equação diferencial que pode ser resolvida para condições pontuais do sistema). Podemos sumarizar em uma seqüência simples a metodologia para determinar a distribuição de temperatura:

- Inicialmente, define-se um volume de controle, delimitando-se a superfície de controle com uma linha tracejada;
- Define-se uma base de tempo;
- Identificam-se os processos relevantes de energia e faz-se uma representação gráfica dos mesmos em diagrama;
- Finalmente, escreve-se a equação de conservação, bem como as expressões apropriadas para as taxas de transferência de calor que devem substituir os respectivos termos na equação de conservação da energia.

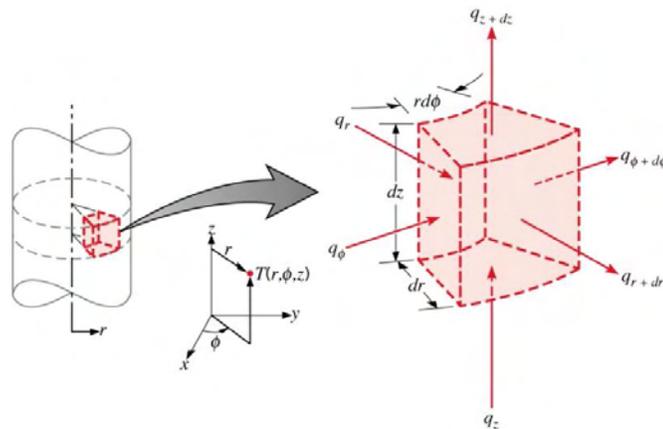


Figura 2.1: Volume de controle diferencial,  $dr \cdot r d\phi \cdot dz$ , para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ . Fonte: INCROPERA e DEWITT (2003).

Para um sistema de coordenadas cilíndricas, aplicando-se o balanço de energia ao volume de controle diferencial da Figura 2.1, chega-se à seguinte forma geral da equação do fluxo de calor:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Esta expressão estabelece que em qualquer ponto do meio, a taxa de energia líquida transferida por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica armazenada no interior desse volume. Conforme hipóteses sejam admitidas, mediante análise do problema em questão, a equação deverá assumir uma forma simplificada.

Para resolver a equação diferencial parcial que é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais são necessárias duas condições de contorno e, quanto ao tempo, como é de primeira ordem, apenas a condição inicial deve ser especificada. Assim, existem três diferentes tipos de condições de contorno lineares para a solução analítica de problemas de condução de calor:

1. Primeiro tipo (condição de contorno de Dirichlet) – quando a distribuição de temperatura é prescrita na superfície de contorno:  $T(0,t) = T_s$ .
2. Segundo tipo (condição de contorno de Neumann) – quando o fluxo de calor na superfície é prescrito,  $-k \partial T / \partial n = q''_s$  (onde  $n$  é a direção normal à superfície considerada). Um caso particular ocorre para uma superfície adiabática ou isolada, quando o fluxo é nulo,  $\partial T / \partial n = 0$ .
3. Condição de contorno do terceiro tipo – situação em que ocorre convecção na superfície de contorno,  $-k \partial T / \partial n = h[T_\infty - T(0,t)]$ .

Solucionar a equação de difusão de calor muitas vezes incorre em uma árdua tarefa de manipulação algébrica e, para certas condições não existe solução exata.

### 2.1.2 Sistema Físico

O sistema físico em questão consiste em uma cavidade cilíndrica de material metálico (alumínio) vazado, que internamente é preenchida com um líquido (água). A escolha do material metálico para a cavidade se deve à sua boa capacidade de difusão para chegar-se mais rapidamente a uma temperatura uniforme em toda a superfície. O fluido em estudo, água, já é bem caracterizado na literatura, facilitando comparações com os resultados alcançados, além do que é um dos principais constituintes de diversos produtos.

A Figura 2.2 ilustra o sistema físico de forma esquemática e simplificada, onde  $L$  é o comprimento do cilindro, o seu raio interno é  $r_0$  e  $r$  uma posição genérica no interior da cavidade. A temperatura na interface líquido-metal é imposta através de um sistema de controle térmico. O sistema de controle, basicamente, é composto por sensores, interface de aquisição e saída de dados (*Compact Field Point* - CFP), controlador PID (implementado via *software*) e atuadores (pastilhas de efeito *Peltier*), acoplados ao cilindro metálico. Os sensores são adequadamente posicionados de forma a se observar a evolução da temperatura nos pontos de interesse, os sinais são enviados ao controlador que realiza a comparação entre o valor obtido e o valor desejado da variável e ajusta a potência entregue à pastilha *Peltier* de modo a manter as condições exigidas durante o ensaio. O detalhamento do sistema de controle é apresentado no Capítulo IV.

Do ponto de vista de transferência de calor, o estudo do problema direto consiste em verificar a dinâmica da temperatura no interior de um fluido contido em uma cavidade cilíndrica, o qual, inicialmente, encontra-se a uma temperatura uniforme ( $T_{ini}$ ) e que bruscamente é submetido a uma temperatura imposta na parede interna da cavidade metálica ( $T_s$ ). O súbito gradiente térmico ( $T_s \neq T_{ini}$ ) promovido pela condição de contorno na superfície provoca o processo de difusão de calor dentro do meio.

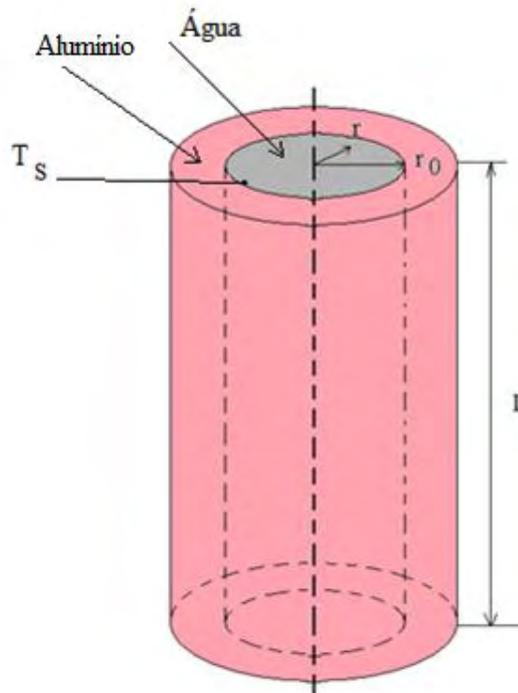


Figura 2.2 : Sistema físico simplificado.

## 2.2 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método consolidado na resolução de complexos sistemas de equações diferenciais e que tem encontrado suporte no desenvolvimento da capacidade de processamento e memória dos computadores atuais, bem como na evolução das linguagens computacionais.

Esta técnica espectral é definida como um método híbrido, devido à combinação entre ferramentas analíticas associadas a procedimentos numéricos que lhes são inerentes. Ela encontra vasto campo de aplicação na solução de problemas típicos de engenharia que envolvem acoplamento, oferecendo controle automático de erro global e significativa redução nos custos computacionais, quando comparada a métodos puramente numéricos .

Inicialmente, ÖZİŞIK e MURRAY (1974) propuseram a idéia da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) aplicada à resolução de sistemas de equações

diferenciais parciais, que a princípio não poderiam ser solucionados pela abordagem da separação de variáveis, evitando, assim, a restrição da separação a priori.

Na década de oitenta, a CITT foi estendida a aplicações em que tipicamente empregavam-se os métodos numéricos como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e seus variantes. Efetuando-se uma avaliação entre os métodos numéricos e a, então, recente técnica observou-se em favor desta as seguintes vantagens:

- Metodologia sistemática de solução;
- Redução do tempo de processamento;
- Controle prescrito de erro;
- Aceleração da taxa de convergência numérica;
- Não utilização de malhas;
- Obtenção de resultados *benchmark*;
- Determinação direta da função no ponto, sem necessidade de cálculos para instantes anteriores ou para outras posições espaciais;
- Possibilidade de integração com outros métodos.

Em 1984, MIKHAILOV e ÖZİŞİK apresentaram um trabalho formalizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), nele é feita uma classificação dos problemas lineares de valor de contorno (de difusão de calor e massa) a fim de tratar tais problemas através de uma abordagem sistemática e unificada, para tanto foram identificadas sete classes. O objetivo da nova técnica era reduzir as limitações impostas pela transformada clássica. A GITT proporciona soluções numérico-analíticas para problemas de convecção-difusão, cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas.

A técnica de transformação integral continuou avançando na solução de um número cada vez maior de problemas, sendo eles lineares ou não. Em 1993, COTTA publicou o trabalho mais completo e sistematizado sobre o tema. O próprio COTTA realizou uma revisão sobre a evolução da técnica posteriormente, em 1998.

São diversas as aplicações desta técnica em modelagens avançadas, ciência e tecnologia, com contribuições nas engenharias aeroespacial, nuclear, de controle de processos, civil e alimentos. Como exemplos mais recentes de estudos publicados:

SANTOS (2001) realizou um estudo sobre convecção forçada laminar de fluidos não newtonianos em tubos externamente aletados aplicando GITT, NASCIMENTO et al (2006) propuseram uma solução via transformada integral para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de fluidos não newtonianos em dutos circulares, VERONESE (2008) analisou o escoamento bidimensional de fluidos não newtonianos com formulação em variáveis primitivas, SILVA et al (2009) resolveram um problema de determinação do perfil de temperatura em solos utilizando esta técnica, Da SILVA et al (2009) em estudo sobre secagem de alimentos aplicaram a transformação integral na solução de um problema de transferência de massa e OLIVEIRA et al (2009) utilizaram GITT no dimensionamento de um sistema de controle térmico.

### 2.3 O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE

O presente trabalho de pesquisa propõe, ainda, a aplicação da analogia entre sistemas elétricos e térmicos, auxiliada pelo *software* *PSPICE* como solução do problema de determinação do campo de temperatura no interior da cavidade cilíndrica ao longo de um intervalo de tempo. Esta técnica é denominada: Método de Simulação de Rede, ou do inglês, *Network Simulation Method* (NSM), o qual se baseia na analogia física existente entre a condução de calor unidimensional transiente e o fluxo de corrente elétrica em circuitos com redes Resistor-Capacitor (RC).

Historicamente, a analogia RC foi utilizada pela primeira vez por PASCHKIS e BAKER (1942) para resolver a equação de condução de calor unidimensional em uma placa usando um analisador térmico de fluxo de calor e massa. Basicamente, este aparato era um computador analógico constituído de resistores e capacitores capaz de representar uma variedade de sistemas de condução de calor. Estes autores mediram as correntes instantâneas e as diferenças de potencial elétrico em um circuito tipo rede adequado às suas necessidades. Sob a ótica da analogia RC, estas medições correspondiam à taxa de transferência de calor instantânea e às diferenças de temperatura respectivamente (ALHAMA e CAMPO, 2003).

Da língua inglesa, *SPICE* significa *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*, ou Programa de Simulação com Ênfase em Circuitos Integrados e foi

desenvolvido pelo *Electronics Research Laboratory* da Universidade da Califórnia (EUA), NAGEL e PEDERSON (1973). Criado para aplicação no projeto de circuitos integrados (CI's), que tornava a simulação computacional obrigatória. Atualmente, o *SPICE* tornou-se o programa padrão para simulação de circuitos elétricos de propósito geral, tanto para análise em corrente contínua não linear, quanto transiente não linear e, ainda, corrente alternada linear, sendo adequado tanto para resolução de circuitos elétricos lineares quanto não lineares, VLADIMIRESCU (1994). Também, segundo VLADIMIRESCU (1994), o *SPICE* estabelece e soluciona as equações do circuito através de equações nodais (DORF, 1989, NILSSON, 1990, PAUL, 1989). Este *software* toma uma lista (*netlist*) descrevendo os elementos do circuito (resistores, capacitores, indutores, fontes de tensão, fontes de corrente, transistores e circuitos integrados) e suas respectivas conexões, faz a “tradução” destas para equações a serem resolvidas. Em geral, as expressões geradas são equações diferenciais utilizando métodos implícitos de solução, como o método de Newton e a técnica de matrizes espaçadas. *PSPICE* é um *SPICE* executável em computadores pessoais.

Devido à complexidade dos modelos matemáticos que envolvem os processos de difusão de calor, a analogia entre circuitos térmicos e elétricos tem sido aplicada como uma ferramenta rápida, precisa e simples, dado que os problemas podem ser resolvidos através de um programa de simulação para circuitos elétricos (*PSPICE*, 1994). O uso do *PSPICE* para este propósito possibilita a solução de complexos problemas da área de engenharia térmica, até mesmo para aqueles que não possuem muita habilidade com os típicos modelos matemáticos.

Segundo ZUECO et al (2004), a principal característica do NSM, método fisicamente inspirado, é o uso de intervalos discretos para a variável espacial (a variável tempo é uma função contínua). Este método não requer o estabelecimento de um critério de convergência para solucionar as equações de diferenças finitas que têm origem na discretização das equações diferenciais parciais do modelo matemático (ZUECO, 2006). Ele apresenta uma rápida convergência para análise de transientes, quando comparado com outros métodos de análise de transporte de energia por séries infinitas (ALHAMA e CAMPO, 2003).

Nos últimos anos, o NSM tem sido bastante referenciado e aplicado com sucesso na resolução de diversos problemas na área de transferência de calor. ALHAMA e

CAMPO (2003) utilizaram este método para realizar previsão numérica de temperaturas, com um modelo espaço-temporal aplicado em paredes multicamadas (compostas) para um bocal de um motor de foguete experimental. ZUECO et al (2004) fizeram uso do NSM para estudar um problema transiente de transferência de calor relativo a escoamento laminar em desenvolvimento em tubos submetidos a mudança de temperatura. ALHAMA et al (2005) obtiveram a solução numérica para equação de condução de calor para uma larga placa com simetria de temperatura na superfície. ZUECO et al (2005) aplicaram o método de especificação da função sequencial, através do NSM, a fim de realizar a estimativa do coeficiente de difusão de calor dependente do tempo via solução de problema inverso em uma placa. ZUECO (2006) resolve um problema de convecção livre (regime transiente), onde um fluido dissipativo escoo ao longo de uma placa vertical semi-infinita com transferência de massa quando a superfície é exposta a um fluxo de calor constante. ZUECO e CAMPO (2006) aplicaram o NSM para analisar o transiente de transferência de calor por radiação entre as paredes espessas de uma cavidade, utilizando a ideia de Oppenheim<sup>1</sup>. Em ZUECO e ALHAMA (2007), o NSM é utilizado no cálculo da estimativa simultânea inversa de propriedades térmicas dependentes da temperatura (condutividade térmica e capacidade calorífica volumétrica) de um fluido escoando através de um duto circular. BÉG et al (2008) apresentam um modelo matemático bidimensional para convecção livre, em meios porosos, através do uso do NSM. YANG e ZHOU (2008) analisa as propriedades de transferência de calor do diodo laser (LDM) pelo método da equivalência elétrica. Em PENG e WU (2008) é calculada a transferência de calor periódica que ocorre entre edificações e o ambiente externo a fim de simular climatização ambiente e melhorar o conforto térmico, auxiliados pela analogia entre sistemas térmicos e elétricos. Recentemente, ZUECO et al (2009) estudaram o escoamento bidimensional em regime estacionário na camada limite de um fluido incompressível em meio poroso Darciano de maneira teórica e computacional, usando NSM.

---

<sup>1</sup> Para trocas de calor em regime permanente entre as paredes delgadas e não-negras de uma cavidade, Oppenheim desenvolveu um método de rede chamando a razão  $(1-\varepsilon)/\varepsilon A$  de resistência à transferência de calor por radiação da superfície considerada, a qual relaciona a diferença de potencial criada com o poder emissivo de corpo negro  $E_b$  e a radiosidade  $J$  (ZUECO e CAMPO, 2006).

## 2.4 O PROBLEMA INVERSO

A resolução da equação de difusão de calor unidimensional, em coordenadas cilíndricas conhecendo-se as propriedades do meio, condições de contorno e inicial no intuito de determinar-se a distribuição de perfil dinâmico de temperatura diz respeito a um problema direto. Diz-se que, matematicamente, tal problema é bem posto, pois possui solução, a qual é única e dependente dos parâmetros (dados) de entrada.

A abordagem inversa é uma técnica que permite o uso eficiente de dados para promover a estimativa de funções e/ou parâmetros desconhecidos que aparecem na formulação do problema (modelo matemático) e auxiliar na descrição de um fenômeno físico. Portanto, podemos considerar problemas inversos de: condições iniciais, condições de contorno, termos-fonte e propriedades físicas do meio. Por exemplo, medidas de temperatura podem ser usadas para a estimativa das funções e/ou parâmetros desconhecidos presentes no equacionamento do problema de transferência de calor.

Problemas inversos são definidos em exato acordo com a nomenclatura, representando o inverso dos problemas diretos e, desta forma, classificados como mal postos (COLAÇO e ORLANDE, 2004), por não satisfazerem aos critérios de existência, unicidade e estabilidade da sua solução em relação aos dados de entrada.

BECK e WOODBURY (1998) afirmam que requisitos básicos para a solução de problemas inversos são medições e modelo matemático apropriados. Ferramentas importantes no processo geral são o desenvolvimento e a melhoria no modelo matemático empregado.

Para a solução de tais problemas é necessário transformá-los em problemas bem postos, o que pode ser efetuado com o auxílio dos chamados métodos de regularização. Os métodos de regularização consistem na determinação da solução aproximada mais suave compatível com os dados de observação, para um certo nível de ruído. A regularização de um problema mal posto pode ser obtida através da minimização da norma ordinária dos mínimos quadrados (BECK e ARNOLD, 1977, BECK et al., 1985, ALIFANOV, 1994, ALIFANOV et al., 1995, ÖZISIK e ORLANDE, 2000). Desde que as seguintes considerações sejam feitas: considerar os erros aleatórios aditivos, não correlacionados e de distribuição normal, com desvio padrão constante e de média zero.

ÖZISIK e ORLANDE (2000) apresentam em detalhe os passos básicos necessários a aplicação dos métodos de Levenberg-Marquardt de estimativa de parâmetros e do gradiente conjugado para estimativa de parâmetros e de funções.

O método de Levenberg-Marquardt foi desenvolvido em épocas distintas e usando pontos de partida diferentes, por LEVENBERG (1944) e por MARQUARDT (1963). LEVENBERG (1944) partiu de uma modificação da norma de mínimos quadrados, usando termo semelhante ao da regularização de TIKHONOV (TIKHONOV e ARSENIN, 1977). E, MARQUARDT (1963) derivou basicamente o mesmo procedimento iterativo obtido por LEVENBERG (1944) na procura por um método que tendesse para o método do gradiente (*steepest-descent*) no início do processo iterativo e para o método de Gauss na região próxima ao ponto de mínimo da função.

Este método envolve um procedimento iterativo para a solução de problemas de mínimos-quadrados não-lineares. Todavia, ele também pode ser aplicado a problemas lineares que são muito mal-condicionados para o cálculo não iterativo dos parâmetros, de acordo com ÖZISIK e ORLANDE (2000).

Alguns exemplos de aplicação, especificamente na área de propriedades térmicas, referente à solução de problemas inversos de estimativa de parâmetros através do método de Levenberg-Marquardt incluem a estimativa da difusividade térmica e do tempo de relaxação em modelos hiperbólicos de condução de calor (ORLANDE e ÖZISIK, 1994), da condutividade térmica e capacidade térmica (OLIVEIRA et al, 1999), da difusividade térmica aparente de solo argiloso (PEREIRA et al, 2006), da difusividade mássica efetiva de produto alimentício (SILVA et al, 2006) e de propriedades térmicas em meios porosos (SASSI et al, 2007), muito embora este método possua amplo campo de aplicabilidade.

## **CAPÍTULO III**

### **SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO**

Neste capítulo apresentam-se a formulação matemática do problema físico considerado e os dois métodos de abordagem para a sua solução. O primeiro método de solução é o da Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT). O Método de Simulação de Rede (NSM) é aplicado como uma solução alternativa.

#### **3.1 MODELO MATEMÁTICO**

A classificação das equações diferenciais parciais, o número de dimensões físicas consideradas, o tipo de sistema de coordenadas envolvido, a forma das equações principais e condições de contorno, o modo com o qual o problema se apresenta, se em regime permanente ou em transiente são fatores que afetam na formulação de um modelo matemático e na escolha do método de resolução.

Partindo-se do sistema físico descrito no item 2.1.2 do capítulo anterior, são consideradas hipóteses simplificadoras para se efetuar a resolução do problema direto, difusão de calor:

- Sistema de coordenadas cilíndricas com simetria radial;

- Desprezam-se os efeitos de convecção e radiação;
- Condução unidimensional em regime transiente;
- Temperatura inicial uniforme;
- O sistema forno-amostra está isolado da vizinhança;
- Cilindro muito longo ( $L \gg r_0$ );
- Sem geração interna de energia.

Mediante o conhecimento do problema físico, procura-se representá-lo matematicamente através de um modelo suficientemente pertinente com a realidade, porém passível de resolução, em conformidade com as hipóteses.

O passo seguinte é equacionar o fenômeno utilizando-se suas leis fundamentais. Equacionando-se a variação da energia térmica armazenada no volume de controle com o divergente do fluxo de calor, tem-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial t} = \nabla \bar{q}_t = -[\nabla \bar{q}_{cond} + \nabla \bar{q}_{conv} + \nabla \bar{q}_{rad}] \quad (3.1)$$

Em nosso caso, trabalharemos somente com água líquida na faixa de temperatura entre 10 e 80°C, a qual é opaca à radiação IV (térmica), portanto os processos de transferência de calor por radiação podem ser desprezados.

O número de Rayleigh é um importante parâmetro adimensional a ser avaliado para a análise de condução em líquidos, pois através dele pode-se analisar a relevância da transferência de calor por convecção no processo. Ele pode ser calculado pela expressão:

$$Ra = \frac{g\beta}{\nu\alpha} (T_p - T_\infty) D^3 \quad (3.2)$$

onde  $Ra$  é o número de Rayleigh,  $g$  é a aceleração da gravidade em  $m/s^2$ ,  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica ( $1/K$ ),  $\nu$  é a viscosidade cinemática ( $s/m^2$ ),  $\alpha$  é a difusividade térmica ( $m^2/s$ ),  $T_p$  e  $T_\infty$  são, respectivamente, a temperatura da parede e a do centro do cilindro em  $K$  e  $D$  é o diâmetro do cilindro ( $m$ ). Por exemplo, para uma elevação de  $0,2 K$  na temperatura da água, o número de Rayleigh é  $500$ . Caso o número de Rayleigh seja inferior a  $1400$ , pode-se desprezar a transferência de calor por radiação. Assim sendo, o único processo de transferência de calor a ser considerado é a condução.

A equação de difusão de calor adequada ao problema torna-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk(T) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = \rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

Tomando-se o produto  $\rho c_p$  como constante e substituindo-se a Eq. (2.2) na anterior, temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\alpha(T) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \quad \text{em } 0 < r < r_0 \quad (3.3a)$$

Com uma condição de contorno de simetria no eixo central do cilindro ( $r = 0$ ), ou seja, fluxo nulo:

$$\left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{em } r = 0 \text{ e } t > 0 \quad (3.3b)$$

E uma condição de contorno do primeiro tipo, temperatura imposta através do sistema de controle térmico em  $r = r_0$ :

$$T(r_0, t) = T_s \quad \text{em } r = r_0 \text{ e } t > 0 \quad (3.3c)$$

A condição inicial é uma temperatura uniforme em todo o volume de controle:

$$T(r, 0) = T_{ini} \quad \text{em } 0 \leq r \leq r_0 \text{ e } t = 0 \quad (3.3d)$$

Os seguintes grupos adimensionais são propostos:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha_0 t}{r_0^2}; & R &= \frac{r}{r_0}; \\ \theta(R, \tau) &= \frac{T(r, t) - T_s}{T_{ini} - T_s}; & \alpha^* &= \frac{\alpha(T)}{\alpha_0}; \end{aligned} \quad (3.4a, b, c \text{ e } d)$$

Inicialmente, a difusividade térmica será considerada dependente da temperatura, conforme a expressão abaixo:

$$\alpha^* = 1 + B\theta(R, \tau) \quad (3.5)$$

O problema em termos adimensionais, resultante da substituição das Eqs. (3.4) nas Eqs. (3.3) é descrito pela equação principal a seguir:

$$\frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \alpha^* \frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial R} \right) \quad \text{em } 0 < R < 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (3.6a)$$

obedecendo às seguintes condições inicial e de contorno:

$$\frac{\theta(0, \tau)}{\partial R} = 0 \quad \text{em } R = 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (3.6b)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad \text{em } R = 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (3.6c)$$

$$\theta(R, 0) = 1 \quad \text{em } 0 \leq R \leq 1 \text{ e } \tau = 0 \quad (3.6d)$$

A partir deste modelo matemático é possível determinar o campo de temperatura dentro do cilindro cheio de água, bastando resolver o sistema de equações diferenciais parciais (3.6) pré-definido. Tal sistema é classificado como parabólico, pois as condições em qualquer instante são influenciadas apenas por alterações ocorridas em instantes anteriores àquele considerado, não dependendo de instantes posteriores, portanto a equação é parabólica no tempo.

### **3.2 SOLUÇÃO VIA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)**

Resumidamente, a GITT consiste em transformar um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias infinito (expansão em série), mas que pode ser truncado em um número de termos suficiente para garantir a convergência. No caso de problemas que possam ser transformados em

sistemas desacoplados a solução é obtida analiticamente, já outros mais complexos são solucionados numericamente.

Uma característica notável do método é a garantia de soluções convergidas para ordens crescentes de truncamento das séries, distinguindo-o de outros métodos puramente numéricos. Portanto, para certo número de termos da expansão em série pode-se obter soluções com um número de algarismos significativos convergido.

### 3.2.1 Solução Formal

Embora outros passos intermediários tenham sido introduzidos à técnica para otimizar seu desempenho, como é o caso da aplicação de filtros para acelerar a convergência, ou reordenamento de autovalores e potenciais, segundo COTTA et al, 1997, os cinco passos básicos da GITT:

- Escolha de um problema auxiliar de autovalor, que contenha o maior número de informações possível a cerca do problema original;
- Desenvolvimento do par Transformada–Inversa adequado;
- Transformação integral do problema original pela substituição da fórmula da inversa nos termos não transformáveis ou utilizando a abordagem do balanço integral;
- Resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através do truncamento da série em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, obtendo-se os potenciais transformados;
- Aplicação da fórmula inversa ao campo transformado para obter a solução do problema original.

Primeiramente, propomos o problema auxiliar de autovalor, contendo informações a cerca do problema principal, que segundo ÖZİŞİK (1993) segue:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{d\psi_i}{dR} \right) + \mu_i^2 \psi_i = 0 \quad (3.7a)$$

$$\left. \frac{d\psi_i}{dR} \right|_{R=0} = 0 \quad (3.7b)$$

$$\psi_i(1) = 0 \quad (3.7c)$$

Tais equações representam um problema clássico de Sturm-Liouville, cuja solução é obtida na forma de autofunções:

$$\psi_i(R) = J_0(\mu_i R) \quad (3.8)$$

onde  $J_0$  são as funções de Bessel do primeiro tipo e ordem zero.

