



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Mestrado e Doutorado

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS: AMBIENTE DE SIMULAÇÃO EM JAVA

por

Paulo César de Oliveira Queiroz

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para
obtenção do grau de Mestre.

João Pessoa - Paraíba

Outubro, 2010

PAULO CÉSAR DE OLIVEIRA QUEIROZ

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS
RETICULADAS: AMBIENTE DE SIMULAÇÃO EM JAVA**

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação de Engenharia Mecânica
da Universidade Federal da Paraíba como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Professor Dr. Ângelo Vieira Mendonça.

Q3a

Queiroz, Paulo César de Oliveira.

Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: ambiente de simulação em JAVA / Paulo César de Oliveira Queiroz.- João Pessoa, 2010.

235f. : il.

Orientador: Ângelo Vieira Mendonça

Dissertação (Mestrado) ã UFPB/CT

1. Engenharia Mecânica. 2. MEF. 3. MEC. 4. JAVA. 5. Interação solo-estrutura. 6. Núcleo de rigidez.

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS: AMBIENTE DE SIMULAÇÃO EM JAVA

por

PAULO CÉSAR DE OLIVEIRA QUEIROZ

Dissertação aprovada em 28 de outubro de 2010

Período letivo 2010.2


Prof. Dr. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA
Orientador – UFPB


Prof. Dr. ROBERTO LEAL PIMENTEL
Examinador Interno - UFPB


Profa. Dra. SELMA HISSAE SHIMURA DA NÓBREGA
Examinadora Externa – UFRN

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha avó Dulce Pereira de Araújo Marinho, in memoriam, um dos pilares da minha vida e formação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que nos concede a fé e a força necessária para a superação dos obstáculos e por ter me guiado em todos os momentos da minha vida.

Ao professor Orientador, Ângelo Vieira Mendonça, pela paciência, companheirismo e pela sua imprescindível contribuição a esse trabalho, do qual não seria possível sem sua ajuda.

Aos amigos do mestrado, em especial a Moisés Menezes Salvino, que trouxe valiosas contribuições neste trabalho, Amanda Guerra de Araújo por sua amizade e cooperação no decorrer do programa e aos professores Carlos Antonio Taurino de Lucena e Marcílio Filgueiras Cruz.

Agradeço também a minha família e de forma especial a minha avó, Dulce Pereira de Araújo Marinho, pelo seu esforço e empenho em me oferecer uma formação sólida.

Agradeço, a todos os professores, com os quais tive a oportunidade de caminhar junto. E a todo o pessoal do CREA pelo o apoio concedido, em especial ao superintendente Eng.º Corjesu Paiva dos Santos e ao chefe da fiscalização Eng.º Raimundo Nonato.

Finalmente, agradeço aos meus amigos pelo apoio e ajuda, e em geral a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a minha formação.

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS: AMBIENTE DE SIMULAÇÃO EM JAVA

RESUMO

Neste trabalho são descritas análises estática e dinâmica em regime elástico de estruturas reticuladas utilizando o método dos elementos finitos (MEF). A superestrutura é modelada para seis famílias de estruturas reticuladas (treliça plana, treliça espacial, pórtico plano, grelha, pórtico espacial e pórtico espacial enrijecido com núcleo estrutural) e elementos finitos específicos são desenvolvidos para esse fim. Nos casos pertinentes, os efeitos de flexão (segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko), de torção (segundo as hipóteses de Saint Venant e Vlasov), são devidamente explorados e as formas explícitas das matrizes de rigidez, de massa e vetor nodal equivalente são apresentadas.

Um enfoque especial é dado para o problema de interação solo-estrutura em regime estático. Nesse caso a superestrutura, que pode ser associada ao pórtico espacial sem enrijecimento por núcleo estrutural, é modelada pelo MEF e o solo (admitido ser um sólido elástico semi-infinito) é representado por equações integrais compostas e sistematizado algebricamente pelo método dos elementos de contorno (MEC). E por fim, os sistemas algébricos do MEF e do MEC são compatibilizados permitindo assim a análise da interação solo-estrutura. Outro enfoque do trabalho é o desenvolvimento de um ambiente de simulação (denominado SAPROMS NET) voltado, principalmente, para as etapas de pré-processamento e processamento. Essas são implementadas na linguagem orientada a objetos Java. Alguns exemplos numéricos são apresentados, assim como o detalhamento do ambiente de simulação.

Palavras chaves: interação solo-estrutura, núcleo de rigidez, MEC, MEF.

STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF FRAME STRUCTURES: SIMULATION ENVIRONMENT USING JAVA

ABSTRACT

In this work a static and dynamic elastic analyses of frame structures using the finite element method (FEM) is described. The superstructure is modeled employing six sets of frame structures (plane truss, space truss, plane frame, grided, space frame and space frame stiffened by shear cores) and specific finite elements are developed for these purposes. According to the specific case, bending effects (Euler-Bernoulli or Timoshenko models), torsional effects (under Saint Venant or Vlasov assumptions) are properly operated and the explicit forms of stiffness and mass matrices and equivalent nodal vector are presented.

Special attention is paid to the static soil-structure interaction problem. In this case the superstructure (standard space frame) is modeled by FEM, whereas the soil is assumed to be an elastic half-space and modeled by the boundary element method (BEM). Finally the algebraic systems from both methods are coupled in order to allow the soil-structure interaction analysis. Another focus of this study is to develop a simulation environment (called SAPROMS NET) incorporating mainly the preprocessing and processing steps and both are implemented in object-oriented language Java. Some numerical examples are presented, as well as details of the simulation environment.

Key words: soil-structure interaction, shear cores, BEM, FEM.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....21

1.1. GENERALIDADES	21
1.2. MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	27
1.3. OBJETIVOS	27
1.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	28
1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	28

CAPÍTULO II:.....29

SUPERESTRUTURA: ANÁLISE ESTÁTICA	29
2.1. GENERALIDADES	29
2.2. MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL DO ELEMENTO DE BARRA	31
2.2.1. CONTRIBUIÇÃO AXIAL	32
2.2.2. CONTRIBUIÇÕES DO PROBLEMA DE FLEXÃO COM DEFORMAÇÃO POR CORTANTE	40
2.2.3. CONTRIBUIÇÃO DA TORÇÃO	63
2.3. ESTRUTURAS RETICULADAS: ABORDAGEM ESTÁTICA	78
2.3.1. ELEMENTO DE TRELIÇA	79
2.3.2. ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO	79
2.3.3. ELEMENTO DE GRELHA	83
2.3.4. ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL:	85
2.3.5. ELEMENTO DE NÚCLEO ESTRUTURAL	88
2.4. CONTRIBUIÇÃO DOS VÍNCULOS ELÁSTICOS NA MATRIZ DE RIGIDEZ	96
2.5. TRANSFORMAÇÃO DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIAS	97
2.6. MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E VETOR DE FORÇA DA ESTRUTURA	101

CAPÍTULO III:111

SUPERESTRUTURA: ANÁLISE DINÂMICA	111
3.1. GENERALIDADES	111
3.1.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO COM UM GRAU DE LIBERDADE	114
3.1.2. SISTEMAS COM MAIS DE UM GRAU DE LIBERDADE	116
3.2. MATRIZ DE MASSA LOCAL NOS PROBLEMAS CLÁSSICOS DE BARRA	120
3.2.1. CONTRIBUIÇÃO AXIAL	121
3.2.2. CONTRIBUIÇÕES DO PROBLEMA DE FLEXÃO COM DEFORMAÇÃO POR CORTANTE	125
3.2.3. CONTRIBUIÇÃO DE TORÇÃO UNIFORME:	134
3.3. MATRIZ DE MASSA DE ELEMENTOS CLÁSSICOS DE BARRA	137
3.3.1. TRELIÇAS	138
3.3.2. PÓRTICO PLANO	139
3.3.3. GRELHA	141
3.3.4. PÓRTICO ESPACIAL	142
3.4. MATRIZ DE MASSA LOCAL DO ELEMENTO DE NÚCLEO	144

3.5. TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA LOCAL PARA O GLOBAL.....	156
3.6. MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA	157

CAPÍTULO IV:158

INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA	158
4.1. GENERALIDADES	158
4.2. O SOLO	159
4.2. ACOPLAMENTO PÓRTICO-SOLO	168

CAPÍTULO V:175

A LINGUAGEM JAVA E O APLICATIVO PARA ESTRUTURAS RETICULADAS ã SAPROMS NET	175
5.1 GENERALIDADES	175
5.2. CARACTERÍSTICAS DA LINGUAGEM JAVA	176
5.1.1 PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS	177
5.1.2 DEFINIÇÕES DE CLASSES	178
5.1.3 OBJETOS.....	179
5.1.4 HERANÇA	180
5.1.5 POLIMORFISMO.....	181
5.2. MODELAGEM DE UM SOFTWARE LOCAL (FRAME) E UM PARA A WEB (APPLET)	182
5.2.1 DIAGRAMA DE CLASSES UTILIZANDO UML	184

CAPÍTULO VI:195

RESULTADOS NUMÉRICOS	195
6.1. ANÁLISE ESTÁTICA	195
6.1.1. TRELIÇA PLANA	195
6.1.2. TRELIÇA ESPACIAL	197
6.1.3. PÓRTICO PLANO.....	199
6.1.3.1. PÓRTICO PLANO SEM ARTICULAÇÃO.....	199
6.1.3.1. PÓRTICO PLANO COM ARTICULAÇÃO	200
6.1.4. PÓRTICO ESPACIAL.....	202
6.1.4.1. PÓRTICO ESPACIAL SEM EFEITO DE NÚCLEO ESTRUTURAL.....	202
6.1.4.2. BARRA ENGASTADA SOBRE APOIO ELÁSTICO	204
6.1.4.3. BARRA DE SEÇÃO DE PAREDES FINAS: PERFIL I.....	205
6.1.4.4. BARRA DE SEÇÃO DE PAREDES FINAS: PERFIL U	206
6.1.4.5. PÓRTICO ESPACIAL APOIADO NO MEIO CONTÍNUO.....	208
6.1.4.6. PÓRTICO ESPACIAL ENRIJECIDO.....	210
6.1.5. GRELHA.....	213
6.2. ANÁLISE DINÂMICA	214
6.2.1. VIGA ENGASTADA-APOIADA.....	214
6.2.2. TRELIÇA PLANA	215
6.2.3. PÓRTICO PLANO.....	216
6.2.3.1. PÓRTICO PLANO SEM EFEITO DO CORTANTE.....	216
6.2.3.2. PÓRTICO PLANO TRI-ENGASTADO	218
6.2.4. PÓRTICO ESPACIAL.....	220
6.2.6. VIGAS COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS.....	221
6.2.6.1. PERFIL I BI-APOIADO.....	221

6.2.6.2. VIGA DE PAREDE FINA SEMI-CIRCULAR ENGASTADA.....	222
<u>CONCLUSÕES.....</u>	<u>224</u>
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</u>	<u>226</u>
<u>APÊNDICE A</u>	<u>230</u>

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 ñ Componentes estruturais de um edifício usual	22
Figura 1.2 ñ Pórtico Espacial (Estrutura-Solo).....	23
Figura 1.3 ñ Divisão das estruturas reticuladas de interesse nesse trabalho	26
Figura 2.1 ñ Divisão do domínio da estrutura em regiões menores (barras).....	29
Figura 2.2 ñ Efeito axial.....	36
Figura 2.3 ñ Barra submetida ao carregamento axial distribuído, com o seu carregamento nodal equivalente	38
Figura 2.4 ñ Trecho da seção de uma viga com deformação por esforço cortante.....	41
Figura 2.5 ñ Representação do sistemas de coordenadas adimensionais ξ	44
Figura 2.6 - Carregamento distribuído transversalmente na direção z com suas forças nodais equivalentes	50
Figura 2.7 ñ Elemento de barra	52
Figura 2.8 ñ Barra articulada à direita.....	52
Figura 2.9 - Barra articulada à direita submetida a carregamento uniforme.....	56
Figura 2.10 ñ Barra articulada à esquerda.....	56
Figura 2.11 ñ Barra articulada à esquerda submetida a carregamento uniforme	59
Figura 2.12 ñ Carregamento distribuído transversalmente na direção y com suas forças nodais equivalentes	62
Figura 2.13 ñ Componente de uma barra submetida à torção.....	64
Figura 2.14 ñ Representação esquemática para interpolação linear	66
Figura 2.15 ñ Tensões de cisalhamento: (a) empenamento, (b) uniforme.....	69
Figura 2.16 ñ Representação da área setorial.	70
Figura 2.17 ñ Representação esquemática para interpolação linear	76
Figura 2.18 ñ Barra submetida a torque distribuído, com suas forças nodais equivalentes.....	77
Figura 2.19 ñ Graus de liberdade de uma treliça.....	79
Figura 2.20 ñ Graus de Liberdade do pórtico plano	79
Figura 2.21 ñ Composição da Matriz de Rigidez Local para o Pórtico Plano	80

Figura 2.22 ã Graus de Liberdade da Barra de Grelha	84
Figura 2.23- Graus de Liberdade da barra de pórtico espacial.....	85
Figura 2.24 - Composição da Matriz de Rigidez Local para o Pórtico Espacial.....	86
Figura 2.25 ã Sistema de graus de liberdade bi-referenciado	89
Figura 2.26 ã Formação da matriz de rigidez na barra de núcleo estrutural.....	91
Figura 2.27 ã Seção do núcleo estrutural, com o seu centro de gravidade e o seu centro de torção.....	93
Figura 2.28 - Sistemas de referência local e global do elemento de barra de treliça plana .	98
Figura 2.29 ã Sistemas de referência local e global do elemento de barra de Pórtico Plano e Grelha.....	100
Figura 2.30 ã Deslocamentos globais no elemento de treliça plana.....	102
Figura 2.31 ã Espalhamento da matriz de rigidez elemental de treliça plana na matriz global da estrutura $[k]_{est}$,	103
Figura 2.32 ã Espalhamento do vetor de esforços do elemento de treliça plana no vetor de esforços da estrutura $[f]_{est}$,	103
Figura 2.33 - Espalhamento da matriz de rigidez elemental de pórtico plano/treliça espacial/grelha na matriz da estrutura $[k_{est}]$,	104
Figura 2.34 - Espalhamento do vetor de esforços do pórtico plano/treliça espacial/grelha no vetor de esforços da estrutura $[f_{est}]$	105
Figura 2.35 ã Matriz de rigidez da estrutura para elemento de pórtico espacial.....	106
Figura 2.36 - Espalhamento do vetor de esforços do pórtico espacial no vetor de esforços da estrutura $[f]_{est}$,	106
Figura 2.37 ã Pórtico Espacial enrijecido: (a)geometria, (b)discretização (c)graus de liberdade do elemento de núcleo	107
Figura 2.38 - Espalhamento do vetor de esforços do pórtico enrijecido na estrutura $[f]_{est}$	110
Figura 3.1 ã Classificação aproximada do comportamento, tipos de análise e métodos em dinâmica segundo Mendonça (2006)	111
Figura 3.2 ã Algumas das causas indesejáveis das vibrações	114
Figura 3.3 ã (a) Sistema idealizado k-c-m excitado, (b) diagrama de corpo livre	115
Figura 3.4 ã (a) Força numa mola proporcional ao deslocamento, (b) força num amortecedor proporcional à velocidade.	115

Figura 3.5 ã Modelo com vários graus de liberdade Mendonça (2006).	117
Figura 3.6 ã Diagrama de corpo livre da massa m_i forças presentes, Mendonça (2006)...	117
Figura 3.7 ã Barra de treliça em 2D, submetida ao efeito dinâmico	138
Figura 3.8 - Composição da Matriz de Massa Local para o Pórtico Plano	140
Figura 3.9 - Composição da Matriz de Massa Local para a barra de Grelha.	142
Figura 3.10 - Composição da Matriz de Massa Local para a barra de Pórtico Espacial...	144
Figura 4.1 ã Interação solo-estrutura e seus sistemas de referência.	158
Figura 4.2 ã Forças atuantes no solo: (a) nodal equivalente, (b) distribuídas.	160
Figura 4.3 - Esquema representativo da integração sobre a célula.....	162
Figura 4.4 ãInterface submetida aos efeitos de rotação e translação.....	167
Figura 4.5 ã Forças reativas na sapata	171
Figura 4.6 ã Representação dos graus de liberdade: (a) solo, (b) estrutura	173
Figura 5.1 ã Esquema de um compilador de uma linguagem convencional.....	176
Figura 5.2 ã Diagrama esquemático da máquina virtual	177
Figura 5.3 ã Fluxograma das principais classes do aplicativo	182
Figura 5.4 ã Trecho do código fonte do aplicativo.....	183
Figura 5.5 ã Ambiente interativo do SAPROMS NET.....	184
Figura 5.6 - Diagrama da classe No.....	185
Figura 5.7 ã Adicionando Nós à Estrutura.....	185
Figura 5.8 ã Adicionando os esforços nos nós	186
Figura 5.9 ã Prescrição dos Nós	186
Figura 5.10 - Diagrama da classe Barra	187
Figura 5.11 ã Criando o objeto barra.....	188
Figura 5.12 ã Entrada dos carregamentos da barra.....	189
Figura 5.13 ã Diagrama da Classe Dinâmica.	190
Figura 5.14 ã Entrada de dados da frequência da estrutura	190
Figura 5.15 ã Classe Solo.....	191
Figura 5.16 - Entrada das propriedades do Solo.....	192
Figura 5.17 ã Diagrama da classe Estrutura.....	193
Figura 5.18 ã Possibilidade de Resultados emitidos pelo programa	194
Figura 6.1 ã Treliça plana	195
Figura 6.2 ã Treliça Espacial.....	197
Figura 6.3 ã Pórtico Plano sem articulação.....	200

Figura 6.4 ã Pórtico Plano articulado	201
Figura 6.5 ã Resolução da estrutura pelo Ftool.	201
Figura 6.6 - Pórtico Espacial padrão: (a) perspectiva, (b) discretização e carregamentos e (c) sistema local de referência	202
Figura 6.7 ã Pórtico sobre efeito de mola	204
Figura 6.8 ã Perfil I	205
Figura 6.9 ã Perfil U	207
Figura 6.10 ã Pórtico espacial interagindo com o solo	208
Figura 6.11 ã Discretização das interfaces solo-sapata.....	209
Figura 6.12 ã Pórtico espacial em planta (dimensões em cm)	210
Figura 6.13 ã Pórtico Enrijecido: (a) perspectiva, (b) discretização	211
Figura 6.14 ã Pórtico Enrijecido discretizado pelo ANSYS	212
Figura 6.15 - Grelha	213
Figura 6.16 ã Viga de aço	215
Figura 6.17 ã Exemplo dinâmico para treliça plana	216
Figura 6.18 ã (a) Pórtico plano articulado em forma de cruz, (b) Discretização do pórtico plano	217
Figura 6.19 ã (a) Pórtico plano e (b) discretização.....	218
Figura 6.20 ã Pórtico Espacial com sua discretização	220
Figura 6.21 ã Viga simplesmente apoiada	221
Figura 6.22 ã Resposta Amplitude versus Frequência.....	222
Figura 6.23 ã Viga de parede fina semi-circular engastada com suas propriedades	222

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 ã Significado dos campos físicos dos graus de liberdade da barra de elemento de núcleo com sua representação simbólica.	90
Tabela 6.1 - Resultados do exemplo de treliça plana comparados com os da literatura....	196
Tabela 6.2 ã Deslocamentos e esforços na treliça espacial.....	198
Tabela 6.3 ã Deslocamentos e esforços no pórtico plano.	200
Tabela 6.4 ã Deslocamentos do nó 5.	202
Tabela 6.5 ã Reações de apoio.	202
Tabela 6.6 ã Deslocamentos e esforços no pórtico espacial.	203
Tabela 6.7 ã Esforços e deslocamentos da estrutura.....	204
Tabela 6.8 ã Esforços e deslocamentos da estrutura.....	206
Tabela 6.9 ã Esforços e deslocamentos da estrutura.....	207
Tabela 6.10 ã Deslocamentos nos apoios.....	209
Tabela 6.11 ã Reações nos apoios.	210
Tabela 6.12 ã Resultados do SAPROMS NET x Ansys: Componentes de reações de apoio (Forças)	211
Tabela 6.13 ã Resultados do SAPROMS NET(SPN) x Ansys: Componentes de reações de apoio (Momentos e Bimomento).....	212
Tabela 6.14 - Resultados do SAPROMS NET(SPN) x Ansys: Deslocamentos $U_1 - U_3$ (m) no sistema global	212
Tabela 6.15 ã Esforços e deslocamentos da estrutura de grelha	214
Tabela 6.16 ã Resultados do exemplo de viga comparados com os da literatura	215
Tabela 6.17 ã Frequências naturais da treliça	216
Tabela 6.18 ã Frequências naturais do pórtico plano	217
Tabela 6.19 ã Resultados das frequências versus índice de esbeltez 10.....	218
Tabela 6.20 ã Resultados das frequências versus índice de esbeltez 20.....	219

Tabela 6.21 ñ Resultados das freqüências versus índice de esbeltez 50.....	219
Tabela 6.22 ñ Resultados das freqüências obtidas para a viga comparados com os da literatura	220
Tabela 6.23 ñ Inércia de rotação e deformação por cortante incluídos	223
Tabela 6.24 ñ Inércia de rotação incluída e deformação por cortante desconsiderado	223

LISTA DE ABREVIATURAS

3D	Três dimensões
API	Application Programming Interface
CG	Centro de Gravidade
CT	Centro de Torção
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FTOOL	Two-dimensional Frame Analysis Tool
GDL	Grau de Liberdade
JRE	Java Runtime Environment
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
POO	Programação Orientada a Objetos
SPN	Saproms Net
UML	Unified Modeling Language

LISTA DE SÍMBOLOS

π	Funcional de Energia
π_p	Energia potencial de deformação
π_c	Energia cinética
π_{ct}	Energia cinética de translação
π_{cr}	Energia cinética de rotação
W	Trabalho das cargas externas
σ	Tensão normal em um elemento
ε	Deformação axial
τ	Tensão de cisalhamento
γ	Distorção
ν	Coefficiente de Poisson
u_a	Deslocamento axial
u_{fz}	Energia de Flexão em z
u_{fy}	Energia de Flexão em y
u_t	Energia de torção
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
A	Área transversal
I_t	Momento à torção de Inércia
I_ω	Momento setorial de inércia
I_z	Momento de inércia em z

I_y	Momento de inércia em y
I_p	Momento polar de torção
$[K_e]$	Matriz de rigidez da barra axialmente carregada
$[K_g]$	Matriz de rigidez global
$[\bar{K}_g]$	Matriz de rigidez local no sistema unificado no centro de torção
$\{\delta_r\}$	Vetor dos deslocamentos nas extremidades
$\{F_e\}$	Vetor de forças equivalentes
$[rf]$	Matriz que reúne os coeficientes de rigidez axial e à flexão, referida ao centro de gravidade (CG)
C_x	Co-senos diretores na direção x
C_y	Co-senos diretores na direção y
C_z	Co-senos diretores na direção z
s	Coordenada de área setorial
z_t	Coordenada cartesiana do centro de torção em relação ao centro de gravidade na direção z.
y_t	Coordenada cartesiana do centro de torção em relação ao centro de gravidade na direção y.
β_z	Rotação da seção transversal em z
κ	Fator de forma da seção
ξ	Variável adimensional
N_i	Função interpoladora
ψ	Função e empenamento
θ	Ângulo de Torção
T_ω	Momento de Flexo-torção
Θ	Constante arbitrária
ς	Constante arbitrária
χ	Constante arbitrária
L	Comprimento da barra
$\dot{\mathcal{E}}$	Fator da torção não uniforme

$[\beta]$	Matriz de transformação
ρ	Densidade
$[m]$	Matriz de massa consistente em coordenadas locais
$[Z]$	Funções interpoladoras
t	Tempo
$[M_{Tz}]$	Matriz de massa translacional com a contribuição da flexão em z
$[M_{Rz}]$	Matriz de massa rotacional com a contribuição da flexão em z
$[M_{Ty}]$	Matriz de massa translacional com a contribuição da flexão em y
$[M_{Ry}]$	Matriz de massa rotacional com a contribuição da flexão em y
γ_y	Fator de cisalhamento em y
γ_z	Fator de cisalhamento em z
$u_{ij}^*(p, s)$	Solução fundamental em deslocamento
p_j	Componente da força de superfície na direção j
Ω_{el}	Domínio do elemento de contorno
Γ	Região do contorno
$\bar{\rho}$	Raio vetor
ν_s	Coefficiente de Poisson do solo
$\{\bar{P}\}$	Vetor quem contém as forças de superfícies de todos os nós dos elementos de contorno discretizado na superfície do solo.
$\{\bar{U}_s\}$	Vetor quem contém os deslocamentos de superfícies de todos os nós dos elementos de contorno discretizado na superfície do solo.
$\{u_\theta\}$	Vetor de deslocamento da torção não uniforme
$\{u_t\}$	Vetor de deslocamento da torção uniforme
$\bar{u}_{spp}$	Deslocamento vertical y do pilar na p-ésima sapata
θ_{zpp}	Rotação em z do pilar na p-ésima sapata
θ_{ypp}	Rotação em y do pilar na p-ésima sapata
y_p	Coordenada em y do ponto p da locação do pilar
z_p	Coordenada em z do ponto p da locação do pilar

CAPÍTULO I

1.1. GENERALIDADES

A análise estrutural é tarefa complexa e árdua, que requer tempo e paciência, exigindo do projetista grandes conhecimentos, principalmente na tomada de decisões feitas antes e ao longo do processo de cálculo. Dentre as quais podemos destacar as várias decisões a serem tomadas, a seleção dos componentes adequados que irão compor o arranjo estrutural e a adoção dos modelos utilizados para simular o seu comportamento.

Com o advento da informática que vem se desenvolvendo rapidamente, uma nova e poderosa ferramenta de auxílio ao enfadonho processo de cálculo estrutural vem tornando-se indispensável na análise e dimensionamento de estruturas. Com isso torna-se cada vez mais necessário o aprimoramento dos sistemas estruturais e das técnicas de análise computacional das estruturas, de forma a proporcionarem maior economia e principalmente uma adequada segurança.

As etapas para análise estrutural implicam na idealização de problemas físicos a partir de modelos matemáticos. As representações matemáticas dos modelos físicos são, em geral, expressas em equações diferenciais e/ou integrais. Uma das maneiras para construir as soluções dessas equações, ditas governantes, é via métodos analíticos. Contudo eles estão disponíveis para poucos casos, tais como a análise elástica de estruturas aporticadas prismáticas isoladas sob carregamento estático. Para um caso conforme indicado na Figura 1.1, em que há interação do pórtico com outros elementos estruturais do edifício (tais como placas, paredes estruturais, núcleos de rigidez, etc.) as soluções analíticas, em geral, não estão disponíveis para esses casos, requerendo, portanto, a escolha de procedimentos aproximados para a construção das soluções: os métodos numéricos. Dentre as técnicas numéricas destacam-se principalmente o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), e o mais popular deles, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

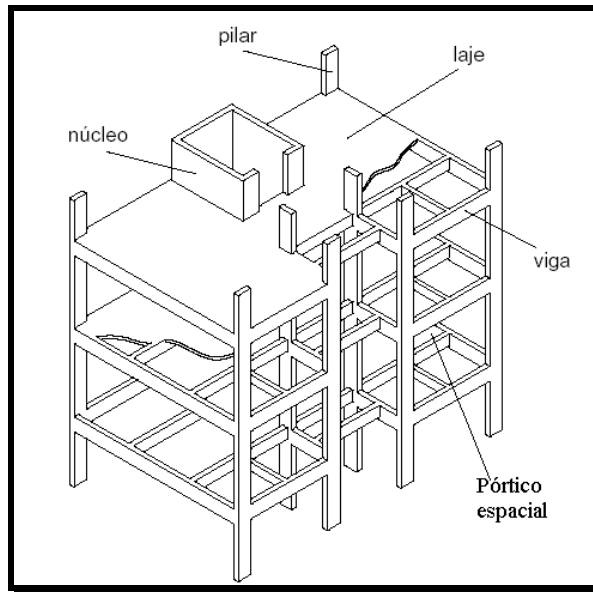


Figura 1.1 – Componentes estruturais de um edifício usual

O Método de Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de cálculo estabelecida a partir da discretização do meio contínuo, de maneira que o sólido é subdividido em um número finito de partes, denominados de “Elementos”, conectados entre si por intermédio de pontos discretos, chamados de “Nós”. Nota-se que uma escolha adequada do tipo e tamanho dos “Elementos” depende das propriedades do problema em questão, e tem papel preponderante na análise. Segundo Clough & Wilson (1999) a análise estrutural anteriormente a 1952 estava restrita à discretização do contínuo utilizando-se elementos conectados a dois pontos no espaço. Pode-se considerar que os primeiros passos da versão atual do MEF foram publicados principalmente nos últimos cinco anos da década de 1950. A designação de Método dos Elementos Finitos foi cunhada por Clough (1960) em um artigo sobre análise de estados planos de tensão, cujos campos de deformações foram interpolados por uma distribuição constante daí o nome CST (Constant Strain Triangle). A partir de então, o MEF já foi aplicado em diversos problemas de análise estrutural desde estruturas reticuladas, passando por estruturas de superfícies (placas, cascas) e finalmente em estruturas volumétricas. A descrição específica do MEF para componentes estruturais pode ser encontrada em diversos trabalhos, como no caso do levantamento feito por Mackerle (2000).

No caso específico da análise de pórticos espaciais convencionais (sem enrijecimento) usualmente representado por um elemento finito, que possui seis graus de

liberdade por nó - três translações e três rotações (dependendo do modelo matemático adotado), que contempla tanto os efeitos de flexão da teoria clássica (Soriano, 1999; Zienkiewicz, 1989) ou da teoria de Timoshenko (deformação por cortante incorporada) (Petyt, 1990), os efeitos de torção geralmente são representados pelo modelo da torção uniforme de Saint Venant. Quando a seção transversal é aberta e formada por paredes finas pode haver uma dominância do fenômeno da torção não-uniforme, que em muitos trabalhos é formulada segundo o modelo de Vlasov (1961). Um dos primeiros elementos finitos proposto para o problema de flexo-torção composta foi descrito em Taranath (1968). Esse elemento conta com sete graus de liberdade (três translações, três rotações, um empenamento), desenvolvido a partir da teoria de Vlasov (1961), em que é introduzida a definição de um par esforço-deslocamento denominado, respectivamente, bimomento e empenamento.

Todavia, uma das principais características comum nos trabalhos descritos anteriormente é que os vínculos do problema são admitidos rígidos isto é, indeslocáveis e indeformáveis. Contudo, nem sempre o sistema que compõe a fundação tem propriedades mecânicas suficientes para garantir a vinculação rígida (Figura 1.2). Com isso, diversos pontos da estrutura sofrem uma deformação não prevista pela análise com vínculos rígidos, conduzindo a valores de deslocamentos e esforços distintos daqueles inicialmente calculados. Assim, é necessário incorporar na representação algébrica da superestrutura do edifício, os efeitos decorrentes das deformações do sistema de fundação para que se possa ter a análise mais completa do problema em questão.

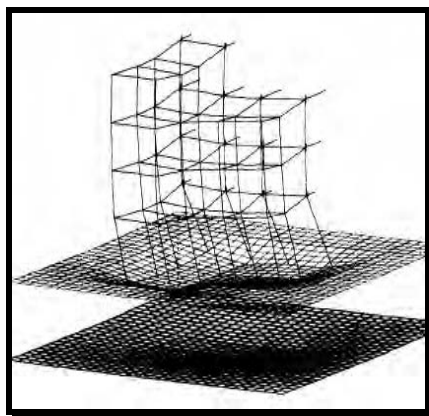


Figura 1.2 ã Pórtico Espacial (Estrutura-Solo)

A representação matemática de fundações flexíveis tem sido construída utilizando-se diversos níveis de idealizações, cujas descrições podem ser acessadas em diversos trabalhos, tais como a revisão crítica feita em Dutta & Roy (2002). De uma forma geral, essas idealizações recaem basicamente em modelos de molas discretas (modelo de Winkler, fundação de dois parâmetros, fundação de três parâmetros, e outras) Straughan(1990) e o modelo de meio contínuo elástico (Thompson, 1889; Boussinesq, 1885; Cerruti, 1882 e Mindlin, 1936). Assim, diversos pesquisadores têm adotado esse modelo do contínuo para o solo, e sistematizado o problema algébrico utilizando o MEC.

Segundo Mendonça (2004), o método dos elementos de contorno teve seu desenvolvimento depois que os chamados métodos de domínio (diferenças finitas e elementos finitos) já tinham suas formulações consolidadas e com vasto campo de aplicações. As principais características do MEC, mostradas desde as primeiras formulações, são a redução das aproximações envolvidas na análise numérica, a diminuição dos sistemas de equações lineares a serem resolvidos, a redução e simplificação dos dados de entrada. Todas estas características são basicamente decorrentes da diminuição da dimensão do problema. Por exemplo, em um problema tridimensional, a análise recairá no estudo de sua superfície. Na literatura, alguns trabalhos de interação solo-estrutura podem ser encontrados onde o solo é representado pelo MEC como em Paiva (1993), Mendonça (2007) e Mendonca & Paiva (2000, 2003).

Além do desenvolvimento matemático de elementos finitos ou de contorno para os problemas estruturais e sua interação com solo, o uso e a seleção de uma plataforma computacional para implementação dos códigos também tem recebido atenção da comunidade científica. De uma forma geral, as implemtações dos ambientes de análise seguem basicamente dois grandes grupos: programação algoritmica (sequencial) e programação orientada a objetos.

No primeiro caso, a ênfase é a construção de algoritmos, que utiliza uma estratégia de refinamentos sucessivos para dividir um problema complexo em subproblemas (procedimentos, sub-rotinas, funções). No entanto, alguns problemas intrínsecos dessa abordagem podem ser enumerados: a) quando os programas tornam-se muito grandes (mesmo quando se tem um programa bem estruturado e escrito), eles podem ser tornar muito complexos e difíceis de entender; b) de difícil manutenção. (Oliveira, 2002).

Já a Programação Orientada a Objetos (POO) é uma metodologia de programação desenvolvida com o objetivo de suprir as deficiências encontradas na metodologia convencional de programação sequencial. Na POO o principal elemento de manipulação não é mais o sequenciamento dos procedimentos e sim a manipulação do objeto e suas atribuições.

Segundo Menezes Júnior (2008), a programação orientada ao objeto teve sua origem na linguagem simula (simula language) concebida na Noruega no início da década de 60. Como próprio o nome sugere, a idéia era criar uma linguagem para fazer simulações. Despercebidamente o seu uso trouxe um conceito que até então não havia sido notado pelos projetistas: a similaridade com a interação no mundo real. A primeira linguagem de programação a implementar sistematicamente os conceitos de POO foi a linguagem Simula-68; seguida pela linguagem Smalltalk, criada pela xerox, que pode ser considerada a linguagem que popularizou e incentivou o emprego da POO. Com o aparecimento da "crise do software", o emprego da POO foi a saída protagonizada pelos desenvolvedores para minimizar os custos relativos às manutenções corretivas responsáveis pela maior parte dos custos e também do indesejável expediente de alterar e/ou corrigir o código dos sistemas implantados. Um conceito fundamental na POO é a definição para objeto, que seria um "ente" ativo que possui certas características que o tornam "inteligente", a ponto de tomar certas decisões quando devidamente solicitado.

Dentre as plataformas que utilizam a filosofia POO tem-se a linguagem Java. Nikishkov (2010) afirma que a linguagem Java possui uma série de vantagens sobre as outras quando se trata de programação para elementos finitos, pois é uma linguagem orientada a objetos de fácil desenvolvimento, com uma boa documentação e disponibilidade de ferramentas para desenvolvimento. Uma outra característica importante para os desenvolvedores é que os programas desenvolvidos nessa linguagem são menos susceptíveis a erros e falhas de segurança, além de fornecer interfaces para aplicativos gráficos e tridimensionais.

Na literatura podem ser encontrados trabalhos sobre análise estrutural cujas rotinas foram implementadas utilizando-se a filosofia da linguagem Java (Nikishkov, 2010; Schottler, 2004 e Foley, 2003).

Nikishkov (2010) diz que apesar de muitos acharem que não é uma linguagem adequada para se trabalhar com elementos finitos por possuir baixa velocidade de execução, ele afirma que apesar do processamento ser mais lento que muitas linguagens,

pode-se alcançar velocidades comparadas à da linguagem C com certos ajustes nos fragmentos de código. E por fim ele conclui que Java é excelente para a aprendizagem de elementos finitos, com depuração mais fácil, de fácil compreensão e na maioria dos casos, alguns métodos de cálculos podem ser facilmente utilizados com modificações mínimas em linguagens como o C e o C++.

Neste trabalho as soluções numéricas são construídas utilizando-se os fundamentos dos elementos finitos para resolução de estruturas reticuladas divididas em dois grupos, conforme é mostrado na Figura 1.3.

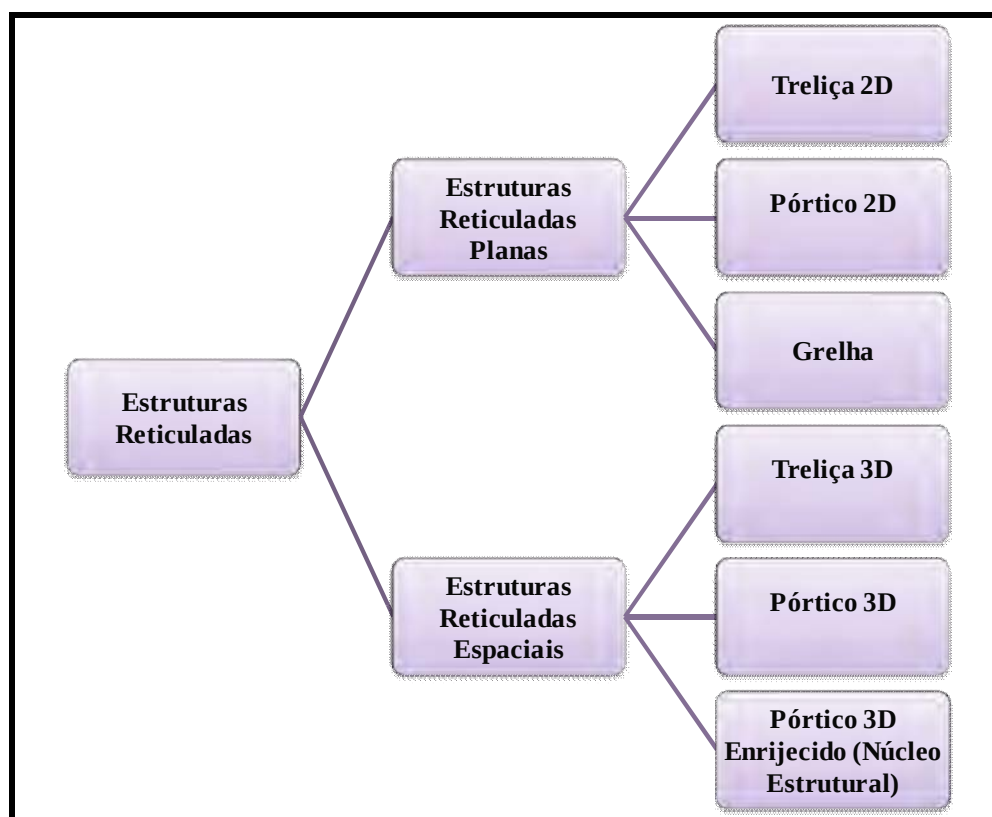


Figura 1.3 ã Divisão das estruturas reticuladas de interesse nesse trabalho

No paradigma de programação orientada a objetos (POO). os dados e métodos são encapsulados nos objetos, sendo eles intimamente amarrados entre si; já os objetos apresentam a propriedade de ocultar informações, ou seja, apesar de eles se comunicarem uns com os outros através de interfaces bem definidas, geralmente um objeto não tem permissão para conhecer como outros objetos são implementados. Isto permite que os programas possam ser divididos em módulos independentes, permitindo o trabalho em conjunto de diversas pessoas em diferentes locais e épocas. Desta forma, a manutenção e

expansão do código são muito mais fáceis de serem feitas em um programa desenvolvido com POO do que em um feito com linguagem estruturada.

Outra particularidade da linguagem Java é que ela foi desenvolvida de forma a ser independente de plataforma. Essa característica é denominada portabilidade e é um dos principais atrativos desta linguagem. Um programa desenvolvido em Java pode ser compilado em um sistema operacional e executado em outro, sem prejuízos. Devido a todas as vantagens citadas acima, escolheu-se utilizar a linguagem Java, que suporta o paradigma da programação orientada a objetos, para a implementação do sistema.

1.2. MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Com a presença da internet cada vez mais presente no nosso dia-a-dia, bem como a sofisticação de equipamentos eletrônicos, com tamanho cada vez mais reduzido, garantindo o poder de mobilidade e conveniência e levando em conta os problemas usuais de estruturas analisados na rotina da engenharia, que por sua natureza são comumente procedimentos repetitivos e cansativos, é que nasceu a necessidade de desenvolver um aplicativo de interface amigável que fosse capaz de resolver problemas de estruturas reticuladas e, além disso, tivesse portabilidade, ou seja, que fosse capaz de funcionar em qualquer sistema operacional, bem como em qualquer dispositivo que suporte a linguagem Java, e claro, que pudesse ser acessado remotamente, através da rede mundial de computadores.

1.3. OBJETIVOS

Desenvolver um sistema de simulação numérica com interface amigável e com portabilidade, para análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas utilizando o método dos elementos finitos. Como também a implementação do acoplamento estático solo-estrutura de pórticos espaciais simples ou enrijecidos por núcleo estrutural através dos métodos dos elementos finitos e método dos elementos de contorno.

1.3.1 Objetivos Específicos

- Estudar os campos de deslocamentos e esforços em estruturas reticuladas sobre vínculos rígidos sob ação estática e dinâmica. O estudo dinâmico deste trabalho fica restrito à determinação de frequências naturais e análise harmônica sob frequências previamente especificadas;
- Utilizar uma combinação do método dos elementos de contorno (MEC) e do método dos elementos finitos (MEF) para representação de pórticos espaciais simples enrijecidos por núcleos estruturais apoiados no meio contínuo sob ação estática;
- Desenvolver um ambiente de análise segundo a filosofia de programação orientada a objeto via linguagem Java.

1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em sete capítulos mais as referências bibliográficas, sendo o primeiro, a Introdução. No segundo capítulo é descrita toda a parte de análise estática das estruturas reticuladas, abordando os efeitos de flexão (segundo as teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko), de torção (segundo as hipóteses de Saint Venant e Vlasov) e os efeitos axiais.

O terceiro capítulo está estruturado igualmente ao segundo, só que com a abordagem dinâmica. Já no quarto é descrita a interação da estrutura com o solo utilizando o acoplamento dos métodos dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

No quinto capítulo é feita uma descrição teórica da linguagem Java e os paradigmas da programação orientada a objetos. Também é descrita as particularidades do ambiente de simulação intitulado de SAPROMS NET, desenvolvido utilizando a linguagem.

Já no sexto capítulo são mostrados os resultados gerados pelo aplicativo e sempre que possível, comparado com os resultados da literatura. E finalmente o sétimo capítulo que trata das considerações finais sobre este trabalho.

CAPÍTULO II:

SUPERESTRUTURA: ANÁLISE ESTÁTICA

2.1. GENERALIDADES

O Método dos Elementos Finitos (MEF), é utilizado correntemente para a resolução de problemas da mecânica do contínuo, podendo viabilizar, sob certas condições, uma boa aproximação para solução de problemas de engenharia. O emprego do MEF não é restrito apenas a problemas estruturais sendo utilizado, também, na solução para problemas de transferência de calor, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, etc.

O método em questão se baseia na discretização do meio contínuo, através da divisão do domínio em regiões menores (Figura 2.1). Segundo Gopalakrishnan & Mitra (2010) no MEF a estrutura contínua é dividida em sub-domínios chamados elementos finitos. Cada elemento está conectado por elementos cercados de nós.

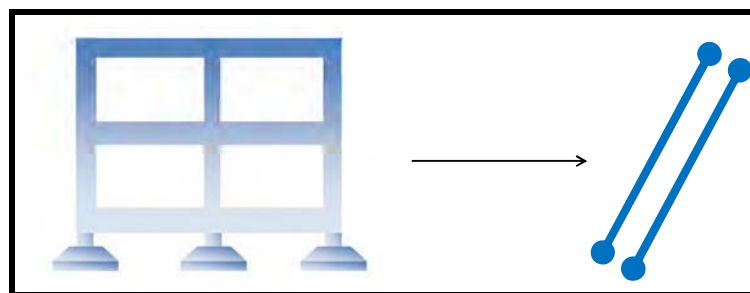


Figura 2.1 ã Divisão do domínio da estrutura em regiões menores (barras)

Após o estabelecimento das equações governantes dos modelos matemáticos de problemas engenharia, a construção de elementos finitos específicos para a análise estática de problemas de mecânica dos sólidos requer geralmente o estabelecimento das seguintes etapas:

- a) Escolhas das funções interpoladoras para geometria e campos físicos;
- b) Dedução da matriz de rigidez e vetor nodal equivalente de forças em coordenadas locais;
- c) Transformação para coordenadas globais, montagem do sistema algébrico da estrutura e solução do sistema.

Devido às suas características de flexibilidade e estabilidade numérica, o MEF pode ser implementado na forma de um sistema computacional de forma consistente e sistemática, fato que explica a sua grande popularidade nos dias atuais. O MEF pode ser obtido, em geral, empregando duas formulações: a Técnica dos Resíduos Ponderados e a dos Princípios Variacionais.

Seja o mapeamento definido por $\pi: v \rightarrow R$ que associa uma função f de um espaço vetorial linear v a um número $\pi(f) \in R$ denominado de *funcional* em v . Em geral, o funcional é expresso em uma forma integral como $\pi(f) = \int_{x_1}^{x_2} I(x, f, f', f'', \dots, f^n) dx$.

Nota-se que como um funcional é um número, ele possui uma natureza escalar, podendo estar relacionado a diversos problemas físicos e matemáticos, tais como: tempo necessário para realizar uma tarefa, tempo necessário para deslocar uma partícula entre dois pontos, energia total de um sistema, entre outros.

No caso de problemas de análise estrutural, geralmente, os funcionais mais comuns são os de energia potencial de deformação, de energia cinética e o resultante do trabalho das cargas externas.

Para os problemas que possuem funcionais estabelecidos, a construção de soluções aproximadas via elementos finitos pode ser obtida pelo método de Rayleigh-Ritz. Convém notar que nem sempre é possível o estabelecimento de funcionais para equações governantes de muitos problemas. Nesses casos, elementos finitos podem ser formulados aplicando-se técnicas de resíduos ponderados.

A técnica dos resíduos ponderados parte do princípio em ponderar por uma função peso, o resíduo causado pela adoção de uma solução aproximada nas equações governantes no domínio do problema.

Dependendo da seleção de funções de aproximação adotadas para construir o resíduo e para aquelas usadas como funções peso, o método dos resíduos ponderados pode ser dividido nos seguintes subgrupos (Métodos de colocação Puntual; Métodos de

colocação Subdomínio; Métodos de Galerkin-Petrov; Métodos de Galerkin-Bubnov; Método dos Mínimos Quadrados), cujos detalhes adicionais podem ser encontrados nas referências Reddy (1993), Zienkiewicz (1977) e Hughes (1987).

Neste trabalho optou-se em adotar a técnica dos princípios variacionais visto que o funcional de energia para os problemas de barras podem ser deduzidos e a sua concepção física mais perceptível.

2.2. MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL DO ELEMENTO DE BARRA

Nesta seção são abordados, independentemente, os problemas sob solicitação axial pura, flexão e torção de barras. Alguns modelos matemáticos para esses casos são discutidos, particularmente, a construção/dedução dos respectivos funcionais e as equações governantes associadas. Em seguida, os aspectos da geração de elementos finitos de cada um desses problema são também abordados de forma independente, desde as interpolações dos campos de interesse até a forma explícita final das matrizes de rigidez e dos vetores de carga nodais equivalentes no sistema local de coordenada.

A representação matemática do modelo de barras é feita a partir das hipóteses (Petyt, 1990):

- i. Uma das dimensões bem maior que as demais (barra): o problema 3D pode ser reduzido ao espaço 1D, desde que uma das dimensões (vão do elemento, L) seja suficientemente superior às dimensões (a, b) da seção transversal, ou seja, $L \gg a, b$;
- ii. Seções transversais uniformes (barra prismática): A barra é prismática quando não existe variação de forma das seções ao longo do eixo da barra;
- iii. Carregamentos estaticamente aplicados: o carregamento é aplicado de tal forma que os efeitos da energia cinética podem ser desprezados;
- iv. Material homogêneo: qualquer região do corpo representa as propriedades e fenômenos do todo;
- v. Material Isótropo: implica em mesmas propriedades em todas as direções;
- vi. Material elasto-linear: implica que em um ciclo de carga-descarga, não há surgimento de deformações residuais; esse material é linear, quando a relação tensão-deformação for linear;

- vii. Supressão do efeito de Poisson: deformações transversais da seção desprezadas;
- viii. Conservação da planicidade original das seções transversais durante o processo de deformação;
- ix. Campos pequenos (suaves) de deslocamentos e deformações.

2.2.1. Contribuição Axial

No problema axial na representação matemática do modelo, a hipótese específica é a conservação da planicidade original das seções transversais durante o processo de deformação

A obtenção da equação governante do problema de esforço axial pode ser obtida pelo balanço das forças ou alternativamente pela condição estacionária do funcional de energia. Esse, para problemas estáticos pode ser dividido em duas parcelas:

$$\pi = \pi_p - W \quad (2.1)$$

Onde,

π_p = Energia potencial de deformação

W = Trabalho das cargas externas

Em problemas 1D axialmente carregados, a energia de deformação dada por.

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (2.2)$$

Onde,

σ_x = tensão normal na direção x .

ε_x = deformação axial na direção x .

Por extensão, para corpos elasto-lineares sob estados triplos de tensão e deformação, a equação (2.1) torna-se:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (2.3)$$

Onde,

σ_y e σ_z = tensão normal nas direções y e z .

ε_y e ε_z = deformação nas direções y e z .

τ_{xy} e τ_{xz} e τ_{yz} = tensões de cisalhamento nos planos xy , xz e yz .

γ_{xy} e γ_{xz} e γ_{yz} = distorções nos planos xy , xz e yz .

Admitindo-se as hipóteses *iv*, *v*, *vi* e *vii* a relação constitutiva fica $\sigma = E\varepsilon$ (lei de Hooke); já com a hipótese *ix* tem-se as relações cinemáticas $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$.

A partir da substituição da lei de Hooke e das relações cinemáticas na Eq. (2.2), o funcional de energia potencial, para o problema axial, fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \left(\frac{du_a}{dx} \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du_a}{dx} \right)^2 dx \quad (2.4)$$

Onde,

u_a = deslocamento axial

E = módulo de elasticidade longitudinal

A = área transversal

L = comprimento da barra

O trabalho das cargas externas é dado pelo produto da força pelo seu respectivo deslocamento:

$$W = \int_0^L p.u_a dx \quad (2.5)$$

Substituindo as eqs. (2.4) e (2.5) na Eq. (2.1), tem-se

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left\{ \frac{du_a}{dx} \right\}^2 dx - \int_0^L p.u_a dx \quad (2.6)$$

Fazendo-se a primeira variação do funcional dado na Eq. (2.6), fica:

$$\delta\pi(u) = \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^L EA \left\{ \frac{du_a}{dx} \right\}^2 dx - \int_0^L p.u_a dx \right] \quad (2.7)$$

Aplicando as propriedades do cálculo variacional $\delta(u^n) = nu^{n-1}\delta u$ e $\delta \int g(x)dx = \int \delta[g(x)]dx$ em (2.7), resulta:

$$\delta\pi(u_a) = \frac{1}{2} \int_0^L 2 \frac{du_a}{dx} EA \delta \frac{du_a}{dx} dx - \int_0^L p \delta u_a dx \quad (2.8)$$

Integrando por partes a primeira parcela da Eq. (2.8), tem-se:

$$\int_0^L \frac{du_a}{dx} EA \delta \frac{du_a}{dx} dx = \left[\frac{du_a}{dx} EA \delta u_a \right]_0^L - \int_0^L \frac{d^2 u_a}{dx^2} EA \delta u_a dx \quad (2.9)$$

Reagrupando todas as parcelas do funcional da Eq. (2.9), obtem-se:

$$\delta\pi(u_a) = \left[\frac{du_a}{dx} EA \delta u_a \right]_0^L - \int_0^L \frac{d^2 u_a}{dx^2} EA \delta u_a dx - \int_0^L p \delta u_a dx \quad (2.10)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula $[\delta u_a]_0^L = 0$, a Eq. (2.10) fica:

$$\delta\pi(u_a) = \int_0^L \left[-\frac{d^2 u_a}{dx^2} EA - p \right] \delta u_a dx \quad (2.11)$$

Aplicando-se a condição estacionária $\delta\pi(u_a) = 0$, na Eq. (2.11):

$$\delta\pi(u_a) = \int_0^L \left[-\frac{d^2 u_a}{dx^2} EA - p \right] \delta u_a dx = 0, \quad (2.12)$$

Como a variação δu é arbitrária a nulidade da Eq. (2.12) será sempre garantida se a seguinte relação for verdadeira:

$$EA \frac{d^2 u_a}{dx^2} + p = 0 \quad (2.13)$$

A solução homogênea da Eq. (2.13) é dada por:

$$u_a = Ax + B \quad (2.14)$$

Onde:

A e B são constantes polinomiais

Sejam as condições de contorno dadas por:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad u_a &= u_{a1} \quad e \quad \frac{du_a}{dx} = \frac{du_{a1}}{dx} \\ x = L; \quad u_a &= u_{a2} \quad e \quad \frac{du_a}{dx} = \frac{du_{a2}}{dx} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Com as condições de contorno da Eq. (2.15) na Eq. (2.14), obtém-se um sistema de equações lineares, cuja solução fornecerá os valores das constantes polinomiais A e B:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

A solução da Eq. (2.16) resulta em:

$$\begin{aligned} B &= u_{a1} \\ A &= \frac{(u_{a2} - u_{a1})}{L} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo as constantes polinomiais na Eq. (2.14), encontra-se o polinômio em função dos deslocamentos, dado por:

$$u_a = \left(\frac{(u_{a2} - u_{a1})}{L} \right) x + u_1 \quad (2.18)$$

Substituindo a Eq. (2.18) na Eq. (2.6) e integrando o resultado ao longo do elemento, obtém-se a expressão da energia potencial total. Se esta for escrita em função dos deslocamentos nodais e com apenas carregamentos concentrados f_1 e f_2 nas extremidades da barra (vide Figura 2.2), resultará em:

$$\pi(u) = \frac{EA}{2L} (u_{a1}^2 - 2u_{a1}u_{a2} + u_{a2}^2) - f_{a1}u_{a1} - f_{a2}u_{a2} \quad (2.19)$$

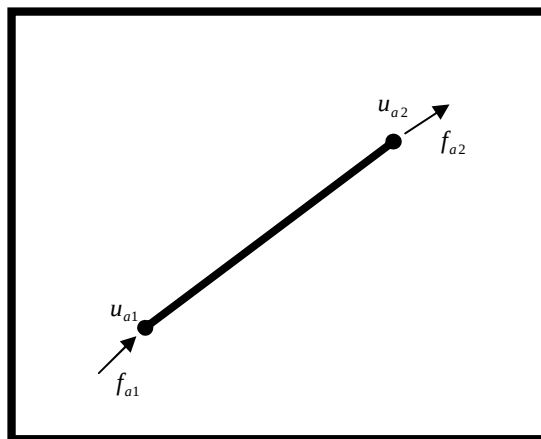


Figura 2.2 ã Efeito axial

Minimizando-se o funcional (2.19) $\delta\pi=0$, então as derivadas parciais da Eq. (2.19) em relação aos deslocamentos u_{a1} e u_{a2} , ficam:

$$\frac{\partial\pi(u_a)}{\partial u_{a1}} = \frac{EA}{L}u_{a1} - \frac{EA}{L}u_{a2} - f_1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial\pi(u_a)}{\partial u_{a2}} = -\frac{EA}{L}u_{a1} + \frac{EA}{L}u_{a2} - f_2 = 0 \quad (2.21)$$

Na forma matricial, as Eqs. (2.20) e (2.21) ficam:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Fazendo,

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\{u_a\} = \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\{F_a\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

A Eq. (2.22), torna-se:

$$[K_e]\{u_a\} = \{F_a\} \quad (2.26)$$

Onde:

$[K_e]$ = Matriz de rigidez da barra axialmente carregada;

$\{u_a\}$ = Vetor dos deslocamentos nas extremidades;

$\{F_e\}$ = Vetor de forças equivalentes.

Quando houver carregamento axial distribuído uniforme ao longo da barra, esse deverá ser transformado em um carregamento nodal equivalente, conforme mostrado na Figura 2.3.

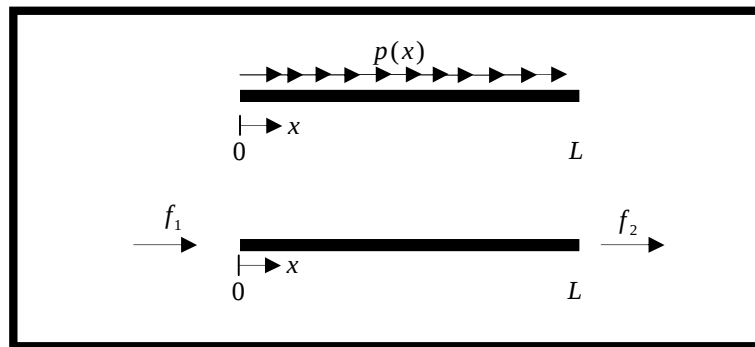


Figura 2.3 ã Barra submetida ao carregamento axial distribuído, com o seu carregamento nodal equivalente

Sendo o trabalho das cargas dado pela expressão:

$$W = \int_0^L p(x)u_a(x)dx \quad (2.27)$$

Como o deslocamento axial é linear sua interpolação fica:

$$u_a(x) = Z_1u_{a1} + Z_2u_{a2} \quad (2.28)$$

Onde as funções interpoladoras Z_i são:

$$Z_1 = 1 - \frac{x}{L} \text{ e } Z_2 = \frac{x}{L} \quad (2.29)$$

Se o carregamento distribuído for admitido uniforme, então tem-se:

$$p(x) = p \quad (2.30)$$

Logo o trabalho das forças externas (Eq. (2.27)) fica:

$$W = \int_0^L \{u_a\}^T p dx = p \int_0^L \{u_a\}^T dx \quad (2.31)$$

Onde,

$\{u_a\}$ = vetores de deslocamentos

Minizando-se o funcional de energia total dado na Eq. (2.1) em função dos deslocamentos, fica:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_{a1}} = \frac{\partial}{\partial u_{a1}} (\pi_p - W) = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial u_{a2}} = \frac{\partial}{\partial u_{a2}} (\pi_p - W) = 0 \quad (2.32)$$

A minimização da parcela do trabalho na Eq. (2.32), interpolada com as funções aproximadoras Eq.(2.33), resulta nas forças nodais equivalentes:

$$\int_0^L \frac{\partial W}{\partial u_{a1}} dx = p \int_0^L Z_1 dx = f_1, \quad \int_0^L \frac{\partial W}{\partial u_{a2}} dx = p \int_0^L Z_2 dx = f_2 \quad (2.33)$$

Ou a Eq(2.35) na forma matricial pode ser dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} p dx \quad (2.34)$$

Substituindo os valores de Z_1 e Z_2 na Eq. (2.34), torna-se

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \left(\frac{x}{L}\right) \end{Bmatrix} p dx \quad (2.35)$$

Resolvendo a Eq. (2.35), obtém-se o vetor nodal equivalente do problema axial:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{Bmatrix} p \quad (2.36)$$

2.2.2. Contribuições do Problema de Flexão com Deformação por Cortante

Para representar o modelo de flexão de barras, algumas hipóteses adicionais àquelas discutidas na seção 2.2 devem ser adotadas:

- A ortogonalidade entre a normal da seção e a elástica não precisa ser necessariamente conservada no processo de deformação;
- A flexão deve ocorrer segundo os eixos principais de inércia.

a) Contribuição da Flexão em z no plano xy

Para a determinação do funcional de energia para a contribuição da flexão em z, será utilizada a teoria de vigas de Timoshenko, onde a restrição da ortogonalidade da seção e o eixo médio não será imposta, de tal forma que a deformação por cortante é introduzida na análise do problema.

Como a planicidade da seção se conserva, hipótese 2.3.viii, e de acordo com a Figura 2.4, tem-se que o deslocamento axial no problema de flexão, pode ser escrito como:

$$u_{fz} = -y\beta_z \quad (2.37)$$

Onde,

y = distância da fibra ao eixo longitudinal baricêntrico da barra

β_z = rotação da seção transversal em z.

