



*Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
- Mestrado - Doutorado -*

**ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE SECAGEM DE
ALIMENTOS – FORMULAÇÃO DE LUIKOV E USO DA
TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

por

Cristiane Kelly Ferreira da Silva

Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para a
obtenção do grau de Doutor.

João Pessoa – Paraíba

Dezembro, 2010

CRISTIANE KELLY FERREIRA DA SILVA

**ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE SECAGEM DE
ALIMENTOS – FORMULAÇÃO DE LUIKOV E USO DA
TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Doutor.

Orientador: Professor Dr. Zaqueu Ernesto da Silva

João Pessoa – Paraíba

Dezembro, 2010

S586e

Silva, Cristiane Kelly Ferreira da.

Estimação de Parâmetros de Secagem de Alimentos- Formulação de Luikov e uso da Transformada Integral Generalizada / Cristiane Kelly Ferreira da Silva.- - João Pessoa: [s.n.] , 2010.

126f.

Orientador: Zaqueu Ernesto da Silva
Tese (Doutorado) – UFPB/CT

1.Secagem de Alimentos. 2.Lei de Fick, Luikov, GITT. 3.Modelos Matemáticos –Secador Solar.

UFPB/BC

CDU : 664(043)

**ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE SECAGEM DE
ALIMENTOS - FORMULAÇÃO DE LUIKOV E USO DA
TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

por

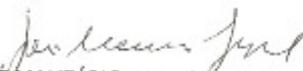
Cristiane Kelly Ferreira da Silva
Tese aprovada em 22 de dezembro de 2010



Prof. Dr. Zaqueu Ernesto da Silva
Orientador



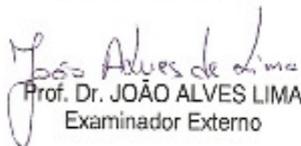
Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos
Examinador Interno



Prof. Dr. José Maurício Alves de Matos Gurgel
Examinador Interno



Prof. Dr. Helcio Rangel Barreto Orlande
Examinador Externo



Prof. Dr. João Alves Lima
Examinador Externo

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, **João e Graça** que me indicaram o laborioso caminho do estudo, sem o qual não seria possível chegar até aqui. Agradeço-lhes pela educação e amor que me foram dados.

Ao meu amado e querido irmão **Kleber**, por todo apoio dado ao longo da vida, pelo carinho e atenção que sempre me dedicou.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, que tem segurado minhas mãos nos momentos difíceis e me confortado para continuar e vencer cada dia.

Ao professor **Zaqueu E. da Silva** pela imprescindível orientação, incentivo e valiosas contribuições e por sua amizade que certamente irá perdurar.

Ao professor **Helcio R. B. Orlande**, pelas sugestões e incentivo nas etapas iniciais do estudo.

Ao professor **João N. N. Quaresma**, pela valiosa contribuição.

Aos participantes das bancas examinadoras nas duas etapas desta tese, pelas críticas e contribuições que ajudaram na obtenção da versão final.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, pela atenção e cordialidade.

Aos funcionários do Laboratório de Energia Solar (LES).

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pelos recursos financeiros outorgados para a realização desta tese.

A todos aqueles que emprestaram sua amizade e apoio durante a realização deste curso.

MUITO OBRIGADA

“Não abandones a sabedoria, e ela te guardará;
ama-a, e ela te protegerá ”
(Provérbios 4:6)

RESUMO

A secagem é um dos processos comerciais mais usados na conservação de produtos agropecuários, cujo objetivo máximo é a manutenção de suas qualidades. Por outro lado, para o dimensionamento e controle ótimos dos processos e dos equipamentos é necessário um claro entendimento dos fenômenos envolvidos e das propriedades de transporte do produto que está sendo manuseado. Neste sentido, foram desenvolvidos dois modelos matemáticos, na configuração de uma placa plana infinita, com o objetivo de se estudar o processo de secagem de alimentos. O primeiro modelo foi baseado na segunda lei de Fick, para modelar o processo de transferência de massa, tratado através da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT). O segundo modelo foi desenvolvido para a análise da transferência simultânea de calor e massa usando-se as equações de Luikov, onde as distribuições de temperatura e teor de umidade no interior do alimento foram obtidas segundo os formalismos inerentes à Técnica da Transformada Integral Generalizada (GIIT). Em ambos os modelos as propriedades termofísicas são consideradas constantes. Os resultados obtidos nos dois modelos foram comparados e constatou-se que os mesmos são capazes de descrever o processo de secagem de alimentos. Avaliou-se também a influência dos parâmetros termofísicos referentes à transferência simultânea de calor e massa. A exatidão dos cálculos de um balanço de calor e massa depende da precisão com que se conhecem as propriedades do produto e, a escolha de dados confiáveis dessas propriedades é uma parcela importante para qualquer análise cuidadosa de engenharia. Desta forma, um problema inverso de estimação de parâmetros, para a transferência de massa, foi resolvido através do algoritmo de minimização de Levenberg-Marquardt. Os resultados obtidos através da solução do problema inverso para a difusividade efetiva de massa são da mesma ordem de grandeza dos reportados na literatura.

Palavras chaves - secagem de alimentos, lei de Fick, Luikov, GIIT, método inverso.

ABSTRACT

Drying is one of the most widely used commercial processes for the preservation of agricultural products, whose maximum objective is to maintain its qualities. On the other hand, for the optimal design and control of processes and equipments it is necessary a clear understanding of the involved phenomena and the transport properties of the product being handled. In this sense two mathematical models were developed, in the configuration of an infinite plane plate, with the aim of studying the process of drying food. The first model was based on Fick's second law, to model the process of mass transfer, treated by the Classical Integral Transform Technique (CITT). The second model was developed for the analysis of the simultaneous heat and mass transfer using the equations of Luikov, where the distributions of temperature and moisture content inside the food were obtained following the formalism inherent to the Generalized Integral Transform Technique (GITT). In both models, the thermophysical properties are considered constant. The results obtained in the two models were compared and found that they are able to describe the process of drying food. The influence of thermophysical parameters relating to the simultaneous heat and mass transfer was also analyzed. The accuracy of the calculations of a heat and mass balance depends on the precision as that is known the properties of the product and the choice of reliable data for these properties is an important part to any careful analysis engineering. Thus, an inverse problem of parameters estimation, for the mass transfer, was solved through the Levenberg-Marquardt's minimization algorithm. The results obtained through the solution of the inverse problem for the effective mass diffusivity are the same order magnitude of those reported in the literature.

Key words - food drying, Fick law, Luikov, GITT, inverse method.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	17
Objetivo Geral.....	20
Objetivos Específicos.....	20
CAPÍTULO I	
O PROBLEMA DE SECAGEM.....	21
1.1 – TEORIA E MODELAGEM DO PROCESSO DE SECAGEM.....	21
1.1.1. – Modelagem da Secagem.....	24
1.1.1.1. – Modelo Difusivo.....	25
1.1.1.2. – Modelo Baseado na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis – Modelo de Luikov.....	29
1.1.2 – A Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT).....	33
1.1.3. – A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).....	34
CAPÍTULO II	
PROBLEMA INVERSO.....	37
2.1. – INTRODUÇÃO.....	37
2.2. - ESTUDO DE SENSIBILIDADE AOS PARÂMETROS.....	39
2.2.1. - Coeficiente de Sensibilidade.....	40
2.2.2. - Coeficiente de Sensibilidade Reduzido.....	42
2.2.3. - Matriz de Sensibilidade.....	42
2.3. - MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETRO.....	43
2.3.1. - Método de Gauss.....	44
2.3.2. - Método de Levenberg-Marquardt.....	46

CAPÍTULO III

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	49
3.1. – PROBLEMA DIRETO.....	49
3.1.1. – Problema Físico.....	49
3.1.2. – Modelagem da Transferência de Massa.....	50
3.1.2.1. – Solução da Transferência de Massa via Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT).....	53
3.1.3. – Modelagem da Transferência de Calor e Massa.....	55
3.1.3.1. – Solução da Transferência de Calor e Massa via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).....	60

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	67
4.1. – PROBLEMA DIRETO.....	68
4.1.1 – Análise de Convergência.....	69
4.1.2 – Transferência de Massa – Lei de Fick.....	74
4.1.3 – Comparação do Modelo de Fick e do Modelo de Luikov.....	76
4.1.4 – Transferência Simultânea de Calor e Massa.....	80
4.1.4.1 – Estudo dos Parâmetros Adimensionais das Equações de Luikov.....	88
4.2. – ESTUDO DE SENSIBILIDADE AOS PARÂMETROS DO MODELO.....	103
4.3. – SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO.....	109

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	111
-----------------------------	-----

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114
---------------------------------	-----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Evolução com o tempo (t), do teor de umidade do produto (X), de sua temperatura (T) e da taxa de secagem (dX/dt), para ar com propriedades constantes.....	22
Figura 3.1:	Diagrama esquemático de um secador solar indireto do tipo gabinete.....	50
Figura 4.1:	Visualização em 3D da distribuição do teor de umidade no interior da amostra em cada caso: (a) Caso 1, (b) Caso 2, (c) Caso 3.....	75
Figura 4.2:	Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 1.....	77
Figura 4.3:	Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 2.....	78
Figura 4.4:	Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 3.....	78
Figura 4.5:	Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 1, com $B_{iq} > 100$ e $B_{im} > 100$	80
Figura 4.6:	Distribuições de temperatura para o Caso 1: (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	82
Figura 4.7:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 1: (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	83
Figura 4.8:	Distribuições de temperatura para o Caso 2: (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	84
Figura 4.9:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 2: (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	85

Figura 4.10:	Distribuições de temperatura para o Caso 3: (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	86
Figura 4.11:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 3: (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	87
Figura 4.12:	Distribuições de temperatura para o Caso 4, variando-se o Bi_m : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	89
Figura 4.13:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 4, variando-se o Bi_m : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	90
Figura 4.14:	Distribuições de temperatura para o Caso 5, variando-se o Bi_q : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	92
Figura 4.15:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 5, variando-se o Bi_q : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	93
Figura 4.16:	Distribuições de temperatura para o Caso 6, variando-se o Lu : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	95
Figura 4.17:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 6, variando-se o Lu : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	96

Figura 4.18:	Distribuições de temperatura para o Caso 7, variando-se o Pn : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	98
Figura 4.19:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 7, variando-se o Pn : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	99
Figura 4.20:	Distribuições de temperatura para o Caso 8, variando-se o Ko : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.....	101
Figura 4.21:	Distribuições do teor de umidade para o Caso 8, variando-se o Ko : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.....	102
Figura 4.22:	Coefficientes de sensibilidades reduzidos para u^* para os Casos 1, 2 e 3 nas posições: (a) $X = 0,0$, (b) $X = 0,5$ e (c) $X = 0,9$	104
Figura 4.23:	Coefficientes de sensibilidades reduzidos para D_{ef} para os Casos 1, 2 e 3 nas posições: (a) $X = 0,0$, (b) $X = 0,5$ e (c) $X = 0,9$	106
Figura 4.24:	Coefficientes de sensibilidades reduzidos para u^* e D_{ef} para os Casos 1, 2 e 3 nas posições: (a) $X = 0,0$, (b) $X = 0,5$ e (c) $X = 0,9$	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1:	Estudos realizados sobre transferência de massa, em alimentos, usando a lei de Fick, reportados na literatura.....	28
Tabela 1.2:	Estudos realizados usando a Técnica da Transformada Integral Clássica e Generalizada.....	36
Tabela 4.1:	Propriedades do ar de secagem e da banana.....	68
Tabela 4.2:	Análise de convergência do teor de umidade calculado pela CITT, com os valores do Caso 1 ($T_{ar} = 50^{\circ}C$ e $v_{ar} = 0,5$ m/s).....	71
Tabela 4.3:	Análise de convergência do teor de umidade calculado pela GITT, com os valores do Caso 1 ($Bi_q = 0,116$, $Bi_m = 2,10$, $Lu = 0,0010$, $Pr = 0,103$, $Ko = 103,42$ e $\varepsilon = 0,3$).....	72
Tabela 4.4:	Análise de convergência da temperatura calculada pela GITT, com os valores do Caso 1 ($Bi_q = 0,116$, $Bi_m = 2,10$, $Lu = 0,0010$, $Pr = 0,103$, $Ko = 103,42$ e $\varepsilon = 0,3$).....	73
Tabela 4.5:	Resultados da difusividade efetiva de massa da banana <i>in-natura</i> , obtidos através do Método de Levenberg-Marquardt.....	110

LISTA DE SÍMBOLOS

Nomenclatura

A	Matriz quadrada ($n \times n$) dos coeficientes
a	Difusividade de calor, (m^2/s)
a_{ij}	Coefficiente da equação (3.20a)
a_m	Difusividade de massa, (m^2/s)
b	Valor aproximado da estimação
b_{ij}	Coefficiente da equação (3.20b)
Bi_m	Coefficiente de transferência de massa adimensional
Bi_m^*	Coefficiente definido na equação (3.13i)
Bi_m^{**}	Coefficiente definido na equação (3.13j)
Bi_q	Coefficiente de transferência de calor adimensional
C	Elementos da diagonal da matriz, equação (2.20)
c	Calor específico do meio poroso, alimento ($J/kg \text{ K}$)
c^*_j	Coefficiente da equação (3.20c)
c_j	Coefficiente da equação (3.20c)
c_m	Capacidade mássica específica do meio poroso, alimento ($kg/kg \text{ } ^\circ M$)
D_{ef}	Difusividade efetiva de massa, (m^2/s)
d_i	Coefficiente definido na equação (3.21c)
e_i	Coefficiente definido na equação (3.21d)
f_i	Coefficiente da equação (3.22a)
g_i	Coefficiente da equação (3.22a)
h_c	Coefficiente convectivo de transferência de calor ($W/m^2 \text{ K}$)
h_i	Coefficiente da equação (3.22c)

h_m	Coeficiente convectivo de transferência de massa ($\text{kg/m}^2 \text{ s}^\circ\text{M}$)
i_i	Coeficiente da equação (3.22c)
k	Condutividade térmica do meio poroso, alimento (w/m K)
K_{11}	Coeficiente da equação (3.11a)
K_{12}	Coeficiente da equação (3.11a)
K_{21}	Coeficiente da equação (3.11b)
K_{22}	Coeficiente da equação (3.11b)
Ko	Número de Kossovitch
L	Comprimento característico, espessura da amostra, (m)
Lu	Número de Luikov
M_i	Norma para a temperatura
N_i	Norma para o teor de umidade
p	Número de parâmetros
Pn	Número de Posnov
$S(\beta)$	Soma dos desvios quadrados na função do método de Gauss
t	Tempo, dimensional (s)
$T(x,t)$	Distribuição de temperatura, ($^\circ\text{C}$)
T_0	Temperatura inicial do meio poroso, alimento ($^\circ$)
T_{ar}	Temperatura do ar ($^\circ\text{C}$)
U	Matriz de ponderação com dimensão ($p \times p$)
U	Matriz coluna do vetor solução
$u(x,t)$	Distribuição do teor de umidade ($\text{kg H}_2\text{O /kg sólido seco}$)
u^*	Teor de umidade de equilíbrio, ($\text{kg H}_2\text{O /kg sólido seco}$)
u_0	Teor de umidade inicial no meio poroso, alimento
v	Velocidade do ar, dimensional (m/s)
W	Matriz de ponderação com dimensão ($n \times n$)
X	Matriz de sensibilidade de dimensão ($n \times p$)
X	Coordenada cartesiana, adimensional
x	Coordenada cartesiana, dimensional
Y	Matriz correspondente aos valores medidos
y	Matriz coluna do vetor das constantes

Símbolos Gregos

α	Parâmetro conhecido
β	Parâmetro desconhecido
$\hat{\beta}$	Estimador
$\Delta\beta$	Variação do parâmetro desconhecido
δ	Erro relativo de convergência na equação (2.18)
δ	Coefficiente termogradiente, equação (3.8b)
ε	Crítério de mudança de fase, equação (3.8a)
η	Variável de estado
η	Vetor de dimensão (n×p)
$\eta(\beta)$	Matriz dos valores calculados
$\Delta\eta$	Variação da variável de estado
$\theta(X, \tau)$	Distribuição de temperatura adimensional
$\theta_h(X, \tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do problema homogêneo
$\bar{\theta}(\tau)$	Temperatura adimensional transformada
λ	Calor latente de evaporação (J/kg), equação (3.8a)
λ_i	Autovalores do problema auxiliar do teor de umidade
λ	Parâmetro amortecedor na equação (2.19)
μ_i	Autovalores do problema auxiliar de temperatura
ξ	Crítério para erro relativo de convergência na equação (2.18)
ρ	Densidade do meio poroso, alimento (kg/m ³)
τ	Tempo adimensional
$\phi(X, \tau)$	Distribuição do teor de umidade adimensional
$\phi_h(X, \tau)$	Distribuição do teor de umidade adimensional do problema homogêneo
$\bar{\phi}_i$	Teor de umidade adimensional transformado
φ_i	Autofunções do problema auxiliar do teor de umidade
χ	Coefficiente de sensibilidade (kg H ₂ O /kg sólido seco)
$\bar{\chi}$	Coefficiente de sensibilidade reduzido, adimensional
ψ_i	Autovalores do problema auxiliar da temperatura

INTRODUÇÃO

A relação da indústria de alimentos com o segmento agropecuário se caracteriza pelo fato de que, ao estabelecer como um dos principais fatores de concorrência a diferenciação de produtos, exige do segmento agropecuário a garantia de fornecimento de matérias primas com determinadas especificações de qualidade em quantidades e custos adequados à operação do setor industrial. A secagem é um dos processos mais usados na conservação de produtos agropecuários e consiste na redução do teor de água até um determinado nível, no qual as concentrações de açúcares, sais e outros componentes sejam suficientemente altas para reduzir a atividade de água, impedindo o crescimento de microrganismos responsáveis pela deterioração dos alimentos. A secagem de produtos com elevado teor de umidade inicial apresenta diversas vantagens tais como: inibição da ação de microrganismos, manutenção de constituintes minerais, redução de custos de transporte, manuseio e estocagem; além disso, confere ao produto final características sensoriais próprias e preserva ao máximo o seu valor nutricional. Neste contexto, muitas pesquisas sobre secagem de alimentos estão sendo realizadas, despontando como excelente alternativa para a redução das perdas na agricultura.

Dependendo da intensidade e do efeito da secagem, pode-se ter a perda ou inutilidade do produto para uma determinada função, seja ela alimentícia ou germinativa. Assim, uma eficiente utilização de energia no processo de secagem, é muito importante e deve ser estudada cuidadosamente. Várias técnicas de secagem são utilizadas por pesquisadores para racionalizar o uso da energia na secagem de sólido, bem como reduzir a perda de qualidade produzida em vários produtos por aquecimento a altas temperaturas, especialmente em produtos biológicos. Alguns métodos empregados para realizar a secagem são:

- ✓ Secagem natural, que, dependendo do tipo de produto, é dispersa, por exemplo, em terrenos cimentados ou com tijolos;
- ✓ Secagem artificial, que é realizada em secadores mecânicos, onde ar quente é circulado, impulsionado por ventiladores, sobre o produto a ser secado. O ar pode ser aquecido com gás proveniente da combustão da madeira, da queima de combustíveis fósseis ou ainda pela eletricidade.

Com a crise energética e o aumento dos preços dos combustíveis, têm aumentado consideravelmente os custos dos métodos convencionais, tal como a secagem mecânica, exigindo a busca de outras metodologias para realizar a secagem. Um procedimento de secagem, que combina secagem mecânica com secagem natural, é usado no Brasil. O mesmo consiste em combinar o aquecimento do ar em um coletor solar e a convecção forçada do ar, realizada por ventiladores, resultando em um emprego eficaz tanto da energia solar assim como da convecção forçada. Este procedimento tem por finalidade reduzir a mão-de-obra, as perdas do produto e contaminações. Ele apresenta pequeno custo operacional, além da vantagem de a energia solar tratar-se de um recurso renovável, de captação local e que não contamina o produto alimentício.

Comumente, nesse sistema de secagem se necessita somente um complemento de energia elétrica para mover o ventilador que impulsiona o ar. Quando se obtém um produto seco por este método, por exemplo, banana passa, o valor de comercialização do produto no Brasil é aproximadamente 10 vezes o valor de compra do alimento *in natura*, o que garante bom retorno para os investidores.

O Brasil dispõe de um grande potencial de uso de energia solar em quase todo o território, notadamente na região Nordeste. O Laboratório de Energia Solar da Universidade Federal da Paraíba, LES/UFPB, é a entidade pioneira nos estudos sobre o aproveitamento da energia solar no Brasil, com trabalhos de pesquisas e aplicações desde 1973.

Para melhorar a secagem é necessário ter um perfeito entendimento dos processos físicos envolvidos, e com este intuito, um vasto número de estudos tem sido conduzido para analisar o processo de secagem: uns consideram as condições externas do ar, tais como temperatura, umidade relativa e velocidade, relacionadas à taxa de secagem do sólido, enquanto outros consideram as condições internas do produto com ênfase nos mecanismos de movimento de umidade e seus efeitos sobre o mesmo. A utilização de modelos matemáticos para simular a secagem de alimentos é uma das alternativas adotadas para melhorar os programas, permitindo diminuir os custos, a energia, o tempo e os defeitos da secagem.

O conhecimento dos mecanismos de movimento do teor de umidade no interior dos materiais é de fundamental importância e precede à tentativa de descrever a migração da mesma no interior de um produto higroscópico. Devido a não-homogeneidade dos produtos biológicos e na tentativa de se aproximar do processo físico real, várias teorias de

secagem foram propostas para descrever o transporte de umidade e calor em meios capilares porosos. Dentre elas está a teoria de difusão, a qual apóia-se exclusivamente sobre a lei de Fick, que expressa que o fluxo de massa por unidade de área é proporcional ao gradiente de concentração de água. Outra teoria está baseada nos processos termodinamicamente irreversíveis, desenvolvida pioneiramente por Luikov. Ele explicou teoricamente, e provou experimentalmente, que a migração de umidade pode ser causada por um gradiente de temperatura. O forte acoplamento presente nas equações de Luikov, devido à transferência simultânea de calor e massa, as inclui dentre as equações de difusão de calor e massa mais difíceis de serem resolvidas pelas técnicas de solução até então existentes.

Soluções de problemas envolvendo transferência de massa e transferência simultânea de calor e massa em meios porosos são apresentadas na literatura através de diversos métodos e técnicas tais como: Método de Diferenças Finitas, Métodos de Elementos Finitos, Soluções Analíticas, entre outros. Dentro deste contexto, técnicas de soluções híbridas analítico-numéricas têm sido desenvolvidas e utilizadas. Dentre estas técnicas destacam-se a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). É vasta a literatura a respeito da CITT e GITT, porém, a aplicação destas técnicas em problemas de secagem de alimentos é ainda escassa.

Adicionalmente a estimação ou identificação dos parâmetros desconhecidos que intervêm no modelo é uma das etapas que não pode ser dissociada na construção do modelo matemático. Esta etapa tem como objetivo ajustar o modelo ao mesmo tempo em que avalia a aptidão de prever o comportamento do processo. A estimação dos parâmetros pode ser feita através dos métodos diretos ou através dos métodos inversos. Esta segunda aproximação é mais ambiciosa porque tem como objetivos: estimar o maior número de parâmetros a partir de uma simples experiência; combinar várias experiências para estimar os mesmos parâmetros e determinar os limites de confiança.

Diante do acima exposto, este trabalho tem como objetivo desenvolver soluções para o problema de transferência de massa e/ou calor em alimentos. O modelo de difusão será uma primeira tentativa para descrever e quantificar a secagem de alimentos. Posteriormente, será desenvolvido o modelo que considera o transporte simultâneo de calor e massa, o qual está firmado nas equações de Luikov. Dois métodos de solução serão propostos: a Técnica da Transformada Integral Clássica (GITT) para o problema de

transferência de massa e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para o problema de transferência simultânea de calor e massa.

Os seguintes objetivos são estabelecidos para o estudo:

Objetivo Geral:

Visando contribuir na predição de secagem de alimentos, este trabalho tem como objetivo geral investigar as transferências de massa e/ou calor durante este processo, mediante a abordagem de dois modelos matemáticos.

Objetivos Específicos:

- (i) Modelar o problema direto de transferência de massa por meio da lei de Fick, utilizando a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT);
- (ii) Modelar o problema direto de transferência simultânea de calor e massa, baseada no sistema de equações de Luikov, aplicando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT);
- (iii) Comparar os resultados obtidos pelos dois modelos matemáticos;
- (iv) Realizar uma análise da influência dos parâmetros adimensionais da formulação de Luikov;
- (v) Realizar uma análise de sensibilidade dos parâmetros que intervêm no modelo matemático da transferência de massa;
- (vi) Resolver o problema inverso de estimativa de parâmetros, para a transferência de massa, utilizando o método de Levenberg-Marquardt.

CAPÍTULO I

O PROBLEMA DE SECAGEM

Neste capítulo é feita uma revisão bibliográfica com o objetivo de situar o problema a ser estudado, tanto do ponto de vista físico, como do ponto de vista matemático, em relação aos outros trabalhos existentes na literatura. Examinam-se as principais contribuições encontradas na literatura voltadas para a descrição dos processos físicos que ocorrem em secagem de alimentos, assim como os métodos de solução empregados.

1.1 – TEORIA E MODELAGEM DO PROCESSO DE SECAGEM

A técnica mais utilizada na produção de produtos agrícolas desidratados é a secagem por ar quente, onde uma batelada do material a ser seco, usualmente na forma de pequenos pedaços ou fatias, é submetida a uma corrente de ar quente paralela ou perpendicular ao leito de sólidos (NICOLETI, 2005).

Assim, observa-se que dois fenômenos ocorrem simultaneamente quando um sólido úmido é submetido à secagem convectiva:

- ✓ Transferência de Energia (calor): O calor é transferido para a superfície e da superfície para o interior do meio. A resistência à transferência de calor na superfície é representada pelo coeficiente convectivo de calor, e a resistência à condução do calor para o interior do meio, pela condutividade térmica do produto.
- ✓ Transferência de Massa (umidade): Dois aspectos importantes devem ser considerados: o transporte da umidade no interior do sólido a ser seco até a

superfície e a remoção do vapor a partir da mesma, o qual é removido por meio de um fluido secante externo, que é geralmente o ar de secagem. A resistência para a evaporação da água depende do coeficiente convectivo de massa e da difusão no interior do produto (ARAÚJO, 2005, MELLADO, 2007).

Os fatores que governam a velocidade desses fenômenos de transferência determinam a taxa de secagem. Estes fatores são: pressão de vapor d'água do material e do ar de secagem, temperatura e velocidade do ar de secagem, velocidade de difusão da água no material, espessura e superfície exposta para secagem, natureza física do sólido e seu teor de umidade. Assim, o processo pode ser representado por três fases distintas, conforme apresentado na Fig.(1.1).

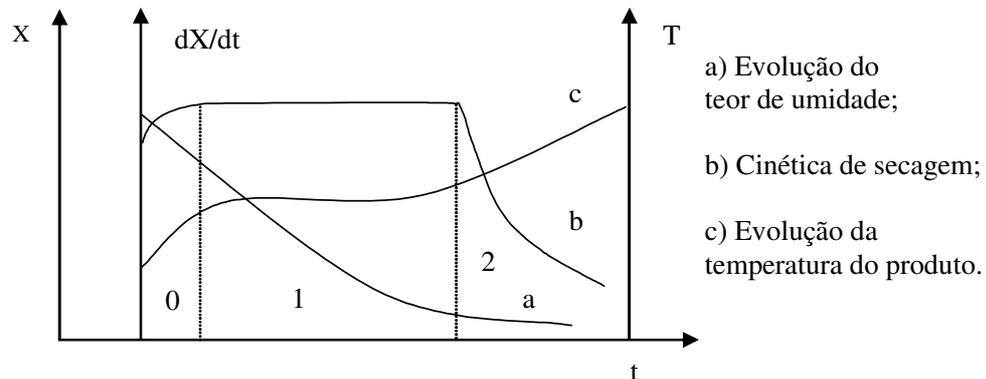


Figura 1.1: Evolução com o tempo (t), do teor de umidade do produto (X), de sua temperatura (T) e da taxa de secagem (dX/dt), para ar com propriedades constantes.

1ª Fase – Período de indução (região 0): Adequação do produto às condições de secagem: a elevação da temperatura causa um rápido aumento na taxa de secagem.

2ª Fase - Período de taxa constante (região 1): a velocidade de transferência de massa no interior do sólido poroso é igual à velocidade de evaporação da água na superfície do mesmo.

3ª Fase - Período de taxa decrescente (região 2): a velocidade de transferência de massa no interior do sólido é menor que a taxa de evaporação na superfície; ocorre a elevação da temperatura do produto.

Inicialmente, o produto é geralmente mais frio do que o ar, e a pressão parcial de vapor d'água na superfície do produto é baixa, e, por conseqüência, a transferência de massa e a velocidade de secagem também o são. O calor, chegando em excesso, acarreta uma elevação da temperatura do produto, ocorrendo um aumento de pressão e da velocidade de secagem. A duração deste período é insignificante em relação ao período total de secagem (PARK, 1988).

No período de secagem à taxa constante, a quantidade de água disponível dentro do produto é abundante. Neste caso, a água evapora como se estivesse em um reservatório aberto. A pressão de vapor d'água na superfície é constante e igual à pressão de vapor de água pura à temperatura do produto. A temperatura do produto, por sua vez, é também constante e igual à temperatura de bulbo úmido, característica do fato de que as transferências de calor e de massa se compensam exatamente (KEEY, 1972). Segundo CHIRIFE (1983), o fim do período de taxa constante corresponde ao instante em que a migração interna de água para a superfície não consegue mais compensar a taxa de evaporação da água livre da mesma.

Na secagem de frutas e hortaliças, o período de taxa decrescente é especialmente importante. Nessa fase as partes externas do material já estão secas, enquanto o interior ainda pode conter quantidades significativas de água, e nesse caso a transferência interna de água é que governa e determina a taxa de secagem (NICOLETI, 2005). Durante este período, a troca de calor não é mais compensada e, conseqüentemente, a temperatura do produto aumenta e tende assintoticamente à temperatura do ar. A redução da taxa de secagem é devido ao abaixamento da pressão parcial de vapor de água na superfície do sólido. Ao final deste período o produto estará em equilíbrio com o ar de secagem e a velocidade de secagem é nula (KEEY, 1972).

As considerações sobre como a água é transportada do interior do sólido à superfície fundamentam as teorias existentes na secagem. Este fenômeno de migração de umidade no interior do produto biológico ainda não é bem conhecido. Alguns autores afirmam que a migração pode ser uma combinação de movimentos de umidade por difusão de líquido e de vapor, cada um predominando em certas etapas da secagem. Dentre as diversas teorias encontradas na literatura, as mais importantes são aquelas que tentam explicitar os fenômenos físicos internos que governam o período de taxa decrescente de secagem. Os seguintes mecanismos de transferência de umidade em sólidos têm sido propostos na literatura:

- ✓ Transferência por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade;
- ✓ Transferência por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (causados por gradientes de temperatura);
- ✓ Transferência de vapor por termodifusão devido a gradientes de temperatura;
- ✓ Transferência de líquido por forças capilares.

Embora aqui não se tenha detalhado cada um dos mecanismos de transferência de umidade listados acima, informações adicionais podem ser encontradas na literatura.

1.1.1. – Modelagem da Secagem

O desenvolvimento de modelagens matemáticas que descrevam o processo de secagem tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores por várias décadas. Na tentativa de correlacionar dados experimentais da secagem de cada material particular a um modelo, tem sido apresentada uma gama de modelos que representam a cinética de secagem de cada produto em particular. Os vários modelos matemáticos, propostos para descrever a taxa de perda de umidade durante o processo de secagem de produtos agrícolas, podem ser divididos em grandes grupos:

- ✓ Modelos empíricos e semi-empíricos;
- ✓ Modelos difusivos;
- ✓ Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis.

Os modelos empíricos consistem em uma correlação direta entre o teor de umidade e o tempo do processo de secagem, enquanto que os modelos semi-empíricos têm como base a hipótese da validade da lei de Newton do resfriamento, na qual é assumido que a taxa de secagem é proporcional à diferença entre o teor de umidade do material e seu respectivo teor de umidade de equilíbrio, para as condições de secagem especificadas.

Já os modelos difusivos baseiam-se na difusão de líquido e /ou vapor no interior do produto. Tais modelos descrevem as taxas de transferência de calor e massa como função da posição dentro do sólido e do tempo de secagem e levam em consideração as resistências aos fluxos de calor e massa externo e interno.

Os modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis assumem basicamente a validade das relações recíprocas de Onsager, o princípio de Curie e a existência de um equilíbrio termodinâmico local no interior do produto (LIMA, 1999).

1.1.1.1. – Modelo Difusivo

A difusão líquida pode ser definida como um processo físico de natureza aleatória pelo qual as heterogeneidades de concentração tendem a se reduzir. Dentro de um sólido homogêneo, a difusividade de massa corresponde ao transporte de átomos e de moléculas no interior do sólido, ocupando a posição de equilíbrio estável.

O modelo de secagem baseado na teoria de difusão líquida, segundo a Lei de Fick, tem apresentado bons resultados tanto para alimentos de origem vegetal como animal, provavelmente devido ao fato destes produtos não apresentarem um período de taxa constante nas curvas características de secagem (ARAUJO, 2000). A Lei de Fick expressa que o fluxo de massa por unidade de área é proporcional ao gradiente de concentração de água, e realizando um balanço de massa de água no interior do produto, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{ef} u) \quad (1.1)$$

Onde:

u : teor de umidade;

D_{ef} : difusividade efetiva de massa;

t : tempo.

Para descrever o processo de secagem de produtos biológicos no período de taxa decrescente, muitos pesquisadores têm utilizado o modelo teórico baseado na segunda Lei de Fick.

CRANK (1975) apresentou diversas soluções analíticas para a equação de difusão, considerando diferentes condições iniciais e de contorno. Entretanto, essas soluções aplicam-se aos sólidos de formas geométricas simples (corpos semi-infinitos, placas, cilindros e esferas) e quando a difusividade é constante ou varia linear ou exponencialmente com a concentração de água. Tais soluções são dadas pelas seguintes equações:

- Placa Plana:

$$MR = \frac{\bar{u}(t) - u_e}{u_0 - u_e} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 D_{ef} \frac{t}{4L^2}} \quad (1.2)$$

- Cilindro:

$$MR = \frac{\bar{u}(t) - u_e}{u_0 - u_e} = \frac{4}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n^2 \pi^2} e^{(-b_n^2 D_{ef} t)} \quad (1.3)$$

- Esfera:

$$MR = \frac{\bar{u}(t) - u_e}{u_0 - u_e} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 D_{ef} \frac{t}{r}} \quad (1.4)$$

Onde: MR : razão do teor de umidade, adimensional;

u_0 : teor de umidade inicial;

u_e : teor de umidade de equilíbrio;

$\bar{u}(t)$: teor de umidade média no tempo;

t : tempo;

D_{ef} : difusividade efetiva de massa.

