



*Universidade Federal da Paraíba*

*Centro de Tecnologia*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica*

*- Mestrado - Doutorado*

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR  
E MASSA NOS PROCESSOS DE ABSORÇÃO DE VAPOR  
EM SOLUÇÕES BINÁRIAS VIA GITT**

Por

**Frank Werley Xavier da Silva**

*Tese apresentada à Universidade Federal da Paraíba para Obtenção do Grau  
de Doutor em Engenharia Mecânica*

**João Pessoa – Paraíba**

**julho, 2010**

**FRANK WERLEY XAVIER DA SILVA**

**ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR  
E MASSA NOS PROCESSOS DE ABSORÇÃO DE VAPOR  
EM SOLUÇÕES BINÁRIAS VIA GITT**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Doutor.

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos**

*S586a Silva, Frank Werley Xavier da.*

Análise da transferência simultânea de calor e massa nos processos de absorção de vapor em soluções binárias via GITT/ Frank Werley Xavier da Silva . - - João Pessoa : [s.n.], 2010.

*131 f.: il.*

*Orientador: Carlos Antônio Cabral dos Santos.*

*Tese (Doutorado) – UFPB /CT.*

- 1.Engenharia Mecânica. 2.Refrigeração por Absorção.*
- 3.Técnica da Transformação Integral Generalizada-GITT.*
- 4.Interface-Problemas de difusão.*

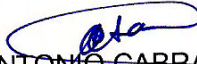
# ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA NOS PROCESSOS DE ABSORÇÃO DE VAPOR EM SOLUÇÕES BINÁRIAS VIA GITT

*por*

**FRANK WERLEY XAVIER DA SILVA**

*Tese aprovada em 30 de julho de 2010*

*Período letivo 2010.1*

  
Prof. Dr. CARLOS ANTONIO CABRAL DOS SANTOS  
Orientador

  
Prof. Dr. FRANCISCO ANTONIO BELO  
Examinador Interno

  
Prof. Dr. JACQUES CÉSAR DOS SANTOS  
Examinador Interno

  
Prof. Dr. JEAN PIERRE VERONESE  
Examinador Externo

  
Prof. Dr. LAURIVAN DA SILVA DINIZ  
Examinador Externo

*Fora da caridade não há salvação.*

*(único “mandamento” espírita)*

\*\*\*

*Trabalho duro e dedicadamente todos os dias  
para que a sorte sempre esteja do meu lado em cada desafio.*

*(Baseado em declaração de Tiger Woods)*

## DEDICATÓRIA

- Aos meus queridos e amados pais *Francisco José e Lúdia Feitosa*, por terem me ensinado a dar valor aos livros, me orientado e me cobrado nas medidas certas. Foram meus primeiros professores e incentivadores. Espero que eu esteja sendo um bom filho;
- À minha querida e amada “Voinha”, *Sra. Francisca Paulino* que, do vigor de seus quase 95 anos e com seu ensino fundamental incompleto, me ensina todos os dias, coisas que escola nenhuma do plano terreno me ensinaria. Com certeza um espírito evoludíssimo que eu tive a bênção de me anteceder para colaborar na minha orientação moral. Espero que eu esteja sendo um bom neto;
- Aos meus queridos e amados filhos, *Matheus, Marianna, Ana Cecília e Murilo*. Muito obrigado por vocês terem me escolhido e me dado esta valiosa oportunidade. Que eu possa ensinar a vocês os valores morais e possa orientá-los no caminho do bem. Espero que eu esteja sendo um bom pai;
- À minha querida e amada esposa, *Ana Cláudia*. Agradeço todos os dias a graça que Deus me deu ao colocar você como minha companheira nessa jornada. Luto todos os dias para ser um bom companheiro e merecedor de seu amor e admiração. Não tem visão mais gratificante no mundo do que ver você e as crianças sorrindo.
- À minha querida e, porque não, amada sogra, *D. Madalena Ramalho* que, tantas vezes nas horas de aperto e ausência nossas, cuida e orienta com carinho e amor os seus netos, principalmente cobrando as tarefas escolares.