Feito isto, o passo seguinte é o desenvolvimento do par transformado:

$$\bar{\theta}_i(\tau) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 R \psi_i \theta(R, \tau) dR \quad \text{Transformada} \quad (3.9a)$$

$$\theta(R, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i \bar{\theta}_i(\tau)}{\sqrt{N_i}} \bar{\theta}_i(\tau) \quad \text{Inversa} \quad (3.9b)$$

onde  $\bar{\theta}_i(\tau)$  é a variável transformada e a norma  $N_i$  é dada por:

$$N_i = \int_0^1 R J_0^2(\mu_i R) dR \quad (3.10)$$

Conseqüentemente, as autofunções normalizadas são expressas por:

$$\tilde{\psi}_i(R) = \frac{\psi_i(R)}{\sqrt{N_i}} \quad (3.11)$$

as quais gozam da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR = \delta_{ij} \quad (3.12)$$

onde  $\delta_{ij}$  é definido por:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1, \text{ se } i = j \end{cases}$$

A transformação integral do problema principal é efetuada aplicando-se o operador  $\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) dR$  em ambos os lados da equação principal (3.6a) vem:

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \alpha * R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] dR$$

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \tilde{\psi}_i(1) \alpha * \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial R} - \tilde{\psi}_i(0) \alpha * \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial R} - \int_0^1 \left[ \alpha * R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial R} dR$$

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = - \int_0^1 \alpha * R \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial R} dR \quad (3.13)$$

Resolvendo o lado esquerdo da equação anterior (3.13):

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j \bar{\theta}_j \right)}{\partial \tau} dR$$

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 R \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_j dR \frac{\partial \bar{\theta}_j}{\partial \tau}$$

Aplicando-se a propriedade de ortogonalidade ao lado direito da equação anterior:

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \frac{\partial \bar{\theta}_j}{\partial \tau} \quad (3.14)$$

Chamando-se de  $W_{ij}$  o lado direito da equação (3.13):

$$W_{ij} = \int_0^1 \alpha * R \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial R} dR$$

Aplicando-se a definição de transformação integral:

$$W_{ij} = \int_0^1 \alpha^* R \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial R} \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j \bar{\theta}_j \right)}{\partial R} dR$$

$$W_{ij} = \int_0^1 \alpha^* R \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j dR \bar{\theta}_j$$

Lembrando que  $\alpha^* = 1 + B\theta(R, \tau)$ , temos:

$$W_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 R [1 + B\theta(R, \tau)] \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j dR \bar{\theta}_j$$

Portanto:

$$W_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \int_0^1 R \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j dR + \int_0^1 RB \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j \bar{\theta}(R, \tau) dR \right] \bar{\theta}_j$$

Chamemos o primeiro termo do somatório de  $A_{ij}$  e o segundo termo  $B_{ij}$ , então:

$$W_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ij} + B_{ij}] \bar{\theta}_j \quad (3.15)$$

Resolvendo o primeiro termo da equação (3.15):

$$A_{ij} = \int_0^1 R \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j dR$$

Integrando por partes:

$$A_{ij} = R \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}_j \Big|_0^1 - \int_0^1 \tilde{\psi}_j \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R \partial \tilde{\psi}_i}{\partial R} \right) dR$$

Considerando-se o problema de autovalor escolhido e suas condições de contorno chega-se a:

$$A_{ij} = \int_0^1 R \tilde{\psi}_j \tilde{\psi}_i \mu_i^2 dR$$

Utilizando-se a propriedade de ortogonalidade:

$$A_{ij} = \delta_{ij} \mu_i^2 \tag{3.16}$$

Resolvendo o segundo termo da equação (3.15):

$$B_{ij} = \int_0^1 RB \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j \bar{\theta}(R, \tau) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k \bar{\theta}_k \right) dR$$

$$B_{ij} = B \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 R \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j \tilde{\psi}_k dR \bar{\theta}_k$$

$$B_{ij} = B \sum_{k=1}^{\infty} E_{ijk} \bar{\theta}_k \quad (3.17)$$

Onde:

$$E_{ijk} = \int_0^1 R \tilde{\psi}'_i \tilde{\psi}'_j \tilde{\psi}_k dR \quad (3.18)$$

Desta maneira:

$$W_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_{ij} + B \sum_{k=1}^{\infty} E_{ij} \bar{\theta}_k \right] \bar{\theta}_j \quad (3.19)$$

Então, a equação principal transformada é dada por:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i(\tau)}{\partial \tau} = -\sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_{ij} + B \sum_{k=1}^{\infty} E_{ijk} \bar{\theta}_k \right] \bar{\theta}_j \quad (3.20a)$$

Para transformar a condição inicial, aplica-se o mesmo operador  $\int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) dR$  em ambos os lados da equação (3.6d):

$$\int_0^1 R \tilde{\psi}_i \theta_i(R, 0) dR = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i 1 dR$$

De onde se obtém a condição inicial transformada:

$$\bar{\theta}_i(\tau) = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i dR \quad (3.20b)$$

O sistema definido pelas equações diferenciais (3.20) para ser resolvido, pode receber um dos seguintes tratamentos:

- Solução completa - através de *softwares* de linguagem simbólica como o *Wolfram Mathematica*, ou de linguagem científica como o *Fortran Powerstation*, com o auxílio da sub-rotina DIVIPAG da biblioteca IMSL;
- Solução linear aproximada – considerando-se  $B = 0$ , tornando o problema linear, possibilitando, assim, o retorno ao potencial original de temperatura e a resolução de um problema bem mais simplificado de transferência de calor.

Ambos os tratamentos foram implementados através do *software* Fortran no presente trabalho.

### 3.2.2 Solução do Problema Linear

Como primeira aproximação, pode-se adotar a hipótese que a difusividade térmica  $\alpha$  não dependa da temperatura. Conseqüentemente, passamos a visualizar um problema linear de difusão de calor. Onde, a equação principal do problema linear transformado é uma simplificação da equação (3.20a), dada por:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) = 0 \quad (3.21a)$$

Cuja condição inicial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\theta}_i(0) = -\frac{1}{\mu_i} J_1(\mu_i) \quad (3.21b)$$

onde  $J_1$  é a função de Bessel do primeiro tipo e ordem 1.

De acordo com BOYCE e DIPRIMA (2006), a solução do problema transformado (3.21) é do tipo:

$$\bar{\theta}_i(\tau) = C \cdot e^{-\mu_i^2 \tau} \quad (3.22)$$

onde a constante  $C$  é obtida mediante a substituição da condição inicial (3.21b) na equação anterior (3.22).

Retornando-se à equação da inversa (3.9b), obtém-se:

$$\theta(R, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_i R)}{\sqrt{N_i}} \cdot \left[ \int_0^1 \frac{J_0(\mu_i R)}{\sqrt{N_i}} R dR \right] \cdot e^{-\mu_i^2 \tau} \quad (3.23)$$

Partindo-se da equação (3.4c), chega-se a:

$$T(r,t) = \theta(R,\tau) \cdot [T_{ini} - T_s] + T_s \quad (3.24)$$

Então, pode-se voltar ao potencial original:

$$T(r,t) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_i \cdot r/r_0)}{\sqrt{N_i}} \cdot \int_0^1 \frac{J_0(\mu_i \cdot r/r_0)}{\sqrt{N_i}} \frac{r}{r_0^2} dr \cdot e^{-\mu_i^2 \alpha t / r_0^2} \right\} (T_{ini} - T_s) + T_s \quad (3.25)$$

Com a equação anterior pode-se determinar diretamente o valor da temperatura no interior do cilindro, seja qual for a posição radial ou o instante considerado.

### 3.3 SOLUÇÃO VIA MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE REDE (NSM)

O Método de Simulação de Rede, ou do inglês, *Network Simulation Method* (NSM), é um procedimento numérico que se baseia na analogia física existente entre a condução de calor unidimensional e o fluxo de corrente elétrica, conforme ocorre em circuitos R-C (ALHAMA e CAMPO, 2003). De acordo com KARPLUS, 1958, redes de Resistores-Capacitores são empregadas na simulação de campos contendo elementos de dissipação e armazenamento de energia. Tais campos são governados pela equação de difusão ou alguma forma modificada da mesma, particularmente, no caso de difusão de calor e não havendo geração interna de energia, estes campos podem ser representados por:

$$\nabla(k\nabla T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

onde  $T$  é a temperatura,  $k$ ,  $\rho$ ,  $c_p$  e  $\alpha$  são, respectivamente, a condutividade térmica, a massa específica, o calor específico e a difusividade térmica do material em estudo. Estas equações são reconhecidamente similares àquelas que governam a distribuição de potenciais elétricos nos campos contendo resistores e capacitores. Desta maneira, o campo de difusão de calor pode ser simulado por redes de resistores e capacitores.

Um sistema térmico pode ser virtualmente dividido em volumes discretos. As propriedades de cada uma destas seções é então simulada através da rede RC análoga, de tal maneira que o potencial elétrico em relação ao terra em cada nó corresponda à temperatura no centro do setor correspondente no campo térmico.

Cada parâmetro e variável no circuito elétrico análogo correspondem a um parâmetro ou variável no sistema térmico. Através da Tabela 3.1 é possível observar a analogia existente entre as grandezas elétricas e térmicas, com seus respectivos símbolos e unidades de medida, segundo o sistema internacional de unidades (SI). Estas grandezas análogas incluem três variáveis dependentes (as grandezas entre e através dos dois sistemas e uma variável dependente que é a integral das grandezas através), dois parâmetros do campo e a variável independente (tempo).

Nesta equivalência, a variável taxa de transferência de calor corresponde à corrente elétrica, “grandezas através”, e a diferença de temperatura equivale à diferença de potencial elétrico (voltagem), “grandezas entre”. Sob o ponto de vista físico, cada resistor da rede RC representa a resistência ao fluxo em uma direção específica através de um segmento de linha, vetor área ou vetor volume associado ao resistor. Os resistores representam, portanto, a dissipação da energia no campo original. Os capacitores, por outro lado, representam as propriedades de armazenamento de energia. Cada capacitor está associado à capacidade de um ponto específico do campo poder armazenar energia. A magnitude dos capacitores em cada caso é proporcional às dimensões (comprimento, área ou volume) da porção do campo que ele representa.

Tabela 3.1 – Analogia entre Grandezas nos Circuitos Elétricos e Térmicos

<b>Elétricas</b>			<b>Térmicas</b>		
Descrição	Símbolo	Unidade	Descrição	Símbolo	Unidade
Diferença de Potencial (voltagem)	$\Delta V$	V	Diferença de Temperatura	$\Delta T$	K
Corrente	I	A	Taxa de Transferência de Calor	q	W
Carga	q <sub>e</sub>	C	Energia Térmica	Q	J
Tempo	t <sub>e</sub>	s	Tempo	t <sub>t</sub>	s
Resistência	R	$\Omega$	Resistência Térmica	R	K / W
Capacitância	C	F	Capacitância térmica	C	J / K

### 3.3.1 Solução do Problema Linear

O projeto do circuito em rede RC envolve a representação por diferenças finitas das equações diferenciais que governam o sistema, apenas no âmbito espacial. Uma malha de coordenadas discretas é imposta ao campo em estudo. Um nó típico da malha é identificado pelo subscrito 0. Os nós adjacentes na direção x são denotados pelos subscritos 1 e 2. Efetuando-se uma reorganização da aproximação por diferenças finitas, chega-se a:

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta x^2} + \frac{T_2 - T_0}{\Delta x^2} \cong \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial t}$$

A equação relacionada aos potenciais elétricos para o típico nó da rede análoga, conforme a lei das correntes de Kirchhoff é:

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} = C_0 \frac{dV_0}{dt}$$

onde V é o potencial elétrico no ponto considerado, R e C são, respectivamente, a resistência elétrica e a capacitância. Como se pode observar, a aproximação por diferenças finitas ocorre apenas no lado esquerdo das duas equações anteriores, o lado direito das equações permanece na forma diferencial original.

Com base no circuito elétrico projetado, tipo rede de Resistores-Capacitores, o *software* (PSPICE) gera um arquivo lista (*netlist*) descrevendo a composição e organização do sistema, então cria um conjunto de equações diferenciais, uma para cada volume de controle, obtida através da discretização espacial das equações definidas pelo modelo matemático no processo físico.

Para calcular os valores das resistências e capacitâncias do circuito elétrico análogo é necessário o conhecimento das propriedades do material, como condutividade térmica, massa específica e calor específico. As características geométricas do material também são importantes, pois afetam o cálculo de seu volume. Assim, dado que nosso problema é um processo de difusão em geometria cilíndrica, segundo KARPLUS (1958) pode-se, simplesmente, calcular os parâmetros:

$$R_t = \frac{\ln\left(\frac{r_{n+\Delta}}{r_n}\right)}{2\pi kL} \quad (3.26)$$

$$C_t = \pi\rho c_p (r_{n+\Delta}^2 - r_n^2)L \quad (3.27)$$

onde  $R_t$  é o valor da resistência elétrica que representa o efeito dissipativo do volume considerando,  $r$  é a posição radial,  $k$  é condutividade térmica do material,  $L$  é o comprimento do cilindro,  $\rho$  e  $c_p$  são, respectivamente a massa específica e o calor específico do meio, o índice  $n$  indica o número do nó no circuito.

O modelo NSM de um meio é obtido conectando-se  $N$  elementos de rede em uma série (discretização espacial). A Figura 3.1 ilustra uma típica célula intermediária do circuito elétrico, ou volume elementar do sistema.

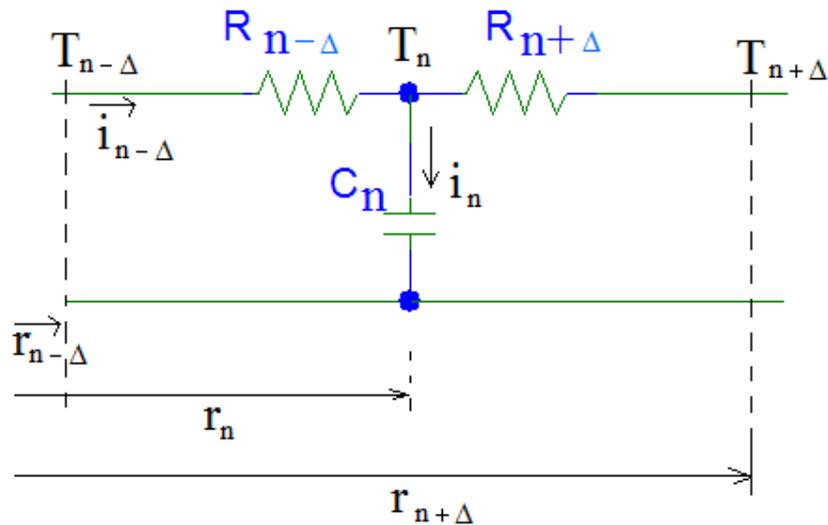


Figura 3.1: Célula, ou volume elementar do circuito elétrico em rede RC

Onde  $T$  é o potencial do nó (V),  $i$  representa a corrente elétrica (A),  $R$  resistência ( $\Omega$ ),  $C$  capacitância (F) e  $r$  a posição radial (m), os índices  $n$  e  $\Delta$ , referem-se ao número do nó e ao incremento, respectivamente. As condições de contorno são implementadas por dispositivos elétricos adicionais nas localizações requeridas. Podemos considerar um circuito alimentado por uma fonte de tensão que promove um súbito degrau, a seguir medimos a evolução da tensão elétrica em pontos específicos para estudar o comportamento do sistema. Calculados os valores dos componentes do circuito, faz-se um diagrama esquemático no *software PSPICE* e procede-se uma simulação, especificando o tempo total de observação e determinando os intervalos de tempo em que serão feitas as

tomadas de medidas. O próprio programa fornece um gráfico de saída dos dados, as tensões nos pontos ao longo do tempo, equivalendo às medidas de temperatura nas posições especificadas em função do tempo.

Numa primeira abordagem de solução, ao supor que os valores de R e C são constantes implica na solução de um problema linear de difusão de calor, ou seja, tomam-se as propriedades do meio como independentes da temperatura.

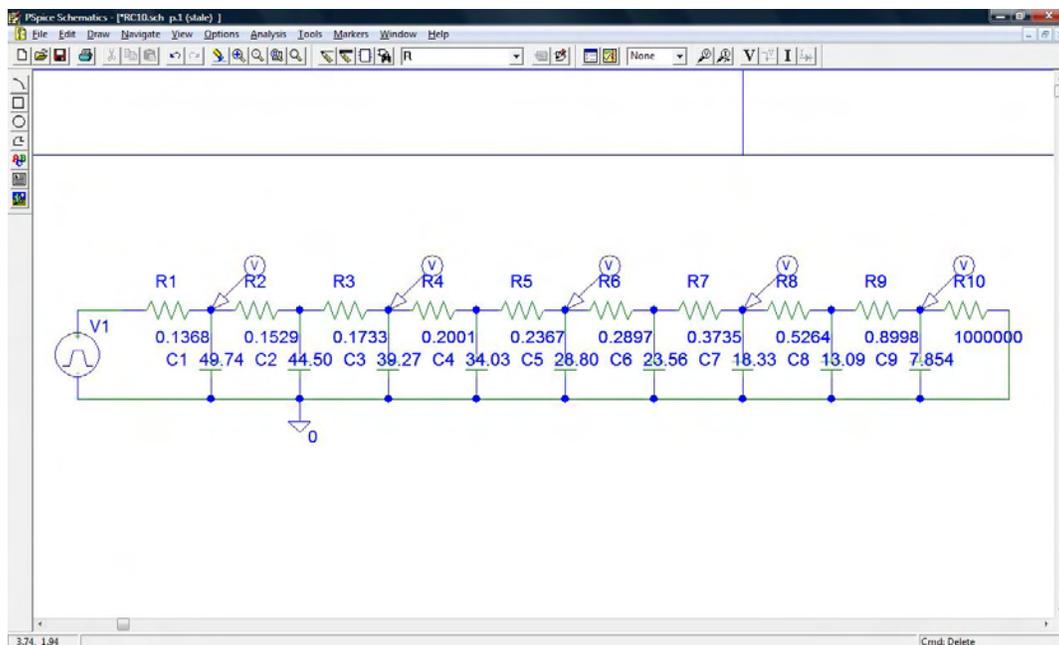


Figura 3.2: Diagrama esquemático de um circuito em rede RC no *PSICE*

Um exemplo de circuito elétrico em rede RC com dez mais um nós, ou seja, o sistema dividido em dez volumes elementares (células) é ilustrado na Figura 3.2, a qual nos permite observar o diagrama esquemático no *PSPICE*, com a representação dos componentes e a visão geral da tela de diagramação do *software*. O circuito, basicamente, consiste numa rede de resistores e capacitores e o número de nós faz um ajuste na precisão

de localização de um ponto, o aumento do número de nós implica no refinamento da malha de discretização espacial.

Após a simulação, o programa fornece uma saída de dados que pode ser diretamente analisada, como se pode observar pela Figura 3.3 e, outra opção, é um arquivo com os resultados numericamente expressos (com extensão *.out*), o qual pode ser manipulado em editores de texto e planilhas eletrônicas.

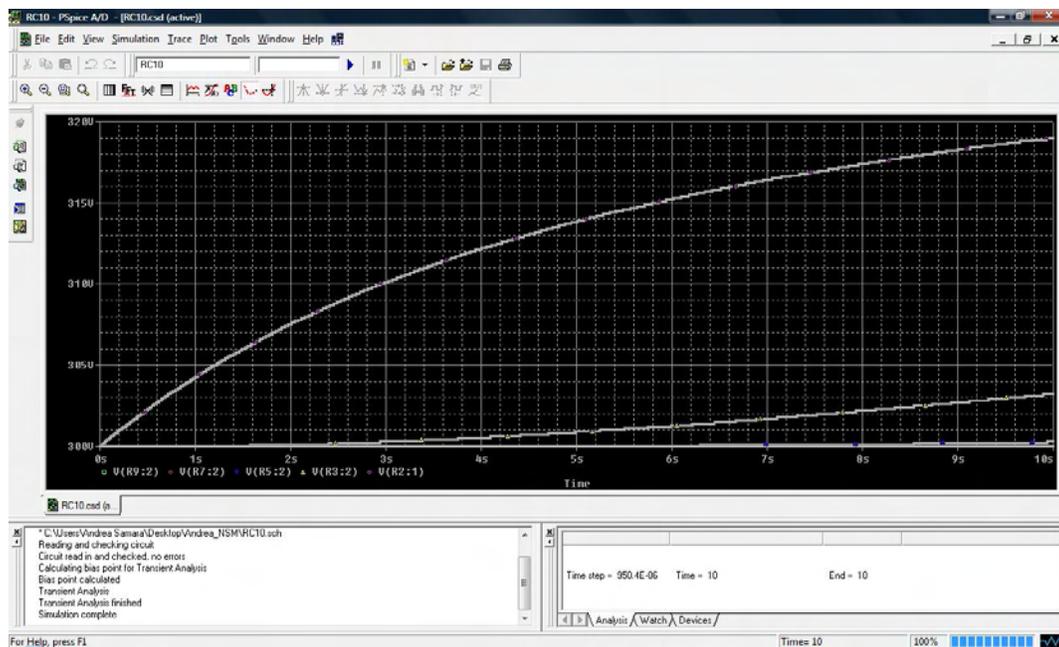


Figura 3.3: Tela para visualização do resultado da simulação de um circuito em rede RC no *PSIPCE*

As principais vantagens deste método são: solução em verdadeiro tempo real, velocidade de processamento, ausência de sofisticado modelamento matemático e análise de convergência. Suas desvantagens residem na precisão, devido à discretização espacial e no projeto das células elementares, principalmente em sistemas multidimensionais.

### 3.3.2 Solução do Problema Não Linear

Expandido a idéia de rede de resistores e capacitores, este método permite uma rede de impedâncias, as quais tenham correspondência nos circuitos análogos. Desta maneira, caso seja considerado um meio material onde ocorre o processo de difusão de calor cujas propriedades térmicas variem com a temperatura, o circuito elétrico equivalente deve ser constituído por elementos cujas propriedades elétricas variem com o potencial elétrico.

Consideremos, então, que o fluido em estudo tenha a condutividade térmica variando linearmente com a temperatura ( $k = k_0 + k_1 \cdot T$ ), de posse de uma tabela onde constem os valores destas grandezas, efetua-se uma regressão linear e encontra-se uma expressão relacionando as mesmas. Tomemos como constantes a massa e o calor específicos do material.

Feito isto, basta aplicar a idéia de resistência elétrica variando com o potencial elétrico ao NSM, uma vez que o inverso da resistência tem analogia com a condutividade e tensão (ou potencial) elétrica com a temperatura. Portanto, na rede RC, substitui-se os resistores constantes por resistores que têm o valor da resistência elétrica atrelado à tensão. Os capacitores, como estão relacionados às propriedades de armazenamento de energia (massa e calor específicos), não se alteram.

Com base na necessidade exposta e graças às ferramentas facilitadoras do *software PSPICE*, desenvolveu-se um componente com as características requeridas. A Figura 3.3 é uma ilustração do “resistor termo-variável”, retirado de um trecho de circuito da rede. O componente denotado por R2 é a parte fixa, os demais elementos compõem a parte termo-dependente do resistor, são elementos que efetuam algumas operações como soma e multiplicação a fim de gerar a devida proporcionalidade entre a condutância ( $1/R$ ) e



## CAPÍTULO IV

### MATERIAL E MÉTODO EXPERIMENTAL

O presente capítulo versa sobre o material e o método experimental utilizados neste estudo. Inicialmente, é apresentada uma visão geral do sistema de instrumentação e controle térmicos. Posteriormente, faz-se o detalhamento de cada uma de suas partes constituintes e, finalmente, descreve-se o método experimental.

#### 4.1 O SISTEMA FÍSICO

Fisicamente é necessário, não apenas, medir dinamicamente o campo de temperatura no interior da cavidade cilíndrica, como também manter a condição de contorno de temperatura imposta na interface entre o cilindro metálico e o líquido em estudo.

Para tanto, propõe-se um sistema de controle térmico e instrumentação para medição de temperatura. Na Figura 4.1 temos um diagrama representativo do sistema físico proposto, onde se pode visualizar o cilindro metálico (1) com a cavidade preenchida pelo líquido em estudo (2), no eixo central encontram-se os sensores tipo termopares (imersos no fluido - 4), na carcaça metálica (próximos a superfície interna do cilindro) estão dispostos os sensores tipo RTD's (3), os módulos de efeito *Peltier* (atuadores - 5) também se encontram em contato com o cilindro de alumínio, ligados a eles estão os dissipadores (aletados - 6), os quais sofrem o efeito de convecção forçada produzida por *coolers* (7) próximos; os sensores são ligados a um *compact Field Point* (cFP - 8) que “leva” a informação a um computador PC (10), onde está em execução um *software* na

plataforma *Labview*; o cFP também “envia” informação de controle a um circuito de potência (9) para regular o nível de atuação das pastilhas *Peltier*.

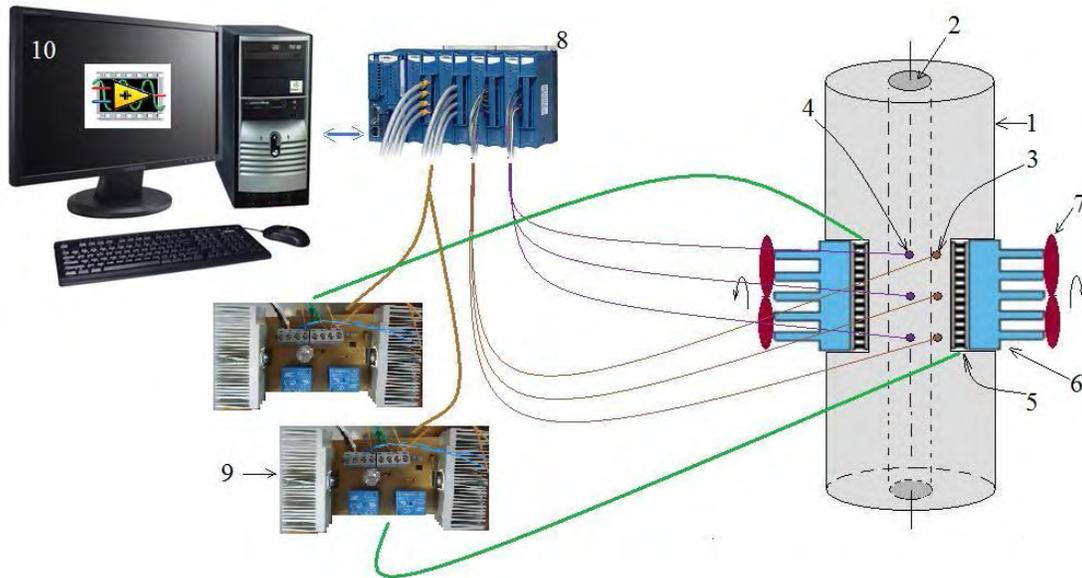


Figura 4.1: Diagrama representativo do sistema físico proposto

## 4.2 CILINDRO METÁLICO

O cilindro utilizado é de alumínio, seu comprimento é de 24,0 cm, com diâmetro externo igual a 4,5 cm e diâmetro interno 1,0 cm. A parte inferior possui uma tampa do mesmo material para vedação e a parte superior tem abertura para introdução e retirada do fluido. Ele foi revestido com material de isolamento térmica para evitar trocas de calor com o ambiente exterior, somente um pequeno orifício na superfície superior, coincidente com a abertura no metal, foi deixado descoberto para possibilitar a introdução e retirada do líquido em estudo.