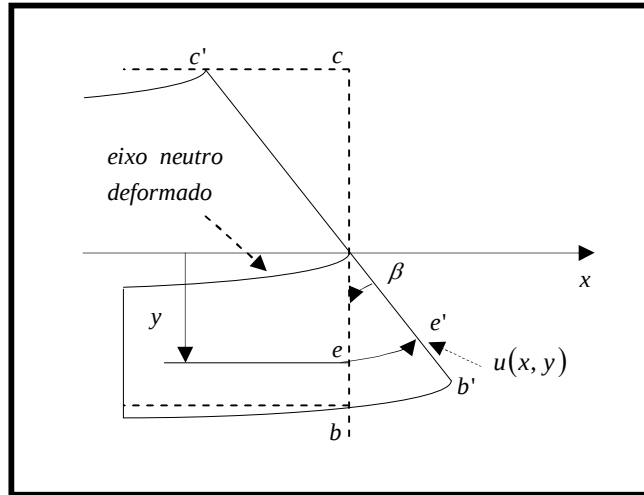


Figura 2.4 ã Trecho da seção de uma viga com deformação por esforço cortante

A deformação linear em x é dada pela derivada do deslocamento axial, Eq. (2.37), resultando em:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\beta}{dx} \quad (2.38)$$

Já a distorção γ_{xy} fica:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.39)$$

Onde v é o deslocamento transversal da viga e $\frac{\partial v}{\partial x}$ é a inclinação da elástica.

Desprezando o efeito de Poisson, a lei de Hooke para os efeitos de elongação axial e distorção fica:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.40)$$

e

$$\tau_{xy} = \kappa G \gamma_{xy} \quad (2.41)$$

Onde,

κ = fator de forma da seção;

G = módulo de elasticidade transversal.

A energia potencial da viga de Timoshenko é dada por:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (2.42)$$

Substituindo as Eqs. (2.38), (2.39), (2.40) e (2.41) em (2.42) fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \left(-y \frac{d\beta_z}{dx} \right)^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \kappa G \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right)^2 dA dx \quad (2.43)$$

Resolvendo a Eq. (2.43) e lembrando-se que o momento principal de inércia é

$I_z = \int_A y^2 dA$, resulta:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_L \left(EI_z \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (2.44)$$

O trabalho das forças externas transversais é dado por:

$$W = \int_L p_y v dx \quad (2.45)$$

As equações governantes do problema de flexão em z podem ser obtidas aplicando-se a condição estacionária para o funcional de energia dado na Eq. (2.1):

$$\begin{aligned}
\delta\pi = \delta(\pi_p - W) &= \frac{1}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{d\beta_z}{dx} \right) EI_z \delta \left(\frac{d\beta_z}{dx} \right) dx + \\
&\frac{1}{2} \int_0^L 2\kappa \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) GA \delta \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) dx - \int_0^L p_y \delta v dx = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Integrando-se convenientemente por partes a Eq. (2.46), tem-se:

$$\begin{aligned}
&\left[EI_z \frac{d\beta_z}{dx} \delta\beta_z \right]_0^L - \int_0^L EI_z \frac{d^2\beta_z}{dx^2} \delta\beta_z dx + \left[\kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \delta v \right]_0^L - \\
&\int_0^L \kappa GA \left[\left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right) \delta v + \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \delta\beta_z \right] dx + \int_0^L p_y \delta v dx = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Como a variação dos campos no contorno é nula $[\delta\beta_z]_{x=0}^{x=L} = [\delta v]_{x=0}^{x=L} = 0$, então a Eq. (2.47), fica reduzida a:

$$\begin{aligned}
&-\int_0^L \left[EI_z \frac{d^2\beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \right] \delta\beta_z dx - \\
&\int_0^L \left[\kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right) - p_y \right] \delta v dx = 0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Como as variações de $\delta\beta_z$ e δv são arbitrárias, então a identidade nula da Eq. (2.48) só pode ser sempre garantida se:

$$EI_z \frac{d^2\beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) = 0 \tag{2.49}$$

e

$$\kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right) - p_y = 0 \tag{2.50}$$

As Eqs. (2.49) e (2.50) são equações de equilíbrio da viga de Timoshenko. Um procedimento encontrado em Petyt (1990) para explicitar as funções interpoladoras de β_z e v é discutido a seguir.

Derivando-se a Eq. (2.49) e subtraindo-se esse resultado da Eq. (2.50) fica:

$$\frac{d}{dx} \left[EI_z \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \right] - \left[\kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_y \right] = 0 \quad (2.51)$$

Resultando, em:

$$EI_z \frac{d^3 \beta_z}{dx^3} - p_y = 0 \quad (2.52)$$

Derivando-se duas vezes a Eq. (2.50) e substituindo o resultado na Eq. (2.52), tem-se:

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} - p_y = 0 \quad (2.53)$$

Nas seções anteriores deste capítulo o sistema de referência adotado foi o dimensional. Entretanto, como alternativa para o desenvolvimento das equações, será utilizado o sistema de coordenadas adimensionais ξ , vide Figura 2.5, na maioria das seções doravante.

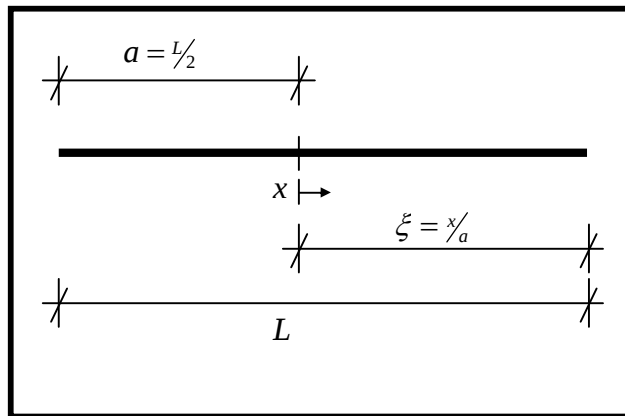


Figura 2.5 ã Representação do sistemas de coordenadas adimensionais ξ .

A partir da Eq. (2.53), que é uma equação diferencial de quarta ordem, pode-se intuir que a solução (o deslocamento transversal) é um polinômio de grau 3. Assim, esse deslocamento fica aproximado por:

$$v(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 \quad (2.54)$$

Já para as rotações da seção a Eq. (2.52), que é uma equação diferencial de terceira ordem, sugere uma forma quadrática para interpolação de β_z :

$$\beta_z(\xi) = \frac{a_2}{a} + 6\gamma_z \frac{a_4}{a} \xi + 3 \frac{a_4}{a} \xi^2 \quad (2.55)$$

Onde:

$$\gamma_z = \frac{4EI_z}{\kappa GAL^2}$$

Aplicando as condições de contorno para uma viga não-articulada [$v(-1) = v_i$, $v(1) = v_j$, $\beta_z(-1) = \beta_{zi}$ e $\beta_z(1) = \beta_{zj}$] nas Eq.(2.54) e Eq.(2.55) seguida da solução do sistema algébrico resultante, as constantes a_i pode ser determinadas:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \frac{(1+3\gamma_z)}{(16+48\gamma_z)} \cdot v_i + 4(1+3\gamma_z) \cdot \frac{a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zi} + 8 \frac{(1+3\gamma_z)}{(16+48\gamma_z)} \cdot v_j + \frac{-4(1+3\gamma_z)a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zj} \\ -12 \frac{(1+2\gamma_z)}{(16+48\gamma_z)} \cdot v_i - 4 \frac{a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zi} + 12 \frac{(1+2\gamma_z)}{(16+48\gamma_z)} \cdot v_j - 4 \frac{a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zj} \\ \cdot \frac{-4(1+3\gamma_z)a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zi} + \frac{4(1+3\gamma_z)a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zj} \\ \frac{4}{(16+48\gamma_z)} \cdot v_i + 4 \frac{a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zi} - \frac{4}{(16+48\gamma_z)} \cdot v_j + 4 \frac{a}{(16+48\gamma_z)} \cdot \beta_{zj} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

A interpolação dos campos dos deslocamentos (Eq. (2.54)) também por ser escrita como:

$$v = N_1 v_i + N_2 \beta_{zi} + N_3 v_j + N_4 \beta_{zj} = [N] \{u_{fz}\} \quad (2.57)$$

e

$$\beta_z = L_1 v_i + L_2 \beta_{zi} + L_3 v_j + L_4 \beta_{zj} = [L] \{u\}_{fz} \quad (2.58)$$

Onde,

$$\{u\}_{fz}^T = \{v_i \quad \beta_{zi} \quad v_j \quad \beta_{zj}\}$$

$$[L] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4]$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

Substituindo os valores de a_1 , a_2 , a_3 e a_4 nas Eqs. (2.54) e (2.55) e comparando-se o resultado com a Eq. (2.57), encontra-se as funções interpoladoras N_i e L_i para barras não-articuladas:

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi) \cdot \frac{(\xi^2 + \xi - 2 - 6\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.59)$$

$$N_2 = -\frac{1}{4} \cdot a(\xi - 1)(\xi + 1) \cdot \frac{(-\xi + 1 + 3\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.60)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot \frac{(-\xi^2 + \xi + 2 + 6\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.61)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot a(\xi - 1)(\xi + 1) \cdot \frac{(\xi + 1 + 3\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.62)$$

$$L_1 = N_5 = \frac{3}{4}(\xi - 1) \cdot \frac{(\xi + 1)}{a(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.63)$$

$$L_2 = N_6 = -\frac{1}{4}(\xi - 1) \cdot \frac{(-3\xi - 1 + 6\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.64)$$

$$L_3 = N_7 = -\frac{3}{4}(\xi - 1) \cdot \frac{(\xi + 1)}{a \cdot (1 + 3\gamma_z)} \quad (2.65)$$

$$L_4 = N_8 = \frac{1}{4}(\xi + 1) \cdot \frac{(3\xi - 1 + 6\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \quad (2.66)$$

A forma interpolada de energia total é obtida pelas funções interpoladoras N_i e L_i na expressão da energia de deformação Eq. (2.44) e do trabalho externo Eq (2.45).

$$\pi = \frac{1}{2} \int_L \{u_{fz}\}^T [B]^T EI_z [B] \{u_{fz}\} dx + \frac{1}{2} \int_L \{u_{fz}\}^T [L_d]^T \kappa GA [L_d] \{u_{fz}\} dx - \int_L \{g\} \{v\} dx \quad (2.67)$$

Onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_5}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \frac{d\xi}{dx} & \frac{\partial N_7}{\partial x} \frac{d\xi}{dx} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \frac{d\xi}{dx} \end{bmatrix}$$

$$[L_d] = [L_{d1} \quad L_{d2} \quad L_{d3} \quad L_{d4}]$$

$$L_{d1} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - L_1$$

$$L_{d2} = \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - L_2$$

$$L_{d3} = \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - L_3$$

$$L_{d4} = \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} - L_4$$

Quando o elemento é submetido a cargas concentradas nas extremidades, o sistema algébrico, obtido pela condição estacionária da energia total Eq. (2.67), fica:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{u_{fz}\}^T} \rightarrow [K] \{u_{fz}\} = \{f_z\} \rightarrow [K]_b \{u_{fz}\} + [K]_s \{u_{fz}\} = \{f_z\} \quad (2.68)$$

Onde:

$$[K]_b = \int_{\xi} [B]^T EI_z [B] J d\xi$$

$$[K]_s = \int_{\xi} [L_d]^T \kappa GA [L_d] J d\xi$$

$$\{f_z\}^T = [Fyi \quad Mzi \quad Fyj \quad Mzj]$$

A forma explícita da matriz de rigidez de flexão requer alguns algebrismos adicionais. Esses conduzem a:

$$K_b = \int_{-1}^1 a \cdot E \cdot I_z \begin{pmatrix} M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{pmatrix} (M_5 \quad M_6 \quad M_7 \quad M_8) d\xi \quad (2.69)$$

Onde,

$$M_i = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad i = 5, 6, 7, 8$$

Resolvendo as integrais da Eq. (2.69), resulta:

$$K_b = \frac{EI_z}{(1+3\gamma_z)^2 \cdot 2 \cdot a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ & [(4+6\gamma_z+9\gamma_z^2) \cdot a^2] & -3a & [-(-2+6\gamma_z+9\gamma_z^2) \cdot a^2] \\ \text{Simétrica} & & 3 & -3a \\ & & & [(4+6\gamma_z+9\gamma_z^2) \cdot a^2] \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Para a matriz de rigidez de cisalhamento fica:

$$K_s = \int_{-1}^1 a \cdot \kappa G \cdot A \begin{pmatrix} L_{d1} \\ L_{d2} \\ L_{d3} \\ L_{d4} \end{pmatrix} (L_{d1} \quad L_{d2} \quad L_{d3} \quad L_{d4}) d\xi \quad (2.71)$$

Resolvendo as integrais da Eq. (2.71) e resulta:

$$K_s = \frac{9}{2} \frac{\gamma_z EI_z}{a^5 (1+3\gamma_z)^2} \begin{pmatrix} a^2 & a^3 & -a^2 & a^3 \\ & a^4 & -a^3 & a^4 \\ & & a^2 & -a^3 \\ \text{Simétrica} & & & a^4 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Onde:

$$a = \frac{L}{2}$$

Superpondo-se os efeitos de flexão e cisalhamento, a forma explícita da matriz para o efeito de flexão em torno de z fica:

$$[K] = \frac{EI_z}{L(1+3\gamma_z)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4+3\gamma_z & -\frac{6}{L} & 2-3\gamma_z \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2-3\gamma_z & -\frac{6}{L} & 4+3\gamma_z \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

No modelo de Euler-Bernoulli, tem-se que $\gamma_z = 0$, resultando na matriz:

$$[K] = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Quando o carregamento for distribuído transversalmente à barra na direção z, o mesmo deverá ser transformado em forças nodais equivalentes, conforme é mostrado na Figura 2.6.

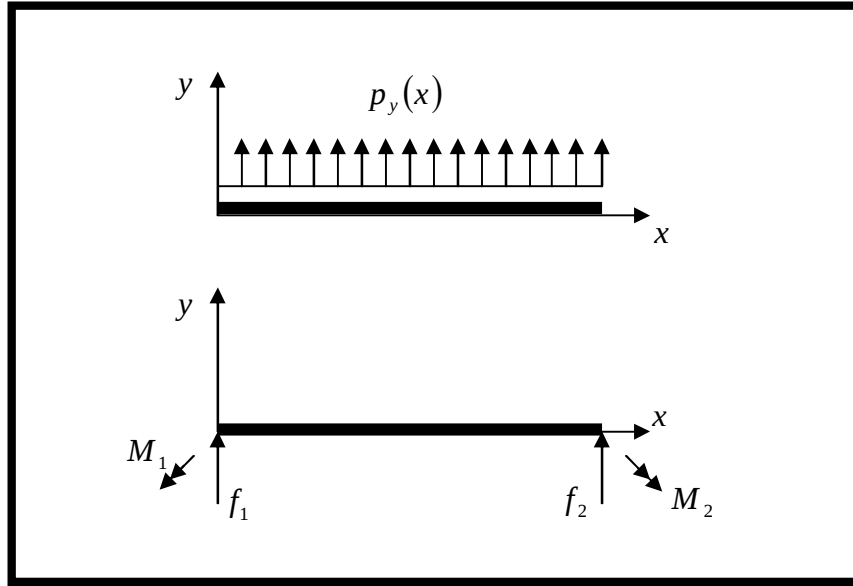


Figura 2.6 - Carregamento distribuído transversalmente na direção z com suas forças nodais equivalentes

O trabalho das cargas é dado por:

$$W = \int p_y v dx \quad (2.75)$$

Utilizando o deslocamento \$v\$ interpolado pela Eq. (2.54), e as transformações

$\xi = \frac{2x}{L}$ e $J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2}$, a minimização da Eq. (2.75) fica:

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(W) = f_1; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i}(W) = f_2; \quad \frac{\partial}{\partial v_j}(W) = f_3; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j}(W) = f_4 \quad (2.76)$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = p_y \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} (N_1) \\ (N_2) \\ (N_3) \\ (N_4) \end{Bmatrix} J d\xi = -p_y \begin{Bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

Onde as funções \$N_i\$ na Eq. (2.77) são dadas pelas Eqs. (2.59) a (2.62).

Nem sempre as estruturas lineares são compostas por barras sem articulações. Quando essas estão presentes, elas produzem alterações nas formas das matrizes de rigidez e vetor de carga nodal das barras não-articuladas. A dedução das matrizes de rigidez nesses casos pode ser feita basicamente em duas técnicas: método direto e condensação estática.

A primeira técnica consiste na adequação das funções de forma para contemplar a nulidade do momento fletor onde a articulação ocorre, o que implica em atribuir valor nulo para a derivada da rotação da seção $d\beta/dx = 0$ nesse ponto.

Já a segunda técnica associada à condensação estática propicia a eliminação do campo a ser suprimido (momento fletor) através de combinações lineares convenientes no sistema de equações do problema original (neste caso, a barra não-articulada).

Nesse trabalho optou-se pela segunda técnica, para a obtenção da matriz de rigidez com barras articuladas, o que será demonstrado a seguir:

Seja um sistema original dado por:

$$[K]\{u_{fz}\} = \{f_z\} \quad (2.78)$$

Se existirem n graus de liberdade sem correspondente no vetor de forças, então pode-se particionar o sistema como:

$$\begin{bmatrix} [k]_{mm} & [k]_{mn} \\ [k]_{nm} & [k]_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{fz}\}_m \\ \{u_{fz}\}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_z\}_m \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

Resolvendo para o segundo bloco de linhas do sistema da Eq. (2.79), fica:

$$\{u_{fz}\}_n = -[k]_{nn}^{-1}[k]_{nm}\{u_{fz}\}_m \quad (2.80)$$

Substituindo a Eq. (2.81) no primeiro bloco de linhas do sistema da Eq. (2.79), obtém-se:

$$[k]_{mm}\{u_{fz}\}_m + [k]_{mn}(-[k]_{nn}^{-1}[k]_{nm}\{u_{fz}\}_m) = \{f_z\}_m \quad (2.81)$$

Agrupando os termos da Eq. (2.81), tem-se:

$$([k]_{mm} - [k]_{mn}[k]_{nn}^{-1}[k]_{nm})\{u_{fz}\}_m = \{f_z\}_m \quad (2.82)$$

Que toma a forma final reduzida de:

$$[k]_m \{u_{fz}\}_m = \{f_z\}_m \quad (2.83)$$

Nas barras de vigas existem dois graus de liberdade por nó associados aos deslocamentos óvô e as rotações ϕ (inclinação da elástica) (vide Figura 2.7).



Figura 2.7 ñ Elemento de barra

Se a barra for articulada à direita no modelo de Euler-Bernoulli, conforme mostrado na Figura 2.8, tem-se $M_j = 0$, logo: $M_j = -EIv_j'' = 0 \rightarrow v_j'' = 0$, ou seja, a curvatura é nula.

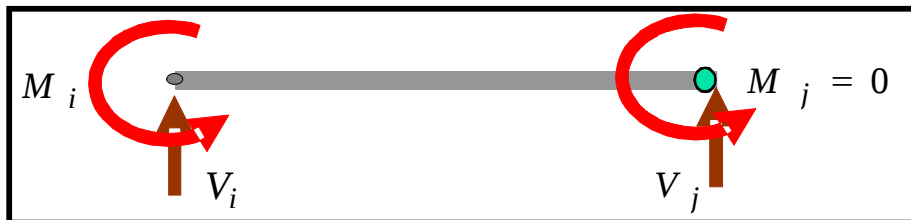


Figura 2.8 ñ Barra articulada à direita

Nesse caso, tem-se apenas um grau de liberdade sem correspondente no vetor das forças. Assim, particionando-se a matriz $[K]$ (Eq. (2.74)) não articulada, nas formas requeridas pela condensação estática, tem-se:

$$[k]_{nm} = 2EI_z / L [3/L \quad 1 \quad -3/L] \quad (2.84)$$

$$[k]_{nn} = 4EI_z / L \quad (2.85)$$

$$[k]_{mn} = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3/L \\ 1 \\ -3/L \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$[k]_{mm} = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & 3/L & -6/L^2 \\ 3/L & 2 & -3/L \\ -6/L^2 & -3/L & 6/L^2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Substituindo as eqs. (2.84), (2.85), (2.86) e (2.87) na Eq. (2.82) e comparando com a Eq. (2.83), tem-se:

$$[k]_m = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & 3/L & -6/L^2 \\ 3/L & 2 & -3/L \\ -6/L^2 & -3/L & 6/L^2 \end{bmatrix} - \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3/L \\ 1 \\ -3/L \end{bmatrix} \left[\frac{L}{4EI_z} \right] 2EI_z / L [3/L \quad 1 \quad -3/L] \quad (2.88)$$

Ou

$$[k]_m = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & 3/L & -6/L^2 \\ 3/L & 2 & -3/L \\ -6/L^2 & -3/L & 6/L^2 \end{bmatrix} - \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 9/L^2 & 3/L & -9/L^2 \\ 3/L & 1 & -3/L \\ -9/L^2 & -3/L & 9/L^2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

O que resulta em,

$$[k]_m = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3/L^2 & 3/L & -3/L^2 \\ 3/L & 3 & -3/L \\ -3/L^2 & -3/L & 3/L^2 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Recompondo-se a ordem original da matriz de rigidez da barra articulada à direita fica:

$$[k] = \frac{3EI_z}{L} \begin{bmatrix} 1/L^2 & 1/L & -1/L^2 & 0 \\ 1/L & 1 & -1/L & 0 \\ -1/L^2 & -1/L & 1/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Em Mendonça (2008) é discutido o método direto para uma barra com articulação à direita, regida pelo modelo de Timoshenko, de forma que os campos de deslocamentos e rotação são dados por:

$$v(\xi) = N_1 v_i + N_2 \beta_{zi} + N_3 v_j + N_4 \beta_{zj} \quad (2.92)$$

e

$$\beta_z(\xi) = L_1 v_i + L_2 \beta_{zi} + L_3 v_j + L_4 \beta_{zj} \quad (2.93)$$

Cujas funções interpoladoras (N_α, L_α), são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi-1) \frac{(\xi^2 - 2\xi - 11 - 6\gamma_z)}{(4 + 3\gamma_z)} \\ N_2 &= \frac{1}{2}(\xi-1)(\xi-3)(\xi+1) \frac{a}{(4 + 3\gamma_z)} \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(\xi+1) \frac{(\xi^2 - 4\xi - 5 - 6\gamma_z)}{(4 + 3\gamma_z)} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$N_4 = 0$$

$$L_1 = N_5 = \frac{3}{4}(\xi + 1) \cdot \frac{(\xi - 3)}{a(4 + 3\gamma_z)}$$

$$L_2 = N_6 = \frac{-1 + 3\xi^2 - 6\xi + 6\gamma_z}{2(4 + 3\gamma_z)}$$

$$L_3 = N_7 = -\frac{3}{4}(\xi + 1) \cdot \frac{(\xi - 3)}{a(4 + 3\gamma_z)}$$

$$L_4 = N_8 = 0$$

Assim, Mendonça (2008), com um procedimento análogo ao discutido nas Eqs. (2.68), (2.69) e (2.72), apresenta a matriz de rigidez com articulação à direita no modelo de Timoshenko, como:

$$[k] = \frac{EI_z}{(4 + 3\gamma_z)2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 0 \\ & 12a^2 & -6a & 0 \\ & & 3 & 0 \\ sim & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

O vetor de cargas nodais equivalentes da barra articulada à direita, com carga uniformemente distribuída ao longo da barra para o caso de Euler-Bernoulli (Figura 2.9), fica:

$$\begin{Bmatrix} f_{1z} \\ f_{2z} \\ f_{3z} \\ f_{4z} \end{Bmatrix} = p_y \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} J d\xi = -\frac{p_y L}{8} \begin{bmatrix} 5 \\ L \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

A expressão da Eq. (2.96) para o caso de Timoshenko, fica:

$$\begin{Bmatrix} f_{1z} \\ f_{2z} \\ f_{3z} \\ f_{4z} \end{Bmatrix} = p_y \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} J d\xi = -\frac{p_y L}{2(4 + 3\gamma_z)} \begin{bmatrix} (5 + 3\gamma_z) \\ L \\ 3(1 + \gamma_z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

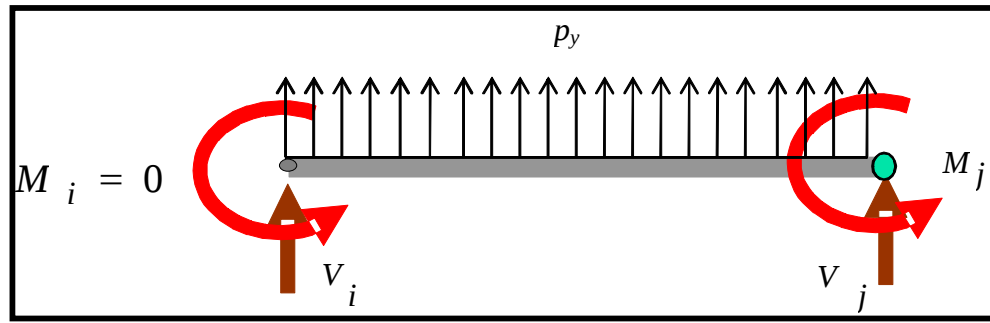


Figura 2.9 - Barra articulada à direita submetida a carregamento uniforme

Se a barra for articulada à esquerda no modelo de Euler-Bernoulli (Figura 2.10), analogamente ao caso da articulação à direita, tem-se $M_i = 0$, logo:

$$M_i = -EIv_i'' = 0 \rightarrow v_i'' = 0.$$



Figura 2.10 ã Barra articulada à esquerda.

Agora pelo método de condensação estática, no modelo de Euler-Bernoulli, a geração da matriz de rigidez com a articulação à esquerda, fica:

$$[k]_{nn} = \frac{4EI_z}{L} \quad (2.98)$$

$$[k]_{mn} = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3/L \\ -3/L \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$[k]_{nm} = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3/L & -3/L & 1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

$$[k]_{mm} = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & -6/L^2 & 3/L \\ -6/L^2 & 6/L^2 & -3/L \\ 3/L & -3/L & 2 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Substituindo as eqs. (2.84), (2.85), (2.86) e (2.87) na Eq. (2.82) e comparando com a Eq. (2.83), tem-se:

$$[k]_m = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & -6/L^2 & 3/L \\ -6/L^2 & 6/L^2 & -3/L \\ 3/L & -3/L & 2 \end{bmatrix} - \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3/L \\ -3/L \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{4EI_z}{L} \right]^{-1} \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ L & L & L \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Ou

$$[k]_m = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & -6/L^2 & 3/L \\ -6/L^2 & 6/L^2 & -3/L \\ 3/L & -3/L & 2 \end{bmatrix} - \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 9/L^2 & -9/L^2 & 3/L \\ -9/L^2 & 9/L^2 & -3/L \\ 3/L & -3/L & 1 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

O que resulta em:

$$[k]_m = \frac{3EI_z}{L} \begin{bmatrix} 1/L^2 & -1/L^2 & 1/L \\ -1/L^2 & 1/L^2 & -1/L \\ 1/L & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Recompondo-se a ordem original da matriz de rigidez da barra articulada à esquerda fica:

$$[k] = \frac{3EI_z}{L} \begin{bmatrix} 1/L^2 & 0 & -1/L^2 & 1/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L^2 & 0 & 1/L^2 & -1/L \\ 1/L & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Mendonça (2008) apresenta também o método direto para o caso de barra com articulação à esquerda conforme o modelo de Timoshenko, os deslocamentos e rotações fica:

$$v(\xi) = a_1 + a_2\xi + (3\xi^2 + \xi^3)a_4 \rightarrow v(\xi) = N_1v_i + N_2\beta_{zi} + N_3v_j + N_4\beta_{zj} \quad (2.106)$$

e

$$\beta_z(\xi) = \frac{a_2}{a} + 3(2\xi + \xi^2)\frac{a_4}{a} \rightarrow \beta_z(\xi) = L_1v_i + L_2\beta_{zi} + L_3v_j + L_4\beta_{zj} \quad (2.107)$$

Cujas funções interpoladoras das barras com articulação à esquerda, são:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(\xi-1)\frac{(-\xi^2-4\xi+5+6\gamma_z)}{(4+3\gamma_z)} \\ N_2 &= 0 \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(\xi+1)\frac{(\xi^2+2\xi-11-6\gamma_z)}{(4+3\gamma_z)} \\ N_4 &= \frac{1}{2}(\xi-1)(\xi+3)(\xi+1)\frac{a}{(4+3\gamma_z)} \\ L_1 &= N_5 = \frac{3}{4}(\xi+3)\frac{(\xi-3)}{a(4+3\gamma_z)} \\ L_2 &= N_6 = 0 \\ L_3 &= N_7 = -\frac{3}{4}(\xi+1)\frac{(\xi-1)}{a(4+3\gamma_z)} \\ L_4 &= N_8 = \frac{(3\xi^2+6\xi-1+6\gamma_z)}{2(4+3\gamma_z)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Mendonça (2008) apresenta a matriz de rigidez com articulação à esquerda no modelo de Timoshenko, como:

$$[k] = \frac{EI_z}{(4+3\gamma)2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6a & 12a^2 & 0 \\ \text{sim} & & & \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Para o vetor de cargas nodais equivalentes da barra articulada à esquerda, com carga uniformemente distribuída ao longo da barra para o modelo de Euler-Bernoulli (Figura 2.11), fica:

$$\begin{Bmatrix} f_{1z} \\ f_{2z} \\ f_{3z} \\ f_{4z} \end{Bmatrix} = p_y \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} J d\xi = \frac{p_y L}{8} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -L \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Já para o modelo de Timoshenko, a Eq. (2.110), fica:

$$\{P_{0z}\} = p_y \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} J d\xi = -\frac{p_y L}{2(4+3\gamma_z)} \begin{bmatrix} 3(1+\gamma_z) \\ 0 \\ (5+3\gamma_z) \\ -L \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

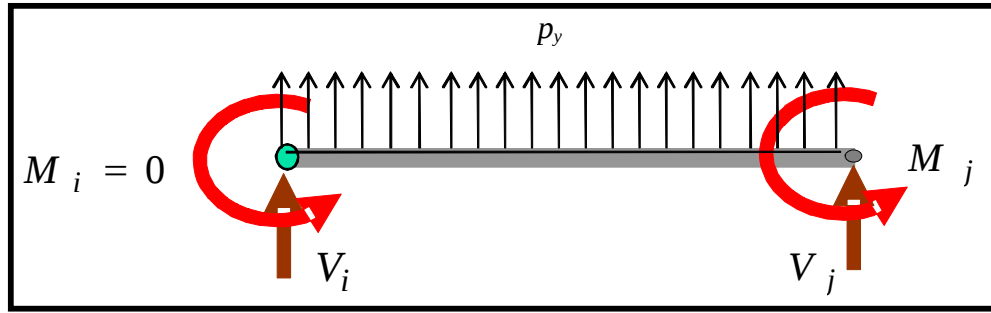


Figura 2.11 ã Barra articulada à esquerda submetida a carregamento uniforme

b) Contribuição da Flexão em y no plano xz

Os deslocamentos transversais w na direção z e as rotações da seção β_y em y podem ser escritas de forma análoga às suas contrapartes v Eq e β_z Eq. (2.92) e Eq. (2.93) resultando em:

$$w = \dot{N}_1 w_i + \dot{N}_2 \beta_{yi} + \dot{N}_3 w_j + \dot{N}_4 \beta_{yj} = [\dot{N}] \{u_{fy}\} \quad (2.112)$$

$$\beta_y = \dot{E}_1 w_i + \dot{E}_2 \beta_{yi} + \dot{E}_3 w_j + \dot{E}_4 \beta_{yj} = [\dot{E}] \{u_{fy}\} \quad (2.113)$$

Onde,

$$\{u_{fy}\}^T = \{w_i \quad \beta_{yi} \quad w_j \quad \beta_{yj}\}$$

$$[\dot{E}] = [\dot{E}_1 \quad \dot{E}_2 \quad \dot{E}_3 \quad \dot{E}_4]$$

$$[\dot{N}] = [\dot{N}_1 \quad \dot{N}_2 \quad \dot{N}_3 \quad \dot{N}_4]$$

Com,

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \frac{1}{4} \cdot (-1 + \xi) \cdot \frac{(\xi^2 + \xi - 2 - 6\gamma_y)}{(1 + 3\gamma_y)} \\ \dot{N}_2 &= -\frac{1}{4} \cdot a(\xi - 1)(\xi + 1) \cdot \frac{(-\xi + 1 + 3\gamma_y)}{(1 + 3\gamma_y)} \\ \dot{N}_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot \frac{(-\xi^2 + \xi + 2 + 6\gamma_y)}{(1 + 3\gamma_y)} \\ \dot{N}_4 &= -\frac{1}{4} \cdot a(\xi - 1)(\xi + 1) \cdot \frac{(\xi + 1 + 3\gamma_y)}{(1 + 3\gamma_y)} \\ \dot{E}_1 &= \dot{N}_5 = -\frac{3}{4} (\xi - 1) \cdot \frac{(\xi + 1)}{a(1 + 3\gamma_y)} \\ \dot{E}_2 &= \dot{N}_6 = -\frac{1}{4} (\xi - 1) \cdot \frac{(-3\xi - 1 + 6\gamma_y)}{(1 + 3\gamma_y)} \\ \dot{E}_3 &= \dot{N}_7 = \frac{3}{4} (\xi + 1) \cdot \frac{(\xi - 1)}{a(4 + 3\gamma_z)} \\ \dot{E}_4 &= \dot{N}_8 = \frac{1}{4} (\xi + 1) \cdot \frac{(3\xi - 1 + 6\gamma_z)}{(1 + 3\gamma_z)} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Onde,

$$\gamma_y = \frac{4EI_y}{\kappa GAL^2}$$

Vale ressaltar que em (2.118) as funções $\dot{\bar{N}}_i$ possuem os valores análogos de N_i dados em (2.69), exceto os sinais de algumas delas e a permuta dos fatores $\gamma_z = \frac{4EI_z}{\kappa GAL^2}$ por $\gamma_y = \frac{4EI_y}{\kappa GAL^2}$. As funções $\dot{\bar{E}}_i$ também podem ser obtidas por trocas de sinais e permutas desses fatores (γ_z por γ_y) em L_i . Se, $\gamma_z = \gamma_y$, então as formas finais dessas funções ficam:

$$\begin{aligned}\{\dot{\bar{N}}\}^T &= [N_1 \quad -N_2 \quad N_3 \quad -N_4] \\ \{\dot{\bar{E}}\}^T &= [-N_5 \quad N_6 \quad -N_7 \quad N_8]\end{aligned}\quad (2.115)$$

Com isso, uma estratégia análoga ao caso da flexão em z pode ser aplicada para obter a matriz de rigidez para flexão em y, resultando em:

$$K_b = \int_{-1}^1 a.E.I_y \{\dot{\bar{M}}\}^T \{\dot{\bar{M}}\} d\xi \quad (2.116)$$

$$K_s = \int_{-1}^1 a.\kappa G.A \{\dot{\bar{E}}_d\}^T \{\dot{\bar{E}}_d\} d\xi \quad (2.117)$$

Onde:

$$\begin{aligned}\{\dot{\bar{M}}\}^T &= [\dot{\bar{M}}_5 \quad \dot{\bar{M}}_6 \quad \dot{\bar{M}}_7 \quad \dot{\bar{M}}_8] \\ \{\dot{\bar{E}}\}^T &= [\dot{\bar{E}}_{d1} \quad \dot{\bar{E}}_{d2} \quad \dot{\bar{E}}_{d3} \quad \dot{\bar{E}}_{d4}] \\ \dot{\bar{M}}_i &= \frac{\partial \dot{\bar{N}}_i}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx}; \quad i = 5, 6, 7, 8 \\ \dot{\bar{E}}_{di} &= \frac{\partial \dot{\bar{N}}_i}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\xi} + \dot{\bar{E}}_i; \quad i = 1, 2, 3, 4\end{aligned}\quad (2.118)$$

Após o cálculo das integrais (2.116) e (2.117), procede-se à superposição dos efeitos de flexão e cisalhamento conduzindo à forma explícita final da matriz de rigidez:

$$[K] = \frac{EI_y}{L(1+3\gamma_y)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4+3\gamma_y & \frac{6}{L} & 2-3\gamma_y \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2-3\gamma_y & \frac{6}{L} & 4+3\gamma_y \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

No modelo de Euler-Bernoulli, onde a deformação por cortante é desconsiderada, o que implica em $\delta = 0$ e conduz a:

$$[K] = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Quando o carregamento é distribuído transversalmente à barra na direção y, o mesmo deverá ser transformado em forças nodais equivalentes, conforme mostrado na Figura 2.12.

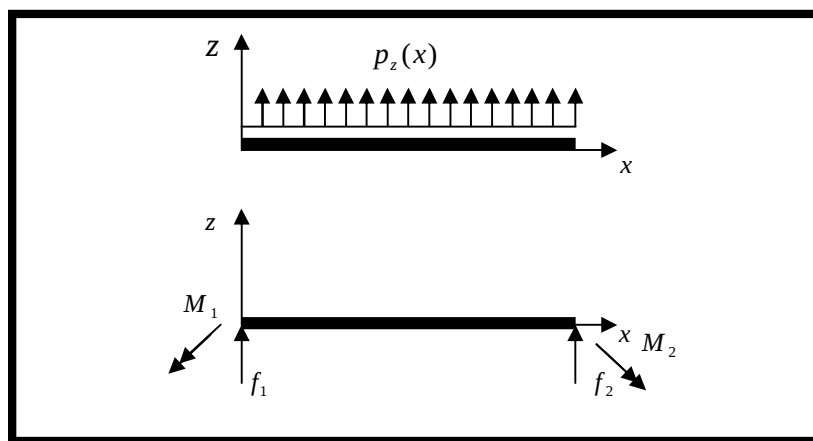


Figura 2.12 ã Carregamento distribuído transversalmente na direção y com suas forças nodais equivalentes

O trabalho das cargas é dado por:

$$W = \int p_z w dx \quad (2.121)$$

Utilizando o deslocamento w , e as transformações $\xi = \frac{2x}{L}$ e $J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2}$, a minimização da Eq. (2.121) fica:

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(W) = f_1; \frac{\partial}{\partial \phi_i}(W) = f_2; \frac{\partial}{\partial v_j}(W) = f_3; \frac{\partial}{\partial \phi_j}(W) = f_4 \quad (2.122)$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ f_{2y} \\ f_{3y} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = p_z \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} (\dot{N}_1) \\ (\dot{N}_2) \\ (\dot{N}_3) \\ (\dot{N}_4) \end{Bmatrix} J d\xi = p_z \begin{Bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.123)$$

Onde as funções $\dot{N}_i$ são dadas na Eq (2.114).

2.2.3. Contribuição da Torção

O elemento de barra pode ser submetido a dois tipos de torção: a torção uniforme, também conhecida como torção de Saint-Venant e torção não uniforme, discutidos a seguir.

a) Torção Livre ou de Saint-Venant

Considerando a Figura 2.13 e assumindo-se que as barras sob torção estão submetidas a empenamento uniforme das seções do eixo, desprezando a deformação axial e adotando as hipóteses do item 2.3, os deslocamentos u , v e w de um ponto na seção transversal a torção serão dados por:

$$u(x, y, z) = \frac{d\theta(x)}{dx} \psi(y, z); \quad v(x, y, z) = -\theta(x)z \quad \text{e} \quad w(x, y, z) = \theta(x)y \quad (2.124)$$

Onde,

ψ = função de empenamento

θ = ângulo de torção

Já as distorções são dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta + \theta = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right)\end{aligned}\tag{2.125}$$

e as deformações dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2\theta}{dx^2} \psi \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{2.126}$$

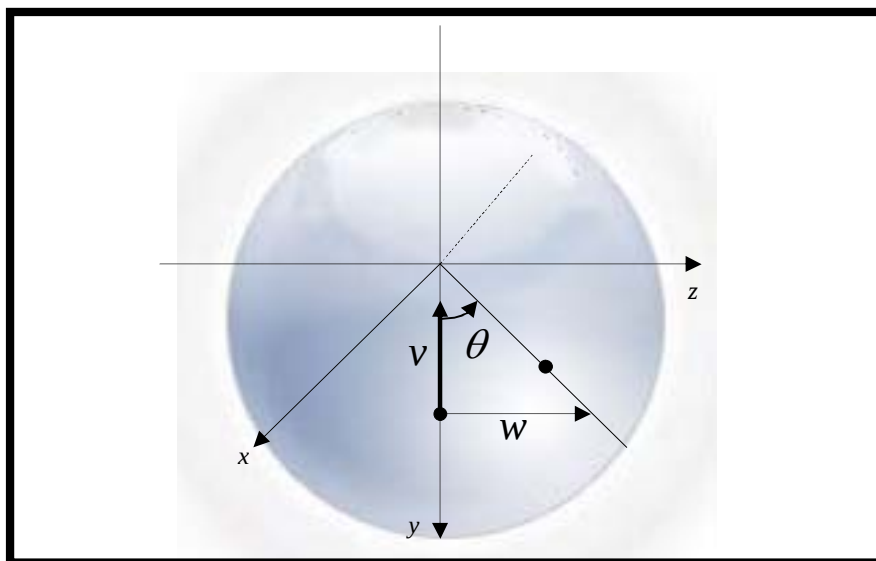


Figura 2.13 ã Componente de uma barra submetida à torção.

Como o material é homogêneo, isotrópico e elasto-linear (hipóteses 2.3.iv, 2.3.v e 2.3.vi) tem-se que:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.127)$$

Desprezando-se a deformação axial, a energia potencial da torção de Saint Venant é dada por:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dV \quad (2.128)$$

Substituindo-se as relações cinemáticas e constitutivas, dadas pelas eqs. (2.124), (2.125), (2.126), (2.127) na Eq. (2.128), fica:

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right) G \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right) dA dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right) G \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right) dA dx \end{aligned} \quad (2.129)$$

Fatorando-se a Eq.(2.126), tem-se:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 G \left\{ \int_A \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right)^2 \right\} dA dx \quad (2.130)$$

Sendo a expressão do momento de inércia à torção dada por:

$$I_t = \left\{ \int_A \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right)^2 \right\} dA \quad (2.131)$$

Substituindo a Eq. (2.131) na Eq. (2.130) e subtraindo-se a parcela de trabalho dada por $W = \int_L t(x)\theta dx$, a energia total será dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L GI_t \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L t(x)\theta dx \quad (2.132)$$

Dada à similaridade entre a Eq. (2.132) e a Eq. (2.6), a equação de equilíbrio para o caso da torção uniforme pode ser escrita permutando: as constantes EA por GI_t , os carregamentos p por t e os deslocamentos u por θ . Com isso, tem-se:

$$GI_t \frac{d^2\theta}{dx^2} + t = 0 \quad (2.133)$$

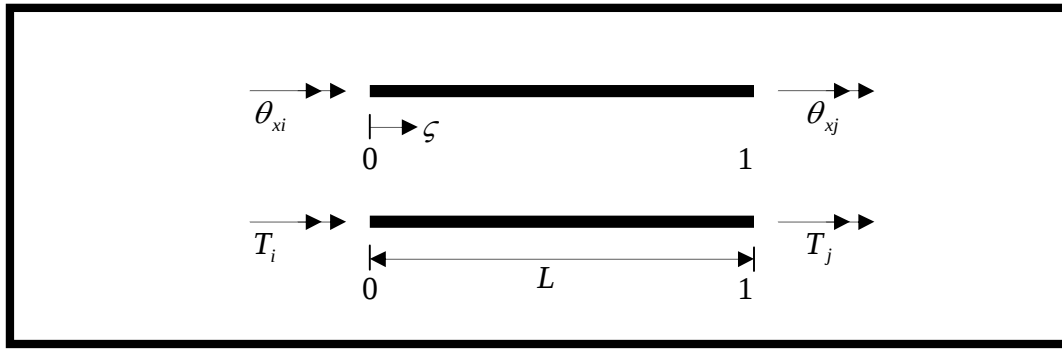


Figura 2.14 ã Representação esquemática para interpolação linear

A solução homogênea da Eq. (2.133) pode ser obtida adotando-se uma interpolação linear para o ângulo de torção com sistema homogêneo ζ com origem na extremidade esquerda, vide Figura 2.14:

$$\theta = a_1 + a_2\zeta \quad (2.134)$$

Onde

$$\zeta = x/L$$

E aplicando as condições de contorno $[\theta(0) = \theta_i, \theta(1) = \theta_j]$ na Eq.(2.131), as constantes a_i podem ser determinadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j - \theta_i \end{Bmatrix} \quad (2.135)$$

Substituindo-se a Eq.(2.132) na Eq.(2.131), o ângulo de torção fica:

$$\theta(\zeta) = \theta_i + (\theta_j - \theta_i)\zeta = Z_1\theta_i + Z_2\theta_j \quad (2.136)$$

Onde:

$$Z_1 = 1 - \frac{x}{L} \text{ e } Z_2 = \frac{x}{L}$$

Substituindo-se a Eq.(2.133) na Eq.(2.129), o funcional discretizado, fica:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L [(b_1\theta_i + b_2\theta_j)GI_t(b_1\theta_i + b_2\theta_j)] dx - W \quad (2.137)$$

Onde:

θ_i, θ_j = Ângulo de torção nos nós i e j.

$$b_1 = \frac{dZ_1}{dx} = \frac{-1}{L} \text{ e } b_2 = \frac{dZ_2}{dx} = \frac{1}{L}$$

A forma matricial da energia total pode ser obtida a partir da Eq. (2.137) e o trabalho das cargas externas. Para o caso de torques concentrados nas extremidades da barra fica:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L (\{u_t\}^T [B]^T GI_t [B] \{u_t\}) dx - \{u_t\}^T \{f_t\} \quad (2.138)$$

Onde:

$$[B] = \frac{d[Z]}{dx}$$

$$\{u_t\}^T = \{\theta_i \quad \theta_j\}$$

$$\{f_t\}^T = [T_i \quad T_j]$$

Convém notar que o funcional de energia discretizado está em função das variáveis nodais θ de acordo com a relação $\pi \rightarrow \pi(\theta_i, \theta_j)$. Aplicando-se a condição estacionária para o funcional em relação aos valores nodais tem-se a forma da matriz de rigidez dos efeitos de torção:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{u_t\}^T} = GI_t \int_0^L \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} - \{f_t\} = [K] \{u_t\} = \{f_t\} \quad (2.139)$$

Onde,

$$[K] = GI_t \int_0^L \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 \end{bmatrix} dx$$

Calculando os elementos da matriz de rigidez $[K]$, a forma explícita da matriz para o efeito de torção fica:

$$[K] = \frac{GI_t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

b) Torção Não Uniforme

No caso de torção não-uniforme, o momento torçor varia ao longo da barra, seções vizinhas tendem a apresentar rotações diferentes, o que implica em empenamentos diferentes. Para que a compatibilidade de deslocamentos seja verificada, o aparecimento de tensões normais, modificando esses empenamentos, é inevitável. O modelo adotado neste trabalho para a torção não-uniforme é o de Vlasov (1961). As principais hipóteses desse modelo são:

- a) A forma da seção transversal não se altera, ou seja, não se considera a distorção em seu próprio plano ($\tau_{xy} = 0$ e $\gamma_{xy} = 0$);
- b) O empenamento da seção transversal é constante ao longo da espessura; sua forma é a mesma para todas as seções, mas sua intensidade difere de uma seção para outra, sendo proporcional à rotação específica.
- c) As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas. Esta hipótese corresponde à teoria de Euler-Bernoulli.
- d) As tensões de cisalhamento paralelas à superfície média são dadas pela soma de dois termos (Figura 2.15):
 - i. O primeiro termo (τ_ω) pode ser admitido constante ao longo da espessura, e o esforço solicitante de torção resultante é denominado momento de flexo-torção (T_ω). A existência dessa parcela confronta a hipótese da Resistência dos Materiais de deformações por cisalhamento nulas na superfície média.
 - ii. O segundo termo, com distribuição linear ao longo da espessura e anti-simetricamente distribuído em relação à linha média, é obtido da Teoria de torção uniforme de Saint-Venant.

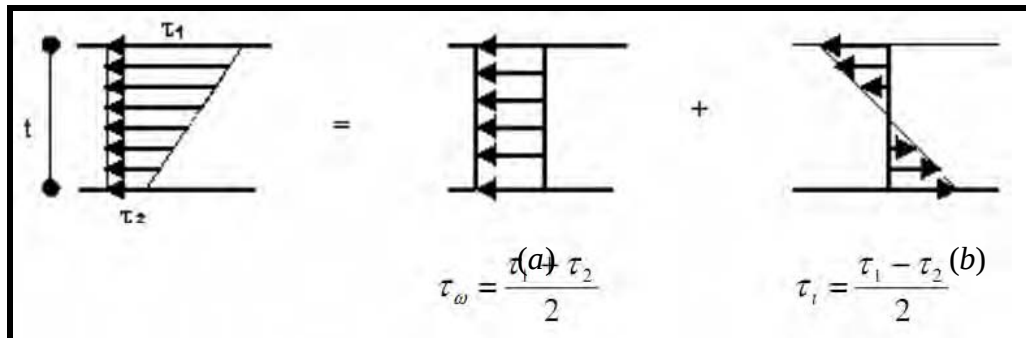


Figura 2.15 – Tensões de cisalhamento: (a) empenamento, (b) uniforme.

Seja um elemento infinitesimal com dimensões dx , dy e dz , a energia potencial de deformação π_p é igual ao trabalho das tensões (σ e τ) atuantes, de forma que:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x) dV + \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (2.141)$$

Em barras com seção transversal aberta composta por paredes finas, o deslocamento axial, devido ao efeito de torção, pode ser calculado como:

$$u_t = \omega(S) \frac{d\theta}{dx} \quad (2.142)$$

Onde,

$\omega(S)$ = área setorial no ponto de interesse na seção transversal

S = é a coordenada orientada na linha do esqueleto.

Na Figura 2.16 está ilustrada a representação gráfica da semi-área setorial diferencial de um segmento curvo (caso geral) entre os pontos S_1 e S_2 na linha do esqueleto S e o pólo D (centro de torção). Vale evidenciar que na Eq. (2.124) a função de empenamento ψ é tomada como a área setorial no modelo de Vlasov ($\omega(S)$).

É importante ressaltar que a área setorial $\omega(S)$, quando calculada em relação a um trecho qualquer da linha do esqueleto, de uma seção qualquer, resulta no dobro da área do setor (figura geométrica plana) gerada pela varredura da linha que une o Centro de Torção (admitido como pólo) e a origem S_1 (adotada aleatoriamente), desde essa mesma origem S_1 até S_2 do elemento de interesse.

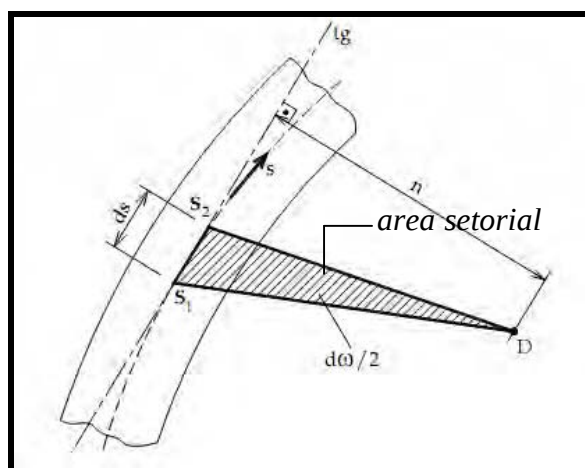


Figura 2.16 ã Representação da área setorial.

Combinando-se $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ com a Eq. (2.142), fica:

$$\varepsilon_x = \omega(S) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (2.143)$$

Da relação constitutiva de materiais elásticos lineares (Lei de Hooke), suprimindo o efeito de Poisson, resulta em:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.144)$$

Das Eqs. (2.143) e (2.144), tem-se:

$$\sigma_x = E \omega(S) \frac{d^2 \theta}{dx^2} (x) \quad (2.145)$$

Substituindo as eqs. (2.145) e (2.143) e as relações dadas nas eqs. (2.125) e (2.127) na Eq. (2.141), fica:

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \omega^2(S) \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\omega}{dz} - y \right) G \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\omega}{dz} - y \right) dA dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\omega}{dy} + z \right) G \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{d\omega}{dy} + z \right) dA dx \end{aligned} \quad (2.146)$$

Introduzindo os momentos de inércia setorial e de torção: $I_\omega = \int_A \omega^2(S) dA$, e

$I_t = \int_A \left[\left(\frac{d\omega}{dz} - y \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dy} + z \right)^2 \right] dA$ na Eq. (2.146), a energia potencial de deformação da

torção não uniforme fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI_\omega \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GI_t \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (2.147)$$

As equações governantes da torção não-uniforme podem ser obtidas aplicando-se a condição estacionária para o funcional de energia (Eq. (2.1)):

$$\begin{aligned}\delta\pi = \delta(\pi_p - W) = & \left[\frac{1}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) EI_\omega \delta \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) dx + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right) GI_t \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx \right] - \int_0^L t \delta\theta dx = 0\end{aligned}\quad (2.148)$$

Integrando-se convenientemente por partes a Eq. (2.148), tem-se:

$$\begin{aligned}& \left[EI_\omega \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \right]_0^L - EI_\omega \left[\left(\frac{d^3\theta}{dx^3} \right) \delta\theta \right]_0^L + \int_0^L EI_\omega \left(\frac{d^4\theta}{dx^4} \right) \delta\theta dx + \\ & \left[GI_t \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \delta\theta \right]_0^L - \int_0^L GI_t \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \delta\theta dx - \int_0^L t \delta\theta dx = 0\end{aligned}\quad (2.149)$$

Reordenando a Eq. (2.149), fica:

$$\begin{aligned}& \left[EI_\omega \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \right]_0^L - EI_\omega \left[\left(\frac{d^3\theta}{dx^3} \right) \delta\theta \right]_0^L + \left[GI_t \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \delta\theta \right]_0^L + \\ & \int_0^L \left[EI_\omega \left(\frac{d^4\theta}{dx^4} \right) - GI_t \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) - t \right] \delta\theta dx = 0\end{aligned}\quad (2.150)$$

Aplicando-se a condição de contorno na variação de $[\delta\theta]_0^L = 0$ na Eq. (2.150), resulta em:

$$\int_0^L \left[EI_\omega \left(\frac{d^4\theta}{dx^4} \right) - GI_t \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right) - t \right] \delta\theta dx = 0\quad (2.151)$$

Como a variação de $\delta\theta$ é arbitrária, a nulidade da Eq. (2.151) requer que:

$$EI_{\omega} \left(\frac{d^4 \theta}{dx^4} \right) - GI_t \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) = t \quad (2.152)$$

A solução da forma homogênea da Eq. (2.152), é dada por:

$$\theta = A + Bx + C.\cosh(\alpha.x) + D.\sinh(\alpha.x) \quad (2.153)$$

Onde:

A, B, C e D = Constantes;

α = Valor adimensional definido por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_{\omega}}} \quad (2.154)$$

Sejam as condições de contorno dadas por:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad \theta = \theta_i \quad e \quad \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d\theta_i}{dx} \\ x = L; \quad \theta = \theta_j \quad e \quad \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d\theta_j}{dx} \end{aligned} \quad (2.155)$$

Substituindo as condições de contorno (Eq. (2.155)) na Eq. (2.153), encontram-se expressões que podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \frac{d\theta_i}{dx} \\ \theta_j \\ \frac{d\theta_j}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cosh(\alpha.L) & \sinh(\alpha.L) \\ 0 & 1 & \alpha.\sinh(\alpha.L) & \alpha.\cosh(\alpha.L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (2.156)$$

Resolvendo a Eq. (2.156), resulta em:

$$A = \frac{\dot{E}}{GI_t} \left[(L\alpha.sh - ch + 1)\theta_i + \left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) \frac{d\theta_i}{dx} + (1 - ch)\theta_j + \left(\frac{sh}{\alpha} - L \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] \quad (2.157)$$

$$B = \frac{\dot{E}}{GI_t} \left[-\alpha.sh.\theta_i + (1 - ch) \frac{d\theta_i}{dx} + \alpha.sh.\theta_j + (1 - ch) \frac{d\theta_j}{dx} \right] \quad (2.158)$$

$$C = \frac{\dot{E}}{GI_t} \left[(1 - ch)\theta_i + \left(\frac{sh}{\alpha} - L.ch \right) \frac{d\theta_i}{dx} + (ch - 1)\theta_j + \left(L - \frac{sh}{\alpha} \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] \quad (2.159)$$

$$D = \frac{\dot{E}}{GI_t} \left[sh.\theta_i + \left(L.sh - \frac{ch}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{d\theta_i}{dx} + sh.\theta_j + (ch - 1) \frac{d\theta_j}{dx} \right] \quad (2.160)$$

Onde,

$$sh = \sinh(\alpha.L); \quad ch = \cosh(\alpha.L); \quad \dot{E} = \frac{GI_t}{2 - 2.ch + L\alpha.sh}$$

Substituindo as constantes A, B, C e D na Eq. (2.153), obtém-se a expressão do ângulo de rotação em função dos deslocamentos nas extremidades ($\theta_i, \frac{d\theta_i}{dx}, \theta_j$ e $\frac{d\theta_j}{dx}$) do elemento, dada por:

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{\dot{E}}{G.I_t} \left[(L\alpha.sh - ch + 1)\theta_i + \left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) \frac{d\theta_i}{dx} + (1 - ch)\theta_j + \left(\frac{sh}{\alpha} - L \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] + \\ & \frac{\dot{E}}{G.I_t} \left[-\alpha.sh.\theta_i + (1 - ch) \frac{d\theta_i}{dx} + \alpha.sh.\theta_j + (1 - ch) \frac{d\theta_j}{dx} \right] x + \\ & \frac{\dot{E}}{G.I_t} \left[(1 - ch)\theta_i + \left(-L.ch + \frac{sh}{\alpha} \right) \frac{d\theta_i}{dx} + (ch - 1)\theta_j + \left(-\frac{sh}{\alpha} + L \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] \cosh(\alpha.x) + \\ & \frac{\dot{E}}{G.I_t} \left[sh.\theta_i + \left(L.sh - \frac{ch}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{d\theta_i}{dx} - sh.\theta_j + \left(\frac{ch - 1}{\alpha} \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] \sinh(\alpha.x) \end{aligned} \quad (2.161)$$

A Eq. (2.161) também pode ser escrita na forma:

$$\theta = V_1\theta_i + V_2 \frac{d\theta_i}{dx} + V_3\theta_j + V_4 \frac{d\theta_j}{dx} = [V]\{u_t\} \quad (2.162)$$

Onde,

$$\{u_\theta\}^T = \left\{ \theta_i \quad \frac{d\theta_i}{dx} \quad \theta_j \quad \frac{d\theta_j}{dx} \right\}$$

$$[V] = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]$$

Com,

$$V_1 = \frac{\dot{F}}{G.I_t} [(sh.\alpha.L - ch + 1) + (-\alpha.sh).x + (1 - ch).cosh(\alpha.x) + sh.senh(\alpha.x)] \quad (2.163)$$

$$V_2 = \frac{\dot{F}}{G.I_t} \left[\left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) + (1 - ch)x + \left(-L.ch + \frac{sh}{\alpha} \right) cosh(\alpha.x) + \left(\frac{1}{\alpha} + sh.L - \frac{ch}{\alpha} \right) senh(\alpha.x) \right] \quad (2.164)$$

$$V_3 = \frac{\dot{F}}{G.I_t} [(1 - ch) + (\alpha.sh).x + (ch - 1) cosh(\alpha.x) - sh.senh(\alpha.x)] \quad (2.165)$$

$$V_4 = \frac{\dot{F}}{G.I_t} \left[\left(\frac{sh}{\alpha} - L \right) + (1 - ch).x + \left(L - \frac{sh}{\alpha} \right) .cosh(\alpha.x) + \left(\frac{ch - 1}{\alpha} \right) .senh(\alpha.x) \right] \quad (2.166)$$

Derivando a Eq. (2.162), obtém-se o empenamento da seção dado por:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = Q_1\theta_i + Q_2\theta'_i + Q_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \theta_j + Q_4\theta'_j = [Q]\{u_\theta\} \quad (2.167)$$

Onde,

$$[Q] = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4]$$

e

$$Q_1 = \frac{dV_1}{dx} = - \frac{\dot{F}\alpha [sh - sh.cosh(\alpha x) + senh(\alpha x).(ch - 1)]}{G.I_t} \quad (2.168)$$

$$Q_2 = \frac{dV_2}{dx} = - \frac{\dot{F}\alpha \left[cosh(\alpha x) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{ch}{\alpha} + L.sh \right) - ch + senh(\alpha x) \cdot \left(\frac{sh}{\alpha} - L.ch \right) + 1 \right]}{G.I_t} \quad (2.169)$$

$$Q_3 = \frac{dV_3}{dx} = - \frac{\dot{F}\alpha \left[cosh(\alpha x) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{ch}{\alpha} + L.sh \right) - ch + senh(\alpha x) \cdot \left(\frac{sh}{\alpha} - L.ch \right) + 1 \right]}{G.I_t} \quad (2.170)$$

$$Q_4 = \frac{dV_4}{dx} = - \frac{\dot{F}\alpha \left[senh(\alpha x) \cdot \left(L - \frac{ch}{\alpha} \right) - ch + \frac{cosh(\alpha x).(ch - 1)}{\alpha} + 1 \right]}{G.I_t} \quad (2.171)$$

$$\theta'_i = \frac{d\theta_i}{dx} \text{ e } \theta'_j = \frac{d\theta_j}{dx} \quad (2.172)$$

Quando a barra é submetida apenas a torque e bimomentos concentrados nas extremidades (vide Figura 2.17), o trabalho das forças externas fica:

$$W = T_i\theta_i + T_j\theta_j + B_i \frac{d\theta_i}{dx} + B_j \frac{d\theta_j}{dx} \quad (2.173)$$

Sendo a energia total, dada por:

$$\pi = \pi_p - W \quad (2.174)$$

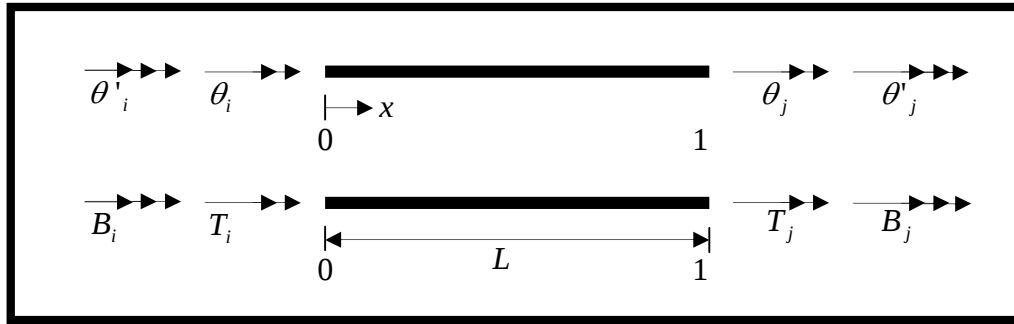


Figura 2.17 Representação esquemática para interpolação linear

Substituindo as Eqs. (2.147) e (2.173) na Eq. (2.174), obtém-se a expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos nodais nas extremidades do elemento. Aplicando a condição estacionária para o funcional de energia total, resulta em:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[(\alpha.sh)\theta_i + (ch-1)\frac{d\theta_i}{dx} + (-\alpha.sh)\theta_j - (1-ch)\frac{d\theta_j}{dx} \right] - T_i \quad (2.175)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta'_i} = \frac{\partial}{\partial \theta'_i} \left[-(1-ch)\theta_i + \left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) \frac{d\theta_i}{dx} - (ch-1)\theta_j + \left(\frac{sh}{\alpha} - L \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] - B_i \quad (2.176)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[(-\alpha.sh)\theta_i - (ch-1)\frac{d\theta_i}{dx} + (\alpha.sh)\theta_j - (ch-1)\frac{d\theta_j}{dx} \right] - T_j \quad (2.177)$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial \theta_j'} = \dot{E} \left[-(1-ch)\theta_i + \left(\frac{sh}{\alpha} - L \right) \frac{d\theta_i}{dx} - (ch-1)\theta_j + \left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) \frac{d\theta_j}{dx} \right] - B_j \quad (2.178)$$

As Eqs. (2.175) a (2.178), na forma matricial, ficam:

$$\dot{E} \begin{bmatrix} \alpha.sh & (ch-1) & -\alpha.sh & -(1-ch) \\ -(1-ch) & L.ch - \frac{sh}{\alpha} & (1-ch) & \frac{sh}{\alpha} - L \\ -\alpha.sh & -(ch-1) & \alpha.sh & -(ch-1) \\ -(1-ch) & \frac{sh}{\alpha} - L & -(ch-1) & L.ch - \frac{sh}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \frac{d\theta_i}{dx} \\ \theta_j \\ \frac{d\theta_j}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i \\ B_i \\ T_j \\ B_j \end{Bmatrix} \quad (2.179)$$

Ou

$$[K_e]\{u_\theta\} = \{F_\theta\}$$

Onde:

$[K_e]$ = Matriz de rigidez a torção do elemento de núcleo

$\{u_\theta\}$ = Vetor dos deslocamentos nas extremidades

$\{F_\theta\}$ = Vetor de forças equivalentes

Quando houver um torque distribuído na barra, o mesmo deverá ser transformado em forças nodais equivalentes, conforme mostrado na Figura 2.18.