A difusividade efetiva de massa é definida como a taxa de transferência de uma substância que se difunde através de um espaço com gradiente de concentração, por unidade de área. Pode-se entender esta propriedade como a facilidade com que a água é removida do produto. Como a difusividade de massa varia conforme mudam as condições de secagem (temperatura e velocidade do ar), ela não é intrínseca ao alimento, portanto convencionou-se chamar de difusividade efetiva de massa (D_{ef}). Esta é uma propriedade que engloba os efeitos de todos os fenômenos, podendo intervir sobre a migração da água e devido à complexa composição e estrutura física dos alimentos, é difícil se conseguir estimativas precisas desta propriedade, assim, medidas experimentais se fazem necessárias, como descritas por SARAVACOS (1989).

Embora existam algumas suposições a serem consideradas para aplicação desse modelo, como: a redução de volume é desprezível; não há efeito de capilaridade; os corpos entram em equilíbrio térmico com o ar de secagem instantaneamente; as resistências externas à transferência de massa são desprezadas; os efeitos da transferência de calor e massa de um corpo para outro são desprezíveis; entretanto, devido às limitações de ordem prática, quando utilizadas para produtos biológicos estas suposições são normalmente consideradas satisfeitas. Na Tab. (1.1) encontram-se alguns trabalhos reportados na literatura sobre a transferência de massa em alimentos durante o processo de secagem.

Tabela 1.1: Estudos realizados sobre transferência de massa, em alimentos, usando a lei de Fick, reportados na literatura.

Autores/ Ano	Produto	Geometria	Autores/ Ano	Produto	Geometria
Afonso Júnior <i>et al./1999</i>	Semente de Feijão	Esférica	Nicoletti/ 2005	Caqui	Esférica
Nieto <i>et al./ 2001</i>	Manga	Placa Plana	Bennamoun <i>et al./ 2006</i>	Uva	Esférica
Azzouz <i>et al./2002</i>	Uva	Esférica	Oliveira <i>et al./ 2006</i>	Raiz de Chicória	Placa Plana
Lima <i>et al./ 2002</i>	Goiaba	Placa Plana	Walde <i>et al./ 2006</i>	Cogumelo	Placa Plana
Panchariya <i>et al./2002</i>	Chá Preto	Placa Plana	Garcia <i>et al./ 2007</i>	Abóbora	Placa Plana
Park <i>et al./ 2002</i>	Pêra	Cúbica	Chong <i>et al./ 2008</i>	Chempedak	Placa Plana
Souza/ 2002	Tomate	Placa Plana	Corzo <i>et al./ 2008</i>	Manga	Placa Plana
Brod <i>et al./ 2003</i>	Raiz de Chicória	Placa Plana	Aghbashlo <i>et al./2008</i>	Frutas Berberis	Esférico
El-Aouar <i>et al./ 2003</i>	Mamão	Cúbica	González-Fésler <i>et al./ 2008</i>	Maça	Cilíndrica
Queiroz <i>et al./ 2003</i>	Banana	Cilíndrica	Hii <i>et al./ 2009</i>	Cacau	Esférica
Babalís <i>et al./ 2004</i>	Figo	Esférica	Silva <i>et al./ 2009</i>	Cogumelo	Placa Plana
Gaspareto <i>et al./ 2004</i>	Banana	Placa Plana	Xiao <i>et al./ 2009</i>	Uva	Esférica
Lescano <i>et al./ 2004</i>	Okara	Esférica	Al-Muhtaseb <i>et al./ 2010</i>	Tomate	Placa Plana
Telis <i>et al./2004</i>	Tomate	Placa Plana	Ramos <i>et al./ 2010</i>	Uva	Esférica
Kurozawa/ 2005	Cogumelo	Placa Plana	Silva <i>et al./ 2010(a)</i>	Cogumelo	Placa Plana

1.1.1.2. – Modelo Baseado na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis – Modelo de Luikov

A interrelação entre a transferência de calor e massa em meios capilares porosos não-saturados, homogêneos e isotrópicos, levando em conta o efeito termogradiante foi primeiramente estabelecida por LUIKOV (1966, 1975). Partindo de fundamentos da termodinâmica de processos irreversíveis, Luikov estabeleceu os balanços de massa e calor na matriz porosa, desprezando efeitos de campo gravitacional, de reações químicas e variações geométricas na matriz porosa. Admitiu também que, em um elemento infinitesimal, a temperatura da estrutura capilar e da mistura água/vapor seja a mesma, bem como o teor de umidade transportado seja uma mistura de água/vapor.

O processo de secagem de meios porosos é descrito por um sistema de equações diferenciais acopladas para a temperatura e umidade. O conjunto de equações é da forma (LUIKOV, 1966, 1975):

$$\rho_{0c} \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot q + \sum_{i=1}^2 h_i I_i \quad (1.5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\nabla \cdot J_i + I_i \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

Onde:

c : calor específico à pressão constante do meio, definido por:

$$c_0 + \sum_{i=1}^2 c_i u_i$$

c_0 : calor específico à pressão constante do meio seco;

c_i : calor específico à pressão constante, para água no estado de vapor ($i=1$) e no estado líquido ($i=2$);

I_i : fonte ou sumidouro de massa devido à transição de fase;

h_i : entalpia específica da substância;

J_i : vetor fluxo de massa;

q : vetor fluxo de calor;
 T : temperatura;
 t : tempo;
 u_1 : teor de umidade na forma de vapor;
 u_2 : teor de umidade na forma líquida;
 ρ_0 : massa específica do meio seco.

Os seguintes subscritos são usados para identificar os componentes materiais:

0 – meio completamente seco;
 1 – água no estado de vapor;
 2 – água no estado líquido.

O sistema de equações de Luikov, escrito como as Eq. (1.5) e (1.6), levam em consideração as seguintes hipóteses:

- As temperaturas do líquido, vapor e meio seco são iguais em um elemento diferencial volumétrico;
- As mudanças de fases correspondem à transição de líquido em vapor, e vice-versa, de modo que $I_2 = -I_1$;
- A massa de vapor é desprezível quando comparada com a massa de líquido. Portanto, o conteúdo de massa líquido pode ser considerado igual ao teor de umidade total, isto é $u = u_2$;
- Reações químicas associadas com a perda de água não são levadas em consideração;
- Foram consideradas desprezíveis as variações na porosidade e no volume do meio devido à variação do teor de umidade.

Desconsiderando os efeitos convectivos no meio poroso, o vetor fluxo de calor pode ser escrito em termos da equação constitutiva de Fourier, ou seja,

$$q = -k\nabla T \quad (1.7)$$

sendo k a condutividade térmica total ou efetiva do meio. Ela representa a transferência de calor através da estrutura do meio poroso e através do fluido contido nos poros.

O segundo termo do lado direito da Eq. (1.5), que representa a fonte de calor ou sumidouro, é dependente da mudança de fase da água contida dentro do meio. Portanto o somatório das fontes fica igual a:

$$h_1 I_1 + h_2 I_2 = (h_1 - h_2) I_1 = \varepsilon \lambda \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.8)$$

Os termos fonte de massa de vapor I_1 ou o sumidouro de massa na forma líquida I_2 em processos transientes podem ser escritos como (LUIKOV, 1966, 1975):

$$I_1 = -I_2 = \varepsilon \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.9)$$

onde ε o fator ou critério de mudança de fase. Se $\varepsilon = 0$, todo o teor de umidade que contribui no termo de geração, está no estado líquido. Se $\varepsilon = 1$, todo o teor de umidade transportado está no estado de vapor.

Para meios capilares porosos, LUIKOV (1966) demonstrou que o fluxo de massa, nos espaços vazios da matriz porosa, poderia ser escrito em termos do gradiente do teor de umidade e do gradiente de temperatura do meio. Desta forma tem-se:

$$J_m = J_1 + J_2 = \rho_0 a_m (\nabla u + \delta \nabla T) \quad (1.10)$$

onde, a_m representa a difusividade de massa e δ é o coeficiente termogradiante.

Substituindo as Eqs. (1.7) e (1.8) nas Eqs. (1.5) e (1.9), e a Eq. (1.10) em (1.6), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas que descreve a distribuição de temperatura e teor de umidade em meios porosos capilares:

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \lambda \varepsilon \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.11a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (a_m \nabla u) + \nabla \cdot (a_m \delta \nabla T) \quad (1.11b)$$

O sistema de equações (1.11) é válido para processos de secagem que não sejam rápidos e intensos ($T \leq 100^\circ\text{C}$). Caso contrário, o gradiente de pressão no meio torna-se significativo, surgindo uma terceira equação no sistema (1.11). Isto se deve ao fato que durante um período de aquecimento intenso do material, o gradiente de pressão cresce por conta da evaporação do líquido. O gradiente de pressão no meio causa o escoamento de fluido nos poros (LUIKOV, 1966).

Considerando as propriedades termofísicas (calor específico e coeficiente termogradiante) e os coeficientes de transportes (condutividade térmica e difusividade de massa) constantes em todo o meio, as Eqs. (1.11) podem ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{\lambda \varepsilon}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.12a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_m \nabla^2 u + a_m \delta \nabla^2 T \quad (1.12b)$$

Usualmente, as equações acima são chamadas de Sistema Linear de Equações de Luikov (MIKHAILOV e ÖZISIK, 1984).

As equações propostas por Luikov foram empregadas por IRUDAYARAJ e WU (1999) para modelar o fenômeno da transferência de calor e massa em um sistema alimentar à base de amido durante o processo de secagem. Os autores utilizaram o método do elemento finito para resolver o sistema de equações acopladas.

O processo de secagem de um produto anisotrópico como a batata foi estudado por ABALONE *et al.* (2000) e modelado pelas equações de Luikov. As equações de transferência de calor e massa foram resolvidas por duas técnicas numéricas diferentes.

O efeito do critério de mudança fase, presente nas equações de Luikov, durante a secagem de batata doce foi estudo por ABALONE *et al.* (2005). Uma formulação pelo método dos elementos finitos foi usada para resolver o sistema de equações acopladas.

1.1.2 – A Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT)

Nos últimos anos, devido ao grande avanço tecnológico das indústrias, têm surgido problemas cada vez mais complexos na área da engenharia, os quais necessitam de soluções mais acuradas e tempos de processamento mais reduzidos, visando o máximo aproveitamento dos recursos empregados e a rapidez na obtenção de um produto acabado. Visando resolver equações diferenciais parciais (EDP's) a princípio não tratáveis pela teoria clássica de separação de variáveis, ÖZISIK e MURRAY propuseram em 1974 uma nova abordagem que eliminava a necessidade do problema ser separável à priori, nasciam assim os princípios básicos da técnica de transformada integral. Em 1984, MIKHAILOV e ÖZISIK publicaram o primeiro livro generalizando os formalismos da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT).

A CITT consiste em obter um problema auxiliar de autovalor apropriado, transformando a equação diferencial parcial original em um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias. Esta técnica constitui um procedimento direto e sistemático para a obtenção de soluções exatas, mas é limitada para certas classes transformáveis de problemas que envolvem problemas auxiliares não complicados.

A solução exata de problemas de difusão linear pela CITT foi relatada por MIKHAILOV e ÖZISIK (1984), onde os autores apresentam sete classes diferentes de problemas de difusão de calor e massa com várias aplicações práticas. Resolvendo-se tais problemas por transformada integral, através de metodologia sistemática e controle prescrito de erro, observou-se o aparecimento de uma série de vantagens:

- a) Redução do tempo de processamento;
- b) Aceleração na taxa de convergência numérica;
- c) Inexistência de malhas;
- d) Obtenção de soluções *benchmark*.

Pode-se encontrar a solução de um problema particular pela aplicação da CITT seguindo-se os seguintes passos (ANDRADE, 1996):

- ✓ Homogeneizar as equações representativas das fronteiras utilizando, se necessário, mudanças de direção dos eixos de coordenadas;

- ✓ Obter um problema auxiliar de autovalor compatível ao problema original, obtendo-se os autovalores e as autofunções;
- ✓ Dentro das propriedades de ortogonalidade, obter o par transformada integral e inversa apropriado;
- ✓ Fazer a transformação integral da equação diferencial parcial original e suas condições de contorno;
- ✓ Resolver o sistema resultante da equação diferencial ordinária desacoplado;
- ✓ Utilizar a fórmula de inversão estabelecida para construir o potencial completo desejado.

Essa aproximação clássica falha quando um problema de autovalor apropriado, que produz um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias, não pode ser obtido. Da mesma forma, uma solução exata formal pode ser de utilidade limitada quando o problema de autovalor é suficientemente complexo do ponto de vista computacional.

1.1.3. – A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

Desde o trabalho pioneiro de ÖZISIK e MURRAY (1974), referindo-se a coeficientes da condição de contorno variável, diversas idéias tem avançado na direção de estender o procedimento da transformação integral para problemas mais complexos. COTTA (1993) publicou o livro sobre a técnica de transformada integral, apresentando uma revisão dos formalismos clássicos, estendendo-a para a solução de problemas não lineares, e propondo mecanismos para melhorar a eficiência da solução numérica. A partir de então, convencionou-se chamar de Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) à conjugação entre a CITT e suas mais recentes extensões

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), derivada da Técnica da Transformada Integral Clássica, é uma aproximação híbrida numérico-analítica. A eliminação de variáveis independentes, por meio de operadores de integração apropriados, permite a obtenção de um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's), denominado sistema transformado, que é truncado para ser resolvido analítica ou numericamente. A ordem de truncamento é selecionada de acordo com a precisão prescrita desejada. Se o sistema transformado apresentar solução analítica, esta pode ser obtida automaticamente através de sistemas de computação simbólica; caso contrário, uma

solução numérica deve ser obtida através de algoritmos computacionais disponíveis em diversas bibliotecas de subrotinas científicas.

A GITT em ciência e tecnologia pode ser resumidamente aplicada a problemas das seguintes categorias:

- ✓ Problemas que apresentem coeficientes variáveis em suas equações governantes;
- ✓ Problemas que apresentem coeficientes variáveis em suas condições de contorno;
- ✓ Problemas que apresentem contornos variáveis;
- ✓ Problemas que envolvem dificuldades na solução do problema auxiliar;
- ✓ Problemas não lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependem do potencial a ser obtido.

Para a utilização da GITT alguns passos devem ser aplicados sequencialmente, os quais podem ser assim resumidos:

- ✓ Escolher um problema auxiliar apropriado, o qual deve conter o máximo possível de informações sobre o problema original, evitando problemas computacionais;
- ✓ Desenvolver um par transformada-inversa, a partir da propriedade de ortogonalidade das autofunções;
- ✓ Aplicar a transformação integral da equação diferencial parcial original, resultando em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acoplado;
- ✓ Truncar o sistema diferencial ordinário resultando em uma ordem suficientemente grande, resolvendo-o através de procedimentos numéricos;
- ✓ Obter os potenciais originais utilizando a fórmula de inversão.

São diversas as aplicações da Técnica da Transformada Integral Generalizada em modelagens avançadas, ciência e tecnologia, desta forma exemplos mais recente de estudos publicados podem ser encontrados na Tab. (1.2) abaixo.

Tabela 1.2: Estudos realizados usando a Técnica da Transformada Integral Clássica e Generalizada.

Autores	Ano	Aplicação
Macêdo <i>et al.</i>	2000	Transferência de massa em fluxo turbulento de fluidos viscoelásticos dentro de tubos circulares
Santos	2001	Convecção de fluidos não Newtonianos em tubos externamente aletados
Cunha	2002	Transferência de calor e massa com efeito da pressão
Dantas <i>et al.</i>	2003	Transferência de calor e massa em meio capilar poroso
Barros <i>et al.</i>	2006	Dispersão de contaminantes em rios e canais
Dantas <i>et al.</i>	2007	Secagem em meio poroso
Naveira <i>et al.</i>	2007	Convecção forçada de fluxo externo
Almeida <i>et al.</i>	2008	Dispersão de poluentes na atmosfera
Veronese	2008	Escoamento bidimensional de fluidos não Newtonianos
Cassol <i>et al.</i>	2009	Dispersão de poluente atmosférico
Monteiro <i>et al.</i>	2009	Condução de calor hiperbólica em uma placa finita
Venezuela <i>et al.</i>	2009	Fluxo laminar convectivo em tubos permeáveis
Silva <i>et al.</i>	2010(b)	Secagem convectiva de alimentos

Atualmente, alguns passos intermediários são utilizados com o objetivo de melhorar o desempenho da técnica, dependendo da dificuldade oferecida pelo problema. Aplicação de filtros para a aceleração de convergência (MACÊDO *et al.* 1999), reordenamento de autovalores e potenciais (MACHADO, 1998), aplicação do balanço integral (DANTAS, 2000), são alguns exemplos bem sucedidos das novas tentativas de otimização quando da aplicação da GITT.

CAPÍTULO II

PROBLEMA INVERSO

Neste capítulo é apresentado o estudo sobre o paradigma referenciado como Métodos Inversos. A ênfase é voltada aos conceitos fundamentais e definições necessárias ao desenvolvimento e entendimento do problema inverso, bem como ao estudo teórico dos coeficientes de sensibilidade. Em seguida apresentam-se os métodos de minimização, em particular, o método de Levenberg-Marquardt.

2.1. - INTRODUÇÃO

Nos anos recentes o interesse tem crescido na teoria e aplicação do problema inverso; ele é encontrado em quase todo o ramo da ciência e engenharia (ÖZISIK e ORLANDE, 2000). Engenheiros mecânico, espacial, químico e nuclear, matemáticos, astrofísicos e estatísticos estão todos interessados neste assunto, cada grupo com aplicações diferentes em mente (BECK e WOODBURY, 1998; MZALI *et al.*, 2002; VASCONCELLOS *et al.*, 2002; COLAÇO e ORLANDE, 2004; LE NILIOT e LEFÊVRE, 2004; SHENEFELT *et al.*, 2002; COLAÇO *et al.*, 2006; FGUIRI *et al.*, 2007).

BECK e WOODBURY (1998) afirmam que requerimentos básicos para a solução de problemas inversos são medições apropriadas e um modelo matemático. Uma faceta importante no processo geral é o desenvolvimento e melhoria do modelo matemático empregado.

Matematicamente, problemas inversos pertencem a uma classe de problemas chamados de Mal-Postos. O conceito de um problema bem-posto, originalmente

introduzido por Hadamard, requer que sua solução deva satisfazer as três seguintes condições:

- (i) A solução deve existir;
- (ii) A solução deve ser única;
- (iii) A solução deve ser estável sob pequenas alterações aos dados de entrada (ou seja, condição de estabilidade).

A existência de uma solução para um problema inverso pode ser assegurada por uma fundamentação física. Por outro lado, a unicidade da solução de problemas inversos podem ser matematicamente provada apenas para alguns casos especiais. Também, o problema inverso é muito sensível à erros aleatórios nos dados de entrada de medida, exigindo técnicas especiais para a sua solução de forma a satisfazer a condição de estabilidade (ÖZISIK e ORLANDE, 2000).

Assim, o problema é dito mal-posto se alguma das condições acima não é satisfeita. Para a solução de tais problemas é necessário transformá-los em problemas bem postos, com a utilização dos chamados métodos de regularização. Os métodos de regularização consistem na determinação da solução aproximada mais suave compatível com os dados de observação, para um certo nível de ruído. A regularização de um problema mal posto pode ser obtida através da minimização da norma ordinária dos mínimos quadrados, desde que as seguintes considerações sejam feitas: os erros sejam aleatórios aditivos, não correlacionados e de distribuição normal, com desvio padrão constante e de média zero.

O principal objetivo do problema direto é recuperar o campo de temperatura, umidade, velocidade ou outra variável dependente na equação, quando todas as características causais (ou seja, condições de contorno e seus parâmetros, condição inicial, propriedades do meio e termo de geração de energia, se existir algum) são especificadas.

Os métodos diretos possuem algumas desvantagens, como custos altos e impossibilidade de estimar simultaneamente vários parâmetros.

Em notação matricial, um problema direto pode ser expresso como:

$$[A][U] = [y] \tag{2.1}$$

Nas aplicações de engenharia, o vetor $[y]$ contém a perturbação na qual o sistema físico está submetido, ou uma função que define o seu comportamento. $[A]$ é a matriz quadrada ($n \times n$) dos coeficientes, $[U]$ e $[y]$ são matrizes coluna e conhecidas como vetor solução e vetor das constantes, respectivamente.

Por outro lado, o objetivo do problema inverso é estimar uma ou mais de tais características causais desconhecidas, a partir do conhecimento da temperatura, umidade, velocidade medida (o efeito) em alguma seção específica do meio.

Assim, a solução da Eq. (2.1) é obtida pela pré-multiplicação de ambos os lados pela inversa de $[A]$:

$$[U] = [A]^{-1} [Y] \quad (2.2)$$

Os problemas inversos são mais ambiciosos que os diretos porque têm os seguintes objetivos: Estimar o maior número de parâmetros possíveis a partir de uma única experiência; Combinar várias experiências para estimar os mesmos parâmetros e determinar os limites de confiança.

Existem vários exemplos de problemas inversos em pesquisas na área de engenharia de alimentos (MARTINS e SILVA, 2004; ZUECO *et al.*, 2004; SIMPSON e CORTÉS, 2004; KANEVCE *et al.*, 2005; MENDONÇA *et al.*, 2005; MARIANI *et al.*, 2007; MONTEAU, 2008; SILVA *et al.*, 2009), e a resolução de problemas desta natureza contribui significativamente para o desenvolvimento dessa área.

2.2. - ESTUDO DE SENSIBILIDADE AOS PARÂMETROS

O estudo dos coeficientes de sensibilidade aos parâmetros do modelo precisa ser realizado para se verificar a existência de solução do problema inverso (de estimação de parâmetros) no que concerne a determinação do número de parâmetros que podem ser estimados a partir de uma única experiência.

2.2.1. - Coeficiente de Sensibilidade

O coeficiente de sensibilidade de uma variável de estado é definido como a primeira derivada parcial de uma solução teórica $\eta(x,t,\alpha,\beta)$ em relação ao parâmetro desconhecido β_j (BECK e ARNOLD, 1977). Consideremos $\eta(x,t,\alpha,\beta)$ uma variável de estado, $x = (x_1, x_2, x_3)$ representa as variáveis de espaço, t o tempo, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ os parâmetros conhecidos e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ os parâmetros desconhecidos. O coeficiente de sensibilidade no ponto x_i , no tempo t_n para o parâmetro β_j é calculado a partir do modelo em estudo e é dado pela seguinte expressão:

$$\chi_j(x_i, t_n, \alpha, \beta) = \left. \frac{\partial \eta(x, t, \alpha, \beta)}{\partial \beta_j} \right)_{x_i, t_n} = \chi_j)_{i,n} \quad (2.3)$$

Uma vez que os coeficientes de sensibilidade são calculados, eles permitem quantificar a variação $\Delta\eta$ da variável de estado (que também é medida) induzida por uma variação $\Delta\beta_j$ do parâmetro β_j (todos os outros parâmetros permanecem inalterados):

$$\Delta\eta(x_i, t_n, \alpha, \beta) = \chi_j)_{i,n} \Delta\beta_j \quad (2.4)$$

Os coeficientes de sensibilidade são de algum modo a "chave do sucesso" do procedimento de estimação. Se, para um determinado experimento, o coeficiente de sensibilidade para um parâmetro é pequeno para a seqüência inteira de observações, isto é, baixa sensibilidade, este parâmetro em particular raramente influencia a variável de estado. Em termos de estimação de parâmetro, isto indica que só uma grande mudança neste parâmetro afetará o modelo, ou em outras palavras, a informação contida nas medidas sobre este parâmetro é fraca. Assim será difícil de estimar este parâmetro com tal informação.

A noção de identificabilidade permite determinar as condições para as quais a estimação é possível de ser realizada e estabelecer uma estratégia de identificação, pois existem modelos para os quais não é possível estimar independentemente todos os parâmetros ou mesmo, simultaneamente com uma boa precisão. Resumidamente, os critérios para identificação dos parâmetros são:

1. Se $\chi_j = 0, \forall x, \forall t$: impossível estimar β_j ;
2. Se $\chi_j = c\chi_k, \forall r, \forall t$: impossível estimar simultaneamente β_j e β_k , que caracteriza a dependência linear entre os dois parâmetros;

O principal critério para que a estimação de parâmetros seja possível é que o coeficiente de sensibilidade associado não deve ser nulo ($\chi_j \neq 0$).

Se um ou vários parâmetros têm coeficientes de sensibilidade duas ordens de grandeza menor do que os outros, então será difícil estimar precisamente estes parâmetros. Eles não podem ser estimados simultaneamente aos outros e o experimento precisa ser modificado (maior número de sensores, outra excitação,...). Outro problema que pode ser encontrado é uma dependência linear, ou quase linear, quando envolve mais de um coeficiente de sensibilidade. Uma dependência linear entre os parâmetros β_j e β_m é tal que:

$$\chi_j)_{i,n} = c \chi_m)_{i,n} \quad \forall_i \text{ e } \forall_n \quad (2.5)$$

onde c é uma constante. Uma dependência linear indica que uma variação $\Delta\beta_j$ tem exatamente a mesma influência na variável de estado que uma variação $c\Delta\beta_m$. Assim, isto impossibilita determinar estes dois parâmetros simultaneamente (somente a relação entre eles pode ser determinada). Novamente o procedimento experimental deve ser modificado.

Por conseguinte é fácil entender que todos os esforços deveriam ser feitos para se obter coeficientes de sensibilidade tão grandes quanto possíveis.

Note que os coeficientes de sensibilidade aos parâmetros, α , os quais são supostamente conhecidos também precisam ser calculados. Aplica-se a mesma relação dada pela Eq. (2.3), sendo que neste caso, os coeficientes de sensibilidades devem ser os menores possíveis. Isto é particularmente verdadeiro se a confiança no parâmetro conhecido é frágil, posto que um erro $\Delta\alpha_k$, sobre α_k induzirá uma variação $\Delta\eta = \chi_k \Delta\alpha_k$ no modelo. Na prática esta variação seria atribuída aos parâmetros desconhecidos e falsificaria os resultados da identificação dos parâmetros.

2.2.2. - Coeficiente de Sensibilidade Reduzido

A comparação entre coeficientes de sensibilidade aos parâmetros que compõem o modelo não é muito fácil quando eles têm unidades diferentes (o que é frequentemente o caso). Então, para a comparação, é preferível estudar os coeficientes de sensibilidade reduzidos definidos como:

$$\bar{\chi}_j(x_i, t_n, \alpha, \beta) = \beta_j \left(\frac{\partial \eta(x, t, \alpha, \beta)}{\partial \beta_j} \right)_{x_i, t_n} \quad (2.6)$$

Assim, todos os coeficientes de sensibilidade reduzidos $\bar{\chi}_j$ têm as mesmas unidades que a variável dependente. Eles mostram a variação do modelo com respeito à mudança relativa nos parâmetros. Normalmente a experiência deve ser projetada de modo que todos os coeficientes de sensibilidade reduzidos para os parâmetros desconhecidos sejam altos, com a mesma ordem de magnitude, enquanto que aqueles referentes aos parâmetros conhecidos sejam pequenos.

A inspeção visual dos coeficientes de sensibilidade reduzidos permite descobrir eventuais dependências lineares e pequenas magnitudes.

2.2.3. - Matriz de Sensibilidade

Para p parâmetros à estimar e n medidas, uma formulação de matriz pode ser usada para expressar a relação entre as variáveis de estado e os parâmetros, para o caso linear:

$$\eta = \chi \beta \quad (2.7)$$

η e β são, respectivamente, vetores de dimensões n e p , enquanto a dimensão de χ , que é a chamada matriz de sensibilidade, é $(n \times p)$. Para o modelo de parâmetro linear, χ não depende de β . A matriz de sensibilidade é construída dos coeficientes de sensibilidade. A coluna j de χ é composta da derivada do modelo para todas as observações com respeito a β_j :

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1)_1 & \chi_2)_1 & \cdots & \chi_p)_1 \\ \chi_1)_2 & \chi_2)_2 & \cdots & \chi_p)_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \chi_1)_n & \chi_2)_n & \cdots & \chi_p)_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Entre os muitos critérios que foram propostos para indicar o projeto ótimo de um experimento, o mais comum está baseado na matriz $\chi^T \chi$ cujas dimensões são $(p \times p)$. Primeiro, é desejado maximizar o determinante de $\chi^T \chi$ (BECK and ARNOLD, 1977). Significa que os coeficientes de sensibilidade deveriam ser tão grandes quanto possível e não linearmente dependentes. Segundo, é desejado minimizar a relação entre o maior e o menor autovalor, isto é, obter uma matriz mais bem condicionada quanto possível. Isto significa que os coeficientes de sensibilidade de cada parâmetro deveriam ter a mesma ordem de grandeza enquanto variam com formas diferentes.

2.3. - MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETRO

Geralmente, os problemas inversos são resolvidos através da minimização de uma função objetivo com alguma técnica de estabilização utilizada no processo de estimação (ÖZISIK e ORLANDE, 2000). Em Mínimos Quadrado Ordinário (OLS), Mínimos Quadrado Ponderado (WLS), Máxima Verossimilhança (ML) e estimativa a Máxima Posteriori (MAP), o somatório das função quadrado a ser minimizada é geralmente diferente, assim, por esta razão e por economia em representação de uma função quadrada apropriada, a função que consideramos aqui é (BECK e ARNOLD, 1977):

$$S(\beta) = [Y - \eta(\beta)]^T W [Y - \eta(\beta)] + [\mu - \beta]^T U [\mu - \beta] \quad (2.9)$$

onde Y é a matriz que corresponde aos valores medidos, $\eta(\beta)$ a matriz dos valores calculados, $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ o vetor dos p parâmetros desconhecidos, μ o vetor dos parâmetros conhecidos, e W e U são matrizes de ponderação com dimensões $(n \times n)$ e $(p \times p)$, respectivamente.

O ajuste é realizado com a escolha de um critério para as matrizes de ponderação W e U . Assim, para:

Mínimos Quadrados Ordinário (OLS): $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Este método é utilizado quando alguns dados sobre os erros de medida não estão disponíveis. Porém ele não é apropriado quando os erros apresentados são significativos.

Mínimos Quadrados Ponderados (WLS): $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Este método permite dar importância às medidas supostas mais precisas.

Máxima Verossimilhança (ML): $\mathbf{W} = \Psi^{-1}$, que é a matriz covariância dos erros de medidas e $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Normalmente, é difícil de determinar a covariância de todos os erros de medida, mas é possível determinar as suas variâncias. Se as variâncias não são constantes então o método ML dá um peso maior para as medidas que têm as variâncias menores.

Máxima Posteriori (MAP): $\mathbf{W} = \Psi^{-1}$, $\mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}$, onde $\mathbf{V}^{-1} = \text{cov}(\boldsymbol{\mu})$ é a matriz covariância dos parâmetros conhecidos *a priori*. Este critério aproveita as informações existentes sobre os parâmetros pesquisados para melhorar a precisão da estimação.

As técnicas de pesquisa do mínimo global consistem em propor um critério de minimização como por exemplo o Método Direto, Métodos Simplex, e os Métodos Gradiente (Método de Gauss, Método de Box-Kanemasu, Método de Levenberg-Marquardt) e a construção de uma inicialização dos valores do parâmetro β_i , de forma que o princípio básico do Método dos Mínimos Quadrados Lineares possa ser adotado.

2.3.1. - Método de Gauss

O Método de Gauss admite como critério de aproximação a Eq. (2.9) anteriormente mencionada e o critério de minimização é dado por:

$$\nabla_{\beta} S(\beta) = -2[\nabla_{\beta} \eta^T(\beta)]W[Y - \eta(\beta)] - 2U(\mu - \beta) = 0 \quad (2.10)$$

Onde S é a soma dos desvios quadrados. Observando que $\nabla_{\beta} \eta^T(\beta) = \chi^T(\beta)$, obtém-se

$$\chi^T(\beta)W[Y - \eta(\beta)] + U(\mu - \beta) = 0 \quad (2.11)$$

Como a Eq. (2.11) é não linear em termos de β , a estimação do parâmetro β não é facilmente resolvida. A solução da Eq. (2.11) é obtida por meio da linearização de Gauss.

Considerando \mathbf{b} um valor aproximado da estimação $\hat{\beta}$ que minimiza $S(\beta)$, duas aproximações são aplicadas à equação mencionada. A primeira substitui $\eta(\hat{\beta})$ por $\eta(\mathbf{b})$ e a segunda usa os dois primeiros termos da Série de Taylor para $\eta(\hat{\beta})$ em torno de \mathbf{b} :

$$\eta(\hat{\beta}) = \eta(b) + (\nabla_{\beta} \eta^T(b))^T (\hat{\beta} - b) - U(\hat{\beta} - b) \quad (2.12)$$

Como $\nabla_{\beta} \eta^T(\beta) = \chi^T(\beta)$, a Eq. (2.12) se torna:

$$\eta(\hat{\beta}) = \eta(b) + \chi^T(\beta)(\hat{\beta} - b) - U(\hat{\beta} - b) \quad (2.13)$$

Substituindo na Eq. (2.11), temos:

$$\chi^T(b)W[Y - \eta(b) - \chi(b)(\hat{\beta} - b)] + U(\mu - b) - U(\hat{\beta} - b) \approx 0 \quad (2.14)$$

Note que a Eq. (2.14) é linear em $\hat{\beta}$. Se (1) η não está muito longe de ser linear em β na região ao redor da solução da Eq. (2.11) e se (2) esta região inclui \mathbf{b} , o valor de $\hat{\beta}$ que satisfaça a Eq. (2.14) será a melhor aproximação para a solução (2.11) do que a fornecida por \mathbf{b} (BECK e ARNOLD, 1977).

Assumindo que as duas condições acima sejam verdadeiras, a Eq. (2.14) torna-se igual a zero. No interesse de compactação de notação e para indicar um processo iterativo seja:

$$b^{(k)} = b, \quad b^{(k+1)} = \hat{\beta}, \quad \eta^{(k)} = \eta(b), \quad \chi^{(k)} = \chi(b) \quad (2.15)$$

Usando a notação (2.15) e fixando igual a zero, a Eq. (2.14) produz p equações na forma de matriz para $b^{(k+1)}$,

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + P^{(k)} \left[\chi^{T(k)} W (Y - \eta^{(k)}(\beta)) + U(\mu - \beta^{(k+1)}) \right] \quad (2.16a)$$

$$\text{Onde, } P^{(k)} = \left[\chi^{T(k)} W \chi^{(k)} + U \right]^{-1} \quad (2.16b)$$

$$\Delta \beta = b^{(k+1)} - b^{(k)} = P^{(k)} \left[\chi^{T(k)} W \left(Y - \eta^{(k)}(\beta) \right) + U \left(\mu - \beta^{(k+1)} \right) \right] \quad (2.17)$$

A Eq. (2.16a) é a equação de linearização de Gauss.