### 4.3 SISTEMA DE CONTROLE TÉRMICO

Como descrito no capítulo II, item 2.1.2, o sistema físico proposto requer a manutenção da temperatura na superfície interna do cilindro metálico. Portanto, o sistema de controle de temperatura desempenha uma importante função no presente trabalho, uma vez que mantém a condição de contorno do primeiro tipo no problema.

Mesmo mediante perturbações externas o sistema deverá ser capaz de manter a estabilidade térmica dentro da cavidade cilíndrica que contém o fluido em estudo, garantindo que o modelo experimental esteja o mais próximo possível do modelo matemático proposto. Este sistema de controle permite que os ensaios sejam realizados em uma faixa de temperatura que vai de 10°C a 80°C, diferentemente de outros que atuam com conjunto de resistências, proporcionando apenas temperaturas acima da ambiente.

Nos procedimentos experimentais para a determinação de propriedades térmicas ou em outros processos que dependem da temperatura, o controle térmico é um tópico de destaque, o qual é objeto de muitos estudos acadêmicos, tanto no âmbito das aplicações práticas, como por intermédio de simulações. Em 2001, DUARTE propôs um controle de temperatura utilizando lógica fuzzy (nebulosa) para aplicação em um sistema de secagem de cerâmica, mediante simulação.

PAZ (2002) efetuou estudo teórico e experimental a cerca do controle térmico em uma cavidade retangular objetivando alta exatidão e estabilidade na resposta de circuitos eletrônicos (circuitos integrados com componentes para montagem em superfície).

Em 2004, NASCIMENTO apresentou um sistema de controle termorresistivo autocompensado aplicável no condicionamento de um ambiente para obter alta exatidão e estabilidade de resposta de circuitos eletrônicos confeccionados com tecnologia IC – SMD (*Integrate Circuit –Surface Mount Device*).

BELO et al (2004) estudaram um sistema de controle térmico aplicado na obtenção de alta precisão, resposta rápida e estabilidade, o sistema realiza compensação automática e o elemento sensor opera também como atuador (fonte de calor).

Outro sistema de controle térmico, desta vez em uma cavidade cilíndrica, foi proposto por PAZ (2008), também aplicável ao condicionamento de ambiente para obter alta exatidão e estabilidade na resposta de circuitos com tecnologia IC – SMD.

O sistema de controle térmico proposto, basicamente, é composto pelos elementos controlador, interface (*hardware e software*), circuito de potência, atuador, sensor e planta, da qual se objetiva controlar a temperatura.

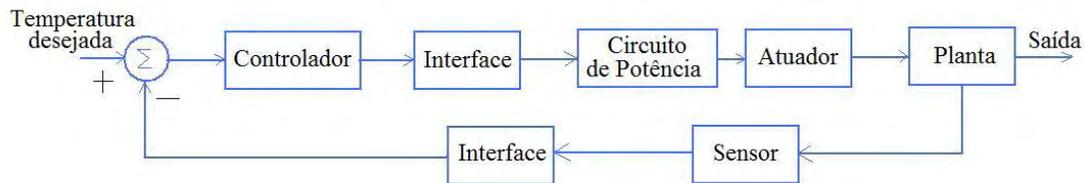


Figura 4.2: Sistema de controle térmico.

Esquemáticamente, na Figura 4.2, temos o diagrama em blocos do sistema. O bloco designado como planta consiste no conjunto cilindro metálico preenchido com líquido, cuja temperatura, em alguns pontos, é medida através de sensores (termoresistores – PT 1000), o sinal elétrico gerado é condicionado através de uma interface e, a seguir, é enviado ao controlador PID. O valor medido e o valor desejado da temperatura, na interface metal-líquido, são comparados no controlador e este se responsabiliza por controlar o nível de sinal que será enviado à interface, posteriormente ao circuito de potência e, finalmente, ao dispositivo atuador (*Peltier*), de forma a aquecer ou refrigerar a planta do sistema, conforme seja necessário.

#### 4.3.1 Elementos Sensores

O sensoriamento de temperatura tem três funções básicas: indicação, alarme e controle. Em determinadas aplicações, a temperatura precisa apenas ser monitorada, para outras aplicações o valor da temperatura deve ser acompanhado e um sinal de alarme deve ser emitido quando determinado valor for alcançado e, em outras situações deve haver um controle atuando no sistema para manter a temperatura especificada.

Variações na temperatura ambiente afetam a precisão e a confiabilidade da instrumentação de medição da temperatura, pois afetam as propriedades dos dispositivos sensores. O circuito sensor deve ser capaz de efetuar a compensação desta variação.

A calibração de determinado dispositivo de medição de temperatura é geralmente realizada sujeitando-o a alguns pontos fixos estabelecidos, como por exemplo, pontos de fusão e ebulição de algumas substâncias padrões, ou comparando suas leituras com aquelas obtidas por sensores mais precisos, os quais já foram calibrados.

O método de medida elétrica de temperatura é muito conveniente porque fornece um sinal que é facilmente identificado, amplificado ou usado para propósito de controle. Os instrumentos são usualmente exatos quando apropriadamente calibrados. Além disso, a instrumentação microprocessada, permite um uso mais rápido da informação contida no sinal.

Para a presente aplicação, são utilizados elementos sensores com as funções de indicação e controle de temperatura. O sensoriamento para controle da temperatura imposta na superfície interna da cavidade cilíndrica é feito através de PT's, já o campo de temperatura no interior do fluido em estudo é medido via termopares.

#### **RTD's (*Resistance Temperature Detectors*)**

Tipicamente, os elementos empregados na fabricação dos RTD's (termorresistores) são: Níquel (Ni), Cobre (Cu) e Platina (Pt). De longe, os RTD's de Platina de 100 e 1000 $\Omega$  são os mais comumente utilizados, também denominados PRT's (Termômetros Resistivos de Platina) ou, simplesmente, PT's (Termômetros de Platina).

Um dos sensores de temperatura mais lineares, estáveis e de boa repetibilidade é o RTD de Platina. A característica resistência do RTD versus temperatura é estável, apresenta repetibilidade e possui um coeficiente positivo de temperatura próximo do linear numa faixa de -200°C a 800°C. Estes atributos fazem do RTD um sensor com padrões industriais. A temperatura é determinada pela medição da resistência e, então, usando-se a característica R (resistência elétrica) em função de T (temperatura) para se calcular a temperatura.

Para se trabalhar com tais sensores os fabricantes fornecem tabelas que relacionam o valor da resistência com a temperatura ou, faz-se uso de uma expressão para correlacionar tais grandezas. A equação normalmente utilizada é dada por:

$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (4.1)$$

onde:  $R_0$  é o valor da resistência elétrica a 0°;

$\alpha$  é o coeficiente de variação da resistência com a temperatura.

Os parâmetros  $R_0$  e  $\alpha$  são característicos do material do qual é feito o resistor (sensor), seus valores, portanto, devem ser fornecidos. Quando for necessária maior precisão pode ser utilizada a seguinte equação:

$$R = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2) \quad (4.2)$$

onde:  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros característicos do material.

Foram selecionados PT's 1000 - classe A, ou seja, são utilizados elementos sensores cuja resistência ôhmica a 0°C vale 1000 $\Omega$  e oferecem o maior nível de precisão alcançável por dispositivos deste tipo. Segundo a norma IEC60751, tais dispositivos na faixa de 0 a 100°C apresentam uma tolerância de  $\pm 0,06$  a  $\pm 0,13 \Omega$ , ou, em termos de indicação da temperatura,  $\pm 0,15$  a  $\pm 0,35^\circ\text{C}$ .

Abaixo, na Figura 4.3, temos uma ilustração de PT's 1000:

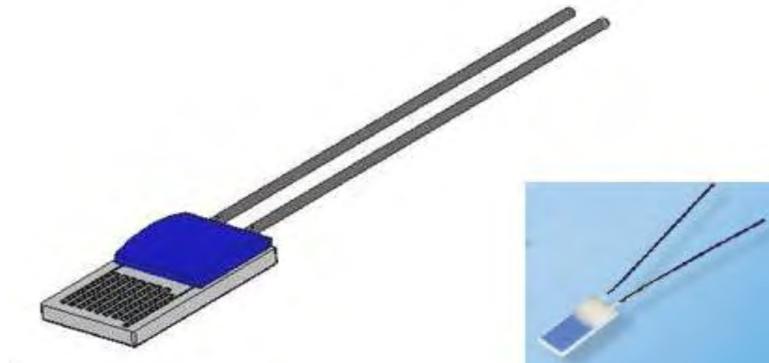


Figura 4.3: PT 1000

Neste caso, tomamos três sensores PT's 1000 para indicação de temperatura, os quais são ligados a um módulo de interface próprio para esse tipo de sinal, não se fazendo necessária a prévia calibração destes componentes, pois uma vez que seja fixada (via *software*) a sua especificação, o próprio programa faz os ajustes requeridos. O que se deve ao fato de haver plena compatibilidade entre a interface física do cFP e o *software Labview*, onde foi desenvolvido o programa de controle, ambos produtos da *National Instruments*. Assim, pode-se acompanhar a leitura de temperatura em cada um dos sensores

no painel frontal do programa (*real time*). Enquanto isso, no controlador, tais leituras são comparadas com o valor desejado da temperatura, efetuando a realimentação do sistema térmico.

Quanto ao posicionamento dos PT's no aparato experimental utilizado, o cilindro de alumínio foi perfurado na metade do seu comprimento, outros dois furos foram feitos, distando cada um deles 1,0 cm do primeiro, a seguir os sensores foram introduzidos nestas pequenas cavidades, conforme se pode observar na Figura 4.4. Com o objetivo de melhorar o contato entre os sensores e a superfície metálica, os PT's foram revestidos com pasta térmica.

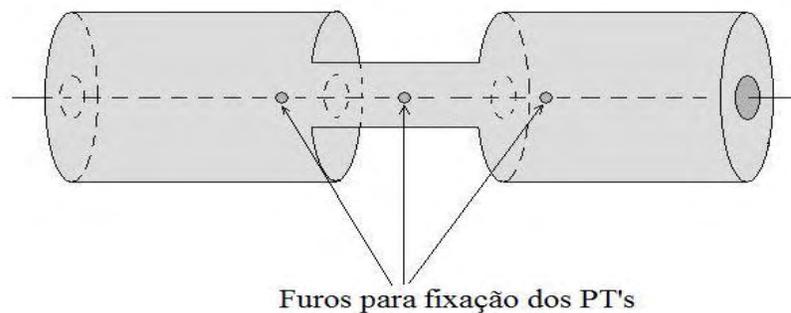


Figura 4.4: Localização dos sensores tipo PT 1000.

### Termopares (Sensores Termoelétricos)

A medição através de termopares é o método elétrico mais comum de medida de temperatura. Definimos termopares como sensores de medição de temperatura que são constituídos por dois condutores metálicos e distintos, puros ou homogêneos. Em uma de suas extremidades são unidos e soldados, a qual se convencionou o nome de junta de medição ou junta quente, e a outra extremidade aberta onde se faz as devidas interligações de junta de referência, vide Figura 4.5. Quando submetemos suas extremidades a temperaturas diferentes a composição química dos metais gera uma força eletro-motriz (f.e.m.) da ordem de mV, princípio este conhecido por Seebeck.

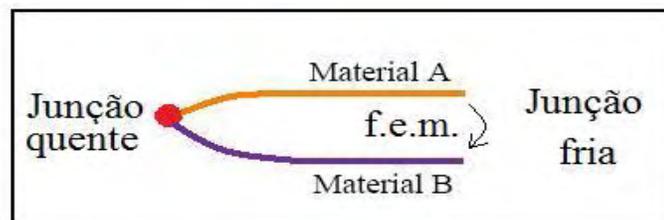


Figura 4.5: Termopar

O instrumento de medida tem de ter a capacidade de lidar com a compensação da junção fria, bem como com o fato de a saída do termopar não ser linear. A relação entre a temperatura e a tensão de saída é uma equação polinomial de 5ª a 9ª ordem dependendo do tipo do termopar. Alguns instrumentos de alta precisão guardam em memória os valores das tabelas dos termopares para eliminar esta fonte de erro.

Os termopares disponíveis no mercado têm os mais diversos formatos, desde os modelos com a junção a descoberto que têm baixo custo e proporcionam tempos de resposta rápidos, até os modelos que estão incorporados em sondas.

Quando se procede à escolha de um termopar deve-se ponderar qual o mais adequado para a aplicação desejada, segundo as características de cada tipo de termopar, tais como a gama de temperaturas suportada, a exatidão e a confiabilidade das leituras, entre outras. Os diversos tipos de materiais escolhidos para termopares são bem caracterizados, de forma a serem obtidas boa repetibilidade e precisão, são eles:

- Tipo K (Cromel / Alumel) - O termopar tipo K é um termopar de uso genérico. Tem um baixo custo e cobre temperaturas entre os -200 e os 1200 °C, tendo uma sensibilidade de aproximadamente  $41\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ .
- Tipo E (Cromel / Constantan) - Este termopar possui elevada sensibilidade ( $68\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ ) que o torna adequado para baixas temperaturas.
- Tipo J (Ferro / Constantan) - A sua gama limitada (-40 a 750 °C) é a responsável pela sua menor popularidade em relação ao tipo K.
- Tipo N (Nicrosil / Nisil) - A sua elevada estabilidade e resistência à oxidação a altas temperaturas tornam o tipo N adequado para medições a temperaturas elevadas, sem recorrer aos termopares que incorporam platina na sua constituição (tipos B, R e S). Foi desenhado para ser uma “evolução” do tipo K.
- Tipo B (Platina / Ródio-Platina) - Adequado para medição de temperaturas até aos 1800 °C.

- Tipo R (Platina / Ródio-Platina) - Adequado para medição de temperaturas até aos 1600 °C. Reduzida sensibilidade ( $10 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ ) e custo elevado.
- Tipo S (Platina / Ródio-Platina) - Adequado para medição de temperaturas até aos 1600 °C. Reduzida sensibilidade ( $10 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ ), elevada estabilidade e custo elevado.
- Tipo T (Cobre / Constantan) - É dos termopares mais indicados para medições na faixa dos  $-270^\circ\text{C}$  até  $400^\circ\text{C}$ , é muito preciso em função da grande homogeneidade com que o cobre pode ser processado.

Propomos a utilização de termopares tipo T, devido à sua sensibilidade na faixa de temperatura de interesse, intervalo de 10 a  $80^\circ\text{C}$ , e, também, pela sua velocidade de reposta. Baseados na Norma ASTM E230, segundo a I.T.S.-90 e IEC 584, na faixa de  $-180$  a  $370^\circ\text{C}$ , a classe *standard* destes termopares apresenta um limite de erro de  $\pm 1^\circ\text{C}$  ou  $\pm 0,75\%$  e, aqueles da classe especial de  $\pm 0,5^\circ\text{C}$  ou  $\pm 0,4\%$ . A compensação da temperatura da junção fria é realizada automaticamente pela eletrônica de aquisição do sinal, através do módulo do cFP-2000 e do software.

No que tange à localização dos termopares, eles são imersos no fluido de estudo, no eixo central do cilindro, sendo que um deles está situado na posição média em relação ao comprimento, outro distando 1,0 cm abaixo e o outro 1,0 cm depois do centro.

#### **4.3.2 Compact Field Point (cFP – 2000)**

O *compact Field Point* é um controlador lógico programável (CLP), criado pela *National Instruments*, projetado para aplicações de controle industrial, desempenhando controle embarcado avançado, aquisição de dados e conectividade via rede. Ele apresenta uma arquitetura modular com condicionamento interno de sinais e isolamento elétrica, pode ser conectado diretamente a sensores industriais com sinais de tensão analógica, corrente, sinais PWM (*Pulse Width Modulation*) e, ainda, com saída analógica ou digital. Além de possuir uma estrutura modular, com conexões (em módulos) específicas para sinais de entrada ou saída, digital ou analógica, a unidade central do cFP permite conexão em rede,

seja ponto a ponto (através de cabo *crossover*), via *Ethernet* ou *Web*, atingido taxas de transmissão de dados de 10Mb/s a 100Mb/s. Outro ponto importante é a possibilidade de ser utilizado juntamente o *Labview* em modo *real time*.

O *Labview* nas aplicações *real time*, associado ao cFP possibilita o desenvolvimento de controle, seja ele digital ou analógico. Com o *Labview real time* embarcado e sendo executado em conjunto com o cFP é possível desenvolver controle digital simples com lógica *booleana*, assim como controle analógico mais avançado, através de lógica nebulosa (*fuzzy*) e PID (Proporcional + Integral + Derivativa). Enfim, utilizando-se o conjunto de ferramentas de controle PID para *Labview* pode-se implementar controle básico ou incorporar, facilmente, as técnicas de controle avançado.

Estas características apontam o cFP como uma solução ideal para problemas de engenharia, pois demonstram a robustez e a versatilidade de um equipamento próprio para a indústria, mas que se adéqua à sofisticação requerida em instrumentos próprios de laboratório.



Figura 4.6: Foto ilustrativa do cFP-2000.

No presente experimento, fazemos uso do cFP-2000, constituído por:

- Unidade central de processamento (CPU);
- Módulo de aquisição de sinais, específico para termopares (cFP-TC-120);
- Módulo de aquisição de sinais, específico para RTD's (cFP-RTD-122);
- Módulo de saída, tensão analógica (cFP-AO-210).

Os sensores são diretamente ligados aos respectivos módulos de entrada de sinal e o módulo de saída (tensão analógica) tem alguns dos seus canais ligados ao circuito de potência, o qual controla a potência elétrica que deve ser entregue aos atuadores (pastilhas de efeito *Peltier*). A CPU está conectada a rede local. A partir de um microcomputador, também ligado à rede, e através de um programa de controle em execução efetua-se o monitoramento e controle da temperatura do sistema proposto. A Figura 4.6 é uma foto ilustrativa do cFP-2000.

#### 4.3.3 Elementos Atuadores

A cavidade cilíndrica, sistema cuja temperatura se quer controlar, deve ser mantida à temperatura especificada, para tanto são necessários dispositivos capazes de remover ou transferir energia térmica para o sistema, isto é, são necessários elementos capazes de produzir um efeito térmico de aquecimento ou arrefecimento, dependendo da situação considerada.

Dentre as variadas formas de obtenção de efeitos térmicos, destacamos a termoeletricidade. Os sistemas termelétricos, ou termoelétricos, têm como base os módulos ou pastilhas de efeito *Peltier*, em que um efeito térmico é produzido mediante a aplicação de uma tensão elétrica.

Os princípios ou teorias fundamentais da termoeletricidade foram descobertos por diversos cientistas ao longo de vários anos, porém, destacaremos três nomes de suma importância nesta área de estudo: *Seebeck*, *Peltier* e *Thomson* (DOEBELIN, 1990 e ISMAIL et al, 1998).

Os estudos das propriedades termelétricas de semicondutores e de metais levam, na prática, à aplicação dos processos de medições na geração de energia, controle de temperatura e nos processos de refrigeração ou aquecimento. O controle de temperatura feito por pares termoelétricos é uma das importantes aplicações do efeito *Seebeck*. Atualmente, busca-se o aproveitamento industrial do efeito *Peltier*, em grande escala, para

a obtenção de calor ou frio no processo de climatização ambiente, também refrigeradores de pequeno porte e resfriamento de componentes eletrônicos.

Dispositivos termoeétricos têm encontrado espaço na área de controle térmico graças a sua característica de alta controlabilidade, sendo possível manter sistemas a  $0,1^{\circ}\text{C}$  de diferença em relação ao ponto de operação com relativa facilidade. Outra característica de bastante relevância é a possibilidade de atuar tanto no aquecimento como na refrigeração, pois a maioria dos atuadores tem a restrição de trabalhar exclusivamente aquecendo (banco de resistores) ou resfriando (*coolers*, por exemplo).

Os dispositivos práticos de efeito *Peltier* usam semicondutores para uma maior densidade de corrente e, assim, de potência. Os pares termoeétricos utilizados em refrigeração (aquecimento) são constituídos de um metal (cobre) e um semicondutor, em geral, o telureto de bismuto ( $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ) altamente dopado para criar semicondutores do tipo P e do tipo N (Figura 4.7).

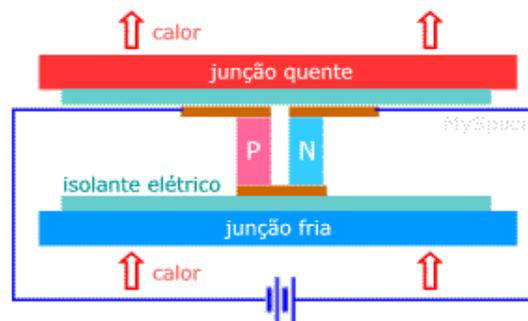


Figura 4.7: Efeito térmico produzido mediante a aplicação de tensão elétrica.

Comumente, não se utiliza apenas um par de junções, mas uma série delas a fim de maximizar a potência de resfriamento (aquecimento). As junções são eletricamente ligadas em série e termicamente em paralelo, vide Figura 4.8.



Figura 4.8: Associação de junções.

Várias séries são colocadas em forma de matriz, formando um conjunto ou módulo, também chamados pastilhas termelétricas. Comercialmente os módulos são disponíveis em uma variedade de formatos, tensões, correntes, capacidades térmicas. Um módulo típico pode proporcionar diferenças de temperaturas de algumas dezenas de graus Celsius. Diferenças ainda maiores podem ser obtidas associando-se as pastilhas em cascata.

Esses módulos são, essencialmente, “sanduíches” de placas cerâmicas, “recheados” com pequenos cubos de telureto de bismuto, conforme Figura 4.9. Como têm baixo coeficiente de desempenho, são indicados em situações onde não se exige alta capacidade de refrigeração e, devido ao seu reduzido tamanho, em locais com pouco espaço. O efeito *Peltier* tende a perder sua vantagem competitiva para taxas de transferência de calor acima de 200W.

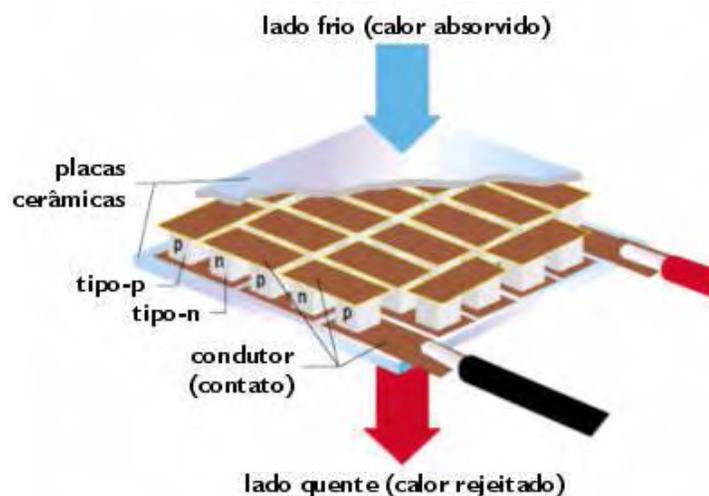


Figura 4.9: Módulo de efeito *Peltier*.

As pastilhas termelétricas requerem alimentação em corrente contínua (CC) para seu funcionamento, preferencialmente estável, para operar em condições ideais. Se a fonte de alimentação fornecer uma margem de variação (*ripple*) menor que 10% ou 15% implicará em menos de 1% de degradação do  $\Delta T$ . Idealmente, limita-se a tensão ou a corrente elétrica para assegurar que a corrente máxima ( $I_{\max}$ ) específica da pastilha não seja ultrapassada.

Cada pastilha tem seu próprio limite de quanto de energia térmica pode transferir, conhecido como  $Q_{\max}$ . A corrente elétrica associada ao  $Q_{\max}$  é denominada  $I_{\max}$  e, a tensão correspondente,  $V_{\max}$ . Portanto, se um módulo for completamente isolado de seu ambiente e se estiver circulando a corrente  $I_{\max}$ , ele produzirá a diferença máxima de temperatura entre os lados quente e frio,  $\Delta T_{\max}$ .

Para se determinar que tipo de módulo deva ser utilizado, o procedimento é semelhante ao caso de uso do conjunto tradicional de refrigeração, pois o sistema é projetado para transferir determinada quantidade de calor em uma aplicação, não para atingir temperaturas independentemente da aplicação. Quando maior for a carga térmica transferida, menor será a diferença de temperatura entre o lado frio e o lado quente, e vice-versa (com carga zero a maioria das pastilhas tem uma diferença máxima de temperatura um pouco acima dos 60°C).

Normalmente a potência que precisa ser dissipada por unidade de área é relativamente alta, dessa maneira, um dissipador térmico é um elemento essencial (aumento de área para trocas térmicas). Tanto para aquecimento, quanto para resfriamento, faz-se necessário o uso de algum dissipador. Para absorver calor (em modo de aquecimento) ou dissipar calor (em modo resfriamento), transferindo-o para outro meio (por exemplo: ar, água, etc.). Sem isto, o módulo estará sujeito a superaquecimento e, com o lado quente superaquecido, o lado frio também aquece, conseqüentemente, o fluxo de calor será interrompido.

Em muitos casos, há necessidade de convecção forçada na junção quente a fim de melhorar o efeito de dissipação (Figura 4.10a) ou, eventualmente, em ambas as junções (Figura 4.10b).

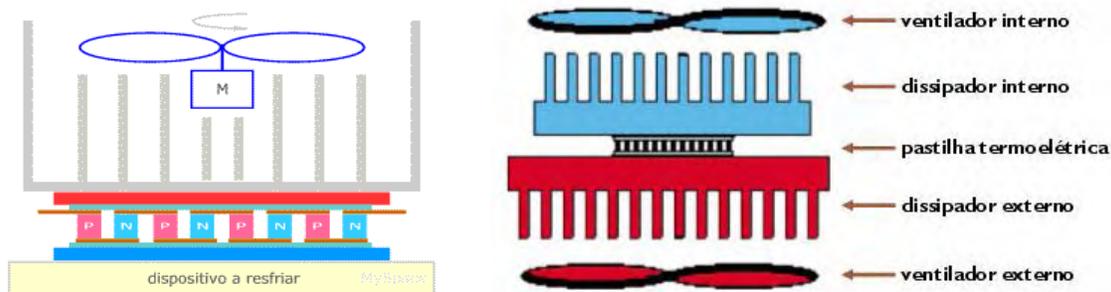


Figura 4.10: a – Convecção forçada em uma junção, b – Convecção forçada em ambas as junções.