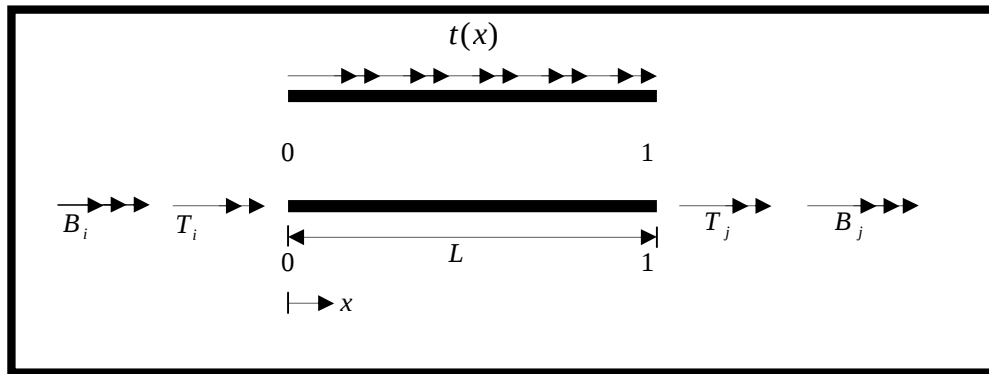


Figura 2.18 ã Barra submetida a torque distribuído, com suas forças nodais equivalentes.

O trabalho das cargas é dado por:

$$W = \int_0^L t(x)\theta(x)dx \quad (2.180)$$

Nesse trabalho, será considerado apenas o torque uniforme, assim $t(x) = t$. o que resulta em:

$$W = t \int_0^L \theta(x)dx \quad (2.181)$$

Quando o ângulo de torção é interpolado pela Eq. (2.173) e aplicada a condição estacionária para o trabalho externo resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(W) = T_i; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i}(W) = B_i; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j}(W) = T_j; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j}(W) = B_j \quad (2.182)$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} f_{1\theta} \\ f_{2\theta} \\ f_{3\theta} \\ f_{4\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i \\ B_i \\ T_j \\ B_j \end{Bmatrix} = t \int_0^L \begin{Bmatrix} (V_1) \\ (V_2) \\ (V_3) \\ (V_4) \end{Bmatrix} dx = -t \begin{Bmatrix} L/2 \\ \Theta \\ L/2 \\ -\Theta \end{Bmatrix} \quad (2.183)$$

Onde,

$$\Theta = \left[\left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) \left(L - \frac{sh}{\alpha} \right) + (1 - ch) \frac{L^2}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} + sh.L - \frac{ch}{\alpha} \right) \left(\frac{ch}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right]$$

2.3. ESTRUTURAS RETICULADAS: ABORDAGEM ESTÁTICA

Nesta seção, os efeitos independentes estudados na seção 2.2 serão combinados no intuito de descrever a matriz de rigidez e o vetor de força nodal equivalente no sistema local de coordenadas para elementos finitos representativos para os respectivos problemas

de treliças, de pórticos planos, de grelhas, de pórticos espaciais, e por fim, de núcleos estruturais.

2.3.1. Elemento de Treliça

No elemento de treliça plana ou espacial estão presentes apenas os efeitos axiais, que já foram discutidos na seção 2.2.1. Convém notar, que a matriz de rigidez no sistema local de coordenadas para os casos planos e espaciais é dada pela Eq. (2.23).

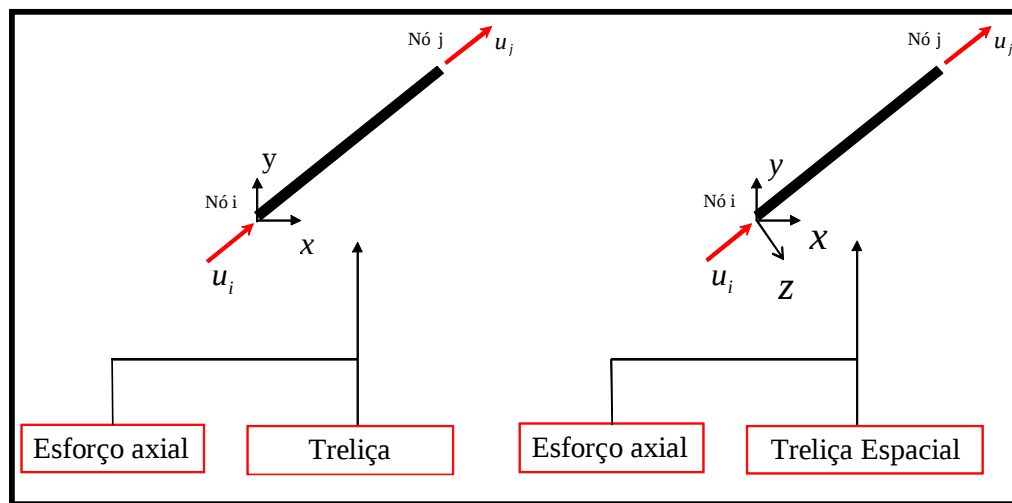


Figura 2.19 ã Graus de liberdade de uma treliça

2.3.2. Elemento de Pórtico Plano

Nos pórticos planos estão presentes os efeitos de flexão unidirecional e esforço axial, resultando em seis graus de liberdade, vide Figura 2.20.

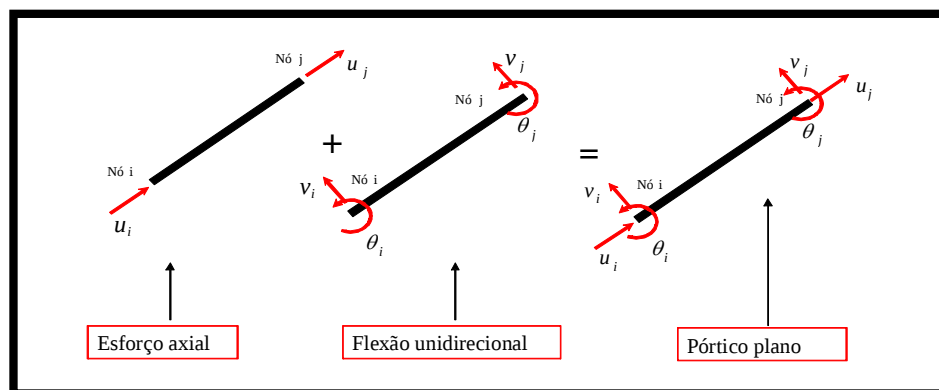


Figura 2.20 ã Graus de Liberdade do pórtico plano

a) Matriz de Rigidez

Associando-se os graus de liberdade 1 e 4 para os efeitos axiais e os demais para os efeitos de flexão (Euler-Bernoulli). Vide Figura 2.21.

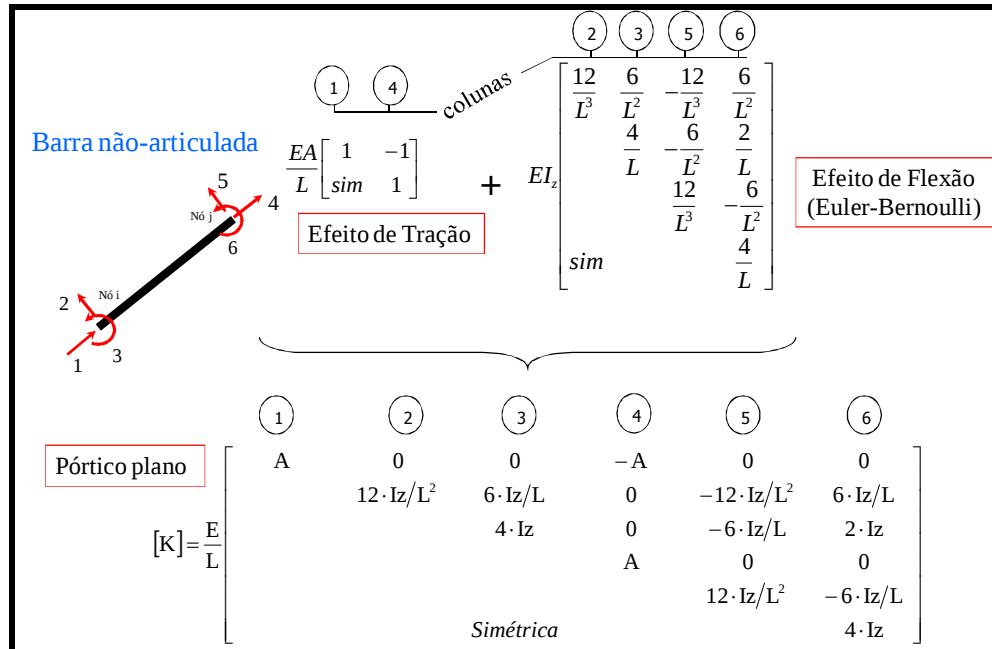


Figura 2.21 – Composição da Matriz de Rigidez Local para o Pórtico Plano

A montagem final da matriz de rigidez da barra não articulada do pórtico plano pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das eqs. (2.23) e (2.74), vide Figura 2.21.

A forma final da matriz de pórtico plano para uma barra sem articulações, incluindo o modelo de Euler-Bernoulli para flexão, fica:

$$[K] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot Iz/L^2 & 6 \cdot Iz/L & 0 & -12 \cdot Iz/L^2 & 6 \cdot Iz/L \\ 0 & 6 \cdot Iz/L & 4 \cdot Iz & 0 & -6 \cdot Iz/L & 2 \cdot Iz \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot Iz/L^2 & -6 \cdot Iz/L & 0 & 12 \cdot Iz/L^2 & -6 \cdot Iz/L \\ 0 & 6 \cdot Iz/L & 2 \cdot Iz & 0 & -6 \cdot Iz/L & 4 \cdot Iz \end{bmatrix} \quad (2.184)$$

Para o caso da barra articulada à direita, a matriz de rigidez da Eq.(2.180) deve ser alterada para:

$$[K] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot I_z / L^2 & 3 \cdot I_z / L & 0 & -3 \cdot I_z / L^2 & 0 \\ 0 & 3 \cdot I_z / L & 3 \cdot I_z & 0 & -3 \cdot I_z / L & 0 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -3 \cdot I_z / L^2 & -3 \cdot I_z / L & 0 & 3 \cdot I_z / L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

Já a matriz de rigidez Eq.(2.180), para o caso da barra articulada à esquerda, deve ser alterada para:

$$[K] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot I_z / L^2 & 0 & 0 & -3 \cdot I_z / L^2 & 3 \cdot I_z / L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -3 \cdot I_z / L^2 & 0 & 0 & 3 \cdot I_z / L^2 & -3 \cdot I_z / L \\ 0 & 3 \cdot I_z / L & 0 & 0 & -3 \cdot I_z / L & 3 \cdot I_z \end{bmatrix} \quad (2.186)$$

No caso do modelo de flexão de Timoshenko (deformação por cortante incorporada), a montagem final da matriz de rigidez do pórtico plano Eq. (2.184) também pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das Eqs. (2.23) e (2.73), sendo alterada para:

$$[K] = E\chi \begin{bmatrix} A/(L\chi) & 0 & 0 & -A/(L\chi) & 0 & 0 \\ & 3 & 3a & 0 & -3 & 3a \\ & & (4+3\gamma_z)a^2 & 0 & -3a & (2-3\gamma_z)a^2 \\ & & & A/(L\chi) & 0 & 0 \\ & & & & 3 & -3a \\ \text{simetrica} & & & & & (4+3\gamma_z)a^2 \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

Onde:

$$\chi = \frac{I_z}{(1+3\gamma)2a^3}; \quad \gamma = \frac{EI_z}{\kappa GAa^2}; \quad a = \frac{L}{2} \quad \text{e} \quad \kappa = \text{fator de forma da seção.}$$

Para o caso de barras articuladas à direita ou à esquerda, no modelo de Timoshenko, as matrizes de rigidez local deve ser alterada, respectivamente para:

$$[K] = E\chi_1 \begin{bmatrix} A/(L\chi_1) & 0 & 0 & -A/(L\chi_1) & 0 & 0 \\ & 3 & 6a & 0 & -3 & 0 \\ & & 12a^2 & 0 & -6a & 0 \\ & & & A/(L\chi_1) & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ \text{sim.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

$$[K] = E\chi_1 \begin{bmatrix} A/(L\chi_1) & 0 & 0 & -A/(L\chi_1) & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 & -3 & 6a \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & A/(L\chi_1) & 0 & 0 \\ & & & & 3 & -6a \\ & & & & & 12a^2 \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

Onde,

$$\chi_1 = \frac{I_z}{(4 + 3\gamma_z)2a^3}$$

b) Vetor de Forças Nodais Equivalentes:

Associando-se os graus de liberdade 1 e 4 para o efeito axial puro e os graus 2, 3, 5 e 6 para a flexão em ϕ e relacionando às Eqs. (2.36) e (2.123) respectivamente, obtém-se o vetor nodal equivalente do elemento de pórtico plano sem articulação:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = -\frac{L}{2} \begin{Bmatrix} p \\ p_y \\ p_y L/6 \\ p \\ p_y \\ -p_y L/6 \end{Bmatrix} \quad (2.190)$$

Quando o elemento for articulado à esquerda,

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = -\frac{L}{2} \begin{Bmatrix} \frac{p}{3p_y(1+\gamma_z)} \\ \frac{(4+3\gamma_z)}{0} \\ \frac{pL/2}{p_y(5+3\gamma_z)} \\ \frac{(4+3\gamma_z)}{p_yL^2} \\ -\frac{(4+3\gamma_z)}{p_yL^2} \end{Bmatrix} \quad (2.191)$$

Quando o elemento for articulado à direita, fica:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = -\frac{L}{2} \begin{Bmatrix} \frac{p}{p_y(5+3\gamma_z)} \\ \frac{(4+3\gamma_z)}{p_yL^2} \\ \frac{(4+3\gamma_z)}{pL/2} \\ \frac{pL/2}{3p_y(1+\gamma_z)} \\ \frac{(4+3\gamma_z)}{0} \end{Bmatrix} \quad (2.192)$$

2.3.3. Elemento de Grelha

No elemento de grelha estão presentes os efeitos de flexão em z e de torção (uniforme e não-uniforme, sendo que nesse trabalho apenas o primeiro caso será abordado em grelhas), resultando seis graus de liberdade, vide Figura 2.22.

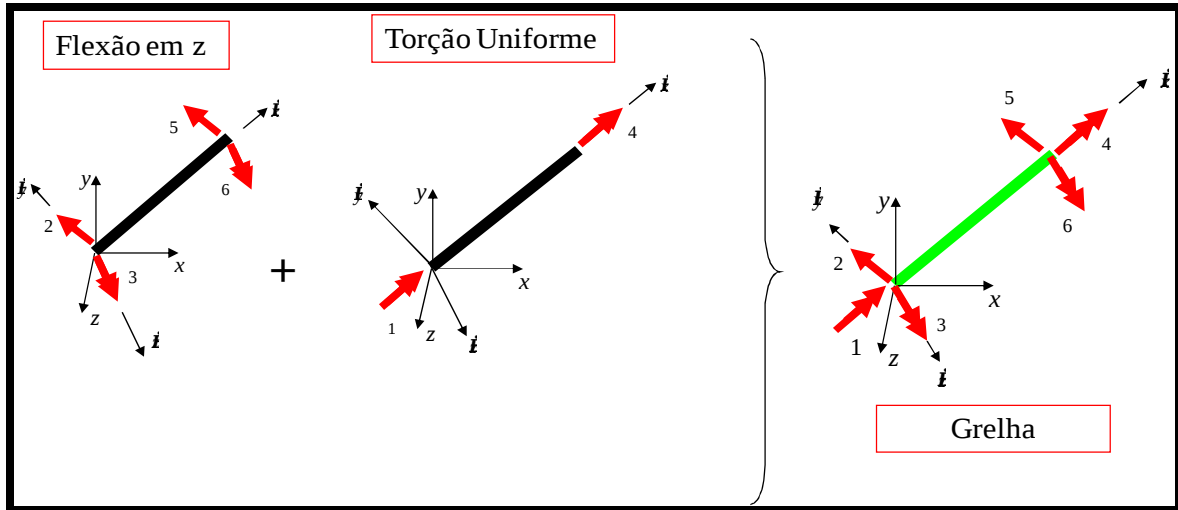


Figura 2.22 ã Graus de Liberdade da Barra de Grelha

a) Matriz de Rigidez

Associando-se os graus de liberdade 1 e 4 para os efeitos de torção uniforme, e os demais para os efeitos de flexão em z, a montagem final da matriz de rigidez do elemento de grelha pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das Eqs. (2.73) e (2.140), resultando em:

$$[K] = E\chi \begin{bmatrix} GI_p/(L\chi) & 0 & 0 & -GI_p/(L\chi) & 0 & 0 \\ & (4+3\gamma_z)a^2 & -3a & 0 & (2-3\gamma_z)a^2 & -3a \\ & & 3 & 0 & -3a & -3 \\ & & & GI_p/(L\chi) & 0 & 0 \\ & & & & (4+3\gamma_z)a^2 & 3a \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad (2.193)$$

Onde:

$$\chi = \frac{I_z}{(1+3\gamma)2a^3}$$

No caso do modelo de Euler-Bernoulli, basta atribuir $\gamma_z = 0$ na Eq.(2.187):

$$[K] = \begin{bmatrix} G \cdot It/L & 0 & 0 & -G \cdot It/L & 0 & 0 \\ & 4 \cdot E \cdot I_y/L & -6 \cdot E \cdot I_y/L^2 & 0 & 2 \cdot E \cdot I_y/L & 6 \cdot E \cdot I_y/L^2 \\ & & 12 \cdot E \cdot I_y/L^3 & 0 & -6 \cdot E \cdot I_y/L^2 & -12 \cdot E \cdot I_y/L^3 \\ & & & G \cdot It/L & 0 & 0 \\ & & & & 4 \cdot E \cdot I_y/L & 6 \cdot E \cdot I_y/L^2 \\ & & & & & 12 \cdot E \cdot I_y/L^3 \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

b) Vetor de Forças Nodais Equivalentes:

Associando-se os graus 1 e 4 para torção uniforme e os graus 2, 3, 5 e 6 para a flexão em $\hat{o}z$ e relacionando às Eqs. (2.36) e (2.123) respectivamente, obtém-se o vetor nodal equivalente para o elemento de grelha

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} tL/2 \\ p_y L/2 \\ p_y L^2/12 \\ tL/2 \\ p_y L/2 \\ -p_y L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.195)$$

Onde,

t = torque uniformemente distribuído

2.3.4. Elemento de Pórtico Espacial:

No elemento de pórtico espacial estão presentes os efeitos de flexão bidirecional, esforço axial e torção solicitada, resultando em doze graus de liberdade, vide Figura 2.23.

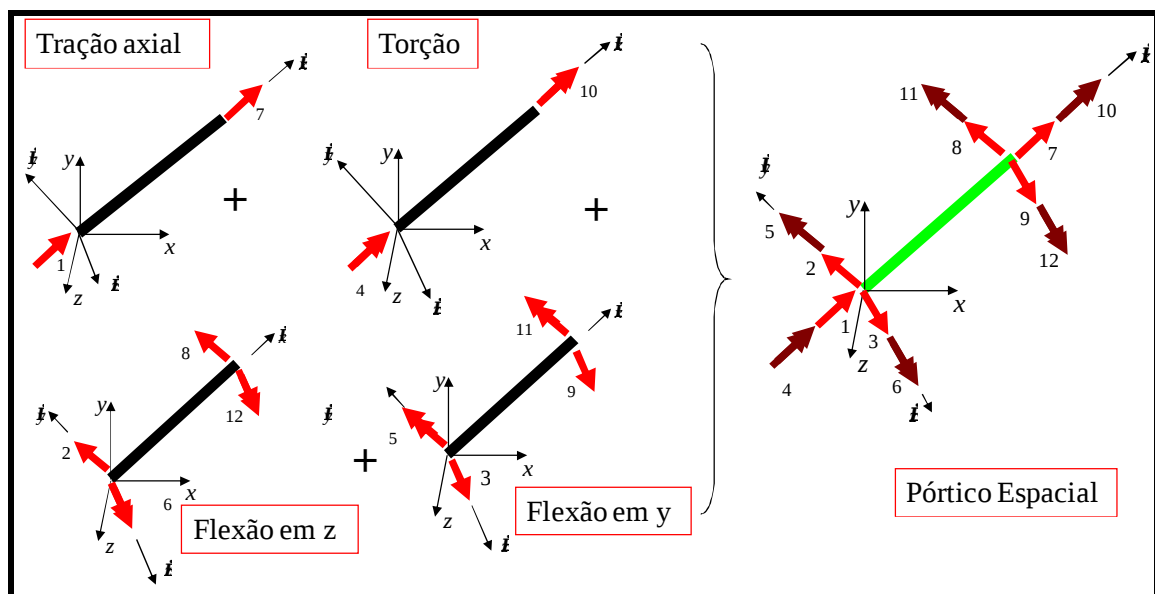


Figura 2.23- Graus de Liberdade da barra de pórtico espacial

a) Matriz de Rigidez

Associando-se os graus de liberdade 1 e 7 para os efeitos de esforços axiais, 4 e 10 para os efeitos de torção uniforme, 2, 6, 8 e 12 para os efeitos de flexão em z e os demais para os efeitos de flexão em y (Euler-Bernoulli), vide Figura 2.24.

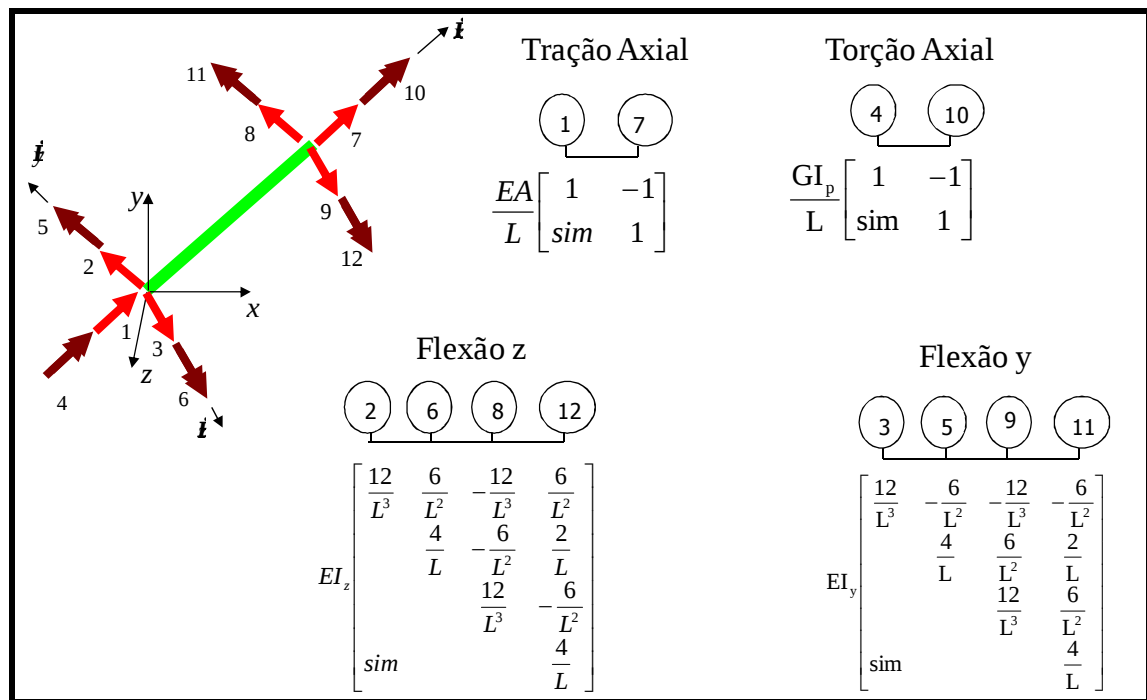


Figura 2.24 - Composição da Matriz de Rigidez Local para o Pórtico Espacial

A montagem final da matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das eqs. (2.23), (2.74), (2.120) e (2.139) (vide Figura 2.24), resultando em:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot I_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_z}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

simétrica

No caso do modelo de flexão de Timoshenko (deformação por cortante incorporada), a montagem final da matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das eqs. (2.23), (2.73), (2.119), e (2.139), resultando em:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m_1}{L} & 0 & -\frac{12m_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m_1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{12m_2}{L^2} & 0 & -\frac{6m_2}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12m_2}{L^2} & 0 & -\frac{6m_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (4+3\gamma_y)m_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{6m_2}{L} & 0 & (2-3\gamma_y)m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4+3\gamma_z)m_1 & 0 & -\frac{6m_1}{L} & 0 & 0 & 0 & (2-3\gamma_z)m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12m_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6m_1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12m_2}{L^2} & 0 & \frac{6m_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4+3\gamma_y)m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4+3\gamma_z)m_1 \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

simétrica

Onde:

$$m_1 = \frac{EI_z}{L(1+3\gamma_z)}; \quad m_2 = \frac{EI_y}{L(1+3\gamma_y)};$$

$$\gamma_z = \frac{4EI_z}{\kappa GAL^2} \text{ e } \gamma_y = \frac{4EI_y}{\kappa GAL^2}$$

κ = Fator de forma da seção.

b) Vetor de Forças Nodais Equivalentes:

Associando-se os graus de liberdade 1 e 7 à esforço axial; 2, 6, 8 e 12 à flexão em $\acute{o}z\hat{o}$; 3, 5, 9 e 11 à flexão em $\acute{o}y\hat{o}$ e 4 e 10 à torção e relacionando às eqs. (2.36), (2.77), (2.123) e (2.183) respectivamente, sendo que para este último são considerados apenas os efeitos de empenamento uniforme, obtém-se o vetor nodal equivalente para o elemento de pórtico espacial:

$$\begin{Bmatrix} f_I \\ f_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_I \\ p_{II} \end{Bmatrix} \quad (2.198)$$

Onde,

$$f_I = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6]^T$$

$$f_{II} = [f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12}]^T$$

$$p_I = [pL/2 \quad p_y L/2 \quad p_z L/2 \quad tL/2 \quad p_y L^2/12 \quad -p_z L^2/12]^T$$

$$p_{II} = [pL/2 \quad p_y L/2 \quad p_z L/2 \quad tL/2 \quad -p_y L^2/12 \quad p_z L^2/12]^T$$

2.3.5. Elemento de Núcleo Estrutural

O elemento de núcleo possui catorze graus de liberdade, sete por extremidade, sendo a primeira representada pelos graus de liberdade de 1 a 7 e a segunda extremidade dos graus de liberdade de 8 a 14 (vide Tabela 2.1). As seis primeiras de cada extremidade são referentes ao comportamento tridimensional descrito para o pórtico espacial e a sétima está relacionada com a derivada da rotação em torno do eixo x (empenamento). Convém notar que os eixos y e z são os eixos principais de inércia da seção transversal. Seus sentidos positivos são indicados por vetores na Figura 2.25.

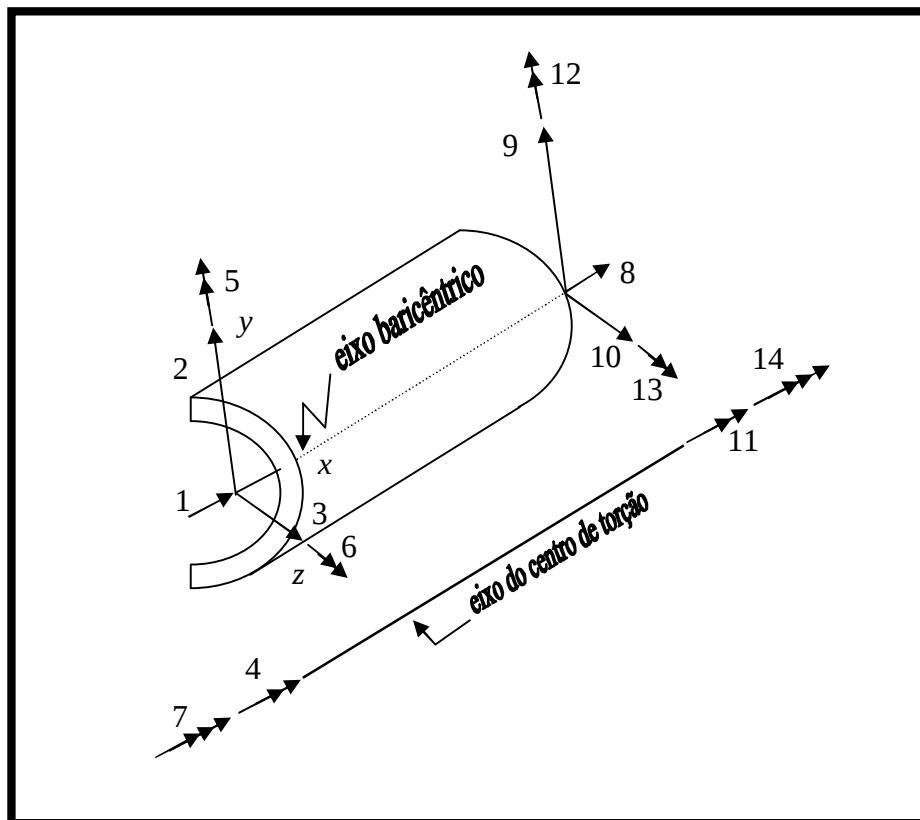


Figura 2.25 ñ Sistema de graus de liberdade bi-referenciado

Cada grau de liberdade do elemento de barra do núcleo está associado a um campo físico, como é mostrado na Figura 2.25, juntamente com sua representação simbólica.

a) Matriz de Rigidez bi-referenciada *

A representação da barra de núcleo pode ser feita superpondo-se os efeitos de flexão em y e em z com deformação por cortante, os efeitos axiais tomados em relação ao eixo baricêntrico e os de torção não uniforme em relação ao eixo do centro de torção, vide Figura 2.26, formando-se assim a matriz de rigidez da barra de núcleo estrutural bi-referenciada, conforme é mostrado na Eq. (2.199).

* Convém notar que esse neologismo é utilizado neste trabalho para denotar o emprego simultâneo de dois sistemas de referência locais distintos.

Tabela 2.1 ã Significado dos campos físicos dos graus de liberdade da barra de elemento de núcleo com sua representação simbólica.

G.L.	Significado Físico	Representação
1	Deslocamento Axial (nó _i)	u_i
2	Deslocamento Transversal em x (nó _i)	v_i
3	Deslocamento Transversal em y (nó _i)	w_i
4	Rotação de Torção (nó _i)	θ_{xi}
5	Rotação de Flexão em y (nó _i)	θ_{yi}
6	Rotação de Flexão em z (nó _i)	θ_{zi}
7	Empenamento (nó _i)	ψ_i
8	Deslocamento Axial (nó _j)	u_j
9	Deslocamento Transversal em x (nó _j)	v_j
10	Deslocamento Transversal em y (nó _j)	w_j
11	Rotação de Torção (nó _j)	θ_{xj}
12	Rotação de Flexão em y (nó _j)	θ_{yj}
13	Rotação de Flexão em z (nó _j)	θ_{zj}
14	Empenamento (nó _j)	ψ_j

Tração Axial

1

8

+

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \text{sim} & 1 \end{bmatrix}$$

Torção Não-Uniforme

4

7

11

14

+

$$EI_z \begin{bmatrix} \alpha.sh & (ch-1) & -\alpha.sh & -(1-ch) \\ -(1-ch) & L.ch - \frac{sh}{\alpha} & (1-ch) & \frac{sh}{\alpha} - L \\ -\alpha.sh & -(ch-1) & \alpha.sh & -(ch-1) \\ -(1-ch) & \frac{sh}{\alpha} - L & -(ch-1) & L.ch - \frac{sh}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Flexão em y

3

5

10

12

+

$$EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

Flexão em z

2

6

9

13

+

$$EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 2.26 ã Formação da matriz de rigidez na barra de núcleo estrutural

91

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0
0	$\frac{12m_1}{L^2}$	0	0	0	$\frac{6m_1}{L}$	0	0	$-\frac{12m_1}{L^2}$	0	0	0	$\frac{6m_1}{L}$	0
0	0	$\frac{12m_2}{L^2}$	0	$-\frac{6m_2}{L}$	0	0	0	0	$-\frac{12m_2}{L^2}$	0	$-\frac{6m_2}{L}$	0	0
0	0	0	$\dot{\epsilon}\alpha.sh$	0	0	$(ch-1)\dot{\epsilon}$	0	0	0	$-\dot{\epsilon}\alpha.sh$	0	0	$(ch-1)\dot{\epsilon}$
0	0	$-\frac{6m_2}{L}$	0	$(4+3\gamma_y)m_2$	0	0	0	0	$\frac{6m_2}{L}$	0	$(2-3\gamma_y)m_2$	0	0
0	$\frac{6m_1}{L}$	0	0	0	$(4+3\gamma_z)m_1$	0	0	$-\frac{6m_1}{L}$	0	0	0	$(2-3\gamma_z)m_1$	0
0	0	0	$(ch-1)\dot{\epsilon}$	0	0	$\left(L.ch - \frac{sh}{\alpha}\right)\dot{\epsilon}$	0	0	0	$(1-ch)\dot{\epsilon}$	0	0	$\left(\frac{sh}{\alpha} - L\right)\dot{\epsilon}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12m_1}{L^2}$	0	0	0	$\frac{6m_1}{L}$	0	0	$\frac{12m_1}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{6m_1}{L}$	0
0	0	$-\frac{12m_2}{L^2}$	0	$-\frac{6m_2}{L}$	0	0	0	0	$\frac{12m_2}{L^2}$	0	$\frac{6m_2}{L}$	0	0
0	0	0	$-\dot{\epsilon}\alpha.sh$	0	0	$(ch-1)\dot{\epsilon}$	0	0	0	$\dot{\epsilon}\alpha.sh$	0	0	$(1-ch)\dot{\epsilon}$
0	0	$\frac{6m_2}{L}$	0	$(2-3\gamma_y)m_2$	0	0	0	0	$\frac{6m_2}{L}$	0	$(4+3\gamma_y)m_2$	0	0
0	$-\frac{6m_1}{L}$	0	0	0	$(2-3\gamma_z)m_1$	0	0	$-\frac{6m_1}{L}$	0	0	0	$(4+3\gamma_z)m_1$	0
0	0	0	$(1-ch)\dot{\epsilon}$	0	0	$\left(\frac{sh}{\alpha} - L\right)\dot{\epsilon}$	0	0	0	$(1-ch)\dot{\epsilon}$	0	0	$\left(L.ch - \frac{sh}{\alpha}\right)\dot{\epsilon}$

(2.199)

b) Matriz de Rigidez local no Centro de Torção

É usual na literatura encontrar a posição dos graus de liberdade unificados, ou seja, referenciados ao centro de torção. O que implica em transformar a matriz de rigidez do centro de gravidade (CG) para o Centro de Torção (CT). A partir de relações geométricas (vide Figura 2.27), a transformação dos campos de deslocamentos fica:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \psi_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_t & y_t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{\theta}_{zi} \\ \bar{\psi}_i \end{Bmatrix} \quad (2.200)$$

Ou simplesmente,

$$\delta_{ri} = M \bar{\delta}_{ri} \quad (2.201)$$

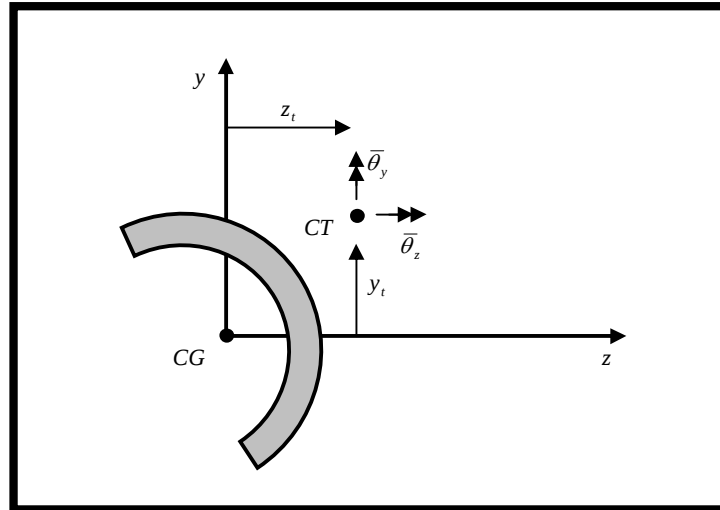


Figura 2.27 ã Seção do núcleo estrutural, com o seu centro de gravidade e o seu centro de torção.

Para a transformação da matriz de rigidez para o sistema local unificado no centro de torção, deve-se ter:

$$[k_{ct}] = [B]^T \cdot [k_{cg}] \cdot [B] \quad (2.202)$$

Onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}$$

$[k_{cg}]$ = Matriz que reúne os coeficientes da matriz de rigidez local, referida ao centro de gravidade (CG)

Logo,

$$[k_{ct}] = \begin{bmatrix} B_I^T & 0 \\ 0 & B_{II}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{I,I} & K_{I,II} \\ K_{II,I} & K_{II,II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_I & 0 \\ 0 & B_{II} \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

Resultando na matriz no sistema local unificado no centro de torção:

$$[k_{ct}] = \begin{bmatrix} [k_{ct}]_{I,I} & [k_{ct}]_{I,II} \\ [k_{ct}]_{II,I} & [k_{ct}]_{II,II} \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

Onde,

$$[k_{ct}]_{I,I} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & z_t \frac{EA}{L} & -y_t \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12m_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m_1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12m_2}{L^2} & 0 & -\frac{6m_2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & (ch-1)\frac{EA}{L} \\ z_t \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{6m_2}{L} & 0 & z_t^2 \frac{EA}{L} + (4+3\gamma_y)m_2 & -z_t \frac{EA}{L} y_t & 0 \\ -y_t \frac{EA}{L} & \frac{6m_1}{L} & 0 & 0 & -z_t \frac{EA}{L} y_t & y_t^2 \frac{EA}{L} + (4+3\gamma_z)m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (ch-1)\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \left(Lch - \frac{sh}{\alpha}\right)\frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

$$[k_{ct}]_{II,II} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & -z_t \frac{EA}{L} & y_t \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12m_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m_1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12m_2}{L^2} & 0 & -\frac{6m_2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\alpha}.sh & 0 & 0 & (-1+ch)\dot{\alpha} \\ -z_t \frac{EA}{L} & 0 & \frac{6m_2}{L} & 0 & -z_t^2 \frac{EA}{L} + (2-3\gamma_y)m_2 & z_t \frac{EA}{L} y_t & 0 \\ y_t \frac{EA}{L} & -\frac{6m_1}{L} & 0 & 0 & z_t \frac{EA}{L} y_t & -y_t^2 \frac{EA}{L} + (2-3\gamma_z)m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-ch)\dot{\alpha} & 0 & 0 & \left(\frac{sh}{\alpha} - L\right)\dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.206)$$

$$[k_{ct}]_{II,I} = [k_{ct}]_{II,II}^T \quad (2.207)$$

$$[k_{ct}]_{II,II} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & z_t \frac{EA}{L} & -y_t \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12m_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6m_1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12m_2}{L^2} & 0 & \frac{6m_2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\alpha}.sh & 0 & 0 & (-1-ch)\dot{\alpha} \\ z_t \frac{EA}{L} & 0 & \frac{6m_2}{L} & 0 & z_t^2 \frac{EA}{L} + (4+3\gamma_y)m_2 & -z_t \frac{EA}{L} y_t & 0 \\ -y_t \frac{EA}{L} & -\frac{6m_1}{L} & 0 & 0 & -z_t \frac{EA}{L} y_t & y_t^2 \frac{EA}{L} + (4+3\gamma_z)m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-ch)\dot{\alpha} & 0 & 0 & \left(L.ch - \frac{sh}{\alpha}\right)\dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.208)$$

c) Vetor de Forças Nodais Equivalentes

Associando-se os graus de liberdade 1 e 8 ao esforço axial; 2, 6, 9 e 13 à flexão em $óz\hat{o}$; 3, 5, 10 e 12 à flexão em $óy\hat{o}$ e 4, 7, 11 e 14 à torção não-uniforme e relacionando-os com Eqs. (2.36), (2.77), (2.123) e (2.183) respectivamente, obtém-se o vetor de força nodal equivalente do elemento de núcleo:

$$\begin{Bmatrix} f_I \\ f_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_I \\ p_{II} \end{Bmatrix} \quad (2.209)$$

Onde,

$$f_I = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7]^T$$

$$f_{II} = [f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13} \quad f_{14}]^T$$

$$\begin{aligned}
p_I &= \begin{bmatrix} pL/2 & p_y L/2 & p_z L/2 & tL/2 & p_y L^2/12 & -p_z L^2/12 & t\Theta \end{bmatrix}^T \\
p_{II} &= \begin{bmatrix} pL/2 & p_y L/2 & p_z L/2 & tL/2 & -p_y L^2/12 & p_z L^2/12 & -t\Theta \end{bmatrix}^T \\
\Theta &= \left[\left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) \left(L - \frac{sh}{\alpha} \right) + (1-ch) \frac{L^2}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} + sh.L - \frac{ch}{\alpha} \right) \left(\frac{ch}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right]
\end{aligned}$$

d) Transformação do Vetor de Forças Nodais Equivalentes para o Centro de Torção

Utilizando para o vetor nodal equivalente a mesma analogia da transformação aplicada à matriz de rigidez, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} f_{ct,I} \\ f_{ct,II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{II}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_I \\ f_{II} \end{Bmatrix} \quad (2.210)$$

Resolvendo a Eq. (2.210) e comparando com a Eq. (2.209), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{ct,I} \\ f_{ct,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_I \\ \bar{f}_{II} \end{Bmatrix} \quad (2.211)$$

Onde,

$$\bar{f}_I = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ p_y L/2 \\ p_z L/2 \\ tL/2 \\ p_y L/2(L/6 - z_t) \\ -p_z L/2(L/6 + y_t) \\ -t\Theta \end{Bmatrix} \text{ e } \bar{f}_{II} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ p_y L/2 \\ p_z L/2 \\ tL/2 \\ -p_y L/2(L/6 + z_t) \\ p_z L/2(-L/6 + y_t) \\ -t\Theta \end{Bmatrix}$$

2.4. CONTRIBUIÇÃO DOS VÍNCULOS ELÁSTICOS NA MATRIZ DE RIGIDEZ

A energia potencial devido aos vínculos elásticos em coordenadas globais é dada por:

$$\begin{aligned}\pi_P^E = & \frac{1}{2} \int_0^L K_x U_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_{\theta x} U_4^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_y U_2^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_{\theta y} U_5^2 dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L K_z U_3^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_{\theta z} U_6^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_{emp} U_7^2 dx\end{aligned}\quad (2.212)$$

Onde:

K_x, K_y e K_z : São coeficientes de molas translacionais;

$K_{\theta x}, K_{\theta y}$ e $K_{\theta z}$: São coeficientes de molas rotacionais;

K_{emp} : Coeficiente mola de empenamento.

Minimizando a Eq. (2.212) em função dos parâmetros nodais tem-se a contribuição dos apoios elásticos na matriz de rigidez referente ao nó i, dada por:

$$\begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\theta x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{emp} \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

Convém notar que a Eq. (2.213) deve ser adicionada na posição do nó i na matriz de rigidez da estrutura

2.5. TRANSFORMAÇÃO DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIAS

Em problemas de treliças, pórticos e grelhas há presença de barras não colineares. Com isso, a montagem da matriz de rigidez da estrutura e do vetor de forças não pode ser obtida pelo acúmulo direto algébrico de seus respectivos elementos (quando são utilizados sistemas locais específicos para cada um deles). Isso requereria uma soma vetorial devido à natureza vetorial dos graus de liberdade.

Em contrapartida, a soma algébrica pode ser empregada em barras não colineares desde que sejam empregados dois sistemas distintos (um local para cada elemento e um único sistema global associado à estrutura), conforme é mostrado na Figura 2.28.

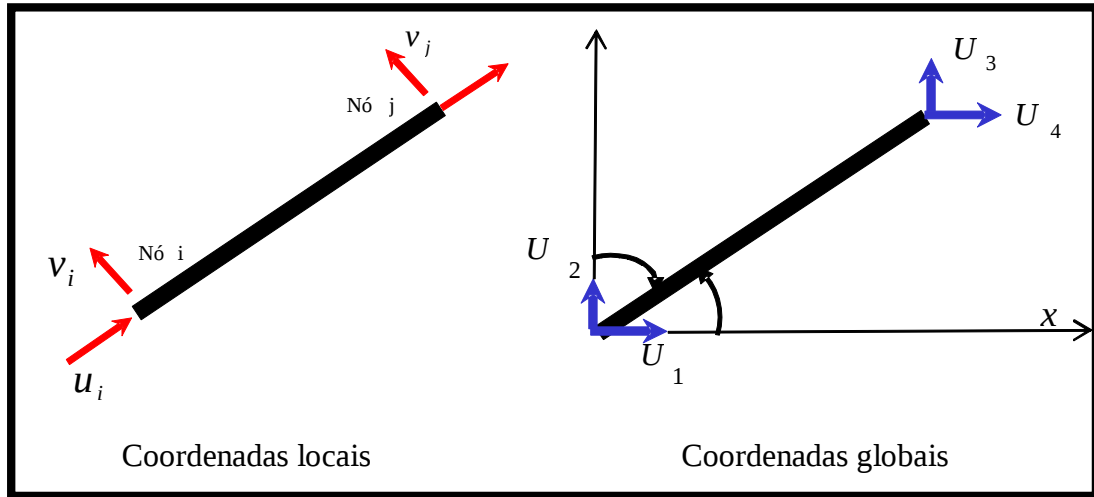


Figura 2.28 - Sistemas de referência local e global do elemento de barra de treliça plana

A matriz de rigidez no sistema global é obtida a partir das contribuições no sistema local dada pela relação (Weaver, W. & Gere, 1981):

$$[k_g] = [\beta]^T [k_{cg}] [\beta] \quad (2.214)$$

Onde,

$[\beta] \rightarrow$ Matriz de Transformação

Observa-se que na Eq. (2.114) quando o CG coincide com o CT, tem-se que $[k_{ct}] = [k_{cg}]$.

A matriz de transformação $[\beta]$ pode ser obtida a partir de rotações de eixos do sistema local para o global cujos valores finais serão discutidos a seguir. Os resultados intermediários podem ser observados em diversos trabalhos na literatura. (Soriano & Lima, 1999; Gere & Weaver, 1981 e outros).

Para o caso de treliça plana, são dois graus de liberdade por extremidade da barra, conforme é mostrado na Figura 2.28, a matriz de rotação será formada por duas matrizes $[B_{tr}]$, conforme é mostrado na Eq. (2.215):

$$[\beta] = \begin{bmatrix} [B_{tr}] & [0] \\ [0] & [B_{tr}] \end{bmatrix} \quad (2.215)$$

Onde,

$$[B_{tr}] = [Cx \quad Cy]$$

$[0]$ = é uma matriz linha dada por: $[0 \ 0]$

Cx e Cy são os co-senos diretores da barra dados por:

$$Cx = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad Cy = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \text{ e}$$

x_i, x_j, y_i e y_j = coordenadas iniciais e finais da barra nos eixos x e y .

Para o caso de pórtico plano, treliça espacial e grelha, são três os graus de liberdade por extremidade da barra, conforme é mostrado na Figura 2.29, sendo formada por duas matrizes $[B_g]$, conforme é mostrado na Eq. (2.216):

$$[\beta] = \begin{bmatrix} [B_g] & [0] \\ [0] & [B_g] \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

Onde,

$$[B_g] = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ Cx & Cy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[0]$ = uma matriz quadrada de ordem 3;

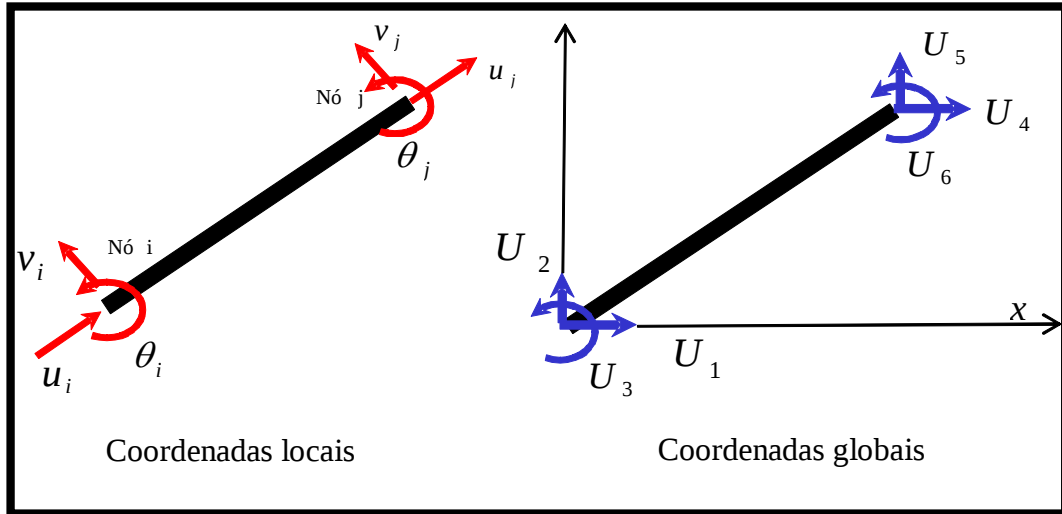


Figura 2.29 – Sistemas de referência local e global do elemento de barra de Pórtico Plano e Grelha

Já o elemento de pórtico espacial tem seis graus de liberdade em cada extremidade, sendo formada por quatro matrizes $[B_{pe}]$, semelhante ao elemento de treliça espacial, sendo preciso aplicar uma rotação de eixos final para os eixos principais do membro (eixos principais de inércia). (Weaver, W. & Gere, 1981).

$$[\beta] = \begin{bmatrix} [B_{pe}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [B_{pe}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [B_{pe}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [B_{pe}] \end{bmatrix} \quad (2.217)$$

Onde,

$$[B_{pe}] = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz \\ -(Cx \cdot Cy \cdot \cos \dot{U} + Cz \cdot \sin \dot{U})/Cxz & \cos \dot{U} \cdot Cxz & (-Cy \cdot Cz \cdot \cos \dot{U} + Cx \cdot \sin \dot{U})/Cxz \\ (Cx \cdot Cy \cdot \sin \dot{U} - Cz \cdot \cos \dot{U})/Cxz & -Cxz \cdot \sin \dot{U} & (-Cy \cdot Cz \cdot \sin \dot{U} + Cx \cdot \cos \dot{U})/Cxz \end{bmatrix},$$

se $Cxz \neq 0$.

$[0]$ = uma matriz de ordem 3;

$\dot{U}$ = ângulo dos eixos principais;

$$Cx = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad Cy = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad Cz = \frac{z_j - z_i}{L}; \quad Cxz = \sqrt{Cx^2 + Cz^2};$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

Quando C_{xz} for zero, então a matriz $[B_{pe}]$ da Eq. (2.217) fica:

$$[B_{pe}] = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \dot{U} & 0 & \sin \dot{U} \\ C_y \sin \dot{U} & 0 & \cos \dot{U} \end{bmatrix}$$

O elemento de núcleo além dos seis graus de liberdade do pórtico espacial, por extremidade de barra, possui o sétimo grau que é referente ao empenamento e a matriz de rigidez global da barra no centro de torção é dada pela relação:

$$[K_g] = [\beta]^T [K_{ct}] [\beta] \quad (2.218)$$

Onde,

$$[\beta] = \begin{bmatrix} [B_{pe}] & [0] & \{0\} & [0] & [0] & \{0\} \\ [0] & [B_{pe}] & \{0\} & [0] & [0] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 1 & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 \\ [0] & [0] & \{0\} & [B_{pe}] & [0] & \{0\} \\ [0] & [0] & \{0\} & [0] & [B_{pe}] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 1 \end{bmatrix} \quad (2.219)$$

Onde,

$[0]$ = matriz quadrada de ordem 3

$\langle 0 \rangle$ = é uma matriz linha dada por: $[0 \ 0 \ 0]$

$\{0\} = (\langle 0 \rangle)^T$

Convém notar que $[K_{ct}]$ (Eq. (2.214)) é a matriz de rigidez local no sistema unificado no centro de torção.

2.6. MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E VETOR DE FORÇA DA ESTRUTURA

A matriz de rigidez da estrutura é formada pelo acúmulo das contribuições das matrizes de rigidez, em coordenadas globais dos elementos, de cada barra da estrutura.

Seja o elemento finito de treliça plana mostrado na Figura 2.30, que possui dois graus de liberdade orientados segundo os eixos x, y da estrutura. Os deslocamentos de extremidade deste membro podem ser identificados pelos índices j_1 , j_2 , k_1 e k_2 . Esses se relacionam com os índices correspondentes dos deslocamentos nodais, pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} j_1 &= 2j - 1; \quad j_2 = 2j \\ k_1 &= 2k - 1; \quad k_2 = 2k \end{aligned} \quad (2.220)$$

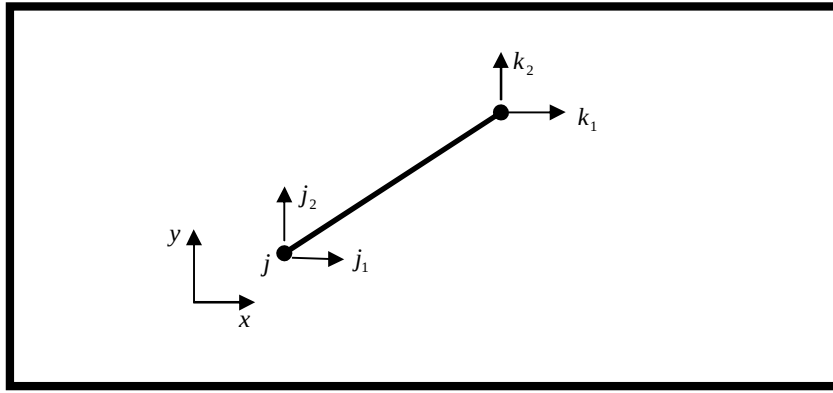


Figura 2.30 Deslocamentos globais no elemento de treliça plana

Supondo que a Eq. (2.221) seja a matriz de rigidez do elemento de barra da treliça plana em coordenadas globais, com os índices da Eq. (2.220) ela é locada na matriz da estrutura como é mostrado na Figura 2.31.

$$[k_g] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} \end{bmatrix} \quad (2.221)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & 2j-1 & 2j & \cdots & 2k-1 & 2k & \cdots \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2j-1 \\ 2j \\ \vdots \\ 2k-1 \\ 2k \\ \vdots \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{13} & k_{14} & \cdots & \cdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{23} & k_{24} & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & k_{31} & k_{32} & \cdots & k_{33} & k_{34} & \cdots & \cdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & k_{41} & k_{42} & \cdots & k_{43} & k_{44} & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 2.31 ã Espalhamento da matriz de rigidez elemental de treliça plana na matriz global da estrutura $[k]_{est}$,

Já para o vetor de esforços representado na Eq. (2.222), a locação dos elementos se dá de forma análoga, como é mostrado na Figura 2.32.

$$[f_g]^t = [f_1 \quad f_2 \quad \vdots \quad f_3 \quad f_4] \quad (2.222)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & 2j-1 & 2j & \cdots & 2k-1 & 2k & \cdots \\
 [f_{est}]^t = & [\cdots & \cdots & \cdots & f_1 & f_2 & \cdots & f_3 & f_4 & \cdots]
 \end{array}$$

Figura 2.32 ã Espalhamento do vetor de esforços do elemento de treliça plana no vetor de esforços da estrutura $[f]_{est}$,

No caso de pórtico plano, treliça espacial e grelha, existem três possíveis deslocamentos em cada nó. Os deslocamentos de extremidade do elemento podem ser identificados pelos índices j_1 , j_2 , j_3 , k_1 , k_2 e k_3 , que podem ser gerados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 j_1 &= 3j - 2; \quad j_2 = 3j - 1; \quad j_3 = 3j \\
 k_1 &= 3k - 2; \quad k_2 = 3k - 1; \quad k_3 = 3k
 \end{aligned} \quad (2.223)$$

Analogamente à Eq. (2.220) com dois graus de liberdade (GDL) por nó, tem-se a matriz de rigidez do elemento com três gdl nas coordenadas globais:

$$[k_g] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

O espalhamento da Eq. (2.224) na matriz global da estrutura é mostrado na Figura 2.33.

Figura 2.33 - Espalhamento da matriz de rigidez elementar de pórtico plano/treliça espacial/grelha na matriz da estrutura $[k_{est}]$.

Já para o vetor de esforços de pórtico plano, treliça espacial e grelha, representado na Eq. (2.225) e pela mesma analogia anterior, tem-se a locação dos elementos indicados na Figura 2.34.

$$[f_g]^t = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] \quad (2.225)$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & \cdots & 3j-2 & 3j-1 & 3j & \cdots & 3k-2 & 3k-1 & 3k & \cdots \\
 [f_{est}]^t = [\cdots & \cdots & \cdots & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_4 & f_5 & f_6 & \cdots]
 \end{array}$$

Figura 2.34 - Espalhamento do vetor de esforços do pórtico plano/treliça espacial/grelha no vetor de esforços da estrutura $[f_{est}]$.

Para o elemento de pórtico espacial têm-se os números nodais j e k nas suas extremidades, com doze possíveis deslocamentos, que recebem os seguintes índices:

$$\begin{aligned}
 j_1 &= 6j - 5; \quad j_2 = 6j - 4; \quad j_3 = 6j - 3; \quad j_4 = 6j - 2; \quad j_5 = 6j - 1; \quad j_6 = 6j \\
 k_1 &= 6k - 5; \quad k_2 = 6k - 4; \quad k_3 = 6k - 3; \quad k_4 = 6k - 2; \quad k_5 = 6k - 1; \quad k_6 = 6k
 \end{aligned} \quad (2.226)$$

Seguindo a mesma filosofia, o espalhamento da matriz de rigidez elemental, de pórtico espacial nas coordenadas globais da estrutura, pode assim ser representada:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 [k_{I,I}] & [k_{I,II}] \\
 \downarrow & \downarrow \\
 \begin{bmatrix}
 k_{1,1} & \cdots & k_{1,6} & k_{1,7} & \cdots & k_{1,12} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 k_{6,1} & \cdots & k_{6,6} & k_{6,7} & \cdots & k_{6,12} \\
 k_{7,1} & \cdots & k_{7,6} & k_{7,7} & \cdots & k_{7,12} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 k_{12,1} & \cdots & k_{12,6} & k_{12,7} & \cdots & k_{12,12}
 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{cc}
 [k_{II,I}] & [k_{II,II}] \\
 \uparrow & \uparrow
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \quad (2.227)$$

A Distribuição dos elementos da Eq. (2.227) na matriz global da estrutura é mostrado na Figura 2.35, onde $[j_n] = [6j-5 \ 6j-4 \ 6j-3 \ 6j-2 \ 6j-1 \ 6j]$ e $[k_n] = [6k-5 \ 6k-4 \ 6k-3 \ 6k-2 \ 6k-1 \ 6k]$.