## *HOMENAGEM*

*Em memória do caríssimo e querido amigo Professor Carlos Magnani de Sá Cardoso que se empolgou como uma criança quando surgiram as primeiras idéias de montar o curso de Refrigeração e Condicionamento de Ar no antigo CEFET-BA (atual IFBA), e celebrou como um pai quando eu consegui a liberação para cursar este doutorado. Pouquíssimas pessoas mostram tamanha empolgação, alegria e vibração com as vitórias alheias como você. Sem dúvida alguma uma das maiores e melhores aquisições no campo das amizades que fiz nos últimos anos. A você, meu abraço fraterno e sinceros sentimentos de muita luz e paz na certeza que a vida continua e a terra é apenas uma escola. Como para um espírita a idéia de “descanse em paz” não existe, segue o conselho: trabalhe meu amigo! Estude e busque renovar seus compromissos morais. Nada acontece por acaso e nem a mais simples folha cai se não tiver a permissão Divina e se não houver um propósito maior como consequência. Que Deus o abençoe e ilumine sempre.*

## **AGRADECIMENTOS**

Se eu fosse escrever o nome de todos a quem eu gostaria de agradecer certamente o número de páginas desta tese dobraria. De maneira resumida, quero agradecer:

- Ao Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos (orientador e valioso amigo) pela confiança, cobrança e paciência. Ao longo de todos esses anos só aumenta minha admiração e respeito pelo Senhor (espero que esteja satisfeito com o profissional que ajudou a formar).
- Ao Prof. Dr. Renato Machado Cotta, cuja providencial sugestão do uso do balanço integral para análise dos potenciais e fluxos nas fronteiras tornou possível o andamento desta tese.
- À Prof<sup>a</sup>. Dra. Núbia Moura Ribeiro, que dirigiu com tanta competência a Coordenação Técnica de Pós-Graduação e Pesquisa (CTPGP) do IFBA batalhando e incentivando pelo desenvolvimento da Pós-Graduação e Pesquisa desta centenária instituição baiana.
- Aos professores do Departamento de Tecnologia Mecânica e Materiais do Instituto Federal de Educação Tecnológica da Bahia – IFBA, pelo espírito de companheirismo que demonstraram em todos os momentos que precisei, especialmente aos professores João Dantas e Luis Gustavo.
- Aos valiosíssimos amigos professores Jaques César e José Pereira. A vocês minhas sinceras desculpas pelas constantes consultas-surpresa nas minhas horas de aperto e minha eterna gratidão por me socorrerem tantas vezes.

- Aos professores e amigos de curso Lesso, Da Guia, Juanice, Márcio, Camilo e Wilton que me fizeram descansar a mente com agradáveis conversas nos raros momentos de ócio.
- Aos técnicos e funcionários da UFPB, e especialmente do IFBA, que tantas vezes me atenderam e resolveram algumas pendências burocráticas por telefone ou e-mail, de maneira prestativa e paciente.
- À CAPES, que, sem o seu importante e imprescindível apoio financeiro, as dificuldades na conclusão deste trabalho seriam extremamente grandes.
- E finalmente, a Deus, tão infinitamente justo e bom que nos dá diariamente dois grandes presentes: oportunidades e o livre-arbítrio.

## RESUMO

O fenômeno da transferência simultânea de calor e massa presente nos absorvedores das máquinas de refrigeração por absorção foi estudado pela Técnica da Transformada Integral Generalizada, do inglês *Generalized Integral Transform Technique* – GITT, para três casos de interesse prático com crescente grau de dificuldade em sua formulação matemática. Os dois primeiros se referem a uma placa plana inclinada com escoamento em regime laminar, com perfil de velocidades conhecido e com a espessura da película constante ao longo do escoamento. Esta situação é examinada para as condições limites: parede adiabática e parede isotérmica. O terceiro caso, mais próximo da condição real de operação, modela o escoamento sobre um tubo onde a espessura da película varia ao longo do perímetro.

O fenômeno, classificado como problema de difusão acoplado, apresenta um forte acoplamento na interface líquido-vapor e com isso as equações que representam as distribuições de energia e concentração da película líquida durante o escoamento, não podem ser solucionadas separadamente.

A solução é construída com base em dois problemas auxiliares: um para a energia e outro para a concentração. Seguindo o formalismo da GITT, os potenciais são obtidos de forma híbrida analítico-numérico.