Nesta proposta de trabalho utilizamos dois módulos *Peltier*, DV-40-04 da Danvic Ltda., cada um deles com uma das faces (interna) em contato com o cilindro de material metálico e a outra face (externa) conectada a um dissipador com ventilador para promover convecção forçada, conforme Figura 4.10a. Caso o procedimento exija que o cilindro seja resfriado (temperatura experimental abaixo da ambiente), o sistema de controle faz com que a corrente elétrica circule em um sentido que permita resfriar a superfície do módulo que está em contato com o cilindro. Caso contrário (temperatura experimental acima da ambiente), o controle faz a corrente circular no sentido oposto.

#### 4.3.4 Circuito de Potência

Os sinais provenientes do módulo de saída do cFP (cFP-AO-210) são de baixa potência, podendo fornecer níveis de tensão entre 0 e 10.2V, com correntes da ordem de miliamperes. Tais sinais não têm potência o suficiente para atuar diretamente nos módulos *Peltier* de modo que se possa obter o efeito térmico requerido, assim, é necessário um circuito que, como o próprio nome sugere, eleve a potência dos sinais, condicionando-os para atuar sobre os módulos de forma eficiente.



Figura 4.11: Foto ilustrativa do circuito de potência.

Neste experimento são empregados dois circuitos de potência, a cada saída de circuito é ligada uma pastilha *Peltier*. Cada circuito de potência é alimentado por uma fonte de tensão (13,8Vdc) com considerável capacidade de corrente, até 10A. Em termos práticos, o circuito de potência recebe sinais de controle, provenientes do módulo de saída do cFP, os quais determinam a intensidade do efeito térmico (maior ou menor potência) no cilindro metálico e indicam, também, sinal de comando de reversão (mudança no *status*, aquecer/refrigerar). A Figura 4.11 é uma foto ilustrativa do circuito de potência, o qual foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa GPICEEMA (Grupo de Pesquisa em Instrumentação e Controle em Estudo de Energia e Meio Ambiente do LES (Laboratório de Energia Solar). No Apêndice A está ilustrado o diagrama esquemático do circuito utilizado.

#### 4.3.5 Software de Controle

O ambiente de programação *LabVIEW*, produto desenvolvido pela *National Instruments*, devido à sua interoperabilidade, versatilidade, capacidade de programação paralela e robustez, oferecendo instrumental próprio de laboratório e adaptabilidade ao

ambiente industrial, tem encontrado vasto campo de aplicação, especialmente na engenharia de controle. Vem sendo empregado como um autêntico laboratório virtual, uma vez que nele encontram-se ferramentas que imitam instrumentos como geradores de sinais, osciloscópios, multímetros, etc. e ainda ratifica seu objetivo através da nomenclatura, pois os programas desenvolvidos nesta linguagem denominam-se VI's (*Virtual Instruments*). Portanto, para os fins de controle e instrumentação no procedimento experimental do presente trabalho foi utilizada a versão 8.6 deste *software* como plataforma de programação.

A Figura 4.12 ilustra a tela do painel frontal do programa de controle desenvolvido especificamente para esta aplicação. Através deste painel, no bloco CONTROLE, é possível selecionar o módulo do cFP a partir do qual serão feitas as leituras de temperatura dos PT's 1000 (para o controle). Pode-se visualizar a indicação de cada um dos PT's e a média das temperaturas, a qual é aplicada no circuito de controle térmico. É possível fixar o valor desejado da temperatura (*set-point*), as constantes de ambos os controladores PID (proporcional, integral e derivativa), pois para cada atuador foi criado um circuito de controle e o tempo de amostragem (*sampling time*). Pode-se, também, observar graficamente a evolução da variável de processo e do *set-point* em função do tempo, bem como os níveis de tensão de saída do controlador PID.

No bloco INSTRUMENTAÇÃO, existe a possibilidade de se selecionar o módulo do cFP de onde serão efetuadas as aquisições dos termopares (para determinação do campo dinâmico no interior do fluido). O programa cria um arquivo onde são gravados os valores de temperatura lidos pelos termopares e permite que seja observado o caminho e o nome deste arquivo. É possível fixar o número de amostras (leituras) e o intervalo de tempo entre elas. Pode-se, também, acompanhar graficamente a evolução da temperatura lida pelos termopares, até mesmo na junção de referência (comum). Ao final das aquisições pré-determinadas, as informações ficam salvas em disco e são exibidas as médias das leituras efetuadas no processo.

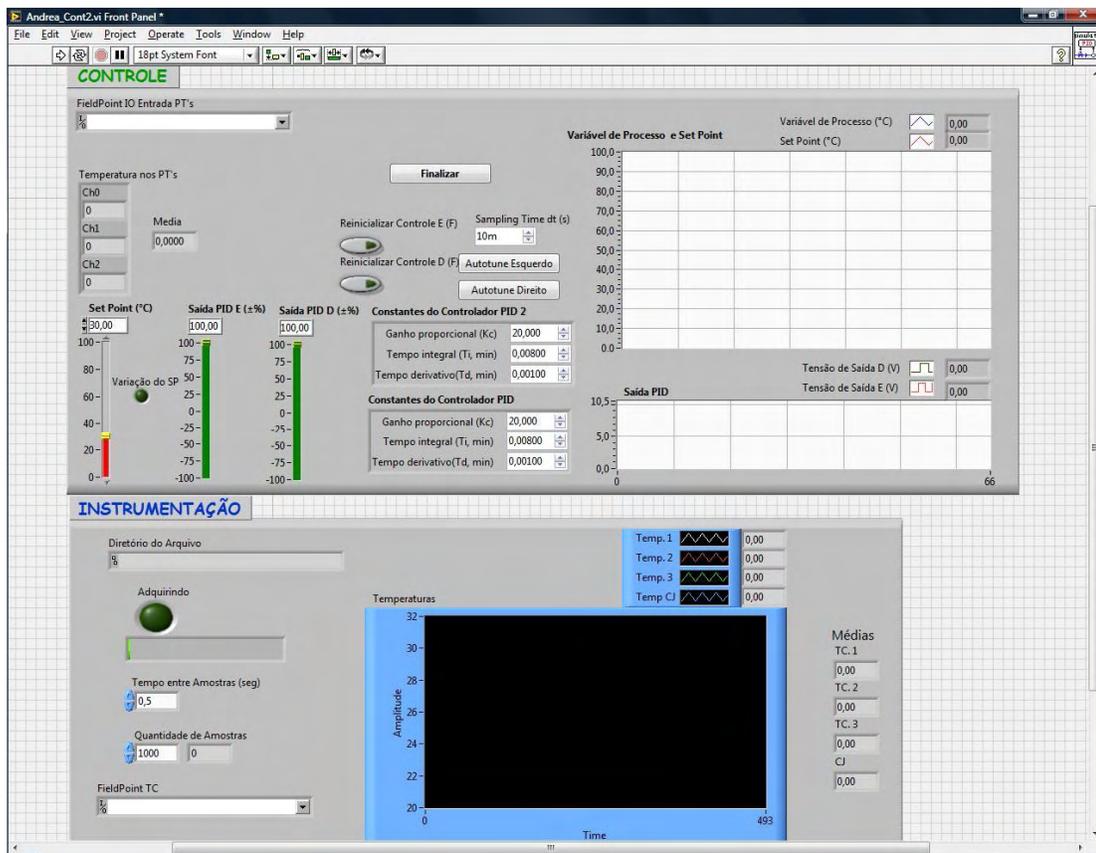


Figura 4.12: Painel frontal do programa de controle desenvolvido.

### 4.3.6 Controlador

Controlar significa realizar a medição da variável a ser controlada e utilizar uma variável do sistema a ser manipulada a fim de corrigir ou limitar os desvios do valor medido em relação ao valor desejado. Controle automático é definido como sendo a manutenção do valor de certa condição através de sua medida, mediante a determinação do desvio em relação ao valor desejado e, posterior utilização deste desvio para produzir e aplicar uma ação capaz de reduzi-lo ou anulá-lo. Um dos pré-requisitos mais importantes do projeto de sistemas de controle é minimizar os efeitos das perturbações no sistema (PHILIPS e HARBOR, 1996). Portanto, o projetista deve observar atentamente qual(is) tipo(s) de ação(ões) de controle melhor se adéqua(m) ao seu sistema.

A forma com a qual o controlador automático gera o sinal de controle é chamada de ação de controle (OGATA, 2003). Os controladores industriais (clássicos) são classificados de acordo com suas ações de controle, que são: liga-desliga (*on-off*), proporcional (P), integral (I), proporcional mais integral (PI), proporcional mais derivativa (PD) e proporcional mais integral mais derivativa (PID).

Um controlador do tipo *on-off* possui apenas dois estados possíveis, ligado ou desligado, o que o torna mais simples e barato.

No caso do controlador proporcional, a saída do sistema de controle é diretamente proporcional ao sinal de erro atuante. De uma maneira geral, ele se constitui um circuito amplificador com ganho ajustável.

Quando o valor da saída do controlador é modificado a uma taxa de variação proporcional ao sinal de erro atuante, temos um controlador tipo integral.

Os controladores proporcional-integral, proporcional-derivativo e proporcional-integral-derivativo são resultantes da superposição das ações básicas de controle correlacionadas.

Por englobar três ações básicas de controle, o controlador PID, oferece as vantagens individuais de cada uma delas, implicando, evidentemente, numa maior complexidade de implementação e custo. O comportamento deste controlador pode ser equacionando como a seguir:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Onde o primeiro termo do lado direito da equação representa a parte proporcional ao sinal de erro, o segundo termo refere-se à ação integral e o último, diz respeito à ação derivativa. Projetar tal sistema, fundamentalmente, consiste em determinar os valores das três constantes:  $K_p$  (relativa a ação proporcional),  $T_i$  (constante de tempo integral) e  $T_d$  (tempo derivativo).

De acordo com OGATA (2003), o procedimento de selecionar os parâmetros do controlador que garantam uma dada especificação de desempenho é denominado sintonia do controlador, cujas regras foram inicialmente propostas por Ziegler e Nichols. As sugestões de Ziegler e Nichols estão baseadas na resposta experimental do sistema ao degrau, ou no valor do  $K_p$  que resulta em uma estabilidade marginal, quando somente uma

ação proporcional é utilizada. Estas regras são úteis quando os modelos matemáticos da planta a ser controlada são desconhecidos, elas sugerem um conjunto de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  que irão proporcionar uma operação estável do sistema.

Tal controlador é um dos mais usuais em sistemas de controle com realimentação (seja de uso industrial ou doméstico), podendo ser implementado fisicamente (utilizando componentes eletrônicos) ou através de programação digital, através de CLP's (Controladores Lógicos Programáveis) ou mesmo computadores dedicados.

O sistema de controle PID foi implementado através de linguagem computacional gráfica *LABVIEW* em conjunto com um *compact Field Point* (cFP-2000). As ferramentas necessárias encontram-se no *toolkit* do próprio *software*, onde estão disponíveis os blocos proporcional, integral e derivativo, cujas constantes são ajustadas de acordo com a aplicação, utilizando-se algum método de sintonia experimental ou mesmo uma ferramenta automática do programa.

## CAPÍTULO V

### PROBLEMA INVERSO

O presente capítulo apresenta o problema inverso e expõe o desenvolvimento da solução do problema estimativa de parâmetros a partir de medidas da dinâmica de temperatura. O Método de *Levenberg-Marquardt* é a ferramenta de resolução aplicada ao problema em estudo.

#### 5.1 INTRODUÇÃO

O problema de transferência de calor na determinação do campo dinâmico de temperatura dentro de um meio, partindo do conhecimento prévio das propriedades do material, da condição inicial e das condições de contorno é tido como direto. Portanto, o modelo matemático dado pelo conjunto de Eqs. (3.6a-d) possibilita o cálculo do campo de temperatura em função da posição e do tempo no meio (região) em estudo. Para a solução do problema direto foram aplicadas a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) e o Método de Simulação de Rede (NSM). Tal problema é classificado como bem-posto, devido a existência de solução, a qual é única e estável em relação a variações nos parâmetros (dados) de entrada.

Contrariamente, na hipótese de que ao menos uma das condições de contorno, ou inicial, ou ainda, qualquer outro parâmetro que apareça na formulação não seja conhecido, o problema representado pelas mesmas Eqs. (3.6a-d) é dito inverso. Nesta situação, são requeridas medidas de temperatura, sejam elas experimentais ou simuladas para prover informação necessária à solução ao problema.

## 5.2 MÉTODOS DIRETOS

Nos métodos de determinação de parâmetros via método direto, a experiência é projetada para se obter as propriedades desejadas de uma maneira simples e direta. A experiência deve ser de tal modo que a relação entre os valores medidos e as propriedades possa ser escrita como uma expressão matemática que permita explicitar as propriedades diretamente em termos das medidas realizadas. Assim, cada experiência permitirá o cálculo de um único valor de parâmetro.

O ponto importante em problemas diretos é que a temperatura, umidade, velocidade ou outra variável dependente na equação é a quantidade de interesse e é computada como função do tempo e/ou posição.

Em notação matricial, o problema direto pode ser expresso como:

$$[A][U] = [y] \quad (5.1)$$

onde  $[A]$  é a matriz quadrada ( $n \times n$ ) dos coeficientes,  $[U]$  e  $[y]$  são matrizes coluna, conhecidas como vetor solução e vetor das constantes, respectivamente. Nas aplicações de engenharia, o vetor  $[y]$  contém a perturbação à qual o sistema físico está sendo submetido, ou é uma função que define o seu comportamento.

## 5.3 MÉTODOS INVERSOS

Por outro lado, nos problemas inversos a variável dependente (temperatura, umidade, velocidade) pode ser medida em tempos ou posições discretas, embora alguns parâmetros básicos (tais como condutividade térmica, difusividade térmica, etc.) ou funções (condições de contorno, condição inicial, etc.) possam ser desconhecidos.

Assim, a solução da Eq. (5.1) é obtida pela pré-multiplicação de ambos os lados da igualdade pela inversa da matriz  $[A]$ :

$$[U] = [A]^{-1} [Y] \quad (5.2)$$

Neste caso, a perturbação ao sistema é bem conhecida e o objetivo é determinar a resposta do sistema físico a essa perturbação.

Para o problema de interesse deste estudo, representado pelo sistema de Eqs. (3.6a-d), o qual é re-escrito a seguir:

$$\rho c_p \frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial \tau} = k \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial R} \right) \quad \text{em } 0 < R < 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (5.3a)$$

$$\frac{\theta(0, \tau)}{\partial R} = 0 \quad \text{em } R = 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (5.3b)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad \text{em } R = 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (5.3c)$$

$$\theta(R, 0) = 1 \quad \text{em } 0 \leq R \leq 1 \text{ e } \tau = 0 \quad (5.3d)$$

os parâmetros  $k$  e  $\rho c_p$  são considerados desconhecidos. Então, para estimar tais parâmetros supõem-se disponíveis as medidas transientes de temperatura  $Y_{im}$  tomadas nas posições  $X_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ . O subscrito  $i$  refere-se ao tempo em que as medidas são feitas, isto é,  $\tau_i$ , para  $i = 1, \dots, I$ . Observe que as medidas de temperatura podem conter erros randômicos, mas todas as outras quantidades que aparecem na formulação do problema físico dado pelas equações são consideradas conhecidas.

Utilizando-se as hipóteses de que os erros experimentais são aditivos e não correlacionados, com distribuição normal de média zero e desvio padrão constante e conhecido, a função objetivo que resulta em estimativas com variância mínima é a norma dos mínimos-quadrados (BARD, 1974, BECK e ARNOLD, 1977) que pode ser escrita conforme a seguinte expressão:

$$S(P) = \sum_{i=1}^I [Y_i - \theta_i(P)]^2 \quad (5.4)$$

onde  $S$ : soma dos quadrados dos erros, ou função objetivo;  
 $P = [P_1, P_2, \dots, P_L]$ : vetor com os parâmetros desconhecidos;  
 $Y_i$ : temperatura medida no tempo  $\tau_i$  e posição  $X_m$ ;  
 $\theta_i(P)$ : temperatura estimada no tempo  $\tau_i$  e posição  $X_m$ ;  
 $L$ : número de parâmetros desconhecidos;  
 $I$ : número total de medidas no tempo, com  $I \geq L$ ;

Para tornar a análise a mais geral possível, considera-se que  $L$  parâmetros ou propriedades físicas constantes serão estimados, ou seja,  $P_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ . As variáveis estimadas  $\theta_i$  são obtidas da solução do problema direto, dado pelas Eqs. (5.3), para temperatura nas posições de medidas  $X_m$  no tempo  $\tau_i$ , utilizando estimativas para os parâmetros desconhecidos.

Para casos envolvendo medidas com desvio-padrão variável, a minimização da norma de mínimos quadrados dada pela Eq. (5.4) não resulta em estimativas com variância mínima. Nestes casos, deve-se utilizar a norma de mínimos quadrados modificada (BARD, 1974, BECK e ARNOLD, 1977), que é dada por:

$$S(P) = \sum_{i=1}^I \frac{[Y_i - \theta_i(P)]^2}{\sigma_i^2} \quad (5.5a)$$

onde  $\sigma_i$ : desvio padrão da medida  $Y_i$ , no tempo  $\tau_i$  e posição  $X_m$ .

Ou, na forma matricial, a Eq. (5.4) pode ser escrita como a seguir:

$$S(P) = [Y - \theta(P)]^T [Y - \theta(P)] \quad (5.5b)$$

onde o sobrescrito T significa o vetor transposto;

o vetor  $[Y - \theta(P)]^T \equiv [Y_1 - \theta_1, Y_2 - \theta_2, \dots, Y_I - \theta_I]$ .

Para a solução do presente problema de estimativa de parâmetros será utilizado o método de *Levenberg-Marquardt* para a minimização da norma de mínimos quadrados a norma de mínimos quadrados dada pela Eq.(5.4), pois estamos supondo que os erros experimentais são aditivos e não correlacionados, com distribuição normal de média zero e desvio padrão constante e conhecido.

No intuito de minimizar a norma dos mínimos quadrados, dada pela Eq. (5.4), é necessário diferenciá-la em relação a cada um dos parâmetros desconhecidos e igualar a zero as derivadas de  $S(P)$  obtidas, ou seja,

$$\frac{\partial S(P)}{\partial P_1} = \frac{\partial S(P)}{\partial P_2} = \dots = \frac{\partial S(P)}{\partial P_L} = 0 \quad (5.6a)$$

Ou, na forma matricial:

$$\nabla S(P) = 2 \left[ -\frac{\partial \theta^T(P)}{\partial P} \right] [Y - \theta(P)] = 0 \quad (5.6b)$$

onde

$$\frac{\partial \theta^T(P)}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_L} \end{bmatrix} [T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \dots \quad T_L] \quad (5.6c)$$

Então, define-se matriz de sensibilidade como sendo a transposta da Eq. (5.6c):

$$J(P) = \left[ \frac{\partial \theta^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial P_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial P_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial \theta_1}{\partial P_L} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial P_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial P_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial \theta_2}{\partial P_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial P_1} & \frac{\partial \theta_l}{\partial P_2} & \frac{\partial \theta_l}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial \theta_l}{\partial P_L} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Os elementos da matriz de sensibilidade são denominados coeficientes de sensibilidade. O coeficiente de sensibilidade  $J_{ij}$  é definido como a primeira derivada da temperatura estimada no tempo  $\tau_i$  em relação ao parâmetro desconhecido  $P_j$ , como a seguir:

$$J_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial P_j} \quad (5.8)$$

Usando a definição de matriz de sensibilidade dada pela Eq. (5.8), a Eq. (5.7) torna-se:

$$- 2 J^T(P)[Y - \theta(P)] = 0 \quad (5.9)$$

Para problemas inversos lineares, a matriz de sensibilidade não é uma função dos parâmetros desconhecidos. Neste caso, a Eq. (5.9) pode ser resolvida de forma explícita e o vetor de parâmetros é dado por (BECK e ARNOLD, 1977):

$$P = (J^T J)^{-1} J^T Y \quad (5.10)$$

No caso de um problema inverso não linear, a matriz de sensibilidade tem alguma dependência funcional com o vetor de parâmetros desconhecidos P. A solução da Eq. (5.9) para estimativa de parâmetros passa a requerer um procedimento iterativo, o qual pode ser obtido pela linearização das variáveis estimadas  $\theta(P)$ , com uma expansão em série de Taylor em torno da solução atual  $P^k$ , para a k-ésima iteração. Tal linearização é dada por:

$$\theta(P) = E(P^k) + J^k(P - P^k) \quad (5.11)$$

Substituindo-se a Eq. (5.11) na (5.9) e rearranjando-se o resultado (BECK e ARNOLD, 1977):

$$P^{k+1} = P^k + [(J^k)^T J^k]^{-1} (J^k)^T [Y - \theta(P^k)] \quad (5.12)$$

O procedimento iterativo que segue a expressão anterior é chamado Método de *Gauss*. Sendo este, uma aproximação do Método de *Newton* (ou *Newton-Raphson*), conforme BARD (1974).

Deve-se observar que na Eq. (5.10), bem como na (5.12) a matriz  $J^T J$  deve ser não singular, isto é, o determinante da matriz deve ser não nulo:

$$|J^T J| \neq 0 \quad (5.13)$$

Temos na Eq. (5.13) uma condição para identificação dos parâmetros, ou seja, se o determinante de  $J^T J$  for nulo, ou muito pequeno, os parâmetros  $P_l$ , para  $l = 1, \dots, L$ , não podem ser determinados usando-se o procedimento iterativo da Eq. (5.10). Problemas que satisfazem  $|J^T W J| \approx 0$  são chamados de mal condicionados. Em geral, problemas inversos em difusão de calor são mal-condicionados, especialmente próximo do “chute” inicial usado para os parâmetros desconhecidos, gerando dificuldades na aplicação das Eqs. (5.10) ou (5.12).

O processo iterativo do método de *Levenberg-Marquardt* introduz uma restrição ao critério de minimização a fim de superar a instabilidade do método de *Gauss*. Fundamentada no critério dos mínimos quadrados, a fórmula iterativa tem a seguinte expressão:

$$P^{K+1} = P^K + [(J^K)^T J^K + \mu^k \Omega^k]^{-1} (J^K)^T [Y - \theta(P^K)] \quad (5.14)$$

onde  $\mu^k$  é um escalar positivo chamado de parâmetro de relaxação;

$\Omega^k$  é uma matriz diagonal;

$k$  é sobrescrito que indica o número da iteração.

O propósito da inclusão do termo matricial  $\mu^k \Omega^k$ , na Eq. (5.14), é diminuir as oscilações e instabilidades devido ao fato do problema ser mal condicionado, fazendo seus elementos grandes quando comparados aos elementos de  $J^T J$ . Nas primeiras iterações, o parâmetro de relaxação é feito grande, visto que o problema, em geral, é mal-condicionado na região próxima ao “chute” inicial, que pode ser muito distante dos parâmetros exatos. Com esta modificação, a matriz  $J^T J$  não precisa ser necessariamente não-singular no início das iterações e o método de *Levenberg-Marquardt* tende para o Método de *Steepest-Descent*. O parâmetro  $\mu^k$  é, então, gradualmente reduzido com o avanço das iterações para a solução do problema de estimativa de parâmetros e então o método de *Levenberg-Marquardt* tende para o Método de *Gauss* dado pela Eq. (5.12) (BECK e ARNOLD, 1977, ÖZISIK e ORLANDE, 2000).

Para encerrar o procedimento iterativo de *Levenberg-Marquardt* podem ser adotados os seguintes critérios:

$$S(\mathbf{P}^{K+1}) < \varepsilon_1 \quad (5.15a)$$

$$\|(\mathbf{J}^K)^T [\mathbf{Y} - \theta(\mathbf{P}^K)]\| < \varepsilon_2 \quad (5.15b)$$

$$\|\mathbf{P}^{K+1} - \mathbf{P}^K\| < \varepsilon_3 \quad (5.15c)$$

onde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são tolerâncias admitidas pelo usuário;

$\| \cdot \|$  é a norma euclidiana do vetor considerado,  $\| \mathbf{x} \| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ ;

o sobrescrito T indica a matriz transposta.

O critério dado pela Eq. (5.15a) testa se a norma dos mínimos quadrados é suficientemente pequena, o que é esperado na vizinhança da solução do problema. De modo semelhante, a Eq. (5.15b) checa se a norma do gradiente de  $S(\mathbf{P})$  é suficientemente pequena, já que ela se anula no ponto onde  $S(\mathbf{P})$  é mínimo. Embora tal condição de gradiente nulo seja também válida para pontos de máximo e pontos de sela, o método de *Levenberg-Marquardt* dificilmente converge para estes pontos. O último critério, dado pela Eq. (5.15c) resulta do fato de que a mudança no vetor de parâmetros é muito pequena quando o método está convergido.

Diversas variações do método de *Levenberg-Marquardt* podem ser encontradas na literatura, dependendo da escolha da matriz diagonal  $\Omega^k$  e da forma de variação do parâmetro de relaxação  $\mu^k$ . Sabe-se que:

$$\Omega^K = \text{diag} [(\mathbf{J}^K)^T \mathbf{J}^K] \quad (5.16)$$

O algoritmo utilizado para o nosso problema é implementado através de um programa desenvolvido na plataforma MATLAB.

## 5.4 ESTUDO DE SENSIBILIDADE AOS PARÂMETROS

O estudo dos coeficientes de sensibilidade aos parâmetros desempenha um importante papel em problemas inversos de estimativa de parâmetros.

Coefficiente de sensibilidade de uma variável de estado ( $J_{ij}$ ), como definido anteriormente, é a primeira derivada parcial de uma solução teórica em relação ao parâmetro desconhecido (BECK e ARNOLD, 1977) e é dado pela Eq. (5.8).

Uma vez calculados os coeficientes de sensibilidade, eles permitem quantificar a variação da variável de estado (que também é medida) induzido por uma variação do parâmetro (todos os outros parâmetros permanecem inalterados).

Os coeficientes de sensibilidade são parâmetros chave no procedimento de estimativa de parâmetros. Se, para um determinado experimento, o coeficiente de sensibilidade em relação a um parâmetro é pequeno para o conjunto inteiro de observações, evidencia baixa sensibilidade, este parâmetro em particular raramente influencia a variável de estado. Em termos de estimativa de parâmetros, isto indica que só uma grande mudança neste parâmetro afetará o modelo, ou, em outras palavras, a informação contida nas medidas sobre este parâmetro é fraca. Desta maneira, será difícil estimar este parâmetro a partir de tal informação.