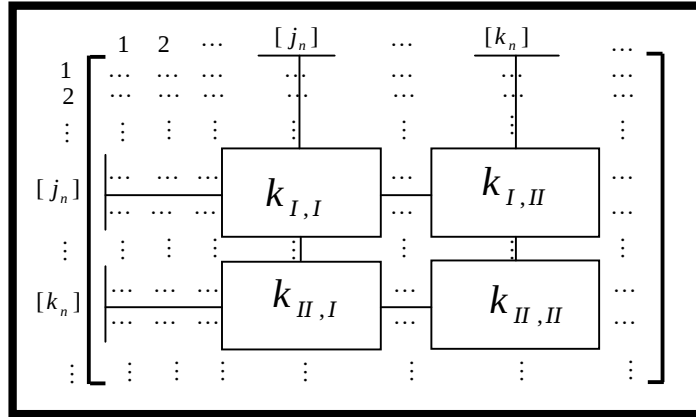


Figura 2.35 ã Matriz de rigidez da estrutura para elemento de pórtico espacial

Para o vetor de esforços do pórtico espacial da Eq. (2.228), sua distribuição está mostrada na Figura 2.36.

$$[f_g]^t = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12}] \quad (2.228)$$

$$[f_{est}]^t = \begin{bmatrix} \dots & 6j-5 & 6j-4 & 6j-3 & 6j-2 & 6j-1 & 6j & \dots \\ \dots & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & \dots \\ \dots & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & \dots \\ \dots & 6k-5 & 6k-4 & 6k-3 & 6k-2 & 6k-1 & 6k & \dots \end{bmatrix}$$

Figura 2.36 - Espalhamento do vetor de esforços do pórtico espacial no vetor de esforços da estrutura $[f]_{est}$.

Uma estrutura de pórtico espacial enrijecido por núcleo, como é visto na Figura 2.37, pode ser discretizada por elementos finitos de pórtico espacial e de núcleo. Conforme discutido nas seções anteriores deste capítulo, o elemento de núcleo possui dois graus de liberdade adicionais (associados ao empenamento) em relação ao elemento de pórtico espacial.

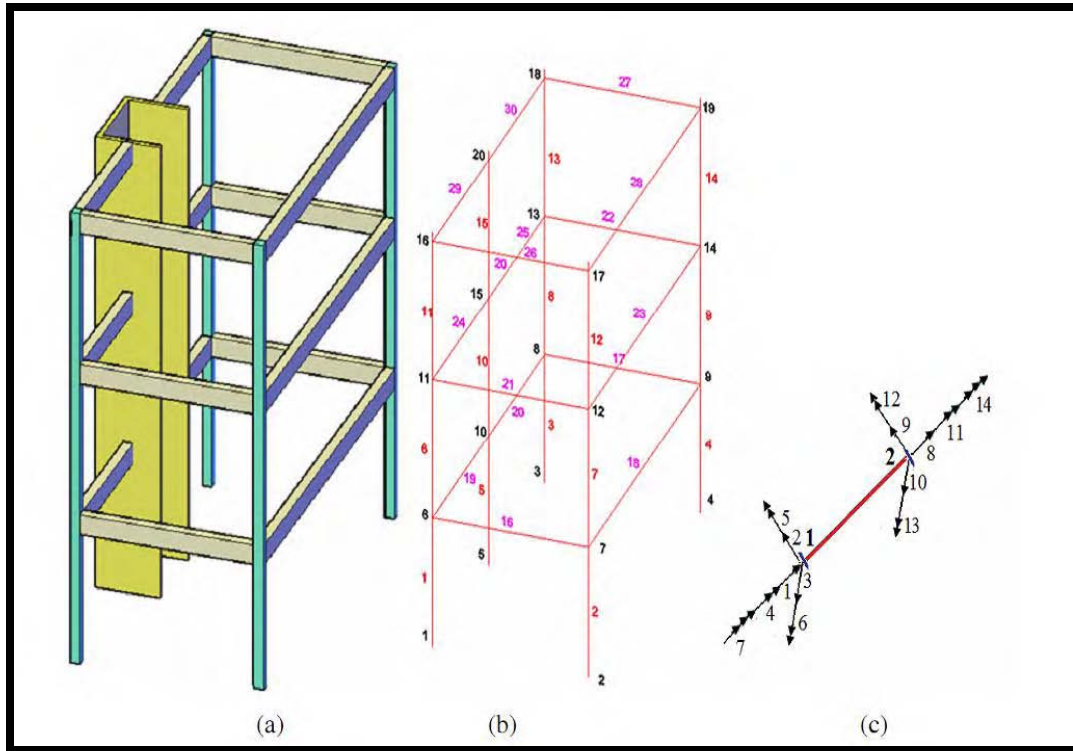


Figura 2.37 ã Pórtico Espacial enrijecido: (a)geometria, (b)discretização (c)graus de liberdade do elemento de núcleo

A matriz de rigidez do elemento de núcleo nas coordenadas globais é dada por:

$$[k_g] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{6,1} & \cdots & k_{6,6} \end{matrix}} & \begin{matrix} k_{1,7} \\ \vdots \\ k_{6,7} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} k_{1,8} & \cdots & k_{1,13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{6,8} & \cdots & k_{6,13} \end{matrix}} & \begin{matrix} k_{1,14} \\ \vdots \\ k_{6,14} \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} k_{7,1} & \cdots & k_{7,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{13,1} & \cdots & k_{13,6} \\ k_{14,1} & \cdots & k_{14,6} \end{matrix}} & \begin{matrix} k_{7,7} \\ \vdots \\ k_{13,7} \\ k_{14,7} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} k_{7,8} & \cdots & k_{7,13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{13,8} & \cdots & k_{13,13} \\ k_{14,8} & \cdots & k_{14,13} \end{matrix}} & \begin{matrix} k_{7,14} \\ \vdots \\ k_{13,14} \\ k_{14,14} \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (2.229)$$

Nota-se que as regiões demarcadas (tracejadas) da matriz na Eq. (2.229) estão associados aos graus de liberdade de pórticos. Assim, neste trabalho, optou-se por uma estratégia específica para o espalhamento da matriz do elemento de núcleo na estrutura. Primeiro, faz-se um reordenamento da matriz de núcleo original de modo a reagrupá-la em quatro submatrizes $[\dot{K}_{uu}]$, $[\dot{K}_{u\psi}]$, $[\dot{K}_{\psi u}]$, $[\dot{K}_{\psi\psi}]$, resultando em:

$$\begin{array}{c}
\left[\dot{\mathcal{K}}_{uu} \right] \quad \left[\dot{\mathcal{K}}_{u\Psi} \right] \\
\left[\dot{\mathcal{K}}_g \right] = \begin{array}{|cccc|cc|}
\hline
k_{1,1} & \cdots & k_{1,6} & k_{1,8} & \cdots & k_{1,13} & k_{1,7} & k_{1,14} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
k_{6,1} & \cdots & k_{6,6} & k_{6,8} & \cdots & k_{6,13} & \vdots & \vdots \\
k_{8,1} & \cdots & k_{8,6} & k_{8,8} & \cdots & k_{8,13} & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
k_{13,1} & \cdots & k_{13,6} & k_{13,8} & \cdots & k_{13,13} & k_{12,7} & k_{12,14} \\
\hline
k_{7,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{7,13} & k_{13,7} & k_{13,14} \\
k_{14,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{14,13} & k_{14,7} & k_{14,14} \\
\hline
\end{array} \\
\left[\dot{\mathcal{K}}_{\Psi u} \right] \quad \left[\dot{\mathcal{K}}_{\Psi\Psi} \right]
\end{array} \quad (2.230)$$

A matriz $\left[\dot{\mathcal{K}}_{uu} \right]$ é quadrada e armazena apenas as contribuições dos graus de liberdade do portico espacial, aqui simbolizado pelo índice u. Já a matriz $\left[\dot{\mathcal{K}}_{u\Psi} \right]$ é retangular, onde é armazenada os respectivos coeficientes de rigidez, que fisicamente nesse caso, pode ser entendido como esforços, mobilizados segundo os gdl de empenamento, causados por deslocamentos unitários impostos segundo os gdl de pórtico espacial. Pelo teorema da reciprocidade, tem-se que $\left[\dot{\mathcal{K}}_{\Psi u} \right] = \left[\dot{\mathcal{K}}_{u\Psi} \right]^T$. A última matriz $\left[\dot{\mathcal{K}}_{\Psi\Psi} \right]$ é quadrada e está associada à ação e à resposta segundo os gdl de empenamento.

O segundo passo para o espalhamento da matriz de núcleo na estrutura requer introdução do conceito de nós virtuais. Esses são numerados de forma crescente $(1^*, 2^*, \dots, j^*, \dots, n^*)$ e associados aos graus de liberdade de empenamento nos nós que convergem elementos de núcleo. Assim, as submatrizes em questão na matriz global da estrutura ficam:

$$[k]_{est} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [k_{uu}]_{est} & [k_{u\psi}] \\ \vdots & \vdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & k_{uu} & \dots & k_{u\psi} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{\psi u} & \dots & k_{\psi\psi} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \\ \begin{array}{cc} [k_{\psi u}] & [k_{\psi\psi}] \\ \vdots & \vdots \end{array} \end{array} \quad (2.231)$$

Onde,

$[k_{uu}]_{est}$ é a matriz de pórtico espacial e sua locação já foi mostrada (ver Figura 2.35)

Se o elemento de núcleo possui as incidências virtuais j^* e k^* , então as submatrizes ficam:

$$[k_{u\psi}]_{est} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{6n+j^*} & \underline{6n+k^*} \\ \vdots & \vdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & k_{1,7} & \dots & k_{1,14} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{6,7} & \dots & k_{6,14} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{8,7} & \dots & k_{8,14} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{12,7} & \dots & k_{12,14} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \end{array} \quad (2.232)$$

$$[k_{\psi\psi}]_{est} = \begin{matrix} & 6n+j^* & & 6n+k^* & \\ & & & & \\ 6n+j^* & \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & k_{7,7} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & k_{7,14} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \cdots \\ 6n+k^* & \begin{bmatrix} \cdots & k_{14,7} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdots & k_{14,14} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \cdots \end{matrix} \quad (2.233)$$

Onde

n = número de nós da estrutura

O vetor de esforços para o pórtico enrijecido está apresentado na Eq. (2.234) e sua locação no vetor de esforços global da estrutura na .Figura 2.38

$$[f_g]^t = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13} \quad f_{14}] \quad (2.234)$$

$$[f_{est}] = \begin{matrix} \vdots \\ \\ \\ 6n+j^* \\ \\ \\ \vdots \\ \\ 6n+k^* \\ \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_8 \\ \vdots \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_7 \\ f_{14} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Figura 2.38 - Espalhamento do vetor de esforços do pórtico enrijecido na estrutura $[f]_{est}$.

CAPÍTULO III:

SUPERESTRUTURA: ANÁLISE DINÂMICA

3.1. GENERALIDADES

A análise dinâmica é um subconjunto da análise estrutural que abrange o comportamento das estruturas submetidas à cargas dinâmicas, que pode ser a movimentação de pessoas, vento, ondas, tráfego, terremotos e explosões. Qualquer estrutura pode estar sujeita aos efeitos dinâmicos.

Neste capítulo é discutida a contribuição dos elementos finitos na análise de problemas dinâmicos em estruturas reticuladas.

Do ponto de vista das ações, um corpo pode estar submetido aos seguintes tipos de comportamento: a) estático, b) quase-estático e c) dinâmico.

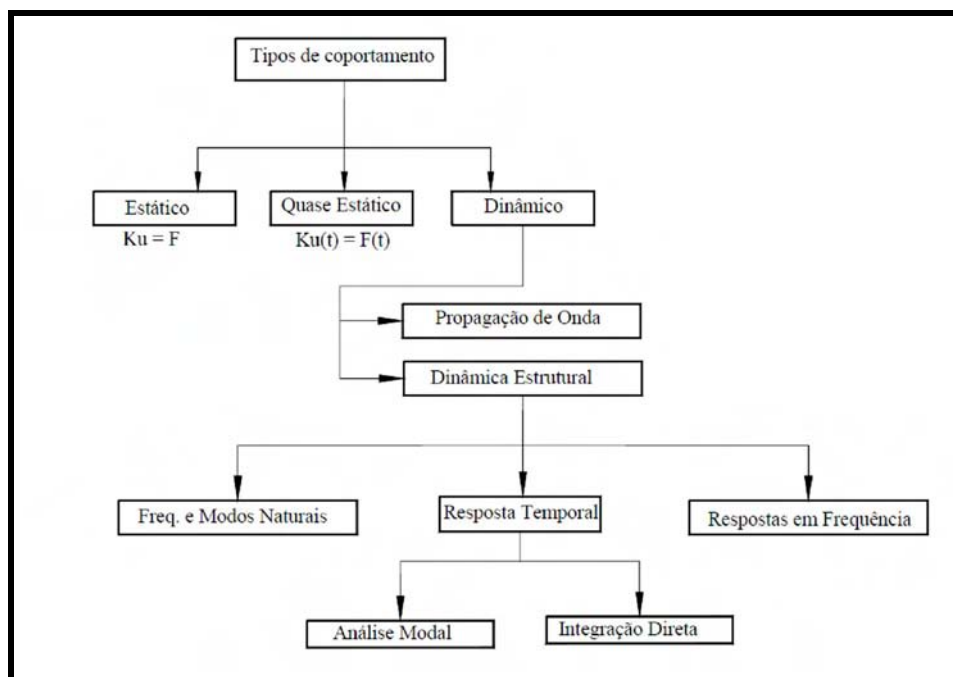


Figura 3.1 – Classificação aproximada do comportamento, tipos de análise e métodos em dinâmica segundo Mendonça (2006)

Quando a carga não varia com o tempo, o efeito é considerado estático, e suas particularidades já foram descritas no capítulo 2. A carga dinâmica é aquela que muda com o tempo. Se o processo se der lentamente, ou seja, se sua frequência de excitação for pequena o suficiente, ele é considerado quase-estático e os efeitos na estrutura podem ser determinados através da análise estática. O termo pequeno é geralmente quantificado de uma forma um tanto arbitrária. Se a frequência de excitação for menor que aproximadamente um terço da menor frequência natural do sistema, então o problema pode ser tratado como quase-estático com precisão aceitável.

Entretanto, quando as frequências de carregamento são consideráveis, as forças de inércia devem ser consideradas resultando em um problema dinâmico. Segundo Gopalakrishnan & Mira (2010) os problemas dinâmicos em engenharia estrutural recaem basicamente em duas categorias: uma envolvendo baixas frequências (de poucos a algumas centenas de Hz), que são classificados como problemas de dinâmica estrutural. A segunda categoria envolve altas frequências (na ordem de 10^3 Hz a 10^{12} Hz), que são chamadas de problemas de propagação de ondas.

Os problemas de propagação de onda ocorrem em situações de impacto, de explosões, de acústica, entre outros, onde tanto o carregamento quanto a resposta são de alta frequência e o período de duração da análise é em geral curto, da ordem de um período da onda que cruza a estrutura, os quais não serão abordados neste trabalho.

Por outro lado, quando a frequência de carregamento não é alta, no sentido de que é da mesma ordem, ou apenas algumas vezes maior que a primeira frequência natural do sistema, o problema é dito de dinâmica estrutural. Estes por sua vez podem ser subdivididos, pelo menos, em três grandes tipos: determinação de frequência e modos naturais, análise de resposta temporal e análise de frequências.

As frequências e modos naturais de uma estrutura são determinados por uma série de motivos. Numa situação de projeto, frequentemente interessa que a frequência de carregamento fique abaixo da primeira frequência natural, ou pelo menos interessa evitar que a frequência de excitação fique próxima a uma das frequências do sistema.

Na análise da resposta temporal busca-se determinar a resposta do sistema, instante a instante para um dado histórico de carga. Dois grandes métodos existem para realizar esta análise: a análise modal e a integração direta. O método de análise modal usa as frequências e modos naturais, enquanto o de integração direta faz uma discretização de

diferenciais finitos no tempo na equação diferencial do movimento, e faz uma integração numérica.

O método de análise modal é um método baseado fundamentalmente na linearidade do sistema. Por outro lado, quando o sistema físico é modelado matematicamente, por elementos finitos por exemplo, levando em conta efeitos não lineares, como plasticidade em metais, grandes deformações como em processos de conformação, ou grandes deslocamentos, o processo adequado a ser usado é o de integração direta no tempo das equações de movimento, embora existam formas de circunscrever as limitações da análise modal em alguns casos.

Segundo Thomson (1978) todos os corpos dotados de massa e elasticidade são capazes de vibração. Deste modo, a maior parte das máquinas e estruturas está sujeita a certo grau de vibração e o seu projeto requer geralmente o exame do seu comportamento oscilatório.

Os sistemas oscilatórios podem ser, de um modo geral, caracterizados como *lineares* e *não-lineares*. Para o primeiro prevalece o princípio da superposição e estão bem desenvolvidos os métodos matemáticos disponíveis para o seu estudo. Ao contrário, são bem menos conhecidos e de difícil aplicação os métodos para análise dos sistemas *não-lineares*.

Existem duas classes gerais de vibrações, a livre e a forçada. A vibração livre acontece quando um sistema oscila sob a ação de forças que lhe são inerentes e na ausência da ação de qualquer força externa. No caso de vibração livre o sistema pode vibrar com uma ou mais das suas frequências naturais, que são peculiaridades ao sistema dinâmico estabelecido pela distribuição de sua massa e rigidez.

A vibração forçada ocorre sob a excitação de forças externas. Quando a excitação é oscilatória, o sistema é obrigado a vibrar na frequência da excitação. Se esta frequência coincide com uma das frequências naturais do sistema, forma-se um estado de ressonância, daí podendo resultar amplas e perigosas oscilações. Esta ressonância pode ser a causa de temível colapso de estruturas como a de edifícios, pontes e asas de avião. Assim sendo, é de importância o cálculo das frequências naturais no estudo das vibrações.

Os efeitos dinâmicos nas estruturas muitas vezes são negligenciados por parte dos projetistas, o que futuramente pode trazer sérios transtornos quando da utilização da estrutura acabada, tais como: auto índice de acidentes ocasionados por colapso da estrutura

e fadiga de material, desconforto ocasionado por vibrações excessivas que podem ser prejudiciais à saúde, entre outros, vide Figura 3.1.



Figura 3.2 ã Algumas das causas indesejáveis das vibrações

A análise dinâmica aqui abordada está repleta a análise harmônica da estrutura com sistema não amortecido.

Convém notar que a análise dinâmica requer a formação da matriz de rigidez e de massa em problemas não amortecidos. Como a matriz de rigidez já foi discutida na análise estática (Capítulo II), este capítulo será direcionado, principalmente, na obtenção e manipulação da matriz de massa.

3.1.1. Equação do Movimento com um Grau de Liberdade

Seja o sistema idealizado da Figura 3.3, onde a massa m é considerada rígida, a mola de rigidez linear k é considerada sem massa e o amortecedor linear da constante c é considerado sem massa ou rigidez.

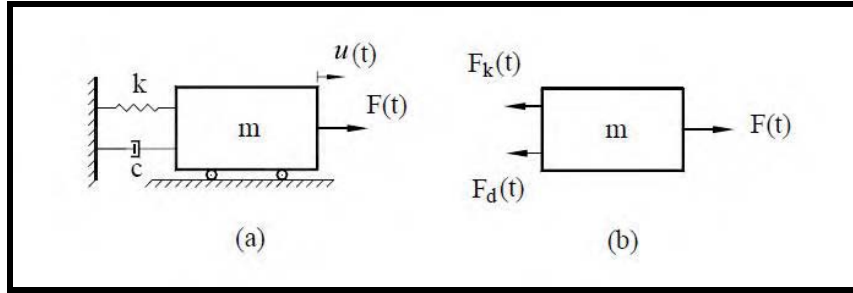


Figura 3.3 ã (a) Sistema idealizado k-c-m excitado, (b) diagrama de corpo livre

A rigidez da mola é expressa por $F_k = k\delta_k$, onde δ_k é o deslocamento entre as extremidades da mola provocado pela força F_k . O amortecedor é tal que, $F_d = c\dot{\delta}_d$, onde $\dot{\delta}_d$ é a velocidade de afastamento entre as extremidades do amortecedor, como pode ser visto na Figura 3.4.

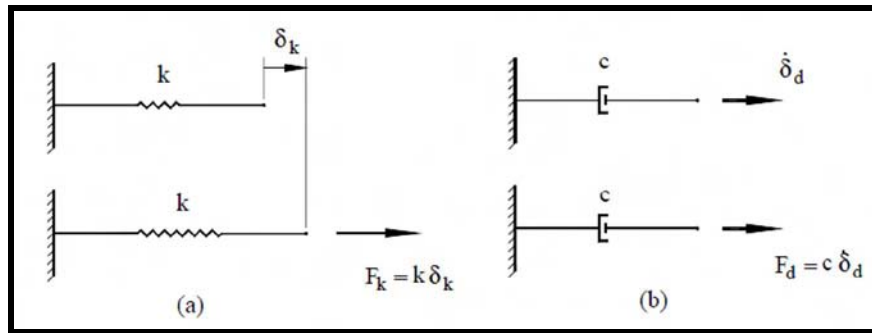


Figura 3.4 ã (a) Força numa mola proporcional ao deslocamento, (b) força num amortecedor proporcional à velocidade.

Analisando o diagrama de corpo livre da Figura 3.4 e usando a segunda lei de Newton, obtém-se a equação do movimento do sistema como:

$$F(t) - F_k(t) - F_d(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (3.1)$$

Onde,

$u(t)$ = é o deslocamento da massa, medido a partir da posição de equilíbrio.

$\frac{d^2 u}{dt^2}$ = aceleração

A posição $u(t)$ corresponde à situação onde a mola é descarregada. Substituindo as expressões para as forças obtemos a equação de movimento na forma:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku(t) = F(t) \quad (3.2)$$

Onde,

$$\frac{du}{dt} = \text{velocidade}$$

Essa é uma equação diferencial ordinária (EDO) linear de coeficientes constantes m , c e k , que definem as características do sistema físico sendo simulado. O carregamento aplicado sobre o sistema é representado pela força $F(t)$, função do tempo t .

Para o problema de vibrações livres, onde $F(t) = 0$ para todo $t > 0$, a Eq. (3.2) torna-se uma EDO homogênea. Fisicamente, um sistema pode permanecer em movimento durante algum tempo após a aplicação e subsequente remoção de força. Também é possível colocá-lo em movimento aplicando um deslocamento ou velocidade de curta duração. Por outro lado, a solução deste problema fornece subsídios para a solução de problemas excitados.

É comum escrever a Eq. (3.2) na sua forma homogênea não-amortecida como:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_n^2 u(t) = 0 \quad (3.3)$$

Onde,

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

3.1.2. Sistemas com mais de um Grau de Liberdade

Segundo Mendonça (2006) os sistemas físicos em engenharia com mais de um grau de liberdade são os mais comuns. Se um corpo qualquer submetido a um conjunto de forças variantes ao longo do tempo, que possua forma, apoios e carregamentos simples, regulares, é possível uma modelagem analítica que resulte na solução exata da resposta do

problema. Porém, os componentes e sistemas usados em engenharia são usualmente caracterizados por formas e carregamentos complexos e, geralmente, não podem ser tratados analiticamente. Assim, analogamente aos problemas estáticos, a solução dos problemas dinâmicos são construídas de forma aproximada utilizando técnicas numéricas, dentre elas o MEF.

Por simplicidade, será considerado um modelo discreto de um problema dinâmico, formados por um conjunto de massas discretas unidas mutualmente por molas e amortecedores, vide Figura 3.5.

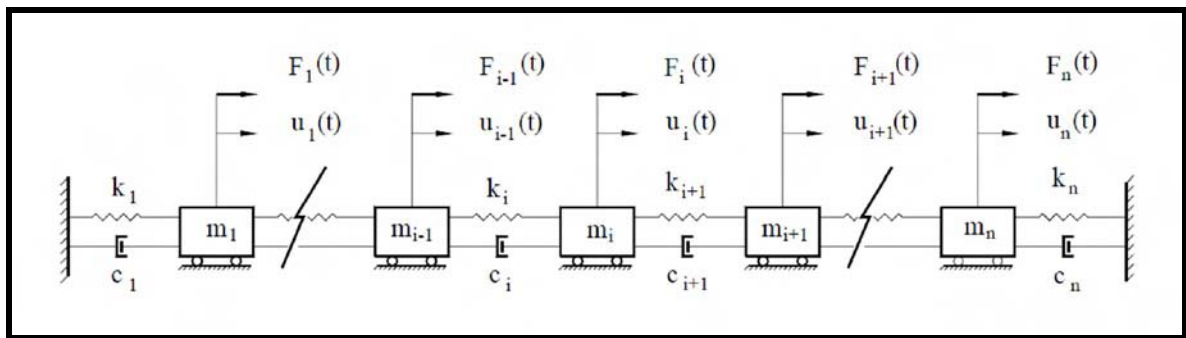


Figura 3.5 ã Modelo com vários graus de liberdade Mendonça (2006).

O modelo ainda pode ser particionado em uma unidade padrão de observação, a partir da análise de seu diagrama de corpo livre (DCL). A Figura 3.6 representa um DCL associado a uma massa genérica m_i , submetida a uma força externa $F_i(t)$ e às forças internas provenientes dos deslocamentos relativos às outras massas. Estas forças internas são as forças elásticas F_e , relacionadas à rigidez das molas K_i e K_{i+1} , e as forças de amortecimento f_a relacionadas às constantes C_i e C_{i+1} dos amortecedores.

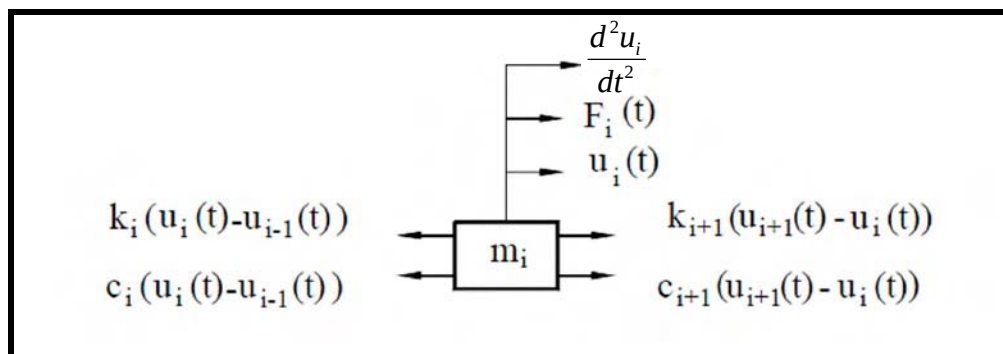


Figura 3.6 ã Diagrama de corpo livre da massa m_i forças presentes, Mendonça (2006).

Pela segunda lei de Newton, a resultante de todas as forças deve ser igual à força de inércia $m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2}$. Então a equação do movimento para a massa m_i interna qualquer é a seguinte:

$$F_i + C_{i+1} \left(\frac{du_{i+1}}{dt} - \frac{du_i}{dt} \right) + K_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - C_i \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{du_{i-1}}{dt} \right) - K_i(u_i - u_{i-1}) = m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (3.4)$$

Reagrupando os termos da Eq. (3.4), tem-se:

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} - C_{i+1} \frac{du_{i+1}}{dt} (C_i + C_{i+1}) \frac{du_i}{dt} - C_i \frac{du_{i-1}}{dt} - K_{i+1} u_{i+1} + (K_i + K_{i+1}) u_i - K_i u_{i-1} = F_i \quad (3.5)$$

Ou ainda na forma matricial a Eq. (3.5) fica:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 u_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 u_3}{dt^2} \\ \frac{d^2 u_4}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 u_n}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_1 + C_2) & -C_2 & & & \\ -C_2 & (C_2 + C_3) & -C_3 & & \\ & -C_3 & (C_3 + C_4) & -C_4 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \frac{du_3}{dt} \\ \vdots \\ \frac{u_n}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_1 u_1 \\ K_1 u_1 - K_2 u_2 \\ K_2 u_2 - K_3 u_3 \\ \vdots \\ K_{n-1} u_{n-1} - K_n u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & & & \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & & \\ & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 & \\ & & -K_4 & (K_4 + K_5) & -K_5 \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

O sistema da Eq. (3.6) pode então ser escrito de forma compactada como:

$$[m] \left\{ \frac{d^2 u}{dt^2} \right\} + [c] \left\{ \frac{du}{dt} \right\} + [k] \{u\} = \{f(t)\} \quad (3.7)$$

Onde,

$[m]$ = Matriz de massa ou de Inércia

$[c]$ = Matriz de amortecimento

$[k]$ = Matriz de rigidez

$\{f(t)\}$ = Vetor de forças

Em sua grande maioria os problemas de engenharia são definidos no contínuo, portanto, nem sempre modelos de massas discretas representam de uma forma satisfatória os problemas da dinâmica estrutural. Com isso, uma técnica numérica como elementos finitos pode ser utilizada para resolver um sistema de equações de movimentos análoga àquela definida na Eq. (3.7). Uma das diferenças que pode ser apontada é que a matriz de massa resultante pode não ser diagonal (matriz de massa consistente).

Gopalakrishnan & Mira (2010) afirmam que apesar do MEF ser versátil e amplamente utilizado para modelar estruturas complexas e de geometria arbitrária para problemas de dinâmica estrutural, ele é altamente inadequado para a análise de propagação de ondas. Carregamentos com maiores frequências em problemas de propagação de ondas requer malhas extremamente finas com o tamanho do elemento comparável ao comprimento de onda, que são extremamente pequenos em frequências mais altas. Isso resulta em um sistema de grande tamanho e em um enorme custo computacional. Além da malha fina para obter resposta do sistema, o método da superposição modal ou esquemas de integração no tempo precisa ser implementada após a modelagem do MEF. O método da superposição modal não pode ser aplicado para a análise de propagação de ondas, isto

poque para esses problemas os parâmetros modais devem ser extraídos em uma ampla faixa de frequência. Isso tem que ser feito através de análise de autovalor que é computacionalmente muito caro.

Vale salientar que nesse trabalho apenas as baixas frequências serão abordadas, o que justifica apenas o desenvolvimento dos modelos da dinâmica estrutural em elementos finitos.

Assim, nas próximas seções são abordadas duas classes de problemas: na primeira estão enquadrados problemas reticulados clássicos e na segunda pórticos espaciais enrijecidos com núcleos. Vale ressaltar, que nesse capítulo apenas as matrizes de massa serão discutidas, uma vez que as matrizes de rigidez dos problemas de interesse deste trabalho foram abordadas no Capítulo II. Além disso, apenas os problemas dinâmicos não amortecidos e sob a ação harmônica são discutidos doravante.

3.2. MATRIZ DE MASSA LOCAL NOS PROBLEMAS CLÁSSICOS DE BARRA¹

Nessa seção são discutidas independentemente, os problemas sob solicitação axial pura, flexão e torção de barras. Alguns modelos matemáticos para esses casos são discutidos, particularmente, a construção/dedução dos respectivos funcionais e as equações governantes associadas. Em seguida, os aspectos da geração das matrizes de massa de cada um desses problemas são também abordados de forma independente, desde as interpolações dos campos de interesse até a forma explícita final das matrizes de rigidez e dos vetores de carga nodais equivalentes no sistema local de coordenada.

Semelhantemente à obtenção da matriz de rigidez a matriz de massa do elemento de barra pode ser dividida na análise de três problemas: o elemento axialmente carregado, o elemento em flexão e por fim o elemento sob torção.

A matriz de massa de barra é de ordem quadrada e tem dimensão igual a duas vezes o grau de liberdade de cada extremidade (nó), que quando somadas individualmente em superposição formam a matriz de massa da estrutura.

Para a representação matemática do modelo de barras na análise dinâmica, as hipóteses são as seguintes (Petyt, 1990):

¹ Nesse capítulo as variáveis $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ e $\theta(x,t)$ são definidas no espaço (em x) e no tempo (t) e por uma questão de convenção, serão doravante representadas por u , v , w e θ .

- i. Uma das dimensões bem maior que as demais (barra): o problema 3D pode ser reduzido ao espaço 1D, desde que uma das dimensões (vão do elemento, L) seja suficientemente superior às dimensões (a, b) da seção transversal, ou seja, $L \gg a, b$.
- ii. Seções transversais uniformes (barra prismática): A barra é prismática quando não há variação de forma das seções ao longo do eixo da barra;
- iii. Carregamentos dinâmicos aplicados: O carregamento é aplicado de tal forma que os efeitos da energia cinética devem ser considerados;
- iv. Material homogêneo: implica que em qualquer região do corpo representa as propriedades e fenômenos do todo;
- v. Material Isótropo: implica em mesmas propriedades em todas as direções;
- vi. Material elasto-linear: implica que em um ciclo de carga-descarga, não há surgimento de deformações residuais; esse material é linear, quando a relação tensão-deformação for linear;
- vii. Supressão do efeito de Poisson: deformações transversais da seção desprezados;
- viii. Conservação da planicidade original das seções transversais durante o processo de deformação;
- ix. Campos pequenos (suaves) de deslocamentos e deformações.
- x. Comprimentos de onda maiores que dez vezes as dimensões da seção transversal;

3.2.1. Contribuição Axial

A parcela relativa ao funcional de energia potencial de deformação já foi mostrada na Eq. (2.4). e referente ao trabalho das cargas externas na Eq. (2.5).

A parcela referente à energia cinética é dada por:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_m \left(\frac{du_a}{dt} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \int_v \rho \left(\frac{du_a}{dt} \right)^2 dV \quad (3.8)$$

Onde,

m = matriz de massa e ρ = densidade

A Eq. (3.8) pode ser reescrita como:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{du_a}{dt} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_L \int_A \rho \left(\frac{du_a}{dt} \right)^2 dA dx \quad (3.9)$$

Se a distribuição de massa for uniforme e após a integração ao longo da seção transversal, tem-se que:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{du_a}{dt} \right)^2 dx \quad (3.10)$$

As variações de energia cinética, energia potencial e carregamento externo podem ser reunidas segundo um princípio variacional denominado princípio de Hamilton. Segundo Petyt (1990) ele é definido como:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W) dt = 0 \quad (3.11)$$

Onde,

π_c = energia cinética;

π_p = energia potencial

W = carregamento externo ao sistema.

Detalhes sobre a dedução da Eq. (3.11) podem ser encontrados em Petyt (1990).

Logo, substituindo-se as Eqs. (2.4), (3.10) em (3.11) fica:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{du_a}{dt} \right)^2 dx \right\} - \\ &\int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du_a}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p \delta u_a dx \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aplicando-se as propriedades de cálculo variacional $\delta(u^n) = nu^{n-1}\delta u$, $\delta \int g(x)dx = \int \delta[g(x)]dx$ na Eq. (3.12), resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{du_a}{dt} \rho A \delta \left(\frac{du_a}{dt} \right) dx \right\} dt - \\ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{du}{dx} EA \delta \left(\frac{du_a}{dx} \right) dx - \int_0^L p \delta u_a dx \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Integrando-se a primeira e segunda parcela da Eq. (3.13) por partes, resulta na expressão:

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_L \frac{d^2 u_a}{dt^2} \rho A \delta u_a dx - \int_L \frac{d^2 u_a}{dx^2} EA \delta u_a dx + \int_L p \delta u_a dx \right\} + \\ \int_L \left[\frac{du_a}{dt} \rho A \delta u_a \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{du_a}{dx} EA \delta u_a \right]_0^L dt = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como $[\delta u_a]_0^L = 0$ e $[\delta u_a]_{t_1}^{t_2} = 0$ e fatorando-se a Eq. (3.14), resulta em:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_L \left(\frac{d^2 u_a}{dt^2} \rho A - \frac{d^2 u_a}{dx^2} EA + p \right) \delta u_a dx \right\} = 0 \quad (3.15)$$

Como δu_a é uma variação arbitrária, a nulidade da Eq. (3.15) é sempre garantida se a seguinte expressão for verdadeira:

$$\frac{d^2 u_a}{dx^2} EA - \frac{d^2 u_a}{dt^2} \rho A - p = 0 \quad (3.16)$$

Se for desprezado o carregamento distribuído ao longo da barra, a equação de movimento fica:

$$\frac{d^2 u_a}{dx^2} - \frac{d^2 u_a}{dt^2} \frac{\rho}{E} = 0 \quad (3.17)$$

A Eq. (3.17) também pode ser escrita em coordenadas adimensionais ξ , como segue:

$$\frac{d^2 u_a}{d\xi^2} - \left(\frac{a}{c}\right) \frac{d^2 u_a}{dt^2} = 0 \quad (3.18)$$

Onde,

$$c^2 = E / \rho$$

$$a = \frac{L}{2} \text{ (vide Figura 2.5)}$$

A solução analítica da Eq. (3.18) é dada por:

$$\begin{aligned} u_a(\xi, t) = & \frac{c}{a} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{sen} \left\{ \frac{n\pi}{2} (1 - \xi) \right\} \int_0^t u_{a1}(\tau) \text{sen} \left\{ \frac{n\pi c}{2a} (t - \tau) \right\} d\tau + \\ & \frac{c}{a} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{sen} \left\{ \frac{n\pi}{2} (1 + \xi) \right\} \int_0^t u_{a2}(\tau) \text{sen} \left\{ \frac{n\pi c}{2a} (t - \tau) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.19)$$

Porém a solução da Eq. (3.19) é um tanto complexa; uma das alternativas é aproximar tal solução utilizando-se a contraparte do problema estático, ou seja:

$$\frac{d^2 u_a}{dx^2} EA = 0, \text{ já discutido no Capítulo II.}$$

Assim, para a interpolação de velocidade axial, a Eq. (3.10) pode ser escrita como:

$$\frac{du_a}{dt} = Z_1 \frac{du_{a1}}{dt} + Z_2 \frac{du_{a2}}{dt} = [Z] \left\{ \frac{du_a}{dt} \right\} \quad (3.20)$$

Sendo,

$$[Z] = [Z_1 \quad Z_2]$$

Se a Eq. (3.20) for introduzida na Eq. (3.10), a energia cinética interpolada fica:

$$\pi_c = \left\{ \frac{du_a}{dt} \right\}^T [m] \left\{ \frac{du_a}{dt} \right\} \quad (3.21)$$

Onde,

$[m]$ = Matriz de Massa Consistente em coordenadas locais

$[Z]$ = Funções interpoladoras e valem respectivamente:

$$[m] = \int_0^L ([Z]^T \rho A [Z]) dx \text{ e } [Z] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\varsigma) & \varsigma \end{bmatrix}$$

Logo a matriz de massa consistente do problema axial em coordenadas locais fica:

$$[m] = \rho A L \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\varsigma \\ \varsigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varsigma & \varsigma \end{bmatrix} d\varsigma = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.2.2. Contribuições do Problema de Flexão com Deformação por Cortante

Nessa seção, será mostrada a obtenção das matrizes de massa para o problema de flexão onde é considerado o efeito da deformação por cortante.

a) Contribuição da Flexão em z:

A energia cinética π_c para o elemento de barra sob flexão em torno do eixo Z, com flexão ocorrendo em um dos eixos principais de inércia, pode ser dividida nas parcelas de translação π_{ct} e de rotação π_{cr} . Essas parcelas são dadas respectivamente por (Petyt, 1990):

$$\pi_c = \pi_{ct} + \pi_{cr} \quad (3.23)$$

A parcela π_{ct} da energia cinética para a velocidade transversal da barra fica:

$$\pi_{ct} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx \quad (3.24)$$

A parcela π_{cr} , está associada à velocidade axial dos pontos na seção transversal causada pela rotação da mesma. A partir da Eq. (2.37), essa velocidade axial devido à flexão pode ser escrita como:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{d\beta_z}{dt} \cdot y \quad (3.25)$$

Substituindo a Eq. (3.25) na Eq. (3.10), obtém-se o funcional de energia cinética de rotação:

$$\pi_{cr} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A y^2 \rho \left(\frac{d\beta_z}{dt} \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \left(\frac{d\beta_z}{dt} \right)^2 dx \quad (3.26)$$

Onde,

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

Conforme mencionado anteriormente o princípio de Hamilton estabelece relações entre as variações de energia cinética, potencial e do trabalho do carregamento externo, que no caso da flexão fica:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_z \left(\frac{d\beta_z}{dt} \right)^2 dx \right\} + \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ - \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{d\beta_z}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \delta \int_0^L p_y \delta v dx \right\} dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando-se as propriedades do cálculo variacional $\delta(u^n) = nu^{n-1}\delta u$, $\delta \int g(x) dx = \int \delta[g(x)] dx$ na Eq. (3.27), resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left(\frac{d\beta_z}{dt} \rho I_z \delta \left[\frac{d\beta_z}{dt} \right] \right) dx + \int_0^L \rho A \frac{dv}{dt} \delta \left(\frac{dv}{dt} \right) dx \right\} + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left(-\frac{d\beta_z}{dx} EI_z \delta \left[\frac{d\beta_z}{dx} \right] \right) dx - \int_0^L \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \kappa GA \delta \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) dx \right\} dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L p_y \delta v dx \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Integrando-se a Eq. (3.28) por partes, a Eq. (3.28) fica:

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{d\beta_z}{dx} EI_z \delta \beta_z \right]_0^L + \int_0^L \left(\frac{d^2 \beta_z}{dx^2} EI_z \delta \beta_z \right) dx - \int_0^L \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v dx \right. \\
& - \int_0^L \frac{d^2 \beta_z}{dt^2} \rho I_z \delta \beta_z dx - \int_0^L \left[\kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \right] \delta \beta_z dx + \\
& \left. \int_0^L q \delta v dx + \int_0^L \kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta v dx \right\} dt + \\
& \left[\int_0^L \rho A \frac{dv}{dt} \delta v dx \right]_{t_1}^{t_2} + \left[\int_0^L \rho I_z \frac{d\beta_z}{dt} \delta \beta_z dx \right]_{t_1}^{t_2} - \left[\int_0^L \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \delta v dx \right]_{t_1}^{t_2} = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Impondo-se as condições de contorno nas variações δv e $\delta \beta$ da Eq. (3.29), resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_0^L \left[EI_z \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} - \rho I_z \frac{d^2 \beta_z}{dt^2} - \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \right] \delta \beta_z dx - \right. \\
& \left. \int_0^L \left[\rho A \frac{d^2 v}{dt^2} + \kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_y \right] \delta v dx \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Para variações arbitrárias de δv e $\delta \beta_z$, a nulidade da Eq. (3.30) só verificada se as relações seguintes forem verdadeiras:

$$\begin{aligned}
EI \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) - \rho I_z \frac{d^2 \beta_z}{dt^2} &= 0 \\
\rho A \frac{d^2 v}{dt^2} + \kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_y &= 0
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

As relações da Eq. (3.31) são as equações de movimento da flexão em z no modelo.

Nos casos em que a deformação por cortante e a inércia de rotação de Timoshenko forem desprezadas, ou seja, $\left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) = 0$ e $\rho I_z \frac{d^2 \beta_z}{dt^2} = 0$, a equação governante fica:

$$\begin{aligned}
EI \frac{d^3 v}{dx^3} - \kappa GA \left(-\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} \right) &= 0 \\
\rho A \frac{d^2 v}{dt^2} + \kappa GA \left(-\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_y &= 0
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

Diferenciando-se a primeira equação em x , e resolvendo o sistema, tem-se a equação de movimento da teoria técnica de viga (Euler-Bernoulli):

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} = p_y
\tag{3.33}$$

A obtenção das soluções das equações de movimento de vigas é muito trabalhosa. Uma alternativa muito empregada em elementos finitos é obtê-las empregando-se uma estratégia em que soluções aproximadas dos campos no domínio do tempo são construídas consistentemente (com a mesma interpolação) com as contrapartes estáticas.

Conforme discutido no Capítulo II, para o caso de barra não-articulada, a solução admite uma função cúbica para o deslocamento e uma quadrática para a rotação da seção, conforme as Eqs. (2.54) e (2.55)

Interpolando-se cubicamente $\frac{dv}{dt}$ e quadraticamente $\frac{d\beta_z}{dt}$ respectivamente com as funções N_α (Eq. (2.94)), os funcionais de energia cinética de translação e rotação - as Eqs. (3.24) e (3.26) - podem ser reescritas como:

$$\pi_{CT} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{du_{fz}}{dt} \right\}^T [M_T] \left\{ \frac{du_{fz}}{dt} \right\} \quad (3.34)$$

$$\pi_{CR} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{du_{fz}}{dt} \right\}^T [M_R] \left\{ \frac{du_{fz}}{dt} \right\} \quad (3.35)$$

Onde:

$$\left\{ \frac{du_{fz}}{dt} \right\}^T = \left\{ \frac{dv_i}{dt} \quad \frac{d\beta_{zi}}{dt} \quad \frac{dv_j}{dt} \quad \frac{d\beta_{zj}}{dt} \right\};$$

Aplicando-se uma mudança dos limites de integração nas Eqs. (3.24) e (3.26) com $\xi = x/a$, sendo $a = L/2$, tem-se que:

$$[M_{Tz}] = \int_{-1}^1 [N]^T \rho A [N] |J| d\xi = \rho A \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} |J| d\xi \quad (3.36)$$

$$[M_{Rz}] = \int_{-1}^1 [L]^T \rho I_z [L] |J| d\xi = \rho I_z \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_1 L_2 & L_1 L_3 & L_1 L_4 \\ L_2 L_1 & L_2 L_2 & L_2 L_3 & L_2 L_4 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3 L_3 & L_3 L_4 \\ L_4 L_1 & L_4 L_2 & L_4 L_3 & L_4 L_4 \end{bmatrix} |J| d\xi \quad (3.37)$$

Onde

$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$ e $[L] = [N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8]$ são dadas, respectivamente, pelas Eqs. (2.59) a (2.62) e (2.63) a (2.66)

Integrando-se as Eqs. (3.36) e (3.37) e substituindo-se $a = L/2$, chega-se às formas explícitas para as matrizes de massa translacional e rotacional de barra não-articulada no modelo de Timoshenko

$$[M_{Tz}] = \frac{\rho AL}{840 \cdot (1 + 3\gamma_z)^2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ & p_5 & -p_4 & p_6 \\ & & p_1 & -p_2 \\ \text{sim.} & & & p_5 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$[M_{Rz}] = \frac{\rho I_z}{30L \cdot (1 + 3\gamma_z)^2} \begin{bmatrix} p_7 & p_8 & -p_7 & p_8 \\ & p_9 & -p_8 & p_{10} \\ & & p_7 & -p_8 \\ \text{sim.} & & & p_9 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Onde:

$$\begin{aligned} p_1 &= 312 + 1764\gamma_z + 2520\gamma_z^2 & p_2 &= (44 + 231\gamma_z + 315\gamma_z^2) \cdot L \\ p_3 &= 108 + 756\gamma_z + 1260\gamma_z^2 & p_4 &= -(26 + 189\gamma_z + 315\gamma_z^2) \cdot L \\ p_5 &= (8 + 42\gamma_z + 63\gamma_z^2) \cdot L^2 & p_6 &= -3 \cdot (2 + 14\gamma_z + 21\gamma_z^2) \cdot L^2 \\ p_7 &= 36 & p_8 &= -3 \cdot (-1 + 15\gamma_z) \cdot L \\ p_9 &= (4 + 15\gamma_z + 90\gamma_z^2) \cdot L^2 & p_{10} &= (-1 - 15\gamma_z + 45\gamma_z^2) \cdot L^2 \end{aligned}$$

A matriz de massa final para os efeitos de flexão em z, será a soma das matrizes de massa de translação e rotação (Eqs. (3.38) e (3.39)), resultando em:

$$M_{zT} = M_{Tz} + M_{Rz} \quad (3.40)$$

No modelo de Euler-Bernoulli, tem-se que $\gamma_z = 0$, o que resulta nas matrizes:

$$[M_{Tz}] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ & b_5 & -b_4 & b_6 \\ & & b_1 & -b_2 \\ \text{sim.} & & & b_5 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$[M_{Rz}] = \frac{\rho I_z}{30L} \begin{bmatrix} b_7 & b_8 & -b_7 & b_8 \\ & b_9 & -b_8 & b_{10} \\ & & b_7 & -b_8 \\ \text{sim.} & & & b_9 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Onde:

$$b_1 = \frac{26}{35}$$

$$b_2 = \frac{11L}{35}$$

$$b_3 = \frac{9}{35}$$

$$b_4 = -\frac{13L}{210}$$

$$b_5 = \frac{2L^2}{105}$$

$$b_6 = -\frac{L^2}{70}$$

$$b_7 = 36$$

$$b_8 = 3L$$

$$b_9 = 4L^2$$

$$b_{10} = -L^2$$

Para a matriz de massa final a flexão em z utilizando Euler-Bernoulli, é obtida a partir das contribuições das matrizes de massa de translação e rotação das Eqs. (3.41) e (3.42), resultando em:

$$M_{zB} = M_{Tz} + M_{Rz} \quad (3.43)$$

Caso a barra seja articulada à esquerda a matriz de massa de rotação consistente e a matriz de massa de translação consiste com flexão em z pela teoria de Timoshenko, cuja demonstração está em Mendonça (2008), serão dadas por:

$$M_{Rz} = a \cdot \rho \cdot I_z \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & p_{33} & p_{34} \\ sim & & & p_{44} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Onde,

$$p_{11} = \frac{48}{5a^2(4+3\gamma_z)^2}$$

$$p_{13} = \frac{-48}{5a^2(4+3\gamma_z)^2}$$

$$p_{14} = -\frac{4(-4+15\gamma_z)}{5a(4+3\gamma_z)^2}$$

$$p_{33} = p_{11}$$

$$p_{34} = -p_{14}$$

$$p_{44} = \frac{2(16+45\gamma_z^2)}{5(4+3\gamma_z)^2}$$

b) Contribuição de Flexão em y

Os efeitos da flexão na direção de Y podem ser calculados de forma análoga aos procedimentos empregados na flexão em Z, alterando o γ_z por γ_y e invertendo o sinal das funções interpoladoras N_2 , N_4 , N_6 e N_8 . Portanto, para não estender em demasia o desenvolvimento desse trabalho serão mostrados apenas os resultados finais para as matrizes de massa para o caso da barra não-articulada. Detalhes adicionais dessa obtenção podem ser encontrados dentre outros em (Mendonça, 2008) e (Silva Júnior, 2007).

A forma explícita das matrizes de massa $[M_{Ty}]$ e $[M_{Ry}]$, no modelo de Timoshenko, para o efeito de flexão em torno de Y para barra não-articulada é dada por:

$$[M_{Ty}] = \frac{\rho AL}{840 \cdot (1+3\gamma_y)^2} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ & j_5 & -j_4 & j_6 \\ & & j_1 & -j_2 \\ sim. & & & j_5 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$[M_{Ry}] = \frac{\rho I_Y}{30L \cdot (1 + 3\gamma_y)^2} \begin{bmatrix} j_7 & j_8 & -j_7 & j_8 \\ & j_9 & -j_8 & j_{10} \\ & & j_7 & -j_8 \\ \text{sim.} & & & j_9 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Onde:

$$\begin{aligned} j_1 &= 312 + 1764\gamma_y + 2520\gamma_y^2 & j_2 &= -(44 + 231\gamma_y + 315\gamma_y^2) \cdot L \\ j_3 &= 108 + 756\gamma_y + 1260\gamma_y^2 & j_4 &= (26 + 189\gamma_y + 315\gamma_y^2) \cdot L \\ j_5 &= (8 + 42\gamma_y + 63\gamma_y^2) \cdot L^2 & j_6 &= -3 \cdot (2 + 14\gamma_y + 21\gamma_y^2) \cdot L^2 \\ j_7 &= 36 & j_8 &= 3 \cdot (-1 + 15\gamma_y) \cdot L \\ j_9 &= (4 + 15\gamma_y + 90\gamma_y^2) \cdot L^2 & j_{10} &= (-1 - 15\gamma_y + 45\gamma_y^2) \cdot L^2 \\ \gamma_y &= \frac{4EI_Y}{\kappa GAL^2} \end{aligned}$$

A matriz de massa final para os efeitos de flexão em y, será a soma das matrizes de massa de translação e rotação (Eqs. (3.45) e (3.46)), resultando em:

$$M_{yT} = M_{Ty} + M_{Ry} \quad (3.47)$$

Analogamente, como já mostrado na (3.40), para o modelo de Euler-Bernoulli, tem-se que $\gamma_y = 0$, o que resulta nas matrizes:

$$[M_{Ty}] = \frac{\rho AL}{840} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ & j_5 & -j_4 & j_6 \\ & & j_1 & -j_2 \\ \text{sim.} & & & j_5 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$[M_{Ry}] = \frac{\rho I_y}{30L} \begin{bmatrix} j_7 & j_8 & -j_7 & j_8 \\ & j_9 & -j_8 & j_{10} \\ & & j_7 & -j_8 \\ \text{sim.} & & & j_9 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Onde:

$$\begin{aligned} j_1 &= 312 & j_2 &= -44L \\ j_3 &= 108 & j_4 &= 26L \\ j_5 &= 8L^2 & j_6 &= -6L^2 \\ j_7 &= 36 & j_8 &= -3L \\ j_9 &= 4L^2 & j_{10} &= -L^2 \end{aligned}$$

A matriz de massa final de flexão em y utilizando Euler-Bernoulli, é obtida a partir das contribuições das matrizes de massa de translação e rotação das Eqs. (3.48) e (3.49), resultando em:

$$M_{yB} = M_{Ty} + M_{Ry} \quad (3.50)$$

3.2.3. Contribuição de Torção Uniforme:

A energia cinética π_c para o elemento de barra submetida à torção uniforme, será dada por:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_M \left\{ \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\} dm = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\} dV \quad (3.51)$$

Substituindo-se as relações geométricas da Eq. (2.124) na (3.51) fica:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \int_A (y^2 + z^2) dA \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx \quad (3.52)$$

Se a distribuição de massa for uniforme tem-se que:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \int_A (y^2 + z^2) dA \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_p \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx \quad (3.53)$$

$$\text{Onde, } I_p = \int_A (z^2 + y^2) dA$$

Aplicando-se o princípio de Hamilton (Eq. (3.11)) nas Eqs. (3.53) e (2.132), a equação do movimento fica:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_p \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx \right\} dt - \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L G I_t \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L t \delta \theta dx \right\} dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Aplicando as propriedades do cálculo variacional, fica:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta(\pi_c - \pi_p) + \delta W) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_L \frac{d\theta}{dt} \rho I_p \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dx \right\} - \\ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{d\theta}{dx} G I_t \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx - \int_0^L t \delta \theta dx \right\} dt &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Integrando-se por partes a Eq. (3.55), a expressão fica:

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_L \frac{d^2\theta}{dt^2} \rho I_p \delta \theta dx - \int_L \frac{d^2\theta}{dx^2} G I_t \delta \theta dx + \int_L t \delta \theta dx \right\} + \\ \int_{L_1}^{L_2} \frac{d\theta}{dt} \rho I_p \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\theta}{dt} G I_t \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Impondo-se as condições de contorno na variação $\delta\theta$, no tempo e no espaço, na Eq. (3.52) e fatorando-se os termos, fica:

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_L \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \rho I_p - \frac{d^2\theta}{dx^2} GI_t + t \right) \delta\theta dx \right\} = 0 \quad (3.57)$$

Para uma variação arbitrária de $\delta\theta$ a Eq. (3.57) é uniforme, sempre que se verificar se a seguinte relação for verdadeira:

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2} \rho I_p + \frac{d^2\theta}{dx^2} GI_t - t = 0 \quad (3.58)$$

A Eq. (3.58) é a equação do movimento da torção uniforme. A solução exata do problema de torção simples possui uma forma análoga à da tração simples, Eq. (3.19), bastando permutar EA por GI_t e ρA por ρI_p . No entanto, conforme dito anteriormente, a Eq. (3.19) possui uma forma complexa; com isso parte-se para aproximar a solução dinâmica do problema utilizando-se uma estratégia consistente (mesma interpolação) com a contraparte estática:

$$GI_t \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \quad (3.59)$$

A solução da Eq. (3.59) já foi mostrada na Eq. (2.136). A interpolação da velocidade dos ângulos de torção é dada por:

$$\frac{d\theta}{dt}(\xi) = Z_1 \frac{d\theta_i}{dt} + Z_2 \frac{d\theta_j}{dt} = [Z] \left\{ \frac{du_t}{dt} \right\} \quad (3.60)$$

Onde,

$$\left\{ \frac{du_t}{dt} \right\}^T = \left\{ \frac{d\theta_i}{dt} \quad \frac{d\theta_j}{dt} \right\} \text{ e } [Z] = \{Z_1 \quad Z_2\}$$

Assim,

$$\pi_{cr} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \rho I_p \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{du_t}{dt} \right\}^T [Z]^T \rho I_p [Z] \left\{ \frac{du_t}{dt} \right\} dx \quad (3.61)$$

Ou

$$\pi_{cr} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{du_t}{dt} \right\}^T [m] \left\{ \frac{du_t}{dt} \right\} dx \quad (3.62)$$

Assim, a matriz de massa é dada por:

$$[m] = \rho I_p \int_0^L [Z]^T [Z] dx = \rho a I_p \int_{-1}^1 [Z]^T [Z] d\xi \quad (3.63)$$

Ou,

$$[m] = \rho I_p a \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} d\xi = \rho I_p a \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} d\xi \quad (3.64)$$

Após o cálculo da integral, a forma explícita da matriz de massa da torção uniforme, fica:

$$[m] = \frac{\rho \cdot L \cdot I_p}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

3.3. MATRIZ DE MASSA DE ELEMENTOS CLÁSSICOS DE BARRA

Nessa seção as contribuições das matrizes de massa para os problemas específicos (axial, flexão e torção) são convenientemente superpostas para formar as matrizes de massa dos elementos de treliça, de pórtico plano, grelha e pórtico espacial. Os detalhes são discutidos a seguir.

3.3.1. Treliças

Segundo Hutton (2004), a matriz de massa do elemento de barra definido na Eq. (3.22) só é válida para vibrações axiais. Quando o elemento de barra é usado em modelos de estruturas de treliças planas e espaciais, considerações adicionais deverão ser levadas em conta, uma vez que no caso dinâmico o movimento transversal apresenta energia cinética. Utilizando-se a filosofia da matriz de massa consistente, os deslocamentos verticais e horizontais em coordenadas globais da barra (vide Figura 3.7), podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} u_x(x) &= Z_1 u_{x1} + Z_2 u_{x2} \\ u_y(x) &= Z_1 u_{y1} + Z_2 u_{y2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

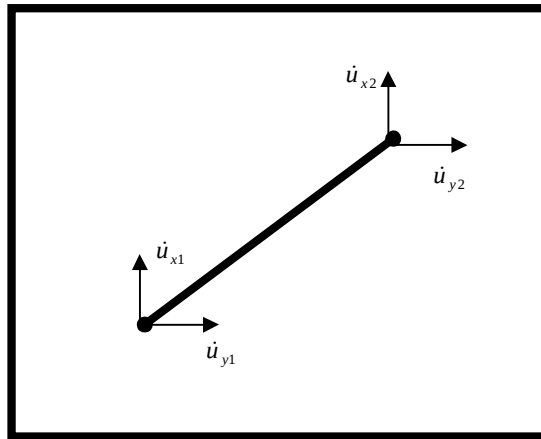


Figura 3.7 ã Barra de treliça em 2D, submetida ao efeito dinâmico

A energia cinética da barra de treliça plana pode ser dada como:

$$\pi_c = \left\{ \frac{du_g}{dt} \right\}^T [m] \left\{ \frac{du_g}{dt} \right\} \quad (3.67)$$

Onde,

$$\{\dot{u}_g\}^T = [\dot{u}_{x1} \quad \dot{u}_{y1} \quad \dot{u}_{x2} \quad \dot{u}_{y2}]$$

Na Eq. (3.67) a matriz de massa consistente fica,

$$[m] = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} Z_1^2 & 0 & Z_1 Z_2 & 0 \\ & Z_1^2 & 0 & Z_1 Z_2 \\ & & Z_2^2 & 0 \\ sim & & & Z_2^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 \\ sim & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Já para a treliça espacial, a matriz de massa fica:

$$[m] = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} Z_1^2 & 0 & Z_1 Z_2 & 0 & Z_1 Z_2 & 0 \\ & Z_1^2 & 0 & Z_1 Z_2 & 0 & Z_1 Z_2 \\ & & Z_1^2 & 0 & Z_1 Z_2 & 0 \\ & & & Z_2^2 & 0 & Z_1 Z_2 \\ & & & & Z_2^2 & 0 \\ & & & & & Z_2^2 \end{bmatrix} dx \quad (3.69)$$

Calculando-se a integral da Eq. (3.69), tem-se:

$$[m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

3.3.2. Pórtico Plano

Conforme foi mostrado no Capítulo II, nos pórticos planos estão presentes os efeitos de flexão unidirecional e axial o que resulta em seis graus de liberdade (ver Figura 2.20).