Método Iterativo

No processo de iteração, é necessário um valor inicial de \mathbf{b} , $\mathbf{b}^{(0)}$. Com este vetor, $\eta^{(0)}$ e $\chi^{(0)}$ podem ser calculados, os quais, por sua vez são usados na Eq. (2.16a) para obter a melhor estimativa do vetor $\mathbf{b}^{(1)}$, completando a primeira iteração. Então $\eta^{(1)}$ e $\chi^{(1)}$ são avaliados de forma que $\mathbf{b}^{(2)}$ possa ser encontrado. A iteração continua até que não haja mudança significativa em qualquer componente de \mathbf{b} . Um critério para indicar isto é (BECK e ARNOLD, 1977):

$$\frac{|b_i^{k+1} - b_i^k|}{|b_i^k| + \xi_i} < \delta \text{ para } i = 1, 2, \dots, p \quad (2.18)$$

Onde δ é um número pequeno tal como 10^{-4} que representa o erro relativo de convergência e $\xi_i (< 10^{-10})$ permite evitar a situação onde $\beta_i^{(k)} = 0$.

2.3.2. - Método de Levenberg-Marquardt

O método de Levenberg-Marquardt, originalmente concebido para aplicação em problemas não-lineares na estimação de parâmetros, também tem sido aplicado com sucesso na solução de problemas lineares que são muito mal condicionados para permitir a aplicação de algoritmos lineares (ÖZISIK e ORLANDE, 2000).

Este método introduz uma restrição ao critério de minimização, para superar a instabilidade do Método de Gauss. Fundamentado no critério dos mínimos quadrados ponderados, a fórmula iterativa tem a expressão:

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + \left[\chi^{T(k)} W \chi + \lambda^{(k)} \Omega_m^{(k)} \right]^{-1} \chi^{T(k)} W (Y - \eta^{(k)}(b)) \quad (2.19)$$

Sendo $\lambda^{(k)}$ um escalar positivo chamado de parâmetro amortecedor e Ω_m a matriz diagonal de termos positivos, que é igualada aos termos diagonais da matriz $(\chi^T W \chi)$ definida por:

$$\Omega_m = \text{diag} [C_{11} \ C_{22} \dots C_{pp}] \quad (2.20)$$

onde C_{jj} são os elementos da diagonal.

O objetivo do termo matricial $\lambda^{(k)} \Omega_m^{(k)}$, incluído na Eq. (2.19), é para amortecer as oscilações e instabilidades devido ao fato do problema ser mal-condicionado, tornando seus componentes grandes quando comparados aos componentes de $\chi^T W \chi$, se necessário. O parâmetro de amortecimento é feito grande no início das iterações, visto que o problema é geralmente mal-condicionado na região próxima ao chute inicial usado para o processo iterativo, que pode ser muito longe dos parâmetros exatos. Com essa modificação, a matriz $\chi^T W \chi$ não precisa ser necessariamente não-singular no início das iterações e o método de Levenberg-Marquardt tende para o Método de *Steepest Descent*. O parâmetro $\lambda^{(k)}$ é então reduzido gradualmente com o avanço das iterações para a solução do problema de estimativa de parâmetros e então o método de Levenberg-Marquardt tende para o Método de Gauss (ÖZISIK e ORLANDE, 2000).

Os seguintes critérios são usados como critérios de parada do procedimento iterativo do método de Levenberg-Marquardt:

$$S(b^{k+1}) < \varepsilon_1 \quad (2.21)$$

$$\|(\chi^k)^T [Y - \eta(b^k)]\| < \varepsilon_2 \quad (2.22)$$

$$\|b^{k+1} - b^k\| < \varepsilon_3 \quad (2.23)$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 são tolerâncias prescritas pelo usuário e $\|\cdot\|$ é a norma Euclideana do vetor.

O critério dado pela Eq. (2.21) testa se a norma dos mínimos quadrados é pequena suficientemente, o que é esperado na vizinhança da solução do problema. Semelhantemente, a Eq. (2.22) testa se a norma do gradiente de $S(b)$ é suficientemente pequena, uma vez que esta se anula no ponto onde $S(b)$ é mínimo. O último critério dado pela Eq. (2.23) resulta do fato de que a mudança no vetor de parâmetros é muito pequena quando o método está convergido.

O método de Levenberg-Marquardt tem sido aplicado para a solução de uma variedade de problemas inversos envolvendo a estimação de parâmetros desconhecidos (MEJIAS *et al.*, 1999; DANTAS, 2000; DANTAS *et al.*, 2002; DANTAS *et al.*, 2003; HUANG e HUANG, 2007; YANG e GAO, 2007; SILVA *et al.*, 2010a).

CAPÍTULO III

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo definem-se os problemas físicos considerados, suas formulações matemáticas e apresentam-se os dois métodos usados para a solução dos problemas diretos. O primeiro método de solução é a da Técnica da Transformada Integral Clássica para obtenção do perfil do teor de umidade, já o segundo é a Técnica da Transformada Integral Generalizada para a obtenção dos perfis de temperatura e teor de umidade.

3.1. – PROBLEMA DIRETO

3.1.1. – Problema Físico

Para efeito de aplicação da Técnica de Transformada Integral, foram resolvidos dois problemas de secagem unidimensional de alimentos. O primeiro corresponde à teoria de difusão, que apóia-se exclusivamente sobre a lei de Fick e o segundo corresponde a uma variante do modelo de Luikov, composto por duas equações diferenciais parciais, lineares e acopladas.

O problema físico considerado aqui envolve um processo de secagem solar indireta de uma placa porosa. Dentro da câmara de secagem os dois lados da amostra são expostos a um fluxo de ar seco à temperatura T_0 , conforme ilustrado na Fig. (3.1).

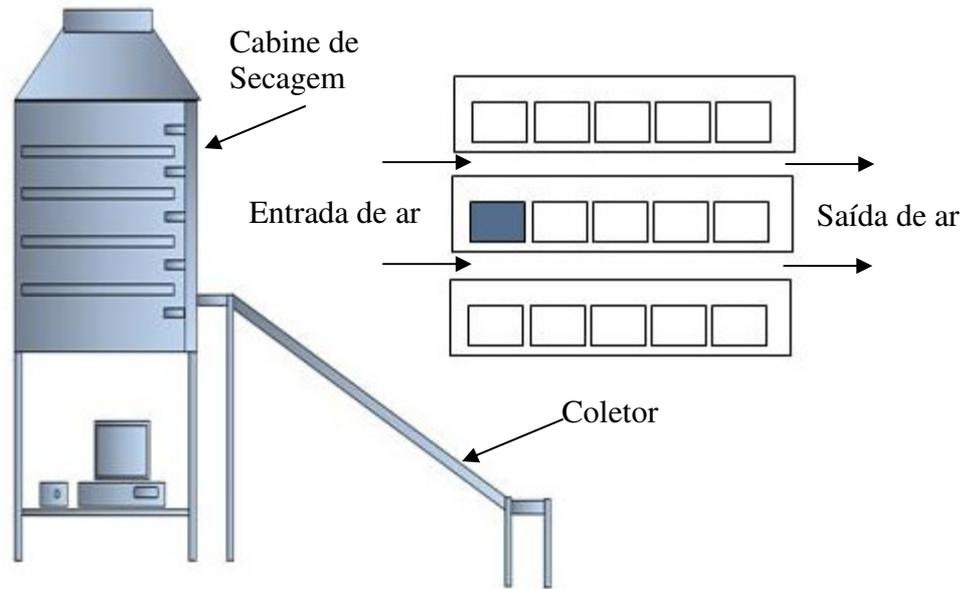


Figura 3.1: Diagrama esquemático de um secador solar indireto do tipo gabinete.

3.1.2. – Modelagem da Transferência de Massa

Como já mencionado no Capítulo I, a segunda lei de Fick da difusão tem sido usada por um número de pesquisadores com a consideração que o gradiente de umidade é a força motriz do processo de transferência de massa e admite que a difusão de líquido é o único mecanismo de movimento de umidade, no interior do sólido.

Utilizando a Lei de Fick, na equação de balanço de massa de água no interior do produto, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{ef} \nabla u) \quad (3.1)$$

Onde: u : teor de umidade (kg H₂O/kg sólido seco)

D_{ef} : difusividade efetiva de massa (m²/s)

t : tempo (s)

As seguintes hipóteses simplificadoras foram assumidas:

1. A geometria do produto é considerada como uma placa plana infinita de espessura $2L$;

2. A transferência do teor de umidade interna durante a secagem é predominantemente unidimensional;
3. Não ocorre geração de massa no interior do produto durante o processo;
4. As resistências externas às transferências de massa e o encolhimento do produto são desprezadas;
5. A difusividade efetiva de massa é constante.

Para o problema de transferência de massa considerou-se que no meio da amostra, $x = 0$, o gradiente do teor de umidade é considerado zero. No contorno, $x = L$ foi considerada uma condição de equilíbrio.

Aplicando as considerações acima à Eq. (3.1), encontra-se:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D_{ef} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{na região } 0 < x < L \text{ e } t > 0 \quad (3.2a)$$

onde x é a variável espacial e L é o comprimento característico do produto.

A Eq. (3.2a) está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\text{Teor de umidade máximo no centro: } \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (3.2b)$$

$$\text{Teor de umidade constante na superfície: } u(L, t) = u^*, \text{ em } x = L \text{ e } t > 0 \quad (3.2c)$$

E à seguinte condição inicial:

$$\text{Teor de umidade inicial uniforme: } u(x, 0) = u_0, \text{ na região } 0 < x < L \text{ e } t = 0 \quad (3.2d)$$

onde u_0 é o teor inicial de umidade (kg H₂O/kg sólido seco), u^* é o teor de umidade de equilíbrio (kg H₂O/kg sólido seco) e u é o teor de umidade no tempo e no espaço (kg H₂O/kg sólido seco), D_{ef} é a difusividade efetiva de massa (m²/s), e x e t são as variáveis independentes, isto é, posição (m) e tempo (s), respectivamente.

O sistema dado pelas Eq. (3.2a), (3.2b), (3.2c) e (3.2d) pode ser escrito na seguinte forma adimensional:

$$\frac{\partial \phi(X, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \quad (3.3a)$$

Com condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \phi(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=0} = 0 \quad X = 0, \quad \tau > 0 \quad (3.3b)$$

$$\phi(X, \tau)|_{X=1} = 0 \quad X = 1, \quad \tau > 0 \quad (3.3c)$$

e condição inicial:

$$\phi(X, \tau)|_{\tau=0} = 1 \quad 0 < X < 1, \quad \tau = 0 \quad (3.3d)$$

onde os grupos adimensionais que aparecem acima são definidos como:

$$\phi(X, \tau) = \frac{u(x, t) - u^*}{u_0 - u^*}, \text{ teor de umidade adimensional;}$$

$$X = \frac{x}{L}, \text{ posição adimensional;}$$

$$\tau = \frac{D_{ef} t}{L^2}, \text{ tempo adimensional.}$$

O problema (3.3) é chamado de um Problema Direto quando as condições iniciais, condições de contorno, assim como também todos os parâmetros que aparecem na formulação são conhecidos. O objetivo do problema direto é determinar o campo do teor de umidade no meio do produto.

3.1.2.1. – Solução da Transferência de Massa via Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT)

O problema de transferência de massa, em alimentos submetidos ao processo de secagem convectiva, pode ser resolvido por métodos clássicos, por exemplo, por Separação de Variáveis, como encontrado em SILVA (2007). Contudo, para efeito de aplicação da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT), resolve-se aqui o problema formulado na seção anterior. Seguindo-se os formalismos da CITT, o primeiro passo é obter o Problema de Sturm-Liouville associado (também chamado de Problema Auxiliar), contendo informações do problema principal. Se considerarmos a equação diferencial (3.3) com suas condições de contorno, este problema pode ser expresso como (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{d^2 \varphi_i(X)}{dX^2} + \lambda_i^2 \varphi_i(X) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\left. \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad (3.4b)$$

$$\varphi_i(1) = 0 \quad (3.4c)$$

Resolvendo-se o problema de Sturm-Liouville encontra-se:

$$\varphi_i(X) = \cos(\lambda_i X) \quad (\text{autofunção}) \quad (3.5a)$$

$$\lambda_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \pi \quad i = 1, 2, 3 \dots (\text{autovalores}) \quad (3.5b)$$

Seguindo a idéia do método da Transformada Integral Clássica, o próximo passo é definir o par transformada-inversa:

$$\bar{\phi}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) \phi(X, \tau) dX \quad \text{Transformada} \quad (3.6a)$$

$$\phi(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(X) \bar{\phi}_i(\tau) \quad \text{Inversa} \quad (3.6b)$$

Onde as autofunções normalizadas, $\tilde{\varphi}_i(X)$, são definidas por:

$$\tilde{\varphi}_i(X) = \frac{\varphi_i(X)}{N_i^{1/2}} \quad (3.6c)$$

as quais gozam da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) \tilde{\varphi}_j(X) dX = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3.6d)$$

Sendo $\varphi_i(X)$ a solução do problema de Sturm-Liouville associado, N_i a norma, $\overline{\phi}_i(\tau)$ a variável dependente transformada, com $i = 1, 2, \dots$, que posteriormente será truncado em uma ordem suficiente que garanta a precisão requerida para a solução. Onde a norma é dada por:

$$N_i = \int_0^1 \varphi_i^2(X) dX = \frac{1}{2} \quad (3.6e)$$

Uma vez definido o par transformada-inversa, o próximo passo é proceder à transformação do problema principal. Aplicando-se o operador

$$\int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) dX$$

em ambos os lados da equação principal (3.3a) e utilizando-se a propriedade de ortogonalidade (3.6d), após alguns passos de manipulação algébrica chega-se à seguinte equação:

$$\frac{d\overline{\phi}_i(\tau)}{d\tau} + \lambda_i^2 \overline{\phi}_i(\tau) = 0 \quad (3.7a)$$

Para transformar a condição inicial, aplica-se o mesmo operador na Eq. (3.3d), de onde se obtém a condição inicial transformada:

$$\overline{\phi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) dX \quad (3.7b)$$

De acordo com BOYCE e DIPRIMA (2006), a solução do problema transformado é do tipo:

$$\bar{\phi}_i(\tau) = C \cdot e^{-\lambda_i^2 \tau} \quad (3.7c)$$

onde a constante C é obtida mediante a substituição da condição inicial (3.7b) na equação anterior (3.7c). Retornado-se à equação da inversa (3.6b), obtém-se:

$$\phi(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_i X)}{\sqrt{N_i}} \left[\int_0^1 \frac{\cos(\lambda_i X)}{\sqrt{N_i}} dX \right] \cdot e^{-\lambda_i^2 \tau} \quad (3.7d)$$

Retornando-se ao potencial original, temos:

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_i x/L)}{\sqrt{N_i}} \int_0^L \frac{\cos(\lambda_i x/L)}{\sqrt{N_i}} \frac{dx}{L} \cdot e^{-\lambda_i^2 \frac{D_{ef} t}{L^2}} \right] \cdot (u_0 - u^*) + u^* \quad (3.7e)$$

Desta forma pode-se determinar o valor do teor de umidade no interior do sólido, seja qual for a posição ou o instante considerado.

3.1.3. – Modelagem da Transferência de Calor e Massa

O problema físico considerado aqui envolve a transferência de calor e massa em uma placa porosa, inicialmente em condições de temperatura e teor de umidade uniformes. Da mesma forma que no problema de transferência de massa, considerou-se aqui que no meio da amostra, $x = 0$, o gradiente do teor de umidade é zero. Contudo, no contorno, $x = L$, colocado em contato com o fluxo de ar, considerou-se uma condição de contorno convectiva para temperatura e teor de umidade.

O sistema linear de equações proposto por LUIKOV (1966, 1975), para a modelagem deste problema físico envolvendo a secagem de um meio poroso, pode ser escrito como:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \lambda}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad \text{em } 0 < x < L, \quad \text{para } t > 0 \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a_m \delta \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + a_m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{em } 0 < x < L, \quad \text{para } t > 0 \quad (3.8b)$$

sujeito às seguintes condições iniciais:

Em $0 < x < L$, para $t = 0$:

$$T(x, 0) = T_0, \quad u(x, 0) = u_0 \quad (3.8c, d)$$

e às seguintes condições de contorno:

Em $x = 0$, para $t > 0$:

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.8e, f)$$

Em $x = L$, para $t > 0$:

$$k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + h_c [T(L, t) - T_{ar}] + (1 - \varepsilon) \frac{\lambda h_m}{c_m} [u(L, t) - u^*] = 0 \quad (3.8g)$$

$$k_m \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} + \delta k_m \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + h_m [u(L, t) - u^*] = 0 \quad (3.8h)$$

onde:

$$a = \frac{k}{\rho c}; \quad a_m = \frac{k_m}{\rho c_m}; \quad h_m = h'_m c_m \rho$$

onde h'_m : coeficiente de transferência de massa (m/s).

O primeiro termo na Eq. (3.8g) representa a contribuição da transferência de calor no interior do produto, o segundo expressa a quantidade de calor fornecido pela

superfície, enquanto que o último termo é a contribuição de calor consumido na mudança de fase do líquido.

Para a Eq. (3.8h) o primeiro termo descreve a contribuição da transferência de umidade no interior do produto, enquanto os dois últimos representam a contribuição da transferência de umidade devido ao efeito termogradiente e a transferência convectiva de umidade, respectivamente.

A formulação do problema, em sua forma adimensional, pode ser escrita da seguinte maneira:

Em $0 < X < 1$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta(X, \tau)}{\partial \tau} = (1 + \varepsilon LuKoPn) \frac{\partial^2 \theta(X, \tau)}{\partial X^2} - \varepsilon LuKo \frac{\partial^2 \phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial \phi(X, \tau)}{\partial \tau} = -LuPn \frac{\partial^2 \theta(X, \tau)}{\partial X^2} + Lu \frac{\partial^2 \phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.9b)$$

Condições iniciais:

Em $0 < X < 1$, para $\tau = 0$:

$$\theta(X, 0) = 0, \quad \phi(X, 0) = 0 \quad (3.9c, d)$$

Condições de contorno:

Em $X = 0$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \phi(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (3.9e, f)$$

Em $X = 1$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} - Biq[1 - \theta(1, \tau)] + (1 - \varepsilon)BimKoLu[1 - \phi(1, \tau)] = 0 \quad (3.9g)$$

$$-\frac{\partial\phi(1,\tau)}{\partial X} + Pn\frac{\partial\theta(1,\tau)}{\partial X} + Bim[1 - \phi(1,\tau)] = 0 \quad (3.9h)$$

onde os vários grupos adimensionais que aparecem acima são definidos como:

$$\theta(X,\tau) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_{ar} - T_0}, \text{ temperatura adimensional} \quad (3.10a)$$

$$\phi(X,\tau) = \frac{u_0 - u(x,t)}{u_0 - u^*}, \text{ conteúdo de umidade adimensional} \quad (3.10b)$$

$$\tau = \frac{at}{L^2}, \text{ tempo adimensional} \quad (3.10c)$$

$$X = \frac{x}{L}, \text{ coordenada adimensional} \quad (3.10d)$$

$$Biq = \frac{h_c L}{k}, \text{ coeficiente de transferência de calor adimensional} \quad (3.10e)$$

$$Bim = \frac{h_m L}{k_m}, \text{ coeficiente de transferência de massa adimensional} \quad (3.10f)$$

$$Lu = \frac{a_m}{a}, \text{ número de Luikov} \quad (3.10g)$$

$$Ko = \frac{\lambda u_0 - u^*}{c T_{ar} - T_0}, \text{ número de Kossovitch} \quad (3.10h)$$

$$Pn = \delta \frac{T_{ar} - T_0}{u_0 - u^*}, \text{ número de Posnov} \quad (3.10i)$$

Sem perda de generalidade, o sistema (3.9) pode ser reescrito, mais convenientemente, sob a seguinte forma:

Em $0 < X < 1$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta(X, \tau)}{\partial \tau} = K_{11} \frac{\partial^2 \theta(X, \tau)}{\partial X^2} + K_{12} \frac{\partial^2 \phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial \phi(X, \tau)}{\partial \tau} = K_{21} \frac{\partial^2 \theta(X, \tau)}{\partial X^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.11b)$$

Condições iniciais:

Em $0 < X < 1$, para $\tau = 0$:

$$\theta(X, 0) = 0, \quad \phi(X, 0) = 0 \quad (3.11c, d)$$

Condições de contorno:

Em $X = 0$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \phi(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (3.11e, f)$$

Em $X = 1$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} - Biq[1 - \theta(1, \tau)] + (1 - \varepsilon)BimKoLu[1 - \phi(1, \tau)] = 0 \quad (3.11g)$$

$$-\frac{\partial \phi(1, \tau)}{\partial X} + Pn \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} + Bim[1 - \phi(1, \tau)] = 0 \quad (3.11h)$$

onde:

$$K_{11} = (1 - \varepsilon)BimKoLu; \quad K_{12} = -\varepsilon KoLu$$

$$K_{21} = LuPn; \quad K_{22} = Lu$$

O problema (3.11) é chamado de um Problema Direto quando as condições iniciais, condições de contorno, assim como também todos os parâmetros que aparecem na formulação são conhecidos. O objetivo do problema direto é determinar os campos de temperatura e teor de umidade adimensionais, $\theta(X, \tau)$ e $\phi(X, \tau)$, respectivamente, no produto.

3.1.3.1. – Solução da Transferência de Calor e Massa via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

A técnica da transformada integral generalizada, por ser um método que possui características analítico-numéricas, têm motivado, ao longo dos anos, o desenvolvimento de vários esquemas para aceleração da convergência e/ou redução do custo computacional, como consequência direta da aplicação do método à classes de problemas distintos (DANTAS, 2000). Neste estudo serão utilizados dois dos principais esquemas desenvolvidos nos últimos anos, que são: (a) O uso de filtros simples com a finalidade de reduzir a influência das não-homogeneidades na taxa de convergência, e (b) O balanço integral, que retém as informações do contorno em uma nova representação para a expansão.

Para melhor performance computacional, no uso da GITT, propõe-se a aplicação do seguinte filtro no problema definido pelas Eqs. (3.11):

$$\theta(X, \tau) = 1 + \theta_h(X, \tau) \quad (3.12a)$$

$$\phi(X, \tau) = 1 + \phi_h(X, \tau) \quad (3.12b)$$

Substituindo as Eqs. (3.12) nas Eqs. (3.11), obtém-se o seguinte problema homogêneo:

Em $0 < X < 1$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta_h(X, \tau)}{\partial \tau} = K_{11} \frac{\partial^2 \theta_h(X, \tau)}{\partial X^2} + K_{12} \frac{\partial^2 \phi_h(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial \phi_h(X, \tau)}{\partial \tau} = K_{21} \frac{\partial^2 \theta_h(X, \tau)}{\partial X^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \phi_h(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.13b)$$

Condições iniciais:

Em $0 < X < 1$, para $\tau = 0$:

$$\theta_h(X, 0) = -1, \quad \phi_h(X, 0) = -1 \quad (3.13c, d)$$

Condições de contorno:

Em $X = 0$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta_h(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \phi_h(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (3.13e, f)$$

Em $X = 1$, para $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \theta_h(1, \tau)}{\partial X} + Biq\theta_h(1, \tau) = Bim^{**}\phi_h(1, \tau) \quad (3.13g)$$

$$\frac{\partial \phi_h(1, \tau)}{\partial X} + Bim^*\phi_h(1, \tau) = -BiqPn\theta_h(1, \tau) \quad (3.13h)$$

Sendo:

$$\begin{cases} Bim^* = Bim[1 - (1 - \varepsilon)KoLuPn] & (3.13i) \\ Bim^{**} = (1 - \varepsilon)BimKoLu & (3.13j) \end{cases}$$

Seguindo a metodologia da técnica da transformada integral generalizada, o primeiro passo é escolher os problemas auxiliares independentes. No presente estudo, foram escolhidos os seguintes problemas de autovalor do tipo Sturm-Liouville para a temperatura e teor de umidade, respectivamente:

$$\frac{d^2\psi_i(X)}{dX^2} + \mu_i^2\psi_i(X) = 0, \text{ em } 0 < X < 1 \quad (3.14a)$$

$$\frac{d\psi_i(0)}{dX} = 0, \text{ em } X = 0 \quad (3.14b)$$

$$\frac{d\psi_i(X)}{dX} + Biq\psi_i(1) = 0, \text{ em } X = 1 \quad (3.14c)$$

e

$$\frac{d^2\varphi_i(X)}{dX^2} + \lambda_i^2\varphi_i(X) = 0, \text{ em } 0 < X < 1 \quad (3.15a)$$

$$\frac{d\varphi_i(0)}{dX} = 0, \text{ em } X = 0 \quad (3.15b)$$

$$\frac{d\varphi_i(X)}{dX} + Bim^*\varphi_i(1) = 0, \text{ em } X = 1 \quad (3.15c)$$

As soluções dos problemas auxiliares escolhidos (3.14) e (3.15) podem ser facilmente obtidas em ÖZISIK (1993), cujas expressões das autofunções, autovalores e normas, respectivamente, são dadas por:

$$\psi_i(X) = \cos(\mu_i X) \quad (\text{autofunção}) \quad (3.16a)$$

Equação transcendental para o cálculo dos autovalores, μ_i :

$$(\mu_i) \tan(\mu_i) = Biq \quad (3.16b)$$

$$M_i = \int_0^1 \psi_i^2 dX = \frac{1}{2} \frac{\mu_i^2 + Biq^2 + Biq}{\mu_i^2 + Biq^2} \quad (\text{norma}) \quad (3.16c)$$

e

$$\varphi_i(X) = \cos(\lambda_i X) \quad (\text{autofunção}) \quad (3.17a)$$

Equação transcendental para o cálculo dos autovalores, λ_i :

$$(\lambda_i) \tan(\lambda_i) = Bim^* \quad (3.17b)$$

$$N_i = \int_0^1 \varphi_i^2 dX = \frac{1}{2} \frac{\lambda_i^2 + Bim^{*2} + Bim^*}{\lambda_i^2 + Bim^{*2}} \quad (norma) \quad (3.17c)$$

Os problemas de autovalor (3.14) e (3.15) permitem a definição dos seguintes pares de transformada-inversa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(X) \theta_h(X, \tau) dX \\ \theta_h(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(X) \bar{\theta}_i(\tau) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (transformada) \\ (inversa) \end{array} \quad \begin{array}{l} (3.18a) \\ (3.18b) \end{array}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) \phi_h(X, \tau) dX \\ \phi_h(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(X) \bar{\phi}_i(\tau) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (transformada) \\ (inversa) \end{array} \quad \begin{array}{l} (3.19a) \\ (3.19b) \end{array}$$

$$\text{onde: } \tilde{\psi}_i(X) = \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{M_i}} \quad e \quad \tilde{\varphi}_i(X) = \frac{\varphi_i(X)}{\sqrt{N_i}}$$

são as autofunções normalizadas.

O próximo passo consiste em se executar a transformação integral das equações parciais originais, de maneira a reduzi-las a um sistema diferencial ordinário. Com este objetivo, opera-se a Eq. (3.13a) com o operador $\int_0^1 \tilde{\psi}_i dX$ e a Eq. (3.13b), com $\int_0^1 \tilde{\varphi}_i dX$. Para se obter uma montagem completa do sistema de EDO's, os valores nos contornos, $\theta_h(1, \tau)$ e $\phi_h(1, \tau)$, devem ser expressos em função dos potenciais transformados, $\bar{\theta}_i(1, \tau)$ e $\bar{\phi}_i(1, \tau)$.

A substituição direta das fórmulas da inversa (3.18b) e (3.19b) nos contornos, entretanto, não é recomendada (RIBEIRO *et al.*, 1993), devido às condições de contorno do problema original não serem necessariamente obedecidas pelas autofunções. Desta forma um procedimento alternativo é seguido, através do uso das equações de balanço integral. Este procedimento alternativo consiste da integração no volume ($0 \leq X \leq 1$) de cada uma das equações diferenciais parciais originais (3.13a,b), permitindo a obtenção de expansões de rápida convergência para a temperatura e teor de umidade e suas derivadas no contorno.

Assim, após algumas manipulações matemáticas o sistema de EDO's para os potenciais transformados, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + K_{11}\mu_i^2\bar{\theta}_i(\tau) + K_{12}\mu_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \bar{\phi}_j(\tau) = K_{11}Bim^{**}\tilde{\psi}_i(1)\phi_h(1, \tau) \\ + K_{12}[(Biq - Bim^*)\tilde{\psi}_i(1)\phi_h(1, \tau) - BiqPn\tilde{\psi}_i(1)\theta_h(1, \tau)] \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} + K_{22}\lambda_i^2\bar{\phi}_i(\tau) + K_{21}\lambda_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\bar{\theta}_j(\tau) = -K_{22}BiqPn\tilde{\varphi}_i(1)\theta_h(1, \tau) \\ + K_{21}[(Bim^* - Biq)\tilde{\varphi}_i(1)\theta_h(1, \tau) + Bim^{**}\tilde{\varphi}_i(1)\phi_h(1, \tau)] \end{aligned} \quad (3.20b)$$

onde:

$$\theta_h(1, \tau) = -\frac{1}{Biq} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(c_j \frac{d\bar{\theta}_j(\tau)}{d\tau} + koc^*_j \frac{d\bar{\phi}_j(\tau)}{d\tau} \right) \right] \quad (3.20c)$$

$$\phi_h(1, \tau) = -\frac{1}{BimK_{22}} \sum_{j=1}^{\infty} c^*_j \frac{d\bar{\phi}_j(\tau)}{d\tau} \quad (3.20d)$$

$$c_j = \int_0^1 \tilde{\psi}_j(X) dX = \frac{\sin \mu_j}{\sqrt{M_j}\mu_j} \quad e \quad c^*_j = \int_0^1 \tilde{\varphi}_j(X) dX = \frac{\sin \lambda_j}{\sqrt{N_j}\lambda_j}$$

$$a_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(X) \tilde{\varphi}_j(X) dX = \frac{\lambda_j \cos(\mu_i) \sin(\lambda_j) - \mu_i \cos(\lambda_j) \sin(\mu_i)}{\sqrt{M_i}\sqrt{N_i}(\lambda_j^2 - \mu_i^2)}$$

$$b_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) \tilde{\psi}_j(X) dX = \frac{\lambda_i \cos(\mu_j) \sin(\lambda_i) - \mu_j \cos(\lambda_i) \sin(\mu_j)}{\sqrt{M_i} \sqrt{N_i} (\lambda_i^2 - \mu_j^2)}$$

As condições iniciais requeridas são obtidas da transformação integral das condições iniciais originais (3.13c,d), o que fornece:

$$\bar{\theta}_i(\tau) = - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(X) dX \quad (3.20e)$$

$$\bar{\phi}_i(\tau) = - \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(X) dX \quad (3.20f)$$

Este sistema pode ser resolvido através de um programa na linguagem Fortran ou por rotinas matemáticas bem estabelecidas e testadas.

Calculada a solução do vetor dos campos transformados de temperatura, $\bar{\theta}_i(\tau)$ e teor de umidade $\bar{\phi}_i(\tau)$, para qualquer tempo de interesse, as fórmulas da inversa (3.18b) e (3.19b), são utilizadas para que se expressem os potenciais originais, $\theta_h(X, \tau)$ e $\phi_h(X, \tau)$, em qualquer posição desejada. Para melhorar a convergência dessas expansões de autofunções, especialmente na vizinhança do contorno $X = 1$, o mesmo procedimento utilizado anteriormente para o cálculo dos potenciais no contorno, $\theta_h(1, \tau)$ e $\phi_h(1, \tau)$, pode ser estendido para todo o interior do meio, como sugerido por RIBEIRO *et al.* (1993) e SCOFANO NETO *et al.* (1990).

As expressões alternativas resultantes para $\theta_h(X, \tau)$ e $\phi_h(X, \tau)$, as quais podem melhorar consideravelmente as taxas de convergência das expansões em autofunções são, respectivamente:

$$\theta_h(X, \tau) = \theta_h(1, \tau) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} - \varepsilon K o \sum_{i=1}^{\infty} e_i \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.21a)$$

$$\phi_h(X, \tau) = \phi_h(1, \tau) - Pn \sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} - \frac{(1 + \varepsilon K o L u P n)}{L u} \sum_{i=1}^{\infty} e_i \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.21b)$$

onde:

$$d_i = \int_X^1 \int_0^{X'} \widetilde{\psi}_i(X'') dX'' dX' \quad (3.21c)$$

$$e_i = \int_X^1 \int_0^{X'} \widetilde{\varphi}_i(X'') dX'' dX' \quad (3.21d)$$

Um procedimento similar foi aplicado para se obter as derivadas no contorno, $\frac{\partial \theta_h(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1}$ e $\frac{\partial \phi_h(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1}$, e no interior do meio, $\frac{\partial \theta_h(X, \tau)}{\partial X}$ e $\frac{\partial \phi_h(X, \tau)}{\partial X}$, em função do potencial transformado. As expressões resultantes são, respectivamente:

$$\frac{\partial \theta_h(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \varepsilon K o \sum_{i=1}^{\infty} g_i \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial \phi_h(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1} = P n \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \frac{(1 + \varepsilon K o L u P n)}{L u} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.22b)$$

e

$$\frac{\partial \theta_h(X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \theta_h(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1} - \sum_{i=1}^{\infty} h_i \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} - \varepsilon K o \sum_{i=1}^{\infty} i_i \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.22c)$$

$$\frac{\partial \phi_h(X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \phi_h(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1} - P n \sum_{i=1}^{\infty} h_i \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} - \frac{(1 + \varepsilon K o L u P n)}{L u} \sum_{i=1}^{\infty} i_i \frac{d\bar{\phi}_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.22d)$$

onde:

$$f_i = \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(X) dX \quad e \quad g_i = \int_0^1 \widetilde{\varphi}_i(X) dX$$

$$h_i = \int_X^1 \widetilde{\psi}_i(X') dX' \quad e \quad i_i = \int_X^1 \widetilde{\varphi}_i(X') dX'$$

Finalmente, os perfis adimensionais de temperatura e teor de umidade são computados utilizando-se as Eqs. (3.12a,b).

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para as soluções dos problemas diretos de transferência de massa e transferência simultânea de calor e massa e inverso de estimativa de parâmetros para a transferência de massa. Sendo dividido em três etapas.

A primeira etapa deste capítulo é dedicada às soluções dos problemas diretos. Inicialmente é realizada a análise das convergências numéricas para os dois potenciais e das distribuições do teor de umidade, segundo a lei de Fick, dentro do produto. Em seguida é feita uma comparação entre os modelos matemáticos obtidos com a lei de Fick, via CITT, e as equações de Luikov, via GITT e por fim é realizada uma análise da influência dos parâmetros adimensionais da formulação de Luikov sobre o processo de secagem de alimentos.

Na segunda etapa apresentam-se os resultados obtidos para o projeto ótimo da experiência para estimativa de parâmetros, por meio de uma análise de sensibilidade aos parâmetros do modelo. São estudados os efeitos da temperatura e velocidade do ar de secagem. Para tanto, utiliza-se aqui a formulação do problema de transferência de massa

O capítulo é finalizado com a solução do problema inverso utilizando-se o método de Levenberg-Marquardt com medidas simuladas. Nesta etapa o problema inverso é resolvido para a transferência de massa, tomando-se apenas medidas do teor de umidade.