A noção de identificabilidade permite determinar as condições para as quais a estimativa é possível de ser realizada e estabelecer uma estratégia de identificação, pois existem modelos para os quais não é possível estimar independentemente todos os parâmetros ou mesmo, simultaneamente com boa precisão. Sumariamente, os critérios para identificação de parâmetros são:

1. Se  $J_{ij} = 0$ , para qualquer posição e em qualquer instante: impossível estimar  $P_j$ ;
2. Se  $J_{ij} = c J_{ik}$ , para qualquer posição e em qualquer instante: impossível estimar simultaneamente  $P_j$  e  $P_k$ , devido à característica de dependência linear entre os dois parâmetros;
3. Se  $|J_{ij}| \approx 0$ , para qualquer posição e em qualquer instante: a estimativa é ainda delicada.

Os principais critérios para que a estimativa do parâmetro seja possível são: que o coeficiente de sensibilidade associado seja não-nulo e linearmente independente dos demais.

Se um ou vários parâmetros têm coeficientes de sensibilidade duas ordens de grandeza menor do que os outros, então, será difícil estimar precisamente estes parâmetros.

Todos os esforços deveriam ser feitos para se obter coeficientes de sensibilidade tão grandes quanto possível.

A comparação entre coeficientes de sensibilidade aos parâmetros que compõem o modelo não é muito fácil quando eles têm unidades diferentes (o que ocorre freqüentemente). Então, para possibilitar a comparação, é preferível estudar os coeficientes de sensibilidade reduzidos, os quais são definidos como:

$$\bar{J}_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial P_j} P_j \quad (5.17)$$

Assim, todos os coeficientes de sensibilidade reduzidos  $\bar{J}_{ij}$  têm as mesmas unidades que a variável de estado. Eles mostram a variação do modelo com respeito à mudança relativa nos parâmetros. Normalmente, a experiência deve ser projetada de modo que todos os coeficientes de sensibilidade reduzidos referentes aos parâmetros desconhecidos sejam altos, todos da mesma ordem de magnitude, enquanto que aqueles relativos aos parâmetros conhecidos sejam pequenos.

A inspeção visual dos coeficientes de sensibilidade reduzidos também permite descobrir eventuais dependências lineares.

## **CAPÍTULO VI**

### **RESULTADOS E DISCUSSÕES**

Neste capítulo apresentam-se os resultados alcançados ao longo do estudo desenvolvido, concomitantemente, discussões e comentários são realizados a cerca dos mesmos. Inicialmente, no tange à solução do problema direto via GITT, tanto a solução do problema linear quanto a do não-linear. Posteriormente, a solução do problema direto linear e não linear via NSM. A seguir, são apresentados os resultados experimentais. E, finalmente, é apresentada a solução do problema inverso de transferência de calor, como uma aplicação do estudo teórico e experimental previamente efetuado.

#### **6.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO**

Propusemos a solução do sistema de equações diferenciais para determinação do campo dinâmico de temperatura (problema direto) através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) e, também, com aplicação de uma técnica alternativa, o Método de Simulação de Rede (NSM).

##### **6. 1.2 Abordagem da Solução via GITT**

###### **6. 1.2.1 Primeira solução**

## ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

Inicialmente, será considerada a primeira solução do problema direto, realizando-se uma aproximação, ou seja, ele é tido como linear.

A solução do sistema de equações diferenciais através da GITT implica no truncamento de uma série infinita em um número finito de termos, de onde surge a necessidade da observação do potencial calculado nos instantes iniciais para efeito de análise de convergência dos resultados obtidos.

Para tanto, como dito anteriormente, consideramos inicialmente a solução do problema linear, isto é, com o a difusividade térmica do meio constante. No início, o sistema em equilíbrio térmico a 300K ( $T_{ini}$ ), em seguida a temperatura em  $r = r_0$  foi imposta a 333K ( $T_s$ ). Segundo INCROPERA e DEWITT (2003), o valor da difusividade térmica da água líquida a 300K é aproximadamente  $1,47 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . A temperatura foi calculada em três instantes distintos variando-se a posição radial adimensional. A convergência pode ser observada através do aumento do número de termos da série, denotado pela letra N, vide Tab. 6.1. Um máximo de 28 termos da série foi necessário, demonstrando um bom resultado de convergência.

Considerando-se o início do processo, mais termos são necessários para obterem-se valores convergidos de temperatura. Tomando-se o instante  $t = 0,3\text{s}$ , valores estabilizados ocorreram a partir de, no máximo, 28 termos em qualquer posição. É possível perceber que em  $R = 0$  ocorre o pior caso, fisicamente isto se deve ao fato de que esta posição sofre influência constante da condição de simetria e está à maior distância possível da perturbação.

Para  $t = 0,5\text{s}$ , dois passos de tempo a frente, pode-se perceber que a convergência é ainda mais rápida, apenas 22 termos são requeridos para que valores convergidos de temperatura sejam obtidos. Em  $R = 0$ , como no caso anterior, foi necessário o maior número de termos para convergência.

No instante  $t = 1,0\text{s}$ , observa-se que com apenas 16 termos na série, já são alcançados resultados convergidos para qualquer posição radial.

Percebe-se a tendência de maior dificuldade na convergência para  $R = 0$  em todos os casos analisados. Pode-se observar, também, que o número de termos da série decresce com o aumento do tempo, conseqüentemente, se a análise for realizada em instantes posteriores, menos termos serão necessários. Fato este que justifica o estudo da convergência apenas para instantes próximos ao início do processo.

Tabela 6.1 – Perfil de temperatura na análise da convergência

<b>t = 0,3s</b>					
<b>N</b>	<b>Temperatura (K)</b>				
	R = 0	R = 0,25	R = 0,50	R = 0,75	R = 1
10	301,14989	300,16913	299,68950	300,13918	333,00000
15	299,89949	299,99248	300,00238	300,01054	333,00000
20	300,00387	299,99926	300,00073	300,00023	333,00000
25	299,99994	299,99999	300,00000	300,00099	333,00000
26	300,00003	300,00000	300,00000	300,00098	333,00000
27	299,99999	300,00000	300,00000	300,00098	333,00000
28	300,00000	300,00000	300,00000	300,00098	333,00000
29	300,00000	300,00000	300,00000	300,00098	333,00000
<b>t = 0,5s</b>					
<b>N</b>	<b>Temperatura (K)</b>				
	R = 0	R = 0,25	R = 0,50	R = 0,75	R = 1
10	300,33003	300,04406	299,91246	300,09624	333,00000
15	299,99364	299,99944	299,99995	300,04265	333,00000
20	300,00003	299,99999	300,00001	300,04245	333,00000
21	299,99999	300,00000	300,00000	300,04245	333,00000
22	300,00000	300,00000	300,00000	300,04245	333,00000
23	300,00000	300,00000	300,00000	300,04245	333,00000
<b>t = 1,0s</b>					
<b>N</b>	<b>Temperatura (K)</b>				
	R = 0	R = 0,25	R = 0,50	R = 0,75	R = 1
10	300,01374	300,00142	299,99693	300,80941	333,00000

14	300,00003	300,00000	300,00018	300,80710	333,00000
15	299,99999	300,00000	300,00019	300,80711	333,00000
16	300,00000	300,00000	300,00019	300,80711	333,00000
17	300,00000	300,00000	300,00019	300,80711	333,00000

## DINÂMICA DA TEMPERATURA

O comportamento dinâmico da temperatura no meio considerado pode ser acompanhado na Figura 6.1. Neste caso, considerou-se um cilindro com raio  $r_0 = 0,005\text{m}$  e o gráfico 3D foi construído a partir de valores convergidos (28 termos na expansão em série). Com uma temperatura inicial de 300K, o gráfico indica que ocorrem maiores e mais rápidas variações nas regiões próximas à superfície. Nos primeiros 50s, a temperatura já chega aos 330K. Nas localizações mais próximas do centro as alterações ocorrem mais lentamente, quase 350s se passam até que a temperatura no centro atinja os mesmos 330K. Claramente, a condição de contorno de temperatura imposta na superfície faz com que os pontos mais externos atinjam temperaturas mais elevadas em menos tempo que os pontos mais centrais, demonstrando a baixa difusividade térmica da água. Como a água possui um pequeno valor de difusividade térmica, leva um grande intervalo de tempo para transferir a energia através da massa de líquido. No centro do cilindro temos fluxo de calor nulo (simetria), então a temperatura não varia com a posição nas vizinhanças deste ponto.

Tomando-se as mesmas condições utilizadas para gerar o gráfico anterior (Figura 6.1), outra opção para se observar o comportamento da temperatura no meio é através da Figura 6.2, logo a seguir. Para as posições radiais adimensionais  $R = 0 - 0,25 - 0,50 - 0,75$  e 1, pode-se acompanhar o perfil de temperatura que se estabelece ao longo do tempo, de 0 a 350s. A evolução é notadamente mais lenta para as regiões mais próximas do centro (longe da perturbação).

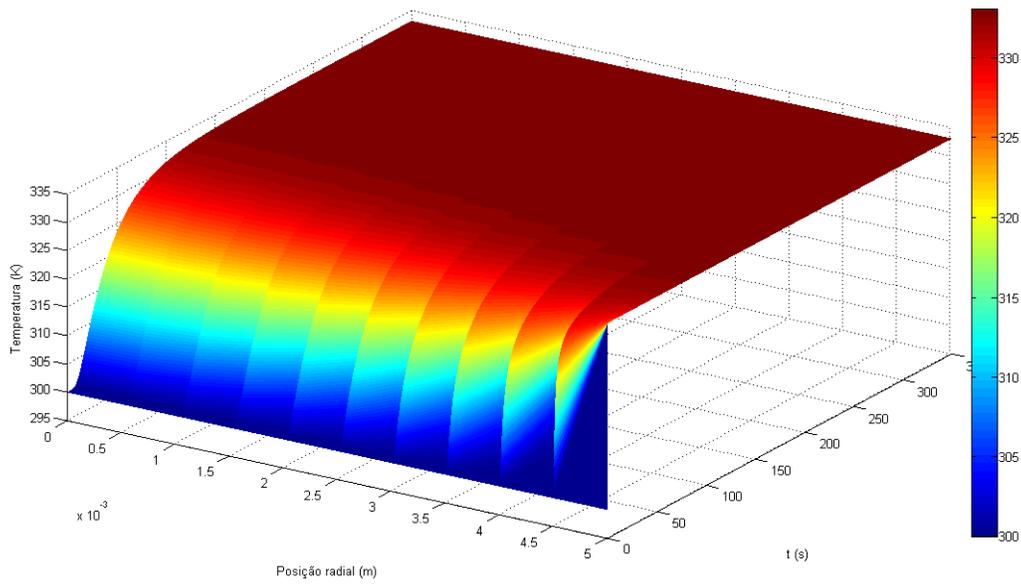


Figura 6.1: Comportamento dinâmico da temperatura no meio - 3D.

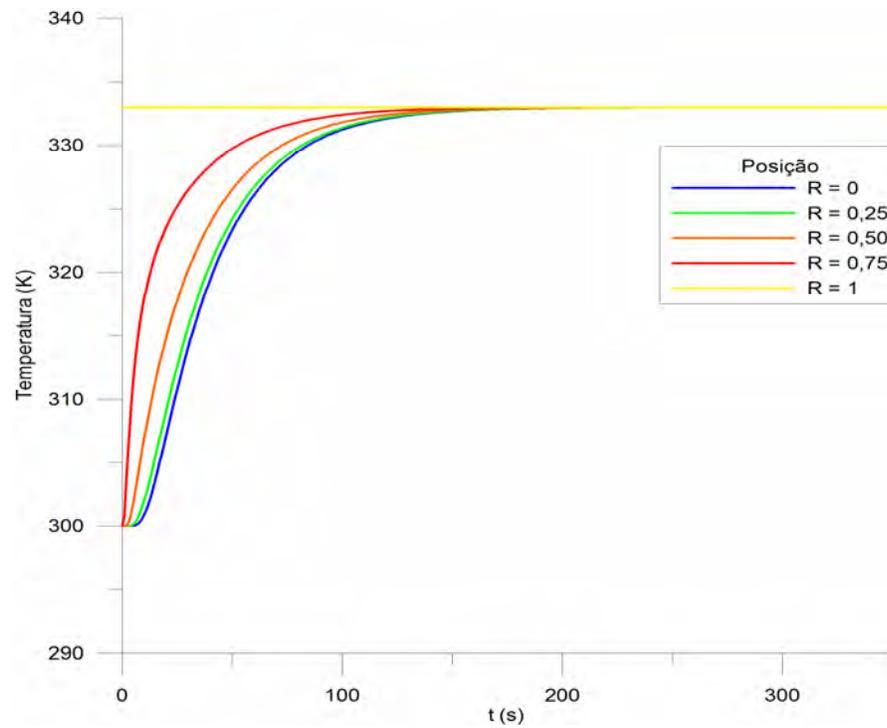


Figura 6.2: Temperatura em função do tempo para cinco posições radiais.

### 6. 1.2.2 Segunda solução

Em segundo lugar, estamos considerando a difusividade térmica do fluido como função da temperatura, conforme descrito no capítulo III, Eq. (3.5). Nesta situação, vamos levar a Tab. 6.2 em consideração para encontrarmos a relação de dependência entre a difusividade térmica e a temperatura. Estimando esta relação como linear, realizamos uma regressão linear ( $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot T$ ), de onde se chega à expressão:

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-8} + 3 \cdot 10^{-10} \cdot T \quad (6.1)$$

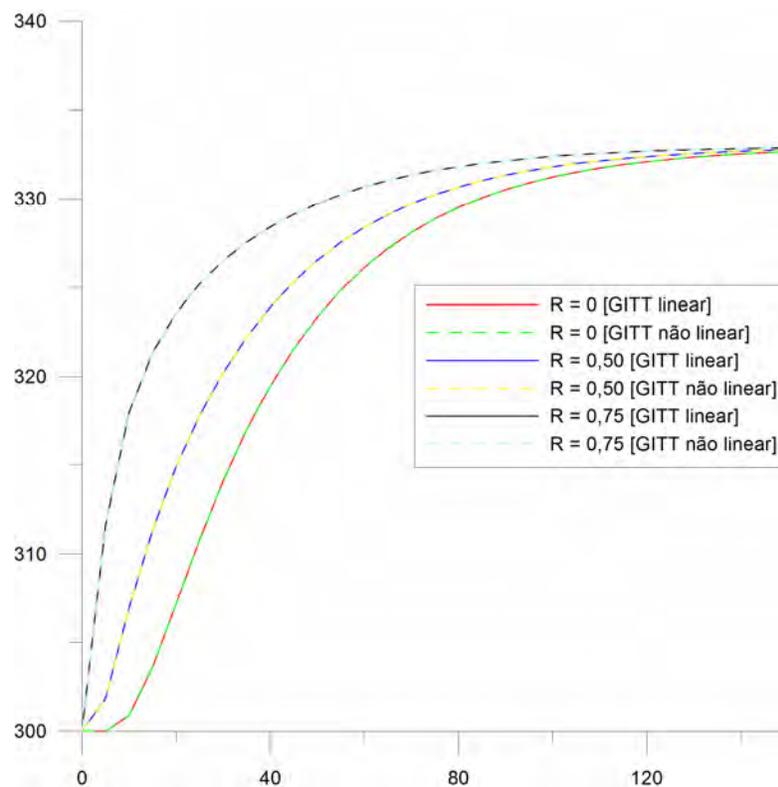
Tabela 6.2 – Propriedades térmicas da água em função da temperatura

T (K)	k (Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )	$\alpha \cdot 10^7$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )
273,15	0,569	1,35
275	0,574	1,36
280	0,582	1,39
285	0,590	1,41
290	0,598	1,43
295	0,606	1,45
300	0,613	1,47
305	0,620	1,49
310	0,628	1,51
315	0,634	1,53
320	0,640	1,55
325	0,645	1,56
330	0,650	1,58
335	0,656	1,60
340	0,660	1,61
345	0,668	1,63
350	0,668	1,64
355	0,671	1,65
360	0,674	1,66

365	0,677	1,67
370	0,679	1,68
373,15	0,680	1,68

Fonte: Adaptada a partir de Incropera e Dewitt (2003)

Com base na Eq. (6.1), que relaciona difusividade térmica e temperatura, para as mesmas condições de contorno e inicial, bem como a geometria, informações anteriormente utilizadas na resolução do problema linear, procedemos a geração do campo dinâmico de temperatura dentro do fluido. A Figura 6.3 ilustra o perfil obtido em três posições radiais distintas (28 termos, séries convergidas), onde se observa que ocorrem pequenas diferenças entre os resultados provenientes do modelo linear (com difusividade térmica constante) e aqueles gerados pelo modelo não linear (com difusividade térmica dependente da temperatura).



6.3: Perfis de temperatura resultantes dos modelos linear e não linear, em três posições radiais distintas (séries convergidas)

Outra forma de verificarmos as diferenças entre os modelos é mediante a observação direta do resíduo, Figura 6.4. São traçadas as curvas das diferenças entre os valores de temperatura para  $R = 0$  temos,  $R = 0,5$  e  $R = 0,75$ . Diferenças justificadas pela variação do coeficiente de difusão de calor com a temperatura, mas que são relativamente pequenas, pois a variação no valor da própria temperatura não é grande. Observa-se, ainda, que as maiores diferenças incidem nos instantes iniciais do processo de difusão, exatamente quando a taxa de variação da temperatura é maior.

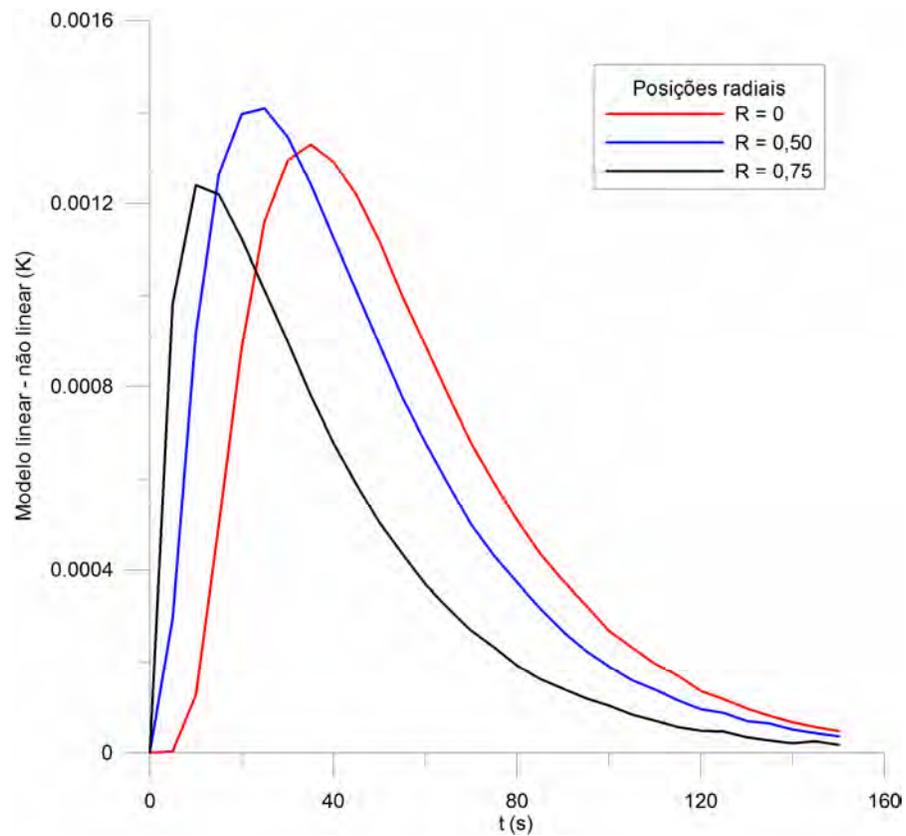


Figura 6.4: Diferença entre os perfis linear e não linear de temperatura em três posições radiais.

### 6. 1.3 Abordagem da Solução Através do NSM

#### 6. 1.3.1 Primeira solução

Propomos um método alternativo de resolução do problema de difusão de calor. Este se baseia na analogia existente entre grandezas térmicas e grandezas elétricas. Simplificadamente, é feito o diagrama esquemático do circuito elétrico dividindo-se o meio em um determinado número de células (discretização espacial). Para efeito de dimensionamento dos componentes do circuito levamos em consideração a geometria cilíndrica do sistema, as propriedades térmicas ( $\rho$ ,  $c_p$  e  $k$ ) da água para a faixa de temperatura em estudo e o comprimento e o raio do cilindro, respectivamente,  $L = 0,024\text{m}$  e  $r_0 = 0,005\text{m}$  ( $L \gg r_0$ ). Inicialmente, traçamos o gráfico comparativo entre a solução do problema linear via transformada integral generalizada (solução convergida) e o modelo do NSM para 20 volumes discretos, vide Figura 6.5. Percebe-se que a diferença entre os modelos é maior para posições mais centrais e diminui à medida que se aproxima da superfície.

Na ilustração posterior, Figura 6.6, temos o comparativo dos modelos, para as mesmas condições anteriormente descritas, todavia o Método de Simulação de Rede foi aplicado para 50 volumes discretos. Através dela pode-se observar a mesma tendência do caso anterior, ou seja, as diferenças são maiores nas regiões próximas ao centro e menores nas áreas mais externas. Percebe-se ainda que, com o aumento do número de células discretas, as diferenças tornaram-se menos intensas em qualquer localização.

Finalmente, para as mesmas condições, é feita a comparação entre a solução via GITT e NSM, considerando este último com 100 volumes. A Figura 6.7 representa esta situação, caso onde se pode observar que, praticamente, não ocorrem diferenças consideráveis entre as duas técnicas de solução para qualquer posição radial, pois o refinamento da malha de discretização espacial do NSM promove uma evolução no seu desempenho. Assim, pode-se verificar um aumento da eficiência do método na medida em que se incrementa o número de volumes  $N$  considerados.

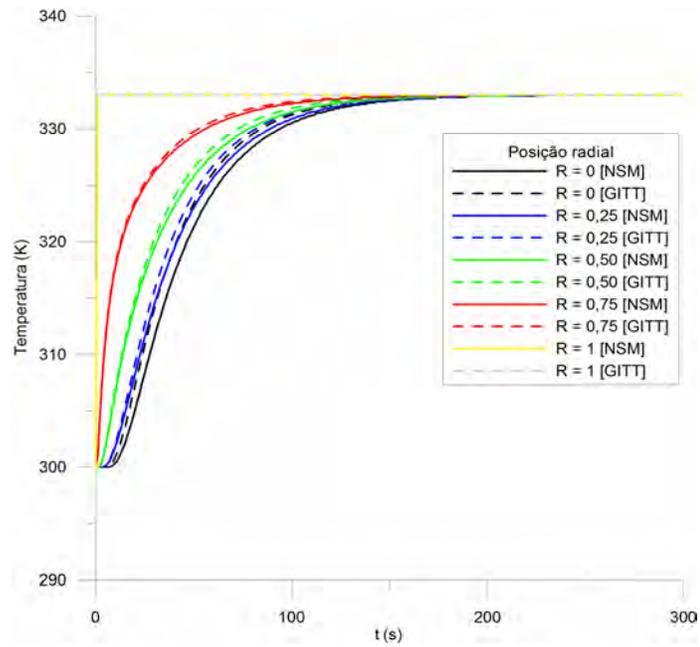


Figura 6.5: Perfil linear de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre GITT (séries convergidas) e NSM (20 volumes).

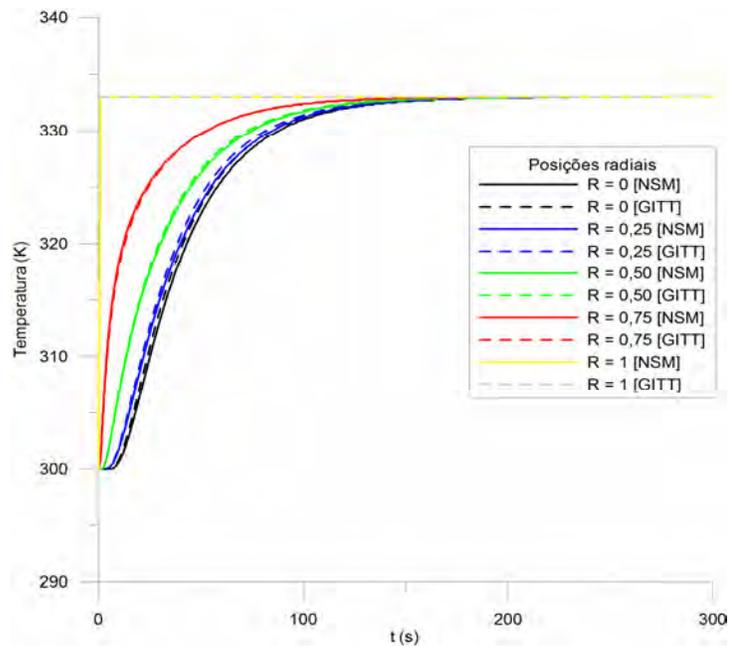


Figura 6.6: Perfil linear de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre GITT (séries convergidas) e NSM (50 volumes).

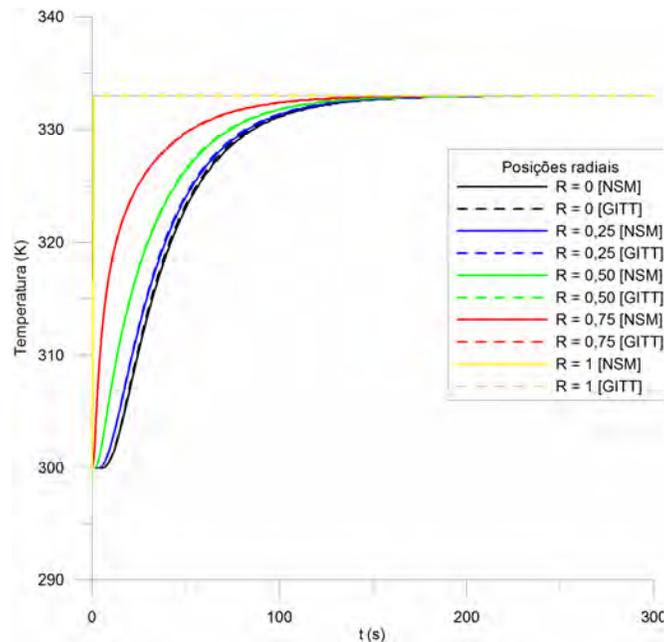


Figura 6.7: Perfil de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre GITT (séries convergidas) e NSM (100 volumes).

O NSM ofereceu maior simplicidade na resolução matemática e apresentou resultados coerentes aos originários da solução via transformação integral.