Associando-se os graus de liberdade 1 e 4 para os efeitos axiais e os demais para os efeitos de flexão, a montagem final da matriz de massa do pórtico plano pode ser obtida

por um conveniente espalhamento das contribuições das Eqs. (3.22) e (3.40) (vide Figura 3.8), resultando em:

$$[M_T] = \begin{bmatrix} \rho AL/3 & 0 & 0 & \rho AL/6 & 0 & 0 \\ & (T.p_1 + R.p_7) & (T.p_2 + R.p_8) & 0 & (T.p_3 + R.p_7) & (T.p_4 + R.p_8) \\ & & (T.p_5 + R.p_9) & 0 & -(T.p_4 + R.p_8) & (T.p_6 + R.p_{10}) \\ & & & \rho AL/3 & 0 & 0 \\ & & & & (T.p_1 + R.p_7) & -(T.p_2 + R.p_8) \\ & \text{Simetrica} & & & & (T.p_5 + R.p_9) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Onde,

$$T = \frac{\rho AL}{840 \cdot (1 + 3\gamma_z)^2}, \quad R = \frac{\rho I_z}{30L \cdot (1 + 3\gamma_z)^2} \text{ e as funções } p_i \text{ já foram dadas nas}$$

Eqs. (3.38) e (3.39).

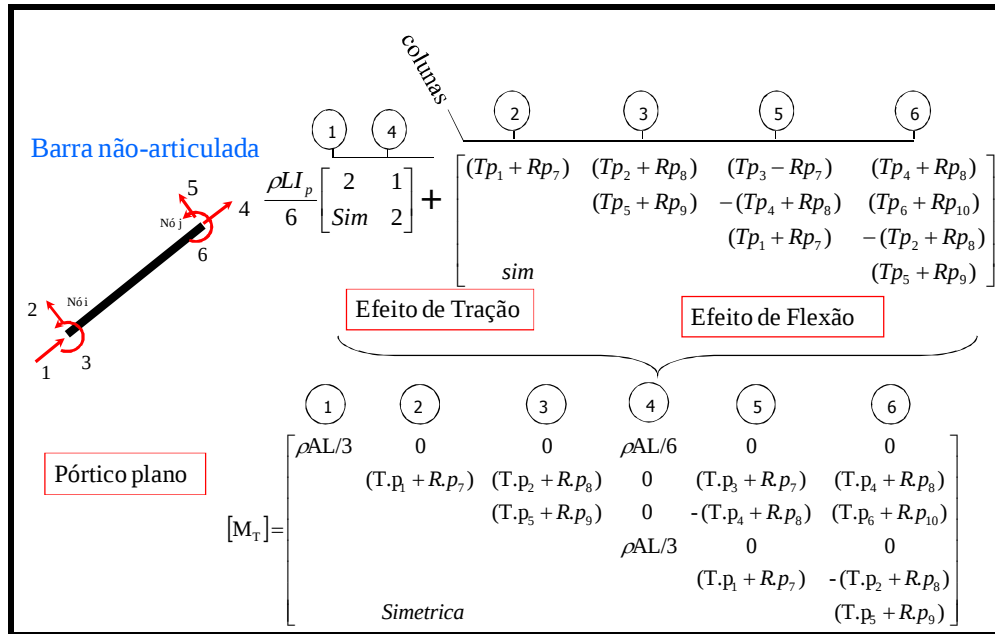


Figura 3.8 - Composição da Matriz de Massa Local para o Pórtico Plano

Para a montagem final da matriz de massa do pórtico plano, considerando o modelo de Euler-Bernoulli, esta pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das Eqs. (3.22) e (3.43), resultando em:

$$[M_T] = \begin{bmatrix} \rho AL/3 & 0 & 0 & \rho AL/6 & 0 & 0 \\ (T_B \cdot j_1 + R_B \cdot j_7) & (T_B \cdot j_2 + R_B \cdot j_8) & 0 & (T_B \cdot j_3 + R_B \cdot j_7) & (T_B \cdot j_4 + R_B \cdot j_8) \\ & (T_B \cdot j_5 + R_B \cdot j_9) & 0 & -(T_B \cdot j_4 + R_B \cdot j_8) & (T_B \cdot j_6 + R_B \cdot j_{10}) \\ & & \rho AL/3 & 0 & 0 \\ & & & (T_B \cdot j_1 + R_B \cdot j_7) & -(T_B \cdot j_2 + R_B \cdot j_8) \\ \text{Simetrica} & & & & (T_B \cdot j_5 + R_B \cdot j_9) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Onde,

$$T_B = \frac{\rho AL}{840}, R_B = \frac{\rho I_z}{30L} \text{ e as funções } j_i \text{ já foram dadas nas Eqs. (3.45) e (3.46)}$$

3.3.3. Grelha

Conforme visto no Capítulo II, nas Grelhas estão presentes os efeitos de flexão em z e de torção uniforme o que resulta em seis graus de liberdade (ver Figura 2.22).

Associando-se os graus de liberdade 1 e 4 para os efeitos de torção uniforme e os demais para os efeitos de flexão (Timoshenko), a montagem final da matriz de massa de grelha pode ser obtida por um conveniente espalhamento das contribuições das Eqs. (3.65) e (3.40) (vide Figura 3.9), resultando em:

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho LI_p/3 & 0 & 0 & \rho LI_p/6 & 0 & 0 \\ & (Tp_1 + Rp_7) & (Tp_2 + Rp_8) & 0 & (Tp_3 - Rp_7) & (Tp_4 + Rp_8) \\ & & (Tp_5 + Rp_9) & 0 & -(Tp_4 + Rp_8) & (Tp_6 + Rp_{10}) \\ & & & \rho LI_p/3 & 0 & 0 \\ & & & & (Tp_1 + Rp_7) & -(Tp_2 + Rp_8) \\ \text{Simétrica} & & & & & (Tp_5 + Rp_9) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Onde,

$$T = \frac{\rho AL}{840 \cdot (1 + 3\gamma_z)^2} \text{ e } R = \frac{\rho I_z}{30L \cdot (1 + 3\gamma_z)^2}$$

Barra não-articulada

$$[M_k] = \frac{\rho L I_p}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \text{Sim} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (T_p + R_p) & (T_p + R_p) & (T_p - R_p) & (T_p + R_p) \\ (T_p + R_p) & -(T_p + R_p) & (T_p + R_p) & (T_p + R_p) \\ (T_p + R_p) & -(T_p + R_p) & (T_p + R_p) & -(T_p + R_p) \\ (T_p + R_p) & (T_p + R_p) & (T_p + R_p) & (T_p + R_p) \end{bmatrix}$$

sim

Efeito de Torção

Efeito de Flexão

$$[M_k] = \begin{bmatrix} \rho L I_p / 3 & 0 & 0 & \rho L I_p / 6 & 0 & 0 \\ (T_p + R_p) & (T_p + R_p) & 0 & (T_p - R_p) & (T_p + R_p) \\ (T_p + R_p) & (T_p + R_p) & 0 & -(T_p + R_p) & (T_p + R_p) \\ \rho L I_p / 3 & 0 & 0 & (T_p + R_p) & -(T_p + R_p) \\ 0 & 0 & 0 & (T_p + R_p) & (T_p + R_p) \\ 0 & 0 & 0 & (T_p + R_p) & (T_p + R_p) \end{bmatrix}$$

Simétrica

Figura 3.9 - Composição da Matriz de Massa Local para a barra de Grelha.

3.3.4. Pórtico Espacial

Como já foi mostrado no Capítulo II, na barra de pórtico espacial estão presentes os efeitos de flexão bidirecional (flexão em z e em y), tração axial e torção uniforme, resultando em doze graus de liberdade. Assim, de forma análoga à utilizada para compor a matriz de rigidez, será utilizada para compor a matriz de massa.

Logo, somando-se os efeitos de tração (Eq. (3.22)), flexão em z (Eq. (3.40)); de flexão em y (Eq. (3.47)) e torção (Eq. (3.65)), conforme é mostrado na Figura 3.10, obtém-se a matriz de massa local dada na Eq. (3.74).

$$[M_T] = \begin{bmatrix}
\frac{\rho AL}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(T.j_1 + R.j_7) & 0 & 0 & 0 & (T.p_2 + R.p_8) & 0 & (T.j_3 + R.j_7) & 0 & 0 & 0 & (T.p_4 + R.p_8) \\
(T.p_1 + R.p_7) & 0 & (T.j_2 + R.j_8) & 0 & 0 & 0 & (T.p_3 + R.p_7) & 0 & (T.j_4 + R.j_8) & 0 & 0 \\
\frac{\rho_p L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_p L}{6} & 0 & 0 & 0 \\
(T.j_2 + R.j_8) & 0 & 0 & 0 & -(T.p_4 + R.p_8) & 0 & (T.j_6 + R.j_{10}) & 0 & 0 & 0 \\
(T.p_5 + R.p_9) & 0 & -(T.j_4 + R.j_8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (T.p_6 + R.p_{10}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(T.j_1 + R.j_7) & 0 & 0 & 0 & -(T.p_2 + R.p_8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(T.p_1 + R.p_7) & 0 & -(T.j_2 + R.j_8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\rho_p L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(T.j_5 + R.j_9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (T.p_5 + R.p_9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Simetrica

(3.74)

Onde,

p_i e j_i já foram dadas nas Eqs. (3.38), (3.39), (3.45) e (3.46).

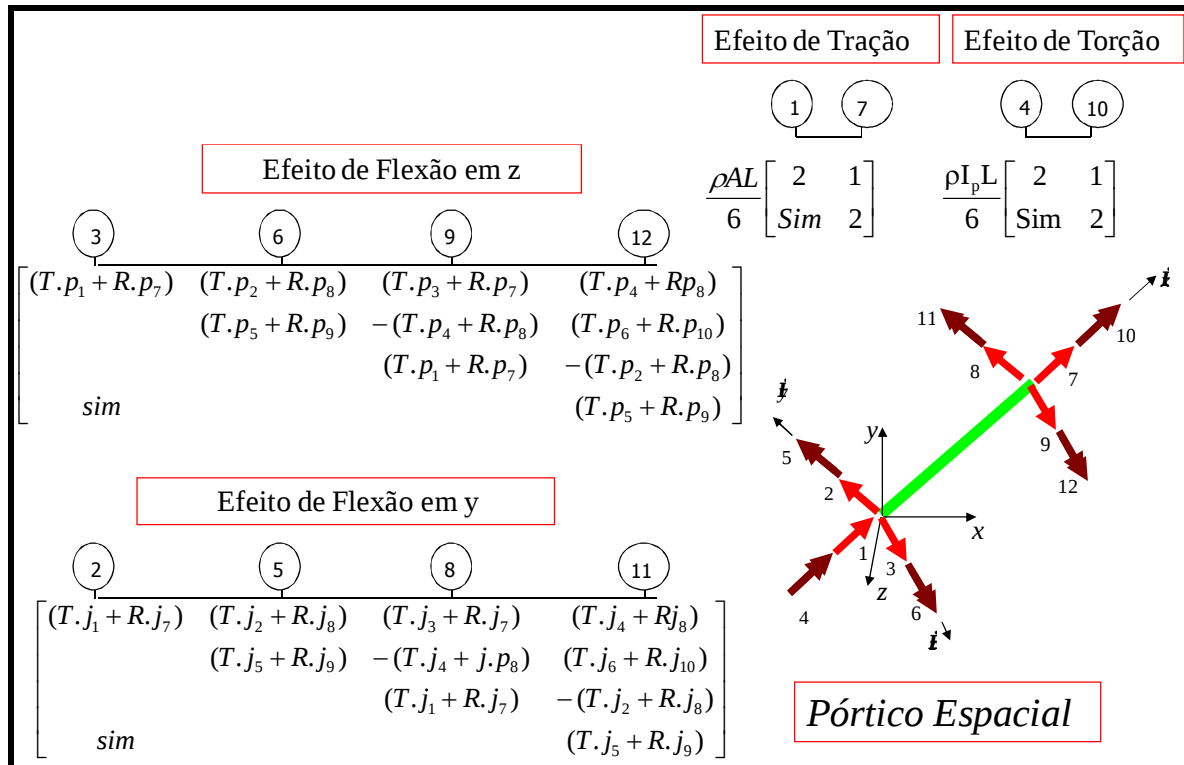


Figura 3.10 - Composição da Matriz de Massa Local para a barra de Pórtico Espacial.

3.4. MATRIZ DE MASSA LOCAL DO ELEMENTO DE NÚCLEO

Conforme foi visto no Capítulo II, a análise estática da barra de núcleo foi construída fazendo-se o estudo prévio de cada problema (tração, flexão e torção) independentemente; só então, por superposição de efeitos, as formas finais da matriz de rigidez e do vetor nodal equivalente do núcleo estrutural foram concluídas. Diferentemente do caso estático, quando a barra está submetida dinamicamente a efeitos de torção e flexão, as equações governantes do problema tornam-se acopladas, isso requer que o problema seja tratado pela análise simultânea de todos os efeitos. Assim, parte-se então para a geração das equações de movimento desse elemento estrutural, a partir da aplicação do princípio de Hamilton.

Os campos cinemáticos suaves dos deslocamentos totais envolvendo a interação dos problemas de tração axial, flexão bidirecional e torção podem ser dados por (Vörös, 2004):

$$u_T = u - y\beta_z + z\beta_y + \omega(s)\frac{d\theta}{dx} \quad (3.75)$$

$$v_T = v + (z_t - z)\theta \quad (3.76)$$

$$w_T = w - (y_t - y)\theta \quad (3.77)$$

Onde,

s = coordenada de área setorial;

z_t e y_t = as coordenadas cartesianas do centro de torção em relação ao centro de gravidade.

Já as deformações lineares e distorções de interesse podem ser obtidas por:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y\frac{d\beta_z}{dx} + z\frac{d\beta_y}{dx} + \omega(s)\frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (3.78)$$

$$\gamma_{xy} = -\beta_z + \left(\frac{d\omega(s)}{dy} + (z_t - z) \right) \frac{d\theta}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad (3.79)$$

$$\gamma_{xz} = \beta_y + \left(\frac{d\omega(s)}{dz} - (y_t - y) \right) \frac{d\theta}{dx} + \frac{dw}{dx} \quad (3.80)$$

Convém notar que as Eqs. (3.79) e (3.80) podem ser desmembradas em componentes de flexão e torção, da seguinte forma:

$$\gamma_{xy}^F = -\beta_z(x) + \frac{dv}{dx} \text{ e } \gamma_{xy}^T = \left(\frac{d\omega(s)}{dy} + (z_t - z) \right) \frac{d\theta}{dx} \quad (3.81)$$

$$\gamma_{xz}^F = \beta_y(x) + \frac{dw}{dx} \text{ e } \gamma_{xz}^T = \left(\frac{d\omega(s)}{dz} - (y_t - y) \right) \frac{d\theta}{dx} \quad (3.82)$$

A energia potencial de deformação do núcleo pode ser obtida pela expressão:

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_x\varepsilon_x) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\tau_{xz}^F\gamma_{xz}^F + \tau_{xz}^T\gamma_{xz}^T + \tau_{xy}^F\gamma_{xy}^F + \tau_{xy}^T\gamma_{xy}^T + \sigma_x\varepsilon_x) dV \end{aligned} \quad (3.83)$$

Da lei de Hooke tem-se que,

$$\tau_{xy}^F = \kappa G \gamma_{xy}^F \quad (3.84)$$

$$\tau_{xy}^T = G \gamma_{xy}^T \quad (3.85)$$

$$\tau_{xz}^F = \kappa G \gamma_{xz}^F \quad (3.86)$$

$$\tau_{xz}^T = G \gamma_{xz}^T \quad (3.87)$$

Onde κ é o fator de forma da seção.

Substituindo as Eqs. (3.84) a (3.87) na Eq. (3.83), fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_V (\kappa G (\gamma_{xz}^F)^2 + G (\gamma_{xz}^T)^2 + \kappa G (\gamma_{xy}^F)^2 + G (\gamma_{xy}^T)^2 + E \varepsilon^2) dV \quad (3.88)$$

Substituindo as relações das Eqs. (3.81) e (3.82) na Eq. (3.88), o integrando resultante ficará em função de y, z e outros termos independentes desses. Como y e z têm origem no centróide da seção transversal orientados segundo as direções principais de inércia, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_A z dA = \int_A y dA = \int_A yz dA = \int_A \omega z dA = \int_A \omega y dA = 0; \quad I_y = \int_A z^2 dA; \\ I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_\omega = \int_A \omega^2(s) dA \end{aligned} \quad (3.89)$$

Além disso, a área setorial está referida ao centro de torção, de forma que $\omega(s)$ é área setorial principal, cuja propriedade ao ser calculada sobre toda a seção transversal resulta em:

$$\int_A \omega(s) dA = 0 \quad (3.90)$$

Após desenvolver a Eq. (3.88) e utilizando as identidades das Eqs. (3.89) e (3.90), a energia potencial pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\pi_p = & \frac{1}{2} \int_0^L EA \left\{ \frac{du}{dx} \right\}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI_z \left(\frac{d\beta_z}{dx} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI_y \left(\frac{d\beta_y}{dx} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left(\beta_y + \frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_\omega \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \\
& \frac{1}{2} \int_0^L GI_t \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Onde,

$$I_t = \left\{ \int_A \left(\frac{d\omega}{dz} - (y_t - y) \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dy} + (z_t - z) \right)^2 \right\} dA$$

Já a energia cinética é dada por:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] dV \tag{3.92}$$

Substituindo-se as Eqs. (3.75) a (3.77) na Eq. (3.92), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\pi_c = & \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{du}{dt} - y \frac{d\beta_z}{dt} + z \frac{d\beta_y}{dt} + \omega(s) \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} + (z_t - z) \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \right. \\
& \left. \left(\frac{dw}{dt} - (y_t - y) \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dV
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Assim, após o desenvolvimento da Eq. (3.93) e a incorporação das propriedades descritas nas Eqs. (3.89) e (3.90), o funcional de energia cinética fica:

$$\begin{aligned}
\pi_c = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \rho I_y \left(\frac{d\beta_y}{dt} \right)^2 + \rho I_z \left(\frac{d\beta_z}{dt} \right)^2 + \rho I_\omega \left(\frac{d^2\theta}{dxdt} \right)^2 \right] dx + \\
& \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx + \rho A \int_0^L z_t \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) dx - \\
& \rho A \int_0^L y_t \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{dw}{dt} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L I_p \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Onde,

I_p = Momento de inércia polar e vale $I_p = I_y + I_z$

Utilizando o segundo termo do princípio de Hamilton (Eq. (3.11)) e integrando por partes, fica:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} -\delta\pi_p dt = & \int_{t_1}^{t_2} - \left\{ \left[\frac{du}{dx} EA \delta u \right]_0^L - \int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} EA \delta u dx + \right. \\
& \left[EI_z \frac{d\beta_z}{dx} \delta\beta_z \right]_0^L - \int_0^L \left[EI_z \frac{d^2\beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \right] \delta\beta_z dx + \\
& \left[\kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \delta v \right]_0^L - \int_0^L \left[\kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right] \delta v dx + \\
& \left[EI_y \frac{d\beta_y}{dx} \delta\beta_y \right]_0^L - \int_0^L \left[EI_y \frac{d^2\beta_y}{dx^2} + \kappa GA \left(\beta_y + \frac{dw}{dx} \right) \right] \delta\beta_y dx + \\
& \left[\kappa GA \left(\beta_y + \frac{dw}{dx} \right) \delta w \right]_0^L - \int_0^L \left[\kappa GA \left(\frac{d\beta_y}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right] \delta w dx + \\
& \left[EI_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} \delta \frac{d\theta}{dx} \right]_0^L - EI_\omega \left[\frac{d^3\theta}{dx^3} \delta\theta \right]_0^L + \left[\frac{d\theta}{dx} GI_t \delta\theta \right]_0^L + \\
& \left. \int_0^L \left[EI_\omega \frac{d^4\theta}{dx^4} - GI_t \frac{d^2\theta}{dx^2} \right] \delta\theta dx \right\} dt
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Como a variação dos campos no contorno é nula $[\delta u]_{x=0}^{x=L} = [\delta \beta_z]_{x=0}^{x=L} = [\delta \beta_y]_{x=0}^{x=L} = [\delta \theta]_{x=0}^{x=L} = [\delta v]_{x=0}^{x=L} = [\delta w]_{x=0}^{x=L} = 0$, então a Eq. (3.95), fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} -\delta \pi_p dt = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \frac{d^2 u}{dx^2} EA \delta u dx + \right. \\ & \int_0^L \left[EI_z \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) \right] \delta \beta_z dx + \int_0^L \left[\kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right] \delta v dx + \\ & \int_0^L \left[EI_y \frac{d^2 \beta_y}{dx^2} + \kappa GA \left(\beta_y + \frac{dw}{dx} \right) \right] \delta \beta_y dx + \\ & \left. \int_0^L \left[\kappa GA \left(\frac{d\beta_y}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] \delta w dx - \int_0^L \left[EI_\omega \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right] \delta \theta dx \right\} dt \end{aligned} \quad (3.96)$$

A primeira variação da Eq. (3.94), fica:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \pi_c dt = & \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \left(\frac{du}{dt} \right) \delta \left(\frac{du}{dt} \right) dx + \int_0^L \rho I_y \left(\frac{d\beta_y}{dt} \right) \delta \left(\frac{d\beta_y}{dt} \right) dx + \right. \\ & \int_0^L \rho I_z \left(\frac{d\beta_z}{dt} \right) \delta \left(\frac{d\beta_z}{dt} \right) dx + \int_0^L \rho I_\omega \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dx + \\ & \int_0^L \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right) \delta \left(\frac{dv}{dt} \right) dx + \int_0^L \rho A \left(\frac{dw}{dt} \right) \delta \left(\frac{dw}{dt} \right) dx + \\ & \int_0^L \rho A z_t \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right) \delta \left(\frac{dv}{dt} \right) + \left(\frac{dv}{dt} \right) \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] dx - \\ & \left. \int_0^L \rho A y_t \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right) \delta \left(\frac{dw}{dt} \right) + \left(\frac{dw}{dt} \right) \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] dx + \int_0^L I_p \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dx \right\} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Integrando-se por partes a Eq. (3.97), tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \pi_c dt = \int_0^L \left[\rho A \frac{du}{dt} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{d^2 u}{dt^2} \delta u dx dt + \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\rho I_y \frac{d\beta_y}{dt} \delta\beta_y \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_y \frac{d^2\beta_y}{dt^2} \delta\beta_y dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho I_z \frac{d\beta_z}{dt} \delta\beta_z \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_z \frac{d^2\beta_z}{dt^2} \delta\beta_z dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho A \frac{dv}{dt} \delta v \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{d^2v}{dt^2} \delta v dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho A \frac{dw}{dt} \delta w \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{d^2w}{dt^2} \delta w dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho A z_t \frac{d\theta}{dt} \delta v \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A z_t \frac{d^2\theta}{dt^2} \delta v dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho A z_t \frac{dv}{dt} \delta v \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A z_t \frac{d^2v}{dt^2} \delta \theta dx dt + \\
& \int_0^L \left[-\rho A y_t \frac{d\theta}{dt} \delta w \right]_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A y_t \frac{d^2\theta}{dt^2} \delta w dx dt + \\
& \int_0^L \left[-\rho A y_t \frac{dw}{dt} \delta \theta \right]_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A y_t \frac{d^2w}{dt^2} \delta \theta dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho I_p \frac{d\theta}{dt} \delta \theta \right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_p \frac{d^2\theta}{dt^2} \delta \theta dx dt + \\
& \int_0^L \left[\rho I_\omega \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \delta \theta \right]_{t_1}^{t_2} dx - \\
& \int_0^L \left[\rho I_\omega \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \delta \theta \right]_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_\omega \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \delta \theta dx dt
\end{aligned}$$

A variação temporal dos campos no contorno é nula $[\delta u]_{t_1}^{t_2} = [\delta \beta_z]_{t_1}^{t_2} = [\delta \beta_y]_{t_1}^{t_2} = [\delta \theta]_{t_1}^{t_2} = [\delta v]_{t_1}^{t_2} = [\delta w]_{t_1}^{t_2} = 0$, então a Eq. (3.98), fica reduzida a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \pi_c dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{d^2 u}{dt^2} \delta u dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_y \frac{d^2 \beta_y}{dt^2} \delta \beta_y dx dt \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_z \frac{d^2 \beta_z}{dt^2} \delta \beta_z dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v dx dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A z_t \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta v dx dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A z_t \frac{d^2 v}{dt^2} \delta \theta dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A y_t \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta w dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A y_t \frac{d^2 w}{dt^2} \delta \theta dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_p \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta \theta dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_w \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \delta \theta dx dt
\end{aligned}$$

O trabalho das cargas externas fica:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L W dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (p \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + t \delta \theta) dx dt = \quad (3.100)$$

Somando-se as parcelas do princípio de Hamilton, Eqs. (3.96) e (3.99), com o trabalho das cargas externas (Eq. (3.100)), fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta(\pi_c - \pi_p) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta W dx = \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u \left[\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) EA - \rho A \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) + p \right] dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta v \left[\kappa GA \left(-\frac{d\beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \rho A \left(\frac{d^2 v}{dt^2} - z_t \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) + p_y \right] dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta w \left[\kappa GA \left(\frac{d\beta_y}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \rho A \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - y_t \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) + p_z \right] dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \beta_z \left[EI_z \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) - \rho I_z \left(\frac{d^2 \beta_z}{dt^2} \right) \right] dx dt +
\end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \beta_y \left[EI_y \frac{d^2 \beta_y}{dx^2} + \kappa GA \left(\beta_y + \frac{dw}{dx} \right) - \rho I_y \left(\frac{d^2 \beta_y}{dt^2} \right) \right] dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \theta \left[\left(EI_\omega \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GI_z \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + \rho A \left(z_t \frac{d^2 v}{dt^2} - y_t \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{I_p}{A} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. \rho I_\omega \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) + t \right] dx dt
\end{aligned}$$

Com as variações de δu , δv , δw , $\delta \beta_z$, $\delta \beta_y$ e $\delta \theta$, são arbitrárias, então a nulidade da Eq. (3.102) será sempre verificada se as seguintes relações forem verdadeiras:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) EA - \rho A \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) + p = 0 \\
& \kappa GA \left(-\frac{d \beta_z}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \rho A \left(\frac{d^2 v}{dt^2} - z_t \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = 0 \\
& \kappa GA \left(\frac{d \beta_y}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \rho A \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - y_t \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = 0 \\
& EI_z \frac{d^2 \beta_z}{dx^2} + \kappa GA \left(-\beta_z + \frac{dv}{dx} \right) - \rho I_z \left(\frac{d^2 \beta_z}{dt^2} \right) + p_y = 0 \\
& EI_y \frac{d^2 \beta_y}{dx^2} + \kappa GA \left(\beta_y + \frac{dw}{dx} \right) - \rho I_y \left(\frac{d^2 \beta_y}{dt^2} \right) + p_z = 0 \\
& \left(EI_\omega \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GI_z \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + \rho A \left(z_t \frac{d^2 v}{dt^2} - y_t \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{I_p}{A} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - \rho I_\omega \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - t = 0
\end{aligned} \tag{3.102}$$

As relações da Eq. (3.102) são as equações de movimento das barras de seções transversais abertas de paredes finas.

No caso da análise dinâmica dessas barras, também será uma estratégia similar àquela discutida nas seções anteriores para as demais estruturas (treliças, pórticos e grelhas), onde a aproximação dos campos no regime estático é empregada para interpolar do regime dinâmico. Assim, na Eq. (3.101) os deslocamentos (axial, transversal em y, transversal em x) e as rotações da seção transversal (de flexão em y, de flexão em z e de

torção) são aproximadas respectivamente pelos vetores das funções interpoladoras Z_i Eq. (2.29); N_i , Eqs. (2.59) a (2.63); L_i , Eqs. (2.64) a (2.66) e Q_i , Eqs. (2.168) a (2.171). Com isso, a primeira variação do funcional de energia cinética discretizado pode ser dada como:

$$\begin{aligned}
\delta\pi_c = & \int_0^L \delta\{\dot{u}_\theta\}^T [Q]^T \rho I_\omega [Q] \{\dot{u}_\theta\} dx + \int_0^L \delta\{\dot{u}_\theta\}^T [V]^T \rho I_p [V] \{\dot{u}_\theta\} dx + \\
& \int_0^L (\delta\{\dot{u}_\theta\}^T [V]^T z_t \rho A [\tilde{N}] \{\dot{u}_{fz}\} + \delta\{\dot{u}_{fz}\}^T [\tilde{N}]^T z_t \rho A [V] \{\dot{u}_\theta\}) dx - \\
& \int_0^L (\delta\{\dot{u}_\theta\}^T [V]^T y_t \rho A [\dot{\tilde{N}}] \{\dot{u}_{fy}\} + \delta\{\dot{u}_{fy}\}^T [\dot{\tilde{N}}]^T y_t \rho A [V] \{\dot{u}_\theta\}) dx + \\
& \int_{-1}^1 (\delta\{\dot{u}_a\}^T [Z]^T \rho A [Z] \{\dot{u}_a\} + \delta\{\dot{u}_{fy}\}^T [\dot{\tilde{E}}]^T \rho I_y [\dot{\tilde{E}}] \{\dot{u}_{fy}\} + \delta\{\dot{u}_{fz}\}^T [\dot{\tilde{E}}]^T \rho I_z [\dot{\tilde{E}}] \{\dot{u}_{fz}\}) J d\xi \\
& \int_{-1}^1 \delta\{\dot{u}_{fy}\}^T [\dot{\tilde{N}}]^T \rho A [\dot{\tilde{N}}] \{\dot{u}_{fy}\} J d\xi + \int_0^L \delta\{\dot{u}_{fz}\}^T [N]^T \rho A [N] \{\dot{u}_{fz}\} J d\xi
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\{\dot{u}_a\}^T &= \left\{ \frac{du_a}{dt} \right\}^T = \{\dot{u}_i \quad \dot{u}_j\} = \left\{ \frac{du_i}{dt} \quad \frac{du_j}{dt} \right\} \\
\{\dot{u}_{fy}\}^T &= \left\{ \frac{du_{fy}}{dt} \right\} = \{\dot{w}_i \quad \dot{\beta}_{yi} \quad \dot{w}_j \quad \dot{\beta}_{yj}\} = \left\{ \frac{dw_i}{dt} \quad \frac{d\beta_{yi}}{dt} \quad \frac{dw_j}{dt} \quad \frac{d\beta_{yj}}{dt} \right\} \\
\{\dot{u}_{fz}\}^T &= \left\{ \frac{du_{fz}}{dt} \right\} = \{\dot{v}_i \quad \dot{\beta}_{zi} \quad \dot{v}_j \quad \dot{\beta}_{zj}\} = \left\{ \frac{dv_i}{dt} \quad \frac{d\beta_{zi}}{dt} \quad \frac{dv_j}{dt} \quad \frac{d\beta_{zj}}{dt} \right\} \\
\{\dot{u}_\theta\}^T &= \left\{ \frac{du_\theta}{dt} \right\}^T = \left\{ \dot{\theta}_i \quad \frac{d\dot{\theta}_i}{dx} \quad \dot{\theta}_j \quad \frac{d\dot{\theta}_j}{dx} \right\} = \left\{ \frac{d\theta_i}{dt} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_i}{dx} \right) \quad \frac{d\theta_j}{dt} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_j}{dx} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Já os vetores de funções $[\tilde{N}]$ e $[\dot{\tilde{N}}]$ são as formas dimensionais com origem no nó inicial do elemento em função da coordenada x dos vetores adimensionais $[N]$ e $[\dot{N}]$ com origem no centro do elemento, vide apêndice A.

A Eq. (3.103) pode ainda ser reduzida para a seguinte forma:

$$\delta\pi_c = \int_0^L \delta\{\dot{u}_\theta\}^T [t] \{\dot{u}_\theta\} dx + \int_0^L (\delta\{\dot{u}_\theta\}^T [r] \{\dot{u}_{fz}\} + \delta\{\dot{u}_{fz}\}^T [r]^T \{\dot{u}_\theta\}) dx - \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (\delta \{\dot{u}_\theta\}^T [p] \{\dot{u}_{fy}\} + \delta \{\dot{u}_{fy}\}^T [p]^T \{\dot{u}_\theta\}) dx + \\
& \int_{-1}^1 (\delta \{\dot{u}_a\}^T [Z]^T \rho A [Z] \{\dot{u}_a\} + \delta \{\dot{u}_{fy}\}^T [\dot{E}]^T \rho I_y [\dot{E}] \{\dot{u}_{fy}\} + \delta \{\dot{u}_{fz}\}^T [\dot{E}]^T \rho I_z [\dot{E}] \{\dot{u}_{fz}\}) J d\xi \\
& \int_{-1}^1 \delta \{\dot{u}_{fy}\}^T [\dot{N}]^T \rho A [\dot{N}] \{\dot{u}_{fy}\} J d\xi + \int_0^L \delta \{\dot{u}_{fz}\}^T [N]^T \rho A [N] \{\dot{u}_{fz}\} J d\xi
\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
[t] &= \rho I_\omega \int_0^L [[Q]^T [Q]] dx + \rho I_p \int_0^L [[V]^T [V]] dx, \quad [r] = \rho A \int_0^L [V]^T [\tilde{N}] dx \quad \text{e} \\
[p] &= \rho A \int_0^L [V]^T [\dot{N}] dx
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Ou em forma indicial como:

$$t_{ij} = \rho I_\omega \int_0^L Q_i \cdot Q_j dx + \rho I_p \int_0^L V_i \cdot V_j dx, \quad r_{ij} = \rho A \int_0^L V_i \cdot \tilde{N}_j dx \quad \text{e} \quad p_{ij} = \rho A \int_0^L V_i \cdot \dot{N}_j dx \tag{3.106}$$

Neste trabalho, o cálculo das integrais da Eq. (3.106) foram obtidas analiticamente, cujos valores estão indicados no Apêndice A

Com isso, a matriz de massa pode ser construída pela superposição dos problemas independentes de tração, flexão e torção mais as parcelas de interação. Se os graus de liberdade forem ordenados conforme o discutido para o caso estático, então a matriz de massa no sistema bi-referenciado fica:

$$[M_T] = \begin{bmatrix} [m_t]_{I,I} & [m_t]_{I,II} \\ [m_t]_{II,I} & [m_t]_{II,II} \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

Onde

$$[m_t]_{I,I} = \begin{bmatrix} 2\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 + p_7 & 0 & z_t r_{11} & 0 & p_2 + p_8 & z_t r_{12} \\ 0 & 0 & q_1 + q_7 & -y_t p_{11} & q_2 + q_8 & 0 & -y_t p_{12} \\ 0 & z_t r_{11} & -y_t p_{11} & t_{11} & -y_t p_{21} & z_t r_{21} & t_{12} \\ 0 & 0 & q_2 + q_8 & -y_t p_{21} & q_5 + q_9 & 0 & -y_t p_{22} \\ 0 & p_2 + p_8 & 0 & z_t r_{21} & 0 & p_5 + p_9 & z_t r_{22} \\ 0 & z_t r_{12} & -y_t p_{12} & t_{12} & -y_t p_{22} & z_t r_{22} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$[m_t]_{I,II} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 - p_7 & 0 & z_t r_{13} & 0 & p_4 + p_8 & z_t r_{14} \\ 0 & 0 & q_3 - q_7 & -y_t p_{13} & q_4 + q_8 & 0 & -y_t p_{14} \\ 0 & z_t r_{31} & -y_t p_{31} & t_{13} & -y_t p_{41} & z_t r_{41} & t_{14} \\ 0 & 0 & -(q_4 + q_8) & -y_t p_{23} & q_6 + q_{10} & 0 & -y_t p_{24} \\ 0 & -(p_4 + p_8) & 0 & z_t r_{23} & 0 & p_6 + p_{10} & z_t r_{24} \\ 0 & z_t r_{32} & -y_t p_{32} & 2t_{23} & -y_t p_{42} & z_t r_{42} & t_{24} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$[m_t]_{II,I} = [m_t]_{I,II}^T \quad (3.110)$$

$$[m_t]_{II,II} = \begin{bmatrix} 2\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 + p_7 & 0 & z_t r_{33} & 0 & -(p_2 + p_8) & z_t r_{34} \\ 0 & 0 & q_1 + q_7 & -y_t p_{33} & -(q_2 + q_8) & 0 & -y_t p_{34} \\ 0 & z_t r_{33} & -y_t p_{33} & t_{33} & -y_t p_{43} & z_t r_{43} & t_{34} \\ 0 & 0 & -(q_2 + q_8) & -y_t p_{43} & q_5 + q_9 & 0 & -y_t p_{44} \\ 0 & -(p_2 + p_8) & 0 & z_t r_{43} & 0 & p_5 + p_9 & z_t r_{44} \\ 0 & z_t r_{34} & -y_t p_{34} & t_{43} & -y_t p_{44} & z_t r_{44} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Onde,

$$\Phi = \frac{\rho AL}{6}$$

Um procedimento análogo usado para a transformação da matriz de rigidez do sistema local bi-referenciado para o sistema unificado no centro de torção será também aplicado à matriz de massa. Isso leva a matriz dada na Eq. (3.107) ser apresentada como:

$$[\overline{M}_T] = \begin{bmatrix} [\overline{mt}]_{I,I} & [\overline{mt}]_{I,II} \\ [\overline{mt}]_{II,I} & [\overline{mt}]_{II,II} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

$$[\overline{mt}]_{I,I} = \begin{bmatrix} 2\Phi & 0 & 0 & 0 & 2z_t\Phi & -2y_t\Phi & 0 \\ 0 & p_1 + p_7 & 0 & z_t r_{11} & 0 & p_2 + p_8 & z_t r_{12} \\ 0 & 0 & q_1 + q_7 & -y_t p_{11} & q_2 + q_8 & 0 & -y_t p_{12} \\ 0 & z_t r_{11} & -y_t p_{11} & t_{11} & -y_t p_{21} & z_t r_{21} & t_{12} \\ 2z_t\Phi & 0 & q_2 + q_8 & -y_t p_{21} & 2z_t^2\Phi + q_5 + q_9 & -2y_t z_t\Phi & -y_t p_{22} \\ -2y_t\Phi & p_2 + p_8 & 0 & z_t r_{21} & -2y_t z_t\Phi & 2y_t^2\Phi + p_5 + p_9 & z_t r_{22} \\ 0 & z_t r_{12} & -y_t p_{12} & t_{12} & -y_t p_{22} & z_t r_{22} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$[\overline{mt}]_{I,II} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 & z_t\Phi & -y_t\Phi & 0 \\ 0 & p_3 - p_7 & 0 & z_t r_{13} & 0 & p_4 + p_8 & z_t r_{14} \\ 0 & 0 & q_3 - q_7 & -y_t p_{13} & q_4 + q_8 & 0 & -y_t p_{14} \\ 0 & z_t r_{31} & -y_t p_{31} & t_{13} & -y_t p_{41} & z_t r_{41} & t_{14} \\ z_t\Phi & 0 & -(q_4 + q_8) & -y_t p_{23} & z_t^2\Phi + q_6 + q_{10} & -y_t z_t\Phi & -y_t p_{24} \\ -y_t\Phi & -(p_4 + p_8) & 0 & z_t r_{23} & -y_t z_t\Phi & y_t^2\Phi + p_6 + p_{10} & z_t r_{24} \\ 0 & z_t r_{32} & -y_t p_{32} & t_{23} & -y_t p_{42} & z_t r_{42} & t_{24} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$[\overline{mt}]_{II,I} = [\overline{mt}]_{I,II}^T \quad (3.115)$$

$$[\overline{mt}]_{II,II} = \begin{bmatrix} 2\Phi & 0 & 0 & 0 & 2z_t\Phi & -2y_t\Phi & 0 \\ 0 & p_1 + p_7 & 0 & z_t r_{33} & 0 & -(p_2 + p_8) & z_t r_{34} \\ 0 & 0 & q_1 + q_7 & -y_t p_{33} & -(q_2 + q_8) & 0 & -y_t p_{34} \\ 0 & z_t r_{33} & -y_t p_{33} & t_{33} & -y_t p_{43} & z_t r_{43} & t_{34} \\ 2z_t\Phi & 0 & -(q_2 + q_8) & -y_t p_{43} & 2z_t^2\Phi + q_5 + q_9 & -2y_t z_t\Phi & -y_t p_{44} \\ -2y_t\Phi & -(p_2 + p_8) & 0 & z_t r_{43} & -2y_t z_t\Phi & 2y_t^2\Phi + p_5 + p_9 & z_t r_{44} \\ 0 & z_t r_{34} & -y_t p_{34} & t_{43} & -y_t p_{44} & z_t r_{44} & t_{44} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

3.5. TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA LOCAL PARA O GLOBAL

Convém notar que as transformações de vetores de forças no tempo e matrizes de massa são feitas de maneira análoga ao regime estático, de tal forma que se pode escrever:

$$[m_g] = [\beta]^T [m] [\beta] \quad (3.117)$$

Onde a matriz β é dada pela Eq. (2.216), a qual dever ser convenientemente adequada conforme o tipo de estrutura. Para o caso específico de núcleo, a matriz de massa a ser transformada é $[m] = [\overline{M}_T]$ dada na Eq. (3.112).

3.6. MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA

A estratégia do espalhamento das contribuições das matrizes globais de massa de cada barra na estrutura como um todo, segue uma analogia fiel ao discutido para o caso da matriz de rigidez no capítulo II, bastando trocar os respectivos valores dos coeficientes de rigidez pelos de massa. Com isso, no intuito de evitar redudâncias, a explicação meticulosa do espalhamento da matriz de massa pode ser poupada.

CAPÍTULO IV:

INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

4.1. GENERALIDADES

Neste capítulo serão discutidas as representações algébricas do solo baseado no método dos elementos de contorno, e a estratégia de acoplamento com o sistema algébrico da estrutura (baseadas no método dos elementos finitos) para se representar o comportamento final do problema de interação solo-estrutura.

Inicialmente será abordada a representação matemática do solo e só então os aspectos do acoplamento solo-estrutura para pórtico espacial sem enrijecimento por núcleo estrutural serão discutidos.

Na Figura 4.1 está representado a estrutura apoiada sobre o solo, bem como os eixos de referencia do solo e da estrutura. Grande parte da dedução matemática tomar-se-á apenas uma das sapatas da estrutura, para em seguida generalizar o procedimento para as demais. Além disso, nessa mesma figura estão indicados os sistemas globais (X, Y, Z) e (x, y, z), onde o primeiro está associado pórtico e às sapatas e o segundo sistema ao solo.

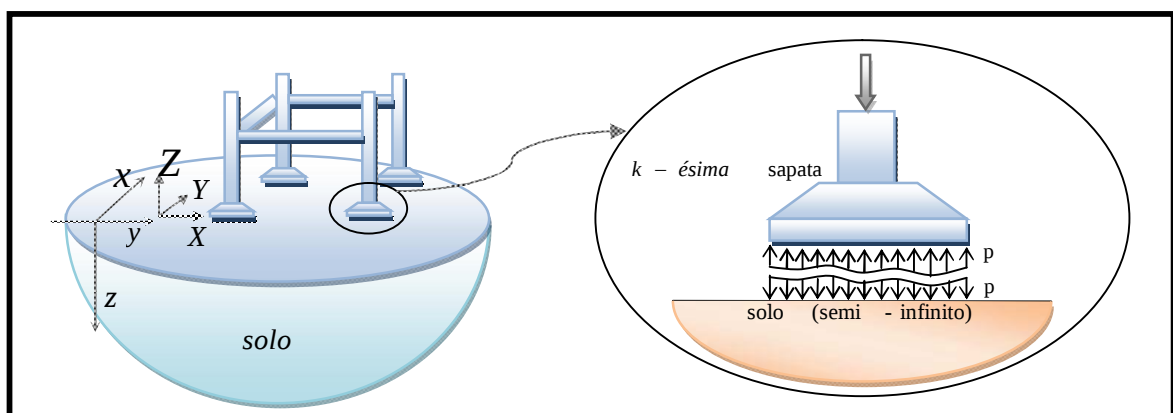


Figura 4.1 ã Interação solo-estrutura e seus sistemas de referência.

4.2. O SOLO

Para o estabelecimento das equações governantes do solo, é necessária a admissão de hipóteses para sua idealização:

- i. O solo é assumido ser um sólido elástico, semi-infinito, homogêneo e isotrópico;
- ii. As forças volumétricas são desprezadas;
- iii. As ações estáticas são verticais.

Um das possibilidades para a modelagem do solo é a representação integral desse problema incorporando a solução fundamental de Boussinesq(1885)-Cerruti (1882), caso em que as forças de volume são desprezadas, a equação integral pode ser escrita em coordenadas cartesianas (Paiva, 1993):

$$\begin{Bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \\ u_z(p) \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{xx}^*(p,s) & U_{xy}^*(p,s) & U_{xz}^*(p,s) \\ U_{yx}^*(p,s) & U_{yy}^*(p,s) & U_{yz}^*(p,s) \\ U_{zx}^*(p,s) & U_{zy}^*(p,s) & U_{zz}^*(p,s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(s) \\ p_y(s) \\ p_z(s) \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (4.1)$$

Onde,

$U_{xx}^*(p,s)$ a $U_{zz}^*(p,s)$ são as componentes da solução fundamental Boussinesq-Cerruti, em deslocamento; p_x, p_y, p_z são as componentes das forças superfície.

Γ = contorno do solo

Como o problema analisado restringe-se a carregamentos aplicados normalmente à superfície do semi-espço a Eq. (4.1) pode ser simplificada para:

$$u_z(p) = \int_{\Gamma} U_{zz}^*(p,s) p_z(s) d\Gamma(s) \quad (4.2)$$

onde

$$U_{zz}^*(p,s) = \frac{(1-\nu_s)}{2\pi G_s r}$$

G_s, ν_s = Módulo de elasticidade transversal e coeficiente do solo;

r = distância entre o ponto-campo (s) e ponto-fonte(p).

Ou na forma discretizada dada por:

$$u_z(p) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_{el}} U_{zz}^*(p,s) p_z(s) d\Omega_{el}(s) \quad (4.3)$$

Onde,

Ω_{el} = domínio do elemento de contorno;

n = número de elementos de contorno que compõem o contorno Γ .

Admitido que as forças de superfície sofram variação linear no domínio dos elementos de contorno triangulares (vide Figura 4.2.(b)). Assim, as forças de superfície distribuídas podem ser escritas como uma equação do plano:

$$p_z = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Onde,

η_i = coordenadas triangulares homogêneas associadas aos nós 1, 2 e 3.

p_i = componentes verticais de forças associadas aos nós 1, 2 e 3

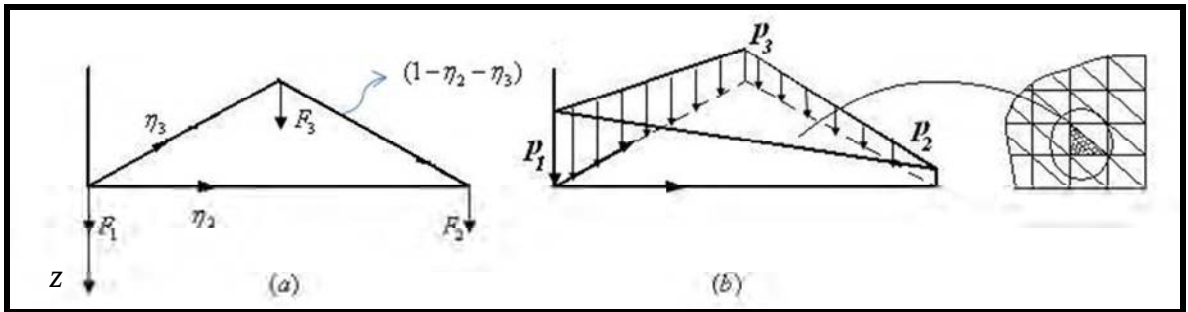


Figura 4.2 ã Forças atuantes no solo: (a) nodal equivalente, (b) distribuídas.

As coordenadas triangulares homogêneas na Eq. (4.4) podem ser escritas a partir das coordenadas cartesianas pela seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Onde,

$$A_1 = \frac{1}{D_t} (y_j - y_k) \quad (4.6)$$

$$A_2 = \frac{1}{D_t} (y_k - y_i) \quad (4.7)$$

$$A_3 = \frac{1}{D_t} (y_i - y_j) \quad (4.8)$$

$$B_1 = \frac{1}{D_t} (x_k - y_j) \quad (4.9)$$

$$B_2 = \frac{1}{D_t} (x_i - y_k) \quad (4.10)$$

$$B_3 = \frac{1}{D_t} (x_j - y_i) \quad (4.11)$$

$$C_1 = \frac{1}{D_t} (x_j y_k - x_k y_j) \quad (4.12)$$

$$C_2 = \frac{1}{D_t} (x_k y_i - x_i y_k) \quad (4.13)$$

$$C_3 = \frac{1}{D_t} (x_i y_j - x_j y_i) \quad (4.14)$$

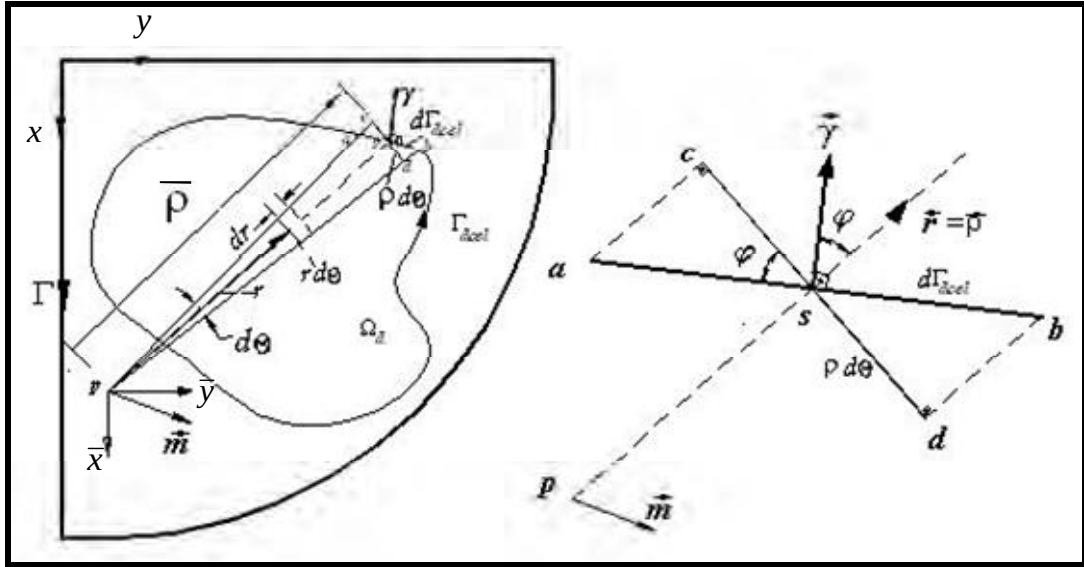


Figura 4.3 - Esquema representativo da integração sobre a célula

Através de uma translação de eixos, as coordenadas do ponto s (x_s, y_s) podem ser escritas em relação a um sistema $(\bar{x}, \bar{y})$, mostrado na Figura 4.3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Substituindo-se a Eq. (4.15) na Eq. (4.5) as forças de superfície, no sistema $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, podem ser escritas como:

$$p_z = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Onde a constante D_i é dada por:

$$D_i = A_i x_s + B_i y_s + C_i \quad (4.17)$$

Um método interessante, encontrado em Paiva (1993), é transformar a integração analítica Eq. (4.3) sobre o domínio Ω_{el} em uma integral equivalente, que requer apenas integração ao longo do contorno do elemento Γ_{el} , isto é, ao longo dos lados do triângulo.

Tal procedimento envolve em empregar o sistema polar, seguido da integração ao longo de r (raio-vetor), além de relações geométricas entre os co-senos diretores do raio-vetor e da normal ao longo do perímetro dos lados do elemento de contorno, vide Figura 4.3. O método é mostrado a seguir:

Transformando-se o sistema cartesiano local $(\bar{x}, \bar{y})$ em um sistema de coordenadas polares (r, Θ) , as forças de superfície podem ser escritas como:

$$p_z = \begin{bmatrix} r \cos \Theta & r \sin \Theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

E a correção diferencial de área do sistema cartesiano para o polar fica:

$$d\Omega_{el} = r dr d\theta \quad (4.19)$$

Com isso, a representação integral (5.18) para um elemento k pode ser escrita como:

$$h_k = \{fat\}^t \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Onde,

$$\{fat\}^t = \int_0^{\bar{\rho}} \int_0^{\Theta} \begin{bmatrix} r \cos \Theta & r \sin \Theta & 1 \end{bmatrix} U_{33}^* r dr d\theta \quad (4.21)$$

Particularizando-se a Eq. (4.21) ao longo do raio para o problema fundamental de Boussinesq e calculando-se a integral ao longo do raio vetor r , tem-se que:

$$\{fat\}^t = \frac{1-\nu_s}{4\pi G_s} \left[\int_0^{\bar{\rho}} \bar{\rho}^2 \cos \Theta d\Theta \quad \int_0^{\bar{\rho}} \bar{\rho}^2 \sin \Theta d\Theta \quad \int_0^{\bar{\rho}} 2\bar{\rho} d\Theta \right] \quad (4.22)$$

Através de relações de geometria plana, mostradas na Figura 4.3, o diferencial angular $d\Theta$ pode ser escrito em função do diferencial de contorno do elemento $d\Gamma_{dcel}$, isto é:

$$d\Theta = \cos \varphi \frac{d\Gamma_{dcel}}{\bar{\rho}} \quad (4.23)$$

Onde:

$$\cos \varphi = \left(\gamma_x \frac{d\bar{\rho}}{dx} + \gamma_y \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right)$$

γ_x, γ_y = são os versores de direção da normal ao contorno do elemento de contorno.

R = é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

Finalmente, substituindo-se a Eq. (4.23) em (4.22) e depois na Eq. (4.20), obtém-se a integração equivalente em função apenas do contorno do célula i , isto é:

Após essas manipulações algébricas, a Eq. (4.3) passa a ser escrita como:

$$h_k = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Onde as funções g_i valem:

$$g_i = \int_{\Gamma_{el}} \frac{1-\nu_s}{4\pi G_s} [A_i \bar{\rho} \cos \Theta + B_i \bar{\rho} \sin \Theta + 2D_i] \cos \varphi d\Gamma_{el} \quad (4.25)$$

Onde,

$\bar{\rho}$ = distância entre o ponto fonte e o ponto campo no perímetro;

Após efetuar o cálculo das integrais indicadas na Eq. (4.25) para todos os elementos, obtém-se a representação algébrica do solo dada por:

$$\{\bar{U}_s\} = [\bar{G}]\{\bar{P}_s\} \quad (4.26)$$

Onde,

$\{\bar{P}_s\}, \{\bar{U}_s\}$ = vetores que contêm as forças de superfície e os deslocamentos de todos os nós dos elementos de contorno discretizados na superfície do solo.

A Eq. (4.26) pode ser escrita como:

$$\{\bar{P}_s\} = [T]\{\bar{U}\} \quad (4.27)$$

Onde,

$$[T] = [\bar{G}]^{-1} \quad (4.28)$$

A Eq. (4.27) na forma explícita é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_{s1} \\ \bar{P}_{s2} \\ \vdots \\ \bar{P}_{s_{n-1}} \\ \bar{P}_{s_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n-1} & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{s1} \\ \bar{u}_{s2} \\ \vdots \\ \bar{u}_{s_{n-1}} \\ \bar{u}_{s_n} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

O modelo com translação pura pode ser associado a casos de pilares predominantes solicitado à compressão, cujo centro de carga coincide com o centro de gravidade de cada sapata rígida. Nesse caso, todos os deslocamentos verticais pertencentes à mesma sapata possuem os mesmos valores, adotando $\bar{u}_{sp}$ para o p-ésimo pilar, a relação (4.29) fica reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_{s1} \\ \bar{p}_{s2} \\ \vdots \\ \bar{p}_{s_{n-1}} \\ \bar{p}_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} t_{1j} & \sum_{j=n_{1+1}}^{n_2} t_{1j} & \cdots & \sum_{j=n_{k+1}}^{n_p} t_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n_1} t_{2j} & \sum_{j=n_{1+1}}^{n_2} t_{2j} & & \sum_{j=n_{k+1}}^{n_p} t_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_1} t_{n-1,j} & \sum_{j=n_{1+1}}^{n_2} t_{n-1,j} & & \sum_{j=n_{k+1}}^{n_p} t_{n-1,j} \\ \sum_{j=1}^{n_1} t_{nj} & \sum_{j=n_{1+1}}^{n_2} t_{nj} & & \sum_{j=n_{k+1}}^{n_p} t_{nj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{sp1} \\ \bar{u}_{sp2} \\ \vdots \\ \bar{u}_{spp} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Onde,

$n_1, n_2, \dots, n_p$ = são respectivamente o número de nós pertencentes a primeira e a p-ésima sapata;

$\bar{u}_{sp1}, \dots, \bar{u}_{spp}$ = são os deslocamentos verticais da base do pilar na p-ésima sapata.

Na maioria dos casos dos problemas de edifícios, a estrutura de fundação está submetida tanto a translação quanto à rotação, Figura 4.4. Quando a p-ésima sapata é admitida rígida, seus movimentos de corpo rígido impõem à superfície sapata-solo deslocamentos verticais sempre contidos em um plano. Assim, a cinemática vertical de todos os pontos do plano podem ser descritos a partir de uma translação e duas rotações referenciadas apenas a um ponto dito *mestre*. Neste caso, o nó-mestre da sapata p-ésima é tomado como o nó da ligação sapata-pilar. Com isso, o deslocamento vertical $\bar{u}_{sp}(y, z)$ de um ponto $\bar{U}$ do solo na região de interface pode ser escrito como:

$$u_{sp\alpha}(x, y) = u_{spp} - (y - y_{pp})\theta_{xpp} + (x - x_{pp})\theta_{ypp} \quad (4.31)$$

Onde,

$u_{spp}, \theta_{ypp}, \theta_{xpp}$ = deslocamento vertical, rotação em z, rotação em y do nó-mestre;

x_{pp}, y_{pp} = coordenadas do nó-mestre, que é o de locação do pilar.

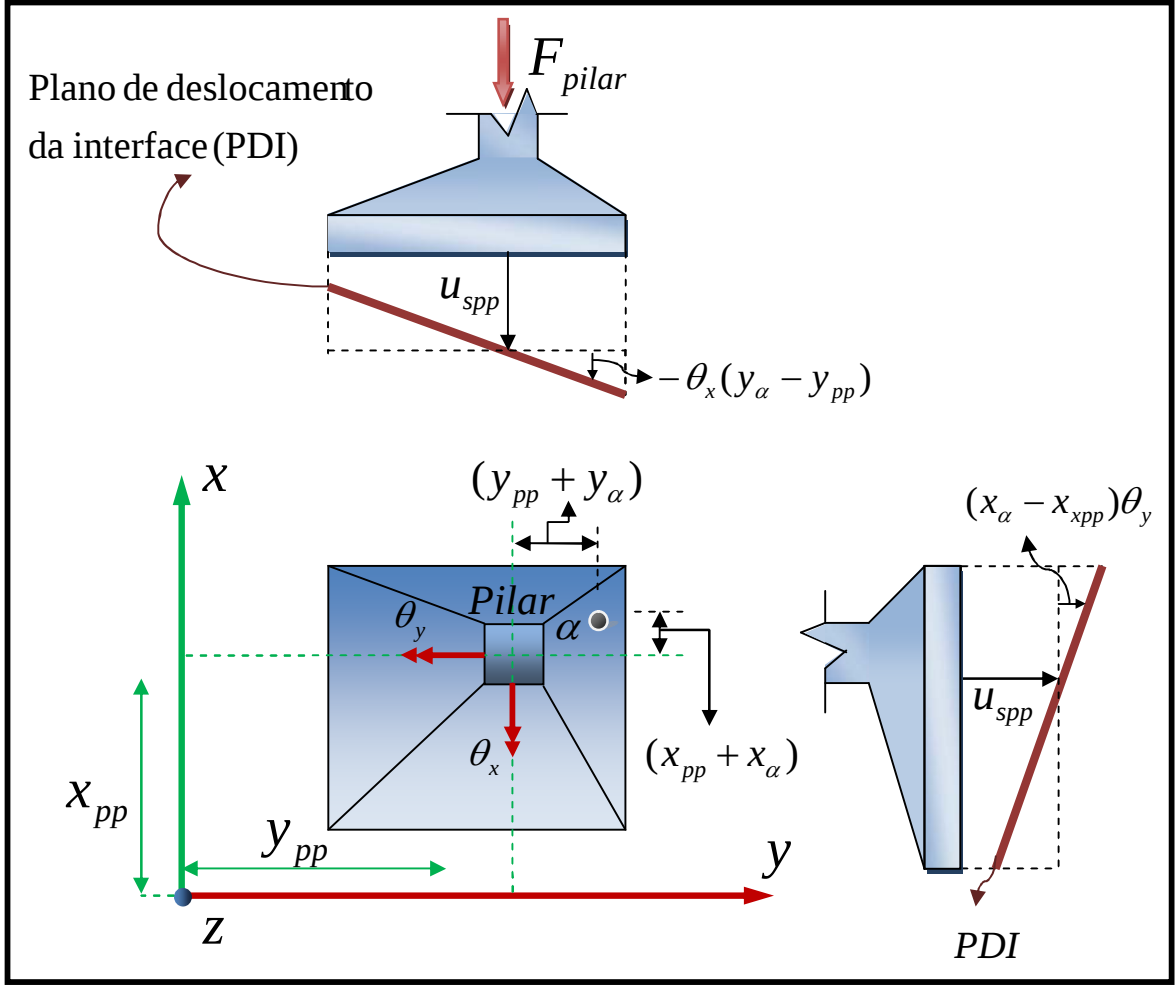


Figura 4.4 Interface submetida aos efeitos de rotação e translação

Escrevendo-se a Eq. (4.31) para todos os pontos discretizados em todas interfaces sapata-solo, fica:

$$\{\bar{U}_s\} = [D]\{\dot{U}_s\} \quad (4.32)$$

Onde,

$$\{\dot{U}_s\}^T = \{\bar{u}_{p1} \quad \bar{\theta}_{yp1} \quad \bar{\theta}_{xp1} \quad \bar{u}_{p2} \quad \bar{\theta}_{xp2} \quad \bar{\theta}_{yp2} \quad \dots \quad \bar{u}_{pn} \quad \bar{\theta}_{xpn} \quad \bar{\theta}_{ypn}\} \text{ com seu } p\text{-ésimo sub-vetor dado por } \{\dot{U}_{sp}\}^T = \{\bar{u}_{ppk} \quad \bar{\theta}_{xpp} \quad \bar{\theta}_{ypp}\}.$$

Já a matriz $[D]$ formada pelas contribuições de interfaces solo- sapatas é dada por:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & & [0] \\ [0] & [D_2] & & [0] \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ & & [D_p] & \\ \vdots & & & \vdots \\ [0] & [0] & \vdots & [D_n] \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Onde sua sub-matriz para a p-ésima interface é:

$$[D_p] = \begin{bmatrix} 1 & -x_{pp} + x_{\lambda+1} & y_{pp} - y_{\lambda+1} \\ 1 & -x_{pp} + x_{\lambda+2} & y_{pp} - y_{\lambda+2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & -x_{pp} + x_{\lambda+nk-1} & y_{pp} - y_{\lambda+nk-1} \\ 1 & -x_{pp} + x_{\lambda+nk} & y_{pp} - y_{\lambda+nk} \end{bmatrix}$$

Onde $\lambda = \sum_{j=1}^k n_j$ mostra a posição do i-ésimo nó da k-ésima sapata. n_j indica a quantidade de nós da j-ésima sapata.