4.1. – PROBLEMA DIRETO

O problema de secagem de alimentos proposto foi resolvido aqui, para efeito de comparação, por dois modelos matemáticos, um associado à transferência de massa via CITT e o outro aplicado à transferência simultânea de calor e massa via GITT.

Depois de obtidos os dois sistemas infinitos de equações diferenciais ordinárias, desenvolveram-se dois códigos computacionais em linguagem de programação Fortran 90/95. O sistema diferencial resultante da GITT foi resolvido utilizando a rotina DIVPAG da biblioteca científica do IMSL, com controle de erro relativo prescrito de 10^{-8} .

No presente tópico foram estudados três casos, fazendo-se variar as condições experimentais do processo. Tais casos podem ser vistos na Tab. (4.1), os quais foram obtidos da referência KARIM e HAWLADER (2005) que realizaram a secagem de bananas em um secador solar do tipo cabine.

Tabela 4.1: Propriedades do ar de secagem e da banana.

Propriedades	Caso 1	Caso 2	Caso 3
L (m)	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$
ρ (kg/m ³)	980	980	980
h_c (W/m ² K)	31,45	30,86	36,51
h_m (kg/m ² s ^o M)	$4,97 \times 10^{-7}$	$6,72 \times 10^{-7}$	$8,59 \times 10^{-7}$
k (w/m K)	0,5424	0,5424	0,5424
K_m (kg/m s ^o M)	$4,73 \times 10^{-10}$	$6,55 \times 10^{-10}$	$7,08 \times 10^{-10}$
c (J/kg K)	3350	3350	3350
c_m (kg/kg °M)	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$
λ (J/Kg)	$2,3830 \times 10^6$	$2,3586 \times 10^6$	$2,3586 \times 10^6$
T_0 (°C)	24	24	24
T_{ar} (°C)	50	60	60
v_{ar} (m/s)	0,50	0,50	0,70
u_0 (kg/kg seco)	4	4	4
u^* (kg/kg seco)	0,22	0,20	0,20
D_{ef} (m ² /s)	$1,61 \times 10^{-10}$	$2,23 \times 10^{-10}$	$2,41 \times 10^{-10}$
δ (kg/kg °C)	0,015	0,015	0,015
Bi_q	0,116	0,114	0,135
Bi_m	2,10	2,05	2,43
Lu	0,0010	0,0013	0,0015
Pn	0,103	0,142	0,142
ko	103,42	74,32	74,32
ε	0,3	0,3	0,3

Os parâmetros adimensionais dos Casos 1, 2 e 3 representam as propriedades físicas da banana, modificando-se a temperatura e velocidade do ar ambiente, os coeficientes de transferência de calor e de massa na fronteira, como pode ser visto na Tab. (4.1).

Nota-se na Tab. (4.1) que para todos os casos analisados considerou-se a espessura do produto como sendo $2,0 \times 10^{-3}$ m e que os mesmos envolvem coeficientes de transferência de calor e de massa na fronteira ($X = 1$) da ordem daqueles de convecção forçada com o ar externo aquecido, em comparação à temperatura inicial do produto.

Uma das maiores dificuldades na modelagem da secagem de alimentos, segundo as equações de Luikov, foi encontrar na literatura os parâmetros de transferência de massa, tais como o coeficiente de transferência de massa (h_m : kg/m² s^{°M}), a condutividade mássica (k_m : kg/m s^{°M}), a capacidade mássica (c_m : kg/kg °M), o coeficiente termogradiante (δ : kg/kg°C) e o critério de mudança de fase (ε).

Segundo IRUDAYARAJ e WU (1999), que estudaram a transferência de calor e massa em um sistema alimentar baseado em amido de milho, o valor do coeficiente termogradiante (δ) varia de 0,01 kg/kg°C a 0,02 kg/kg°C para produtos alimentícios. Assim, um valor médio de 0,015 kg/kg°C foi usado para os casos apresentados na Tab. (4.1). Considerou-se $c_m = 3,0 \times 10^{-3}$ kg/kg °M tendo como base o mesmo trabalho realizado por IRUDAYARAJ e WU (1999). Os valores de h_m e k_m foram encontrados usando as correlações matemáticas encontradas em LUIKOV (1966), como apresentado na seção 3.1.3.

4.1.1 – Análise de Convergência

A solução do sistema de equações diferenciais através da Técnica da Transformada Integral implica no truncamento de uma série infinita em um número finito de termos, de onde surge a necessidade da observação dos potenciais calculados nos instantes iniciais para efeito de análise de convergência dos resultados obtidos.

Inicialmente, os sistemas foram truncados e uma análise de convergência foi realizada para todos os casos estudados, mas apresenta-se aqui a análise apenas para o Caso 1. Na análise, avaliou-se o número de termos necessários para que se obter a convergência dos resultados até o quinto (5º) dígito significativo para diferentes tempos (t

= 0,05h, $t = 0,1h$, $t = 0,15h$, $t = 0,20h$ e $t = 0,25h$) e para crescentes ordens de truncamento nas 6 posições estudadas ($X = 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$).

Na Tabela (4.2) são apresentadas as distribuições dimensionais do teor de umidade ao longo do meio, referente à transferência de massa, via CITT. Os resultados para a transferência simultânea de calor e massa, obtidos pela GITT, podem ser vistos nas Tabs. (4.3) e (4.4), para as distribuições do teor de umidade e temperatura, respectivamente. Verificou-se uma rápida convergência dos resultados, onde o tempo máximo necessário para cálculo, referente à GITT, foi de 628 s (tempo de CPU).

A comparação das Tabs. (4.2) com (4.3) revela que a convergência das expansões é bastante rápida mesmo para o menor valor de tempo ($t = 0,05h$). O teor de umidade dimensionalizado está essencialmente convergido, tanto pela solução via CITT quanto pela via GITT, para $N \leq 20$.

Para um maior valor de tempo, $t = 0,25h$, pode-se perceber que a convergência é ainda mais rápida, onde $N = 15$ é mais que suficiente para se obter o teor de umidade com os cinco (5) dígitos de precisão totalmente convergidos. Pela solução via GITT, a temperatura dimensionalizada requer entre 70 a 80 termos, no menor valor de tempo. Para maiores valores de tempo, a temperatura está totalmente convergida com $N = 60$. Nitidamente verifica-se que o número de termos da série decresce com o aumento do tempo, conseqüentemente, se a análise for realizada em instantes posteriores, menos termos serão necessários.

Após a análise de convergência, o sistema foi truncado com 30 termos, para a solução via CITT, e com 80 termos, para a solução via GITT, na série e a partir daí, realizou-se as simulações para o estudo do processo de secagem e comparação com resultados disponíveis na literatura.

Tabela 4.3: Análise de convergência do teor de umidade calculado pela GITT, com os valores do Caso 1 ($Bi_q = 0,116$, $Bi_m = 2,10$, $Lu = 0,0010$, $Pn = 0,103$, $Ko = 103,42$ e $\varepsilon = 0,3$).

t = 0,05 h						
Teor de umidade (kg H ₂ O/kg sólido seco)						
X/N	5	10	15	20	25	30
0,0	4,00798	3,99985	3,99987	3,99987	3,99987	3,99987
0,2	3,99152	3,99985	3,99987	3,99987	3,99987	3,99987
0,4	4,00908	3,99985	3,99987	3,99987	3,99987	3,99987
0,6	3,98864	3,99969	3,99970	3,99970	3,99970	3,99970
0,8	3,98203	3,96791	3,96793	3,96793	3,96793	3,96793
1,0	3,33796	3,35369	3,35371	3,35371	3,35371	3,35371
t = 0,1 h						
Teor de umidade (kg H ₂ O/kg sólido seco)						
X/N	5	10	15	20	25	20
0,0	4,00112	3,99983	3,99983	3,99983	3,99983	3,99983
0,2	3,99852	3,99983	3,99983	3,99983	3,99983	3,99983
0,4	4,00107	3,99967	3,99967	3,99967	3,99967	3,99967
0,6	3,98963	3,99115	3,99115	3,99115	3,99115	3,99115
0,8	3,85617	3,85452	3,85452	3,85452	3,85452	3,85452
1,0	3,10957	3,11123	3,11122	3,11122	3,11122	3,11122
t = 0,15 h						
Teor de umidade (kg H ₂ O/kg sólido seco)						
X/N	5	10	15	20	25	20
0,0	4,00008	3,99984	3,99984	3,99984	3,99984	3,99984
0,2	3,99955	3,99979	3,99979	3,99979	3,99979	3,99979
0,4	3,99828	3,99803	3,99803	3,99803	3,99803	3,99803
0,6	3,96855	3,96880	3,96880	3,96880	3,96880	3,96880
0,8	3,74962	3,74935	3,74935	3,74935	3,74935	3,74935
1,0	2,96593	2,96617	2,96616	2,96616	2,96616	2,96616
t = 0,20 h						
Teor de umidade (kg H ₂ O/kg sólido seco)						
X/N	5	10	15	20	25	20
0,0	3,99985	3,99982	3,99982	3,99982	3,99982	3,99982
0,2	3,99934	3,99937	3,99937	3,99937	3,99937	3,99937
0,4	3,99212	3,99209	3,99209	3,99209	3,99209	3,99209
0,6	3,93038	3,93040	3,93040	3,93040	3,93040	3,93040
0,8	3,63799	3,63795	3,63795	3,63795	3,63795	3,63795
1,0	2,83756	2,83756	2,83756	2,83755	2,83755	2,83755
t = 0,25 h						
Teor de umidade (kg H ₂ O/kg sólido seco)						
X/N	5	10	15	20	25	20
0,0	3,99966	3,99966	3,99966	3,99966	3,99966	3,99966
0,2	3,99814	3,99814	3,99814	3,99814	3,99814	3,99814
0,4	3,98254	3,98254	3,98254	3,98254	3,98254	3,98254
0,6	3,89026	3,89025	3,89025	3,89025	3,89025	3,89025
0,8	3,54950	3,54950	3,54950	3,54950	3,54949	3,54949
1,0	2,74529	2,74526	2,74526	2,74526	2,74526	2,74526

Tabela 4.4: Análise de convergência da temperatura calculada pela GITT, com os valores do Caso 1 ($Bi_q = 0,116$, $Bi_m = 2,10$, $Lu = 0,0010$, $Pn = 0,103$, $Ko = 103,42$ e $\varepsilon = 0,3$).

t = 0,05 h						
Temperatura (°C)						
X/N	10	20	40	60	70	80
0,0	15,12225	15,08255	15,07829	15,07781	15,07771	15,07771
0,2	15,10956	15,06999	15,06563	15,06520	15,06511	15,06511
0,4	15,07159	15,03216	15,02782	15,02741	15,02731	15,02731
0,6	15,00850	14,96960	14,96535	14,96496	14,96494	14,96494
0,8	14,92784	14,88952	14,88530	14,88495	14,88482	14,88482
1,0	14,94737	14,90975	14,90562	14,90525	14,90512	14,90512
t = 0,1 h						
Temperatura (°C)						
X/N	10	20	40	60	70	80
0,0	12,87682	12,86054	12,85883	12,85861	12,85861	12,85861
0,2	12,87655	12,85982	12,85821	12,85786	12,85786	12,85786
0,4	12,87371	12,85763	12,85587	12,85562	12,85562	12,85562
0,6	12,87160	12,85570	12,85409	12,85384	12,85384	12,85384
0,8	12,89560	12,87990	12,87820	12,87806	12,87806	12,87806
1,0	13,04768	13,03224	13,03057	13,03043	13,03032	13,03032
t = 0,15 h						
Temperatura (°C)						
X/N	10	20	40	60	70	80
0,0	13,27066	13,26324	13,26240	13,26231	13,26231	13,26231
0,2	13,27310	13,26572	13,26497	13,26482	13,26482	13,26482
0,4	13,28081	13,27348	13,27265	13,27252	13,27252	13,27252
0,6	13,29924	13,29208	13,29126	13,29110	13,29110	13,29110
0,8	13,36320	13,35607	13,35532	13,35521	13,35521	13,35521
1,0	13,55227	13,54520	13,54456	13,54447	13,54447	13,54447
t = 0,20 h						
Temperatura (°C)						
X/N	10	20	40	60	70	80
0,0	14,49126	14,48825	14,48792	14,48782	14,48782	14,48782
0,2	14,49478	14,49174	14,49133	14,49133	14,49133	14,49133
0,4	14,50635	14,50337	14,50306	14,50306	14,50306	14,50306
0,6	14,53631	14,53348	14,53304	14,53304	14,53304	14,53304
0,8	14,62210	14,61936	14,61891	14,61891	14,61891	14,61891
1,0	14,82293	14,82010	14,81981	14,81981	14,81981	14,81981
t = 0,25 h						
Temperatura (°C)						
X/N	10	20	40	60	70	80
0,0	15,67962	15,67825	15,67814	15,67814	15,67814	15,67814
0,2	15,68326	15,68194	15,68182	15,68172	15,68172	15,68172
0,4	15,69662	15,69525	15,69511	15,69511	15,69511	15,69511
0,6	15,73294	15,73163	15,73142	15,73142	15,73142	15,73142
0,8	15,82880	15,82751	15,82735	15,82735	15,82735	15,82735
1,0	16,03019	16,02877	16,02862	16,02862	16,02862	16,02862

4.1.2 – Transferência de Massa – Lei de Fick

O comportamento dinâmico do processo de secagem de alimentos pode ser acompanhado através dos gráficos em 3D apresentados nas Figs. (4.1a), (4.1b) e (4.1c), as quais representam a distribuição do teor de umidade dentro da amostra, obtidas pela lei de Fick. Neste caso, foram considerados os três casos apresentados na Tab. (4.1).

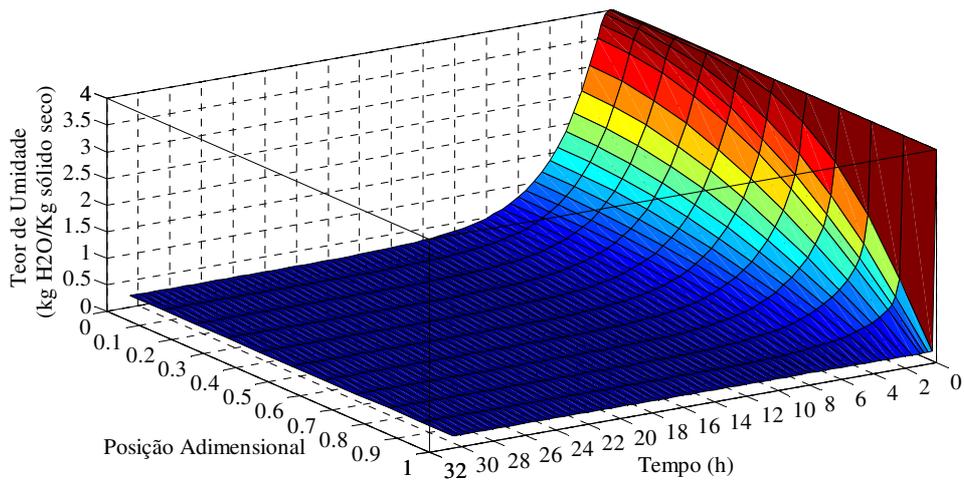
As curvas mostram que o teor de umidade no início do processo de secagem é exponencialmente reduzido até alcançar o teor de umidade de equilíbrio. Tal comportamento demonstra a inexistência do período constante de secagem, assim, o processo de secagem da banana acontece apenas no período decrescente.

Ao se relacionar os tempos de secagem com a temperatura do ar observa-se que, quando se utilizou temperatura de secagem de 60°C, o tempo necessário para alcançar um teor de umidade final de 0,20 kg H₂O/kg sólido seco diminuiu 18% em relação com aquele obtido a 40°C para um teor de umidade final de 0,22 kg H₂O/kg sólido seco. Este comportamento pode ser explicado pelo fato que o teor de umidade de equilíbrio varia de forma inversa com a temperatura do ar quando a umidade relativa do ar de secagem é constante. Isto acontece devido ao acréscimo da temperatura proporcionar um aumento da pressão de vapor no ar e no alimento, sendo muito maior neste último, pois sua quantidade de água é muitas vezes superior à do ar. Como consequência haverá uma migração de umidade do alimento para o ar.

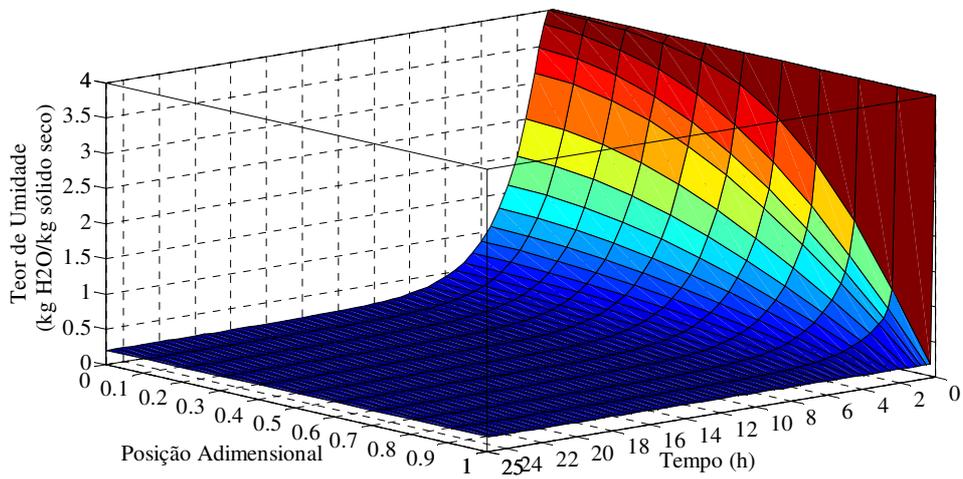
Quando se relaciona os tempos de secagem com a velocidade verifica-se que, para a velocidade de secagem de 0,7 m/s o tempo necessário diminuiu em 19% em relação com aquele obtido a 0,5 m/s para alcançar o teor de umidade final de 0,20 kg H₂O/kg sólido seco.

Ao se relacionar tanto a temperatura quanto a velocidade com os tempos de secagem percebe-se que, no Caso 3 o tempo necessário diminuiu em 33% para alcançar praticamente os mesmos valores do teor de umidade final.

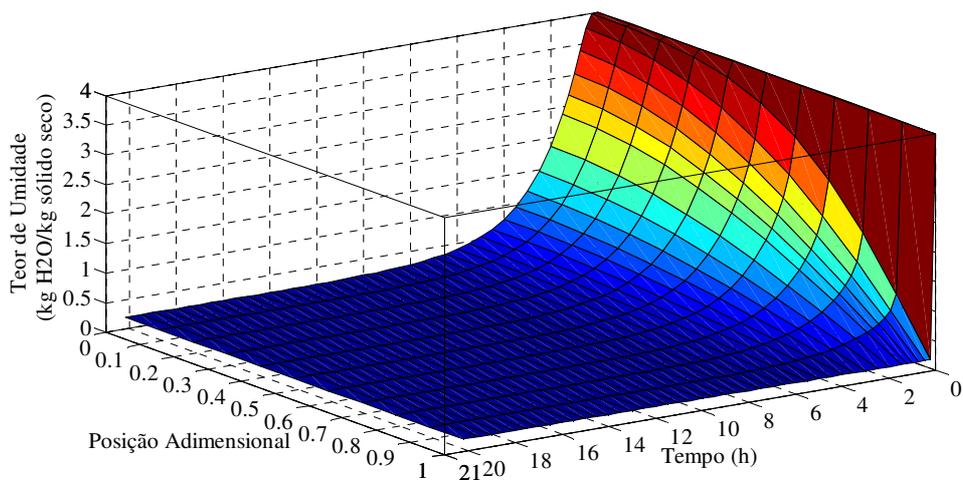
O aumento da força motriz da migração da umidade, através do aumento da temperatura e/ou da velocidade do fluxo de ar, geralmente aumenta a velocidade de secagem, devido ao aumento nas diferenças de concentrações entre as camadas internas e externas.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: Visualização em 3D da distribuição do teor de umidade no interior da amostra em cada caso: (a) Caso 1, (b) Caso 2, (c) Caso 3.

Os gráficos indicam que o teor de umidade de equilíbrio, em $X = 1$, foi alcançado quase que instantaneamente logo no início da secagem, devido à condição de teor de umidade de equilíbrio imposta, e para posições mais próximas do centro, o teor de umidade varia mais lentamente. Como no início do processo de secagem uma parte significativa da água está livre na superfície do produto, ela é, portanto, mais facilmente removida nas posições próximas à superfície. Para outros tempos de secagem, as diferenças do teor de umidade em diferentes posições aumentam devido à interação da água com os grupos polares das moléculas constituintes, aumentando desta forma a resistência ao transporte de massa

4.1.3 – Comparação do Modelo de Fick e do Modelo de Luikov

A análise agora é dirigida à comparação dos dois modelos matemáticos e, para tanto, as curvas de distribuição do teor de umidade são representadas nas Figs. (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), para as posições no centro ($X = 0,0$) e na superfície ($X = 1,0$) do alimento.

Ao analisar o comportamento dos perfis do teor de umidade, observa-se que existe uma diferença entre as curvas obtidas pelo modelo difusional e o modelo de Luikov. Uma primeira justificativa para as discrepâncias encontradas entre os dois modelos pode ser atribuída ao fato que a lei de Fick assume que a migração de umidade no produto é devida à apenas um gradiente de umidade. Enquanto que as equações de Luikov levam em consideração a transferência simultânea de calor e massa assumindo que o movimento de umidade é conduzido por gradientes de umidade e de temperatura que, pelo efeito termogradiente, oferece resistência à saída do fluxo de umidade.

Ao comparar as Eqs. (3.2a), relativa à lei de Fick, e (3.8b), relativa às equações de Luikov, torna-se evidente que o modelo de difusão de Fick pode ser re-arranjado como uma forma simplificada do modelo de Luikov, quando o efeito do gradiente de temperatura é desprezível ($\partial T / \partial x$). Esta consideração pode ser feita quando o gradiente de temperatura for significativamente menor do que o gradiente do teor de umidade ou quando o valor do coeficiente termogradiente (δ) for muito menor do que a difusividade de massa.

Deve-se ressaltar que as curvas apresentadas nas Figs. (4.2) a (4.5) são características do período decrescente de secagem, no qual a quantidade de água na superfície do alimento começa a ser deficiente. Neste período a vaporização da água, ainda presente na superfície, gerará um gradiente de umidade, dando início à movimentação da

água do interior até a superfície e uma quantidade significativa de calor é conduzida da superfície para o centro do alimento. Desta forma, gradientes de temperatura na zona seca podem não ser desprezíveis, e o seu efeito sobre a secagem deve ser considerado. Além disso, para o Caso 1 tem-se que o valor da difusividade de massa é $1,61 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ e o coeficiente termogradiante é 0,015.

Em condições de secagem mais severas torna-se importante o conhecimento da temperatura no produto, visto que uma temperatura mais elevada pode fornecer ao produto a possibilidade de alteração de sua cor (acelerando os efeitos de escurecimento), textura e sabor, reduzindo desta forma a sua qualidade. Nestes casos, ocorre uma limitação da lei de Fick e a utilização do modelo de Luikov é mais apropriada.

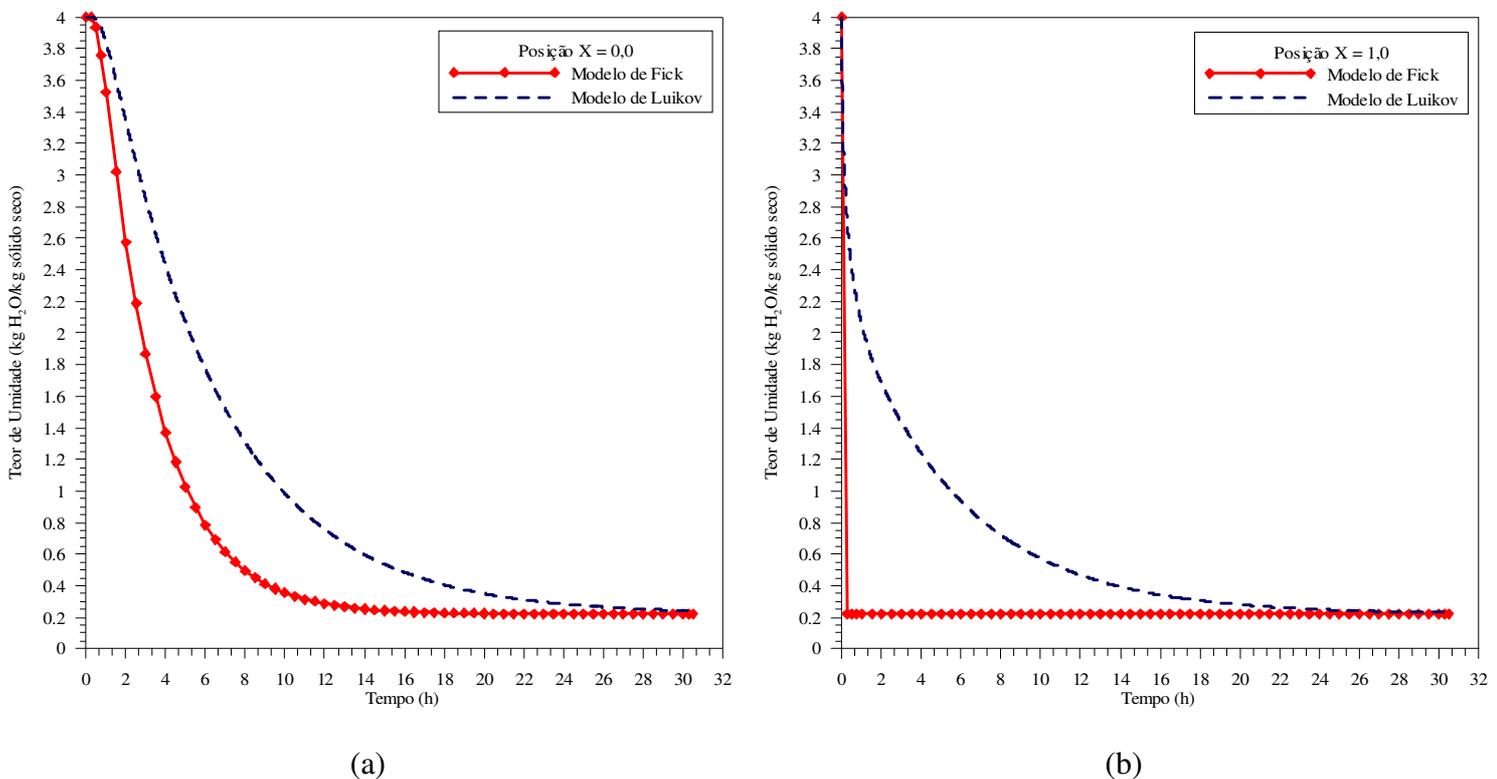
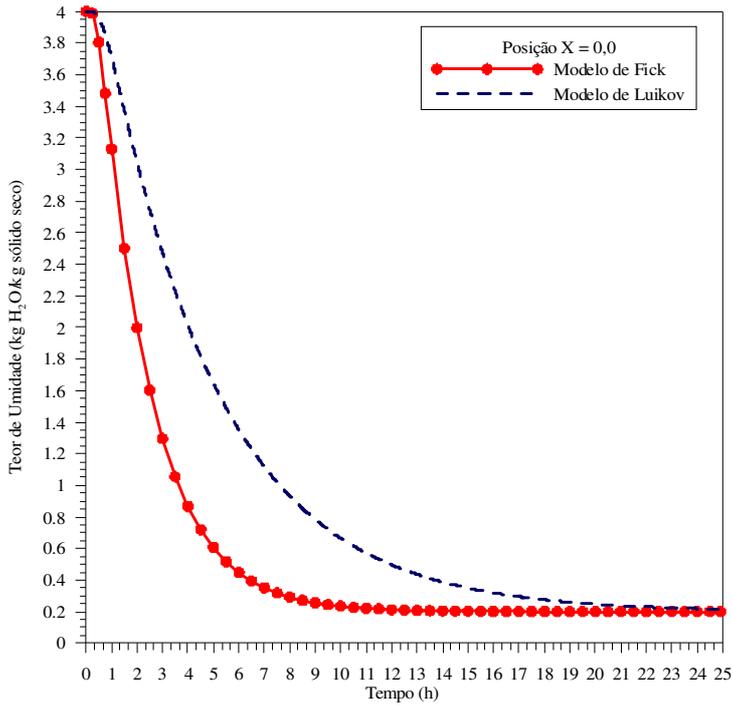
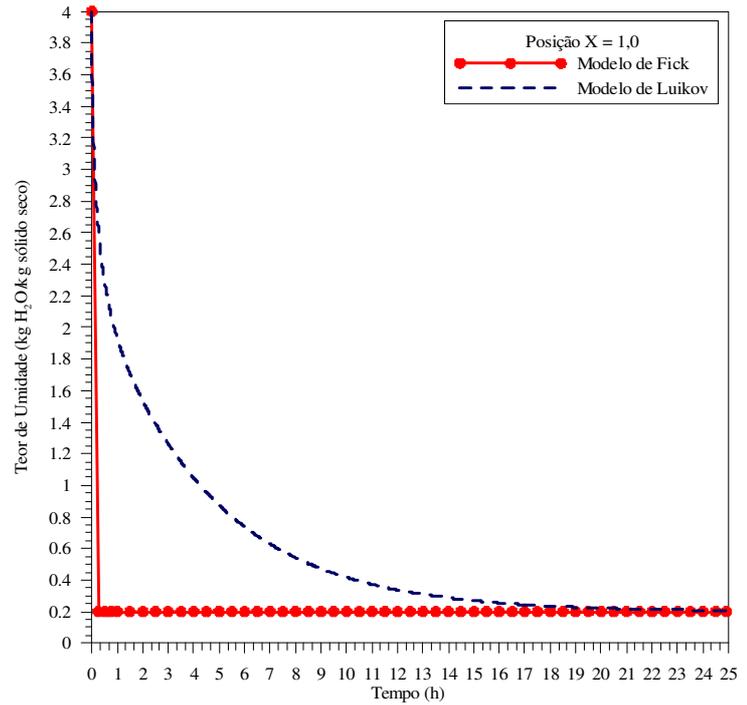


Figura 4.2: Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 1.

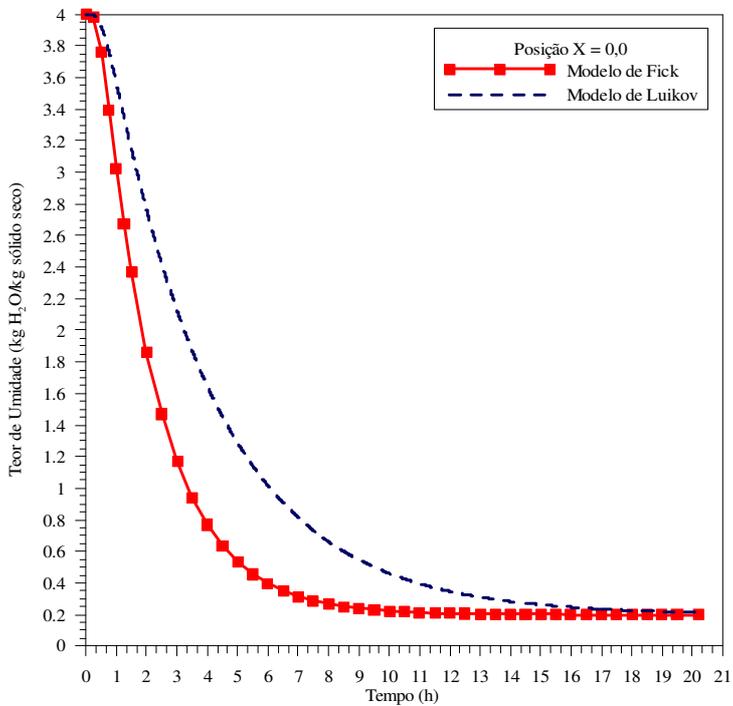


(a)

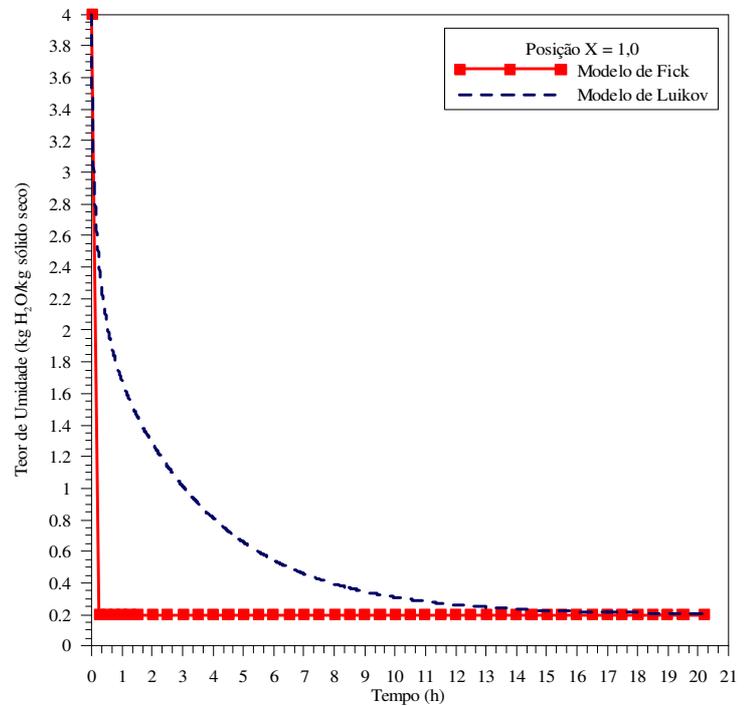


(b)

Figura 4.3: Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 2.



(a)



(b)

Figura 4.4: Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 3.

Outra possível justificativa para as discrepâncias encontradas entre os dois modelos está relacionada às simplificações assumidas para a formulação do modelo difusional, tais como a condição do teor de umidade de equilíbrio imposta na superfície. Pode-se verificar que, nos três casos estudados, o modelo difusional tendeu a subestimar o teor de umidade. A Fig. (4.2a) mostra que para um tempo de 4 h de secagem, o teor de umidade obtido com o modelo de Fick foi de aproximadamente 1,4 kg H₂O/kg sólido seco, enquanto que com o modelo de Luikov o teor de umidade encontrado foi de 2,6 kg H₂O/kg sólido seco. Tal comportamento acarretou em uma condição de equilíbrio alcançada mais rapidamente pelo modelo difusional, sendo de 14 h de secagem contra 24 h no modelo de Luikov. Isto é muito importante do ponto de vista prático, uma vez que tais resultados podem levar a uma interpretação errada do tempo de secagem para se obter o produto totalmente seco ou com o teor de umidade de equilíbrio estabelecido.