### 6. 1.3.2 Segunda solução

O modelo R-C adotado para representar o sistema térmico em analogia com o circuito elétrico, enquanto constituído de componentes com valores constantes adéqua-se à solução do problema direto linear. Para representar um sistema térmico com propriedade(s) variável(is), o circuito elétrico deve possuir componentes, analogamente, variáveis. Neste caso, vamos considerar que para o material cuja condutividade térmica varia linearmente com a temperatura ( $k = k_0 + k_1 \cdot T$ ), o sistema elétrico análogo possui resistores cuja resistência elétrica varia linearmente com o potencial elétrico.

Tomando-se as mesmas condições de ensaio dos casos anteriores, traçamos o gráfico comparativo entre a solução do problema via transformada integral generalizada e o modelo do NSM para 20 volumes discretos, ambos não lineares, vide Figura 6.8. Através

do qual se percebe que a diferença entre os modelos é mais visível para posições mais centrais e decresce conforme a proximidade do ponto é maior em relação à superfície, onde é praticamente imperceptível.

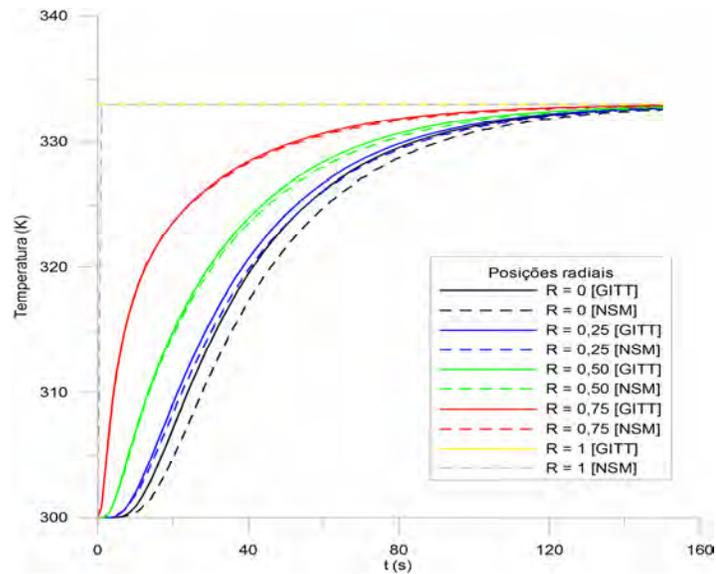


Figura 6.8: Perfil de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre modelos não lineares GITT (séries convergidas) e NSM (20 volumes).

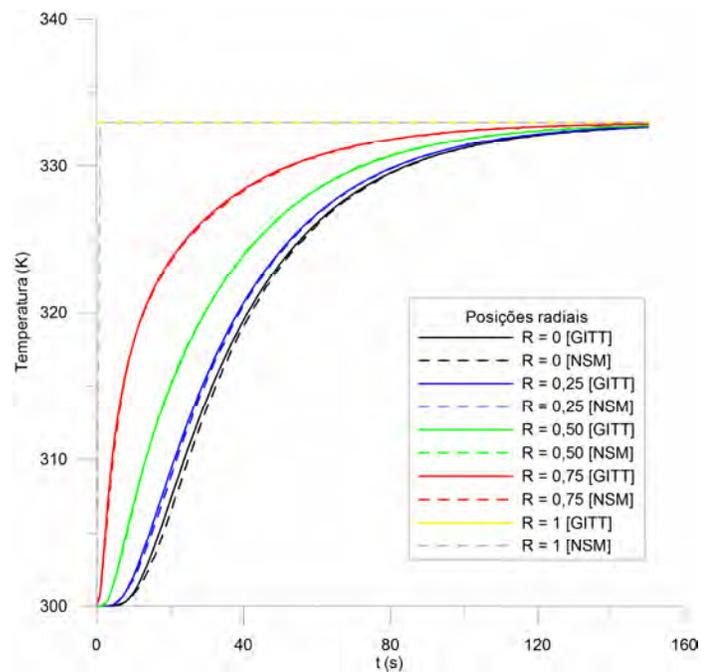


Figura 6.9: Perfil de temperatura em função do tempo para cinco posições radiais, comparativo entre modelos não lineares GITT (séries convergidas) e NSM (50 volumes).

A fim de verificar a evolução do desempenho da solução do problema não linear através do NSM, aumentamos o número de volumes considerados no modelo para 50, o que pode ser observado através da Figura 6.9. Os resultados obtidos são bem mais próximos, ocorrendo ainda algumas pequenas diferenças nas posições mais centrais, como anteriormente detectado.

São confrontados, ainda, os quatro modelos, os dois de resolução linear e os outros dois de solução não linear, para tanto, traçamos as curvas dinâmicas de temperatura na mesma posição radial ( $R = 0$ ), Figura 6.10, onde temos a representação da solução via NSM com 50 células (simulação PSPICE) e aquelas obtidas pela aplicação da GITT (FORTRAN).

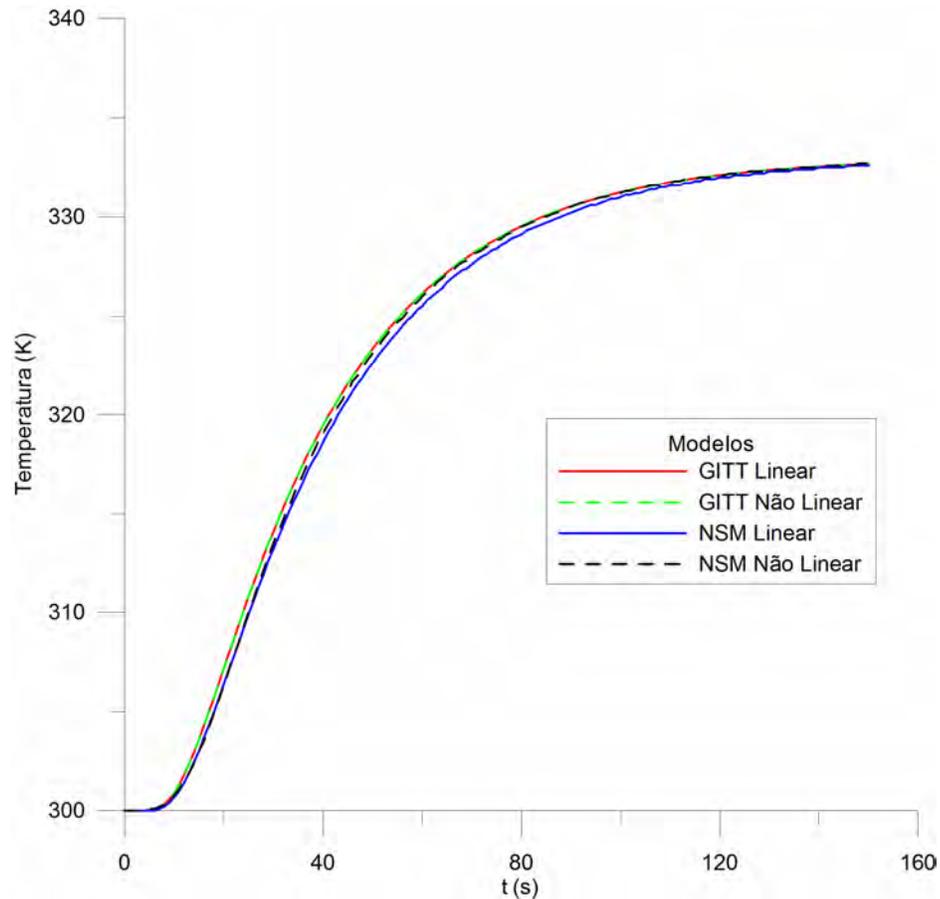


Figura 6.10: Perfis de temperatura obtidos através dos modelos lineares e não lineares NSM (50 volumes) e GITT, em  $R = 0$ .

Pode-se perceber que o NSM ofereceu maior simplicidade e velocidade na obtenção do perfil de temperatura para a solução do modelo não-linear que a GITT, pois para esta houve uma demanda maior de tempo computacional.

## 6.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O objetivo principal do procedimento experimental é a obtenção do perfil dinâmico de temperatura no interior do fluido em estudo. Como descrito no capítulo IV, termopares tipo T imersos no líquido são responsáveis por esta medição. O programa desenvolvido para aquisição e gravação dos dados em arquivo permite não apenas o acompanhamento *real time*, mas também o tratamento e manipulação dos mesmos para posterior apresentação gráfica. Devido ao comportamento praticamente constante da difusividade térmica da água para faixas estreitas de variação da temperatura, consideraremos apenas os modelos lineares de solução para comparar com os resultados experimentais.

As Figuras 6.11a-h representam algumas das experiências realizadas, considerando medição e modelos de temperatura tomados na posição central do cilindro. Em cada um dos oito casos ilustrados a seguir considera-se uma temperatura inicial uniforme ( $T_{ini}$ ) e o sistema é submetido a uma temperatura imposta na superfície metálica ( $T_s$ ), as propriedades de condutividade térmica ( $k$ ), capacidade calorífica volumétrica ( $\rho \cdot c_p$ ) e difusividade térmica ( $\alpha$ ) foram obtidas da Tabela 6.2, de acordo com a faixa de temperatura abrangida pelo procedimento experimental.

As primeiras duas imagens (Figuras 6.11a e 6.11b) foram obtidas a partir de experimentos realizados a temperaturas inferiores à ambiente e, como se pode observar, os modelos de resolução do problema direto adéquam-se aos resultados experimentais. Evidentemente, os dados experimentais apresentam oscilação, visto que na prática, mesmo com um sistema de controle térmico atuando a temperatura varia devido a influências de processos indesejados de transferência de calor entre o sistema e o ambiente ou, até mesmo, fenômenos internos (convecção, pequenas instabilidades do controlador, etc.).

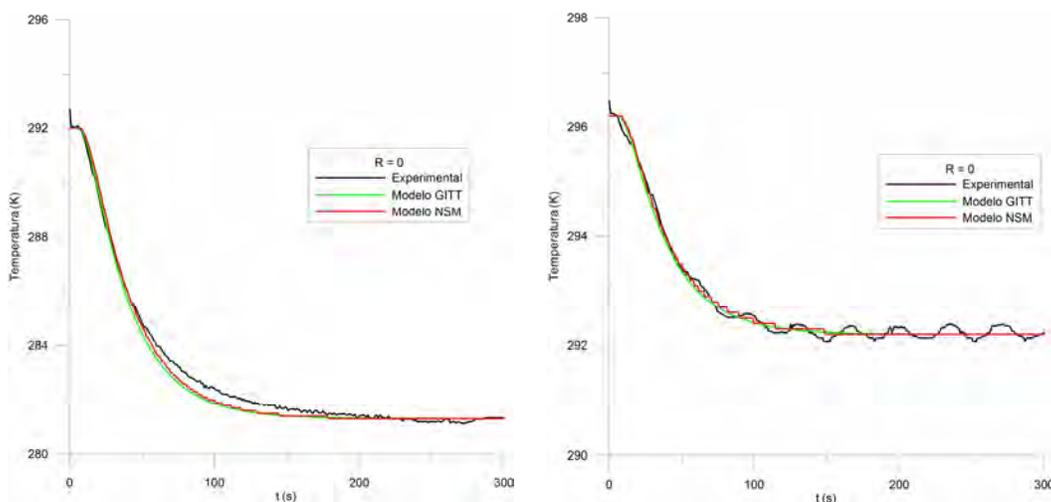
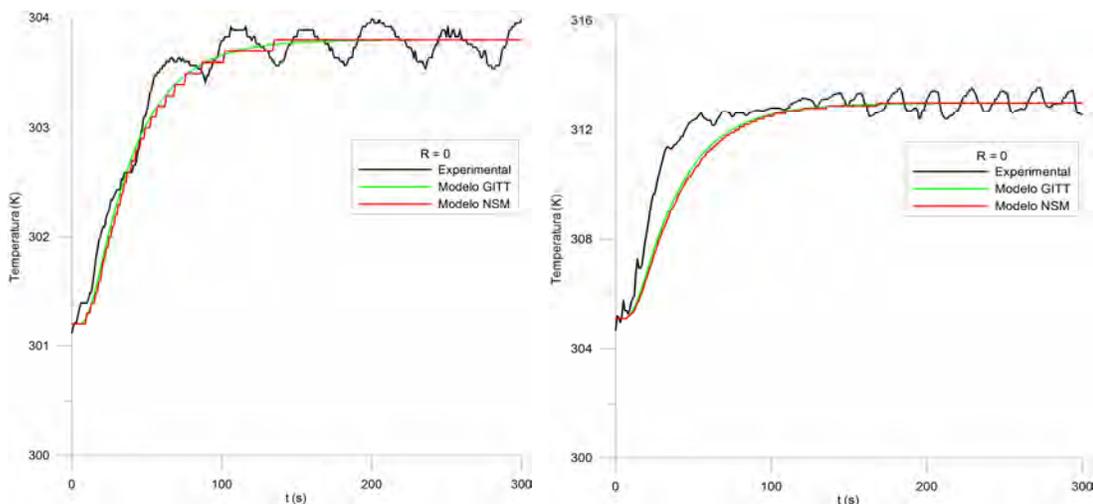
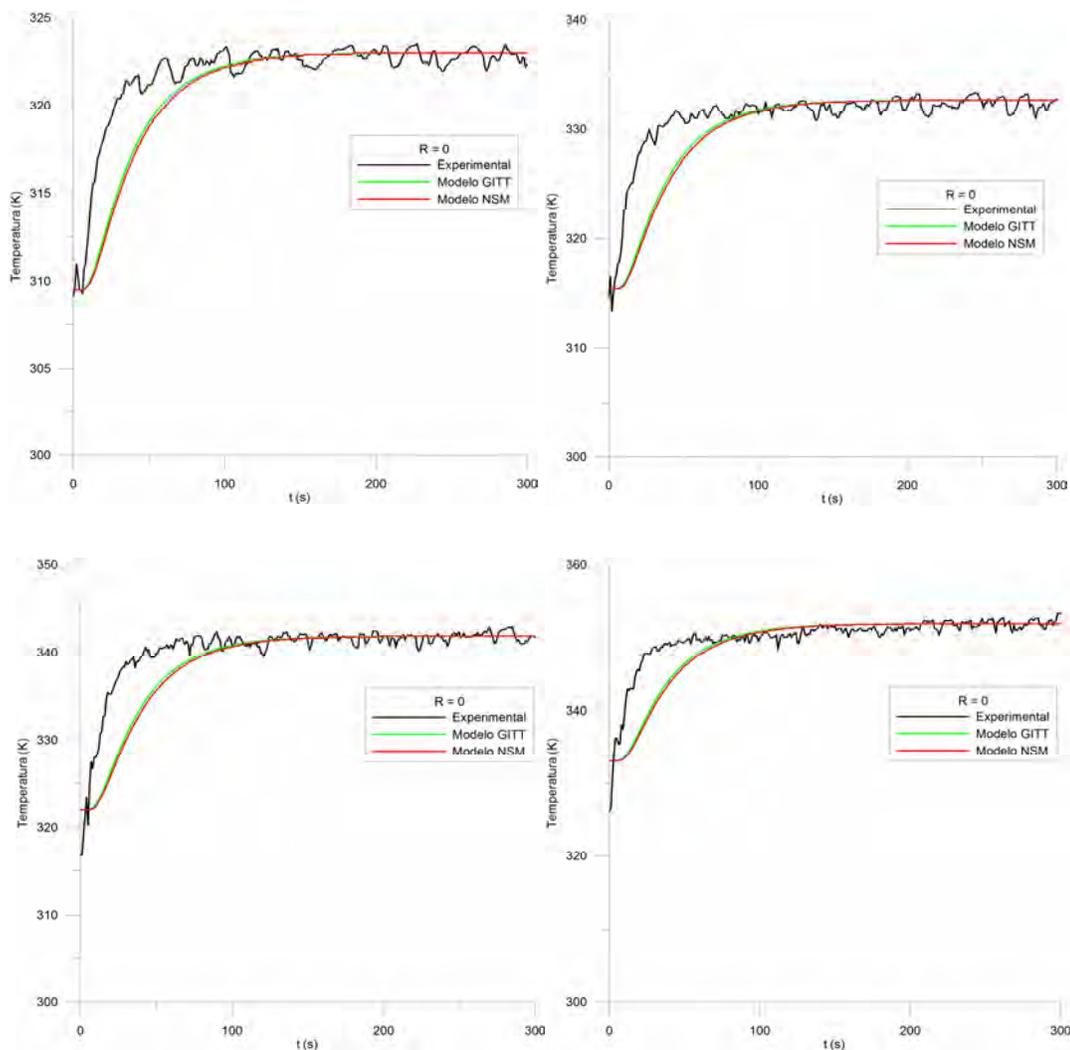


Figura 6.11 a e b: Perfis teóricos e experimentais de temperatura na posição radial central

Nos casos posteriores, Figura 6.11c a h, os ensaios foram realizados para temperatura superiores à ambiente. Ocorrem disparidades os modelos teóricos e os resultados experimentais, embora eles sigam a tendência da resposta real do sistema. Visualmente, as diferenças são bem menores para temperatura mais baixas e evoluem com o aumento desta, provavelmente devido aos efeitos convectivos mais acentuados para temperaturas maiores. Portanto, o procedimento experimental apresenta maior coerência com os modelos de condução de calor em situações de temperaturas mais amenas.



Figuras 6.11c a d: Perfis teóricos e experimentais de temperatura na posição radial central



Figuras 6.11e a h: Perfis teóricos e experimentais de temperatura na posição radial central

Na seqüência, são apresentadas as Figuras 6.12a a h, correspondentes aos mesmos experimentos ilustrados nas Figuras 6.11a a h, mas que representam o erro, diferença entre a temperatura medida e a temperatura calculada pela aplicação dos modelos teóricos (GITT e NSM) ao longo do tempo, todas tomadas na posição central. As primeiras duas figuras (6.12a e 6.12b) dizem respeito a ensaios efetuados nas temperaturas abaixo da ambiente e, de acordo com os gráficos, apresentam os menores erros entre os valores experimentais e aqueles obtidos através da modelagem matemática. As demais imagens, Figuras 6.12c a h, referem-se aos ensaios realizados a temperaturas superiores à ambiente. Pode-se observar

que os erros são maiores para estes ensaios posteriores, conforme constatado e citado anteriormente.

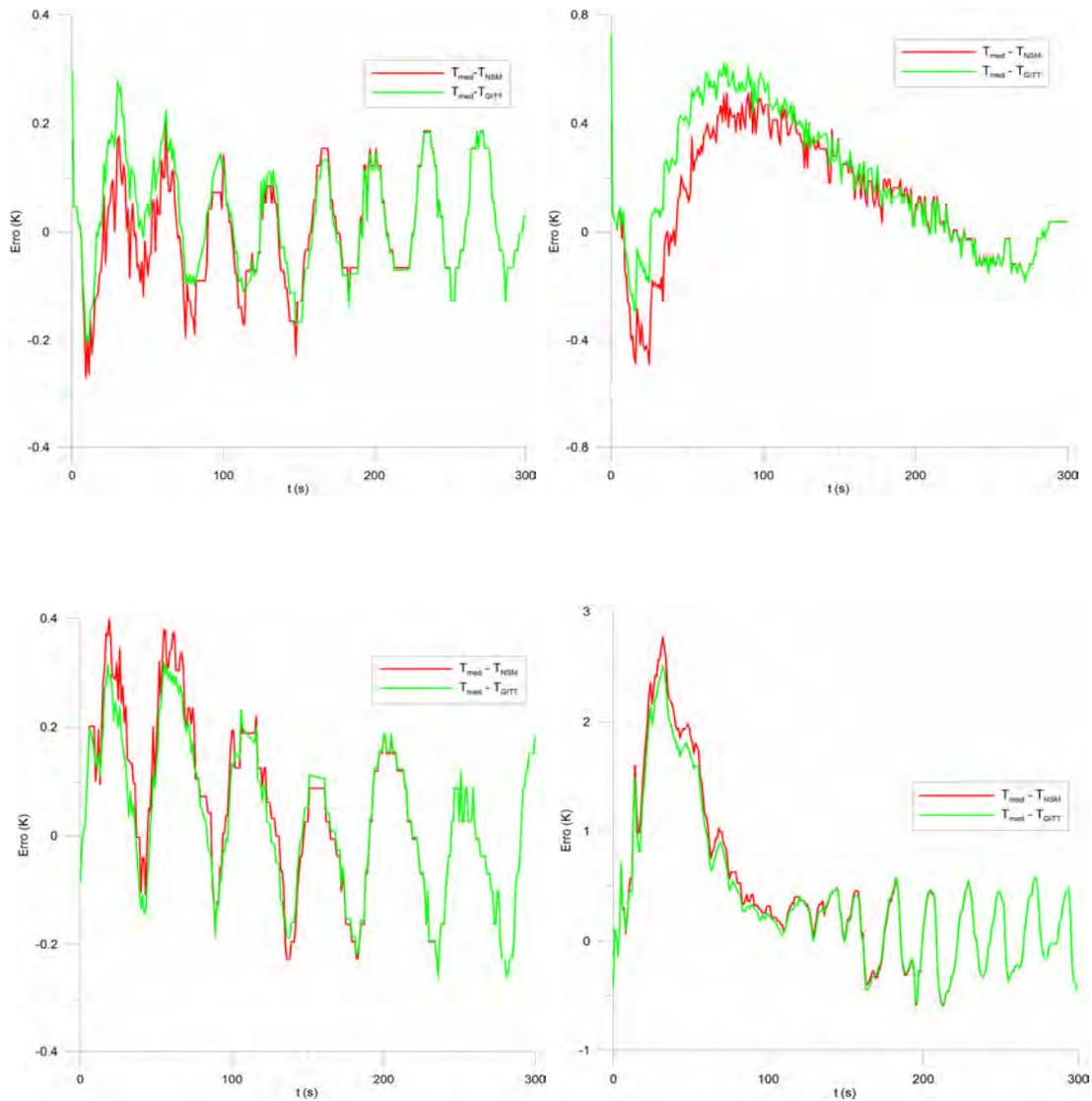


Figura 6.12a a d: Diferença entre os perfis experimentais e teóricos de temperatura no centro do cilindro.

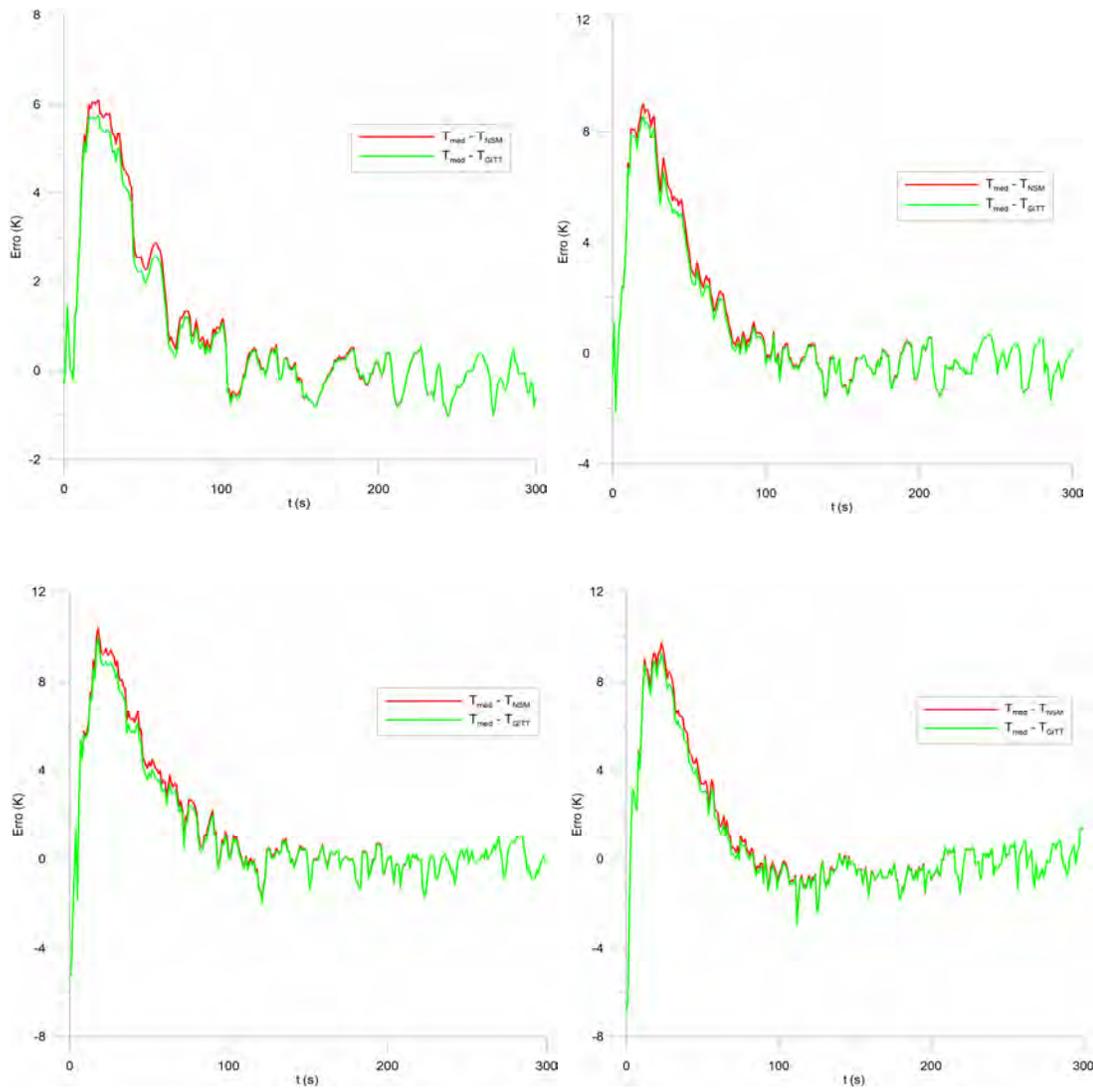
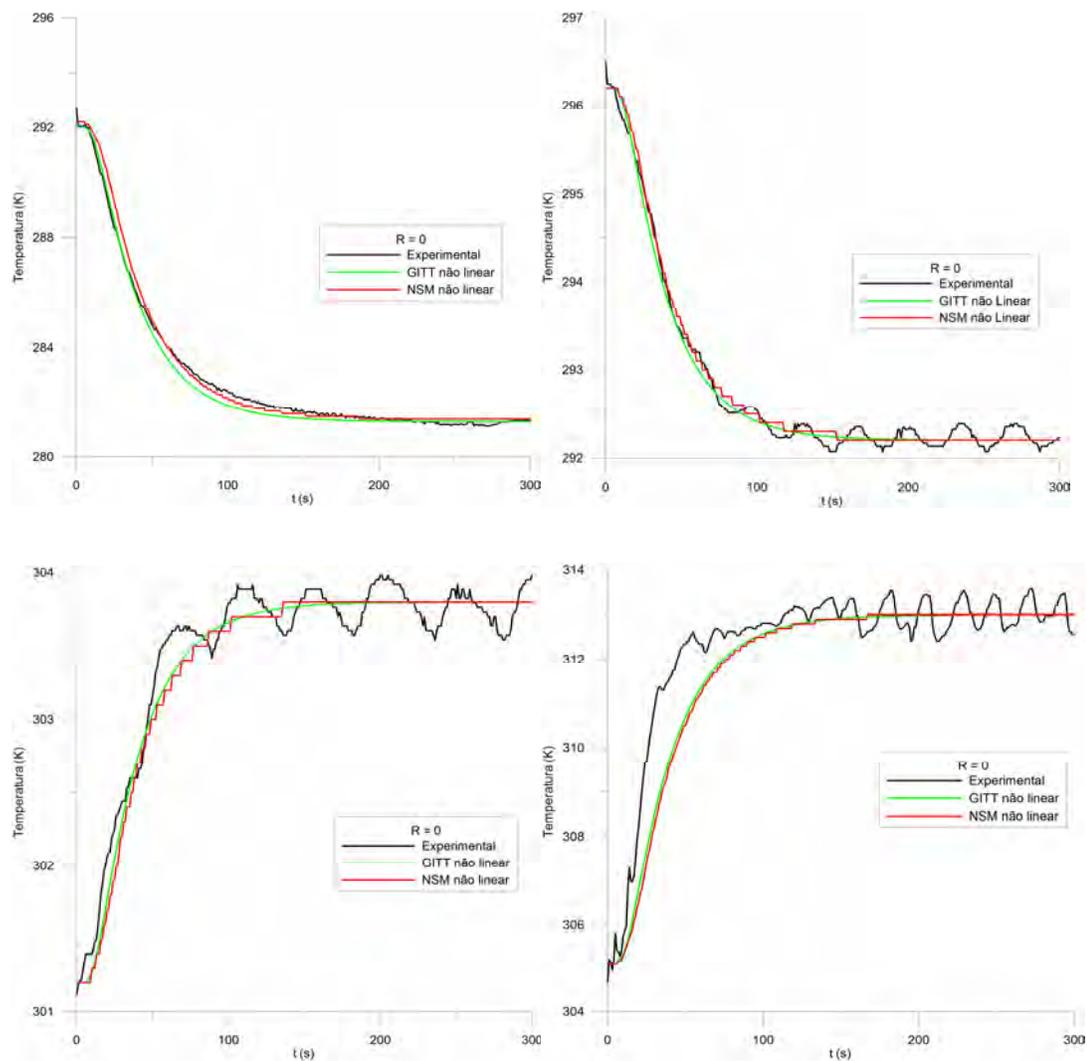