Substituindo-se a Eq. (4.32) na Eq. (4.27), fica:

$$\{\bar{P}_s\} = [H]\{\dot{U}_s\} \quad (4.34)$$

Onde,

$$[H] = [T]\{D\}$$

4.2. ACOPLAMENTO PÓRTICO-SOLO

Neste trabalho, a interação solo-placa, composta por sistemas reativos e descrição cinemática, pode ser representada matematicamente a partir das seguintes hipóteses:

- i. O contato entre a sapata rígida e a superfície do solo é ideal (não há deslocamento relativo em nenhum ponto da superfície de interação);

- ii. Compatibilização apenas dos graus de liberdade de deslocamentos e forças verticais;
- iii. Como o elemento estrutural de fundação é rígido, a cinemática dos pontos da interface sapata-solo desdobrar-se-á em duas descrições:
- iv. Translação vertical pura (caso de carregamento centrado);
- v. Translação com rotação (carregamento excêntrico);
- vi. Cada fundação (sapata) suporta um único pilar do pórtico.

Quando as contribuições de todos os elementos finitos da matriz de rigidez em coordenadas locais de uma barra de pórtico espacial forem computadas, o sistema algébrico do pórtico, incorporando as forças reativas do solo atuantes nos nós de interface pórtico-solo, fica:

$$[K_{est}]\{U_{est}\} = \{F\} \quad (4.35)$$

Onde,

$$\{F\} = \{F_{est}\} - \{F_s\}$$

Sendo

$\{F_{est}\}, \{F_s\}$ = os respectivos vetores de forças associadas às ações externas aplicadas e as forças reativas do solo.

Uma das primeiras etapas do acoplamento MEC-MEF requer que o vetor das forças de superfície $\{\bar{P}_s\}$ distribuídas em área sejam transformadas em um vetor (ordem 3) de forças nodais equivalentes concentradas $\{\bar{F}_s\}$ compatíveis com o vetor de forças do MEF, que pode ser descrita pela seguinte relação:

$$\{\bar{F}_s\} = [Q][\bar{P}_s] \quad (4.36)$$

Onde,

$[Q]$ = matriz de transformação retangular de ordem $(n \times n)$, com n sendo o número total de nós na interface solo-sapata.

A forma explícita da Eq. (4.36) fica:

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \vdots \\ \bar{f}_{n-1} \\ \bar{f}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,n-1} & q_{1n} \\ q_{11} & q_{11} & & q_{2,n-1} & q_{2,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & & q_{n-1,n-1} & q_{n-1,n} \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,n-1} & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_{s1} \\ \bar{p}_{s2} \\ \vdots \\ \bar{p}_{s_{n-1}} \\ \bar{p}_{sn} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Os elementos da matriz da Eq. (4.37) são formados e posicionados a partir de acúmulo das contribuições de cada elemento de contorno, respeitando-se a conectividade dos nós α, β, γ . (vide Figura 4.5). A transformação das forças distribuídas em forças nodais equivalentes concentradas pode ser obtida empregado-se o conceito de trabalho de forças externas. Como tanto as forças como os deslocamentos no domínio do k-ésimo elemento são lineares, a matriz de transformação desse elemento fica, Mendonca(1997):

$$[Q_k] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Onde

A = área do k-esimo elemento.

Para a montagem da matriz de transformação global, as contribuições Eq. (4.38) devem ser convenientemente espalhadas. A primeira linha fica: $q_{\alpha\alpha} = q_{\alpha\alpha} + A/6$, $q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} + A/12$, $q_{\alpha\gamma} = q_{\alpha\gamma} + A/12$; para segunda linha: $q_{\beta\alpha} = q_{\beta\alpha} + A/12$, $q_{\beta\beta} = q_{\beta\beta} + A/6$, $q_{\beta\gamma} = q_{\beta\gamma} + A/12$; e finalmente, para a última linha resulta em: $q_{\gamma\alpha} = q_{\gamma\alpha} + A/12$, $q_{\gamma\beta} = q_{\gamma\beta} + A/12$, $q_{\gamma\gamma} = q_{\gamma\gamma} + A/6$.

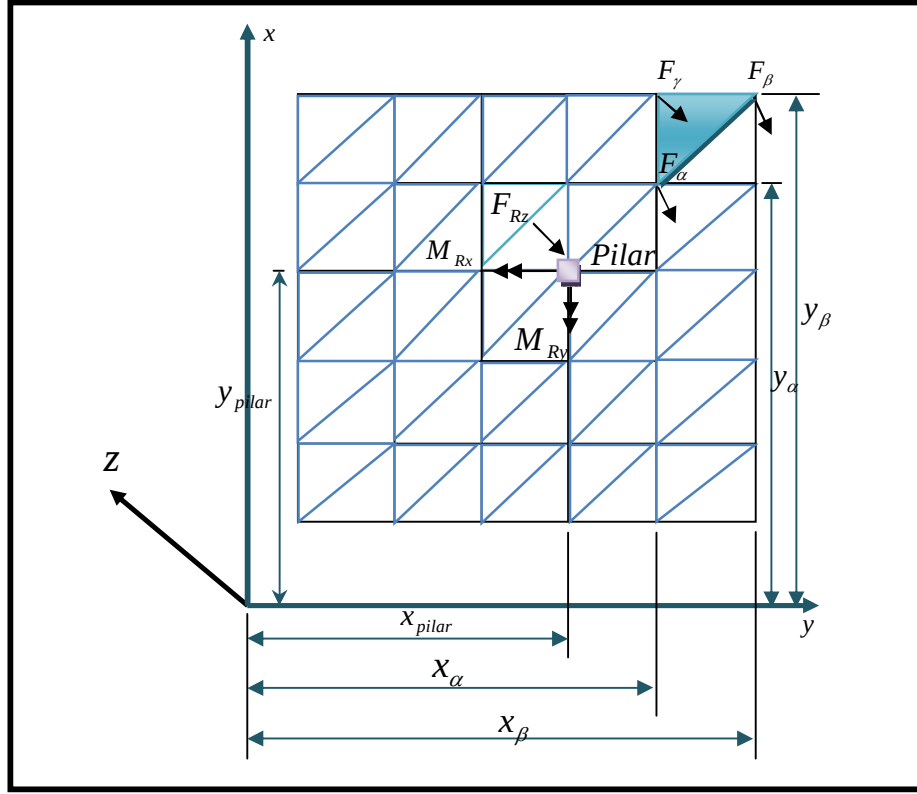


Figura 4.5 ã Forças reativas na sapata

Substituindo-se a Eq. (4.32) ou a Eq. (4.34) na Eq. (4.36), resulta em:

$$\{\bar{F}_s\} = [R]\{\dot{U}_s\} \quad (4.39)$$

Onde $\{R\} = [Q]\{H\}$ e os sub-vetores são dados por:

$$\{U_{sp}\}^T = \{0 \quad 0 \quad \bar{u}_{pp} \quad \bar{\theta}_{xpp} \quad \bar{\theta}_{ypp} \quad 0\} \quad (4.40)$$

Na Figura 4.5 está indicada a contribuição das forças atuantes e um k-ésimo elemento da p-ésima interface para as forças e momentos resultantes no nó-mestre pode ser dado como:

$$\begin{Bmatrix} F_R \\ M_{Rx} \\ M_{Ry} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -y_{pp} + y_\alpha & -y_{pp} + y_\beta & -y_{pp} + y_\gamma \\ x_{pp} - x_\alpha & x_{pp} - x_\alpha & x_{pp} - x_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \\ F_\gamma \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

As forças resultantes do solo, Eq. (4.39), em cada sapata produzem individualmente resultantes de força e momentos nos respectivos nós-mestres (ligação sapata-pilar), podem ser re-escrita como:

$$\{\dot{\mathbf{F}}_s\} = [\dot{\mathbf{R}}]\{\dot{\mathbf{U}}_s\} \quad (4.42)$$

$$\text{onde } [\dot{\mathbf{R}}] = [\mathbf{C}][\mathbf{R}]$$

A forma explícita de $[\mathbf{C}]$ na Eq. (4.42) fica:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} [C_1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [C_2] & & [0] \\ \vdots & & & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [C_p] \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\text{Onde a submatriz do p-ésima sapata é } [C_p] = [D_p]^T$$

Já que o número de graus de liberdade no nó de pórtico (três translações e três rotações) e aqueles definidos na ligação pilar-sapata (translação vertical e duas rotações) são diferentes, linhas e colunas de zeros devem ser convenientemente inseridos na Eq. (4.42) para promover a harmonização de ordens, resultando em:

$$\{\mathbf{F}_s\} = [\dot{\mathbf{R}}]\{\mathbf{U}_s\} \quad (4.44)$$

Onde os subvetores associados ao nó-mestre da sapata p-ésima e ao k-ésimo nó do pórtico fica, vide Figura 4.5:

$$\{\mathbf{U}_{sp}\}^T = \{0 \quad 0 \quad \bar{u}_{pp} \quad \bar{\theta}_{xpp} \quad \bar{\theta}_{ypp} \quad 0\}$$

$$\{\mathbf{F}_{sp}\}^T = \{0 \quad 0 \quad \bar{F}_{pp} \quad \bar{M}_{xpp} \quad \bar{M}_{ypp} \quad 0\}$$

$$\{\mathbf{U}_k\}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\}$$

$$\{\mathbf{F}_k\}^T = \{f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6\}$$

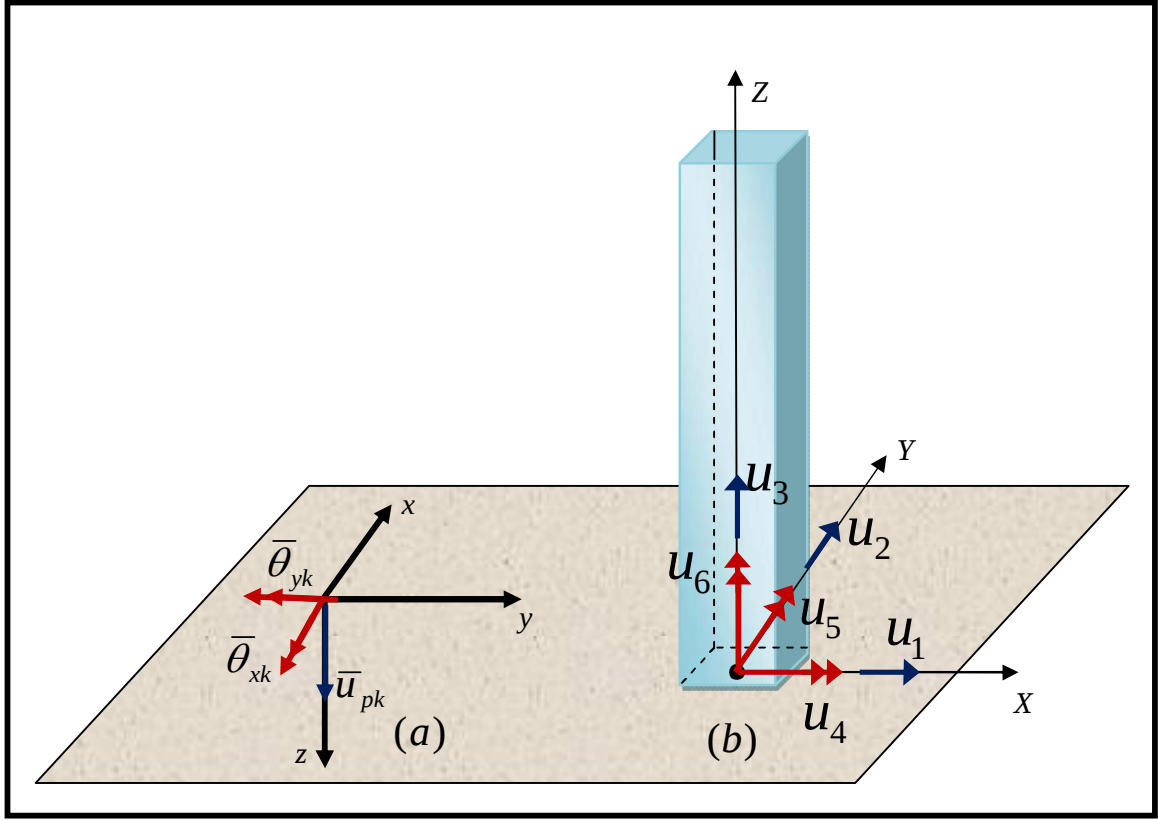


Figura 4.6 ã Representação dos graus de liberdade: (a) solo, (b) estrutura

Para montar o sistema final de equações para o problema de interação pórtico-solo, é necessário acoplar as contribuições oriundas dessas partes. Isto é feito a partir da compatibilização de deslocamentos e de equilíbrio de forças em cada nó de ligação pórtico-sapata. Como a carga descarregada pelo pilar foi tomada vertical descendente, isto gera no nó-mestre valores negativos para o vetor nodal do pórtico no sistema XYZ. No entanto, para o solo, o deslocamento vertical descendente é positivo no sistema xyz. Assim, as relações de acoplamento ficam:

$$\bar{u}_{pp} = -u_3; \bar{\theta}_{ypp} = -u_4; \bar{\theta}_{xpp} = -u_5 \quad (4.45)$$

$$\bar{F}_{pp} = f_3; \bar{M}_{ypp} = f_4; \bar{M}_{xpp} = f_5 \quad (4.46)$$

Combinando-se as Eqs. (4.35), (4.44), (4.45) e (4.46):

$$[K_T]\{U_{est}\} = \{F_{est}\} \quad (4.47)$$

Onde,

$$[K_T] = [K]_{est} + [K_s]$$

Com $[K_s]$ sendo formada pelo espalhamento conveniente da matriz $\begin{bmatrix} \dot{E} \\ R \end{bmatrix}$ nos graus de liberdade da estrutura aporticada.

CAPÍTULO V:

A LINGUAGEM JAVA E O APLICATIVO PARA ESTRUTURAS RETICULADAS ã SAPROMS NET

5.1 GENERALIDADES

A Sun criou uma equipe (conhecido como Green Team) para desenvolver inovações tecnológicas em 1992. Esse time foi liderado por James Gosling, considerado o pai do Java. O time voltou com a idéia de criar um interpretador para pequenos dispositivos, facilitando a reescrita de software para aparelhos eletrônicos, como vídeo cassete, televisão e aparelhos de TV a cabo. (Deitel, 2004)

A idéia não deu certo. Tentaram fechar diversos contratos com grandes fabricantes de eletrônicos, como Panasonic e outras, mas não houve êxito devido ao conflito de interesses. Hoje, sabemos que o Java domina o mercado de aplicações para celulares com mais de 2,5 bilhões de dispositivos compatíveis, porém em 1994 ainda era muito cedo para isso.

Com o advento da web, a Sun percebeu que poderia utilizar a idéia criada em 1992 para rodar pequenas aplicações dentro do browser. A semelhança era que na internet havia uma grande quantidade de sistemas operacionais e browsers, e com isso seria grande vantagem poder programar numa única linguagem, independente da plataforma. Foi aí que o Java 1.0 foi lançado: focado em transformar o browser de apenas um cliente fino (thin client ou terminal burro) para uma aplicação que possa também realizar operações, não apenas renderizar html.

Atualmente os applets realmente não são o foco da Sun. É curioso notar que a tecnologia Java nasceu com um objetivo em mente, foi lançado com outro, mas, no final, decolou mesmo no desenvolvimento de aplicações do lado do servidor.

5.2. CARACTERÍSTICAS DA LINGUAGEM JAVA

Java é uma linguagem de programação orientada a objetos, independente de plataforma. Atualmente, é uma das linguagens mais utilizadas para o desenvolvimento de sistemas, e pode ser obtida gratuitamente no site da Sun (www.sun.com). Java é tanto compilada como interpretada: o compilador transforma o programa em bytecodes, que consiste em um tipo de código de máquina específico da linguagem Java; o interpretador, disponível na JVM (Java Virtual Machine) que pode ser instalada em qualquer plataforma, transforma os bytecodes em linguagem de máquina para execução, sem que seja necessário compilar o programa novamente (Manssour, 2003).

Em uma linguagem de programação convencional como C e Pascal, o programa é compilado com base nas bibliotecas de um determinado sistema operacional, vide Figura 5.. O código fonte é compilado para uma plataforma e sistema operacional específicos. Muitas vezes, o próprio código fonte é desenvolvido visando uma única plataforma.

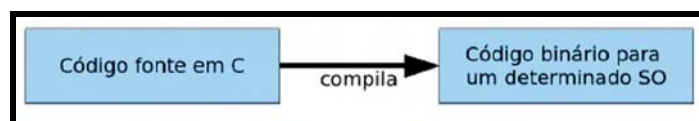


Figura 5.1 ã Esquema de um compilador de uma linguagem convencional

Esse código executável (binário) resultante será executado pelo sistema operacional e, por esse motivo, ele está direcionado para o sistema operacional em questão. Isso implica que deverá haver um código executável do software para cada sistema operacional, ou seja, ele deverá ser reescrito e compilado levando em consideração as particularidades de cada sistema operacional.

O Java se utiliza do conceito de máquina virtual, onde existe entre o sistema operacional e a aplicação uma camada extra, responsável por ótraduzirô - mas não apenas isso - o que sua aplicação deseja fazer para as respectivas chamadas do sistema operacional onde ela está rodando no momento, conforme é mostrado na Figura 5.1.

Dessa forma, a maneira como uma janela é aberta no Linux é a mesma como no Windows ou em qualquer outro sistema operacional, de forma que o usuário ganha independência do sistema operacional, ou seja, independência de plataforma em geral, pois

não é preciso se preocupar em qual sistema operacional a aplicação está rodando, nem o tipo de hardware, nem configurações.

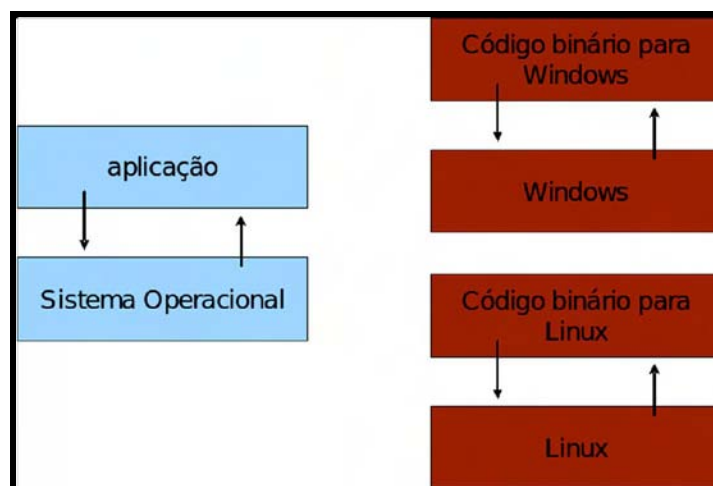


Figura 5.2 Diagrama esquemático da máquina virtual

A máquina virtual é um conceito bem mais amplo que o de um interpretador. Como o próprio nome diz, uma máquina virtual é como um computador imaginário, tem tudo que um computador tem. Em outras palavras, ela é responsável por gerenciar memória e threads, a pilha de execução, etc.

Para executar programas Java é utilizado o JRE (Java Runtime Environment), que normalmente é instalado junto com as versões mais recentes dos navegadores para Internet, para possibilitar a execução de applets.

A API básica engloba os pacotes que contêm as classes responsáveis pelas funcionalidades de entrada e saída, interface gráfica, coleções, entre outras. Além disso, existe a Java Standard Extension API, que inclui outros pacotes, tais como acesso a banco de dados e o Java Media Framework, que suporta tecnologias gráficas e multimídia. Java 3D é um dos componentes deste pacote (Manssour, 2003).

5.1.1 Programação Orientada a Objetos

Programação orientada a objetos (doravante abreviada para POO) é uma metodologia de programação desenvolvida com o objetivo de suprir as deficiências encontradas na metodologia convencional de programação algorítmica (ou procedimental). Para entender melhor a necessidade da introdução do novo paradigma de POO e as

diferenças entre este paradigma e a metodologia convencional, é conveniente rever os fundamentos de programação algorítmica (Oliveira, 2002).

Em programação algorítmica, a ênfase, conforme o nome sugere, é a construção de algoritmos. Usualmente, utiliza-se uma abordagem de refinamentos sucessivos para dividir um problema complexo em subproblemas cada vez simples. Quando se atinge um grau de complexidade adequado para cada um destes subproblemas, os mesmos são codificados em forma de unidades de programa denominadas procedimentos, sub-rotinas ou funções, dependendo da linguagem de programação escolhida. Estas unidades de programa podem ainda ser agrupadas em unidades maiores denominadas módulos. Assim, o programa resultante consiste basicamente de uma coleção de unidades que se comunicam entre si para prover a funcionalidade do programa (Oliveira, 2002).

A idéia básica que norteia POO é a combinação de dados e funções que atuam sobre estes dados numa única entidade de programa. Em Java, os itens de dados que compõem um objeto são denominados campos e as funções que atuam sobre estes dados são denominados métodos. Esta combinação de dados e funções (i.e., campos e métodos) numa única entidade é denominada encapsulamento e a entidade em si é denominada objeto. Usualmente, os métodos que fazem parte de um objeto provêm a única forma de acesso aos seus elementos de dados. Isto é, os dados que constituem um objeto não podem usualmente ser acessados diretamente, apenas indiretamente por meio de suas funções constituintes. Esta forma de acesso, denominada ocultação de informação, previne alterações acidentais de dados e facilita a manutenção e depuração dos programas, pois tem-se a garantia de que apenas os métodos que constituem um objeto podem modificar seus dados; nenhuma outra função do programa tem esta capacidade. Tipicamente, um programa que segue o paradigma POO consiste de vários objetos que se comunicam entre si utilizando seus métodos constituintes (Sun Microsystems, 2010).

5.1.2 Definições de Classes

Antes de se definir um objeto, é necessário que seus componentes (dados e funções) sejam especificados. A classe é o mecanismo de Java que provê meios para encapsulamento e ocultação de informação necessários para definição de um objeto (ou, mais precisamente de uma categoria de objetos). Este mecanismo tem ainda propriedades,

tais como herança e polimorfismo, que facilitam o reuso de software. Estas facilidades adicionais serão vistas mais adiante.

5.1.3 Objetos

Objetos são instâncias de classes. É através deles que (praticamente) todo o processamento ocorre em sistemas implementados com linguagens de programação orientadas a objetos. O uso racional de objetos, obedecendo aos princípios associados à sua definição conforme estabelecido no paradigma de desenvolvimento orientado a objetos, é chave para o desenvolvimento de sistemas complexos e eficientes.

Um objeto é um elemento que representa, no domínio da solução, alguma entidade (abstrata ou concreta) do domínio de interesse do problema sob análise. Objetos similares são agrupados em classes.

No paradigma de orientação a objetos, tudo pode ser potencialmente representado como um objeto. Sob o ponto de vista da programação orientada a objetos, um objeto não é muito diferente de uma variável normal. Por exemplo, quando define-se uma variável do tipo `int` em uma linguagem de programação como C ou Java, essa variável tem:

- Um espaço em memória para registrar o seu estado (valor);
- Um conjunto de operações que podem ser aplicadas a ela, através dos operadores definidos na linguagem que podem ser aplicados a valores inteiros.

Da mesma forma, quando se cria um objeto, esse objeto adquire um espaço em memória para armazenar seu estado (os valores de seu conjunto de atributos, definidos pela classe) e um conjunto de operações que podem ser aplicadas ao objeto (o conjunto de métodos definidos pela classe) (Oliveira, 2002).

Um programa orientado a objetos é composto por um conjunto de objetos que interagem através de ótrocas de mensagens. Na prática, essa troca de mensagem traduz-se na aplicação de métodos a objetos.

As técnicas de programação orientada a objetos recomendam que a estrutura de um objeto e a implementação de seus métodos devem ser tão privativos como possível. Normalmente, os atributos de um objeto não devem ser visíveis externamente. Da mesma forma, de um método deve ser suficiente conhecer apenas sua especificação, sem necessidade de saber detalhes de como a funcionalidade que ele executa é implementada. Encapsulação é o princípio de projeto pelo qual cada componente de um programa deve

agregar toda a informação relevante para sua manipulação como uma unidade (uma cápsula). Aliado ao conceito de ocultamento de informação é um poderoso mecanismo da programação orientada a objetos.

Ocultamento da informação é o princípio pelo qual cada componente deve manter oculta sob sua guarda uma decisão de projeto única. Para a utilização desse componente, apenas o mínimo necessário para sua operação deve ser revelado (tornado público).

Na orientação a objetos, o uso da encapsulação e ocultamento da informação recomenda que a representação do estado de um objeto deve ser mantida oculta. Cada objeto deve ser manipulado exclusivamente através dos métodos públicos do objeto, dos quais apenas a assinatura deve ser revelada.

O conjunto de assinaturas dos métodos públicos da classe constitui sua interface operacional. Dessa forma, detalhes internos sobre a operação do objeto não são conhecidos, permitindo que o usuário do objeto trabalhe em um nível mais alto de abstração, sem preocupação com os detalhes internos da classe. Essa facilidade permite simplificar a construção de programas com funcionalidades complexas, tais como interfaces gráficas ou aplicações distribuídas.

5.1.4 Herança

O conceito de encapsular estrutura e comportamento em um tipo não é exclusivo da orientação a objetos; particularmente, a programação por tipos abstratos de dados segue esse mesmo conceito. O que torna a orientação a objetos única é o conceito de herança.

Herança é um mecanismo que permite que características comuns a diversas classes sejam fatoradas em uma classe base, ou superclasse. A partir de uma classe base, outras classes podem ser especificadas. Cada classe derivada ou subclasse apresenta as características (estrutura e métodos) da classe base e acrescenta a elas o que lhes for definido de particularidade (Sun Microsystems, 2006).

Há várias formas de relacionamentos em herança:

Extensão: a subclasse estende a superclasse, acrescentando novos membros (atributos e/ou métodos). A superclasse permanece inalterada, motivo pelo qual este tipo de relacionamento é normalmente referenciado como herança estrita.

Especificação: a superclasse especifica o que uma subclasse deve oferecer, mas não implementa nenhuma funcionalidade. Diz-se que apenas a interface (conjunto de especificação dos métodos públicos) da superclasse é herdada pela subclasse. Combinação

de extensão e especificação: a subclasse herda a interface e uma implementação padrão de (pelo menos alguns de) métodos da superclasse. A subclasse pode então redefinir métodos para especializar o comportamento em relação ao que é oferecido pela superclasse, ou ter que oferecer alguma implementação para métodos que a superclasse tenha declarado, mas não implementado. Normalmente, este tipo de relacionamento é denominado herança polimórfica. A última forma é, sem dúvida, a que mais ocorre na programação orientada a objetos. Algumas modelagens introduzem uma forma de herança conhecida como contração. Contração é uma variante de herança onde a subclasse elimina métodos da superclasse com o objetivo de criar uma óclasse mais simples. A eliminação pode ocorrer pela redefinição de métodos com corpo vazio. O problema com este mecanismo é que ele viola o princípio da substituição, segundo o qual uma subclasse deve poder ser utilizada em todos os pontos onde a superclasse poderia ser utilizada. Se a contração parece ser uma solução adequada em uma hierarquia de classes, provavelmente a hierarquia deve ser re-analisada para detecção de inconsistências. De modo geral, o mecanismo de contração deve ser evitado.

5.1.5 Polimorfismo

Polimorfismo é o princípio pelo qual duas ou mais classes derivadas de uma mesma superclasse podem invocar métodos que têm a mesma identificação (assinatura), mas comportamentos distintos, especializados para cada classe derivada, usando para tanto uma referência a um objeto do tipo da superclasse. Esse mecanismo é fundamental na programação orientada a objetos, permitindo definir funcionalidades que operem genericamente com objetos, abstraindo-se de seus detalhes particulares quando esses não forem necessários. Para que o polimorfismo possa ser utilizado, é necessário que os métodos que estejam sendo definidos nas classes derivadas tenham exatamente a mesma assinatura do método definido na superclasse; nesse caso, está sendo utilizado o mecanismo de redefinição de métodos. Esse mecanismo de redefinição é muito diferente do mecanismo de sobrecarga de métodos, onde as listas de argumentos são diferentes. No caso do polimorfismo, o compilador não tem como decidir qual o método que será utilizado se o método foi redefinido em outras classes - afinal, pelo princípio da substituição um objeto de uma classe derivada pode estar sendo referenciado como sendo um objeto da superclasse. Se esse for o caso, o método que deve ser selecionado é o da

classe derivada e não o da superclasse. Dessa forma, a decisão sobre qual dos métodos método que deve ser selecionado, de acordo com o tipo do objeto, pode ser tomada apenas em tempo de execução, através do mecanismo de ligação tardia (Deitel, 2004).

5.2. MODELAGEM DE UM SOFTWARE LOCAL (FRAME) E UM PARA A WEB (APPLET)

O programa desenvolvido utilizando a linguagem Java com o auxílio do ambiente de programação Eclipse SDK versão 3.3.0, intitulado por SAPROMS NET, possibilita manipular arquivos de estruturas e gerar relatórios de estruturas complexas. O aplicativo pode ser executado tanto localmente (através de um arquivo no formato *.jar) quanto em uma aplicação na web (através de applets), que poderia ser hospedado em sites da internet. Convém notar que neste trabalho apenas a versão local é discutida.

Para discretizar a estrutura foi elaborado um ambiente interativo e sugestivo de menus e formulários onde o usuário pode adicionar nós, barras, ações e outras características a fim de que a estrutura idealizada seja representada fielmente no programa, vide Figura 5.5.

O aplicativo é composto de sete classes principais, utilizando todo o paradigma de programação orientada a objetos, na Figura 5.3 pode-se visualizar melhor a disposição das classes.

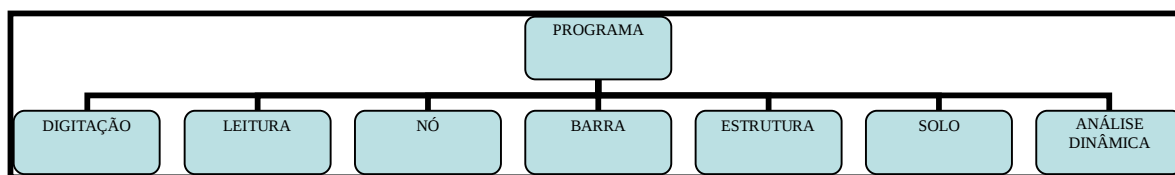


Figura 5.3 Fluxograma das principais classes do aplicativo

Um trecho do código fonte da *classe estrutura* é mostrado na Figura 5.4, evidenciando o algoritmo do cálculo da matriz de análise dinâmica forçada.

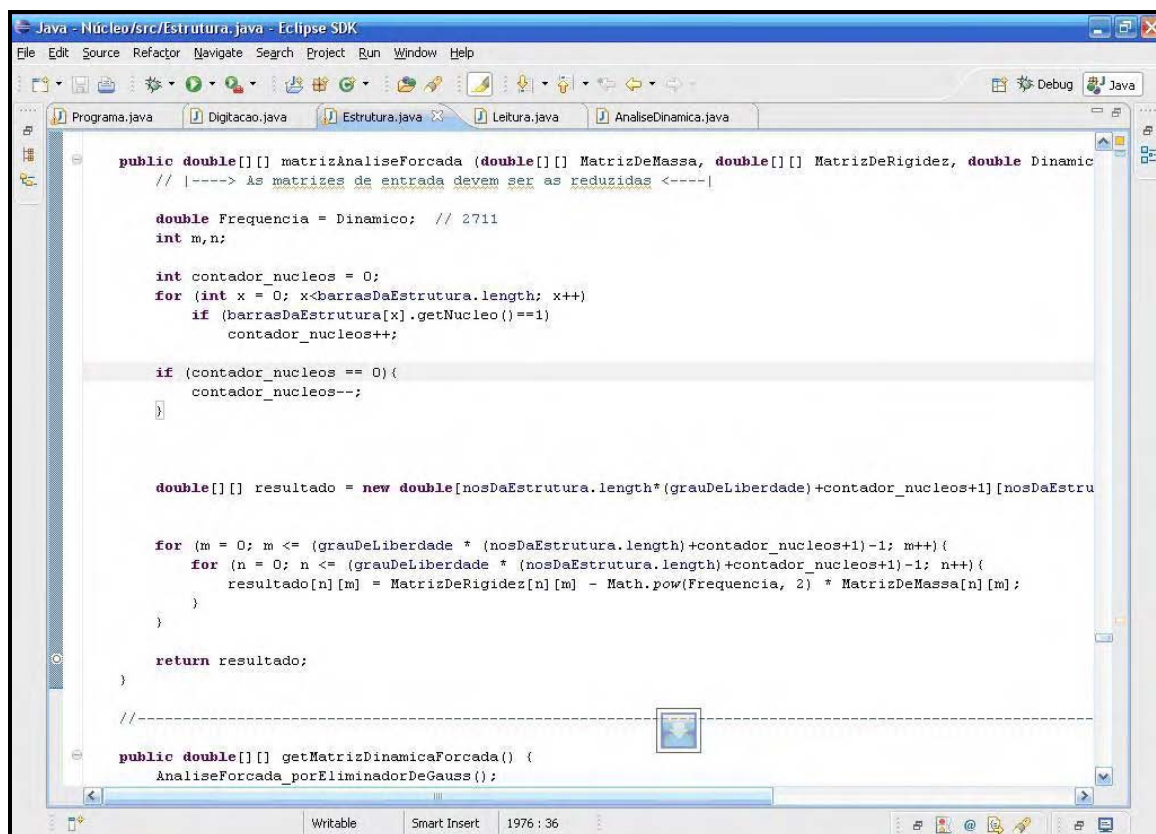


Figura 5.4 Trecho do código fonte do aplicativo

A aplicação permite criar um projeto escolhendo o tipo de estrutura que será resolvida, uma vez criado e informado os dados de entrada ele pode ser salvo em arquivo, podendo ser editado e recalculado quantas vezes for necessário, permitindo assim maior flexibilidade ao usuário no processo de análise na estrutura.

Os resultados podem ser salvos em arquivos de texto, o que possibilita a importação para outros aplicativos, possibilitando outros tipos de análise.



Figura 5.5 Ambiente interativo do SAPROMS NET

5.2.1 Diagrama de Classes utilizando UML

A Unified Modeling Language (UML) é agora o esquema de representação gráfica mais amplamente utilizado para modelagem de sistemas orientados a objetos (Deitel, 2002). Ela certamente unificou os diversos esquemas de notação que existiam no final da década de 80. Aqueles que projetam sistemas usam a linguagem (sob a forma de diagramas gráficos) para modelar seus sistemas.

Observa-se na Figura 5.6 o diagrama da classe Nó, onde o objeto nó tem características como suas coordenadas, seu número, que é o que o identifica entre os outros nós, suas condições de contorno representado pelo vetor tipo, as ações nele exercidas pelo vetor esforços e ainda as ações provenientes de carregamentos ao longo da barra, que é passado para os nós, representado pelo vetor carregamento.

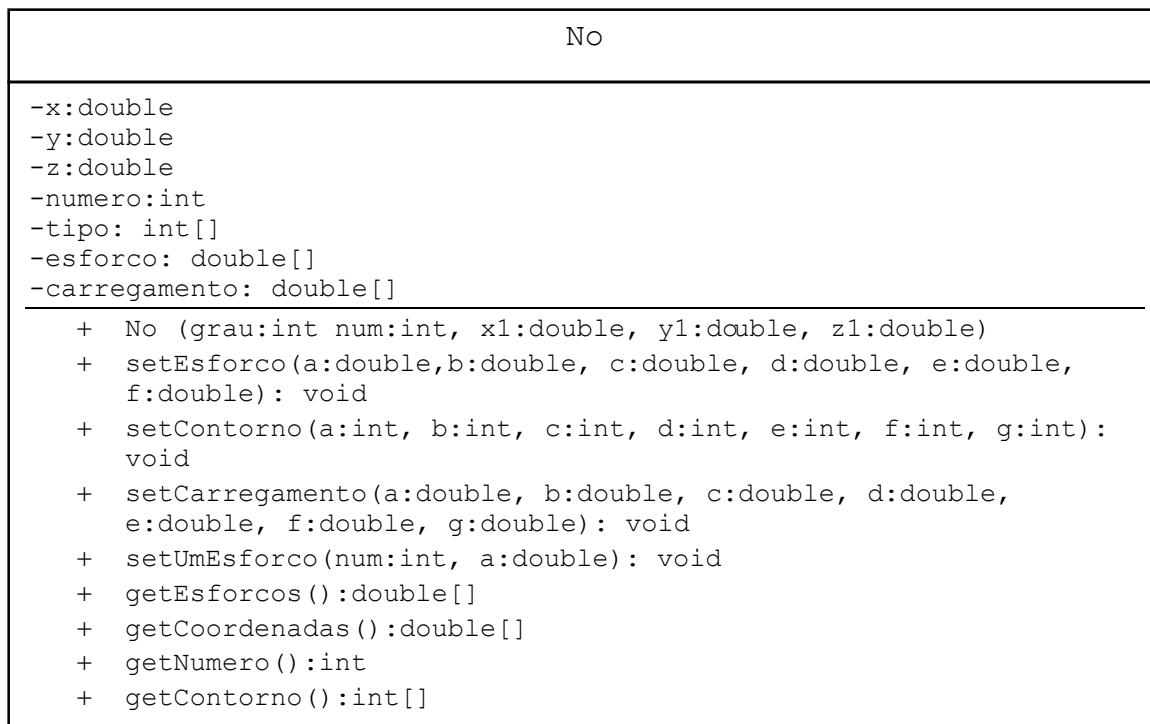


Figura 5.6 - Diagrama da classe No

Pode-se ver pelo seu construtor que os parâmetros necessários para criar um nó são: o grau de liberdade da estrutura, seu respectivo número e sua coordenada tridimensional, para os casos bidimensionais ao valor z é atribuído automaticamente zero, sendo mais bem visualizado na tela de entrada de parâmetros dos nós, conforme é visto na Figura 5.7.

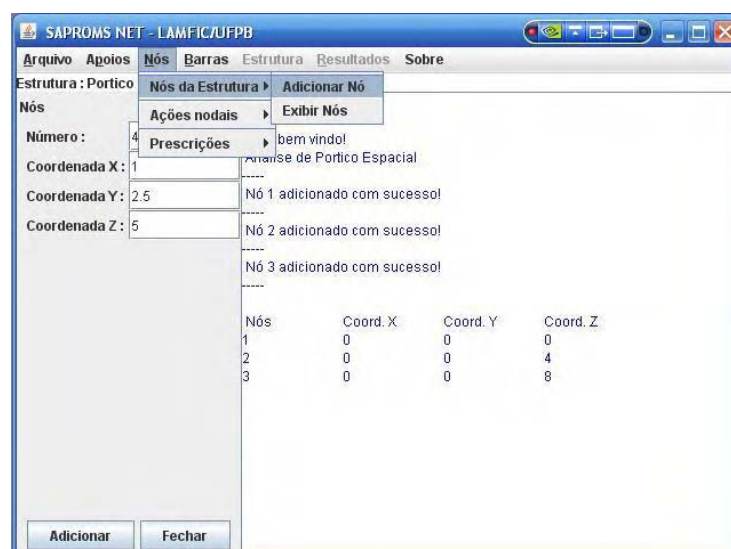


Figura 5.7 ã Adicionando Nós à Estrutura

Os esforços nos nós são informados na opção de ações nodais, conforme é mostrado na Figura 5.8, e as prescrições dos nós na opção de mesmo nome, onde é informado 1 para indicar que o nó está prescrito e 0 para não prescrito, vide Figura 5.9.

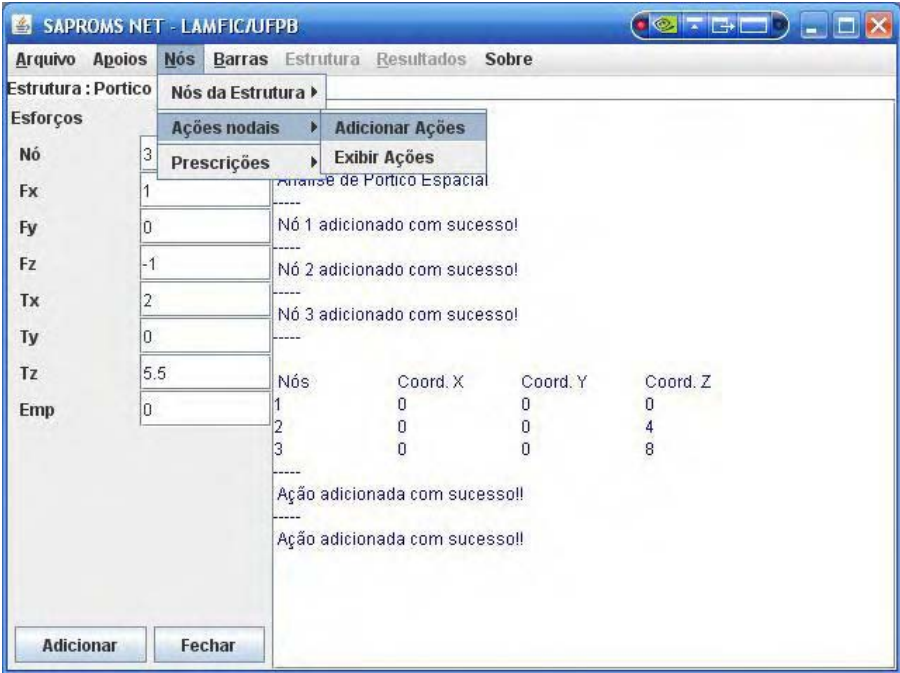


Figura 5.8 ã Adicionando os esforços nos nós

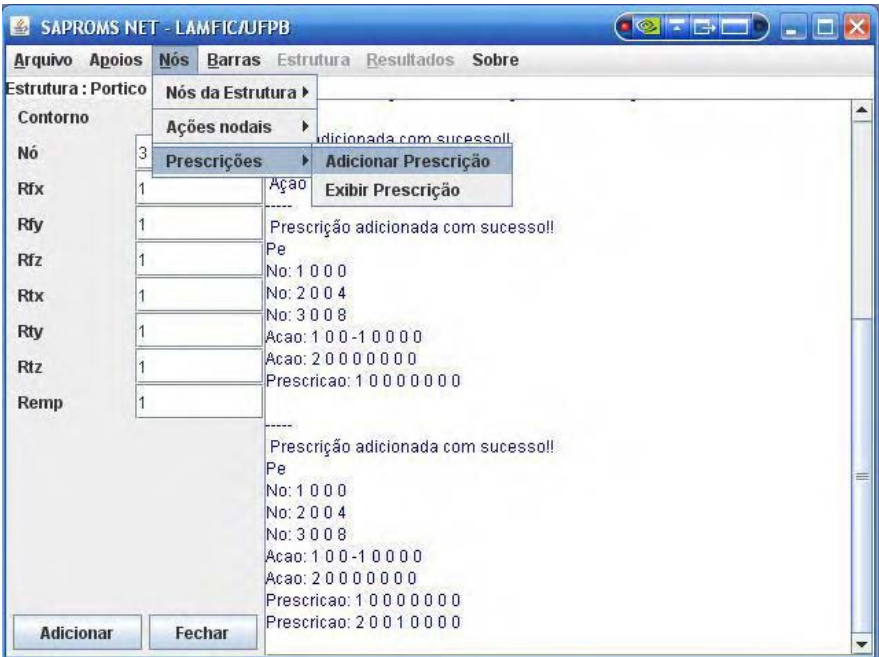


Figura 5.9 ã Prescrição dos Nós

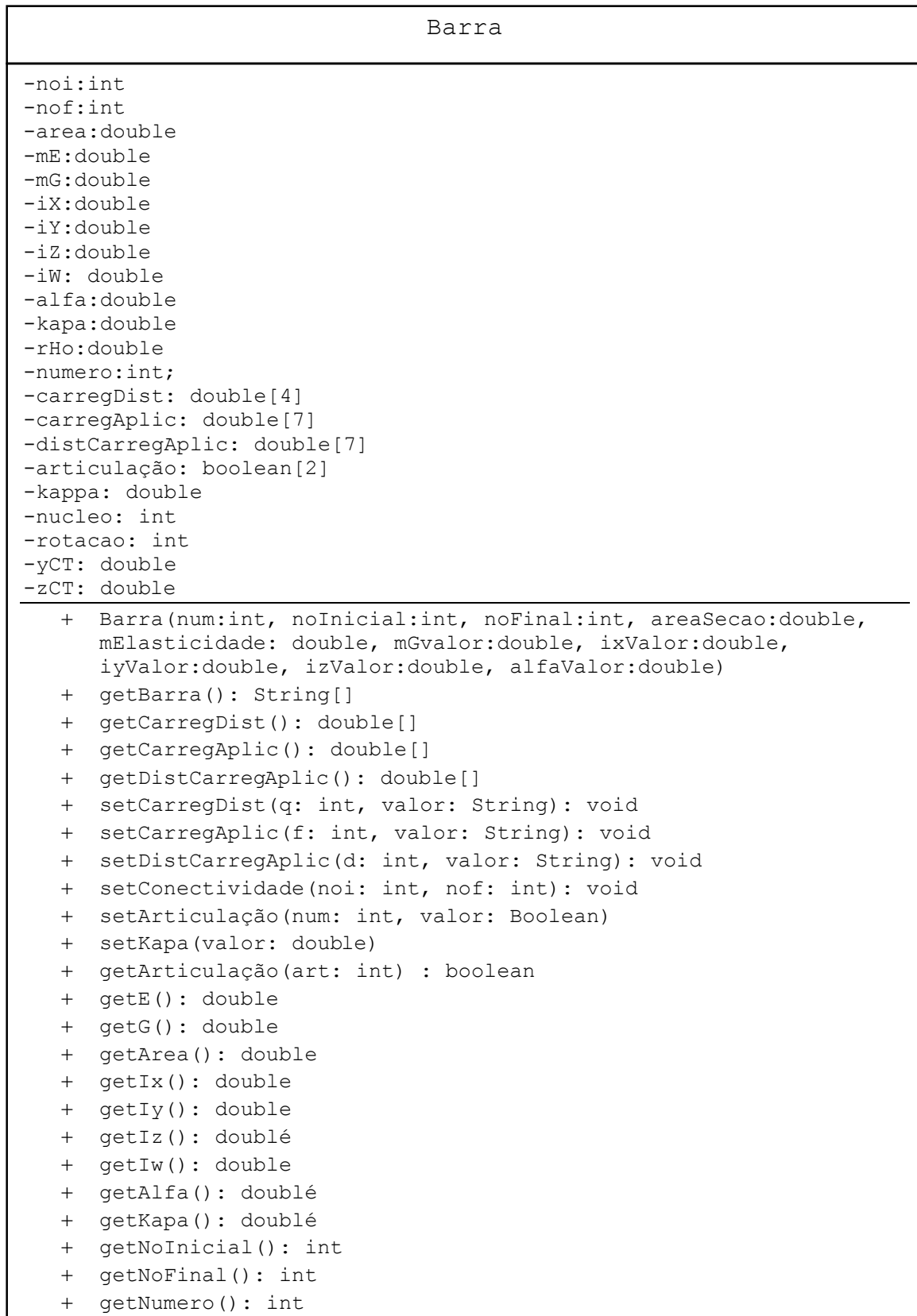


Figura 5.10 - Diagrama da classe Barra

Após criado o objeto nó com todas as suas propriedades, a próxima etapa será criar o objeto de barra (vide Figura 5.11). Observa-se pelo construtor da classe, conforme é mostrado na Figura 5.10, que para criar uma barra é necessário entrar com todos os valores, principalmente sua numeração, conectividade e características geométricas. A classe é composta de métodos de atribuição e métodos de leitura, para que a classe Estrutura possa coletar essas informações e processá-las.

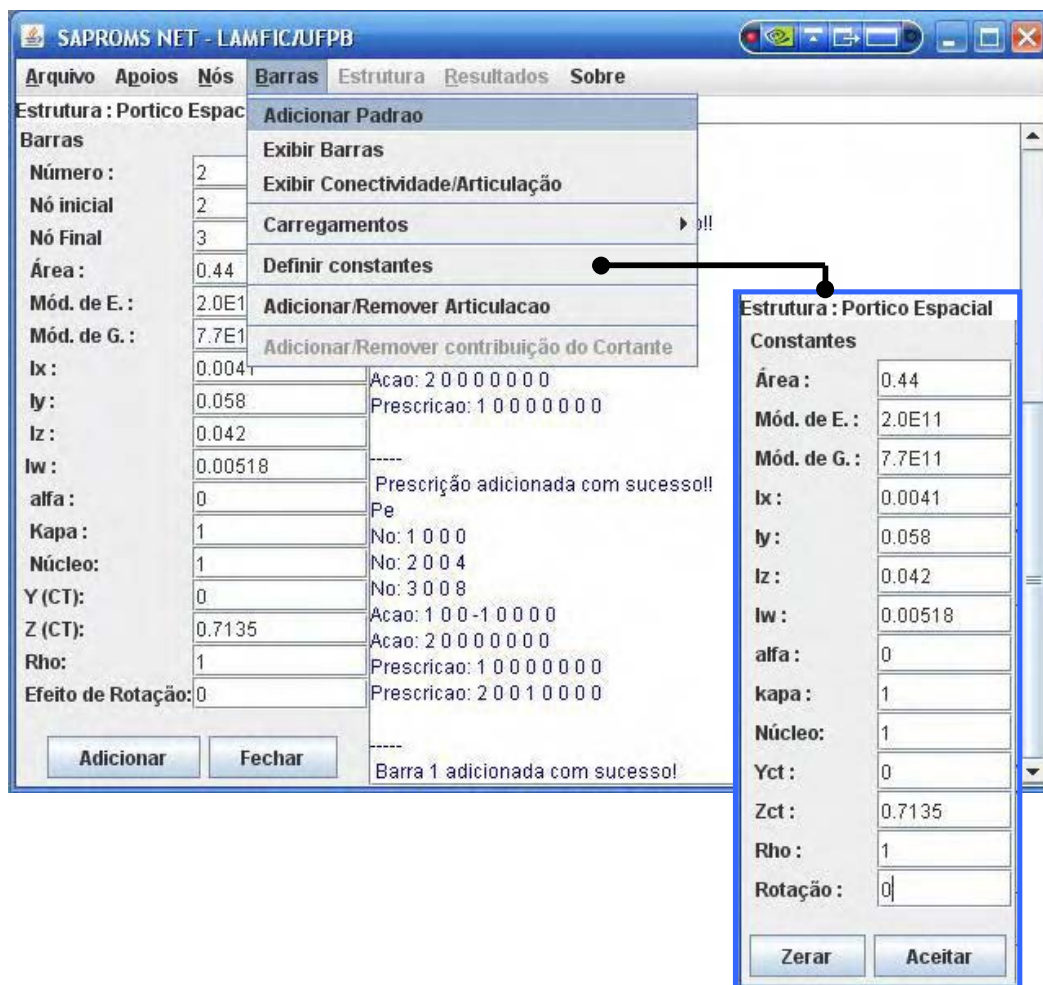


Figura 5.11 Criando o objeto barra

No intuito de facilitar a entrada de dados das barras da estrutura, o aplicativo possui a opção de definir constantes, que definidas preenche as caixas de dialogo de digitação da barra como valor default, com isso o usuário não necessita redigitar esses valores toda vez que incluir uma nova barra que possua as mesmas propriedades.

Vale ressaltar que o aplicativo, trata o elemento de barra individualmente, mostrando que a mesma corresponde a um objeto estrutural com sua característica própria. Podendo assim trabalhar com estruturas complexas, de seções diversas e materiais diversos.

Uma vez criado o objeto de barra, observa-se que cada objeto tem suas características geométricas e conectividades independentes das outras barras, um objeto de barra têm características suficientes para um elemento de barra de pórtico espacial, que é o mais completo elemento de barra. Os outros tipos de barras não precisam de todas essas características, então essas características são zeradas e podem variar para cada elemento de barra correspondente ao tipo de estrutura.

Os esforços nas barras são informados na opção de carregamentos, opção essa que está dividida em carregamentos concentrados e carregamentos distribuídos, conforme é mostrado na Figura 5.12.

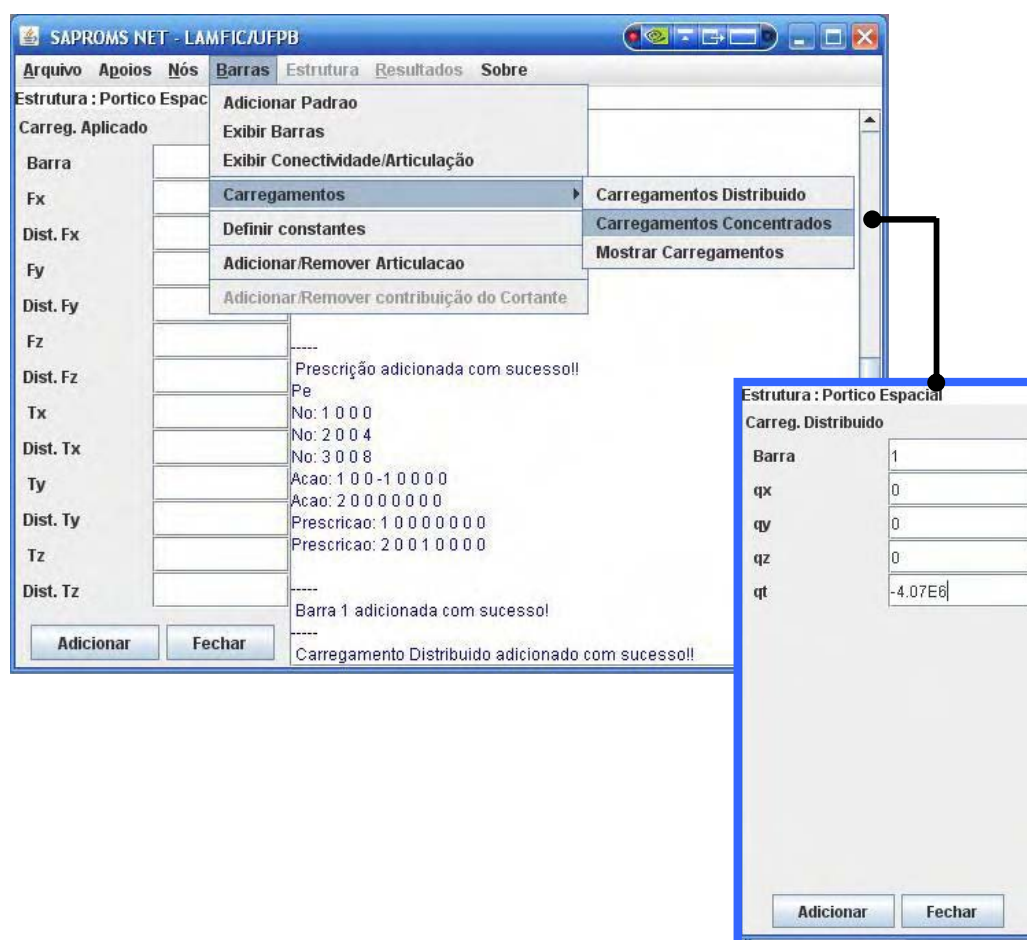


Figura 5.12 ã Entrada dos carregamentos da barra

Para que o aplicativo possa fazer a análise dinâmica forçada da estrutura é necessário que seja informado a frequência inicial da estrutura, juntamente com o n.º de iterações e o seu incremento, conforme é mostrado no Figura 5.13 e na Figura 5.14. Caso essas informações não sejam computadas, será atribuído valor nulo às variáveis e a análise dinâmica será desconsiderada.

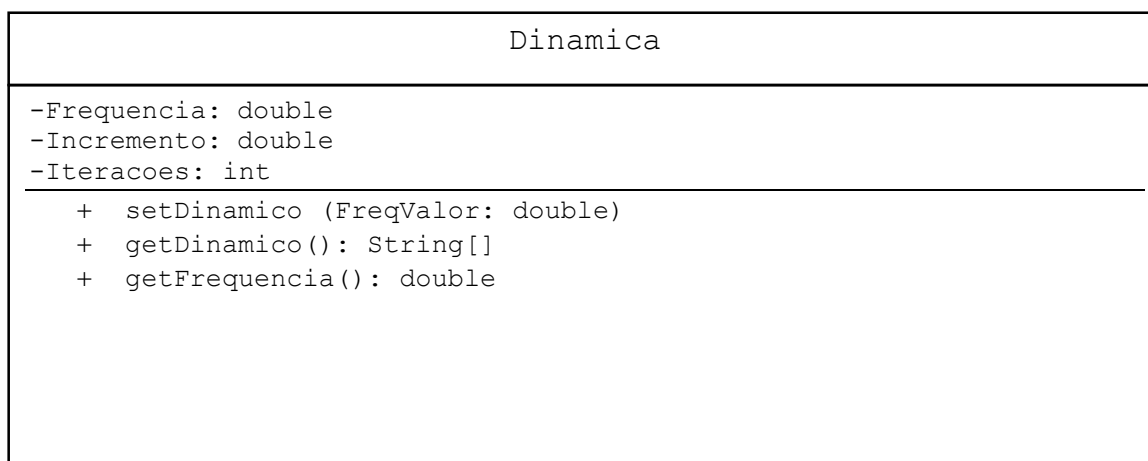


Figura 5.13 Diagrama da Classe Dinâmica.

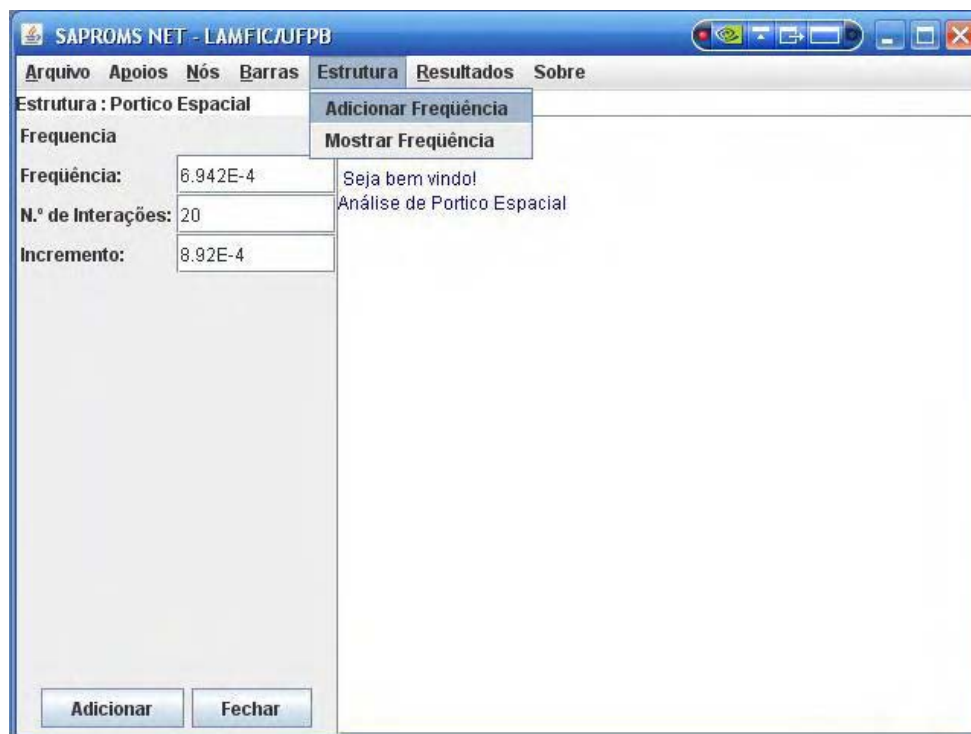


Figura 5.14 Entrada de dados da frequência da estrutura

Opcionalmente à análise dinâmica da estrutura, pode-se ainda considerar a contribuição do apoio contínuo (efeito do solo) na análise da estrutura. Para isso foi desenvolvida a classe Solo (Figura 5.15), utilizando a teoria de elementos de contorno, cujos resultados serão acoplados à matriz de rigidez e massa da estrutura.