A comparação entre os perfis do teor de umidade obtidos pelos dois modelos é ilustrada na Fig. (4.5). A seguir é apresentada uma simulação particular do Caso 1, que considera os coeficientes de transferência de calor e massa adimensionais infinitos, ou seja, $B_{iq} > 100$ e $B_{im} > 100$, na superfície do produto. Esta consideração proporciona uma análise quando não existe resistência externa à transferência de calor e massa. Contudo, esta situação não representa a realidade de um processo de secagem de alimentos. Este procedimento é equivalente a uma condição de contorno de equilíbrio, para o modelo de Luikov, na superfície da fruta ($X = 1$), similar à apresentada no modelo difusivo.

Analisando a figura vê-se que o comportamento das curvas geradas está em perfeito acordo, proporcionando baixos valores do teor de umidade de equilíbrio nas primeiras horas do processo. De fato, a condição de contorno de equilíbrio prejudica demasiadamente a solução, por não ser uma condição realista principalmente no início do processo. Esta condição de contorno é verdadeira apenas no final do processo, onde o teor de umidade do material na superfície está próximo do teor de umidade de equilíbrio.

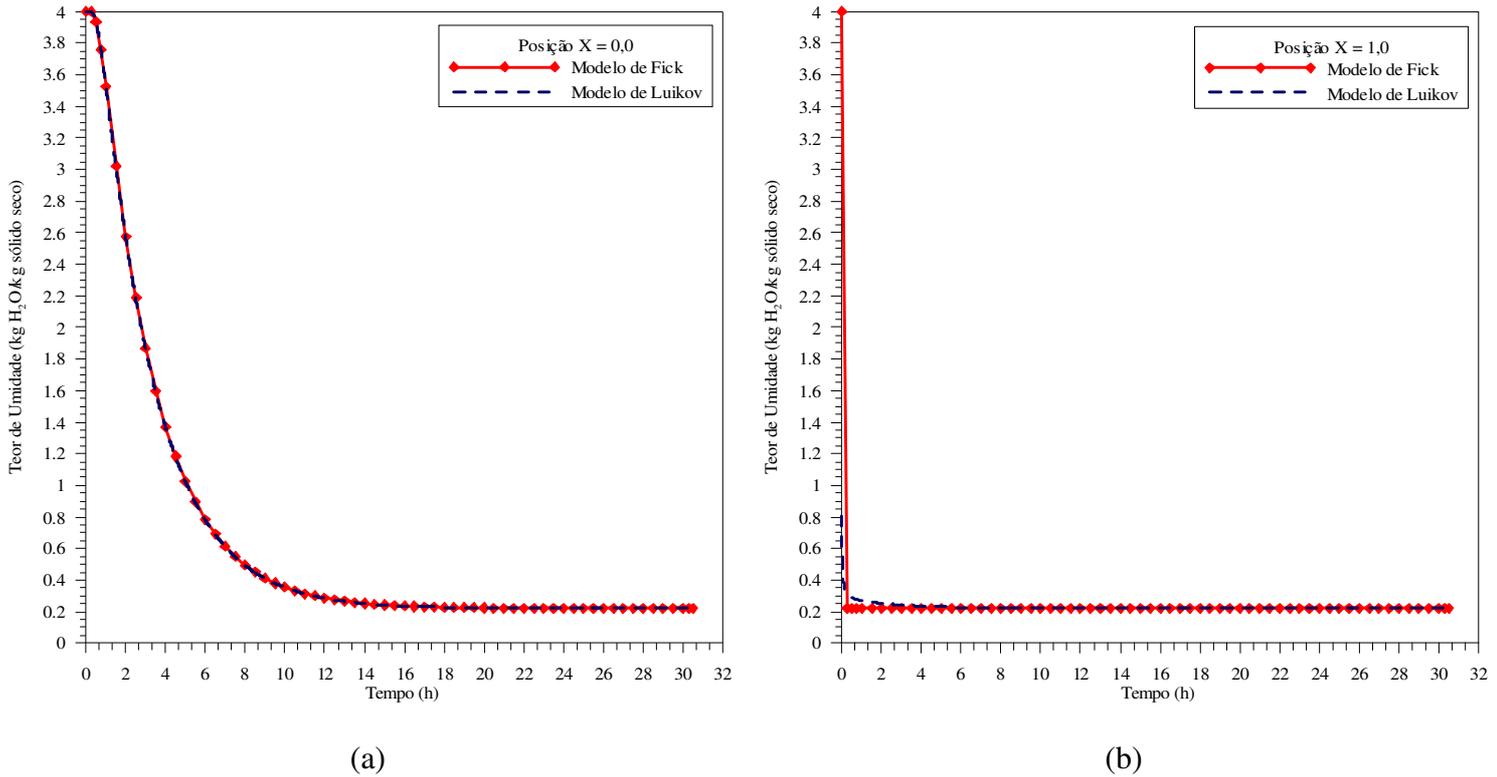


Figura 4.5: Comparação entre as distribuições do teor de umidade com os modelos de Fick e Luikov para o Caso 1, com $B_{iq} > 100$ e $B_{im} > 100$.

É importante notar que o modelo difusivo desenvolvido é relativamente simples, desta forma em certos casos ele pode não ser fisicamente realista. Contudo, o modelo difusivo pode ser utilizado em condições de secagem moderadas, onde os gradientes de temperatura não predominam sobre a transferência de massa.

Assim, pode-se concluir que o modelo de Luikov representa com mais fidelidade o fenômeno físico da secagem de alimentos.

4.1.4 – Transferência Simultânea de Calor e Massa

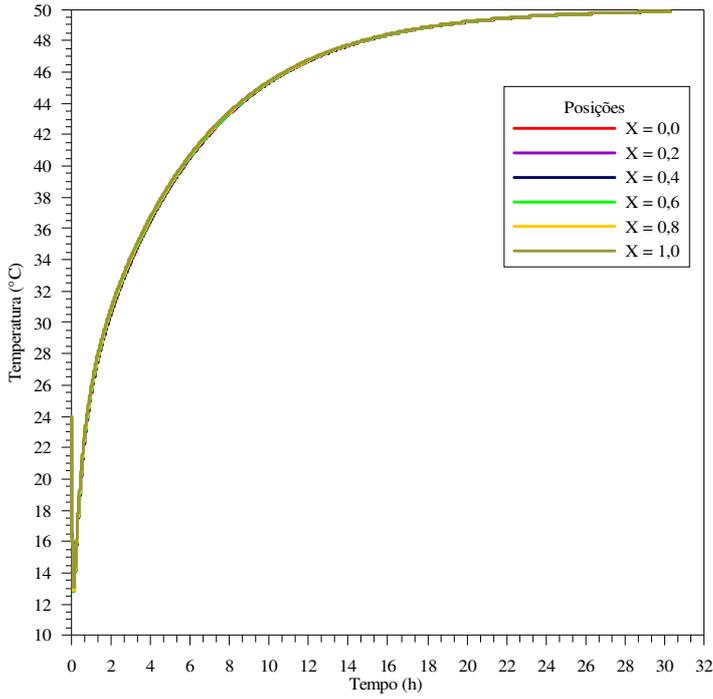
A análise aqui está direcionada ao estudo do comportamento do processo simultâneo de transferência de calor e massa, para cada um dos casos considerados na Tab. (4.1).

As Figs. (4.6) a (4.11) apresentam as variações da temperatura e teor de umidade, para diferentes tempos e posições no interior do produto. A variação da temperatura e teor de umidade na primeira hora do processo de secagem é mostrada nas figuras com o objetivo de uma melhor visualização do fenômeno ocorrido neste intervalo de tempo.

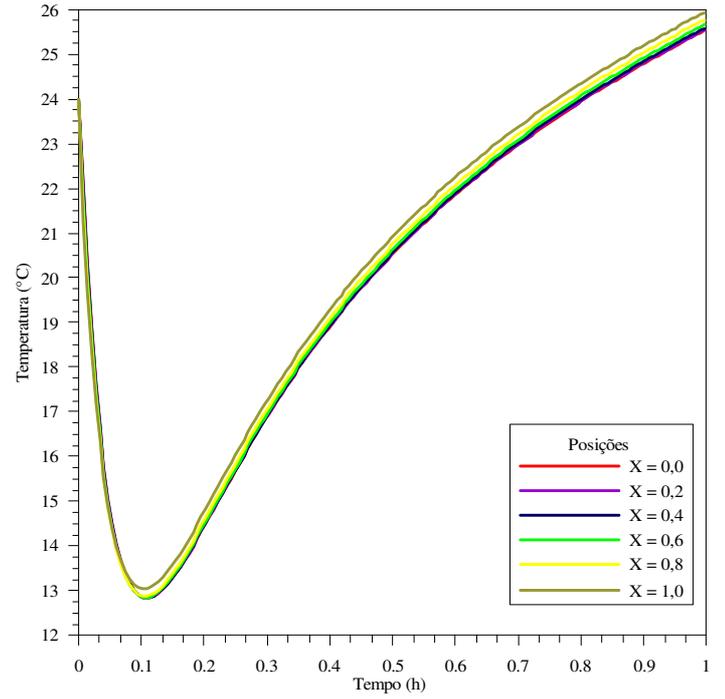
Para interpretar essas curvas, devemos examinar o significado físico das condições de contorno em $X = 1$ que refletem os balanços de calor e massa na interface produto/ar. A partir da Eq. (3.9g), pode-se dizer que o gradiente térmico no produto e na vizinhança do contorno é governado pela importância relativa do fluxo de calor convectivo, bem como pelas perdas de energia devido à transferência de massa por convecção através da interface produto/ar. Por outro lado, o balanço de massa representado pela Eq. (3.9h) indica que o gradiente de umidade nas vizinhanças do contorno é controlado por meio de transferência de massa por convecção através da fronteira, como também pela magnitude relativa do gradiente de temperatura.

Verifica-se que para tempos curtos do processo de secagem existiu um intenso decréscimo do teor de umidade, u , na região próxima à superfície, $X = 1$, devido à intensa troca de massa convectiva que ocorre quando as diferenças de potencial de umidade na fronteira são mais significativas. Isto ocasionou uma queda brusca da temperatura T , atingindo valores abaixo de T_0 . Este efeito decorre do fato que o presente modelo requer um processo de vaporização contínua a coeficientes constantes, e toda a energia conduzida ao alimento, no início do processo, é usada para evaporar a umidade da superfície deste, causando diminuição de sua temperatura. Contudo, este fenômeno nem sempre é observável na secagem de alimentos, devido ao curto espaço de tempo no qual subsiste, onde nos casos estudados foi de aproximadamente 0,1 h de secagem. Passado este instante inicial, parte da energia recebida pela superfície provocou o aumento da temperatura nessa região, iniciando a transferência de calor para o centro do alimento.

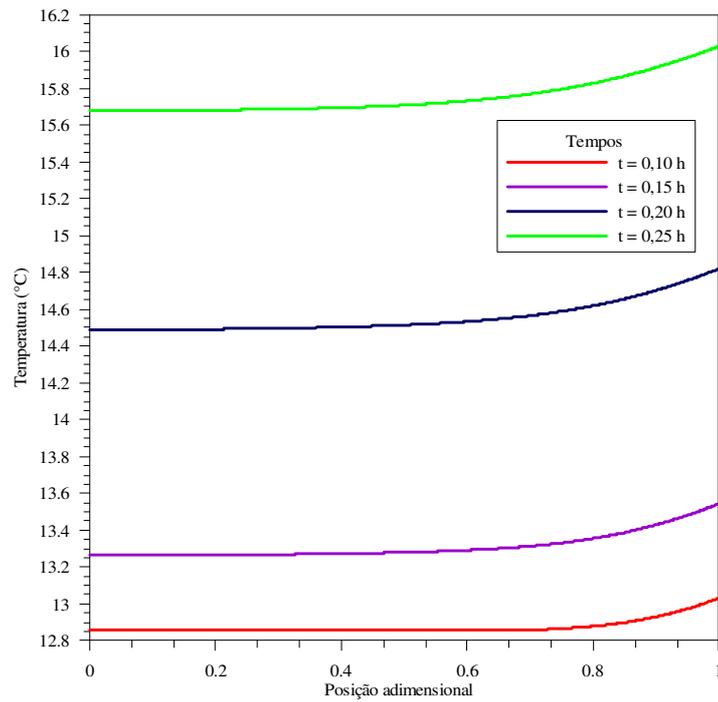
À medida que o processo evoluiu, o pequeno gradiente de temperatura na superfície foi estabelecido e a sua dependência na transferência de massa diminuiu. Portanto, durante os últimos estágios a secagem ocorre principalmente devido à presença do gradiente do teor de umidade. Acentuou-se a secagem das camadas mais internas do alimento e o teor de umidade da amostra, em todas as posições, se aproximou de um estado de equilíbrio.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: Distribuições de temperatura para o Caso 1: (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.

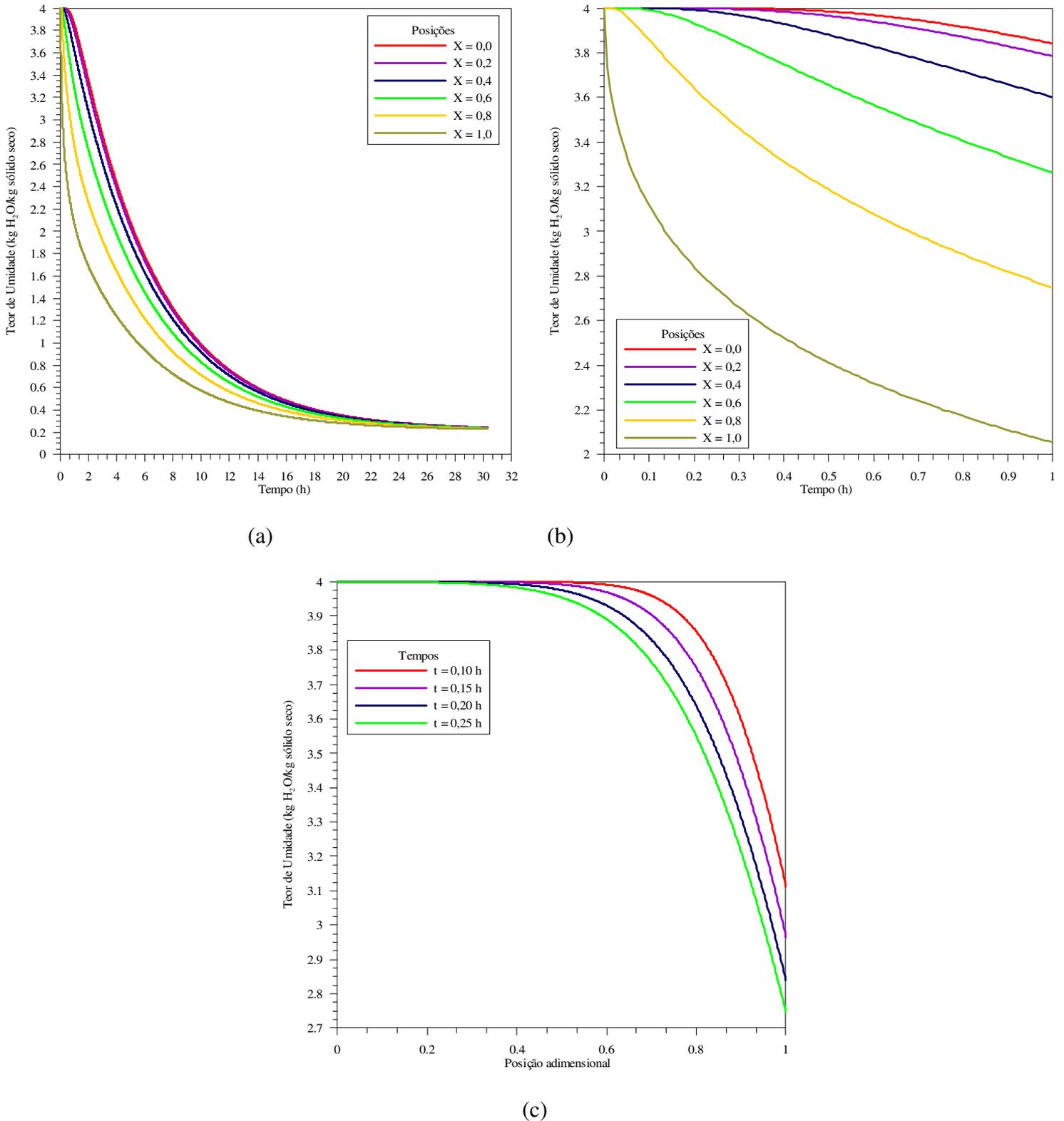
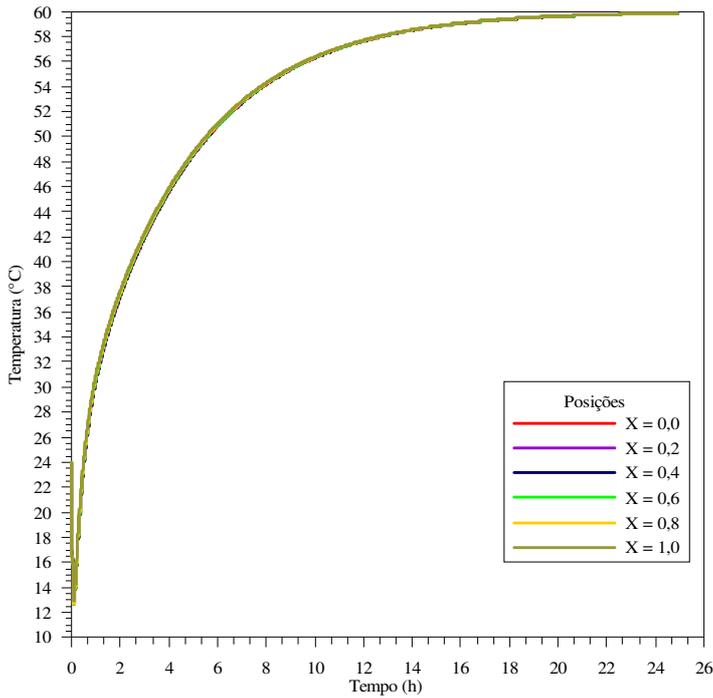
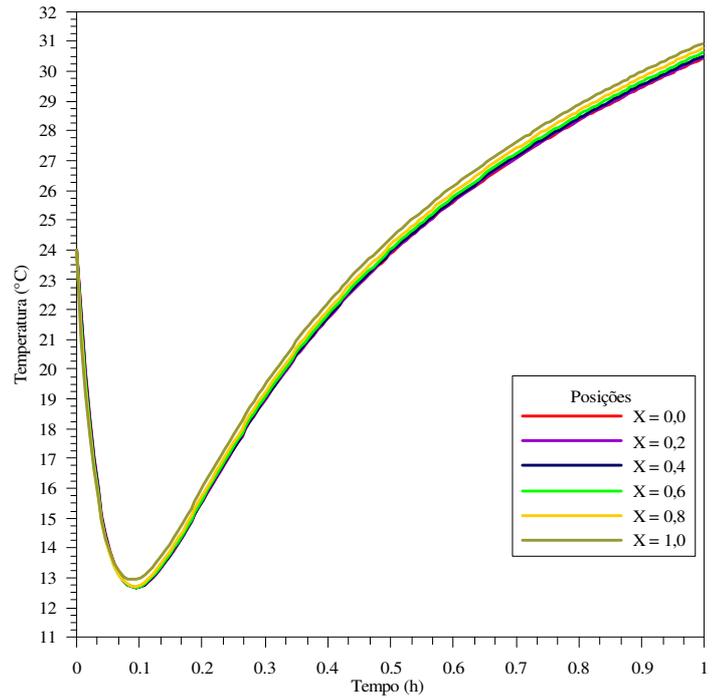


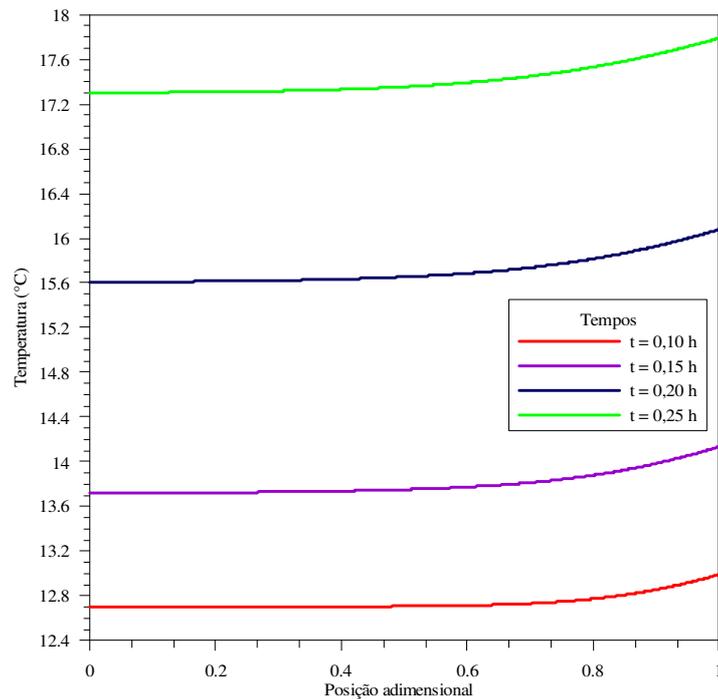
Figura 4.7: Distribuições do teor de umidade para o Caso 1: (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.



(a)

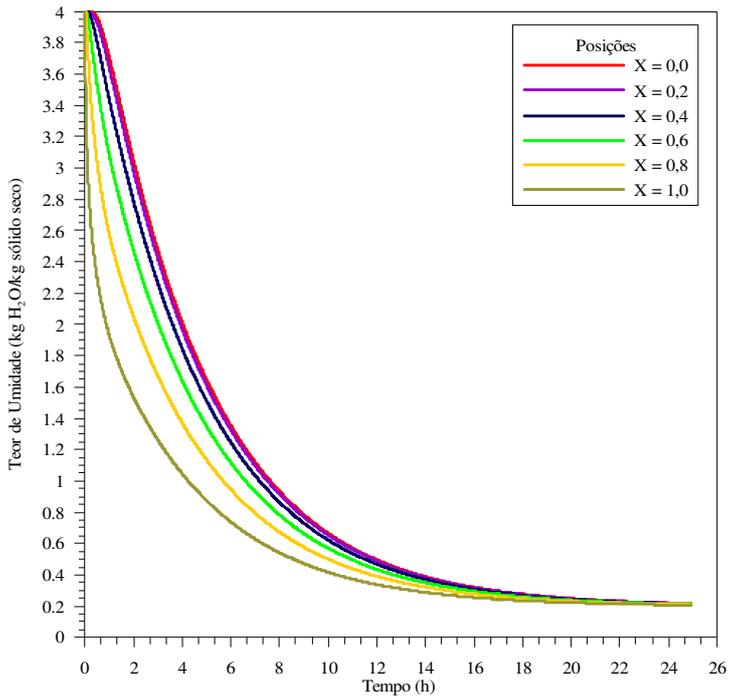


(b)

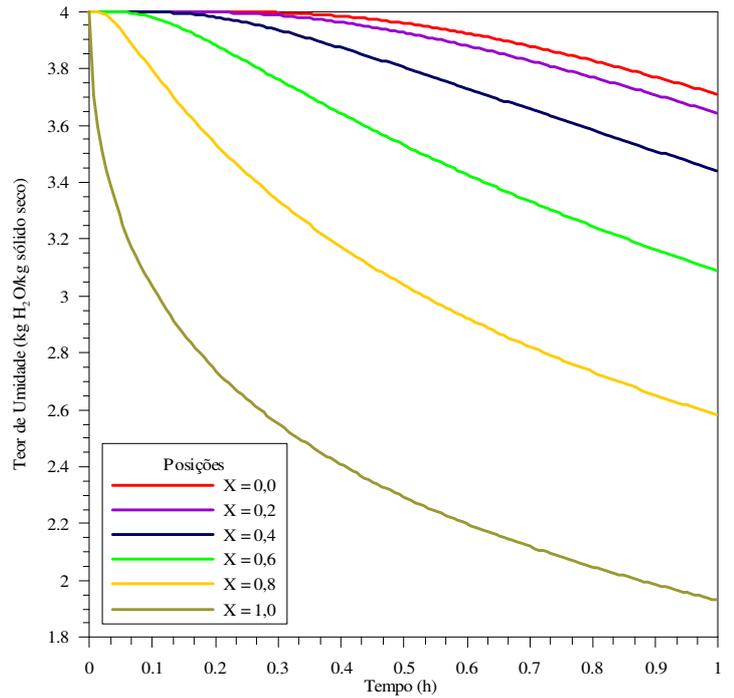


(c)

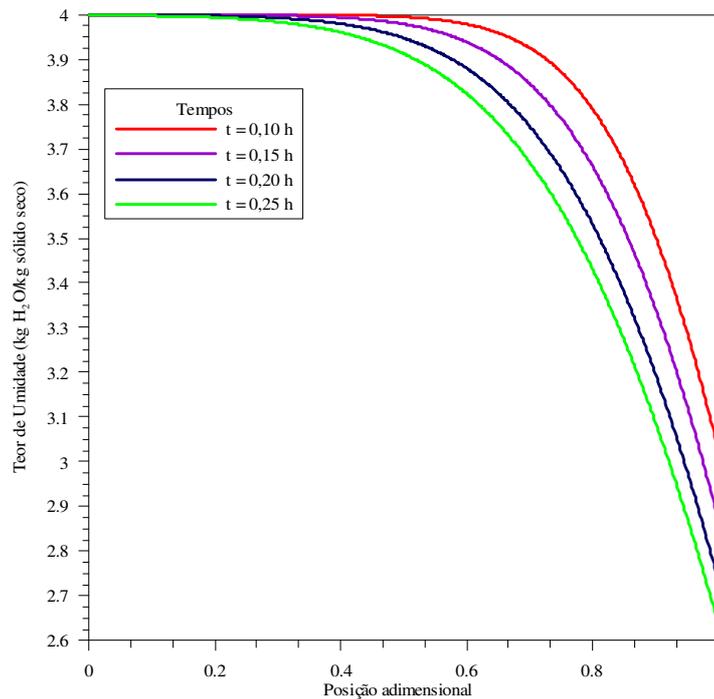
Figura 4.8: Distribuições de temperatura para o Caso 2: (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.



(a)

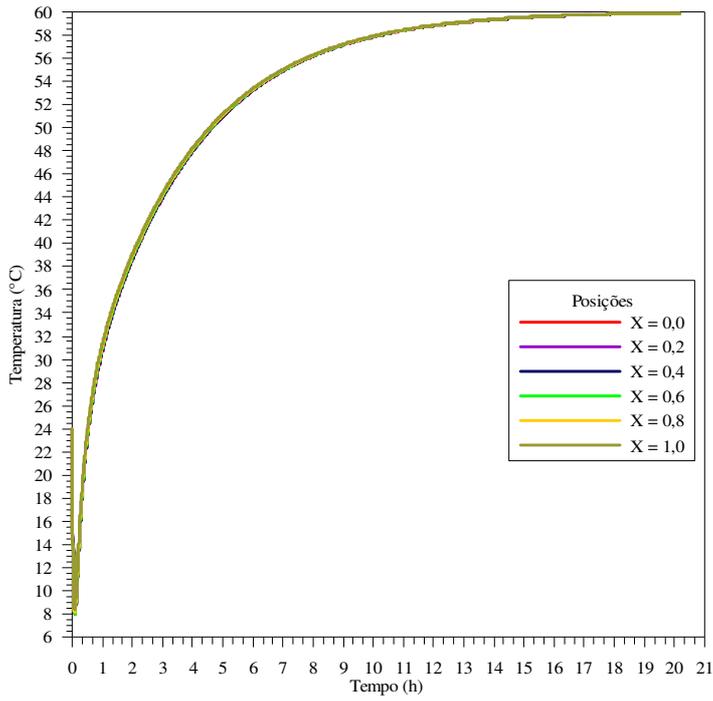


(b)

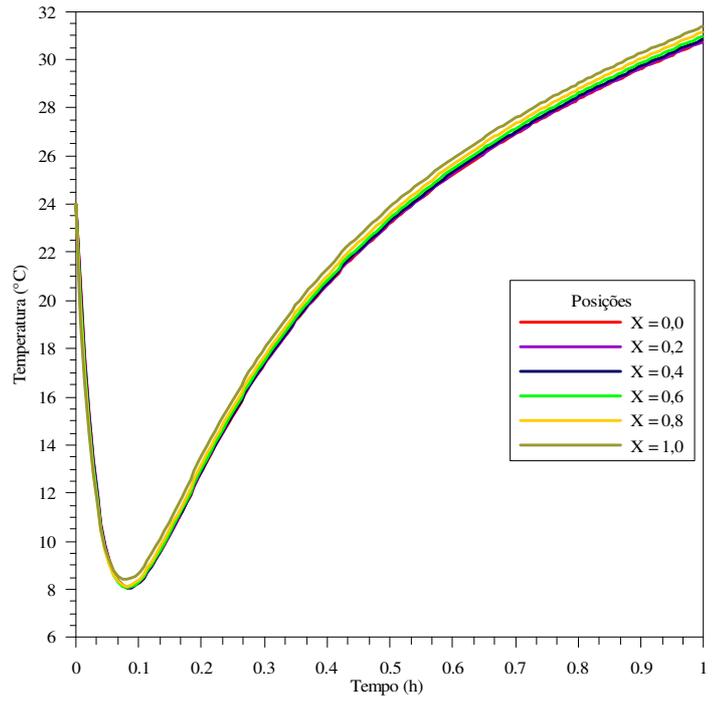


(c)

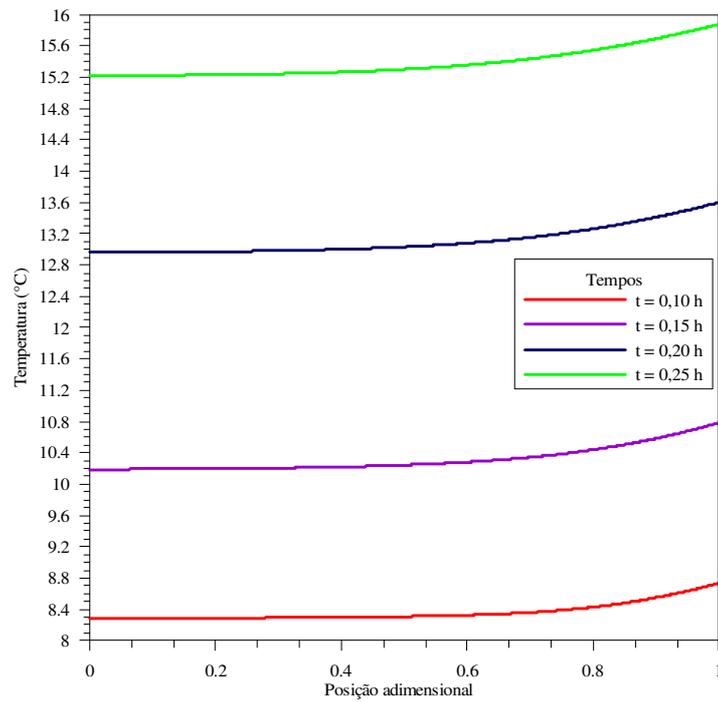
Figura 4.9: Distribui\c{c}\~{o}es do teor de umidade para o Caso 2: (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o dom\~{i}nio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posi\c{c}\~{a}o.



(a)

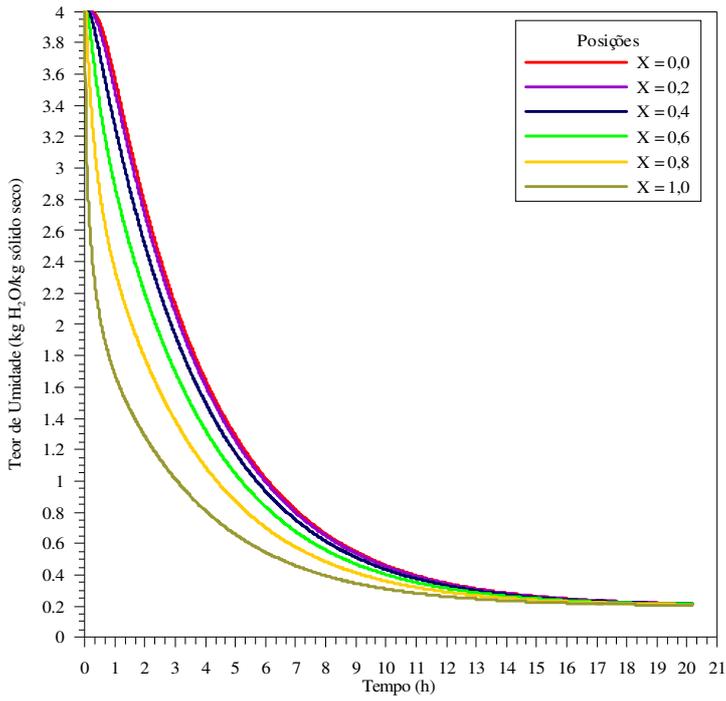


(b)

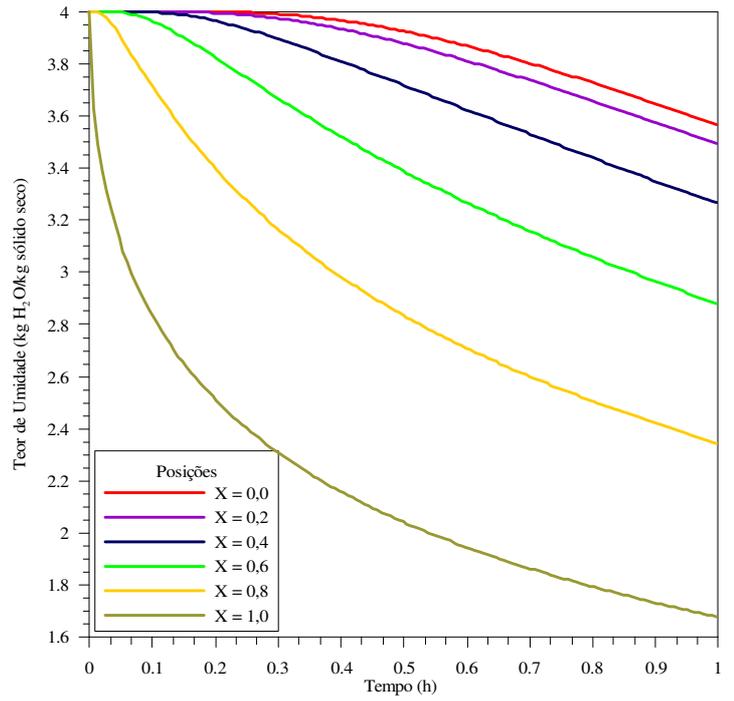


(c)

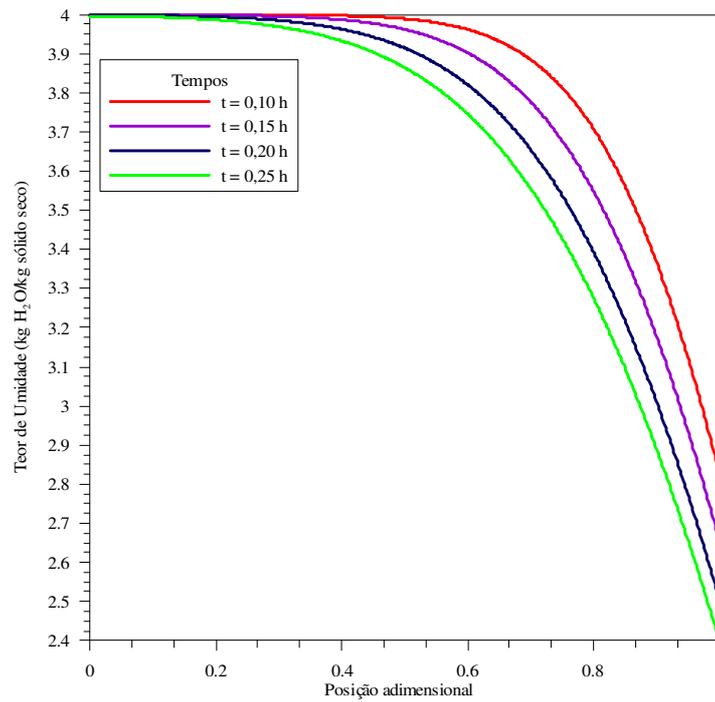
Figura 4.10: Distribuições de temperatura para o Caso 3: (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.11: Distribuições do teor de umidade para o Caso 3: (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.