Resultados de interesse práticos são obtidos como números de Sherwood e de Nusselt, bem como o fluxo de massa na interface e os potenciais médios.

**PALAVRAS-CHAVE:** Refrigeração por Absorção. GITT. Problemas de Difusão Acoplados na Interface. Transferência Simultânea de Calor e Massa.

## ABSTRACT

The simultaneous heat and mass transfer phenomenon presents on the absorbers of the absorption refrigeration machine was studied by Generalized Integral Transform Technique – GITT, for three practical interest cases with growing degree of difficulty in your mathematical formulation. The two first occur over an inclined flat plane with laminar flow regime. It is considered the fully developed flow and obtained the explicit velocity profile with constant thickness film. The adiabatic and isothermal wall is analyzed. The third case, that represent a real condition of operation occur over external surface of a single tube. It models the falling film on a tube where the thickness of the film varies along the perimeter.

The phenomenon studied, classified like diffusion problem coupled, presents a strong couplement on the liquid-vapor interface and so, the energy and concentration equations are simultaneously solved.

The solutions are obtained from two auxiliary eigenvalues problems for concentration and energy problems. Following the GITT formalism, a hybrid analytic-numerical solution to the potentials is described.

Results of practical interest are found such as Sherwood and Nusselt numbers, mass flux in the interface and average potentials.

**KEY-WORDS:** Absorption Refrigeration. GITT. Interface Coupled Diffusion Problems. Simultaneous Heat and Mass Transfer.

## SUMÁRIO

|                                                                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| LISTA DE FIGURAS                                                                                                                                                       | iii |
| LISTA DE TABELAS                                                                                                                                                       | vi  |
| LISTA DE SÍMBOLOS                                                                                                                                                      | vii |
| <br>                                                                                                                                                                   |     |
| 1. INTRODUÇÃO                                                                                                                                                          | 1   |
| 1.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DO SISTEMA DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO                                                                                                 | 3   |
| 1.2 CLASSIFICAÇÃO, VANTAGENS, LIMITAÇÕES E APLICAÇÕES DO SISTEMA DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO                                                                          | 6   |
| 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA                                                                                                                                              | 8   |
| 1.4 MÉTODO DE TRATAMENTO DO PROBLEMA                                                                                                                                   | 14  |
| 1.5 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS                                                                                                                                              | 15  |
| <br>                                                                                                                                                                   |     |
| 2. IDENTIFICAÇÃO DOS FENÔMENOS ENVOLVIDOS DURANTE O PROCESSO DE TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA SOBRE O BANCO DE TUBOS HORIZONTAIS NO INTERIOR DO ABSORVEDOR | 17  |
| 2.1 AVALIAÇÃO FÍSICA DOS FENÔMENOS ENVOLVIDOS                                                                                                                          | 17  |
| 2.2 DIFICULDADES ADICIONAIS DO ESTUDO                                                                                                                                  | 20  |
| 2.3 MODELAGEM DO ABSORVEDOR                                                                                                                                            | 20  |
| 2.3.1 PROCESSO DE ABSORÇÃO SOBRE UM ÚNICO TUBO HORIZONTAL ( <i>FALLING FILM</i> )                                                                                      | 22  |
| 2.3.2 PROCESSO DE ABSORÇÃO NA REGIÃO ENTRE TUBOS                                                                                                                       | 22  |
| 2.3.3 MODELO PARA UM BANCO DE TUBOS                                                                                                                                    | 23  |