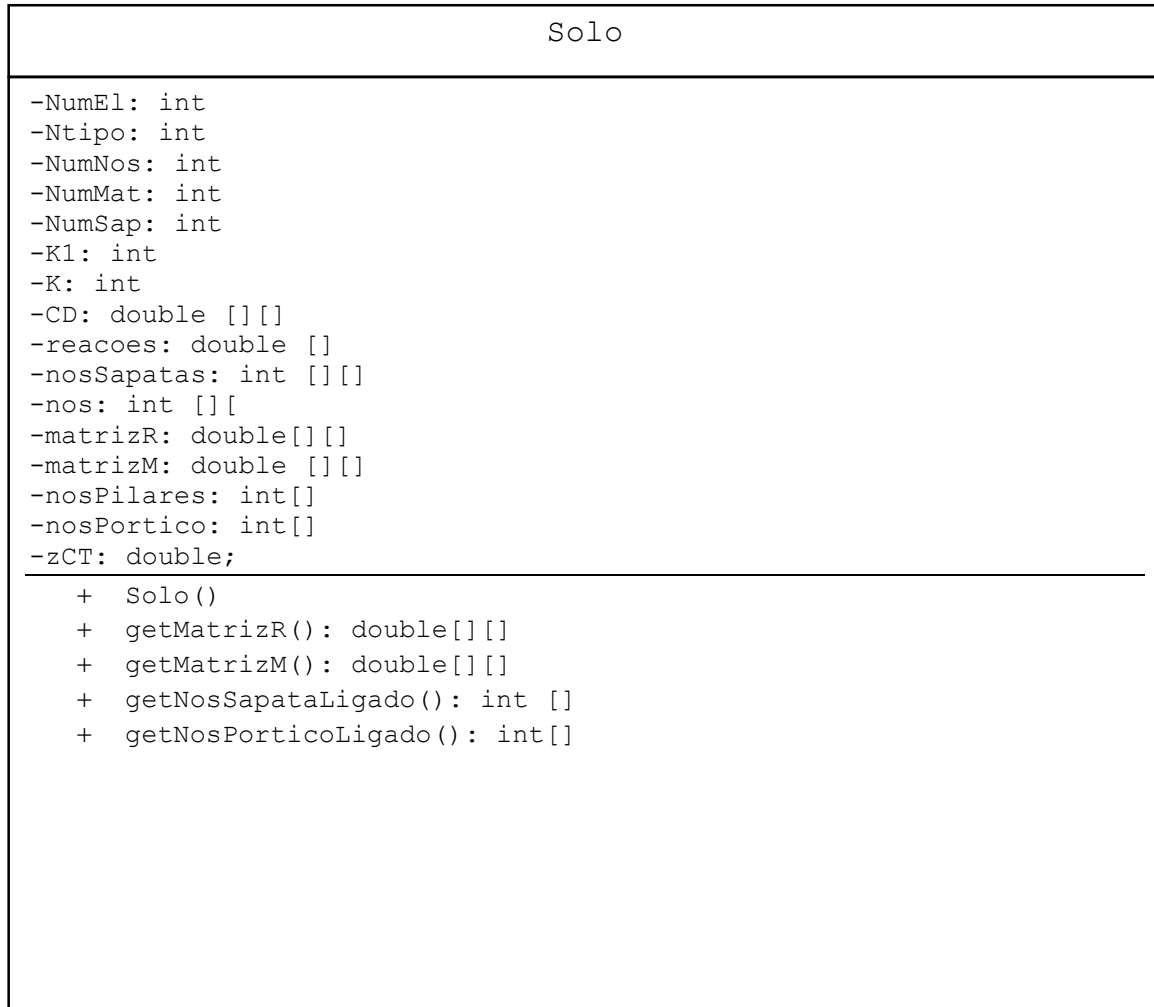


Figura 5.15 ã Classe Solo

A entrada de dados das propriedades do solo é preferencialmente feita através de arquivos de entrada, mas podendo ser feita pela entrada de dados do aplicativo e salvo para uso posterior, conforme é mostrado na Figura 5.16.

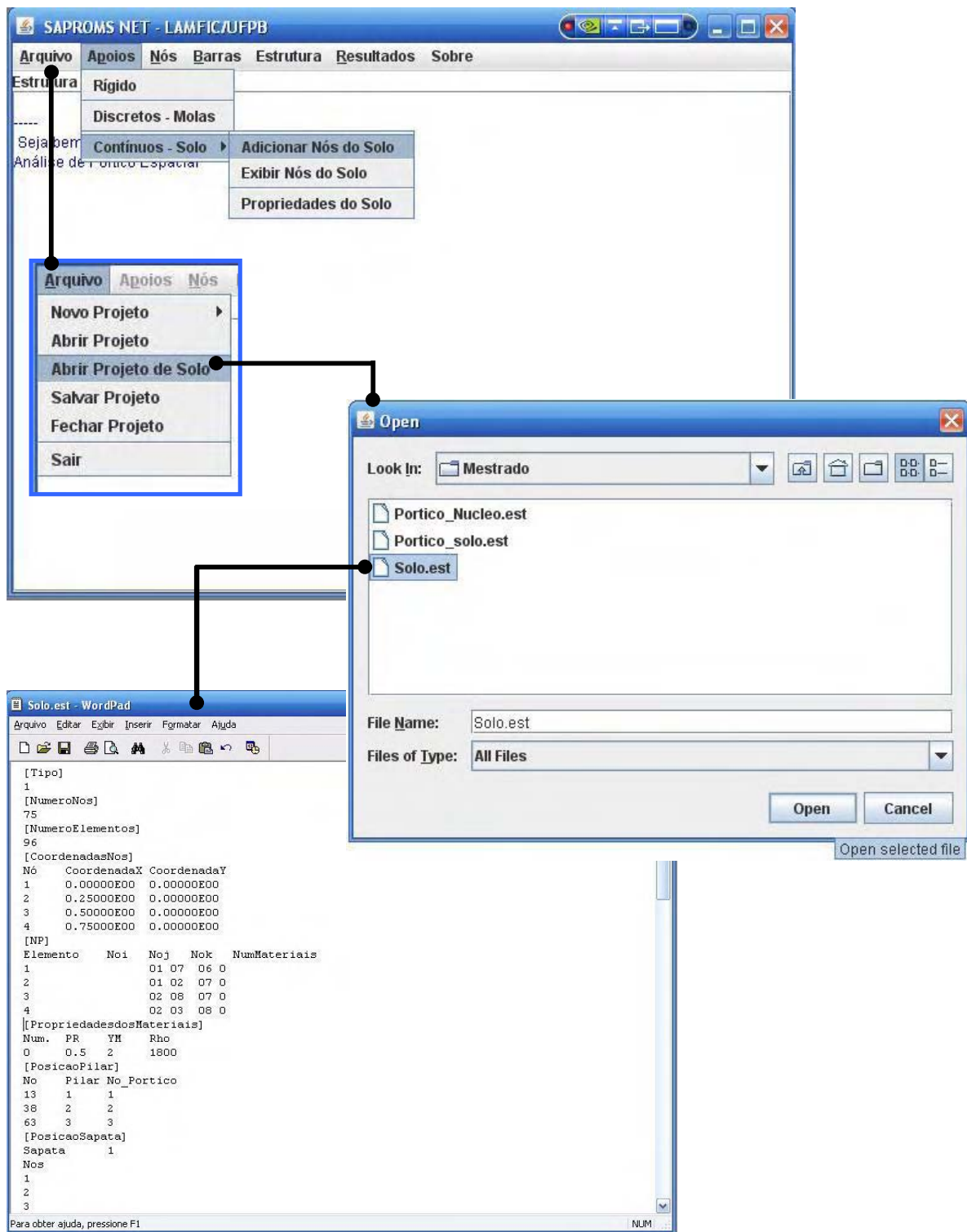


Figura 5.16 - Entrada das propriedades do Solo

A classe estrutura, representada na Figura 5.17, tem como característica um vetor onde estão armazenados objetos de nós, um vetor onde estão armazenados objetos de barra, do solo e características da estrutura no modo geral.

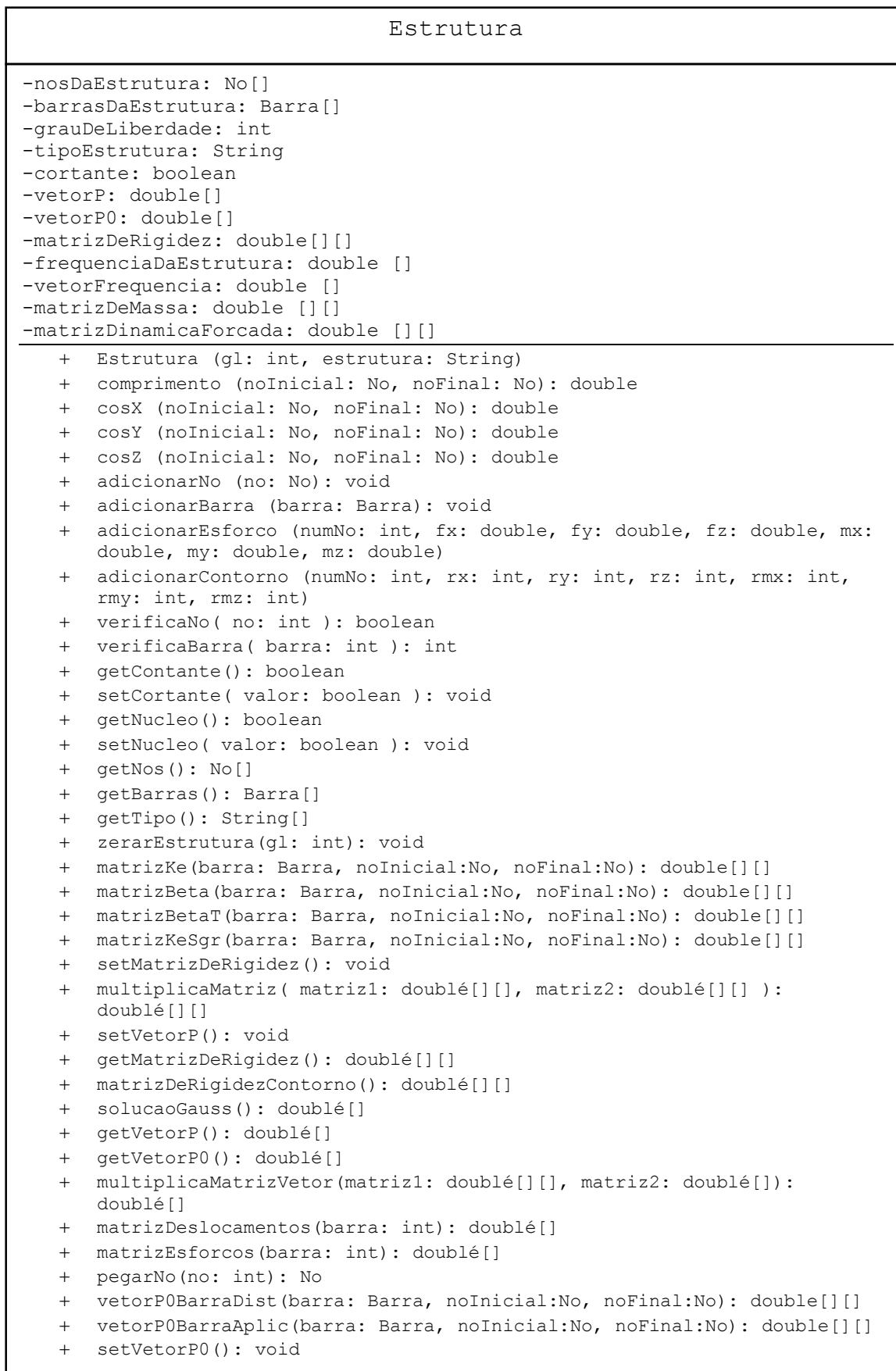


Figura 5.17 ñ Diagrama da classe Estrutura

Uma vez com essas informações definidas, pode-se encontrar a matriz de rigidez e de massa dos elementos de barra, sua rotação, matriz de rigidez e de massa global, montagem do vetor das ações, resolução do sistema, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras, através do menu Resultados, Figura 5.18.

The screenshot displays the SAPROMS NET - LAMFIC/UPPB application window. The 'Resultados' menu is open, showing options like 'Calcular estrutura', 'Limpar Resultados', and 'Salvar Resultado Atual em Arquivo'. Below the menu, a list of results is displayed, organized by structure type (Estrutura: Portico Espacial) and bar number (Matriz de Rigidez da Barra 1, 2, 3, 4). Each bar result includes a 6x6 matrix of values in scientific notation (e.g., 5,6000E002, 0,0000E000). The results are presented in a table format with multiple columns for each bar's data.

Barra	Matriz de Rigidez da Barra	Matriz de Massa da Barra	Matriz de Rotação da Barra	Matriz de Rigidez da Barra (sgr)	Matriz de Massa da Barra (sgr)	Vetor dos Deslocamentos da Barra	Vetor (p) da Barra	Vetor (po) do carregamento distribuído de cada Barra	Vetor (po) do carregamento aplicado de cada Barra
1	5,6000E002, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	5,6000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000
2	5,6000E002, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	5,6000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000
3	5,6000E002, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	5,6000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000
4	5,6000E002, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	5,6000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000	0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000, 0,0000E000

Figura 5.18 Possibilidade de Resultados emitidos pelo programa

CAPÍTULO VI:

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são mostrados exemplos para cada uma das estruturas resolvidas pelo programa, mostrando os resultados e comparando com a literatura.

6.1. ANÁLISE ESTÁTICA

Nesta seção são abordados exemplos de estrutura reticuladas em regime estático, sendo um de treliça plana, um de treliça espacial, um de pórtico plano, seis de pórtico espacial e um de grelha.

6.1.1. Treliça Plana

Na Figura 6.1 está indicada uma treliça plana cujas propriedades mecânicas e geométricas são dadas por: Módulo de elasticidade E , área A e comprimento L . Foram admitidos valores unitários para essas propriedades assim como para a carga P .

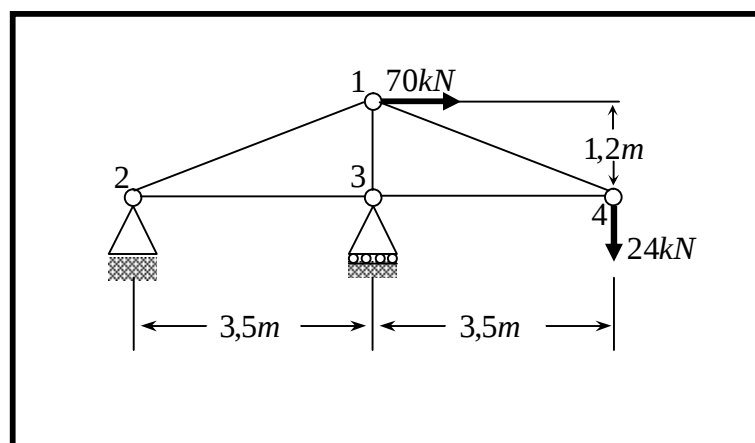


Figura 6.1 ã Treliça plana

Os resultados nodais desse exemplo podem ser comparados com outros dados na literatura conforme indicado na Tabela 6.1

Tabela 6.1 - Resultados do exemplo de treliça plana comparados com os da literatura

Barra 01			
Deslocamentos/Rotações (m)		Força (kN)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Beer, 1994)
1	0,000000E000	-1,480E03	-148,0 kN
2	0,000000E000	0,000E00	0,0
3	5,215238E-004	1,480E03	148,0 kN
4	-2,657959E-004	0,000E00	0,0
Barra 02			
Deslocamentos/Rotações (m)		Força (kN)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Beer, 1994)
1	0,000000E000	7,200E01	72,0
2	2,333333E004	0,000E00	0,0
3	-8.228571e-005	-7,200E01	-72,0
4	-5.795374e-004	0,000E00	0,0
Barra 03			
Deslocamentos/Rotações (m)		Força (kN)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Beer, 1994)
1	5,748983E-004	-7, 400E01	-74,0
2	1,101202E-004	0,000E00	0,0
3	8,356602E-004	7, 400E01	74,0
4	-3.876231E-003	0,000E00	0,0
Barra 04			
Deslocamentos/Rotações (m)		Força (kN)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Beer, 1994)
1	0,000000E000	7,000E01	70,0
2	0,000000E000	0,000E00	0,0
3	-2,333333E-004	-7,000E01	-70,0
4	0,000000E000	0,000E00	0,0
Barra 05			
Deslocamentos/Rotações (m)		Força (kN)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Beer, 1994)
1	-2,333333E-004	7,000E01	70,0
2	0,000000E000	0,000E00	0,0
3	-4,666667E-004	-7,000E01	-70,0
4	-3,937730E-003	0,000E00	0,0

6.1.2. Treliça Espacial

Na Figura 6.2 está indicada uma treliça espacial cujas propriedades mecânicas e geométricas arbitrárias são dadas por: Módulo de elasticidade E , área A e comprimento L .

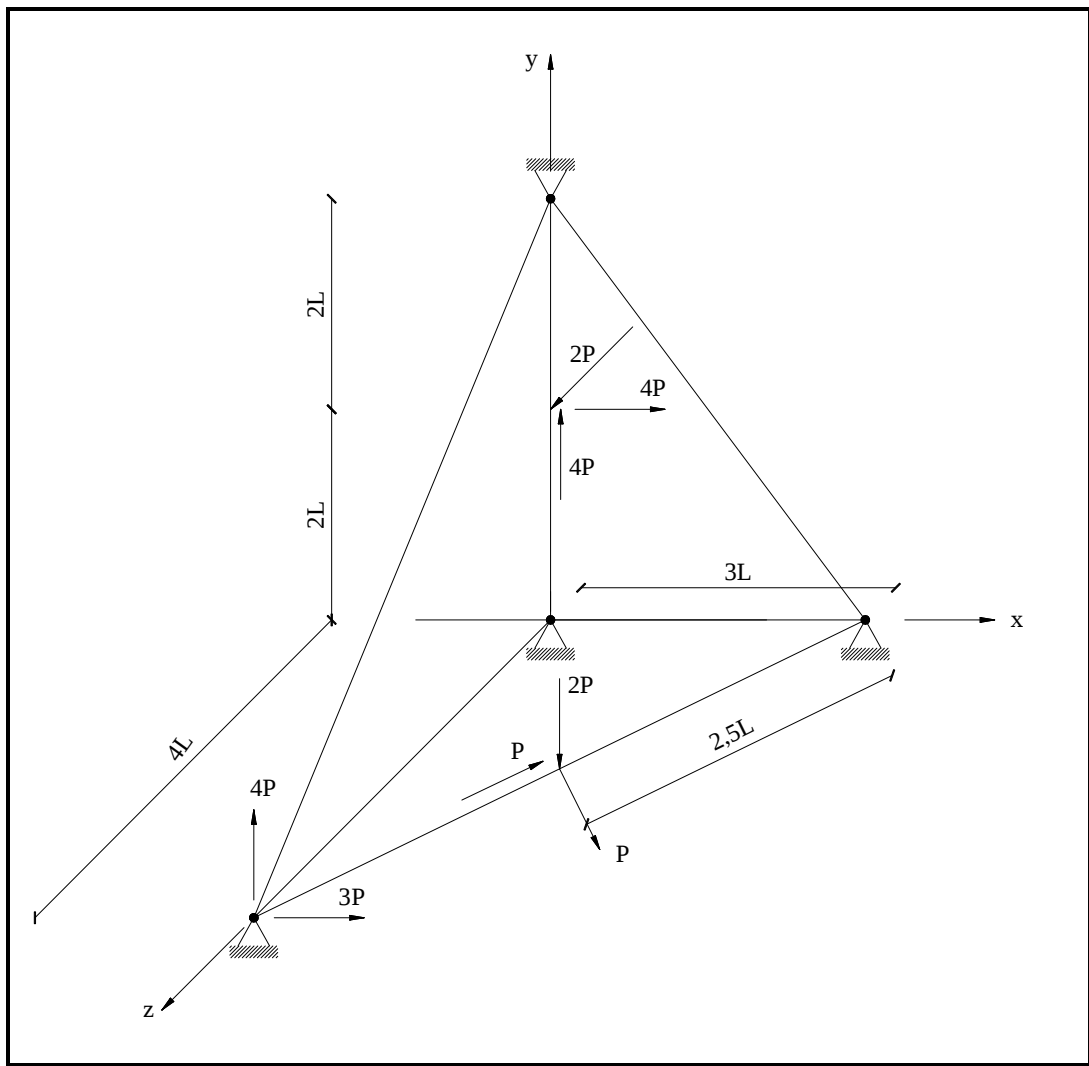


Figura 6.2 ã Treliça Espacial

Dados:

$E = 10000 \text{ ksi}$; $A = 10 \text{ in}^2$; $L = 25 \text{ in}$; $P = 10 \text{ Kips}$

Os resultados nodais desse exemplo podem ser comparados com outros dados na literatura conforme indicado na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 ã Deslocamentos e esforços na treliça espacial

Barra 01			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	0,000E00	-3,618E01	36,18
2	0,000E00	0,000E00	0,0
3	0,000E00	0,000E00	0,0
4	2,714E-02	3,618E01	36,18
5	0,000E00	0,000E00	0,0
6	0,000E00	0,000E00	0,0
Barra 02			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	0,000E00	-2,000E01	-20,0
2	0,000E00	2,000E01	20,0
3	0,000E00	-1,000E01	-10,0
4	0,000E00	-2,000E01	-20,0
5	0,000E00	2,000E01	20,0
6	0,000E00	-1,000E01	10,0
Barra 03			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	0,000E00	0,000E00	0,0
2	0,000E00	0,000E00	0,0
3	0,000E00	0,000E00	0,0
4	0,000E00	0,000E00	0,0
5	8,485E-02	0,000E00	0,0
6	-1,556E-01	0,000E00	0,0
Barra 04			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	-1,628E-02	-1,303E01	-13,03
2	2,171E-02	0,000E00	0,0
3	0,000E00	0,000E00	0,0
4	0,000E00	1,303E01	13,03
5	0,000E00	0,000E00	0,0
6	0,000E00	0,000E00	0,0
Barra 05			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)

1	-1,628E-02	6,667E01	66,67
2	0,000E00	1,000E01	10,0
3	-2,171E-02	5,000E00	5,0
4	-9,337E-02	-5,667E01	-56,67
5	8,485E-02	1,000E01	10,0
6	-1,245E-01	5,000E00	5,0
Barra 06			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	0,000E00	4,243E01	42,43
2	0,000E00	0,000E00	0,0
3	0,000E00	0,000E00	0,0
4	-6,000E-02	-4,243E01	-42,43
5	6,000E-02	0,000E00	0,0
6	-1,556E-01	0,000E00	0,0

6.1.3. Pórtico Plano

Nessa seção, serão apresentados duas estruturas de pórtico plano, sendo que uma delas possui uma articulação fora dos apoios.

6.1.3.1. Pórtico Plano sem articulação

Na Figura 6.3 está indicado um pórtico plano cujas propriedades mecânicas e geométricas arbitrárias são dadas por: Módulo de elasticidade E , área A , momento de inércia I_z e comprimento L .

Dados:

$$E = 10000 \text{ ksi}; A = 10 \text{ in}^2; L = 100 \text{ in}; P = 10 \text{ Kips}; I_z = 1000 \text{ in}^4$$

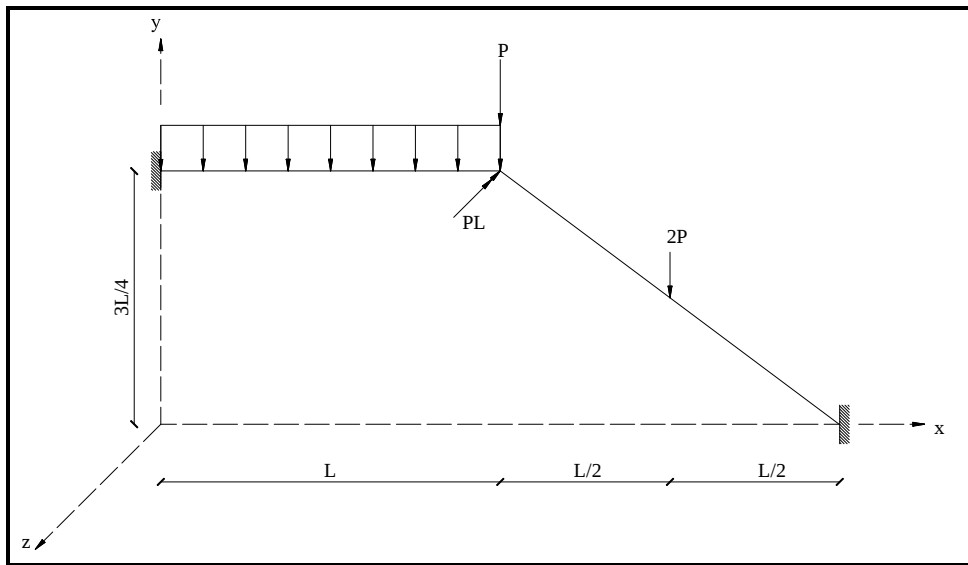


Figura 6.3 ã Pórtico Plano sem articulação

Os resultados nodais desse exemplo podem ser comparados com outros dados na literatura conforme indicado na Tabela 6.3

Tabela 6.3 ã Deslocamentos e esforços no pórtico plano.

Barra 01			
Deslocamentos/Rotações (in)		Força (Kips)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	0,000E00	2,026E01	20,26
2	0,000E00	1,314E01	13,14
3	0,000E00	4,366E02	436,6
4	-2,026E-02	-2,026E01	-20,26
5	-9,936E-02	1,086E01	10,86
6	-1,798E-03	-3,229E02	-322,9
Barra 02			
1	4,341E-02	2,873E01	28,72
2	-9,164E-02	-4,533E00	-4,53
3	-1,798E-03	-6,771E02	-677,1
4	0,000E00	-4,073E01	-40,73
5	0,000E00	2,053E01	20,53
6	0,000E00	-8,895E02	-889,5

6.1.3.1. Pórtico Plano com articulação

A Figura 6.4 representa um pórtico plano com articulação fora dos apoios e com seções transversais S_1 e S_2 indicadas e módulo de elasticidade igual a $2,8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$.

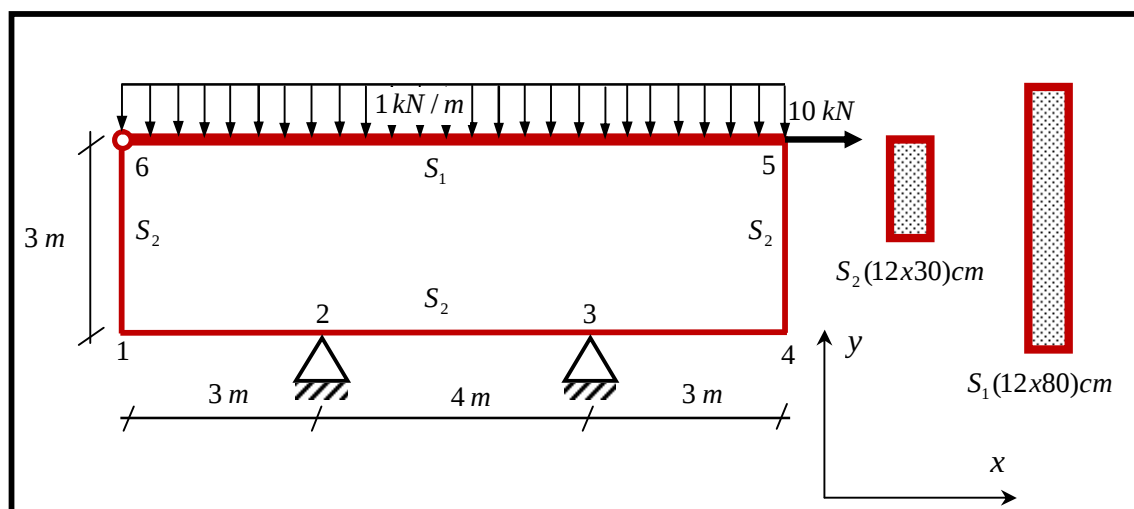


Figura 6.4 ã Pórtico Plano articulado

A título de validação dos resultados, o pórtico foi calculado pelo software Ftool disponível para downloads no site: <https://web.tecgraf.puc-rio.br/ftool/>, fornecido pela PUC-RJ (vide Figura 6.5). Os deslocamentos do nó 5 estão indicados na Tabela 6.4 e das reações de apoio na Tabela 6.5.

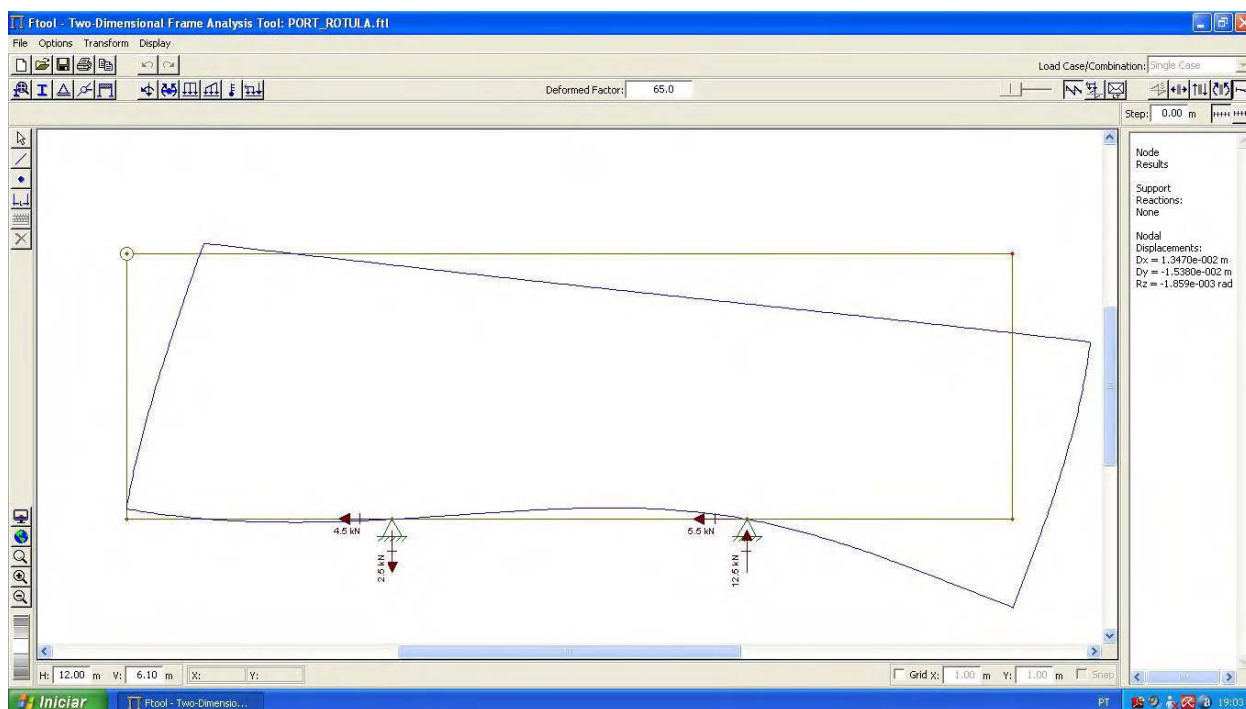


Figura 6.5 ã Resolução da estrutura pelo Ftool.

Tabela 6.4 ã Deslocamentos do nó 5.

Nó	Saproms Net			Ftool		
	u_x (m)	u_y (m)	θ_z (rad)	u_x (m)	u_y (m)	θ_z (rad)
5	1,3467E-002	-1,5382E-002	-1,8593E-003	1,3470E-002	-1,5380E-002	-1,859E-003

Tabela 6.5 ã Reações de apoio.

Nó	Saproms Net			Ftool		
	R_x (kN)	R_y (kN)	M_z (kN.m)	R_x (kN)	R_y (kN)	M_z (kN.m)
2	-4,5422E000	-2,5000E000	0,0E000	-4,50	-2,50	0,0
3	-5,4578E000	12,500000	0,0E000	-5,50	12,50	0,0

6.1.4. Pórtico Espacial

6.1.4.1. Pórtico Espacial sem Efeito de Núcleo Estrutural

Na Figura 6.6 está indicado um pórtico espacial cujas propriedades mecânicas e geométricas arbitrárias são dadas por: Módulo de elasticidade longitudinal E; módulo de elasticidade transversal G; área A; momentos de inércia I_x , I_y , I_z e comprimento L e valem:

$$\begin{array}{lllll}
 E = 30000 \text{ ksi} & A = 11 \text{ in}^2 & I_y = 56 \text{ in}^4 & L = 120 \text{ in} & \dot{U} = 0,0 \\
 G = 12000 \text{ ksi} & I_x = 83 \text{ in}^4 & I_z = 56 \text{ in}^4 & P = 1 \text{ kip} &
 \end{array}$$

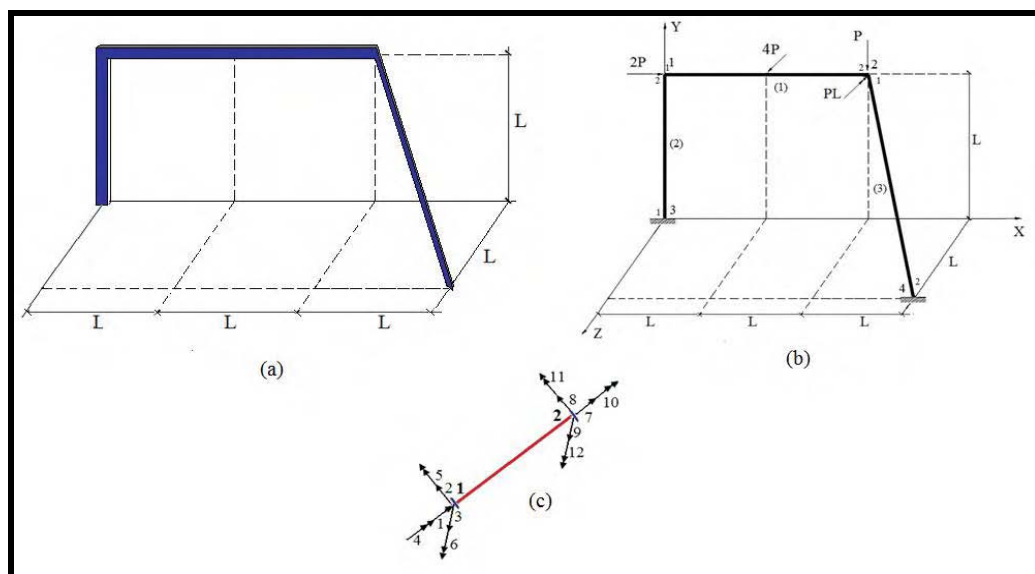


Figura 6.6 - Pórtico Espacial padrão: (a) perspectiva, (b) discretização e carregamentos e (c) sistema local de referência

Os resultados nodais desse exemplo podem ser comparados com outros dados na literatura conforme indicado na Tabela 6.6

Tabela 6.6 ã Deslocamentos e esforços no pórtico espacial.

Barra 01			
Deslocamentos/Rotações (cm/rad)		Força/Momento/Torção (kN, kN.cm, kN.cm)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	-1,528E-01	1,911E00	1,91
2	2,436E-04	-6,698E-01	-0,67
3	6,263E-01	-2,032E00	-2,03
4	7,536E-03	1,640E01	16,40
5	-5,463E-03	4,534E01	45,34
6	2,673E-03	-4,275E01	-42,75
7	-1,542E-01	-1,911E00	-1,91
8	4,562E-01	6,698E-01	0,67
9	6,139E-01	-1,968E00	-1,97
10	3,584E-03	-1,640E01	-16,40
11	5,748E-03	-3,771E01	-37,71
12	-2,701E-03	-1,180E02	-118,00
Barra 02			
Deslocamentos/Rotações (cm/rad)		Força/Momento/Torção (kN, kN.cm, kN.cm)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	0,000E00	-6,698E-01	-0,67
2	0,000E00	8,864E-02	0,09
3	0,000E00	-2,032E00	-2,03
4	0,000E00	4,534E01	45,34
5	0,000E00	2,274E02	227,41
6	0,000E00	-3,211E01	-32,11
7	2,436E-04	6,698E-01	0,67
8	1,528E-01	-8,864E-02	-0,09
9	6,263E-01	2,032E00	2,03
10	-5,463E-03	-4,534E01	-45,34
11	-7,536E-03	1,640E01	16,40
12	2,673E-03	4,275E01	42,75
Barra 03			
Deslocamentos/Rotações (cm/rad)		Força/Momento/Torção (kN, kN.cm, kN.cm)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Weaver, 1981)
1	2,018E-03	3,204E00	3,20

2	5,601E-01	2,205E-01	0,22
3	5,431E-01	4,020E-02	0,04
4	-2,809E-03	-1,346E01	-13,46
5	5,054E-03	3,667E01	36,67
6	-4,445E-03	-1,301E01	-13,01
7	0,000E00	-3,204E00	-3,20
8	0,000E00	-2,205E-01	-0,22
9	0,000E00	-4,020E-02	-0,04
10	0,000E00	1,346E01	13,46
11	0,000E00	-4,503E01	-45,03
12	0,000E00	5,884E01	58,84

6.1.4.2. Barra Engastada sobre Apoio Elástico

Na Figura 6.7 está indicada uma barra engastada sobre apoio elástico. As propriedades mecânicas arbitradas são dadas por: Módulo de Elasticidade (E), comprimento da barra (L), módulo de elasticidade transversal (G), constante da mola (K) e esforço no nó (P). Os resultados estão dispostos na Tabela 6.7

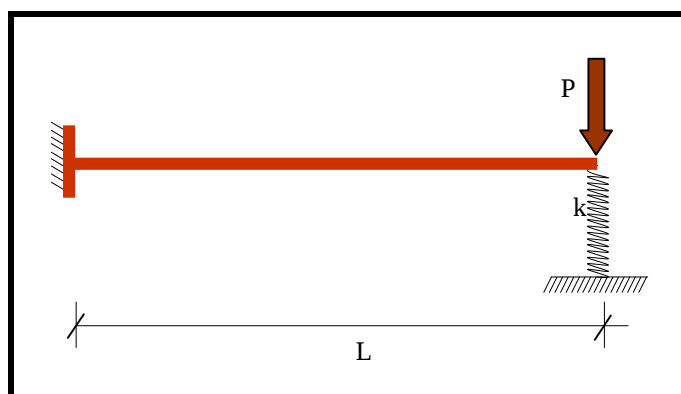


Figura 6.7 ã Pórtico sobre efeito de mola

Dados:

$E = 1000 \text{ kN/m}^2$; $G = 500 \text{ kN/m}^2$; $K = 2 \text{ kN/m}$; $P = 1 \text{ kN}$; L

Tabela 6.7 ã Esforços e deslocamentos da estrutura

Barra 01			
Força/Momento/Torção (kN, kN.cm, Kn.cm)		Deslocamentos/Rotações (cm/rad)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Mendonça, 2006)
1	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000

2	7,5000E-001	0,0000E000	0,0000E000
3	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
4	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
5	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
6	7,5000E000	0,0000E000	0,0000E000
7	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
8	-7,5000E-001	-1,2500E-001	-1,2500E-001
9	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
10	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
11	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
12	1,7764E-015	-1,8750E-002	-1,8750E-002

6.1.4.3. Barra de seção de Paredes Finas: Perfil I

Na Figura 6.8 tem-se um exemplo de um perfil I, considerado delgado, que tem comportamento semelhante a de um núcleo estrutural, note que tem-se duas barras na estrutura e o I_y e o I_z podem ser desconsiderados, já que seus efeitos não terão nenhuma influência nos resultados.

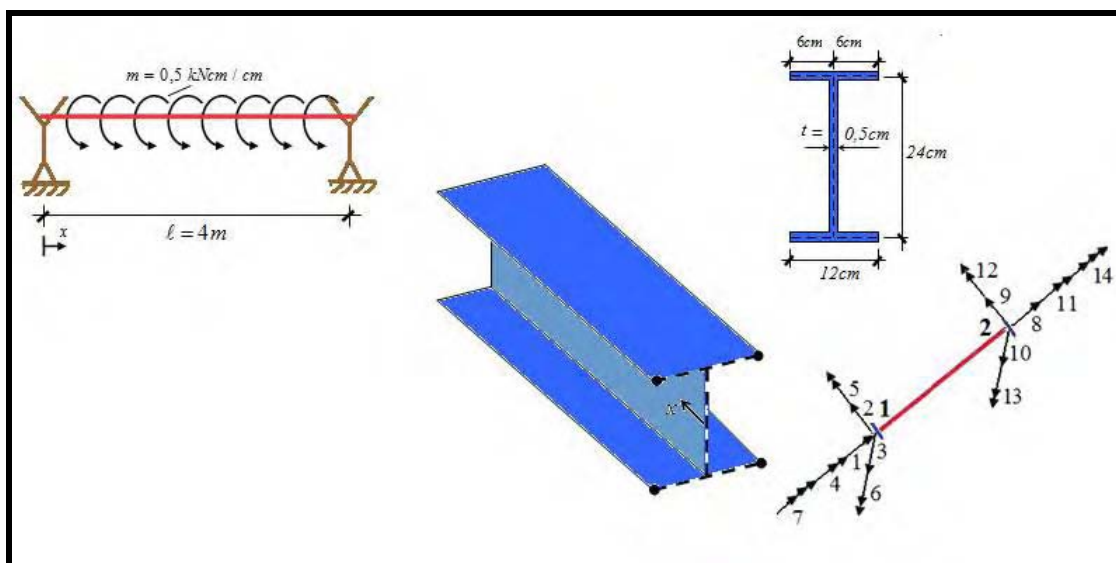


Figura 6.8 ã Perfil I

Tabela 6.8 ã Esforços e deslocamentos da estrutura

Barra 01			
Força/Momento/Torção/Bimomento (kN, kN.cm, kN.cm, kN.cm ²)		Deslocamentos/Rotações (cm/rad)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Mori, 1993)
1	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
2	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
3	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
4	1,0000E004	0,0000E000	0,000000000000000E+000
5	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
6	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
7	2,0373E-010	-1,9330E-003	-1,933001228512649E-03
8	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
9	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
10	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
11	4,5475E-012	-2,3941E-001	-0,239408436205967
12	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
13	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
14	6,1695E005	-2,6613E-019	1,626303258728257E-019
Barra 02			
Força/Momento/Torção/Bimomento (kN, kN.cm, kN.cm, kN.cm ²)		Deslocamentos/Rotações (cm/rad)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Mori, 1993)
1	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
2	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
3	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
4	-9,0949E-013	-2,3941E-001	-0,239408436205967
5	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
6	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
7	-6,1695E005	-2,6613E-019	1,626303258728257E-019
8	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
9	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
10	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
11	1,0000E004	0,0000E000	0,000000000000000E+000
12	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
13	0,0000E000	0,0000E000	0,000000000000000E+000
14	-8,7311E-011	1,9330E-003	1,933001228512649E-003

6.1.4.4. Barra de Seção de Paredes Finas: Perfil U

Na Figura 6.9 está indicado um núcleo estrutural, evidenciando sua seção e os elementos constituintes da mesma. As propriedades mecânicas arbitradas são dadas por:

Módulo de Elasticidade (E), comprimento do perfil (h), altura do perfil (b), módulo de elasticidade transversal (G), espessura do perfil (t).

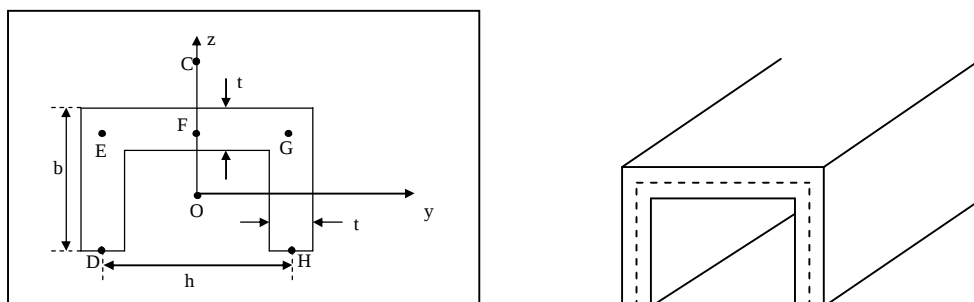


Figura 6.9 ã Perfil U

Dados:

L	h	b	t	E	G	M _x
4 m	0.833 m	0,917 m	1/6 m	$2,0 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$0,77 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$-4.07 \times 10^6 \text{ Nm/m}$

Tabela 6.9 ã Esforços e deslocamentos da estrutura

Barra 01			
Força/Momento/Torção (kN, kN.cm, Kn.cm)		Deslocamentos/Rotações (cm/rad)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	(Vlasov, 1961)
1	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
2	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
3	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
4	-1,6280E007	0,0000E000	0,0000E000
5	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
6	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
7	-1,8312E007	0,0000E000	0,0000E000
8	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
9	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
10	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
11	0,0000E000	-4,4955E-002	-4,5E-002
12	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
13	0,0000E000	0,0000E000	0,0000E000
14	-1,8626E-009	-1,1558E-002	-1,16E-002

6.1.4.5. Pórtico Espacial Apoiado no Meio Contínuo

Seja um pórtico é formado por barras com seção 20 x 20 cm (vide Figura 6.10), cujas propriedades mecânicas são: $E = 28 \text{ GPa}$, $G = 14 \text{ GPa}$. O solo é considerado meio contínuo semi-infinito, cujo módulo de elasticidade 2 MPa e coeficiente de Poisson 0,5 (vide Figura 6.11). Os deslocamentos horizontais dos apoios estão rigidamente prescritos. Os nós estão numerados e as barras com numeração indicadas entre parênteses.

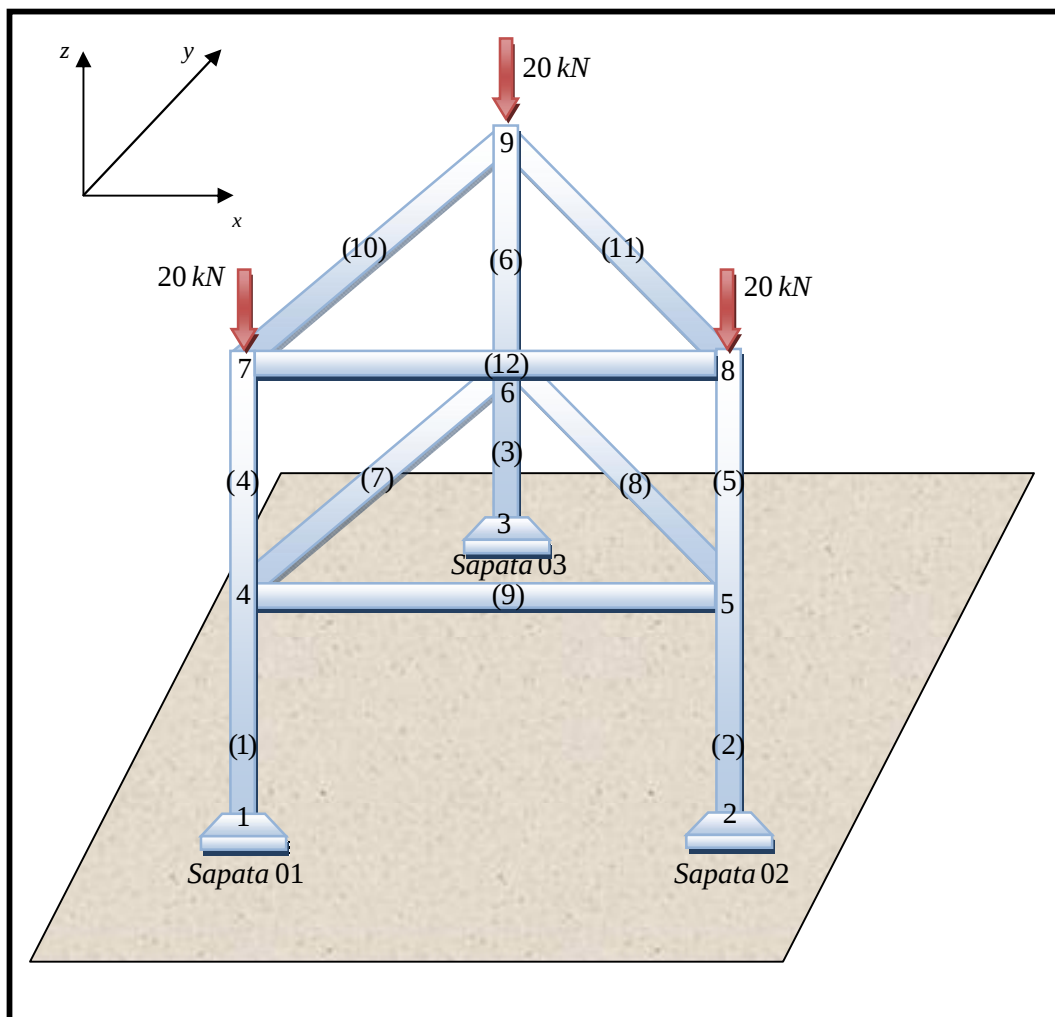


Figura 6.10 ã Pórtico espacial interagindo com o solo

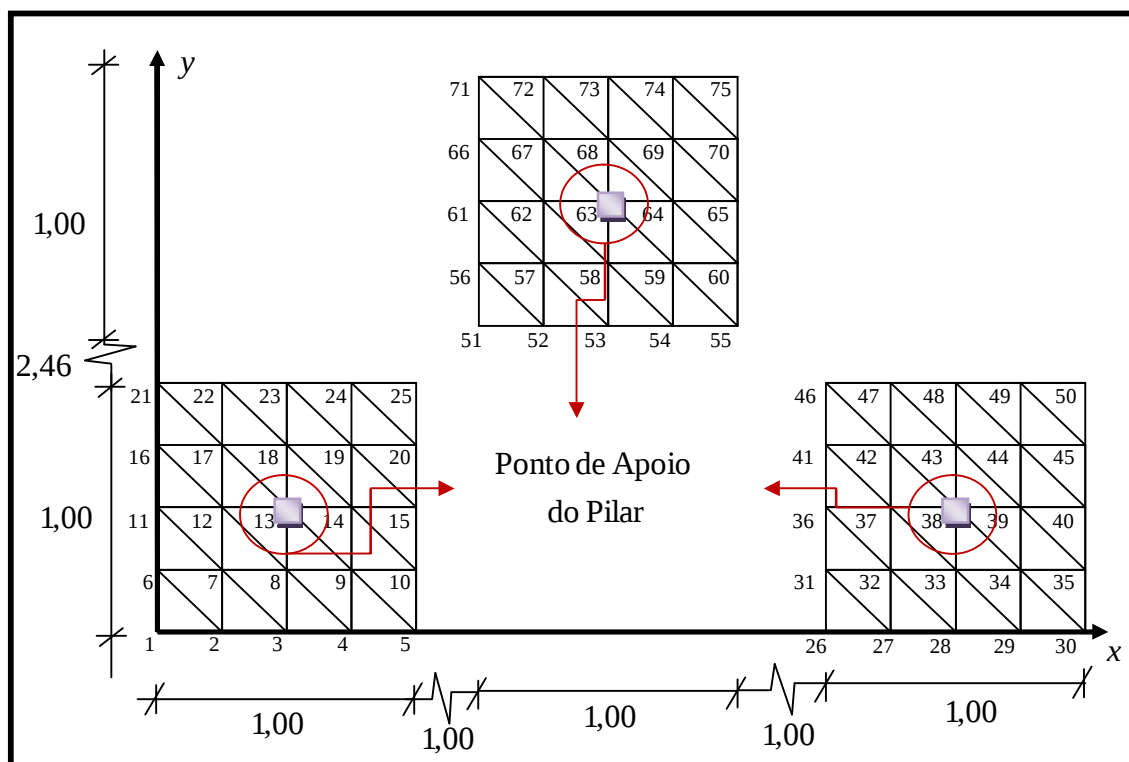


Figura 6.11 ã Discretização das interfaces solo-sapata

Convém notar que a ligação pilar-sapata possui continuidade tanto em deslocamento quanto em rotação e apenas os graus de liberdade associados à translação vertical, as rotações de flexão não necessitam serem prescritas no presente problema. Os nós 1, 2 e 3 do pórtico estão ligados às respectivas sapatas pelos nós 13, 38 e 63 na discretização das interfaces.

Após o processamento dos arquivos de entrada do solo e da estrutura, o aplicativo gera os resultados dos deslocamentos dos apoios (Tabela 6.10) e suas respectivas reações (

Tabela 6.11). Esses resultados seguem as orientações dos graus de liberdade indicadas na

Figura 4.6 (b).

Tabela 6.10 ã Deslocamentos nos apoios.

Nó	u_1 (m)	u_2 (m)	u_3 (m)	u_4 (rad)	u_5 (rad)	u_6 (rad)
01	0,0000E000	0,0000E000	-7,0305E-003	0,0000E000	5,1043E-006	0,0000E000
02	0,0000E000	0,0000E000	-7,0299E-003	0,0000E000	-5,2303E-006	0,0000E000
03	0,0000E000	0,0000E000	-7,0302E-003	0,0000E000	-2,6950E-007	0,0000E000

Tabela 6.11 ã Reações nos apoios.

Nó	f_1 (kN)	f_2 (kN)	f_3 (kN)	f_4 (kN.m)	f_5 (kN.m)	f_6 (kN.m)
01	6,9942E-002	6,1016E-004	2,0001E+001	6,3969E-004	2,0955E-001	-8,6205E-004
02	-6,8800E-002	-5,7646E-004	2,0001E+001	3,3285E-003	-2,0534E-001	-1,8059E-004
03	-1,1418E-003	-3,3701E-005	1,9998E+001	-2,4942E-003	-3,8077E-003	-5,3491E-004

6.1.4.6. Pórtico Espacial Enrijecido

O pórtico espacial enrijecido, mostrado na Figura 6.12 e Figura 6.13, está engastado nas bases e é composto de barras com as seguintes características físicas: $E = 2.8E + 07 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G = 1,077E + 07 \text{ kN} / \text{cm}^2$. Já suas propriedades geométricas das seções transversais são: das barras verticais que representam o núcleo: $A = 4,50E - 02 \text{ m}^2$, $Z_{CT} = 0,0000E + 00 \text{ m}$, $Y_{CT} = -1,0067 \text{ m}$, $I_t = 1.500E - 03 \text{ m}^4$, $I_z = 0.0906E00 \text{ m}^4$, $I_y = 2.6800E - 01 \text{ m}^4$, $\beta = 0$, $I_\omega = 5.133E - 02 \text{ m}^6$, $L = 3,0 \text{ m}$; das barras verticais (pilares): $A = 4.0000E - 02 \text{ m}^2$, $I_p = 2,6660E - 04 \text{ cm}^4$, $I_y = 1,3333E - 04 \text{ m}^4$, $I_z = 1,3333E - 04 \text{ m}^4$ e $L = 3,0 \text{ m}$; das barras horizontais (vigas) $A = 8.0000E - 02 \text{ m}^2$, $I_p = 1,3334E - 03 \text{ m}^4$, $I_y = 2.6667E - 04 \text{ m}^4$, $I_z = 1.0667E - 03 \text{ m}^4$, $L_{V1} = 8,00 \text{ m}$, $L_{V2} = 4,00 \text{ m}$, $L_{V4} = 4,00 \text{ m}$. Na Tabela 6.12 e Tabela 6.14 estão mostrados os resultados da análise. Observando que na Figura 6.13, a numeração dos nós está em preto, a das barras verticais em vermelho, a das barras horizontais em rosa. Já as ações externas são $F = 30 \text{ kN}$ e $P = 500 \text{ kN}$.

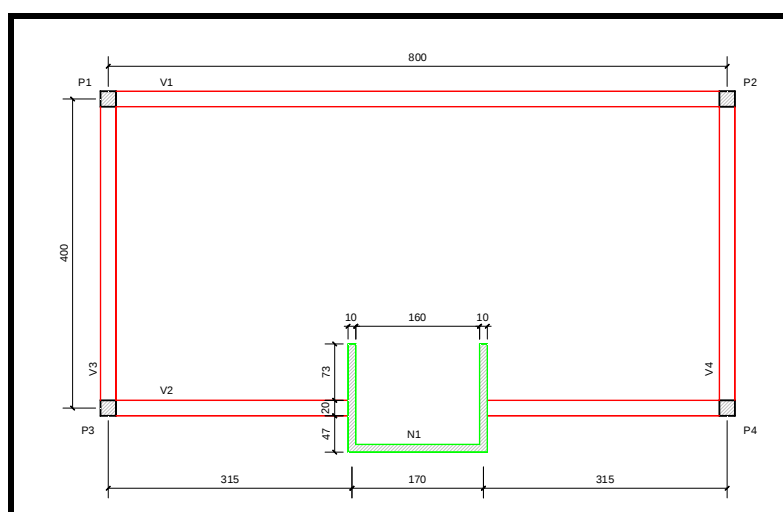


Figura 6.12 ã Pórtico espacial em planta (dimensões em cm)

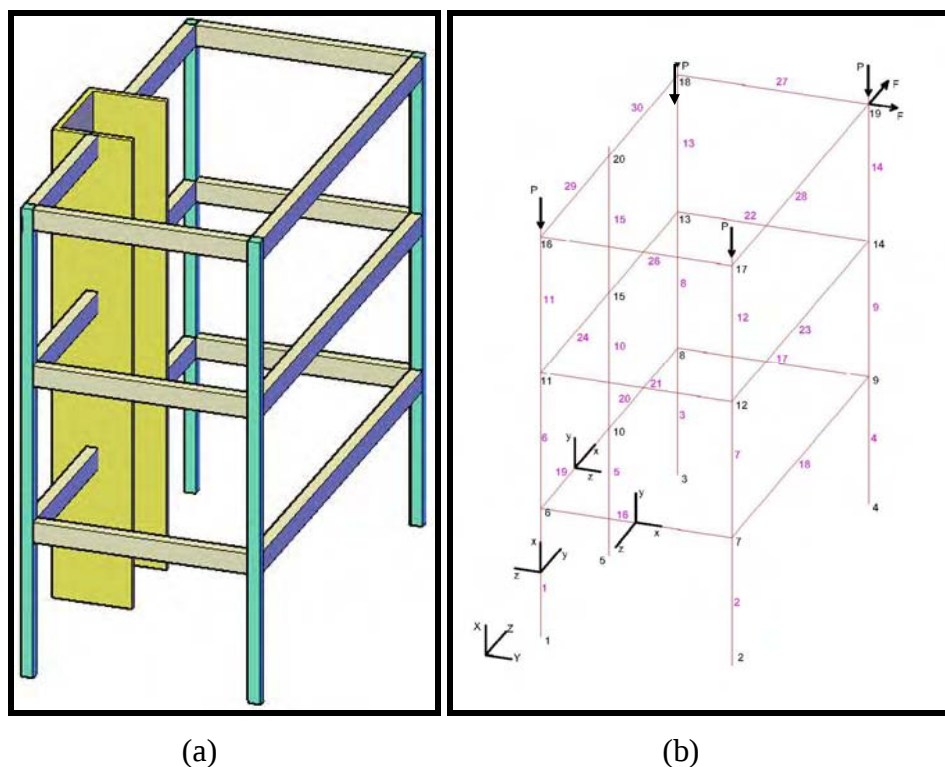


Figura 6.13 ã Pórtico Enrijecido: (a) perspectiva, (b) discretização

No propósito de validar os resultados, optou-se em discretizar o problema do pórtico enrijecido utilizando-se o pacote comercial ANSYS (versão 12.1). Na discretização do problema (vide Figura 6.14), os pilares e vigas foram modelados utilizando um elemento finito de barra (beam 4) e para a estrutura de contraventamento (núcleo estrutural) foi utilizado o elemento de casca (Shell 63). Os resultados para as reações de apoio estão indicados na Tabela 6.12 (força) e na Tabela 6.13, já os deslocamentos estão apresentados na Tabela 6.14.

Tabela 6.12 ã Resultados do SAPROMS NET x Ansys: Componentes de reações de apoio (Forças)

Nó	F _x (kN)		F _y .(kN)		F _z .(kN)	
	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS
1	470,713	476,08	-2,7718	-2,886	-0,5167	-10,114
2	500,969	501,41	-2,828	-2,8844	-2,6509	-2,9026
3	464,226	470,71	-3,8835	-2,5744	0,2566	0,8287
4	530,988	527,31	-3,9405	-2,579	-2,5878	-2,786
5	33,104	24,5	-16,576	-19,076	-24,5012	-24,129

Tabela 6.13 ã Resultados do SAPROMS NET(SPN) x Ansys: Componentes de reações de apoio (Momentos e Bimomento)

Nó	M _x (kN)		M _y (kN)		M _z (kN)		M ₇ (kN)	
	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS
1	-0,481	-0,58099	0,5996	11,889	-4,429	-4,582	-----	-----
2	-0,1689	-0,17537	4,4567	4,8426	-4,4864	-4,5812	-----	-----
3	-0,00101	0,002327	-0,1755	-0,8839	-6,2714	-4,1747	-----	-----
4	-0,3626	-0,48235	4,3921	4,7236	-6,3294	-4,1804	-----	-----
5	13,0713	ND	166,601	ND	-41,0712	ND	79,5456	ND

Tabela 6.14 - Resultados do SAPROMS NET(SPN) x Ansys: Deslocamentos U₁ – U₃ (m) no sistema global

Nó	U _x .10 ³ (m)		U _y .10 ³ (m)		U _z .10 ³ (m)	
	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS	SPN	ANSYS
1	-3,8498	-3,8928	5,8271	6,2381	0,6062	0,5261
2	-4,0148	-4,0184	5,8302	6,2403	12,1197	12,362
3	-3,8115	-3,8557	13,5499	10,99	0,6274	0,3498
4	-4,1828	-4,1673	13,5824	11,024	12,1674	12,407



Figura 6.14 ã Pórtico Enrijecido discretizado pelo ANSYS

Pode-se observar uma boa coerência de resultados entre os modelos. Diferenças podem ser observadas em alguns graus de liberdade já que a representação numérica pelo Ansys do núcleo é mais rigorosa já que seu elemento finito (Shell 63) é desenvolvido a partir de teorias de casca plana (superposição dos efeitos de chapa e placa). Já o elemento finito de núcleo, discutido neste trabalho, é gerado pela superposição dos efeitos axiais, flexão e torção não-uniforme em barras .