Observa-se que o gradiente de temperatura no interior do alimento nos diferentes intervalos de tempo manteve-se praticamente inalterado, em todos os casos analisados, sendo um pouco mais significativo na superfície ($X = 1$) do alimento. O fato que a variação interna da temperatura foi pequena significa que o gradiente de temperatura ($\partial T/\partial x$) não teve uma contribuição muito significativa no fluxo de umidade total.

LIMA (1999) comparou os gradientes de temperatura aos gradientes de umidade dentro da banana e verificou que estes últimos foram mais pronunciados. No entanto, para o autor, isto não significou que os efeitos térmicos pudessem ser desprezados durante o processo, principalmente nas cinco primeiras horas de secagem.

4.1.4.1 – Estudo dos Parâmetros Adimensionais das Equações de Luikov

Na presente seção foram estudados outros cinco casos além daqueles apresentados na Tab. (4.1), devido às suas importâncias com relação aos estudos dos parâmetros Bi_q , Bi_m , Lu , Pn e Ko .

Os números de Biot para a transferência convectiva de calor (Bi_q) e massa (Bi_m), na interface entre a superfície do alimento e o ar de secagem, mostram um efeito importante na transferência de calor e massa. Desta forma, é introduzido a seguir os Casos 4 e 5 para se analisar a variação dos potenciais com os números de Bi_m e Bi_q , respectivamente.

CASO 4 ($Bi_q = 0,116$, $Lu = 0,0010$, $Pn = 0,103$, $Ko = 103,42$ e $\varepsilon = 0,3$)

O número de Biot para transferência de massa, Bi_m , é a razão entre a resistência interna à transferência de massa e a resistência externa à transferência de massa. As Figs. (4.12) e (4.13) representam a variação das distribuições de temperatura e teor de umidade, respectivamente, quando se variou Bi_m , mantendo-se os demais parâmetros adimensionais utilizados no Caso 1.

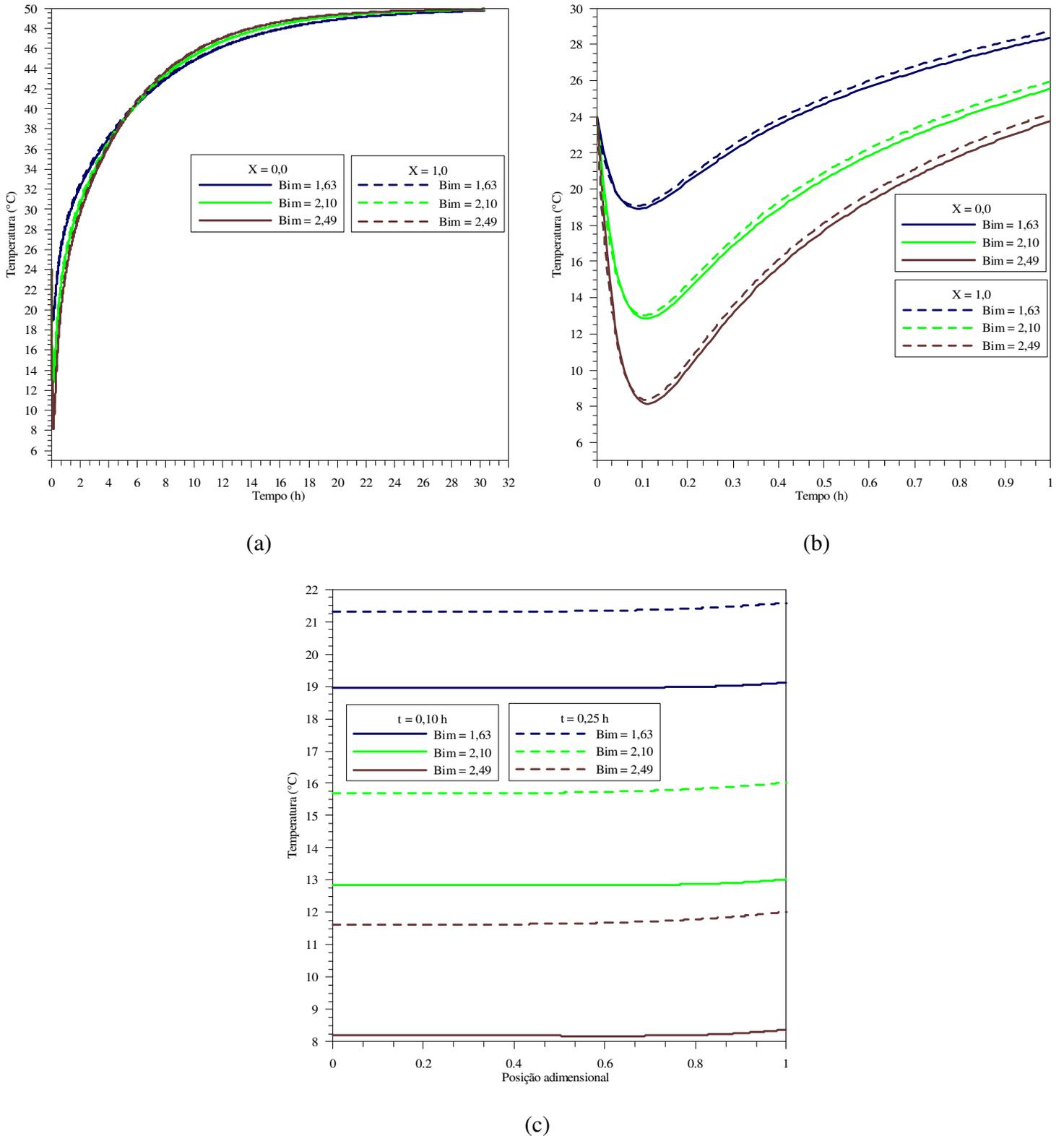
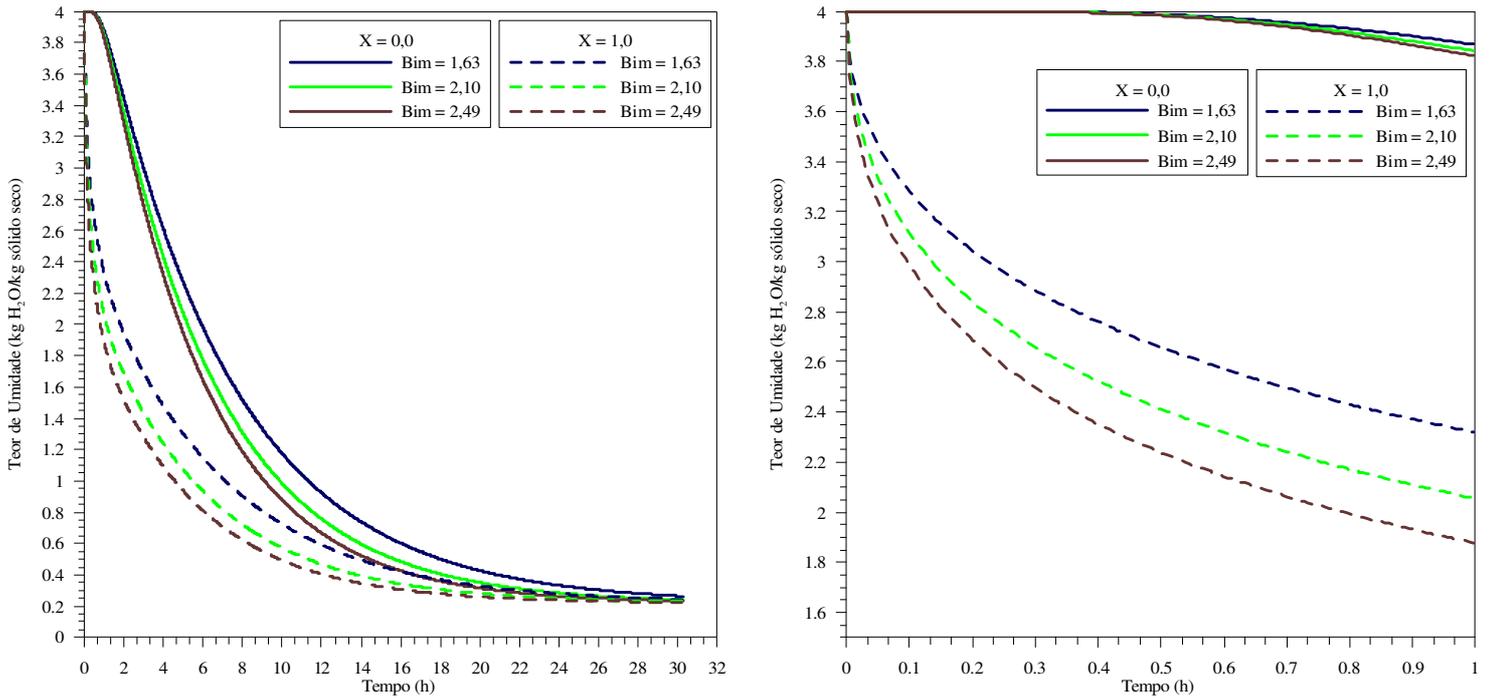
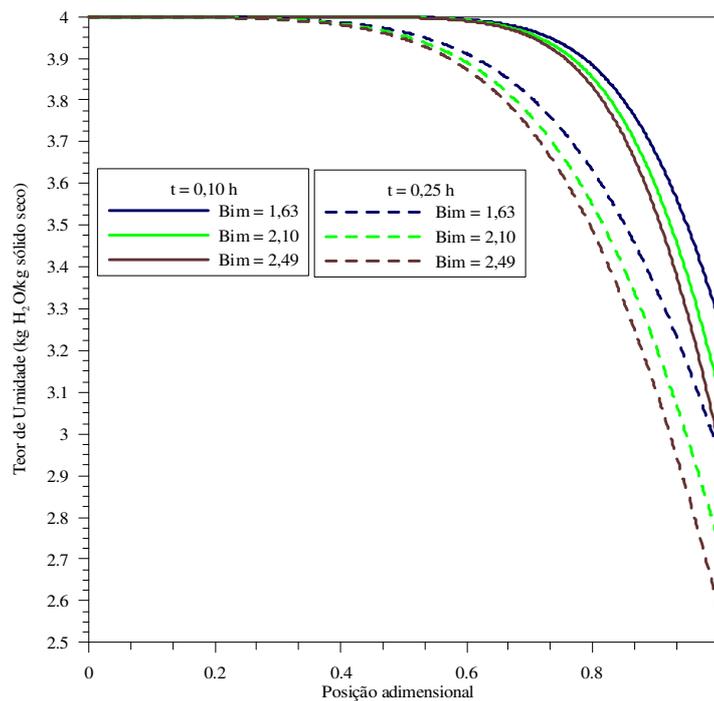


Figura 4.12: Distribuições de temperatura para o Caso 4, variando-se o Bi_m : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.



(a)

(b)



(c)

Figura 4.13: Distribuições do teor de umidade para o Caso 4, variando-se o Bi_m : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.

Percebeu-se, que à medida que Bi_m cresceu, ou seja, que se aumentou a retirada de umidade na fronteira alimento/ar de secagem se conseguiu secar mais rapidamente a níveis de temperatura mais baixos, como esperado. Desta forma, quanto maior Bi_m , menor será a influência da resistência externa à transferência de massa. Assim, não há interesse na secagem de alimentos em se trabalhar com $Bi_m < 0,1$, que é o valor, segundo LUIKOV (1968), para que não existam resistências internas.

CASO 5 ($Bi_m = 2,05$, $Lu = 0,0013$, $Pn = 0,142$, $Ko = 74,32$ e $\varepsilon = 0,3$)

Segundo LUIKOV (1968), o número de Biot define um rol essencial na determinação do perfil de temperatura de um sólido, podendo ser interpretado como a razão entre a resistência interna no sólido, representada pela condutividade térmica do alimento e a resistência convectiva do fluxo de calor na superfície, representado pelo coeficiente convectivo de calor.

Apresentam-se nas Figs. (4.14) e (4.15) as distribuições de temperatura e teor de umidade, respectivamente fazendo-se variar o Bi_q . Nesta análise foram mantidos os parâmetros adimensionais referentes ao Caso 2, fazendo variar o Bi_q . Pode-se verificar que à medida que Bi_q cresceu, ocorreu um aumento dos níveis de temperatura, contudo não houve necessariamente uma melhoria no processo de secagem.

Para um número de Biot de calor pequeno, o gradiente interno deve ser pequeno em comparação com a diferença de temperatura externa, e a transferência de calor pode então ser controlada, sobretudo, pela transferência convectiva de calor na superfície. Portanto, para o Caso 5 aqui estudado, a temperatura interna do alimento durante a secagem pode ser considerada uniforme. ALZAMORA *et al.* (2001) calcularam valores do número de Biot de calor para vários alimentos, tais como abacate, maçã, batata e beterraba e encontrou que eles são na faixa de 0,2-0,5, e eles concluíram que poderiam negligenciar gradientes de temperatura durante os estudos da cinética de secagem de alimentos.

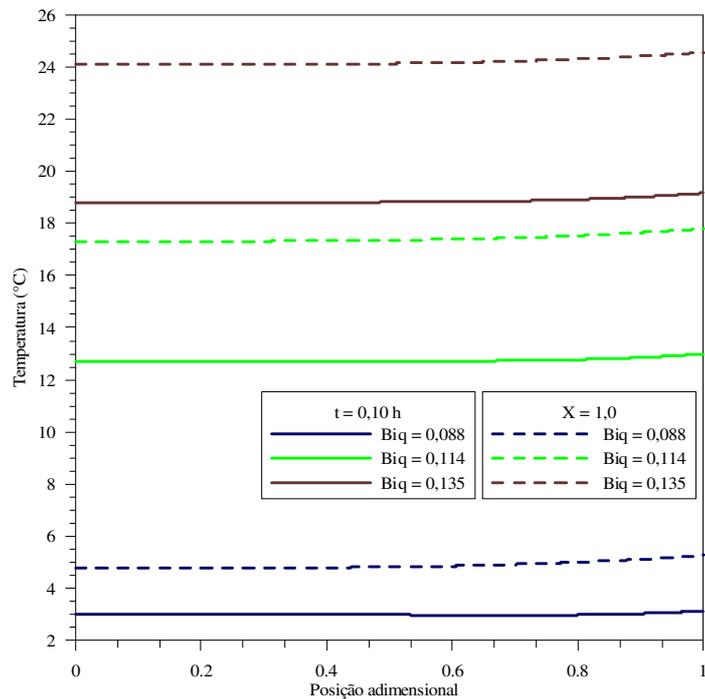
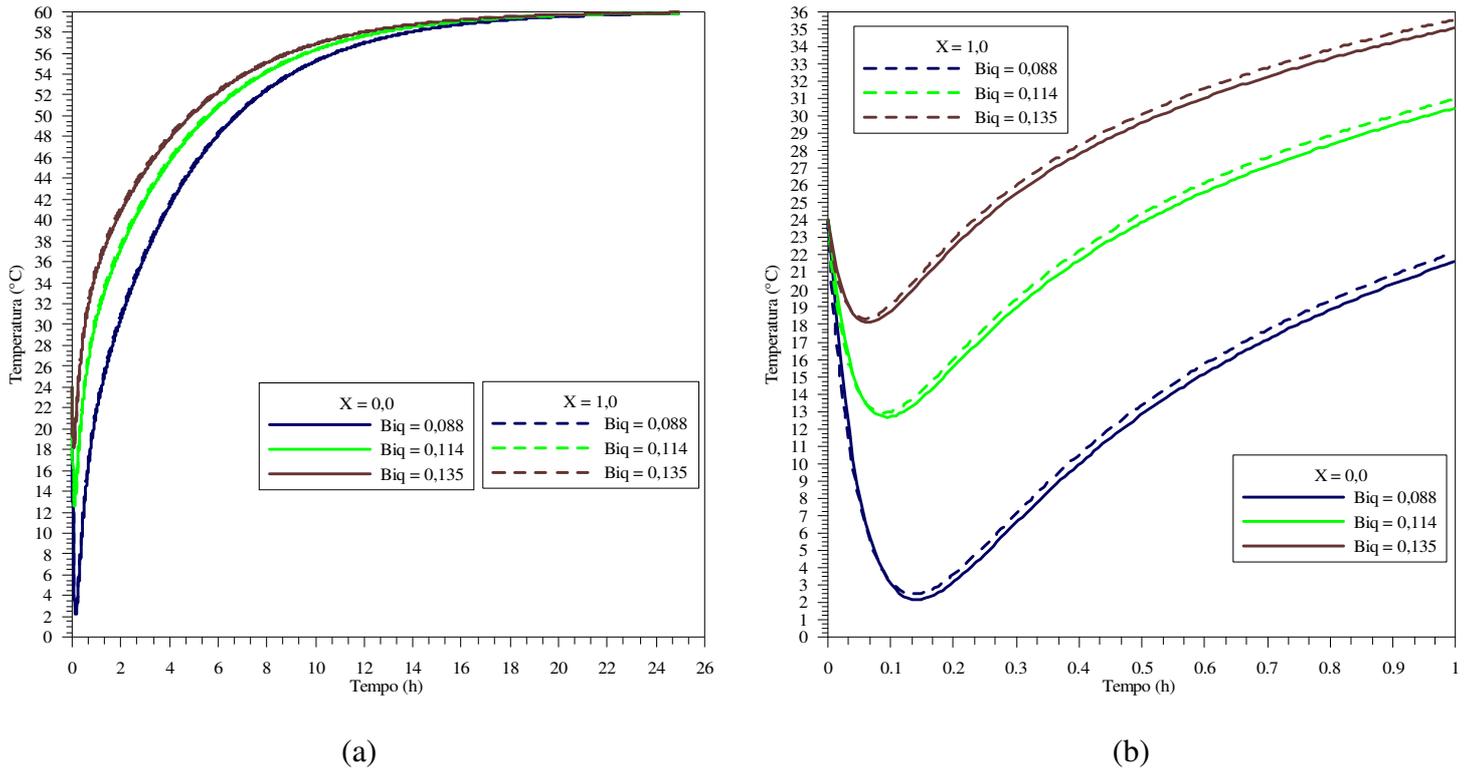


Figura 4.14: Distribuições de temperatura para o Caso 5, variando-se o Biq : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.

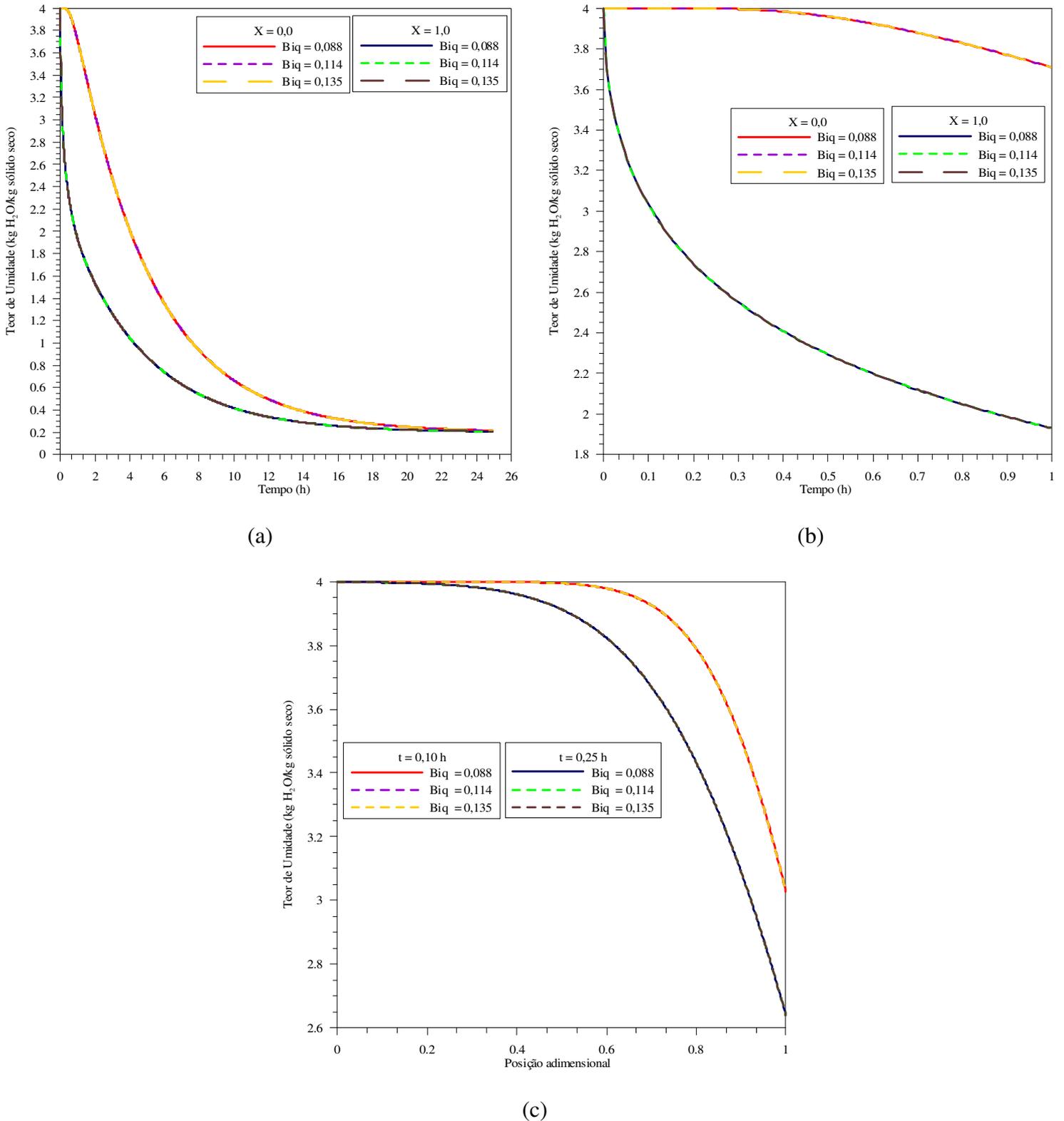


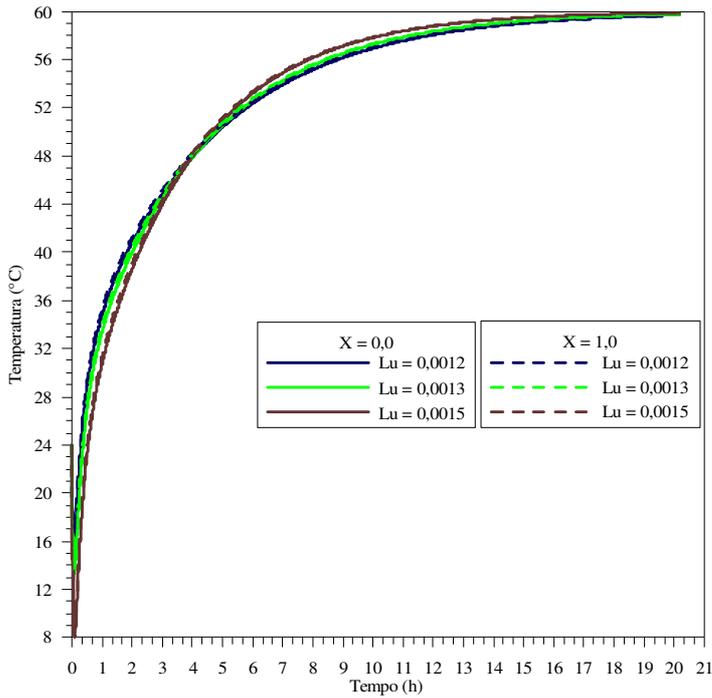
Figura 4.15: Distribuições do teor de umidade para o Caso 5, variando-se o Bi_q : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.

CASO 6 ($Bi_q = 0,135$, $Bi_m = 2,43$, $Pr = 0,142$, $Ko = 74,32$ e $\varepsilon = 0,3$)

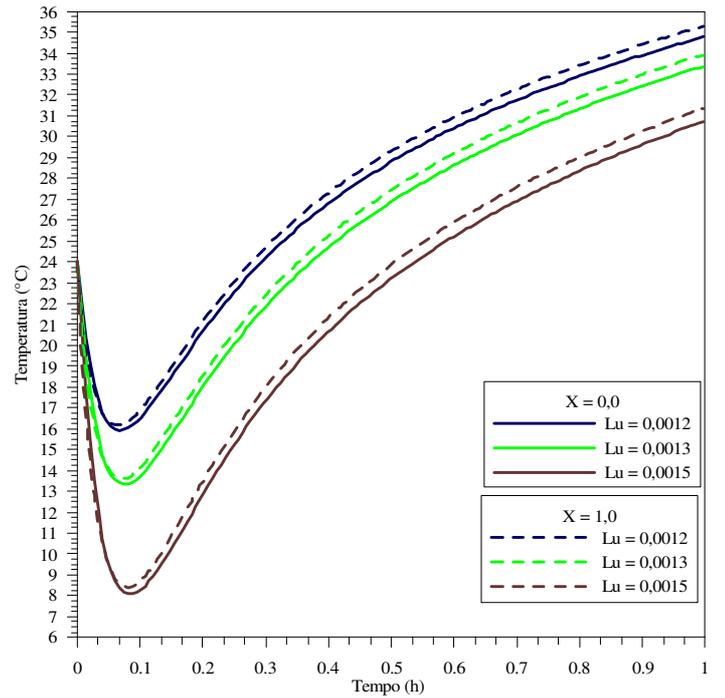
O presente caso é destinado ao estudo da influência da variação do número de Luikov. Este número adimensional correlaciona a razão entre a difusividade de massa e a difusividade térmica, caracterizando a relação entre as velocidades características dos fenômenos de transferência simultânea de calor e massa.

O número de Lu , que pode ser chamado de critério para a interligação de transferência de calor e massa, mostra a influência mais importante sobre esses fenômenos (LUIKOV, 1966). Nas Figs. (4.16) e (4.17) apresentam-se as variações das distribuições de temperatura e teor de umidade durante o processo de secagem, respectivamente, para diferentes valores de Lu . Verifica-se que, à medida que o Lu cresceu a velocidade característica no transporte do teor de umidade foi aumentada sensivelmente, com a melhoria do processo de secagem e, conseqüentemente, ocasionou a diminuição na temperatura.

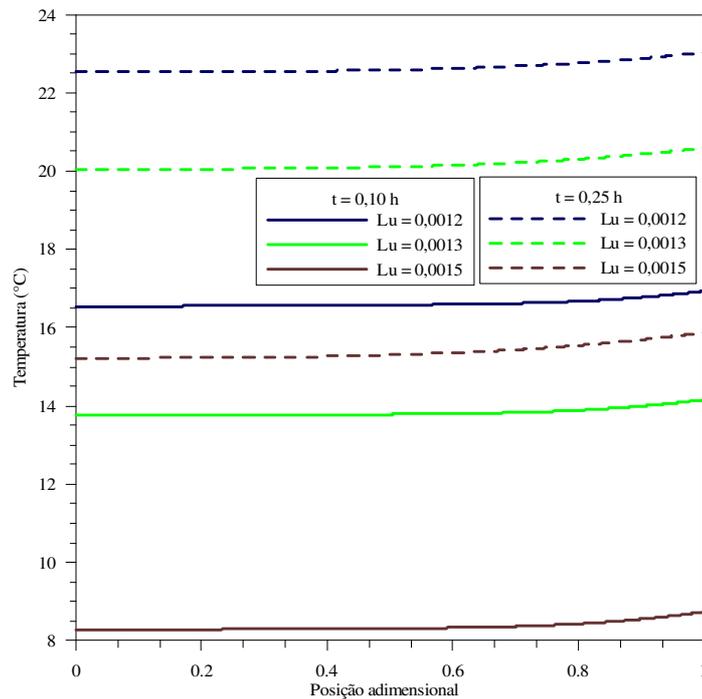
Pode-se entender que para frutos cortados em fatias de pequena espessura, quando $Lu \ll 1$, ou seja, a resistência à difusão de massa é muito maior que a resistência à difusão de calor, significa que a transferência de massa domina o processo simultâneo de transferência de calor e massa, pois seria uma etapa muito mais lenta que a transferência de calor. Esta análise está de acordo com COSTA (2008), que estudou a secagem de banana em um secador de coluna estática. O processo de secagem dentro da banana analisado por LIMA (1999) também foi dominado pela difusão de massa em relação à difusão de calor.



(a)

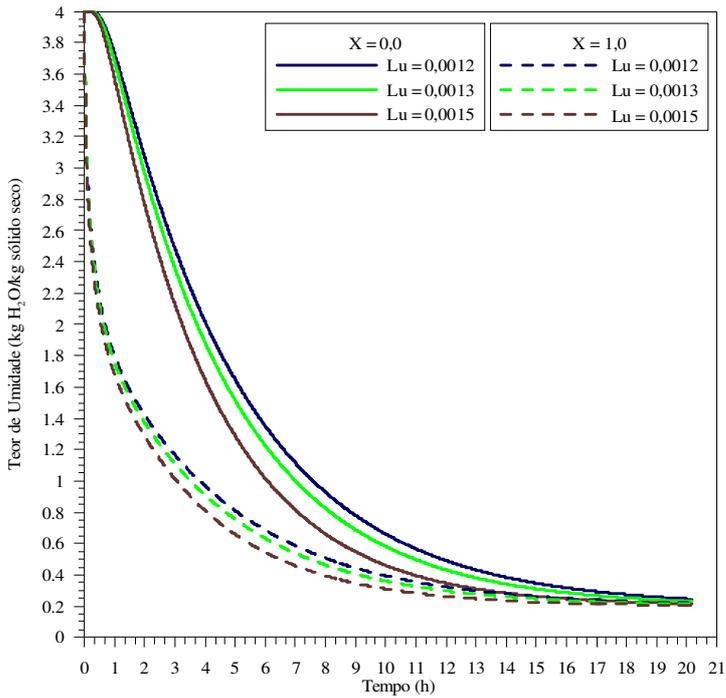


(b)

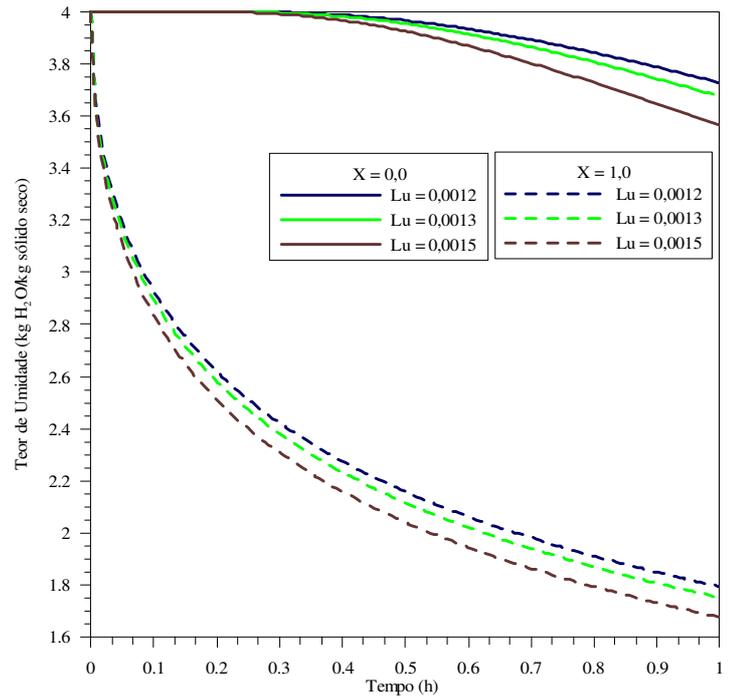


(c)

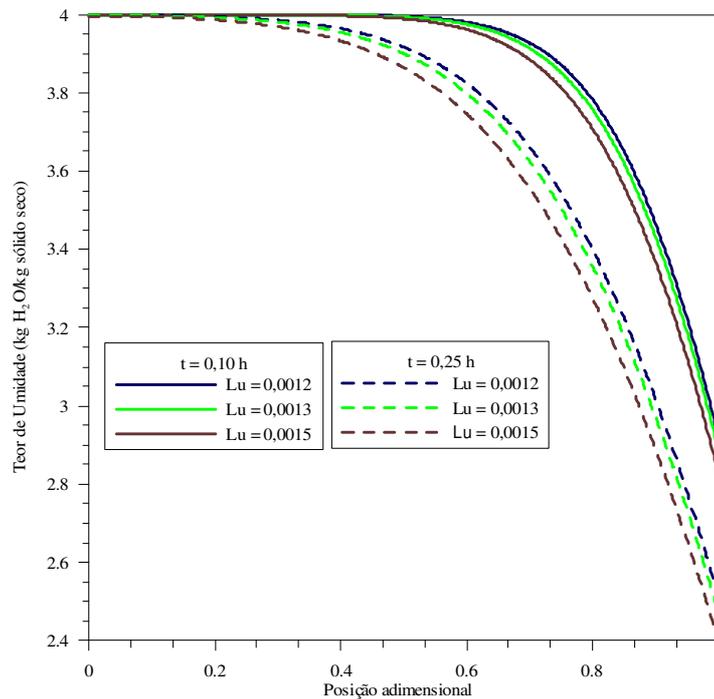
Figura 4.16: Distribuições de temperatura para o Caso 6, variando-se o Lu : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.