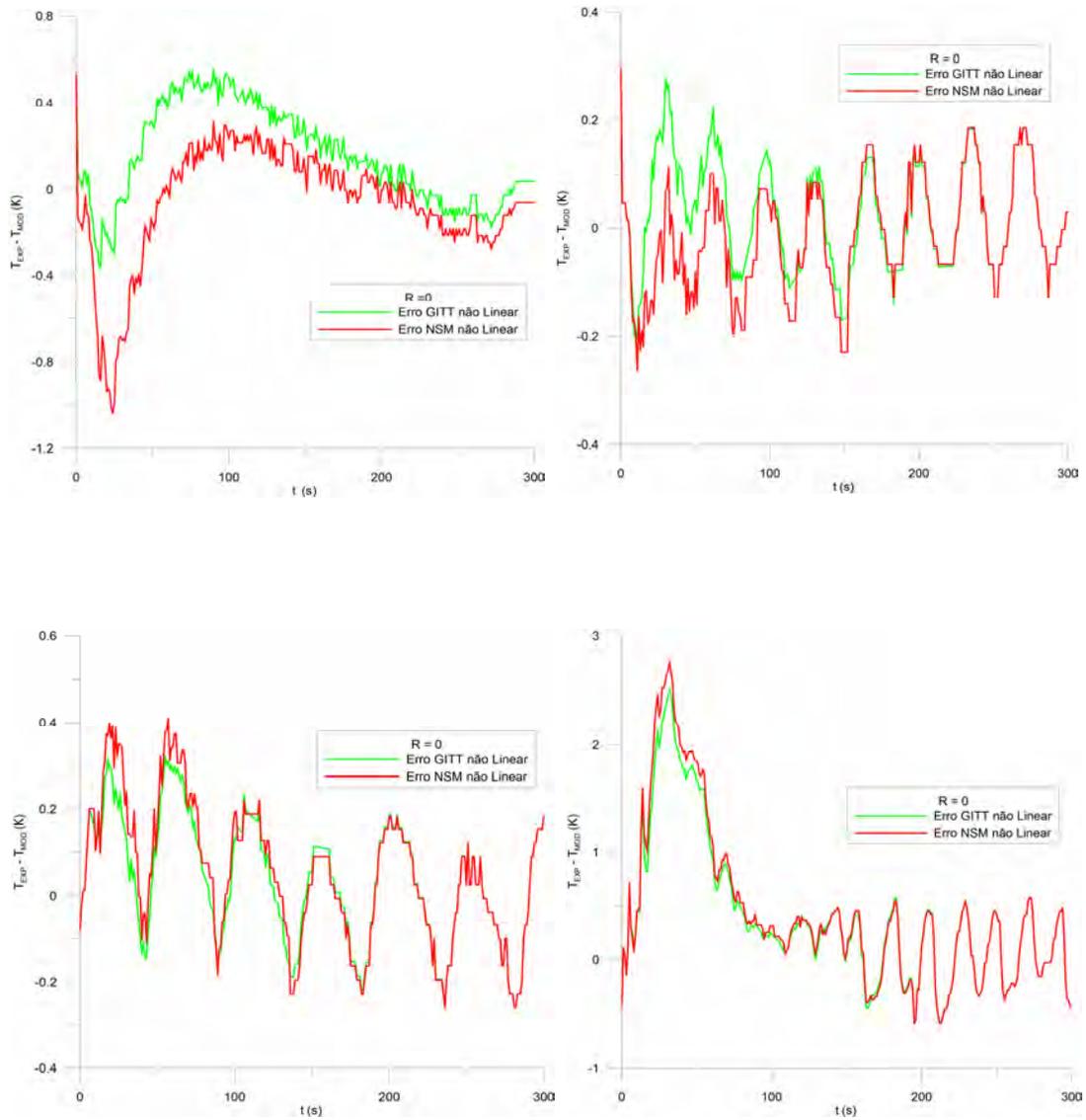
Figura 6.12e a h: Diferença entre os perfis experimentais e teóricos de temperatura no centro do cilindro

Os primeiros quatro casos experimentais são também comparados com as soluções não lineares, tanto GITT, quanto NSM, para as mesmas condições anteriormente citadas, nas Figuras 6.13a até d. Pode-se observar o comportamento dos modelos em coerência com os resultados dos perfis experimentais de temperatura em todas as faixas examinadas.



Figuras 6.13a a d: Perfis teóricos não lineares e experimentais, tomados na posição central

Sequencialmente, nas Figuras 6.14a até d, são exibidos os erros, diferenças entre os modelos teóricos não lineares (GITT e NSM) e os valores obtidos experimentalmente, levando-se em consideração as mesmas quatro situações.



Figuras 6.14a a d: Diferença entre os perfis experimentais e teóricos de temperatura no centro do cilindro

### 6.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Inicialmente faz-se uma investigação no comportamento da taxa de variação da temperatura no interior do meio considerado (líquido em estudo). Para tanto, consideramos uma cavidade cilíndrica preenchida com água, cujo raio interno  $r_0 = 0,0050$  m, a condição inicial é de temperatura uniforme  $T_{ini} = 300$  K, subitamente se impõe uma temperatura  $T_s = 302$  K na superfície. A Figura 6.15 ilustra a taxa de variação de temperatura em função do tempo em três posições radiais adimensionais (0, 0,25 e 0,75). É notório que esta variável (dependente do tempo e da posição) é tão mais intensa, quanto mais próximo o ponto está da perturbação (superfície) e que os pontos de máximo ocorrem para os instantes iniciais do processo. Na posição  $r = 0,0000$  m o máximo valor de  $\partial T/\partial t$  é de aproximadamente 0,045 K/s e ocorre aos 20s, já para  $r = 0,00250$  m, o pico vale 0,063 K/s, ocorrendo aos 7s e, no ponto  $r = 0,00375$  m chega a 0,200 K/s, apenas 2s após iniciado o processo. Portanto, acontece um deslocamento do pico ao longo do tempo e do espaço, ele sofre atenuação com o passar do tempo e à medida que nos aproximamos do centro do cilindro.

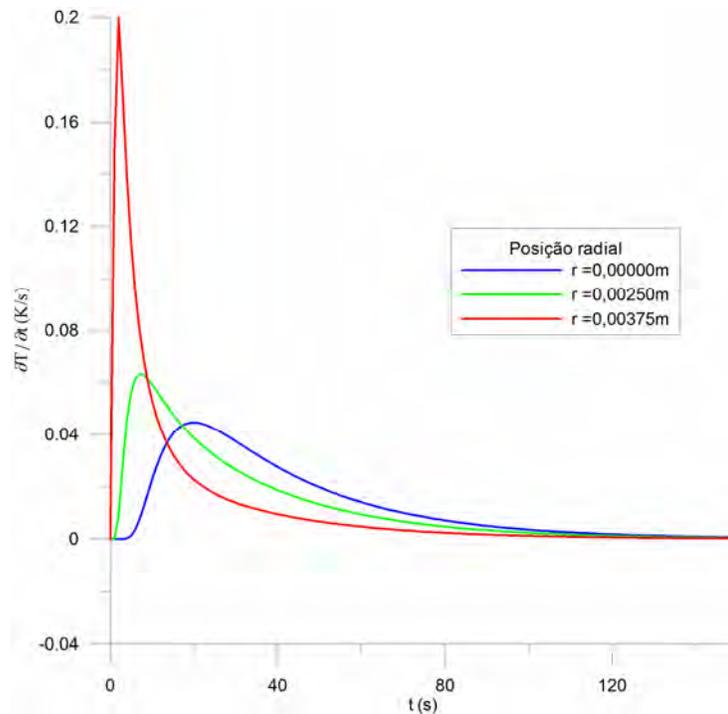


Figura 6.15: Taxa de variação da temperatura ao longo do tempo tomada em três posições radiais.

Verifica-se, também, a variação da temperatura com a posição radial para as mesmas condições propostas na análise anterior. Através da Figura 6.16 podemos visualizar que na posição central do cilindro ocorre a condição de contorno  $\partial T / \partial r = 0$ , já nos demais pontos observados a derivada da temperatura em relação a posição é bem alta. Em  $r = 0,00250\text{m}$  o valor máximo (aproximadamente  $395,6\text{ K/m}$ ) acontece no instante  $t = 13\text{ s}$  e para  $r = 0,00375\text{m}$ , ocorre um pico de cerca de  $801,8\text{ K/m}$  aos  $5\text{ s}$ . De onde se conclui que os pontos de máximo desta variável também sofrem deslocamento espaço-temporal, ocorrendo mais cedo e com maior intensidade nas posições mais externas do cilindro (maior proximidade do sinal de excitação) e mais tardiamente e com intensidade inferior nas proximidades do centro da cavidade cilíndrica.

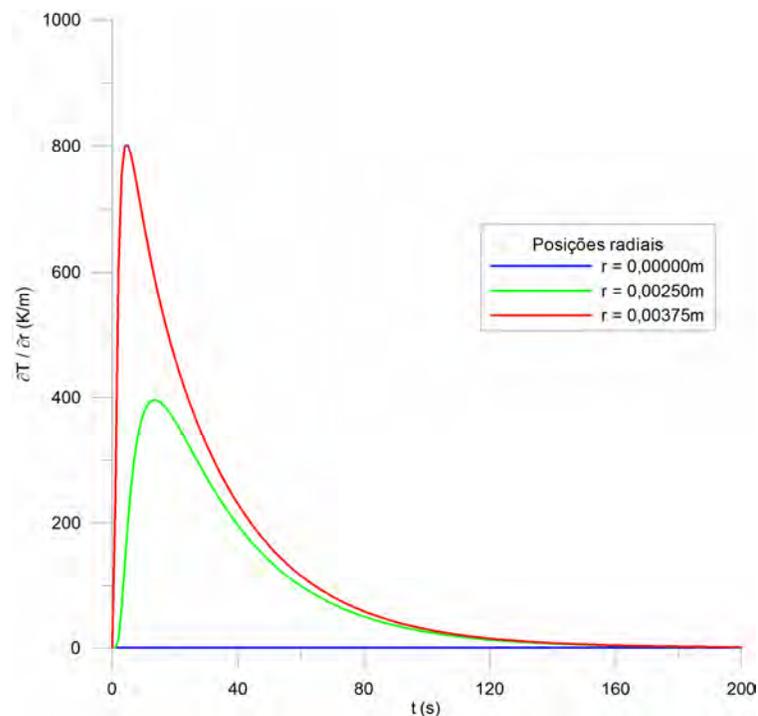


Figura 6.16: Derivada da temperatura em relação a posição ao longo do tempo tomada em três posições radiais.

### 6. 3.1 Estudo de Sensibilidade aos Parâmetros do Modelo

Sabe-se que a temperatura no interior do meio considerado é uma função da posição radial ( $r$ ), do instante ( $t$ ), da condutividade térmica ( $k$ ), da capacidade calorífica volumétrica ( $\rho c_p$ ) e da difusividade térmica ( $\alpha$ ) do material:

$$T = f(r, t, k, \rho c_p, \alpha)$$

O estudo de sensibilidade aos parâmetros do modelo precisa ser efetuado a fim de se examinar a influência destes parâmetros no comportamento dinâmico da temperatura no interior do fluido em estudo e a possibilidade de identificação dos mesmos a partir do campo experimental medido e daquele gerado através do modelo matemático na resolução do problema direto, conforme descrito no capítulo V.

Assim, inicialmente determinamos os coeficientes de sensibilidade da temperatura em relação a três parâmetros que aparecem no modelo matemático: condutividade térmica, capacidade calorífica volumétrica e difusividade térmica do material (no caso, água). Para efeito de cálculos o raio do cilindro cheio de água considerado é  $r_0 = 0,005$  m, cujo comprimento é bem maior que o raio, inicialmente a uma temperatura uniforme de 300K, é imposta uma condição de contorno do tipo temperatura prescrita igual a 302K na superfície. As observações são feitas com relação a posição central.

Os resultados são ilustrados na Figura 6.17, nela pode-se observar o coeficiente de sensibilidade reduzido da temperatura em relação a condutividade térmica ( $\partial T \cdot k / \partial k$ ), curva em amarelo, o coeficiente de sensibilidade reduzido da temperatura em relação a capacidade calorífica volumétrica ( $\partial T \cdot \rho c_p / \partial \rho c_p$ ), curva em azul e, finalmente, o coeficiente de sensibilidade reduzido da temperatura em relação a difusividade térmica ( $\partial T \cdot \alpha / \partial \alpha$ ), curva em verde. Por intermédio de uma análise visual pode-se constatar que:

- ✓ O coeficiente de sensibilidade relativo ao parâmetro  $k$  aumenta até alcançar o ponto de máximo no instante 33s, vindo logo após isto a diminuir e para instantes posteriores a 200s praticamente se anula;

- ✓ Para o coeficiente referente à capacidade calorífica volumétrica, o ponto de mínimo ocorre exatamente no mesmo instante que o coeficiente de sensibilidade em relação a  $k$  chegou ao máximo, apresentando a mesma intensidade com o sinal oposto. Característica esta que aponta para uma dependência linear entre ambos. Portanto, em termos de estimativa de parâmetros isto implica na impossibilidade da determinação simultânea destes dois;
- ✓ Embora o coeficiente de sensibilidade reduzido da temperatura em relação a difusividade térmica apresente o mesmo comportamento que aquele relativo à condutividade térmica, por ser uma combinação entre  $k$  e  $\rho c_p$ , pode ser possível estimar  $\alpha$ ;
- ✓ Os maiores valores de sensibilidade, em termos absolutos, são atingidos antes dos primeiros 40s, indicando que a melhor opção para realizar a estimativa do parâmetro é neste intervalo de tempo.

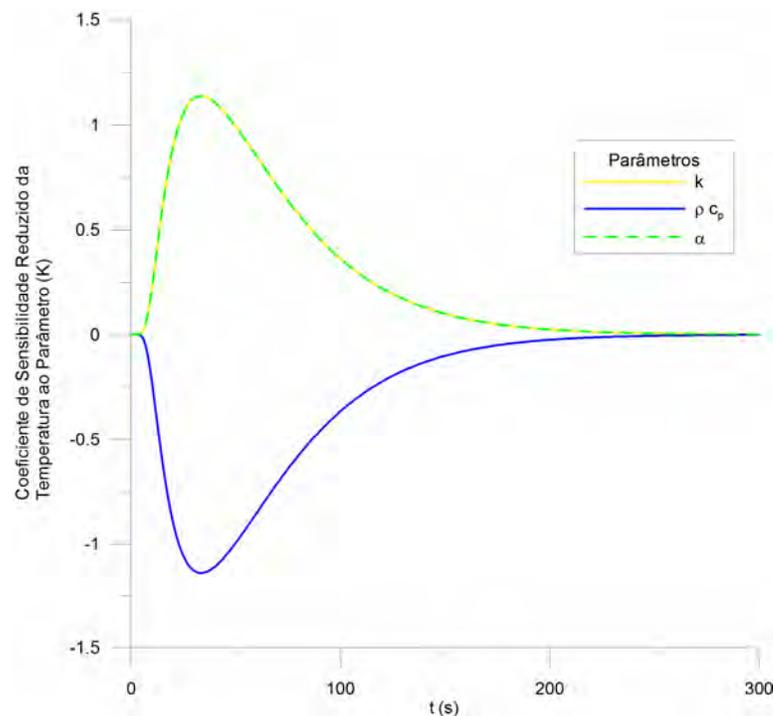


Figura 6.17: Coeficientes de Sensibilidade Reduzidos da Temperatura em relação aos parâmetros térmicos do modelo.

### 6. 3.2 Identificação da Difusividade Térmica

O modelo matemático resolvido através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (teórico) permite a determinação do campo dinâmico da temperatura dentro do meio. Com base no conhecimento dos parâmetros condutividade térmica, capacidade calorífica volumétrica, difusividade térmica, além das informações sobre a geometria, condições de contorno e inicial soluciona-se o problema direto (difusão de calor).

A solução do problema inverso (estimativa de parâmetro) é obtida através da minimização da norma dos mínimos quadrados ordinários entre o perfil de dinâmico da temperatura medida (experimental) e aquele do modelo desenvolvido, aplicando-se o Método de *Levenberg-Marquardt*. Para realizar tal minimização da função objetivo, dada pela Eq. (5.4), um código em linguagem MATLAB foi desenvolvido.

O procedimento iterativo do método, dado pela Eq. (5.14), é inicializado a partir de valores presumidos da difusividade térmica com a mesma ordem de grandeza daqueles encontrados na literatura.

## PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais são obtidos a partir da medição da temperatura no interior do sistema considerado, um cilindro de raio  $r_0 = 0,005\text{m}$ , cheio de água, inicialmente à temperatura uniforme, cuja temperatura da superfície é subitamente modificada, mediante a atuação do sistema de controle térmico. Escolhendo-se uma posição a ser analisada, por exemplo, o centro do cilindro ( $r = 0$ ), calcula-se o perfil de temperatura a partir do modelo apresentado no capítulo III, através da GITT (linear).

A Tab. 6.3 foi construída através de alguns dos dados obtidos pela resolução do problema inverso, ou seja, conhecendo-se a dinâmica da temperatura e um modelo teórico que possa ser utilizado para calculá-la, faz-se a estimativa de uma propriedade desconhecida (difusividade térmica), mas que aparece na descrição matemática do fenômeno. No primeiro caso, as temperaturas medidas experimentalmente como  $T_{\text{ini}}$  e  $T_s$  foram 292,2 e 281,4 K respectivamente, consideramos como “chute” inicial para difusividade térmica ( $\alpha_0$ )  $1,38 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , após a aplicação do método inverso de estimativa de parâmetro o valor obtido para a difusividade foi  $1,40 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e o desvio

padrão ( $s$ ) calculado foi de  $0,79 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Os demais casos seguem o mesmo procedimento, porém com as temperaturas inicial e de superfície diferindo umas das outras, as quais estão representados na referida tabela. Os resultados apresentados são consonantes com aqueles esperados, isto é, valores típicos encontrados na literatura. Vale ressaltar que para temperaturas inferiores a ambiente os resultados apresentam erros bem menores, o que qualifica a técnica para a situação em que, justamente, os dispositivos atuadores do sistema de controle (módulos de efeito *Peltier*) têm o diferencial em relação aos demais. Pois caso fôssemos trabalhar apenas com aquecimento, possivelmente um circuito com resistores elétricos (como atuadores) tivessem certa vantagem. Neste caso, ratificamos a aplicação das pastilhas *Peltier*, devido a sua capacidade de aquecimento e arrefecimento.

Tabela 6.3 – Estimativas obtidas para Difusividade Térmica

$T_{\text{ini}}$ (K)	$T_{\text{S}}$ (K)	$\alpha_0$ ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )	$s$ ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
292,2	281,4	$1,38 \cdot 10^{-7}$	$1,40 \cdot 10^{-7}$	$0,79 \cdot 10^{-9}$
296,2	292,2	$1,44 \cdot 10^{-7}$	$1,41 \cdot 10^{-7}$	$0,89 \cdot 10^{-9}$
301,2	303,8	$1,47 \cdot 10^{-7}$	$1,65 \cdot 10^{-7}$	$0,23 \cdot 10^{-8}$
305,1	313,0	$1,51 \cdot 10^{-7}$	$2,10 \cdot 10^{-7}$	$0,28 \cdot 10^{-8}$
311,5	324,2	$1,53 \cdot 10^{-7}$	$2,57 \cdot 10^{-7}$	$0,41 \cdot 10^{-8}$
316,5	332,8	$1,57 \cdot 10^{-7}$	$3,38 \cdot 10^{-7}$	$0,48 \cdot 10^{-8}$

Para os seis casos representados na Tab. 6.3 construímos gráficos de correlação entre a variável medida (temperatura experimental) e a variável calculada através do modelo teórico (temperatura calculada pelo modelo da GITT linear). As Figuras 6.18a a f ilustram, respectivamente, para os casos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 os resultados obtidos para  $T_{\text{experimental}}$  (K) em função de  $T_{\text{modelo}}$  (K), curvas em azul e, no intuito de estudarmos o grau de correlação existente entre os valores experimentais e teóricos da temperatura temos as retas de regressão linear em preto (todos os valores de temperatura foram tomados na posição radial central do cilindro). Analisando os valores alcançados, no caso 1 temos a melhor situação, maior valor encontrado para o coeficiente de correlação linear entre o valor medido da temperatura e o valor modelado para a mesma,  $R^2 = 0,992977$ , e no caso 6 a pior situação, menor valor do coeficiente de correlação,  $R^2 = 0,76809$ . Além disso, através de uma simples inspeção visual nos gráficos, observamos que para as situações em

que a estimativa da difusividade térmica apresentou menores valores para os desvios-padrão foram exatamente os casos em que a correlação entre a temperatura medida e a temperatura calculada era mais forte. Pois quando o modelo representa melhor a variável, a norma dos mínimos quadrados assume valores menores, o processo de minimização torna-se mais eficiente, então o parâmetro a ser estimado está mais próximo do valor esperado. Pelos resultados alcançados, percebemos que o modelo representa bem o fenômeno físico. Faz-se necessário, portanto, trabalhar sempre no controle térmico de forma que ele mantenha estáveis as condições de ensaio. Desta maneira, o procedimento de estimativa da difusividade térmica oferecerá êxito, principalmente se para os resultados não for requerida altíssima precisão, que é o caso de boa parte das aplicações de engenharia.