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3. ABORDAGEM SIMPLIFICADA DO PROBLEMA: ESCOAMENTO LAMINAR UNIDIMENSIONAL                                                                        | 24 |
| 3.1 MODELO MATEMÁTICO DIMENSIONAL                                                                                                               | 25 |
| 3.2 MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL: CASO ADIABÁTICO                                                                                             | 27 |
| 3.3 TRATAMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS VIA GITT                                                                                      | 29 |
| 3.3.1 PROBLEMA DA ENERGIA                                                                                                                       | 31 |
| 3.3.2 PROBLEMA DA CONCENTRAÇÃO                                                                                                                  | 33 |
| 3.4 PROBLEMA TRANSFORMADO                                                                                                                       | 33 |
| 4. MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA PARA O CASO DE ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL: ESCOAMENTO SOBRE UM TUBO | 36 |
| 4.1 MODELO MATEMÁTICO DIMENSIONAL                                                                                                               | 37 |
| 4.2 MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL                                                                                                              | 39 |
| 4.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS                                                                                                                | 41 |
| 4.4 TRATAMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS VIA GITT                                                                                      | 43 |
| 4.4.1 PROBLEMA DA ENERGIA                                                                                                                       | 45 |
| 4.4.2 PROBLEMA DA CONCENTRAÇÃO                                                                                                                  | 47 |
| 4.5 PROBLEMA TRANSFORMADO                                                                                                                       | 49 |
| 5. RESULTADOS                                                                                                                                   | 52 |
| 5.1 GRANDEZAS DE INTERESSE PRÁTICO                                                                                                              | 52 |
| 5.2 AVALIAÇÃO DE CONVERGÊNCIA                                                                                                                   | 55 |
| 5.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS                                                                                                                    | 59 |
| 6. CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS                                                                                                               | 78 |
| REFERÊNCIAS                                                                                                                                     | 80 |
| APÊNDICES                                                                                                                                       | 85 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1. Circuito básico do ciclo de refrigeração por absorção.                                                                                                                    | 3  |
| Figura 1.2. Detalhes do absorvedor de tubos horizontais                                                                                                                               | 4  |
| Figura 1.3. Diagrama P-h; a) Refrigeração por compressão; b) Refrigeração por absorção.                                                                                               | 5  |
| Figura 1.4. Escoamentos e fenômenos presentes no processo de absorção entre tubos.                                                                                                    | 8  |
| Figura 1.5. Modos de escoamento sobre uma coluna de tubos.                                                                                                                            | 9  |
| Figura 2.1. Geometria e regimes de escoamento para absorvedores de tubo horizontal.                                                                                                   | 18 |
| Figura 2.2. a) Zoneamento do escoamento da película sobre o tubo; b) Zoneamento da transferência de calor e massa no interior da película.                                            | 18 |
| Figura 2.3. Linhas de pesquisa na área de transferência simultânea de calor e massa por absorção.                                                                                     | 19 |
| Figura 2.4. a) Filme de espessura $\delta(\beta)$ escoando em torno de um tubo horizontal de raio R; b) Geometria do problema em coordenadas retangulares.                            | 21 |
| Figura 3.1. Escoamento da película absorvente sobre uma placa inclinada com espessura constante e regime laminar.                                                                     | 24 |
| Figura 5.1. a) Comparação da distribuição de temperatura para $Le = 1000$ e $f_{ac} = 0,01$ em relação aos resultados obtidos pela referência (parede adiabática, 200 autovalores).   | 61 |
| Figura 5.1. b) Comparação da distribuição de concentração para $Le = 1000$ e $f_{ac} = 0,01$ em relação aos resultados obtidos pela referência (parede adiabática, 200 autovalores).  | 61 |
| Figura 5.2. a). Comparação da distribuição de temperatura para $Le = 1000$ e $f_{ac} = 0,01$ em relação aos resultados obtidos pela referência (parede isotérmica, 200 autovalores).  | 62 |
| Figura 5.2. b). Comparação da distribuição de concentração para $Le = 1000$ e $f_{ac} = 0,01$ em relação aos resultados obtidos pela referência (parede isotérmica, 200 autovalores). | 62 |