(a)



(b)



(c)

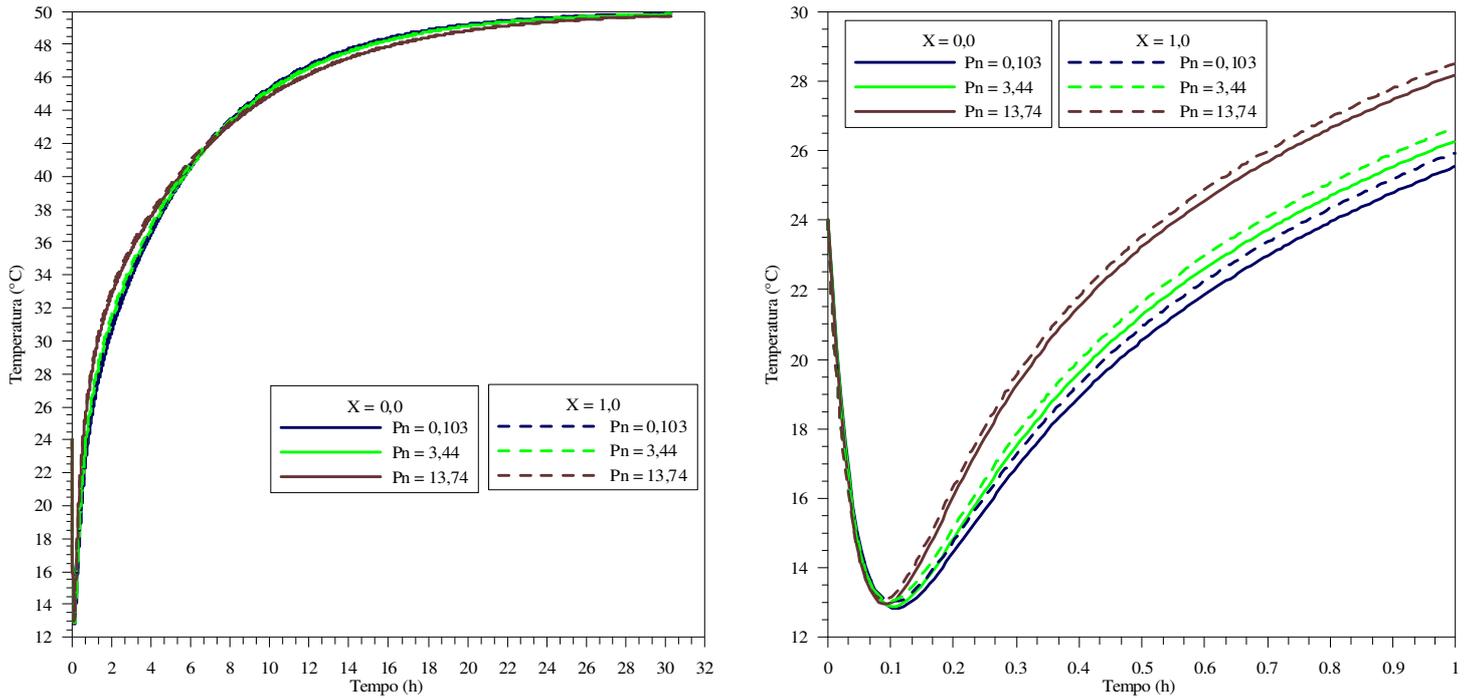
Figura 4.17: Distribui\u00e7\u00f5es do teor de umidade para o Caso 6, variando-se o Lu : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o dom\u00ednio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posi\u00e7\u00e3o.

Os Casos 7 e 8, analisados a seguir, são voltados aos números de Posnov (Pn) e Kossovitch (Ko), respectivamente. O número Posnov, na prática, afeta apenas o potencial de transferência de massa, mas o número Kossovitch afeta os campos de temperatura (LUIKOV, 1966).

CASO 7 ($Bi_q = 0,116$, $Bi_m = 2,10$, $Lu = 0,0010$, $Ko = 103,42$ e $\varepsilon = 0,3$)

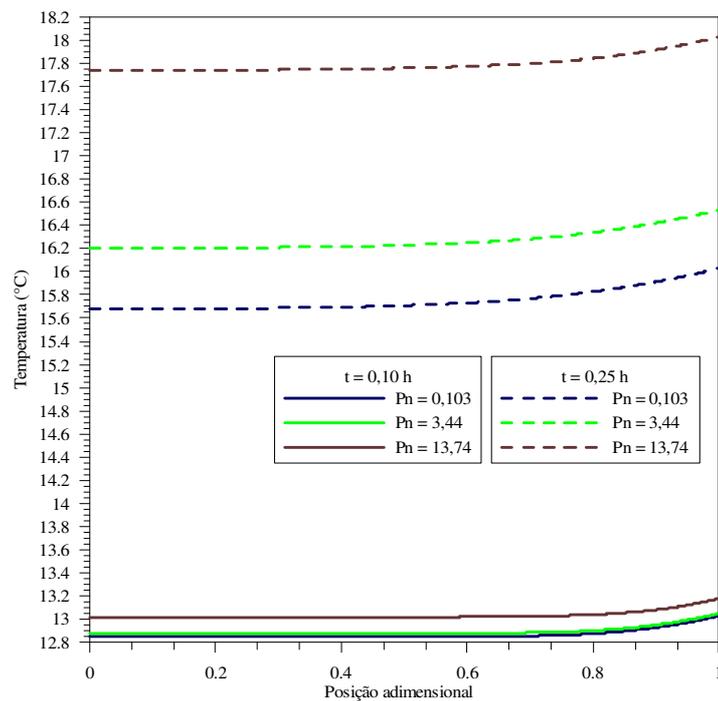
O número de Posnov expressa a queda relativa do teor de umidade causada por uma diferença de temperatura, via efeito termogradiente. No presente caso foram mantidos os mesmos parâmetros adimensionais do Caso 1, variando-se o coeficiente termogradiente.

As Figs. (4.18) e (4.19) apresentam o comportamento dos perfis da temperatura e teor de umidade durante o processo de secagem, variando-se Pn . Nota-se que para maiores valores de Posnov, ocorreu uma diminuição da perda do teor de umidade. Isso ocorre porque o número de Pn estabelece uma relação entre a velocidade de transferência de umidade por termodifusão, com respeito à difusão. Desta forma, em alimentos deseja-se trabalhar com pequenos valores do número de Posnov, implicando que a difusão de umidade é o mecanismo predominante durante a secagem.



(a)

(b)



(c)

Figura 4.18: Distribuições de temperatura para o Caso 7, variando-se o Pn : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.

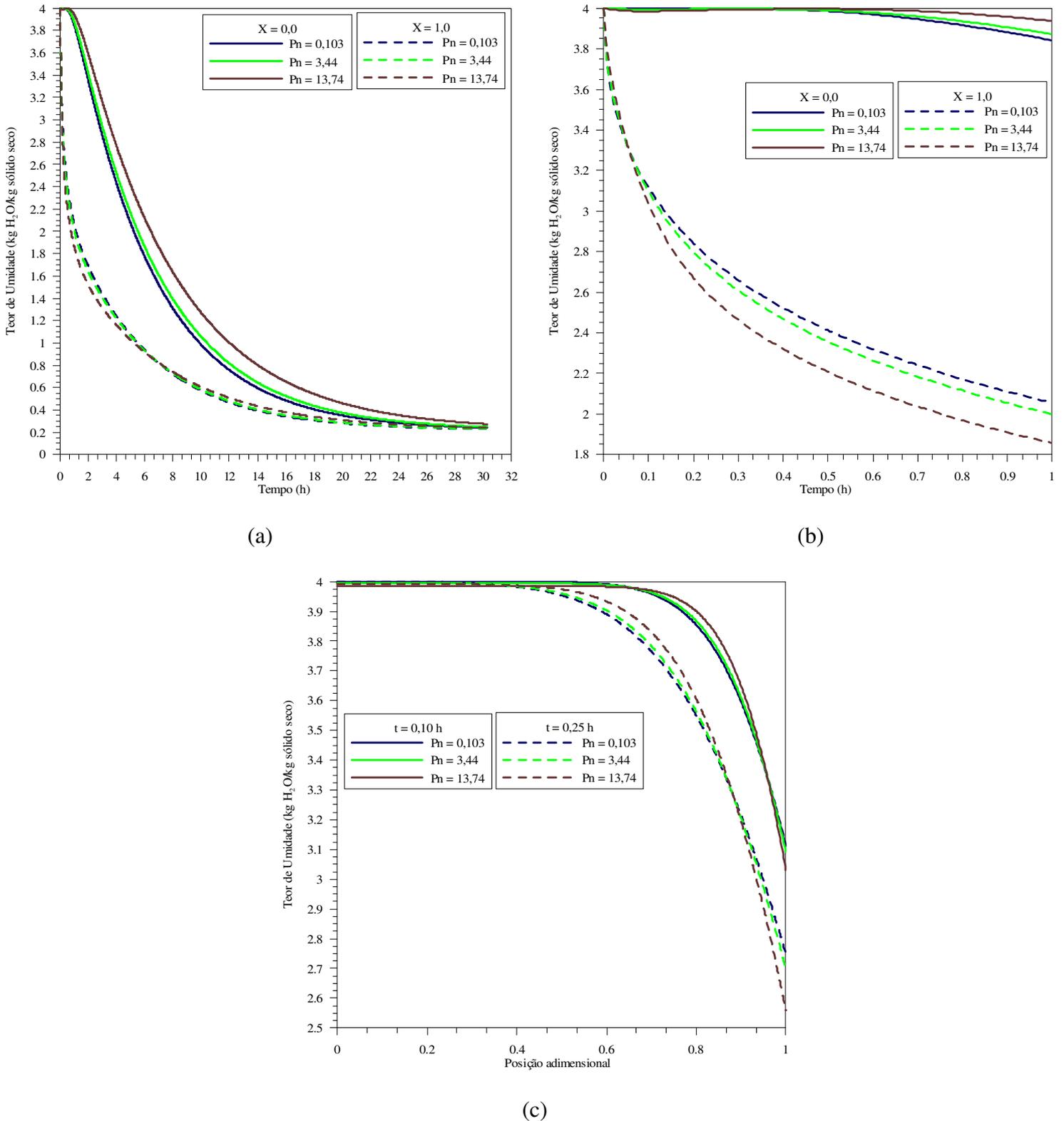
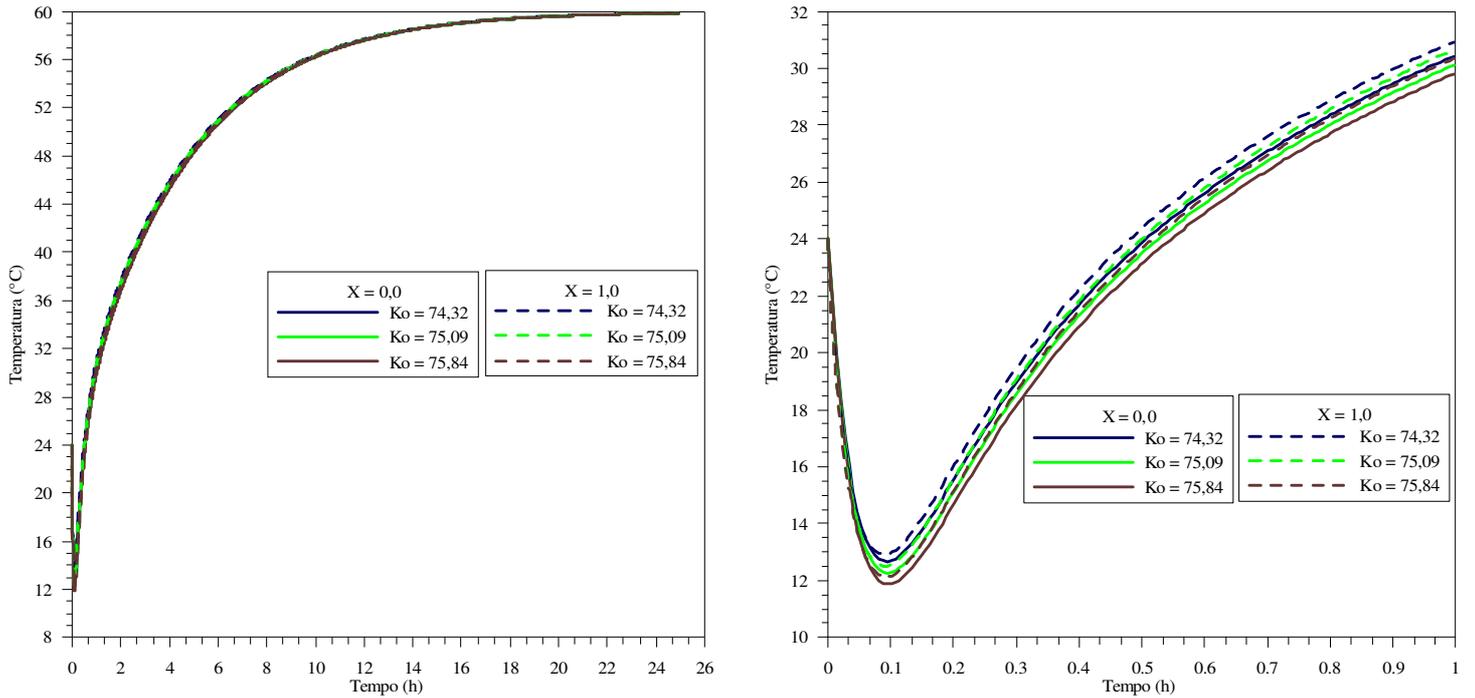


Figura 4.19: Distribuições do teor de umidade para o Caso 7, variando-se o Pn : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posição.

CASO 8 ($Bi_q = 0,114$, $Bi_m = 2,05$, $Lu = 0,0013$, $Pn = 0,142$ e $\varepsilon = 0,3$)

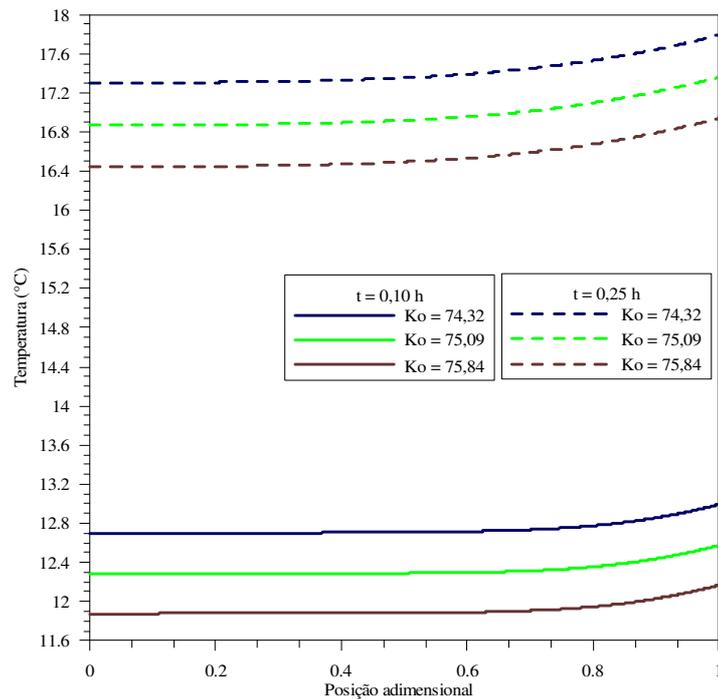
O número de Kossovitch expressa a razão entre a quantidade de calor necessária para a evaporação da fase líquida contida no interior do alimento e o calor necessário para aquecer o corpo úmido.

Seu efeito de variação sobre os perfis de temperatura e teor de umidade é mostrado nas Figs. (4.20) e (4.21), respectivamente. Para esta análise os parâmetros adimensionais referentes ao Caso 2 foram mantidos os mesmos, variando-se o Ko . Observa-se, para um mesmo valor de tempo, que à medida que o número de Kossovitch cresceu, a temperatura tendeu a tornar-se relativamente mais baixa. Isto é justificável, uma vez que uma maior parcela de energia localmente disponível é utilizada na forma de calor latente para efetivar o processo de mudança de fase.



(a)

(b)



(c)

Figura 4.20: Distribuições de temperatura para o Caso 8, variando-se o Ko : (a) Temperatura versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Temperatura versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Temperatura versus posição.

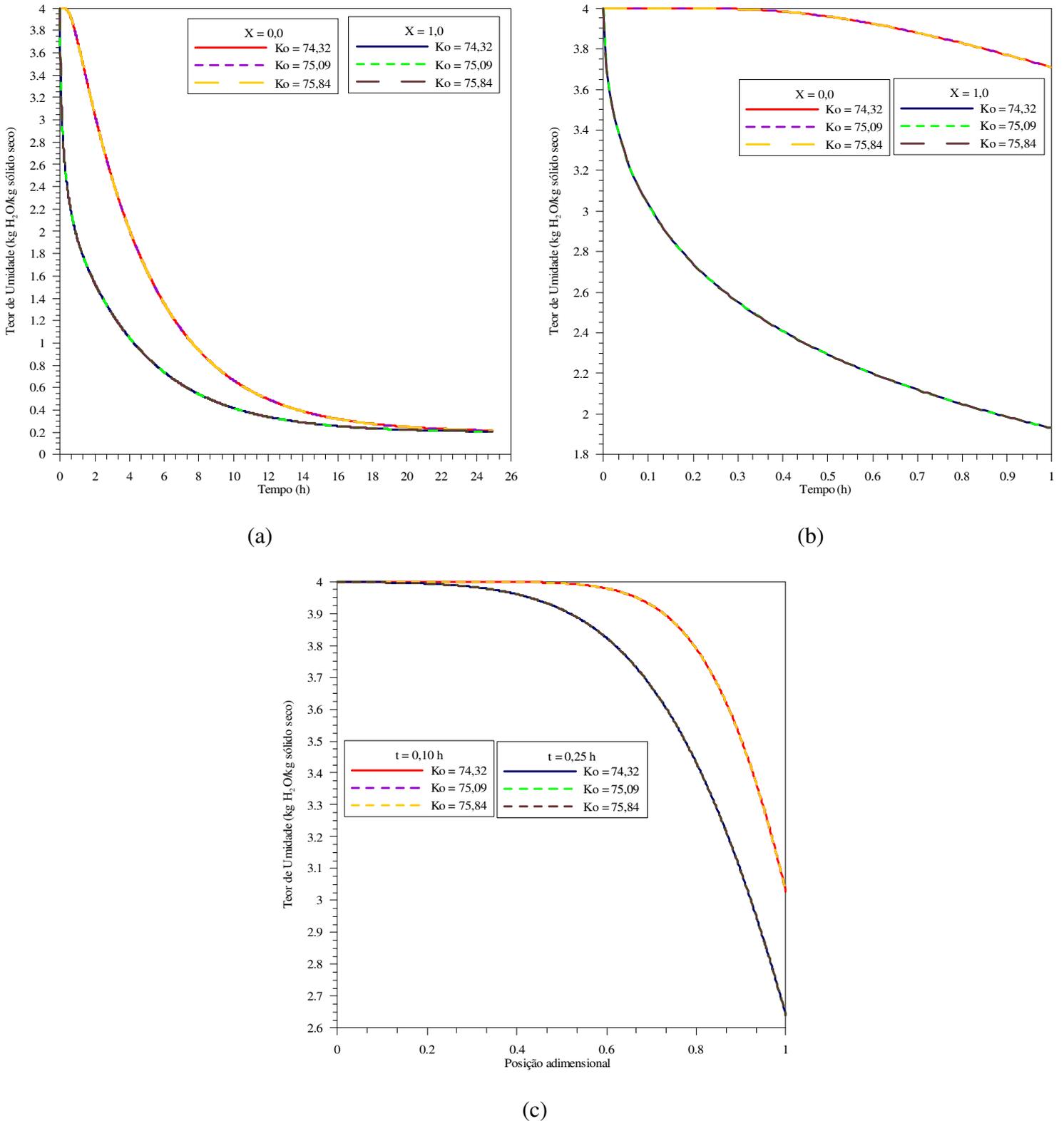


Figura 4.21: Distribui\c{c}o\~{e}s do teor de umidade para o Caso 8, variando-se o Ko : (a) Teor de umidade versus tempo ao longo de todo o domínio, (b) Teor de umidade versus tempo na primeira hora de secagem e (c) Teor de umidade versus posi\c{c}o\~{a}o.

Com o estudo paramétrico efetuado, dispõe-se agora de uma idéia do comportamento do fenômeno de transferência simultânea de calor e massa no processo de secagem convectiva de alimentos e se abre novas fronteiras para o estudo em outros produtos alimentícios e modelos mais complexos.

4.2. – ESTUDO DE SENSIBILIDADE AOS PARÂMETROS DO MODELO

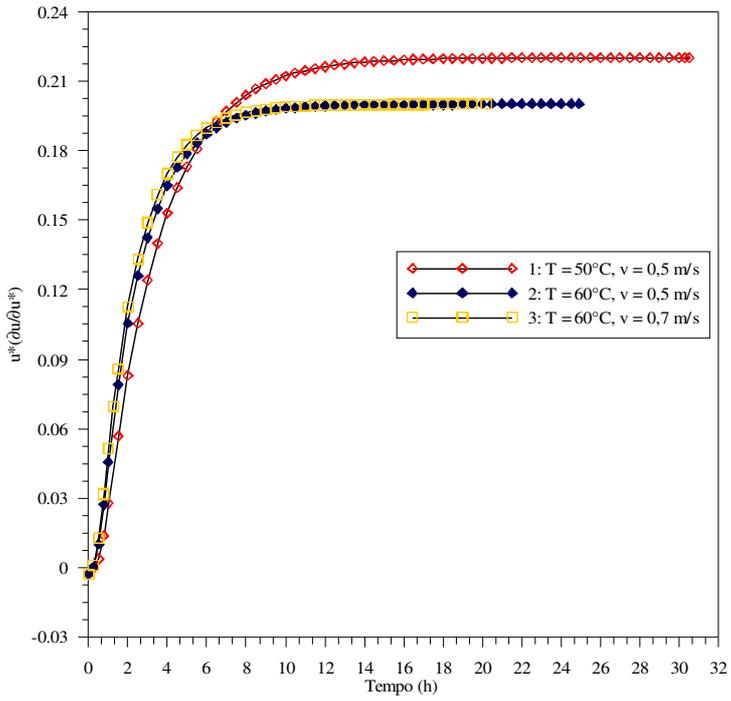
O estudo de sensibilidade aos parâmetros foi realizado com o objetivo de examinar em detalhe a influência dos parâmetros que intervêm no comportamento transiente do perfil do teor de umidade no interior de produto alimentício quando submetido a diferentes condições experimentais de secagem. A análise de sensibilidade deve indicar quais parâmetros podem ser estimados a partir de um único procedimento experimental.

Nesta seção estudou-se apenas o problema de transferência de massa, segundo a lei de Fick, o qual foi considerado unidimensional, simétrico e transiente. Desta forma, a resposta transiente do teor de umidade é dada pela seguinte função:

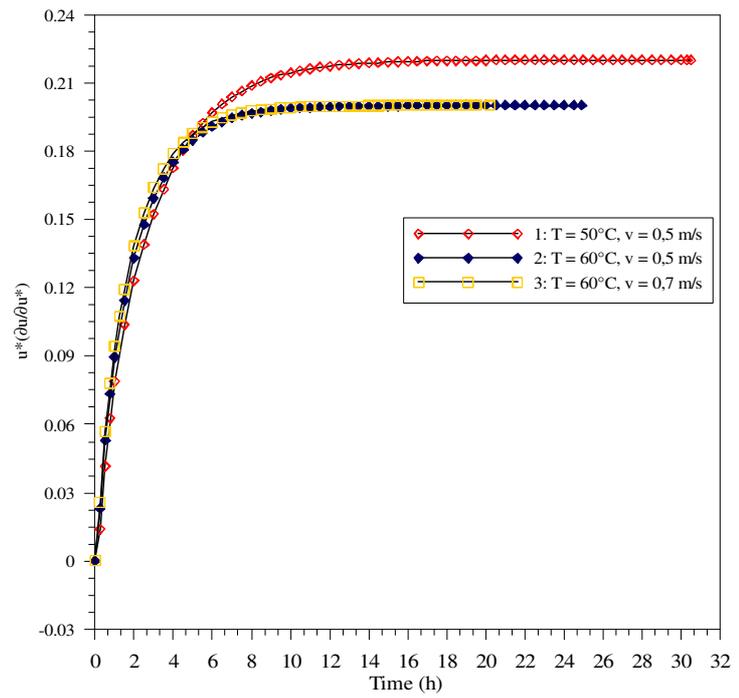
$$u = F(x, t, u_0, u^*, D_{ef})$$

Analisa-se a temperatura e velocidade do ar de secagem, onde os resultados são mostrados em termos dos coeficientes de sensibilidade reduzidos para os parâmetros teor de umidade de equilíbrio (u^*) e difusividade efetiva de massa (D_{ef}).

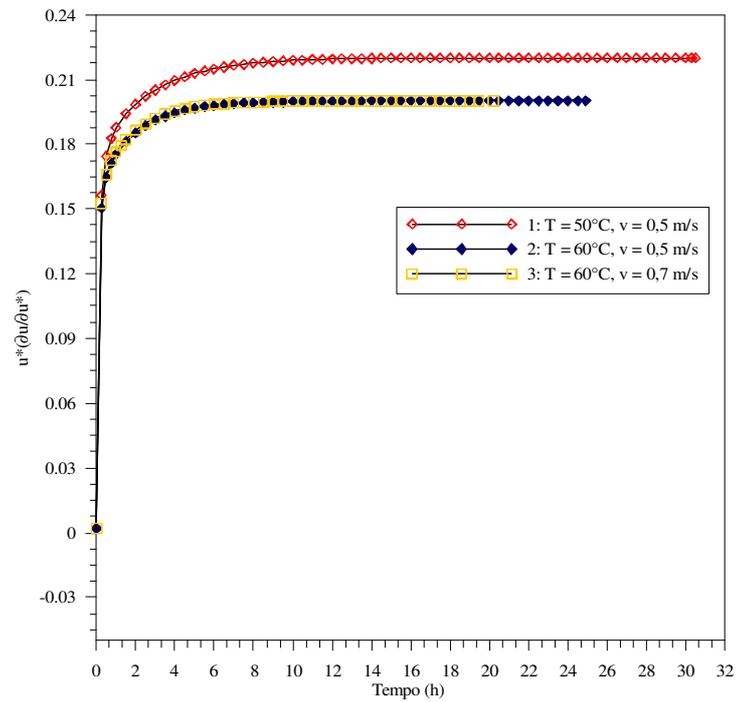
A evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade reduzidos para medições do teor de umidade é apresentada nas Figs. (4.22a), (4.22b) e (4.22c), para as posições $X = 0,0; 0,5$ e $0,9$, respectivamente, em relação ao teor de umidade de equilíbrio (u^*). É interessante notar que os coeficientes de sensibilidade praticamente não são influenciados pela posição, onde em todas as curvas os mesmos evoluem de modo crescente com tempo até atingir a estabilidade. Observa-se um aumento significativo no valor dos coeficientes, isto é, uma sensibilidade mais significativa, quando o processo ocorreu nas condições do Caso 1, podendo-se prever que para menores valores de temperatura e velocidade do ar de secagem, maiores conteúdos de umidade de equilíbrio serão obtidos. No entanto, os coeficientes de sensibilidade atingem baixos valores para processos de secagem realizados com temperaturas e velocidades mais elevadas, indicando que menores conteúdos de umidade de equilíbrio, em um intervalo menor de tempo, poderão ser obtidos em tais condições experimentais.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.22: Coeficientes de sensibilidades reduzidos para u^* para os Casos 1, 2 e 3 nas posições: (a) $X = 0,0$, (b) $X = 0,5$ e (c) $X = 0,9$.

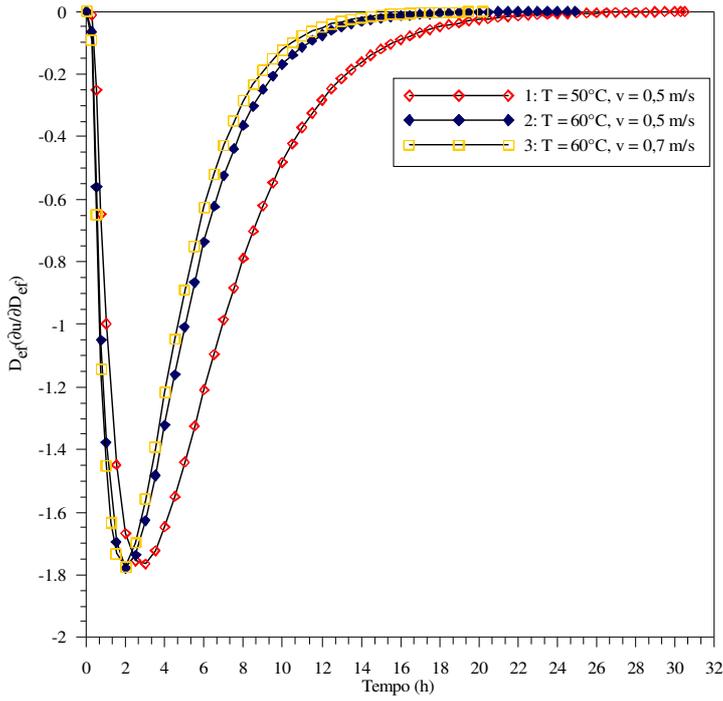
Esta análise está de acordo com EL-AOUAR *et al.* (2003), que demonstraram que o aumento da temperatura e velocidade do ar reduz o tempo de secagem do produto final. Portanto, dependendo da finalidade e qualidade do produto final desejado, experimentos realizados em baixas temperaturas e velocidades não são viáveis.

Este comportamento assumido pelos coeficientes pode ser justificado da seguinte forma: sabendo-se que o teor de umidade de equilíbrio de um produto alimentício pode ser interpretado como sendo o teor de umidade que este apresenta quando a pressão de vapor de água em sua superfície se iguala à pressão de vapor no ar que o envolve, e sendo as propriedades do ar de secagem consideradas constantes, logo uma elevação na temperatura e velocidade do ar conduz a um menor tempo para se estabelecer o equilíbrio.

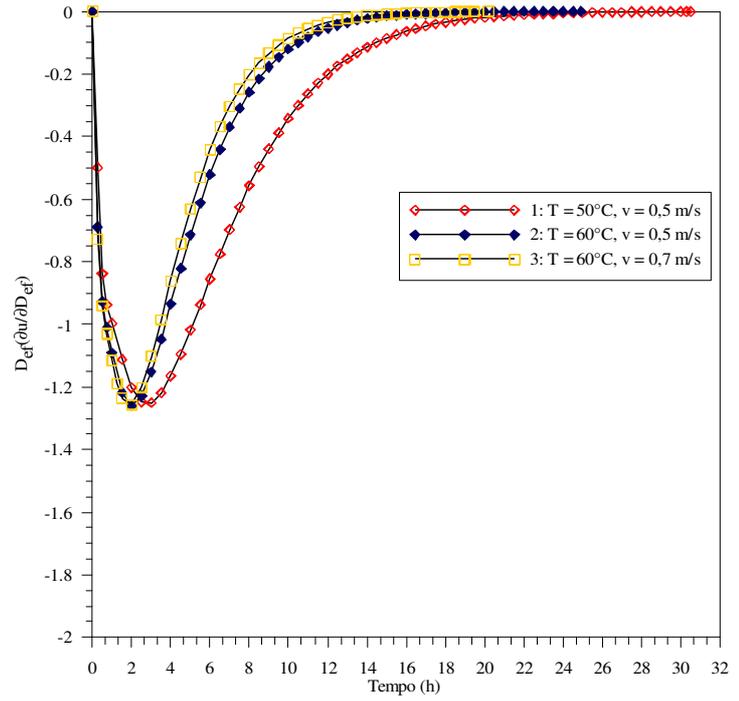
A evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade reduzidos para medições do teor de umidade pode ser verificada nas Figs. (4.23a), (4.23b) e (4.23c), para as posições $X = 0,0$; $0,5$ e $0,9$, respectivamente, em relação à difusividade efetiva de massa (D_{ef}). As curvas mostram que os coeficientes de sensibilidade são muito pouco afetados pela localização, com exceção de $X = 0,9$. Observa-se que inicialmente os coeficientes têm uma evolução decrescente e negativa, e crescem ao longo do processo. Considerando o comportamento das curvas, em valores absolutos, pode-se verificar que o coeficiente de sensibilidade em relação à difusividade efetiva de massa, (D_{ef}), atinge seu valor máximo quando a experiência é realizada para um maior valor na temperatura e velocidade do ar de secagem (Caso 3).

Fisicamente, isto indica que existe uma tendência de que maiores valores da difusividade efetiva de massa podem ser estimados se o processo ocorre em temperaturas e velocidades mais elevadas. Esta constatação está de acordo com os resultados relatados por QUEIROZ e NEBRA (2001), que mostraram que o aumento da temperatura e velocidade do ar favoreceu o processo de transferência de massa e, conseqüentemente, aumentou a difusividade efetiva de massa da banana, que variou de $4,95 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ a $2,97 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

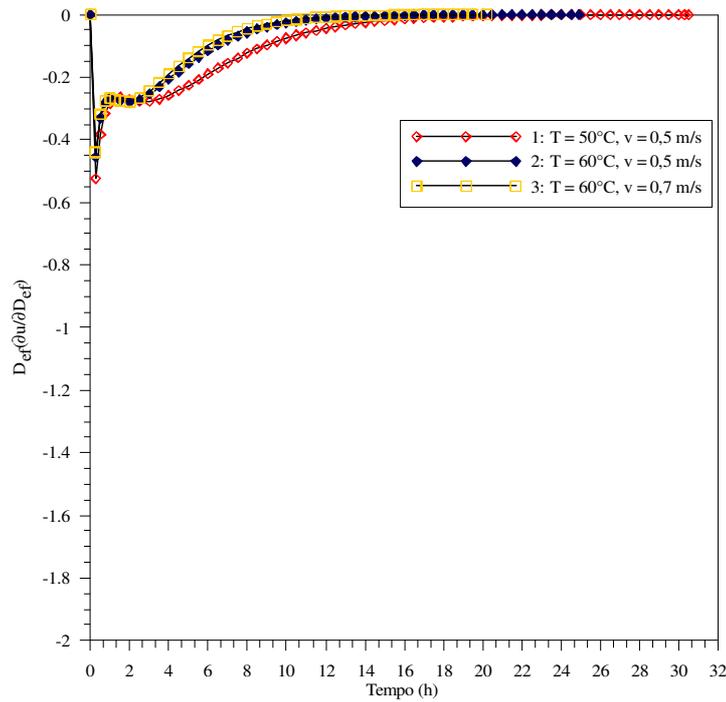
Uma vez que a difusividade efetiva de massa fornece uma indicação de como a água é transferida pelo processo de difusão no interior do produto, e a energia cinética associada às moléculas de água presentes nos alimentos aumenta com a elevação da temperatura, resultando na diminuição das forças de atração e, conseqüentemente, aumentando a saída de água do alimento, justifica-se que os valores desta propriedade sejam mais significativos para processos que utilizam maiores temperaturas.