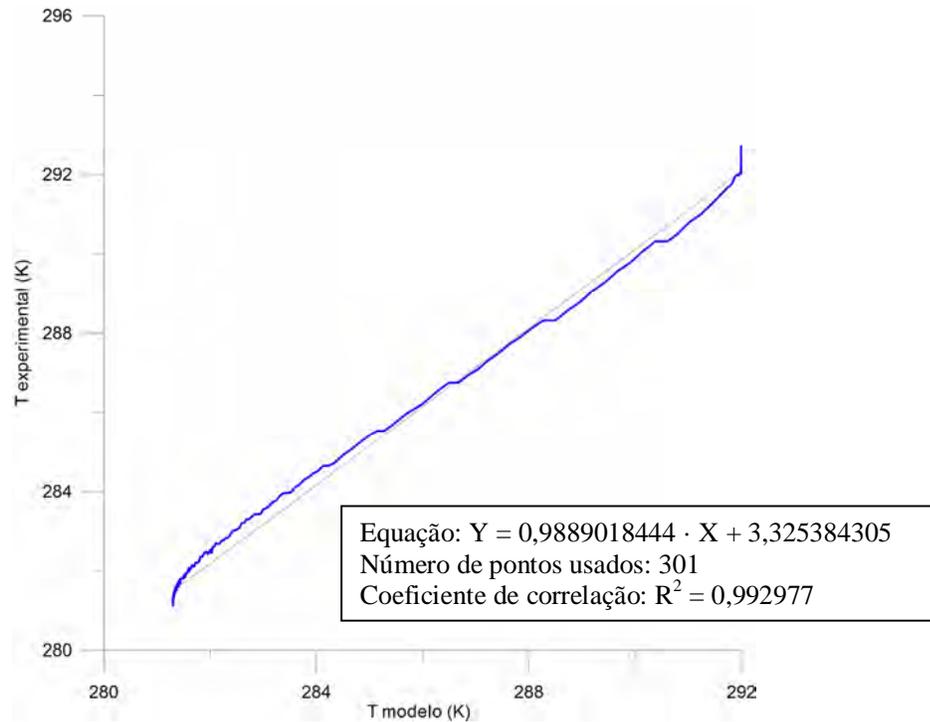


Figura 6.18a: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 1

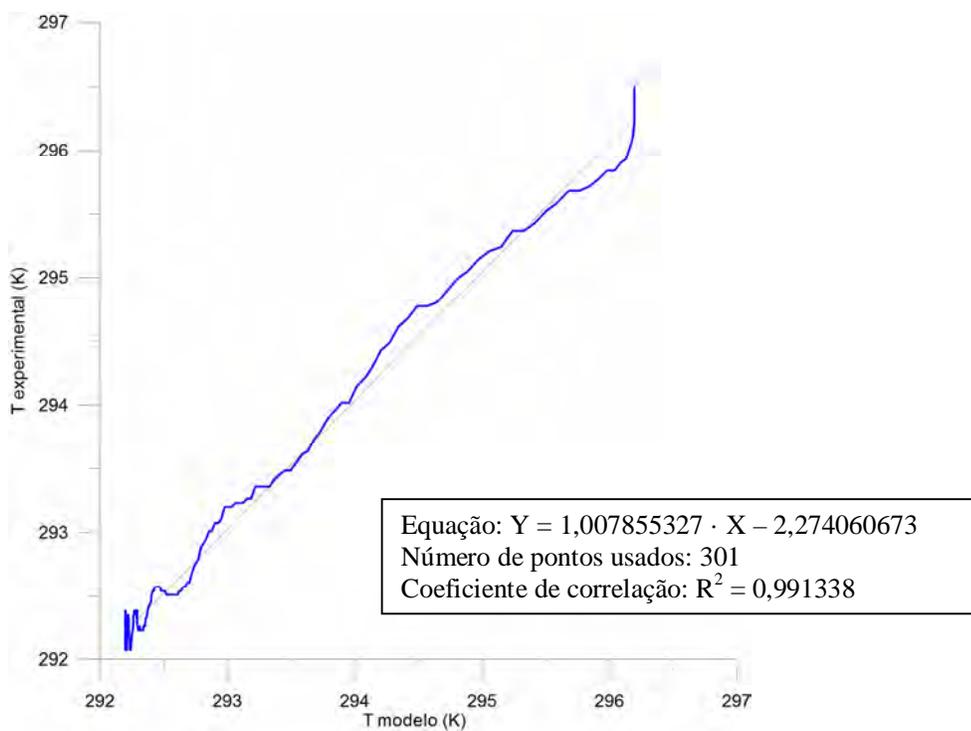


Figura 6.18b: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 2

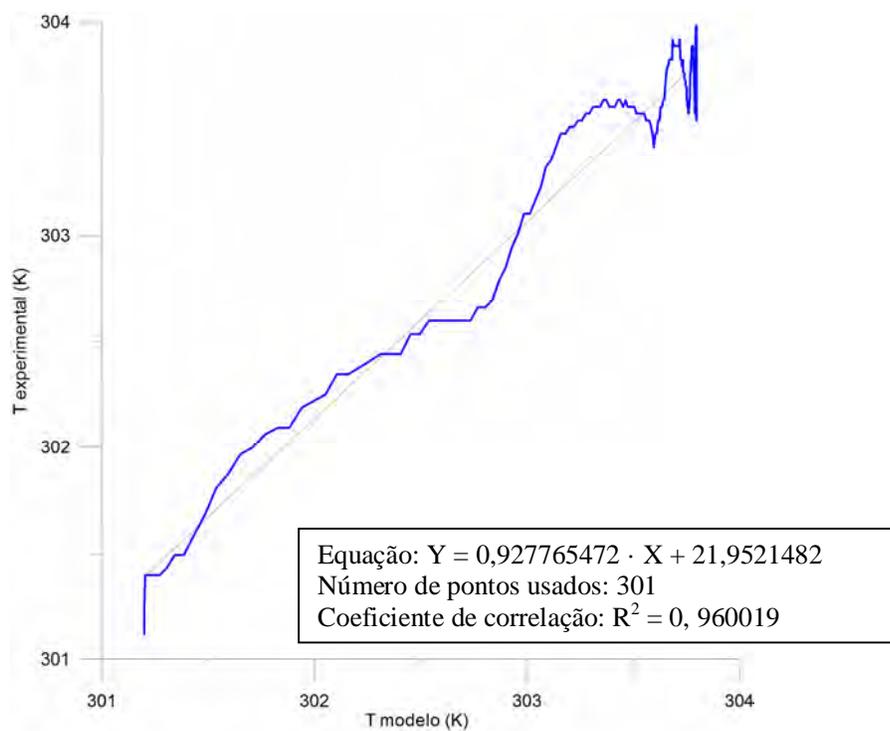


Figura 6.18c: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 3

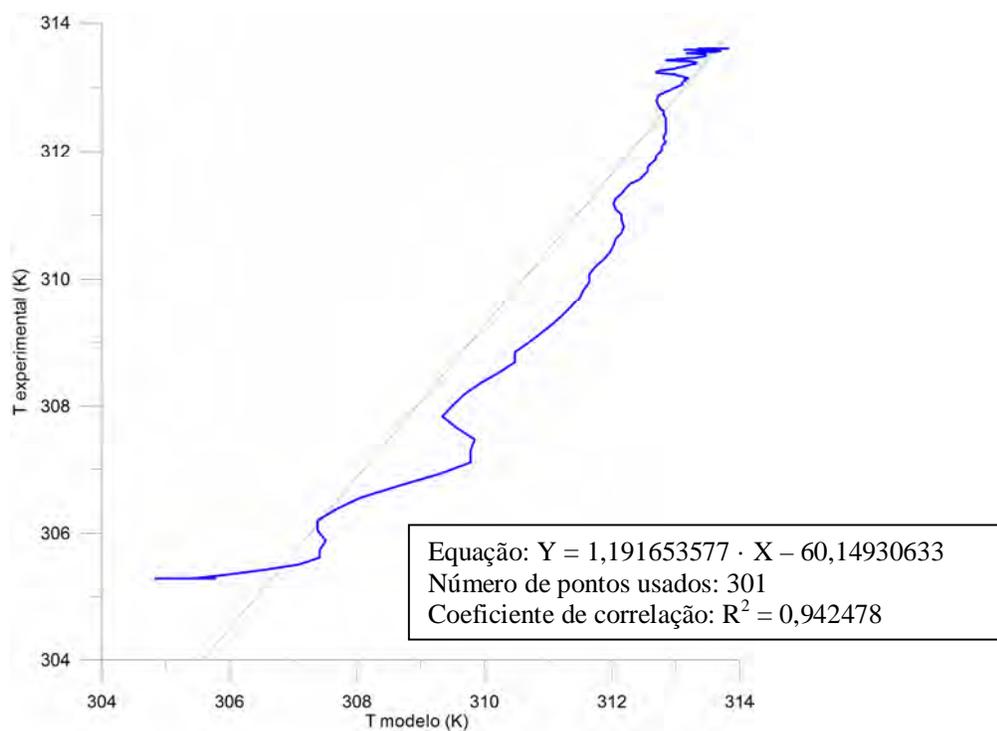


Figura 6.18d: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 4

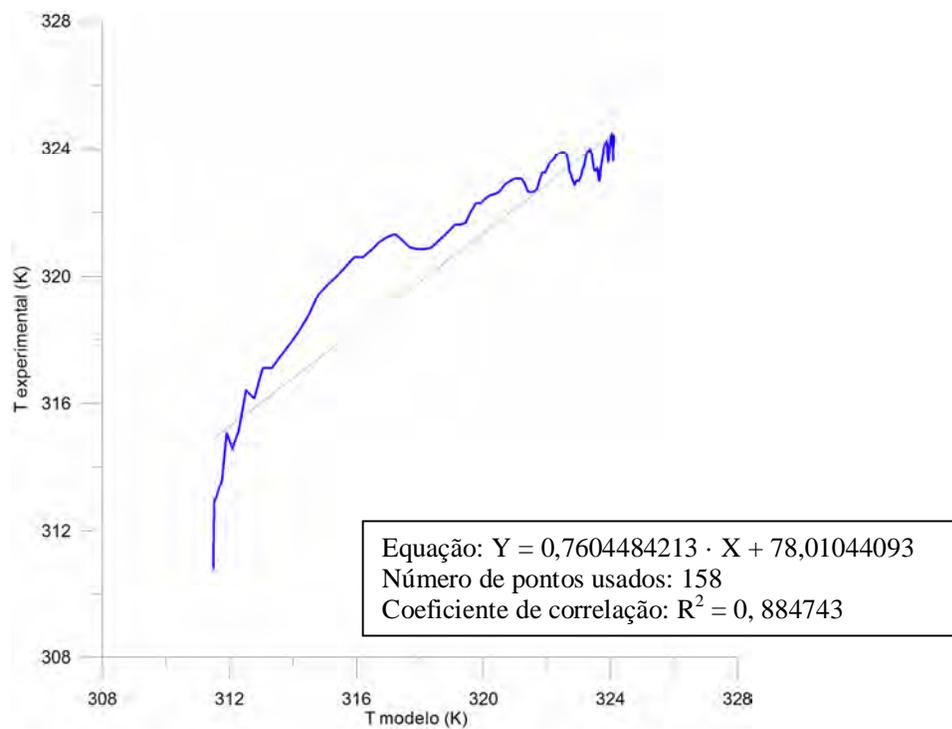


Figura 6.18e: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 5

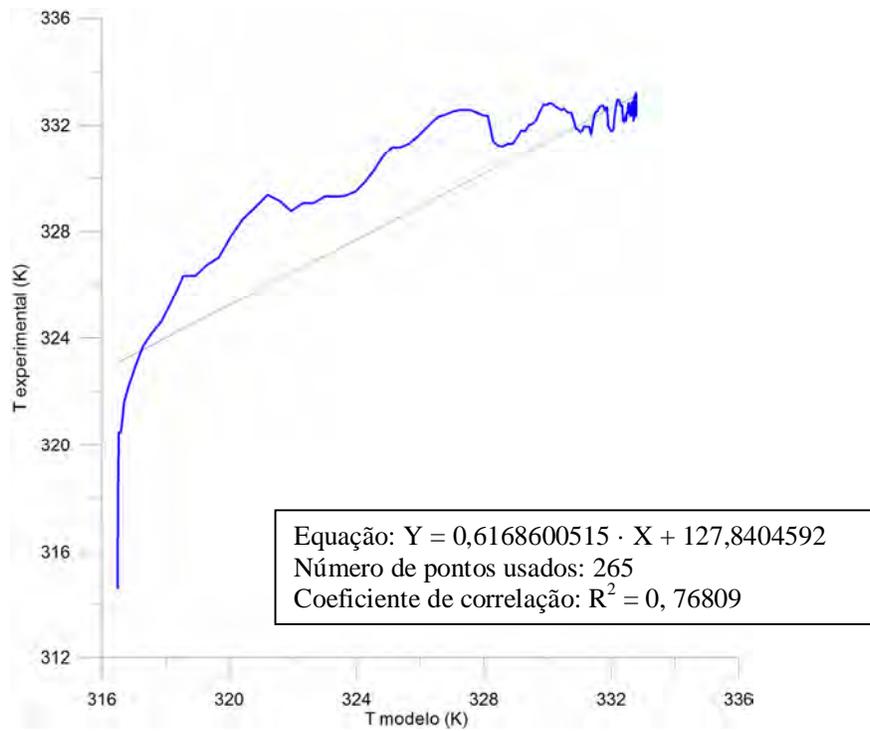


Figura 6.18f: Correlação entre Temperatura Experimental e Teórica, caso 6

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 7.1 CONCLUSÕES

O estudo aqui apresentado tratou de dois problemas principais:

- ✓ Direto - determinação do campo dinâmico de temperatura no interior de um líquido (água) de forma teórico-experimental, problema de difusão de calor dentro de um meio fluido, considerando conhecidas suas propriedades térmicas;
- ✓ Inverso - partindo do conhecimento prévio do perfil de temperatura e de um modelo matemático que descreve seu comportamento, identificação da difusividade térmica do material em estudo.

Para a solução teórica do problema direto foram aplicadas a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) e o Método de Simulação de Rede (NSM). Dois tipos de solução via GITT foram implementados: um modelo linear, ou seja, tomando-se a difusividade térmica como constante e um modelo não linear, considerando que a difusividade varia linearmente com a temperatura. Devido à pequena variação da difusividade térmica do material na faixa de temperatura investigada, os resultados foram bastante próximos entre si, o que aponta para a possibilidade de considerar a difusividade constante, como uma aproximação razoável.

Da mesma maneira, dois modelos foram desenvolvidos utilizando o NSM na solução teórica do problema direto, o qual demonstrou as vantagens de velocidade e considerável precisão em comparação com a solução via GITT, dispensando ainda o

trabalho algébrico na resolução do sistema de equações diferenciais parciais, tanto no modelo linear quanto o não linear.

Todavia, por possibilitar a solução analítica do problema direto, a GITT é o método padrão de avaliação dos resultados alcançados, tanto para o modelo linear quanto para o não linear.

O aparato experimental desenvolvido para instrumentação e controle de temperatura desempenhou um importante papel na realização deste trabalho, a fim de validar os modelos teóricos estudados. Demonstrou bastante eficiência na aquisição de dados e atuação no controle, conforme constatado nos resultados experimentais obtidos (coerência entre modelos teórico e prático).

O problema de estimativa de parâmetro apresentado neste trabalho foi resolvido pelo Método de *Levenberg-Marquardt* de minimização da norma mínimos quadrados. A análise dos coeficientes de sensibilidade permitiu identificar qual propriedade térmica poderia ser estimada. Através do código computacional desenvolvido procedeu-se a estimativa da difusividade térmica do material. Foram, também, mostrados os erros resultantes deste processo. E, ainda, apresentadas as correlações conseguidas entre os valores medidos e calculados de temperatura no interior do meio.

## 7. 2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS

Estudos posteriores podem ser estabelecidos visando contemplar as seguintes áreas:

- ✓ Quanto ao modelo não linear desenvolvido pela aplicação da GITT, cabe uma investigação no caso de outros materiais que apresentem maior dependência entre difusividade térmica e temperatura, para verificar sua consistência e eficácia nesta situação.
- ✓ O modelo NSM que se mostrou bem mais simples e rápido na solução do problema de difusão de calor merece atenção e estudo no caso de aplicação em outros segmentos, escoamento de fluidos, por exemplo. Uma vez que possibilita a

obtenção de resultados precisos, em tempo contínuo, sem a necessidade de traquejo algébrico na resolução de complicados sistemas de equações diferenciais.

- ✓ A evolução do sistema de controle térmico pode ser também analisada estudando-se a possibilidade de associação de técnicas PID e *fuzzy*, por exemplo. Ou investigando-se alterações em outros componentes do sistema, como o uso de um circuito de transdução ligado ao módulo de aquisição de sinais analógicos de tensão, ao invés de conexão direta dos PT's 1000 ao módulo específico para aquisição de sinais de RTD's. Seria outro ponto de análise, verificar a compensação da temperatura ambiente da junção de referência dos termopares através de um circuito a ser desenvolvido, dispensando-se a compensação automática que ocorre via *software*.
- ✓ Avançar no estudo do problema inverso no sentido de promover a estimativa de parâmetros em problemas não lineares.

## REFERÊNCIAS

- ALHAMA, F. e CAMPO, A., 2003, *Network Simulation of the Rapid Temperature Changes in the Composite Nozzle Wall of an Experimental Rocket Engine During a Ground Firing Test*, Applied Thermal Engineering 23, 37–47.
- ALHAMA, F., CAMPO, A. e ZUECO, J., 2005, Numerical Solution of the Heat Conduction Equation With the Electro-Thermal Analogy and the Code Pspice, Applied Mathematic Computational 162, 103–113.
- ALIFANOV, O. M., 1994, Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, New York.
- ALIFANOV, O. M., ARTYUKHIN, E. A. e RUMYANTSEV, A., 1995, *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*, Begel House, New York.
- BALDERAS-LÓPEZ, J. A., 2003, *Measurements of Thermal Effusivity of Transparent Liquids by Means Of a Photopyroelectric Technique*. Revista Mexicana de Física 49, pp. 353-357.
- BARD, Y. B., 1974, *Nonlinear Parameter Estimation*, Acad.Press, New York.
- BECK, J. V. e ARNOUD, K. J., 1977, *Parameter Estimation in Engineering and Science*. New York: John Wiley & Sons.
- BECK, J. V., BLACKWELL, B. e ST. CLAIR, C. R., 1985, *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*, Wiley Interscience, New York.

- BECK, J. V. e WOODBURY, K., 1998, *Introductory Article-Inverse Problems and Parameter Estimation: Integration of Measurements and Analysis*, Meas. Science Technology, n. 9, pp. 839-847.
- BÉG, O. Anwar, ZUECO, Joaquín e TAKHAR, H. S., 2008, *Laminar Free Convection From a Continuously-Moving Vertical Surface in Thermally-Stratified Non-Darcian High-Porosity Medium: Network Numerical Study*, International Communications in Heat and Mass Transfer 35, 810–816.
- BELO, F. A.; PAZ, M. M. Á.; LEITE, A. P. F.; NASCIMENTO, L. J. L. e SILVA, H. J., *Loss Compensated and of High Accuracy Thermal Control*. 10<sup>th</sup> Brazilian Congresso of Thermal Sciences, Rio de Janeiro, CD-ROM, v. 111. p.11-11.
- BOYCE, W. e DIPRIMA, R. D., 2006, *Equações Diferenciais elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8 ed., Rio de Janeiro, LTC.
- CARLSLAW, H. S. e JEAGER, J. C., 1953, *Operational Methods in Applied Mathematics*. London: Oxford University Press.
- COLAÇO, M. J. e ORLANDE, H. R. B., 2004, *Inverse Natural Convection Problem of Simultaneous Estimation of two Boundary Heat Fluxes in Irregular Cavities*, International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 47, pp. 1201-1215.
- COTTA, R. M., 1997, *Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*. New York, John Wiley.
- COTTA, R. M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. Boca Raton, Fl, EUA, CRC Press.
- COTTA, R. M., 1998, *The Integral Transforms Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering*. New York, Begell House.

- DA SILVA, C. K. F. da, OLIVEIRA, A. S. S. de, SILVA, Z. E., SANTOS, A. C. C. e OLIVEIRA, E. P., 2009, *Use of The Generalized Integral Transformation Method for Solving Equation of Mass Transfer in Food Drying*. 20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Gramado, Brasil.
- DEFER, D.; ANTEZAK E. e DUTHOIT B. *Measurement of Low-thermal Effusivity of Building Materials Using Thermal Impedance Method*. Meas. Sci. Technol. 12 (2001), 549.
- DELENCIOS, S., DADARLAT, D., HOURIEZ, N., LONGUEMART, S., KOLINSKY, C. e SAHRAOUI, A. H., 2007, *On the Accurate Determination of Thermal Diffusivity of Liquids by Using the Photopyroelectric Thickness Scanning Method*. Review of Scientific Instruments 78, 024902.
- DOEBELIN, E. O., 1990, *Measurement Systems: Application and Design*. 4 ed. New York, McGraw-Hill.
- DORF, R. C., 1989, *Introduction to Electric Circuits*, New York, John Wiley & Sons.
- DUARTE, J. C. C., 2001, *Aplicação da Lógica Fuzzy no Controle de Temperatura*. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.
- INCROPERA, F. P. e DEWITT, F. P., 2003, *Fundamentos da Transferência de Calor e de Massa*. 5 ed., Rio de Janeiro, LTC.
- ISMAIL, K. A. R., GONÇALVES, M. M. e BENEVENUTO, F. J., 1998, *Instrumentação para Engenharia*. 1 ed. Campinas, Ed. do autor.
- KARPLUS, Walter J., 1958, *Analog simulation: solution of field problems*, McGraw-Hill Book Company, Inc. EUA.
- LEVENBERG. K., 1944, *A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares*, Quart. Appl. Math., v. 2, pp.164-168.

- MARQUARDT, D.W., 1963, *An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters*, J. Soc. Ind. Appl. Math, v. 11, pp.431-441.
- MIKHAILOV, M. D. e ÖZİŞİK, M. N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, New York, John Wiley .
- NAGEL, L. W. e PEDERSON, D. O., 1973, SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis), Technical Report No. UCB/ERL M382, University of California, Berkeley.
- NASCIMENTO, L. J. L., 2004, *Desenvolvimento de Controle de Temperatura Termorresistivo Autocompensado*. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.
- NASCIMENTO, S. C. C.; MACÊDO, E. N.; QUARESMA, J. N. N., 2006, *Generalized Integral Transform Solution for Hydrodynamically Developing non-Newtonian Flows in Circular Tubes*. J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. ABCM January-March, vol. XXVIII, n. 1/125.
- NILSSON, J. W., 1990, *Electric Circuits*, 3 ed. Reading, MA: Addison-Wesley.
- OGATA, K., 2003, *Engenharia de Controle Moderno*. 4 ed., São Paulo, Pearson Prentice Hall.
- OLIVEIRA, A. P., SILVA, D., SOUZA, R. e ORLANDE, H. R. B., 1999, *Estimation of Thermal Conductivity and Volumetric Heat Capacity in Transient Experiments*, XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – COBEM / 99, Águas de Lindóia, São Paulo. (CD-ROM).
- OLIVEIRA, A. S. S. de, SANTOS, A. C. C., BELO, F. A. e SILVA, Z. E., 2009, *Thermal System Control Sizing Aided by Generalized Integral Transform Technique*, 20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Gramado, Brasil.

- ORLANDE, H. R. B. e ÖZISIK, M. N., 1994, *Simultaneous Estimation of Thermal Diffusivity and Relaxation Time with a Hyperbolic Heat Conduction Model*, 10<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference, Brighton, v. 6, pp. 403-408.
- ÖZİŞİK, M. N., 1993, *Heat Conduction*. 2 ed. New York, John Wiley & Sons.
- ÖZİŞİK, M. N. e MURRAY, R. L., 1974. *On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions Parameters*, Journal Heat Transfer, ASME, v. 96,pp. 48-51.
- ÖZİŞİK, M. N. e ORLANDE, H. R. B., 2000, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. 1 ed. New York, Taylor and Francis.
- PARKER, W. J., JENKINS R. J., BUTLER C. P. e ABBOTT G. L., 1961, *Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity*. Journal of Applied Physics 32, 1679.
- PASCHKIS, V. e BAKER, H. D., 1942, *A method for determining unsteady-state heat transfer by means of an electrical analogy*, Trans. ASME 64, 105–112.
- PAUL, C. R., 1989, *Analysis of Linear Circuits*, New York, McGraw-Hill.
- PAZ, M. M. Á., 2002, *Estudo Teórico e Experimental do Controle Térmico de uma Cavidade Retangular*. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.
- PAZ, M. M. Á., 2008, *Estudo Teórico e Experimental do Controle Térmico de uma Cavidade Cilíndrica*. Tese de D.Sc., Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.
- PENG, C. e WU, Z., 2008, *Thermoelectricity Analogy Method for Computing the Periodic Heat Transfer in External Building Envelopes*, Applied Energy 85, 735–754.

- PEREIRA, M. A., DA SILVA, Z. E., DA SILVA, C. K. F., SILVA, M. A. C. e ALENCAR Jr, J. P., 2006, *Determinação da difusividade térmica aparente de solo argiloso na região de São João do Cariri-PB*, 11<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Brasil.
- PHILIPS, C. L. e HARBOR, R. D., 1996, *Feedback Control Systems*. 3 ed., New Jersey, Prentice Hall.
- PSPICE, v. 6.0, 1994: Microsin Corporation, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718.
- SANTOS, C. A. C., 2001, *Convecção Forçada Laminar de Fluidos Não Newtonianos em Tubos Externamente Aletados*. XI COBEM, São Paulo.
- SASSI, M. B. H.; SANTOS, C. A. C.; SILVA, Z. E. e ALENCAR JÚNIOR, J. P., 2009, *Heat Conduction Models For Transient Hot Wire Technique*. High Temperature-High Pressures, vol.. 38, pp. 97-117.
- SASSI, M., Silva, Z. E., GURGEL, J M, SANTOS, C. A. C. e ALENCAR JUNIOR, J. P., 2007, *An Inverse Problem for the Thermal Properties of Porous Media*, 19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Brasil - CD-ROM.
- SILVA, M. A. C., DA SILVA, C. K. F., SILVA, Z. E., PEREIRA, M. A. e ALENCAR Jr, J. P., 2006, *Desidratação osmótica de acerolas (Malpighia emarginata D. C.): estimação de difusividade mássica efetiva*, 11<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Brasil.
- SILVA, M. A. P. de S., SILVA, C. K. F. da, OLIVEIRA, A. S. S. de, SILVA, M. A. da C. e SILVA, Z. E., 2009, *The Determination of Temperature Distribution in Soils Using GITT (Generalized Integral Transformation Technique)*. 20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Gramado, Brasil.

- SILVA, Z. E., LAURENT, M. e BAILLIS, D. D., 1998, *Inverse Analysis of Transient Coupled Conduction-Radiation – Conductive and Radiative Properties and Measurements*. AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference.
- SONNTAG, R. E. BORGNAKKE, C. e VAN WYLE, G. J., 2003, *Fundamentos da Termodinâmica*. 6 ed., São Paulo, Edgard Blücher.
- TIKHONOV, A. N. e ARSEININ, Y. V., 1977, *Solution of Ill-Posed Problems*, Winston & Sons, Washington DC.
- VERONESE, J. P., 2008, *Análise do Escoamento Bidimensional de Fluidos não Newtonianos com Formulação em Variáveis Primitivas Via GITT*. Tese de D.Sc., Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.
- VLADIMIRESCU, Andrei, 1994, *The SPICE Book*, New York, John Wiley & Sons.
- VOZAR, L. e HOHENAUER, W., 2003, *Flash Method of Measuring the Thermal Diffusivity, A Review*. High Temperatures-High Pressures 35, 253.
- YANG, M. W. e ZHOU, Z. Y., 2008, *Numerical Analysis on Heat Transfer of Laser Diode Module by Equivalent Electrical Network Method*, Optoelectronics Letters, Vol.4 No.3.
- WAKEHAM, W. A. e ASSAEL, M. J., 2000, *Measurements, Instrumentation and Sensors Handbook*. CRC Press LLC.
- WATT, D. A., 1966, *Theory of Thermal Diffusivity by Pulse Technique*. Brit. J. Appl. Phys. 17, 231.
- ZUECO, J., 2006, *Numerical Study of an Unsteady Free Convective Magnetohydrodynamic Flow of a Dissipative Fluid Along a Vertical Plate Subject to Constant Heat Flux*, International Journal of Engineering and Science 44, 1380–1393.

- ZUECO, J. e ALHAMA, F., 2007, *Simultaneous Inverse Determination of Temperature-Dependent Thermophysical Properties in Fluids Using The Network Simulation Method*, International Journal of Heat and Mass Transfer 50, 3234–3243.
- ZUECO, J., ALHAMA, F. e GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, C.F., 2004, *Analysis of Laminar Forced Convection With Network Simulation in Thermal Entrance Region of Ducts*, International Journal of Thermal Science 43, 443–451.
- ZUECO, J., ALHAMA, F. e GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, C. F., 2005, *Inverse Problem of Estimating Time-Dependent Heat Transfer Coefficient With the Network Simulation Method*, Communications in Numerical Methods in Engineering 21, 39–48.
- ZUECO, J., BÉG, O. A. e CHANG, T. B., 2009, *Network Numerical Simulation of Two-Dimensional Nonlinear Micropolar Hydrodynamics in a Darcian Porous Medium*, Korean Journal Chemistry Engineering 26(5), 1226-1234.
- ZUECO, J. e CAMPO, A., 2006, *Network Model for the Numerical Simulation of Transient Radiative Transfer Process Between the Thick Walls of Enclosures*, Applied Thermal Engineering, 26, 673–679.

## APÊNDICE A

## Circuito de Potência