- Figura 5.3. a) Comportamento da distribuição temperatura para os casos de parede adiabática e isotérmica para as mesmas condições de operação. 63
- Figura 5.3. b) Comportamento da distribuição concentração para os casos de parede adiabática e isotérmica para as mesmas condições de operação. 63
- Figura 5.4. a) Perfis de temperatura para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede adiabática, 200 autovalores). 64
- Figura 5.4. b) Perfis de concentração para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede adiabática, 200 autovalores). 65
- Figura 5.5. a) Perfis de temperatura para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede isotérmica, 200 autovalores). 66
- Figura 5.5. b) Perfis de concentração para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede isotérmica, 200 autovalores). 66
- Figura 5.6. a) Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede adiabática, 200 autovalores). 67
- Figura 5.6. b) Distribuição de temperatura e concentração na parede para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede adiabática, 200 autovalores). 68
- Figura 5.7. a) Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede isotérmica, 200 autovalores). 69
- Figura 5.7. b) Distribuição da concentração na parede para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede isotérmica, 200 autovalores). 70
- Figura 5.8. a) Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede adiabática, 200 autovalores). 71
- Figura 5.8. b) Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede isotérmica, 200 autovalores). 72
- Figura 5.9. a) Distribuição de temperatura e concentração na parede para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede adiabática, 200 autovalores). 73
- Figura 5.9. b) Distribuição da concentração na parede para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede isotérmica, 200 autovalores). 74
- Figura 5.10. Fluxo de massa na interface para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  nas condições de parede adiabática e isotérmica (200 autovalores). 75
- Figura 5.11. Número de Sherwood para diferentes combinações  $Le$ ,  $f_{ac}$  e condições de parede adiabática e isotérmica (200 autovalores). 75

Figura 5.12. Número de Nusselt local para diferentes pares  $Le$ ,  $f_{ac}$  e condições de parede adiabática e isotérmica (200 autovalores).

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 5.1 – Distribuição da concentração para diversos autovalores ao longo de X (parede adiabática) | 56 |
| Tabela 5.2 – Distribuição da temperatura para diversos autovalores ao longo de X (parede adiabática)  | 57 |
| Tabela 5.3 – Distribuição da concentração para diversos autovalores ao longo de X (parede isotérmica) | 58 |
| Tabela 5.4 – Distribuição da temperatura para diversos autovalores ao longo de X (parede isotérmica)  | 59 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                  |                                                               |                        |
|------------------|---------------------------------------------------------------|------------------------|
| Bi               | – número de Biot                                              |                        |
| C                | – concentração                                                |                        |
| CC               | – matrizes coeficientes do problema de concentração           |                        |
| $c_p$            | – calor específico à pressão constante                        | [ J / kg K ]           |
| CT               | – matrizes coeficientes do problema de energia                |                        |
| D                | – difusividade mássica cinemática                             | [ m <sup>2</sup> / s ] |
| g                | – aceleração da gravidade                                     | [ m / s <sup>2</sup> ] |
| H                | – calor de absorção                                           | [ J / kg ]             |
| h                | – entalpia                                                    | [ J / kg ]             |
| k                | – condutividade térmica do líquido                            | [ W / m K ]            |
| Le               | – número de Lewis                                             |                        |
| Pe               | – número de Péclet                                            |                        |
| N                | – norma                                                       |                        |
| R                | – raio do tubo                                                | [ m ]                  |
| T                | – temperatura                                                 | [ K ]                  |
| U                | – velocidade adimensional na direção x                        |                        |
| u                | – velocidade na direção x                                     | [ m/s ]                |
| V                | – velocidade adimensional na direção y                        |                        |
| v                | – velocidade na direção y                                     | [ m/s ]                |
| W                | – concentração adimensional                                   |                        |
| $\overline{W}_i$ | – potencial transformado da concentração                      |                        |
| X                | – coordenada adimensional ao longo da parede                  |                        |
| x                | – coordenada ao longo da parede                               | [ m ]                  |
| X*               | – coordenada adimensional X transformada para fronteira móvel |                        |
| Y                | – coordenada adimensional perpendicular à parede              |                        |

|       |                                                                 |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------|-----|
| $y$   | – coordenada perpendicular à parede                             | [m] |
| $Y^*$ | – coordenada adimensional $Y$ transformada para fronteira móvel |     |