(a)



(b)

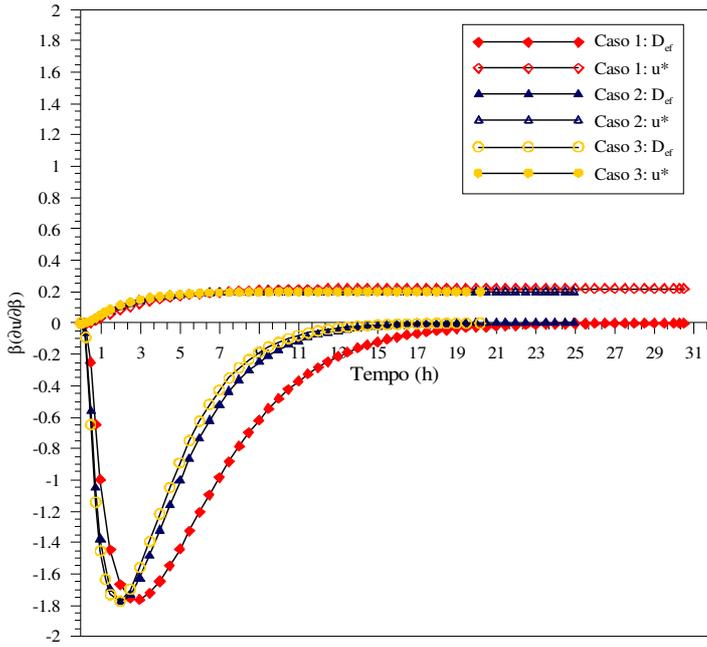


(c)

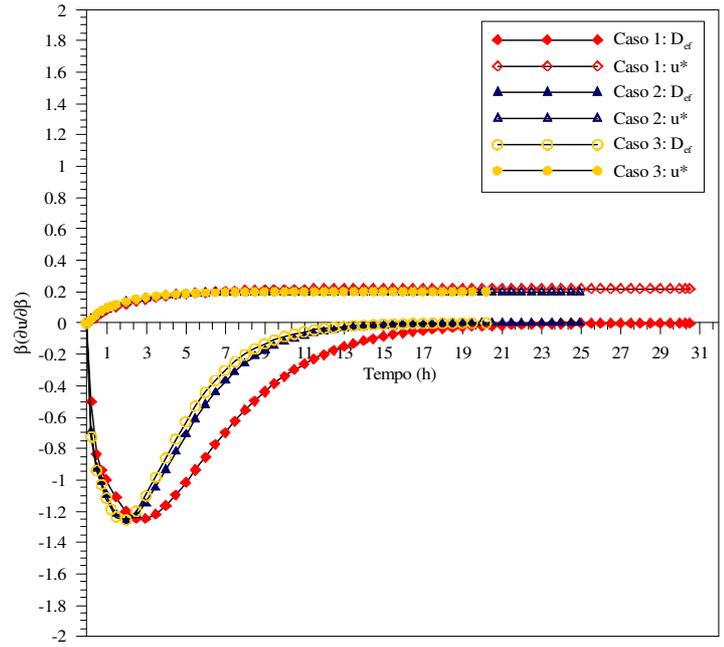
Figura 4.23: Coeficientes de sensibilidades reduzidos para D_{ef} para os Casos 1, 2 e 3 nas posições: (a) $X = 0,0$, (b) $X = 0,5$ e (c) $X = 0,9$.

Os resultados apresentados nas Figs. (4.24a), (4.24b) e (4.24c) comparam os coeficientes de sensibilidade reduzidos do teor de umidade de equilíbrio, u^* , e difusividade efetiva de massa, D_{ef} , para as três posições estudadas dentro do meio. O objetivo principal é verificar a dependência linear entre eles. Através de uma análise visual das curvas apresentadas a seguir, pode-se constatar que:

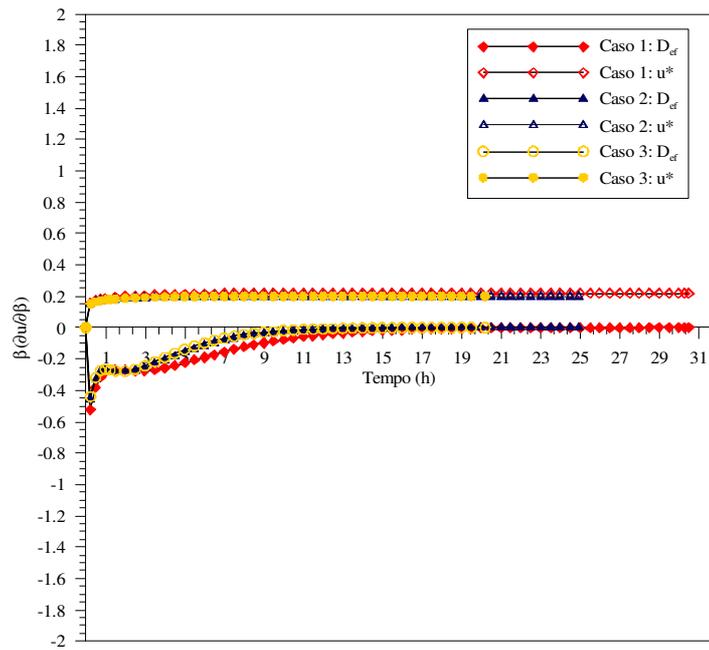
- ✓ Os coeficientes de sensibilidade reduzidos do teor de umidade com relação a u^* e D_{ef} não são proporcionais, ou seja, eles são linearmente independentes;
- ✓ O coeficiente de sensibilidade reduzido do teor de umidade de equilíbrio, u^* , é praticamente nulo durante todo o período da secagem, para todas as posições analisadas. Portanto, é impossível estimar este parâmetro por meio de medidas de uma única experiência, pois o mesmo possui baixa sensibilidade e variações neste parâmetro implicarão mudanças indistinguíveis ao modelo teórico;
- ✓ A sensibilidade para a difusividade efetiva de massa, D_{ef} , em valores absolutos, atinge um máximo e esse valor é reduzido à medida que se aproxima o fim do processo de secagem. As figuras mostram claramente que este coeficiente de sensibilidade é pouco afetado pela posição, exceto para $X = 0,9$. A sensibilidade deste parâmetro é alta, indicando que momento a momento, a distribuição do teor de umidade é altamente dependente da difusividade efetiva de massa. Portanto, em termos de estimação de parâmetros isto implica que até pequenas mudanças no valor deste parâmetro afetarão o modelo;
- ✓ As curvas dos coeficientes de sensibilidade reduzidos mostram ainda qual o melhor intervalo para realizar a estimativa da difusividade efetiva de massa, D_{ef} . É notável que os maiores valores, em termos absolutos, são atingidos nos tempos iniciais do processo de secagem, para todos os casos analisados.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.24: Coeficientes de sensibilidades reduzidos para u^* e D_{ef} para os Casos 1, 2 e 3 nas posições: (a) $X = 0,0$, (b) $X = 0,5$ e (c) $X = 0,9$.

Finalmente, as observações feitas acima mostram que é possível estimar unicamente a difusividade efetiva de massa, D_{ef} , a partir de uma única experiência de secagem convectiva.

4.3. – SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Após as análises do comportamento dos coeficientes de sensibilidade reduzidos, realizadas na seção anterior, neste tópico apresenta-se a solução do problema inverso de estimativa da difusividade efetiva de massa, (D_{ef}). O presente problema inverso de estimativa de parâmetro é resolvido pelo método de Levenberg-Marquardt de minimização da norma dos mínimos quadrados. Para realizar a minimização da função objetivo um código em linguagem Fortran foi desenvolvido. Dados simulados computacionalmente são empregados como medidas experimentais com o objetivo de verificar a acurácia da presente técnica de estimativa de parâmetros. Tais medidas simuladas são obtidas da solução do problema direto de transferência de massa dado pelas Eqs. (3.3), utilizando-se os valores pré-estabelecidos para o parâmetro desconhecido, e adicionando-se ruídos à solução do problema direto. O ruído é considerado permanente, gaussiano, não correlacionado, aditivo, de média nula e desvio padrão constante, ou seja:

$$u_{exp} = u_{teórico} + erro$$

onde:

$u_{teórico}$: medida exata do teor de umidade (solução do problema direto)

u_{exp} : medida contendo erros experimentais.

Para comparar os resultados obtidos através do método de estimação de parâmetros proposto com os resultados experimentais encontrados por KARIM e HAWLADER (2005), em um processo de secagem convectiva em um secador solar com bananas *in-natura*, foram propostas algumas experiências simuladas com as mesmas condições operacionais.

Apresentam-se alguns resultados com dois níveis de ruídos adicionados ao campo do teor de umidade obtido com o problema direto: 1% para medidas com boa qualidade e 5% para as medidas com má qualidade.

A Tab. (4.5) ilustra os resultados obtidos para o parâmetro estimado utilizando medidas simuladas com os erros randômicos. Pode-se notar que os valores da difusividade efetiva de massa (D_{ef}) obtidos pelo método de Levenberg-Marquardt são da mesma ordem de grandeza dos encontrados por KARIM e HAWLADER (2005). Neste trabalho, a maior difusividade efetiva de massa foi encontrada no Caso 3 ($1,421 \times 10^{-10}$ m²/s) e a menor no Caso 1 ($1,198 \times 10^{-10}$ m²/s). Nota-se nitidamente que um aumento da temperatura e velocidade do ar de secagem conduziu a maiores valores do parâmetro estimado, confirmando a análise de sensibilidade mostrada na seção anterior, a qual indicou que a difusividade efetiva de massa aumenta em processos de secagem conduzidos em maiores temperaturas e velocidades do ar.

A energia das moléculas de água nos alimentos aumenta com a elevação das temperaturas e velocidades do ar de secagem, reduzindo as forças de atração, que, por sua vez, aumentam a liberação da água no produto. A difusividade efetiva de massa representa a taxa de remoção de água no processo de difusão que ocorre no interior do alimento, portanto, os valores desta propriedade são mais elevados em operações realizadas em níveis mais elevados das condições operacionais.

Tabela 4.5: Resultados da difusividade efetiva de massa da banana *in-natura*, obtidos através do Método de Levenberg-Marquardt.

Ensaio	Condições Experimentais	Valor Conhecido (m ² /s)	Erro (%)	Valor Estimado (m ² /s)	Incertezas (m ² /s)
1	T = 50°C, v = 0,5 m/s	1,610×10 ⁻¹⁰	1,0	1,198×10 ⁻¹⁰	8,365×10 ⁻¹⁵
			5,0	1,196×10 ⁻¹⁰	1,675×10 ⁻¹⁵
2	T = 60°C, v = 0,5 m/s	2,230×10 ⁻¹⁰	1,0	1,300×10 ⁻¹⁰	5,914×10 ⁻¹⁵
			5,0	1,299×10 ⁻¹⁰	1,186×10 ⁻¹⁵
3	T = 60°C, v = 0,5 m/s	2,410×10 ⁻¹⁰	1,0	1,421×10 ⁻¹⁰	6,822×10 ⁻¹⁵
			5,0	1,420×10 ⁻¹⁰	1,369×10 ⁻¹²

Na Tab. (4.5) encontram-se também as incertezas obtidas pelo método de Levenberg-Marquardt, as quais apresentam baixos valores, confirmando a eficiência e a precisão da estimativa do parâmetro. A utilização do método de Levenberg-Marquardt permite definir um intervalo de confiança para o valor final estimado, levando em consideração cada ponto experimental utilizado na estimativa.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

De uma maneira geral com base nos resultados alcançados, conclui-se que a metodologia adotada neste estudo foi apropriada, e que os objetivos estabelecidos foram atingidos.

No relativo aos objetivos estabelecidos conclui-se, com base nos resultados obtidos, que os modelos matemáticos são um instrumento importante para melhorar o processo de secagem convectiva de alimentos. Mais especificamente, os resultados deste estudo indicam que:

Dispõe-se agora também de resultados de referência tabelados para os perfis de temperatura e teor de umidade do problema linear de Luikov, na secagem de alimentos, para posterior validação de resultados obtidos experimentalmente ou por outros métodos de solução.

O modelo difusional foi adequado para predizer a distribuição de umidade no interior do alimento, contudo a condição de teor de umidade de equilíbrio na superfície do produto subestimou o teor de umidade. Este modelo só pode ser utilizado nos casos em que os gradientes de temperatura no interior do meio são desprezíveis.

O modelo de Luikov é um modelo que contempla a física da secagem de maneira mais realística, pois considera a transferência simultânea de calor e massa. Por conseguinte, possibilita o conhecimento dos perfis de temperatura e teor de umidade no interior do produto. Sempre que os coeficientes de transporte estejam disponíveis e exista um interesse em se saber a temperatura do alimento, o modelo de Luikov é o mais apropriado.

A análise dos coeficientes de sensibilidade reduzidos do teor de umidade aos parâmetros, teor de umidade de equilíbrio e difusividade efetiva de massa, permitiu observar que os coeficientes de sensibilidade em relação ao teor de umidade de equilíbrio

são praticamente nulos durante toda a secagem, apontando a impossibilidade de estimá-lo e indicando que apenas a difusividade efetiva de massa poderia ser estimada em uma única experiência de secagem.

O problema inverso de estimativa de parâmetros foi resolvido pelo método de Levenberg-Marquardt de minimização da norma dos mínimos quadrados. A identificação da difusividade efetiva de massa foi realizada a partir dos dados obtidos de uma experiência simulada com a superposição de ruído ao modelo original. O ruído foi considerado permanente, gaussiano, não correlacionado, aditivo, de média nula e desvio padrão constante, levando a resultados bastante precisos para a difusividade efetiva de massa da banana, para os três casos estudados, em conformidade com os valores encontrados na literatura.

Finalmente, pode-se confirmar que a metodologia proposta revelou-se eficaz para a identificação da difusividade efetiva de massa para alimentos submetidos ao processo de secagem, em particular, de bananas.

Portanto, considera-se que o presente trabalho atingiu seus objetivos, contribuindo cientificamente para o tema da simulação de processos de secagem em alimentos e enriquecendo os trabalhos de secagem já existentes.

Para a continuação deste trabalho no futuro sugere-se a inclusão de fatores relevantes, tais como:

- ✓ Considerar os parâmetros termofísicos das equações de Luikov variarem durante o processo de secagem de alimento. Isto torna não-lineares as equações que regem o fenômeno, somando novas dificuldades na busca de uma solução do problema e o tornaria mais realista.
- ✓ Estudo do projeto ótimo da experiência para estimativa de parâmetros. Analisando-se os efeitos do número e localização de sensores, e tempo total da experiência, para diferentes valores de Biq , Bim , Lu , Pn , Ko e ϵ ;
- ✓ Solução do problema inverso de estimativa de parâmetros utilizando-se o Método de Levenberg-Marquardt de minimização da norma dos mínimos quadrados, tomando-se apenas medidas simuladas de temperatura, e medidas simuladas de temperatura e teor de umidade, com o objetivo de melhorar a acurácia e o número de parâmetros estimados.

- ✓ Realização de ensaios experimentais de secagem solar indireta de alimentos, utilizando o secador disponível no Laboratório de Energia Solar (LES) situado na Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABALONE, R. M., GASTÓN, A. G., LARA, M. A., 2005, “Effect of Phase Change Criterion on the Prediction of Temperature Evolution During Food Drying”. In *MECOM - VIII Congresso Argentino de Mecánica Computacional*.

ABALONE, R., GASTÓN, A., LARA, M. A., 2000, “Determination of Mass Diffusivity Coefficient of Sweet Potato”, *Drying Technology. An International Journal*, v. 18, pp. 2273-2290.

AFONSO JÚNIOR, P. C., CORRÊA, P. C., 1999, “Comparação de Modelos Matemáticos para Descrição da Cinética de Secagem em Camada Fina de Semente de Feijão”, *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 3, n. 3, pp. 349-353.

AGHBASHLO, M., KIANMEHR, M. H., SAMIMI-AKHJAHANI, HADI., 2008, “Influence of Drying Conditions on the Effective Moisture Diffusivity, Energy of Activation and Energy Consumption During the Thin-Layer Drying of Berberis Fruit (Berberidaceae)”, *Energy Conversion and Management*, v. 49, pp. 2865–2871.

ALMEIDA, G. L., PIMENTEL, L. C. G., COTTA, R. M., 2008, “Integral Transform Solutions for Atmospheric Pollutant Dispersion”, *Environ Model Assess*, v. 13, pp. 53–65.

AL-MUHTASEB, A. H., AL-HARAHSEH, M., HARARAH, M., *et al.*, 2010, “Drying Characteristics and Quality Change of Unutilized-Protein Rich-Tomato Pomace with and without Osmotic Pre-Treatment”, *Industrial Crops and Products*, v. 31, pp. 171–177.

ANDRADE, F. E., 1996, *Solução de Equações Diferenciais Acopladas Pela Técnica de Transformada Integral e Computação Simbólica*. Dissertação (Mestre em Ciência da Computação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

ARAUJO, E.A.F., 2000, *Estudo da Cinética De Secagem De Fatias De Banana Nanica (Musa acuminiata var. Cavendish) Osmoticamente Desidratadas*. Dissertação (Mestre em Engenharia de Alimentos), Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

ARAUJO, E.A.F., 2005, *Estudo do Processo de Desidratação Osmótica e Secagem de Nectarina (Prunus persica)*. Tese (Doutor em Engenharia de Alimentos), Faculdade de Engenharia de Alimentos, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

AZZOUS, S., GUIZANI, A., JOMAA, W., *et al.*, 2002, “Moisture Diffusivity and Drying Kinetic Equation of Convective Drying of Grapes”, *Journal of Food Engineering*, v. 55, pp. 323-330.

BABALIS, S. J., BELESSIOTIS, V. G., 2004, “Influence of The Drying Conditions on the Drying Constants and Moisture Diffusivity During the Thin-Layer Drying of Figs”, *Journal of Food Engineering*, v. 65, pp. 449–458.

BARROS, F. P. J., MILLS, W. B., COTTA, R. M., 2006, “Integral Transform Solution of a Two-Dimensional Model for Contaminant Dispersion in Rivers and Channels with Spatially Variable Coefficients”, *Environmental Modelling & Software*, v. 21, pp. 699-709.

BECK, J. V. and WOODBURY, K., 1998, “Introductory Article-Inverse Problems and Parameter Estimation: Integration of Measurements and Analysis”, *Meas. Science Technology*, n. 9, pp. 839-847.

BECK, J. V. and ARNOUD, K. J., 1977, *Parameter Estimation in Engineering and Science*. New York: John Wiley & Sons.

BENAMOUN, L., BELHAMRI, A., 2006, “Numerical Simulation of Drying under Variable External Conditions: Application to Solar Drying of Seedless Grapes”, *Journal of Food Engineering*, v. 76, pp. 179–187.

BOYCE, W. e DIPRIMA, R. D., 2006, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8 ed., Rio de Janeiro, Brasil.

BROD, F. P. R., PARK, K. J. e OLIVEIRA, R. A., 2003, “Modelos Matemáticos para Representar a Secagem de Raiz de Chicória”, *Engenharia Agrícola*, Jaboticabal-SP, v. 23, n. 2, pp. 354-363.

CASSOL, M., WORTMANN, S., RIZZA, U., 2009, “Analytic Modeling of Two-Dimensional Transient Atmospheric Pollutant Dispersion by Double Gitt and Laplace Transform Techniques”, *Environmental Modelling & Software*, v. 24, pp. 144–151.

CHIRIFE, J., 1983, *Fundamentals of the Drying Mechanism During Air Dehydration of Foods*. In: *Advances in drying*, ed. Arum S. Mujundar, Hemisphere Publishing Corporation. Washington.

CHONG, C. H., LAW, C. L., CLOKE, M., *et al.*, 2008, “Drying Kinetics and Product Quality of Dried Chempedak”, *Journal of Food Engineering*, v. 88, pp. 522–527.

COLAÇO, M. J. and ORLANDE, H. R. B., 2004, “Inverse Natural Convection Problem of Simultaneous Estimation of Two Boundary Heat Fluxes in Irregular Cavities”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, pp. 1201-1215.

COLAÇO, M. J., ORLANDE, H. R. B., DULIKRAVICH, G. S., 2006, “Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer”, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, v. XXVIII.

CORZO, O., BRACHO, N., ALVAREZ, C., 2008, “Water Effective Diffusion Coefficient of Mango Slices at Different Maturity Stages During Air Drying”, *Journal of Food Engineering*, v. 87, pp. 479–484.

COSTA, A. R. S., 2008, *Sistema de secagem solar para frutos tropicais e modelagem da secagem de banana em um secador de coluna estática*. Tese (Doutor em Engenharia Química). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

COTTA, R.M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton.

CRANK, J., 1975, *The Mathematics of Diffusion*. 2a ed. S.I. Claredon Press Oxford.

CUNHA, F. G. M., 2002, *Abordagem Analítico-Numérica da Transferência de Calor e Massa com Efeito da Pressão*. Dissertação (Mestre em Ciência da Computação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

DANTAS, L. B., 2000. *Comparação de Técnicas de Solução e Estimativa de Parâmetros para a Formulação de Luikov em Meios Porosos Capilares*. Tese (Doutor em Engenharia Mecânica), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

DANTAS, L. B., ORLANDE, H. R. B., COTTA, R. M., 2002, “Estimation of Dimensionless Parameters of Luikov’s System for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media”, *International Journal of Thermal Sciences*, v. 41, pp. 217-227.

DANTAS, L. B., ORLANDE, H. R. B., COTTA, R. M., 2003, “An Inverse Problem of Parameter Estimation for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, pp. 1587-1598.

DANTAS, L. B., ORLANDE, H. R. B., COTTA, R. M., 2007, “Improved Lumped-Differential Formulations and Hybrid Solution Methods for Drying in Porous Media”, *International Journal of Thermal Sciences*, v. 46, pp. 878-889.

EL-AOUAR, A. A., AZOUBEL, P. M. e MURR, F. E. X., 2003, “Drying Kinetics of Fresh and Osmotically Pré-Treated Papaya”, *Journal of Food Engineering*, v. 59, pp. 85-91.

FGUIRI, A., DAOUAS, N., BORJINI, N., *et al.*, 1997, “Experimental Inverse Analysis for the Determination of Boundary Conditions in the Parallel Hot Wire Technique”, *International Thermal and Fluid Science*, v. 31, pp. 209-220.

GARCIA, C. C., MAURO, M. A., KIMURA, M., 2007, “Kinetics of Osmotic Dehydration and Air-Drying of Pumpkins (*Cucurbita moschata*)”, *Journal of Food Engineering*, v. 82, pp. 284–291.

GASPARETO, O. C. P., OLIVEIRA, E. L., SILVA, P. D. L., *et al.*, 2004, “Influencia del Tratamiento em el Secado de la Banana “Nanica” (*Musa cavendishii*, L.) en Secador de Lecho Fijo”, *Información Tecnológica*, La Serena, v. 15, n. 6, pp. 9-16.

GONZÁLEZ-FÉSLER, M., SALVATORI, D., GÓMEZ, P., *et al.*, 2008, “Convective Air Drying of Apples as Affected By Blanching and Calcium Impregnation”, *Journal of Food Engineering*, v. 87, pp. 323–332.

HII, C. L., LAW, C.L., CLOKE, M., *et al.*, 2009, “Thin Layer Drying Kinetics of Cocoa and Dried Product Quality”, *Bio Systems Engineering*, v. 102, pp. 153–161.

HUANG, C-H and HUANG, C-Y, 2007, “An Inverse Problem in Estimating Simultaneously the Effective Thermal Conductivity and Volumetric Heat Capacity”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 31, pp. 1785-1797.

IRUDAYARAJ J. and WU, Y. 1999, “Heat and Mass Transfer Coefficients in Drying of Starch Based Food Systems”, *Journal of Food Science*, v. 64, pp. 323-327.

KANEVCE, G.H., KANEVCE, L.P., MITREVSKI, V. B., *et al.*, 2005, “Inverse Approaches to Drying of Bodies with Significant Shrinkage Effects”. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Cambridge, UK.

KARIM, Md. A. and HAWLADER, M. N. A., 2005, "Drying Characteristics of Banana: Theoretical Modelling and Experimental Validation", *Journal of Food Engineering*, v. 70, pp. 35-45.

KEEY, R. B., 1972, *Drying: Principles and Practice*. Oxford.

KUROZAWA, L. E., 2005, *Efeito das Condições de Processo na Cinética de Secagem de Cogumelo (Agaricus blazei)*. Dissertação (Mestre em Engenharia de Alimentos), Faculdade de Engenharia de Alimentos, FEA/UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

LE NILIOT, C. and LEFÈVRE, F., 2004, "A Parameter Estimation Approach to Solve the Inverse Problem of Point Heat Sources Identification", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, pp. 827-841.

LESCANO, C. A. A., TOBINAGA, S., 2004, "Modelo Codificado e Real para a Difusividade Efetiva da Secagem do Resíduo do Extrato Hidrossolúvel de Soja", *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*, Campina Grande-PB, v. 6, n. 1, pp. 17-25.

LIMA, A. G. B., 1999, *Fenômeno de Difusão em Sólidos Esferoidais Prolatos. Estudo de Caso: Secagem de Bananas*. Tese (Doutor em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

LIMA, L. A., MARCONDES, F., ALMEIDA, M. M., *et al.*, 2002, "Análise de Modelos Matemáticos que Predizem a Secagem de Fatias de Goiaba Tipo Paloma". *Em II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, João Pessoa, PB, Brasil, 12-16 de Agosto.

LUIKOV, A. V., 1966, *Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies*. Pergamon Press, Oxford.

LUIKOV, A. V., 1968, *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press, New York, USA.

LUIKOV, A. V., 1975, “Systems of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in Capillary- Porous Bodies”, *International Journal Heat and Mass Transfer*, v. 18, pp. 1-14.

MACÊDO, E. N., COTTA, R. M., ORLANDE, H. R. B., 1999, “Local-Instantaneous Filtering in the Integral Transform Solution of Non-Linear Diffusion Problems”, *Computational Mechanics*, v. 23, pp. 524-532.

MACÊDO, E. N., MANESCHY, C. E., QUARESMA, J. N. N., 2000, “Analysis of the Mass Transfer Entry Region for Drag-Reducing Viscoelastic Fluids in Turbulent Pipe Flow”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 27, pp. 59–68.

MACHADO, H. A., 1998, *Soluções em Convecção Térmica com Propriedades Variáveis via Transformação Integral*. Tese (Doutor em Engenharia Mecânica), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MARIANI, V. C., LIMA, A. G. B., COELHO, L. S., 2007, “Inverse Problem for Estimation of Apparent Thermal Diffusivity”. In *Proceedings COBEM 2007: 19th International Congress of Mechanical Engineering*, November, 5-9, Brasilia, DF.

MARTINS, R. C. and SILVA, C. L. M., 2004, “Inverse Problem Methodology for Thermal-Physical Properties Estimation of Frozen Green Beans”, *Journal of Food Engineering*, v. 63, pp. 383-392.

MEJIAS, M. M., ORLANDE, H. R. B., OZISIK, M. N., 1999, “A Comparison of Different Estimation Techniques for the Identification of Thermal Conductivity Components of Orthotropic Solids”. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Inverse Problems in Engineering*, Port Ludlow, USA, 1–7.

MELLADO, E. C. E. R., 2007, *Modelo de Transferência de Calor e Massa na Secagem de Madeira Serrada de Pinus*. Tese (Doutor em Engenharia Florestal), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil.

MENDONÇA, S.L.R. and CELSO FILHO, R.B., 2005, “Transient Conduction in Spherical Fruits: Method to Estimate the Thermal Conductivity and Volumetric Thermal Capacity”, *Journal of Food Engineering*, v. 67, pp. 261–266.

MIKHAILOV, M.D.; ÖZISIK, M.N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. John Wiley, New York.

MONTEAU, J-Y., 2008, “Estimation of Thermal Conductivity of Sandwich Bread Using an Inverse Method”, *Journal of Food Engineering*, v. 85, pp. 132-140.

MONTEIRO, E. R., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., *et al.*, 2009, “Integral Transform Solution for Hyperbolic Heat Conduction in a Finite Slab”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 36, pp. 297–303.

MZALI, F. SASSI, L., JEMNI, A. *et al.*, 2002, “Optimal Experiment Design and Simultaneous Identification of Thermo-Physical Properties of Orthotropic Solids”. *In: 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering*, Rio de Janeiro, Brasil.

NAVEIRA, C. P., LACHI, M., COTTA, R. M., *et al.*, 2007, “Integral Transform Solution of Transient Forced Convection in External Flow”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 34, pp. 703–712.

NICOLETI, J. F., 2005, *Secagem de Caqui em Condições Controladas: Efeito sobre a Qualidade do Produto e Consumo Energético*. Tese (Doutor em Engenharia de Alimentos), Faculdade de Engenharia de Alimentos, FEA/UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

NIETO, A., CASTRO, M. A. e ALZAMORA, S. M., 2001, “Kinetics of Moisture Transfer During Air Drying of Blanched and/or Osmotically Dehydrated Mango”, *Journal of Food Engineering*, v. 50, pp. 175-185.

OLIVEIRA, R. A., OLIVEIRA, W. P. e PARK, K. J., 2006, “Determinação da Difusividade Efetiva de Raiz de Chicória”, *Engenharia Agrícola*, Jaboticabal - SP, v. 26, n. 1, pp. 181-189.

ÖZISIK, M. N. and ORLANDE, H. R. B., 2000, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. Taylor & Francis.

ÖZİŞİK, M. N., 1993, *Heat Conduction*. 2 ed. New York, John Wiley & Sons.

ÖZISIK, M. N. and MURRAY, R.L., 1974, “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions”, *Journal Heat Transfer*, v.96, pp.48-51.

PANCHARIYA, P. C., POPOVIC, D., SHARMA, A. L., 2002, “Thin-Layer Modelling of Black Tea Drying Process”, *Journal of Food Engineering*, v. 52, pp. 349-357.

PARK, K. J., 1988, *Fundamentos de Secagem*. Notas de aula. Faculdade de Engenharia Agrícola–UNICAMP, Campinas, Brasil.

PARK, K. J., BIN, A., BROD, F. P. R., 2002, “Drying of Pear d’Anjou with and without Osmotic Dehydration”, *Journal of Food Engineering*, v. 56, pp. 97-103.

QUEIROZ , M. R. and NEBRA, S. A., 2001, Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of banana”, 2001, *Journal of Food Engineering*, v. 47, pp. 127-132.

QUEIROZ, M. R., NEBRA, S. A., 2003, “Abordagem Teórica e Experimental do Encolhimento na Secagem de Bananas”, *Engenharia Agrícola, Jaboticabal*, v. 23, n. 2, pp. 364-371.

RAMOS, I. N., MIRANDA, J. M. R., BRANDÃO, T. R. S., *et al.*, 2010, “Estimation of Water Diffusivity Parameters on Grape Dynamic Drying”, *Journal of Food Engineering*, v. 97, pp. 519–525.

RIBEIRO, J. W., COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., 1993, “Integral Transform Solution of Luikov’s Equations for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media”, *International Journal Heat and Mass Transfer*, v. 36, pp. 4467-4475.

SANTOS, C. A. C., 2001, “Convecção Forçada Laminar de Fluidos Não Newtonianos em Tubos Externamente Aletados”. In: *XI COBEM - International Congress of Mechanical Engineering*, São Paulo.

SARAVACOS, G.D.; RAOUZEOS, G.S., 1989, *Diffusivity of Moisture in Air Drying of Raisins*. In: *Drying 86*, ed. Arum S. Mujumdar, Hemisphere Publishing Corporation, 2: 486-491.

SCOFANO NETO, F., COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., 1990, “Alternative Approach to the Integral Transform Solution of Nonhomogeneous Diffusion Problems”, *Int. Conf. On Adv. Comp. Methods in Heat Transfer*, v. 1, pp. 39-50, Southampton, UK, July.

SHENEFELT, J. R., LUCK, R., TAYLOR, R. P. *et al.*, 2002, “Solution to Inverse Heat Conduction Problems Employing Singular Value Decomposition and Model-Reduction”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, pp. 67-74.

SILVA, C. K. F. e SILVA, Z. E., 2010(b), “Transformada Integral e Estimação de Parâmetros no Processo de Secagem de Alimentos”. In: *II Colóquio de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica*, João Pessoa, PB, Brasil.

SILVA, C. K. F., OLIVERIA, A. S. S., KUROZAWA, L. E., *et al.*, 2010(a), “CITT and Inverse Analyses Applied to the Study of the Mushroom Drying Process”, *Journal of Food Engineering*, v. 101 (2), pp. 166-178.

SILVA, C. K. F., SILVA, Z. E. and MARIANI, V. C., 2009, “Determination of the Diffusion Coefficient of Dry Mushrooms Using the Inverse Method”, *Journal of Food Engineering*, v. 95 (1), pp. 1-10.

SILVA, C. K. F., 2007, *Aplicação da Análise Inversa ao Modelo Difusional de Transferência de Massa*. Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.

SIMPSON, R. and CORTÉS, C., 2004, “An Inverse Method to Estimate Thermophysical Properties of Foods at Freezing Temperatures: Apparent Volumetric Specific Heat”, *Journal of Food Engineering*, v. 64, pp. 89-96.

SOUZA, J. S., 2002, *Estudo da Desidratação de Tomates (*Lycopersicon esculentum*) em Pedacos com Pré-Tratamento Osmótico*. Dissertação (Mestre em Engenharia Química), Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN, Natal, RN, Brasil.

TELIS, V.R.N., MURARI, R.C.B.D.L., YAMASHITA, F., 2004, “Diffusion Coefficients During Osmotic Dehydration of Tomatoes in Ternary Solutions”, *Journal of Food Engineering*, v. 61, pp. 253–259.

VASCONCELLOS, J. F. V., SILVA NETO, A. J. e SANTANA, C. C., 2002, “Estimativa do Coeficiente de Difusão e da Isotherma de Adsorção em Processo de Separação de Proteínas”. In: www.sbmac.org.br/bol/boletim_2002.

VENEZUELA, A. L., PÉREZ-GUERRERO, J. S., FONTES, S. R., 2009, “Hybrid Modeling of Convective Laminar Flow in a Permeable Tube Associated with the Cross-Flow Process”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, pp. 795–810.

VERONESE, J. P., 2008, *Análise do escoamento Bidimensional de Fluidos Não Newtonianos Com Formulação Em Variáveis Primitivas Via GITT*. Tese (Doutor em Engenharia Mecânica), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.

WALDE, S. G., VELU, V., JYOTHIRMAYI, T., *et al.*, 2006, “Effects of Pretreatments and Drying Methods on Dehydration of Mushroom”, *Journal of Food Engineering*, v. 74, pp. 108-115.

XIAO, Hong-Wei, PANG, Chang-Le, WANG, Li-Hong, *et. al.*, 2009, “Drying Kinetics and Quality of Monukka Seedless Grapes Dried in an Air-Impingement Jet Dryer”, *Bio Systems Engineering*, pp. 1–8.

YANG, C. and GAO, S., 2007, “An Inverse Analysis to Estimate Thermal Conductivity Components of an Orthotropic Medium”. In: *Third International Conference on Natural Computation*.

ZUECO, J., ALHAMA, F., GONZÁLES FERNÁNDEZ, C. F., 2004, “Inverse Determination of the Specific Heat of Foods”, *Journal of Food Engineering*, v. 64, pp. 347-353.