6.1.5. Grelha

Na Figura 6.15 está indicado uma grelha cujas propriedades mecânicas e geométricas arbitrárias são dadas por: Módulo de elasticidade longitudinal E ; módulo de elasticidade transversal G ; momentos de inércia I_x , I_y , e comprimento L .

Dados:

$E = 10000$, ksi $G = 4000$, ksi $I_x = 1000 \text{ in}^4$, $I_y = 1000 \text{ in}^4$, $L = 100$ in e $P = 10$ kips.

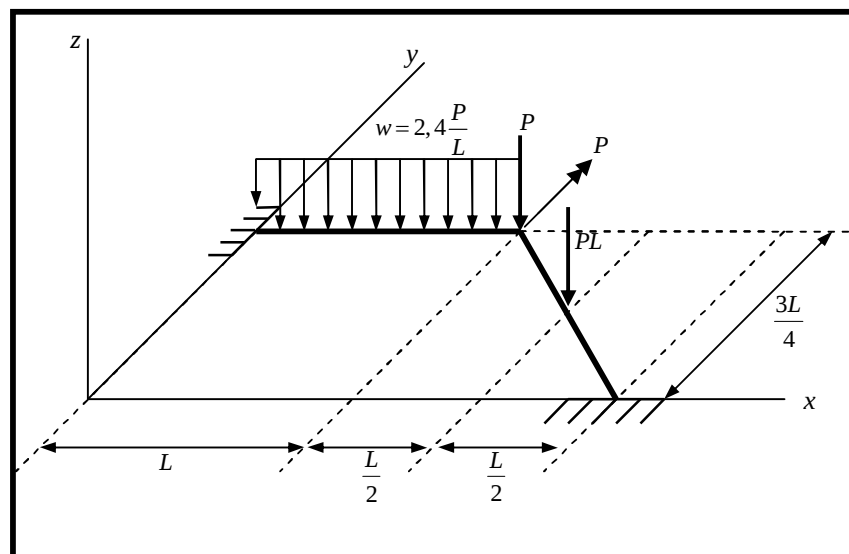


Figura 6.15 - Grelha

Os resultados nodais desse exemplo podem ser comparados com outros dados na literatura conforme indicado na Tabela 6.15

Tabela 6.15 ã Esforços e deslocamentos da estrutura de grelha

Barra 01			
Força/Momento/Torção/Bimomento (kN, kN.cm, kN.cm, kN.cm ²)		Deslocamentos/Rotações (cm/rad)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	Literatura (Gere e Weaver, 1981)
1	0,000E000	3,039E02	303,9
2	0,000E000	-1,311E03	-1311,5
3	0,000E000	2,404E01	24,04
4	-7,598E-03	-3,039E02	-303,9
5	5,095E-03	1,075E02	107,5
6	-3,551E-01	-3,972E-02	-0,0397
Barra 02			
Força/Momento/Torção/Bimomento (kN, kN.cm, kN.cm, kN.cm ²)		Deslocamentos/Rotações (cm/rad)	
Graus de Liberdade	Resultados Obtidos	Resultados Obtidos	Literatura (MORI, 1993)
1	-9,136E-03	-2,923E02	-292,3
2	-4,832E-04	8,964E02	896,4
3	-3,551E-01	-9,963E00	-9,96
4	0000E00	2,923E02	292,3
5	0000E00	1,599E03	1598,7
6	0000E00	2,996E01	29,96

6.2. ANÁLISE DINÂMICA

Nesta seção são abordados exemplos de estruturas reticuladas em regime dinâmico.

6.2.1. Viga Engastada-Apoiada

Seja a viga de aço representada na Figura 6.16, cujas propriedades são dadas por: $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N} / \text{m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, densidade do material $\rho = 7850 \text{ kg} / \text{m}^3$ e comprimento $l = 1 \text{ m}$ e seção retangular com $b = h = 0,1 \text{ m}$, (é considerado o fator de cisalhamento $\kappa = 5/6$). Três discretizações são utilizadas (2, 4 e 16 elementos). Além disso, na Tabela 6.16, estão indicadas as frequências naturais dos quatro primeiros modos, levando-se em conta os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

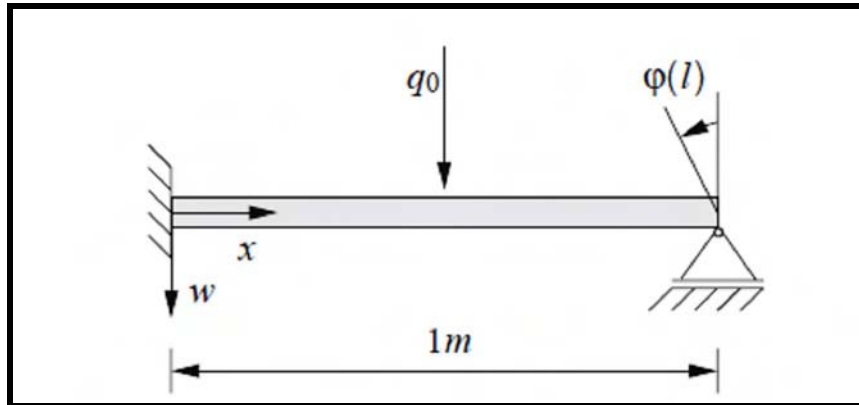


Figura 6.16 ã Viga de aço

Os resultados, indicados na Tabela 6.16, mostram que quando se aumenta a quantidade de elementos, os valores numéricos tendem a se aproximar dos resultados de Antes (2004) obtidos utilizando MEC. Isto é devido ao fato que os resultados são calculados pelo MEF utilizando a interpolação das variáveis estáticas para o caso dinâmico.

Tabela 6.16 ã Resultados do exemplo de viga comparados com os da literatura

Nº do Modo	2 Elementos		4 Elementos		16 Elementos		Antes (2004)	
	Timoshenko	Euler / Bernoulli	Timoshenko	Euler / Bernoulli	Timoshenko	Euler / Bernoulli	Timoshenko	Euler / Bernoulli
1	357,50	369,77	353,27	366,61	352,58	366,38	352,5	364,6
2	1326,49	1326,48	1095,94	1194,71	1077,43	1187,33	1076,5	1166,6
3	1336,95	1387,88	1301,37	1301,37	1293,57	1293,57	1277,2	1438,3
4	3582,97	3698,40	2206,21	2533,03	2091,28	2477,48	2084,9	2385,6

6.2.2. Treliça Plana

Seja a treliça plana da Figura 6.17 (Hutton, 2004), com as seguintes propriedades: $A = 1,5 \text{ in}^2$, $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$ e densidade $\rho = 2,6 \times 10^{-4} \text{ lb} - \text{s}^2 / \text{in}^4$. Já os comprimentos das barras estão indicados na Figura 6.17.

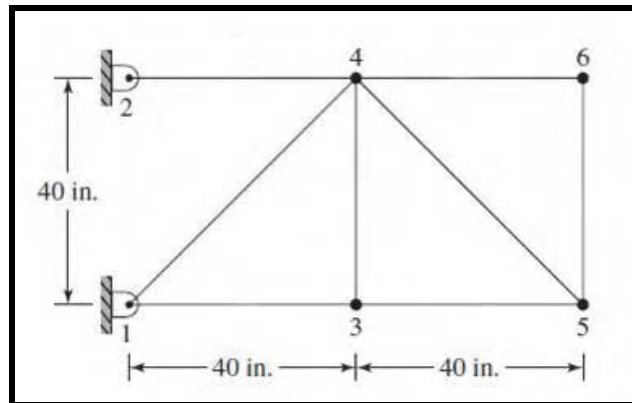


Figura 6.17 ã Exemplo dinâmico para treliça plana

As frequências naturais extraídas pela análise modal são dadas na Tabela 6.17.

Tabela 6.17 ã Frequências naturais da treliça

N.º do modo	Frequências (Rad/s)	
	Formulação proposta	(Hutton, 2004)
1	767,0689750602614	767,1
2	2082,3121764039130	2082,3
3	2958,7107454452870	2958,7
4	4504,7934500527260	4504,8
5	6790,6909810416200	6790,9
6	7976,0223169196320	7975,9
7	8664,7474285174630	8664,5
8	8977,3679884473930	8977,4

6.2.3. Pórtico Plano

Nesta seção são investigadas as primeiras frequências naturais em problemas de pórticos planos. No primeiro exemplo tem-se um caso em que o efeito de deformação é desprezado. Já no segundo exemplo, um estudo mais amplo é analisado.

6.2.3.1. Pórtico Plano sem Efeito do Cortante

Seja o pórtico 2D da Figura 6.18 (Haitao, 2008) cujas propriedades das barras são: $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ e $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$. Nesta análise tanto a deformação por cortante, quanto a inércia de rotação são desprezadas. Três discretizações (2, 4 e 8 elementos por barra) são utilizados. Na Figura 6.18 (b) está ilustrada a segunda discretização.

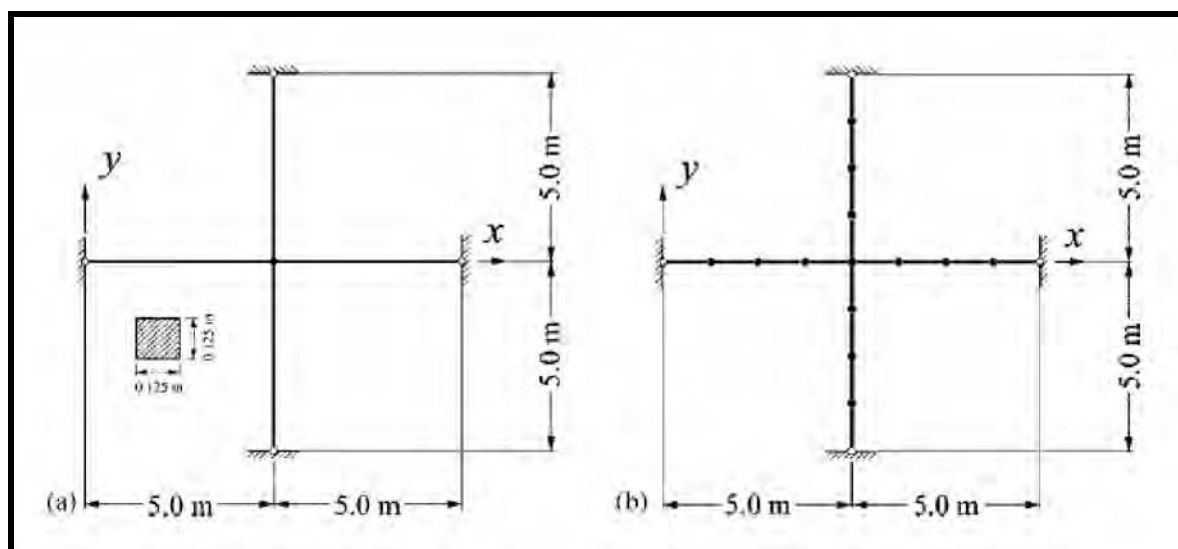


Figura 6.18 ã (a) Pórtico plano articulado em forma de cruz, (b) Discretização do pórtico plano

Os resultados estão listados na Tabela 6.18, onde se verifica que quando o número de elementos da discretização é aumentado, os resultados tendem a se aproximar aos encontrados na literatura.

Tabela 6.18 ã Frequências naturais do pórtico plano

Nº do Modo	2 Elementos	4 Elementos	8 Elementos	Haitao (2008)
	Euler / Bernoulli	Euler / Bernoulli	Euler / Bernoulli	Euler / Bernoulli
1	11,38055192288719	11,33889769746121	11,33599692714683	11,33626
2	17,84320693299091	17,69122415283098	17,68079578559862	17,68079
3	17,84320693299091	17,69203511470484	17,68079578559862	17,68079
4	17,87250035153332	17,72031234039205	17,70940943255627	17,70940
5	50,3272786434215	45,52587438455527	45,35501703291902	45,34504
6	66,66771988014511	57,42491124704853	57,09583605234356	57,07463

7	66,66771988014511	57,46891507762631	57,09583605234356	57,07463
8	67,08270569556231	57,77444844132203	57,41136296543444	57,38980

6.2.3.2. Pórtico Plano Tri-Engastado

Neste exemplo foi considerado o efeito do cortante. O pórtico está representado na Figura 6.19, e as propriedades das barras são: $E = 30 \times 10^6$ psi, $\frac{G}{E} = \frac{3}{8}$, $\kappa = \frac{5}{6}$ e o valor de ρ é escolhido atendendo a relação $\left(\frac{EI}{\rho AL^4} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$.

As frequências naturais são analisadas em função do índice de esbeltez das barras (L/r), onde L é o comprimento e r é o raio de giração. Além disso, foi utilizada uma discretização de quatro elementos por barra, conforme é ilustrado na Figura 6.19 (b).

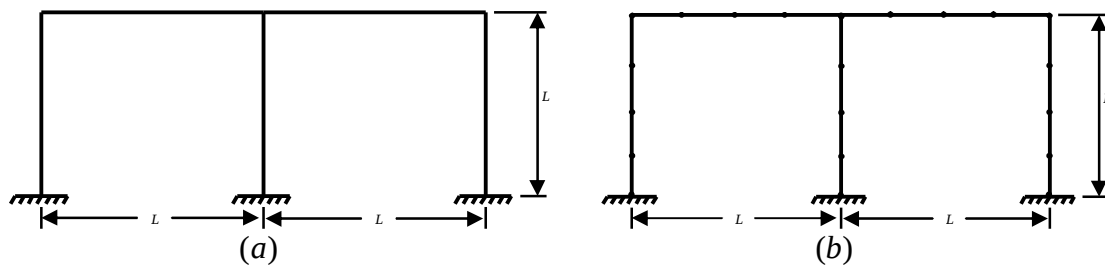


Figura 6.19 ã (a) Pórtico plano e (b) discretização

Os resultados estão dispostos em: Tabela 6.19, Tabela 6.20 e Tabela 6.21. Todas as análises levam em consideração a inércia de rotação. No primeiro caso é desprezada a deformação por cortante (modelo de Euler-Bernoulli), já no segundo esse efeito é levado em consideração (Timoshenko).

Tabela 6.19 ã Resultados das frequências versus índice de esbeltez 10.

L/r	Nº M.	(Euler-Bernoulli)		(Timoshenko)	
		Resultados Obtidos	Dong & Wolf (1971)	Resultados Obtidos	Dong & Wolf (1971)
10	1	2,914569064131067	2,914	2,518654556927195	2,527
	2	8,500720274083994	8,497	7,813891477645058	7,794

	3	9,759311240235608	9,754	8,598514748000495	8,579
	4	11,607968559658980	11,59	10,30138376070195	10,26
	5	13,218917376673790	13,19	12,08151469959473	12,02
	6	14,507506959457610	14,48	12,91820794210818	12,82
	7	18,800517882660840	18,73	13,73674954142599	13,66
	8	18,980512563619940	18,93	16,04686834377905	15,89
	9	19,529465543482300	19,47	16,11930237881552	15,98
	10	25,072311193310810	24,91	19,82564919408181	19,56

Tabela 6.20 ñ Resultados das freqüências versus índice de esbeltez 20.

L/r	Nº M.	(Euler-Bernoulli)		(Timoshenko)	
		Resultados Obtidos	Dong & Wolf (1971)	Resultados Obtidos	Dong & Wolf (1971)
20	1	2,955532807985245	2,955	2,833011515423295	2,839
	2	11,678787982711100	11,67	11,01453341222689	11,03
	3	13,127934591015320	13,12	12,28290420534873	12,29
	4	17,515532657539820	17,50	15,96581622084058	15,97
	5	19,983061674984890	19,95	17,74106426706484	17,76
	6	20,691122700176280	20,67	18,22328299766238	18,24
	7	23,996452069296880	23,94	23,43869007395278	23,29
	8	28,314341738020440	28,22	27,35407171259541	27,15
	9	29,235454366097810	29,13	28,39316921559601	28,19
	10	33,020922877113080	32,87	31,54718262294293	31,29

Tabela 6.21 ñ Resultados das freqüências versus índice de esbeltez 50.

L/r	Nº M.	(Euler-Bernoulli)		(Timoshenko)	
		Resultados Obtidos	Dong & Wolf (1971)	Resultados Obtidos	Dong & Wolf (1971)
50	1	2,967634292559068	2,967	2,945937517869633	2,966
	2	12,175718589428110	12,15	12,01884887464205	12,14
	3	15,132806450050420	15,09	14,86462810093484	15,08
	4	20,761206117260130	20,68	20,25382375525630	20,66

5	21,595739071514130	21,52	20,97290761920975	21,50
6	22,199716734582520	22,12	21,52361473384379	22,09
7	43,353473697509240	42,85	41,93547405687696	42,87
8	44,910334115341010	44,48	43,52293475409689	44,46
9	53,468622150636170	52,84	51,34424214234615	52,83
10	55,674639894154230	54,81	52,86201912910866	54,87

6.2.4. Pórtico Espacial

Na Figura 6.20 está indicado um pórtico espacial do qual se pretende encontrar os dois primeiros modos assimétricos de vibração. Por isso, o pórtico foi discretizado em um quarto de sua estrutura aplicando-se condições de contorno especiais. As propriedades das barras são: $E = 219,9 \text{ GN} / \text{m}^2$, $\rho = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$ e $L = 1 \text{ m}$. Petyt (2004) sugere as seguintes condições de contorno no sistema global para a solução do problema: nó 1, prescrito em todos os graus de liberdade; nós 5 e 8, $U_z = \theta_x = \theta_z = 0$; nós 3 e 7 $U_y = U_z = 0$.

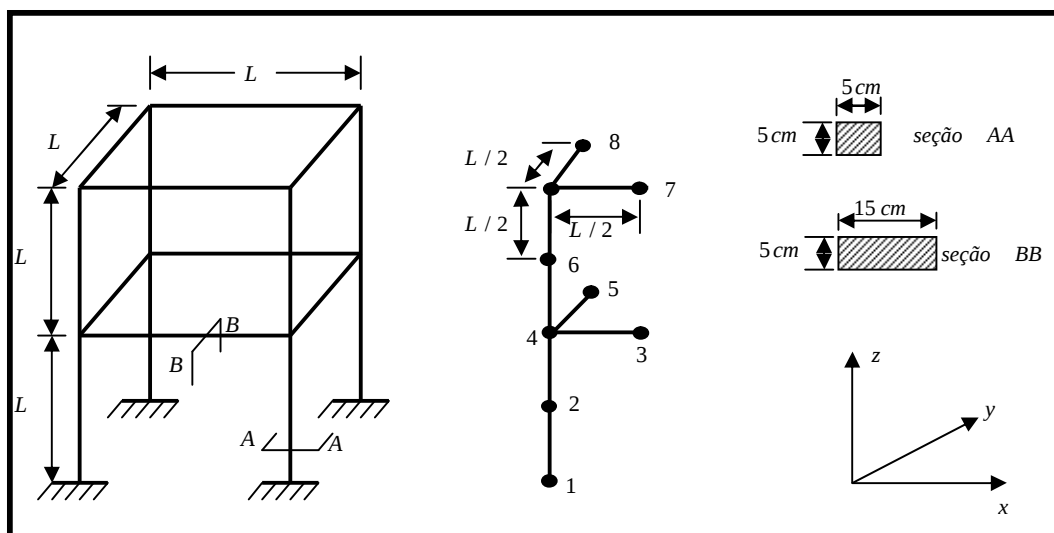


Figura 6.20 ã Pórtico Espacial com sua discretização

Tabela 6.22 ã Resultados das frequências obtidas para a viga comparados com os da literatura

N.º do	Frequências (Hz)
--------	------------------

modo	Formulação proposta	(Petit, 2004)
1	11,808629946896500	11,8
2	34,113926931438850	34,1

6.2.6. Vigas com seção de paredes finas

Nesta seção, são investigadas frequências naturais envolvendo problemas de barras de seção transversais abertas compostas por paredes finas. No primeiro exemplo, é estudado um perfil de aço duplamente simétrico, onde o efeito de deformação por cortante é desprezado. Já no segundo exemplo tem-se uma barra com seção monossimétrica em que a deformação por cortante foi incorporada no cálculo das frequências naturais.

6.2.6.1. Perfil I bi-apoiado

Neste exemplo (Vörus, 2004) é estudada uma seção duplamente simétrica, que está simplesmente apoiada, com suas propriedades listadas a seguir.

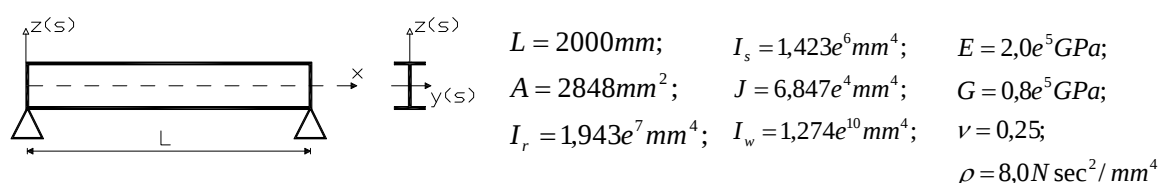


Figura 6.21 ñ Viga simplesmente apoiada

Para a análise desse problema, utilizou-se uma discretização de oito elementos e tomou-se uma frequência inicial de $6,942E-4$ rad/s, com um incremento de $8.92E-4$ rad/s com 20 interações. Após o processamento, o aplicativo vai listar os vetores de frequências nodais. Na Figura 6.22 estão plotados os resultados das amplitudes verticais do nó central para as sete primeiras frequências. Convém notar que a Figura 6.22 indica a primeira frequência natural identificada na 10.^a interação cujo valor é $8,72E-03$ rad/s. Esse valor é muito próximo do analítico de (VLASOV, 1961)

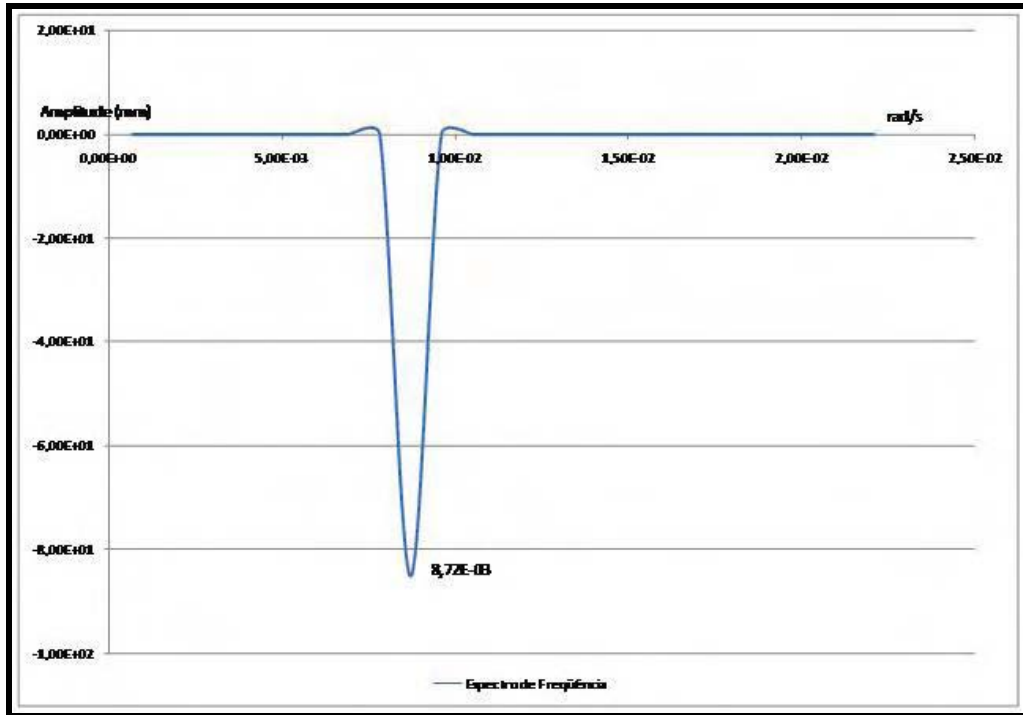


Figura 6.22 ã Resposta Amplitude versus Frequência

6.2.6.2. Viga de parede fina semi-circular engastada

Na Figura 6.23 está indicada uma viga de parede fina semi-circular engastada com suas propriedades. Nesse exemplo foram utilizados com 3 discretizações com 4, 8 e 16 elementos.

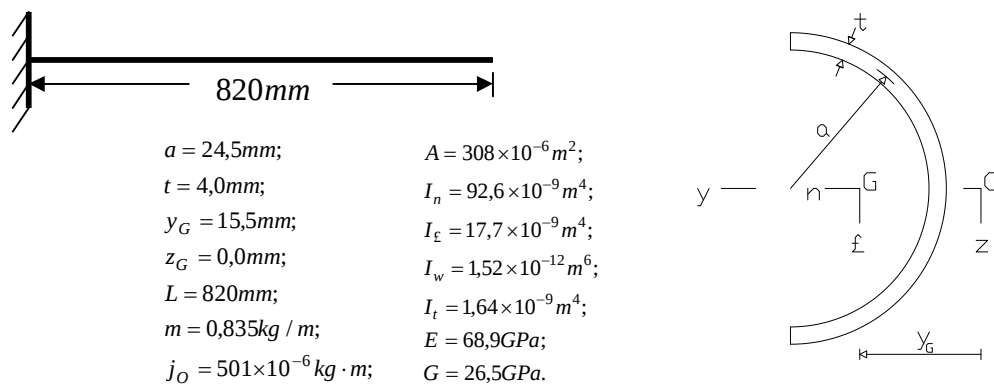


Figura 6.23 ã Viga de parede fina semi-circular engastada com suas propriedades

Na Tabela 6.23 e Tabela 6.24 estão indicados algumas frequências naturais da viga, exceto os modos axiais de vibração.

Tabela 6.23 Inércia de rotação e deformação por cortante incluídos

n	M = 4 (Hz)	M = 8 (Hz)	M = 16 (Hz)	Bercin&Tanaka(1997) (Hz)
1	63,6092677661	63,5417683854	63,5243628713	63,51
2	137,0111602438	137,4474469243	137,6001333980	137,39
3	281,1129605071	276,9956369846	276,2689983909	275,82
4	496,7037716082	484,0813560302	481,9544242844	481,10
5	612,2836490946	630,8995472089	638,0319417798	639,76

Tabela 6.24 Inércia de rotação incluída e deformação por cortante desconsiderado

n	m=4 (Hz)	m=8 (Hz)	m=16 (Hz)	Friberg (1985) (Hz)
1	63,8564319024	63,7905156264	63,7735472674	63,76
2	137,1486402031	137,5900600591	137,7439044460	137,50
3	283,4292975084	279,3912931142	278,7113474431	278,20
4	499,7064129411	486,8330008815	484,8215766800	483,90
5	625,7898961481	647,4787729524	655,4515926202	657,30

Conforme se pode notar tanto na Tabela 6.23 quanto na Tabela 6.24, os elementos aqui discutidos tem uma bom desempenho em relação aos apresentados em Bercin & Tanaka (1997) e Friberg (1985).

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um ambiente amigável para a análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas, com a opção de análise de interação da estrutura com o solo, utilizando a linguagem Java para implementação dos métodos dos elementos finitos (MEF) e elementos de contorno (MEC). Convém notar que a interação solo-estrutura foi disponibilizada apenas para o regime estático e analisada pelo acoplamento MEC-MEF.

Embora a solução de estruturas reticuladas com o uso de elementos finitos já esteja amplamente difundida, algumas técnicas e teorias aqui abordadas são pouco conhecidas. Esse o caso da análise de pórticos espaciais apoiados no meio contínuo, que no presente trabalho é proposta de análise pelo o acoplamento MEC-MEF.

Além disso, outra contribuição do presente trabalho é a apresentação das formas explícitas das matrizes de massa do elemento finito de núcleo.

Após a formulação analítica iniciada a partir das equações de energia, obtiveram-se as matrizes de rigidez e de massa de cada estrutura reticular abordada neste trabalho, bem como os seus respectivos vetores de forças nodais, para o caso do solo a matriz de contribuição foi obtida a partir da solução fundamental de Boussinesq-Cerruti, iniciou-se o processo do desenvolvimento algorítmico para a criação do ambiente de cálculo em Java.

A escolha da linguagem Java se deu em detrimento de suas inúmeras vantagens em relação às outras: é de fácil desenvolvimento e compreensão, é orientada a objetos, possui uma vasta documentação e ferramentas para desenvolvimento, além de ser uma linguagem robusta e estável. Além disso, outro atrativo da linguagem Java é sua portabilidade uma vez que sua execução independe do sistema operacional em uso. Outro aspecto relevante do Java é a possibilidade de incorporar num código HTML um applet (programa desenvolvido para WEB), de tal forma que o cálculo fica disponibilizado diretamente numa página da internet.

Assim, o ambiente de análise proposto, chamado de SAPROMS NET, foi essencialmente voltado para as etapas de pré-processamento e processamento, onde os

dados da estrutura são coletados e os cálculos da análise estrutural são efetuados, respectivamente. A etapa de pós-processamento, embora tenha sido considerada, não foi efetivamente implementada.

Sugere-se futuras contribuições a este trabalho principalmente no que diz respeito ao refinamento da análise e incorporação do dimensionamento de estruturas, tais como estruturas metálicas e de concreto armado, incorporação de algoritmos de decisão (redes neurais). Melhoria da interface com introdução de ferramentas gráficas desenvolvidas em OpenGL. O presente trabalho pode vir a ser uma proposta de solução para soluções de parcelas dos problemas de engenharia estrutural que são comumente encontrados nos escritórios de análise de cálculo estrutural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANSYS INTERACTIVE ñ *Release 12.1 ñ University high option*, 2010.
- Antes, H.; Schanz, M.; Alvermann, S. *Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams*. Journal of Sound and Vibration 276 (2004) 807-836.
- Beer, F. P.; Johnston E. R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5.^a ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
- Bercin A. K., Tanaka. *Coupled flexural-torsional vibrations of timoshenko beams*. Journal of Sound and Vibration, 1997, Vol 207(1).
- Boussinesq, J. *Applications des potentials à l'étude de l'équilibre et du Mouvement des Solides Elastique*. Gualtier-Villars, Paris, 1885.
- Cerruti, V. *Acc. Lincei., Mem. Fis. Mat.*, Roma, 1882.
- Clough, R. W., *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.
- Clough, R. W.; Wilson E. L. *Early Finite Element Research at Berkely*, Present at the Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, 1990.
- Deitel, H. M.; Deitel, P. J. *Java Como Programar*: 4 ed. São Paulo: Bookman, 2002.
- Dutta, SC; Roy R. *A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system*. Computers & Structures 2002, 80:1579-1594.
- Foley, Christopher M. and Schinler, D., *Automated Design of Steel Frames Using Advanced Analysis and Object-Oriented Evolutionary Computation*, Journal of Strutural Engineering, May 2003.
- Friberg, P.O. *Beam element matrices derived from Vlasovs theory of open thin-walled elastic beam.s* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, vol. 21, pp. 1205-1211.
- Ftool - *Two-dimensional Frame Analysis Tool*. Versão educacional 2.12, disponível em: <https://web.tecgraf.puc-rio.br/ftool/>

- Gopalakrishnan S.; Mitra Mira. *Wavelet Methods for Dynamical Problems with Application to Metallic, Composite, and Nano-Composite Structures*. CRC Press Taylor & Francis Group, 2010.
- Harr, ME *Foundation of theoretical soil mechanics*. New York:Mcgraw-Hill Book Company, 1966.
- Hughes, T. J. R.,. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- Hutton, D. V. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York:Mcgraw-Hill Book Company, 2004.
- Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Ed. Mir-Moscou, 1982.
- Mackerle, J. *Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements an addendum A bibliography (1996-1999)* Engineering Computations, Vol. 17 No. 3, pp. 274-360, 2000.
- Manssour, I. H., *Introdução a Java 3D*. Faculdade de Informática - PUCRS, Porto Alegre/RS.2003. Disponível em: <http://www.inf.pucrs.br/~manssour>.
- Matias Junior, I. G. *Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis*. Tese(mestrado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1997.
- Mendonça, AV *Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2002.
- Mendonça, A. V.; Paiva, J. B. *An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 27, p. 919-931, 2003.
- Mendonça, AV. *Métodos Numéricos II: Notas de Aula*. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2008.
- Mendonça, A.V. *Análise numérica da interação solo-estrutura: estudo de casos utilizando-se o método dos elementos de contorno*. Relatório do projeto Recém-Doutor/CNPq, 2004.
- Mendonça, A. V.; Paiva, J. B. *A boundary element formulation for the static analysis of raft foundations on piles*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 24, p.

- 237-247, 2000.
- Mendonça, A. V. *Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno*. Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, 1997.
- Mendonça, P.T.R. *Análise Dinâmica pelo Métodos dos Elementos Finitos*. UFSC, 2006.
- Mindlin RD. *A force at the interior point of a semi-infinite solid*. Physics, 1936; 7:195-202.
- Mori, D. D. *Os núcleos estruturais e a não linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. Tese(doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992.
- Nikishkov, Gennadiy. *Programming Finite Elements in Java™*. Springer London Dordrecht Heidelberg, New York, 2010.
- Oliveira, U. *Programação em Java*. Notas-de-aula, Departamento de Informática, UFPB, 2002. Disponível em: <http://www.di.ufpb.br/ulysses>.
- Onu, G. *Inclusion of warping shear effect in thin-walled core element for multistory building*. Computers & Structures, v.35, n.2, p.175-182,1990.
- Paiva J. B. *Formulação do método dos elementos de contorno para a análise da interação solo-estrutura*. Tese(livre docência), Escola de Engenharia de São Carlos, 1993.
- Petyt, M. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- Poulos, HG; Davis, EH *Pile foundation analysis and design*. New York: John Wiley and sons, 1980.
- Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. Second Edition. McGraw-Hill, 1993.
- Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Company, 1977.
- Salvino, M. M. *Análise de pórticos espaciais apoiados em base elástica utilizando programação orientada a objetos em Java*. Relatório PIBIC/CNPq em Laboratório de Ensaio de Materiais e Estruturas, Universidade Federal da Paraíba, 2006.
- Salvino, M. M. *Matriz de rigidez de núcleo estrutural com deformação por cortante em IX Encontro de Modelagem Computacional CEFET-MG e IPRJ/UERJ*, 2006.
- Schottler, R. *Java applet for analysis of Trusses, Beams and Frames*. Msc thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, USA, 2004.

- Soriano, H. L. & Lima, S. S., 1999. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estrutura*. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Souza Junior, E. *Análise da interação entre núcleos estruturais e lajes em edifícios altos*. Tese(doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2001.
- Sun Microsystems. *A practical guide for programmers*. Disponível em <http://java.sun.com/docs/books/tutorial/index.html> (Janeiro 2010).
- Straughan W. T. *Analysis Of Plates On Elastic Foundations*. PhD Thesis. Texas Tech University, 1990.
- Taranath, B.S. *Torsional behaviour of open section shear wall structures*. PhD Thesis. University of Southampton, 1968.
- Thompson, W. (Lord Kelvin); Taiti PG *Treatise on natural philisophy*. Cambridge University Press, 1889.
- Vlasov, V. Z. *Thin-walled elastic beams*. Washington: National Science Foundation, 1961.
- Vörös, G. M. *Free vibration of thin-walled beams*. Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng., vol. 48, n. 1, pp. 99ñ110. 2004.
- Weaver, W. e Gere, J. M., *Análise de Estruturas Reticuladas*. 1981. Ed. Guanabara.
- Zienkiewics, O. C. *The Finite Element Method, Second Edition*. McGraw-Hill, 1977
- Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K., *óFinite Elements and Approximationô*, Wiley-Interscience, 1983.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *óThe Finite Element Methodô*, 4th Edition, vol. 1: *óBasic Formulation and Linear Problemsô*, MacGraw-Hill, 1989.

APÊNDICE A

Nesta seção estão indicados os resultados das integrais e funções de forma associadas às Eqs. (3.104), (3.105) e (3.106).

O primeiro conjunto de integrais é dado por:

$$\int_0^L Q_i Q_j dx = \int_0^L \begin{pmatrix} Q_1^2 & Q_1 Q_2 & Q_1 Q_3 & Q_1 Q_4 \\ Q_2 Q_1 & Q_2^2 & Q_2 Q_3 & Q_2 Q_4 \\ Q_3 Q_1 & Q_3 Q_2 & Q_3^2 & Q_3 Q_4 \\ Q_4 Q_1 & Q_4 Q_2 & Q_4 Q_3 & Q_4^2 \end{pmatrix} dx$$

Onde as funções Q_i são:

$$Q_1 = -\frac{\gamma \alpha}{(G.I_x)} (sh - sh \cosh(\alpha.x) + \sinh(\alpha.x)(ch - 1))$$

$$Q_2 = \frac{\gamma \alpha}{(G.I_x)} \left[\cosh(\alpha.x) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{ch}{\alpha} + L.sh \right) + \sinh(\alpha.x) \left(\frac{sh}{\alpha} - L.ch \right) + 1 - ch \right]$$

$$Q_3 = \frac{\gamma \alpha}{(G.I_x)} (\sinh(\alpha.x)(ch - 1) - sh \cosh(\alpha.x) + \alpha.sh)$$

$$Q_4 = \frac{\gamma \alpha}{(G.I_x)} \left[\frac{\cosh(\alpha.x)(ch - 1)}{\alpha} + \sinh(\alpha.x) \left(L - \frac{sh}{\alpha} \right) + \frac{1 - ch}{\alpha} \right]$$

Resultando em:

$$\int_0^L Q_1^2 dx = \frac{\dot{E}^2 \alpha}{(G.I_x)^2} (-3ch.sh + 3sh + ch^2 \alpha L - 2L\alpha + ch\alpha L)$$

$$\int_0^L Q_1 Q_2 dx = \frac{\dot{E}^2 \alpha}{2(G.I_x)^2} (-4 + L.sh + 8ch - sh.L.ch + 2ch.sh\alpha.L + L^2.ch\alpha - 2Lsh\alpha - 4ch^2 - L^2\alpha)$$

$$\int_0^L Q_1 Q_3 dx = \frac{\dot{E}^2 \alpha}{(G.I_x)^2} (2ch.sh\alpha - 2\alpha sh + shch - sh - ch^2\alpha^2 L + L\alpha^2 + L\alpha - chL\alpha)$$

$$\int_0^L Q_1 Q_4 dx = \frac{\dot{E}^2}{2(G.I_x)^2} (-4 - Lsh\alpha - 4ch^2 + 8ch + shLch\alpha + L^2ch\alpha^2 - L^2\alpha^2)$$

$$\int_0^L Q_2^2 dx = -\frac{\dot{E}^2}{2\alpha(G.I_x)^2} (-4L\alpha + 2sh - 2\alpha^3 L - 2sh\alpha^2 L^2 - 2ch^2 L\alpha^3 + 4Lch\alpha^3 + 2ch\alpha.L + 2L.ch^2\alpha + 4Lch^2\alpha^2 - 8Lch\alpha^2 - 2sh.ch + 4L\alpha^2 - L^2sh.ch\alpha^2 + L^3\alpha^3)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L Q_2 Q_3 dx &= -\frac{\ddot{E}\alpha}{2(G.I_x)^2} \left(-4 - \alpha L^2 + 8ch - 2ch.sh\alpha.L + 2sh.ch\alpha^2 L - 4.ch^2 - 2shL\alpha^2 + L.sh.ch + \right. \\
&\quad \left. 2L.sh\alpha - L.sh + ch.L^2\alpha \right) \\
\int_0^L Q_2 Q_4 dx &= \frac{\ddot{E}}{2\alpha(G.I_x)^2} \left(-6L\alpha + 2sh + 6Lch\alpha - 2sh.ch + L^3 ch\alpha^3 - 3L^2 sh\alpha^2 \right) \\
\int_0^L Q_3^2 dx &= \frac{\ddot{E}.\alpha}{(G.I_x)^2} \left(ch.sh - 4ch\alpha sh - sh + 4\alpha sh + chL\alpha - L\alpha + ch^2\alpha^3.L - L\alpha^3 \right) \\
\int_0^L Q_3 Q_4 dx &= -\frac{\ddot{E}}{2(G.I_x)^2} \left(-4 - L.sh\alpha - 4ch^2 + 8ch - L^2\alpha^2 + sh.chL.\alpha - ch.L^2\alpha^2 \right) \\
\int_0^L Q_4^2 dx &= -\frac{\ddot{E}}{2\alpha(G.I_x)^2} \left(2sh - 2L\alpha - 2sh.ch + 4Lch^2\alpha - L^2 sh.ch\alpha^2 - 2L.ch\alpha - 2sh.L^2\alpha^2 + L^3\alpha^3 \right)
\end{aligned}$$

O segundo conjunto de integrais é dado por:

$$\int_0^L V_i V_j dx = \int_0^L \begin{pmatrix} V_1^2 & V_1 V_2 & V_1 V_3 & V_1 V_4 \\ V_2 V_1 & V_2^2 & V_2 V_3 & V_2 V_4 \\ V_3 V_1 & V_3 V_2 & V_3^2 & V_3 V_4 \\ V_4 V_1 & V_4 V_2 & V_4 V_3 & V_4^2 \end{pmatrix} dx,$$

cujas funções interpoladoras V_i são:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\ddot{E}}{G.I_t} \left[(sh.\alpha.L - ch + 1) + (-\alpha.sh).x + (1 - ch).cosh(\alpha.x) + sh.senh(\alpha.x) \right] \\
V_2 &= \frac{\ddot{E}}{G.I_t} \left[\left(L.ch - \frac{sh}{\alpha} \right) + (1 - ch)x + \left(-L.ch + \frac{sh}{\alpha} \right) cosh(\alpha.x) + \left(\frac{1}{\alpha} + sh.L - \frac{ch}{\alpha} \right) senh(\alpha.x) \right] \\
V_3 &= \frac{\ddot{E}}{G.I_t} \left[(1 - ch) + (\alpha.sh).x + (ch - 1) cosh(\alpha.x) - sh.senh(\alpha.x) \right] \\
V_4 &= \frac{\ddot{E}}{G.I_t} \left[\left(\frac{sh}{\alpha} - L \right) + (1 - ch).x + \left(L - \frac{sh}{\alpha} \right) cosh(\alpha.x) + \left(\frac{ch - 1}{\alpha} \right) senh(\alpha.x) \right]
\end{aligned}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}
\int_0^L V_1^2 dx &= \frac{\ddot{E}^2}{3\alpha(G.I_x)^2} \left(-15sh - 3ch^2\alpha L + 12\alpha L + 15chsh - 3sh\alpha^2 L^2 ch - 9ch\alpha L + \alpha^3 L^3 ch^2 - \alpha^3 L^3 + \right. \\
&\quad \left. 3sh\alpha^2 L^2 \right) \\
\int_0^L V_1 V_2 dx &= \frac{\ddot{E}^2 L}{6\alpha(G.I_x)^2} \left(-12ch^2\alpha L + 15\alpha L - 21sh + 21chsh + 2shL^2\alpha^2 ch - 3chL\alpha + sh\alpha^2 L^2 \right) \\
\int_0^L V_1 V_3 dx &= \frac{\ddot{E}^2}{6\alpha(G.I_x)^2} \left(18ch^2 L\alpha - 12\alpha L + 30sh - 30ch.sh - 6sh\alpha^2 L^2.ch - 6ch\alpha.L + ch^2 L^3\alpha^3 - \right. \\
&\quad \left. \alpha^3 L^3 + 6sh\alpha^2 L^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L V_1 V_4 dx &= -\frac{\ddot{E}^2}{6\alpha^2 (G.I_x)^2} \left(-24 - 15sh\alpha L + 48ch + 15sh\alpha Lch - 24ch^2 - 6ch^2\alpha^2 L^2 + 3\alpha^2 L^2 + \right. \\
&\quad \left. sh.ch\alpha^3 L^3 + 3L^2\alpha^2 ch + 2.sh.\alpha^3 L^3 \right) \\
\int_0^L V_2^2 dx &= \frac{\ddot{E}^2}{6\alpha^3 (G.I_x)^2} \left(-18ch.sh - 15sh\alpha^2 L^2 ch - 18.L.\alpha + 18sh - 12sh.L^2\alpha^2 + 2L^3\alpha^3 ch + \right. \\
&\quad \left. 2L^3\alpha^3 ch^2 + 36ch^2 L\alpha - 18L.\alpha.ch + 5L^3\alpha^3 \right) \\
\int_0^L V_2 V_3 dx &= \frac{\ddot{E}^2}{6\alpha^2 (G.I_x)^2} \left(-24 - 15sh\alpha L + 48ch + 15sh\alpha Lch - 24ch\alpha^2 - 6\alpha^2 ch^2 L^2 + 3\alpha^2 L^2 + \right. \\
&\quad \left. ch.shL^3\alpha^3 + 3chL^2\alpha^2 + 2shL^3\alpha^3 \right) \\
\int_0^L V_2 V_4 dx &= -\frac{\ddot{E}^2}{6\alpha^2 (G.I_x)^2} \left(18sh - 42\alpha L + 12ch^2 L\alpha + 30chL\alpha - 21sh^2 L^2 - 18ch.sh - \right. \\
&\quad \left. 6shL^2\alpha^2 ch + L^3\alpha^3 + L^3\alpha^3 ch^2 + 7L^3 ch\alpha^3 \right) \\
\int_0^L V_3^2 dx &= \frac{\ddot{E}^2}{3\alpha (G.I_x)^2} \left(-15sh - 3ch^2 L\alpha + 12.L\alpha + 15chsh - 3sh\alpha^2 L^2 ch - 9ch.\alpha.L + \alpha^3 L^3 ch^2 - \right. \\
&\quad \left. L^3\alpha^3 + 3sh\alpha^2 L^2 \right) \\
\int_0^L V_3 V_4 dx &= -\frac{\ddot{E}^2.L}{6\alpha (G.I_x)^2} \left(-21sh - 12ch^2\alpha L + 15\alpha L + 21ch.sh + 2\alpha^2 L^2 sh.ch - 3ch\alpha L + shL^2\alpha^2 \right) \\
\int_0^L V_4^2 dx &= \frac{\ddot{E}^2}{6\alpha^3 (G.I_x)^2} \left(-18ch.sh - 15sh\alpha^2 L^2 ch - 18\alpha.L + 18sh - 12sh\alpha^2 L^2 + 2ch\alpha^3 L^3 + 2ch^2\alpha^3 L^3 + \right. \\
&\quad \left. 36ch^2\alpha L - 18ch\alpha.L + 5\alpha^2.L^3 \right)
\end{aligned}$$

O terceiro conjunto de integrais é dado por:

$$\int_0^L V_i \tilde{N}_j dx = \int_0^L \begin{pmatrix} V_1 \tilde{N}_1 & V_1 \tilde{N}_2 & V_1 \tilde{N}_3 & V_1 \tilde{N}_4 \\ V_2 \tilde{N}_1 & V_2 \tilde{N}_2 & V_2 \tilde{N}_3 & V_2 \tilde{N}_4 \\ V_3 \tilde{N}_1 & V_3 \tilde{N}_2 & V_3 \tilde{N}_3 & V_3 \tilde{N}_4 \\ V_4 \tilde{N}_1 & V_4 \tilde{N}_2 & V_4 \tilde{N}_3 & V_4 \tilde{N}_4 \end{pmatrix} dx,$$

cujas funções interpoladoras $\tilde{N}_i$ são dadas por:

$$\tilde{N}_1 = \frac{(-1 + \bar{\xi})(\bar{\xi}^2 + \bar{\xi} - 2 - 6\beta_z)}{fat_z}$$

$$\tilde{N}_2 = -\frac{L}{2 + fat_z} [(-1 + \bar{\xi}^2)(-\bar{\xi} + 1 + 3\beta_z)]$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{(1 + \bar{\xi})(-\bar{\xi}^2 + \bar{\xi} + 2 + 6\beta_z)}{fat_z}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{L}{2 + fat_z} [(-1 + \bar{\xi}^2)(\bar{\xi} + 1 + 3\beta_z)]$$

Sendo, $fat_z = 4(1 + 3\beta_z)$, $\bar{\xi} = \frac{2x}{L} - 1$.

Resultando em:

$$\int_0^L \tilde{N}_1 V_1 dx = \frac{\dot{E}}{20(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^3} (480 + 240shL\alpha - 480ch - 20\alpha^3 shL^3 - 60\beta_z sh\alpha^3 L^3 + 120\beta_z chL^2 \alpha^2 - 120\beta_z L^2 \alpha^2 - 30\beta_z chL^4 \alpha^4) + 20\alpha^5 \beta_z shL^5 + 10\alpha^4 L^4 + 30\beta_z L^4 \alpha^4 + 7shL^5 \alpha^5 - 10ch\alpha^4 L^4)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_2 V_1 dx = \frac{0,0083333\dot{E}}{(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^2} (1440 + 120L^2 \alpha^2 + 720L.\alpha.sh - 1440ch - 120ch.L^2.\alpha^2 + 30\beta_z L^4 \alpha^4 - 10ch.L^4 \alpha^4 + 6shL^5 \alpha^5 + 10.\alpha^4.L^4 - 30\beta_z chL^4 \alpha^4 + 15\beta_z shL^5 \alpha^5)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_3 V_1 dx = \frac{\dot{E}}{(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^3} (-480 + 120\beta_z L^2 \alpha^2 - 240\alpha.sh.L + 480ch - 120\beta_z ch\alpha^2 L^2 + 30\beta_z L^4 \alpha^4 - 10L^4 \alpha^4 ch + 3sh.\alpha^5.L^5 + 10L^4 \alpha^4 - 30\beta_z ch\alpha^4 L^4 + 10\beta_z shL^5 \alpha^5 + 20sh\alpha^3 L^3 + 60\beta_z \alpha^3 L^3 sh)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_4 V_1 dx = -\frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^2} (-1440 - 720L.\alpha.sh + 1440ch + 30\beta_z \alpha^4 L^4 - 10chL^4 \alpha^4 + 4shL^5 \alpha^5 + 10L^4 \alpha^4 - 30\beta_z.ch.\alpha^4.L^4 + 15\beta_z shL^5 \alpha^5 + 120chL^2 \alpha^2 - 120\alpha^2 L^2)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_2 V_2 dx = \frac{0,0083333\dot{E}}{(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L} (-180\beta_z chL^2 \alpha^2 + 960 + 6L^4 \alpha^4 ch - 10sh.L^3 \alpha^3 - 30\beta_z \alpha^3.L^3.sh + 15ch\beta_z L^4 \alpha^4 + 720sh\beta_z L.\alpha - 720\beta_z ch - 180\beta_z L^2 \alpha^2 + 720\beta_z - 120chL^2 \alpha^2 - 960ch + 600\alpha.sh.L + 4\alpha^4 L^4 + 15\beta_z \alpha^4 L^4)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_3 V_2 dx = \frac{\dot{E}}{60(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^2} (240 + 60chL^2 \alpha^2 - 120shL.\alpha - 240ch - 40\alpha^3 shL^3 - 90\beta_z L^3 \alpha^3 sh + 30L^4 \alpha^4 \beta_z ch + 11chL^4 \alpha^4 + 29.\alpha^4.L^4 + 60\beta_z L^4 \alpha^4 + 180\alpha^2 L^2)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_4 V_2 dx = -\frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L} (-480 - 180\beta_z L^2 \alpha^2 + 15\beta_z L^4 \alpha^4 - 120\alpha^2 L^2 - 720\beta_z ch + 720\beta_z - 120sh.L\alpha - 4\beta_z chL^4 \alpha^4 + 480ch + 6\alpha^4 L^4 - 180\beta_z ch\alpha^2 L^2 + 15\beta_z ch\alpha^4 L^4 + 720\beta_z L\alpha - 10shL^3 \alpha^3 - 30\beta_z \alpha^3 shL^3)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_3 V_3 dx = \frac{\dot{E}}{20(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^3} (480 - 120\beta_z L^2 \alpha^2 + 240shL\alpha - 480ch + 120\beta_z \alpha^2 chL^2 + 30\beta_z L^4 \alpha^4 - 10chL^4 \alpha^4 + 7sh.L^5 \alpha^5 + 10.\alpha^4.L^4 - 30\beta_z chL^4 \alpha^4 + 20\beta_z shL^5 \alpha^5 - 20shL^3 \alpha^3 - 60\beta_z shL^3 \alpha^3)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_4 V_3 dx = -\frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L^2} (1440 + 720shL\alpha - 1440ch + 30\beta_z L^4 \alpha^4 - 10\alpha^4 chL^4 + 6shL^5 \alpha^5 + 10L^4 \alpha^4 - 30\beta_z chL^4 \alpha^4 + 15sh.\beta_z L^5 \alpha^5 - 120chL^2 \alpha^2 + 120L^2 \alpha^2)$$

$$\int_0^L \tilde{N}_4 V_4 dx = -\frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_z)G.I_x \alpha^4 L} (720\beta_z shL\alpha - 720\beta_z ch + 960 + 720\beta_z + 960ch - 180\beta_z L^2 \alpha^2 - 180\beta_z chL^2 \alpha^2 - 10shL^3 \alpha^3 - 30\beta_z shL^3 \alpha^3 + 15\beta_z.chL^4 \alpha^4 - 120chL^2 \alpha^2 + 600shL\alpha + 6chL^4 \alpha^4 + 4\alpha^4 L^4 + 15\beta_z L^4 \alpha^4)$$

O quarto conjunto de integrais é dado por:

$$\int_0^L V_i \dot{N}_j dx = \int_0^L \begin{pmatrix} V_1 \dot{N}_1 & V_1 \dot{N}_2 & V_1 \dot{N}_3 & V_1 \dot{N}_4 \\ V_2 \dot{N}_1 & V_2 \dot{N}_2 & V_2 \dot{N}_3 & V_2 \dot{N}_4 \\ V_3 \dot{N}_1 & V_3 \dot{N}_2 & V_3 \dot{N}_3 & V_3 \dot{N}_4 \\ V_4 \dot{N}_1 & V_4 \dot{N}_2 & V_4 \dot{N}_3 & V_4 \dot{N}_4 \end{pmatrix} dx,$$

Cujas funções interpoladoras $\dot{N}_i$ são:

$$\dot{N}_1 = \frac{(-1 + \bar{\xi})(\bar{\xi}^2 + \bar{\xi} - 2 - 6\beta_y)}{fat_y}$$

$$\dot{N}_2 = \frac{L}{2 + fat_y} [(-1 + \bar{\xi}^2)(-\bar{\xi} + 1 + 3\beta_y)]$$

$$\dot{N}_3 = \frac{(1 + \bar{\xi})(-\bar{\xi}^2 + \bar{\xi} + 2 + 6\beta_y)}{fat_y}$$

$$\dot{N}_4 = \frac{L}{2 + fat_y} [(-1 + \bar{\xi}^2)(\bar{\xi} + 1 + 3\beta_y)]$$

Sendo, $fat_y = 4(1 + 3\beta_y)$ e $\bar{\xi} = \frac{2x}{L} - 1$

Resultando em:

$$\int_0^L V_1 \dot{N}_1 dx = \frac{\dot{E}}{20(1 + 3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L^3} (480 + 240shL\alpha - 480ch - 20\alpha^3 shL^3 - 60\beta_y sh\alpha^3 L^3 + 120\beta_y chL^2 \alpha^2 - 120\beta_y L^2 \alpha^2 - 30\beta_y chL^4 \alpha^4) + 20\alpha^5 \beta_y shL^5 + 10\alpha^4 L^4 + 30\beta_y L^4 \alpha^4 + 7shL^5 \alpha^5 - 10ch\alpha^4 L^4)$$

$$\int_0^L \dot{N}_2 V_1 dx = -\frac{0,0083333\dot{E}}{(1 + 3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L^2} (1440 + 120L^2 \alpha^2 + 720L.\alpha.sh - 1440ch - 120ch.L^2.\alpha^2 + 30\beta_y L^4 \alpha^4 - 10ch.L^4 \alpha^4 + 6shL^5 \alpha^5 + 10.\alpha^4.L^4 - 30\beta_y chL^4 \alpha^4 + 15\beta_y shL^5 \alpha^5)$$

$$\int_0^L \dot{N}_3 V_1 dx = \frac{\dot{E}}{(1 + 3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L^3} (-480 + 120\beta_y L^2 \alpha^2 - 240\alpha.sh.L + 480ch - 120\beta_y ch.\alpha^2 L^2 + 30\beta_y L^4 \alpha^4 - 10L^4 \alpha^4 ch + 3sh.\alpha^5.L^5 + 10L^4 \alpha^4 - 30\beta_y ch\alpha^4 L^4 + 10\beta_y shL^5 \alpha^5 + 20sh\alpha^3 L^3 + 60\beta_y \alpha^3 L^3 sh)$$

$$\int_0^L \dot{N}_4 V_1 dx = \frac{\dot{E}}{120(1 + 3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L^2} (-1440 - 720L.\alpha.sh + 1440ch + 30\beta_y \alpha^4 L^4 - 10chL^4 \alpha^4 + 4shL^5 \alpha^5 + 10L^4 \alpha^4 - 30\beta_y .ch.\alpha^4 .L^4 + 15\beta_y shL^5 \alpha^5 + 120chL^2 \alpha^2 - 120\alpha^2 L^2)$$

$$\int_0^L \dot{N}_2 V_2 dx = -\frac{0,0083333\dot{E}}{(1 + 3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L} (-180\beta_y chL^2 \alpha^2 + 960 + 6L^4 \alpha^4 ch - 10sh.L^3 \alpha^3 - 30\beta_y \alpha^3 .L^3 .sh + 15ch\beta_y L^4 \alpha^4 + 720sh\beta_y L.\alpha - 720\beta_y ch - 180\beta_y L^2 \alpha^2 + 720\beta_y - 120chL^2 \alpha^2 - 960ch + 600\alpha.sh.L + 4\alpha^4 L^4 + 15\beta_y \alpha^4 L^4)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L \dot{N}_3 V_2 dx &= \frac{\dot{E}}{60(1+3\beta_y)G.I_y \alpha^4 L^2} (240 + 60chL^2 \alpha^2 - 120shL \alpha - 240ch - 40\alpha^3 shL^3 - \\
&\quad 90\beta_y L^3 \alpha^3 sh + 30L^4 \alpha^4 \beta_y ch + 11chL^4 \alpha^4 + 29\alpha^4 .L^4 + 60\beta_y L^4 \alpha^4 + 180\alpha^2 L^2) \\
\int_0^L \dot{N}_4 V_2 dx &= \frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L} (-480 - 180\beta_y L^2 \alpha^2 + 15\beta_y L^4 \alpha^4 - 120\alpha^2 L^2 - 720\beta_y ch + \\
&\quad 720\beta_y - 120sh.L \alpha - 4\beta_y chL^4 \alpha^4 + 480ch + 6\alpha^4 L^4 - 180\beta_y ch \alpha^2 L^2 + 15\beta_y ch \alpha^4 L^4 + \\
&\quad 720\beta_y L \alpha - 10shL^3 \alpha^3 - 30\beta_y \alpha^3 shL^3) \\
\int_0^L \dot{N}_3 V_3 dx &= \frac{\dot{E}}{20(1+3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L^3} (480 - 120\beta_y L^2 \alpha^2 + 240shL \alpha - 480ch + 120\beta_y \alpha^2 chL^2 + \\
&\quad 30\beta_y L^4 \alpha^4 - 10chL^4 \alpha^4 + 7sh.L^5 \alpha^5 + 10\alpha^4 .L^4 - 30\beta_y chL^4 \alpha^4 + 20\beta_y shL^5 \alpha^5 - 20shL^3 \alpha^3 - \\
&\quad 60\beta_y shL^3 \alpha^3) \\
\int_0^L \dot{N}_4 V_3 dx &= \frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L^2} (1440 + 720shL \alpha - 1440ch + 30\beta_y L^4 \alpha^4 - 10\alpha^4 ch.L^4 + \\
&\quad 6shL^5 \alpha^5 + 10L^4 \alpha^4 - 30\beta_y chL^4 \alpha^4 + 15sh.\beta_y L^5 \alpha^5 - 120chL^2 \alpha^2 + 120L^2 \alpha^2) \\
\int_0^L \dot{N}_4 V_4 dx &= \frac{\dot{E}}{120(1+3\beta_y)G.I_x \alpha^4 L} (720\beta_y shL \alpha - 720\beta_y ch + 960 + 720\beta_y + 960ch - \\
&\quad 180\beta_y L^2 \alpha^2 - 180\beta_y chL^2 \alpha^2 - 10shL^3 \alpha^3 - 30\beta_y shL^3 \alpha^3 + 15\beta_y .chL^4 \alpha^4 - 120chL^2 \alpha^2 + \\
&\quad 600shL \alpha + 6chL^4 \alpha^4 + 4\alpha^4 L^4 + 15\beta_y L^4 \alpha^4)
\end{aligned}$$