### **Símbolos gregos**

|                       |                                                       |                         |
|-----------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------|
| $\Psi$                | – autofunção do problema da energia                   |                         |
| $\Phi$                | – autofunção do problema de concentração              |                         |
| $\overline{\Phi}$     | – autofunção normalizada da concentração              |                         |
| $\overline{\Psi}$     | – autofunção normalizada da energia                   |                         |
| $\lambda$             | – autovalor do problema de concentração               |                         |
| $\mu$                 | – autovalor do problema de energia                    |                         |
| $\alpha$              | – coeficiente de transferência de calor               | [ W / m K ]             |
| $\dot{\Delta}(X)$     | – derivada da espessura da película adimensional      |                         |
| $\Delta(X)$           | – espessura adimensional da película em função de $X$ |                         |
| $\delta(x)$           | – espessura da película em função de $x$              | [m]                     |
| $\delta_r$            | – espessura de referência                             | [m]                     |
| $\Gamma$              | – fluxo de volume por comprimento                     | [ m <sup>2</sup> / s ]  |
| $\rho$                | – massa específica                                    | [ kg / m <sup>3</sup> ] |
| $\overline{\theta}_i$ | – potencial da energia transformado                   |                         |
| $\theta$              | – temperatura adimensional                            |                         |
| $\nu$                 | – viscosidade cinemática                              | [ m <sup>2</sup> / s ]  |

### **Subscritos**

|      |                                   |
|------|-----------------------------------|
| 0    | – entrada                         |
| abs  | – absorção                        |
| conv | – convecção                       |
| e    | – equilíbrio                      |
| i    | – vetor unitário na direção $x$ . |
| int  | – superfície de interface         |

j – vetor unitário na direção  $y$   
refr – refrigerante

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

Para se obter o fenômeno de refrigeração, ou seja, transferir uma quantidade de calor de um recinto com temperatura menor para outro com temperatura maior, deve existir um processo compensatório associado de forma que a entropia total dos materiais envolvidos não diminua (BOSNJAKOVIC, 1965). Tecnicamente, os mais importantes dos processos associados são:

- Os abertos, tais como a adição de uma mistura refrigerante e o resfriamento evaporativo, e;
- Os cíclicos, tais como refrigeração por compressão e refrigeração por absorção, cuja diferença chave entre os dois sistemas é o processo pelo qual o refrigerante à baixa pressão é transformado em vapor à alta pressão.

Com a crescente demanda por fontes de energia alternativas ambientalmente viáveis renovou-se enormemente o interesse nos sistemas de refrigeração por absorção nos últimos anos.

A elevação da pressão do vapor refrigerante neste tipo de sistema se deve à combinação de uma fonte de calor e um circuito no qual percorre, por meio de uma bomba, uma solução refrigerante-absorvente. Este conjunto, por fazer a função do compressor, é comumente chamado de compressor térmico ou compressor termoquímico (DORGAN *et al.*, 1995).

A primeira máquina de absorção foi patenteada em 1859 por Ferdinand Carré e usava uma solução água-amônia. No início, estes sistemas foram usados unicamente para a

produção de gelo e conservação de alimentos. Do fim do século XIX ao início do século XX, diversas combinações de fluidos foram testadas e, só em 1940, a combinação brometo de lítio-água ( $\text{LiBr-H}_2\text{O}$ ) foi usada. Durante os anos 60, este sistema disputou com o sistema água-amônia ( $\text{H}_2\text{O-NH}_3$ ) o mercado de condicionamento de ar de grandes edifícios. Nos anos 70, com a alta nos preços do óleo e do gás, a operação dos “chillers” de absorção se tornou mais cara do que os “chillers” centrífugos só voltando a se tornar competitiva no início dos anos 80 com a introdução do sistema usando dois estágios, mais eficiente, e com a redução nos custos do óleo e do gás, em meados da mesma década (KREIDER, 2001).

Atualmente, os dois tipos de sistemas de absorção comercialmente disponíveis são os de água-amônia ( $\text{H}_2\text{O-NH}_3$ ) e brometo de lítio-água ( $\text{LiBr-H}_2\text{O}$ ). Essas duas misturas ou soluções são, quimicamente falando, misturas binárias (BOSNJAKOVIC, 1965) e, dependendo do sistema em questão, um dos componentes da mistura agirá como refrigerante e o outro como absorvente. A composição da mistura é usualmente expressa por sua fração de massa, freqüentemente chamada de concentração e, quando o fluido refrigerante evapora a partir da solução, seu vapor recebe o nome de solução concentrada. Quando o vapor é novamente absorvido pela solução, ele é chamado de solução diluída. Alguns autores se referem à parte líquida em vez do vapor e chamam solução forte a solução líquida enriquecida no absorvedor e solução fraca a solução líquida que sai do gerador.

No sistema que usa a mistura água-amônia ( $\text{H}_2\text{O-NH}_3$ ), a amônia será o fluido refrigerante e a água será o absorvente. Já no sistema que usa brometo de lítio-água ( $\text{LiBr-H}_2\text{O}$ ), a água será o refrigerante (o que torna sua aplicação limitada pelo seu ponto de congelamento) enquanto que o brometo de lítio será o absorvente. Por este último ser não-tóxico, seu uso é mais apropriado para o condicionamento de ar.

O efeito refrigerante de um sistema de absorção é produzido pelo uso da energia térmica e, para que se torne economicamente viável essa energia disponível deve ser fornecida por uma fonte barata e que deve estar a uma temperatura de 100 a 200 °C (ÇENGEL, BOLES, 2006). São exemplos dessas fontes a energia geotérmica, a energia solar, o calor rejeitado pelas usinas de co-geração ou de instalações de vapor para processos, e até mesmo o gás natural quando ele está disponível a um preço baixo

## 1.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DO SISTEMA DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO

Independentemente do tipo de mistura usada, o sistema pode ser representado esquematicamente como mostra a Figura (1.1) onde se identificam os elementos básicos do circuito: gerador, condensador, evaporador, absorvedor, bomba e válvulas de regulação de pressão.

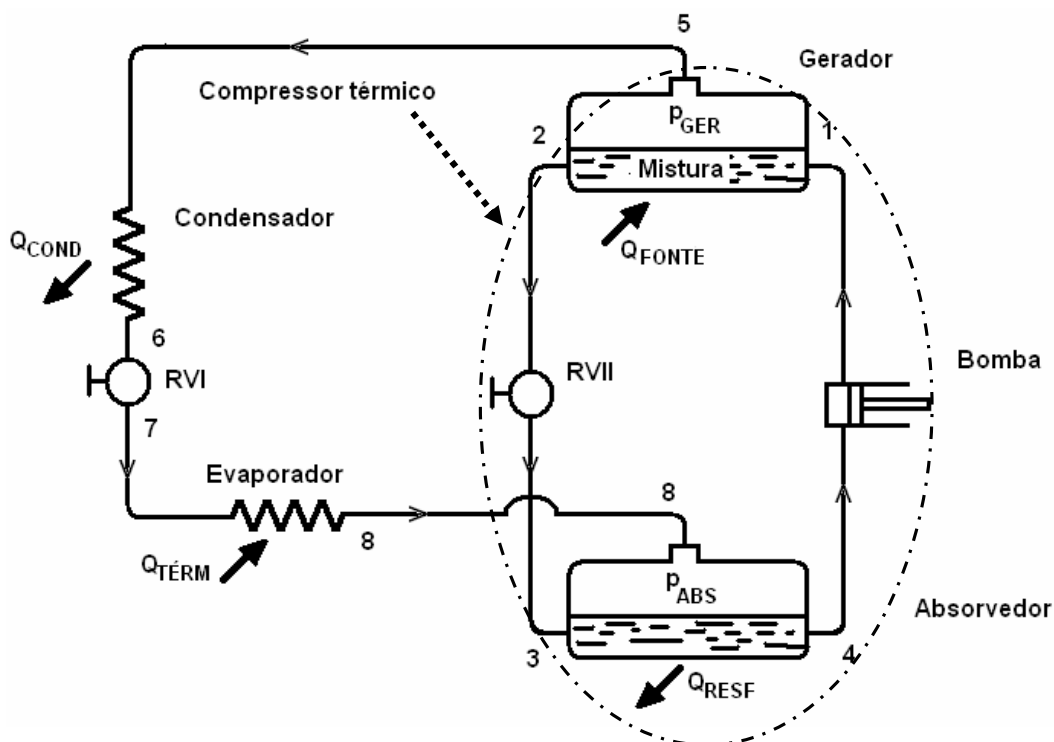


Figura. 1.1. Circuito básico do ciclo de refrigeração por absorção.

Quando a energia da fonte térmica disponível,  $Q_{FONTE}$ , é fornecida ao gerador, a mistura binária é aquecida até que o componente de mais fácil ebulição vaporize. Este vapor (solução concentrada) será o fluido refrigerante do sistema e, portanto, percorrerá o circuito frigorífico da máquina. Passando no condensador o vapor é totalmente liquefeito ao trocar calor com a água de condensação,  $Q_{COND}$  e, na válvula de regulação RVI, este condensado terá sua pressão reduzida para que o refrigerante líquido possa evaporar a uma menor temperatura no evaporador, quando retirará o calor do recinto que se quer resfriar,

$Q_{TÉR}$  (capacidade de refrigeração do sistema). O vapor frio que sai do evaporador é levado para dentro do absorvedor onde se mistura novamente com o líquido absorvente, tornando-se uma solução diluída. A temperatura da mistura tende a se elevar devido à geração de calor durante o processo de absorção e, se não for reduzida, diminuirá o rendimento da máquina. A remoção deste calor,  $Q_{RESF}$ , pela água de resfriamento que circula no interior dos tubos otimizará o processo de absorção. É justamente sobre essa propriedade das misturas binárias (um vapor frio poder ser absorvido por um líquido mais quente) que se baseia a operação do processo de refrigeração por absorção.

O circuito percorrido pelo absorvente é muito simples. A solução líquida fraca que inicialmente se encontra a pressão do gerador,  $p_{GER}$ , ao sair deste tem sua pressão reduzida pela válvula RVII para a pressão do absorvedor,  $P_{ABS}$ , onde então é resfriada pela água de resfriamento,  $Q_{RESF}$ , para que ocorra a mistura com o vapor frio do fluido refrigerante que vem do evaporador. Este vapor é então rapidamente absorvido pela solução que se torna enriquecida e é bombeada para o gerador, reiniciando todo o processo.

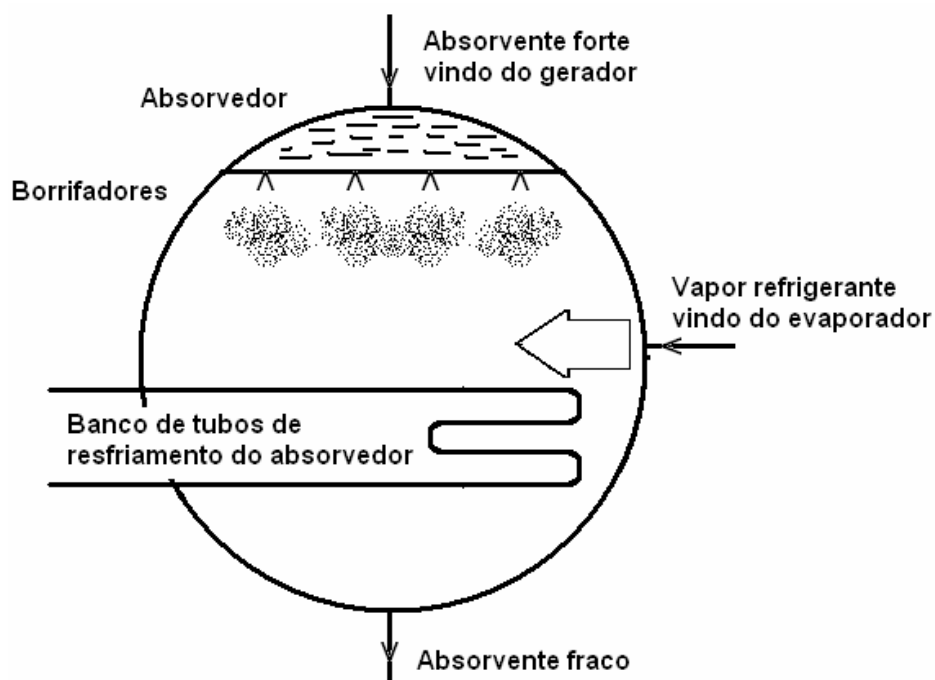


Figura 1.2. Detalhes de um absorvedor de tubos horizontais.

A Figura (1.2) mostra detalhes de um absorvedor de tubos horizontais. A absorção é otimizada pelo borrifamento da solução pelo topo do absorvedor, o que aumenta a área de contato superficial entre a solução, o vapor e o banco de tubos.

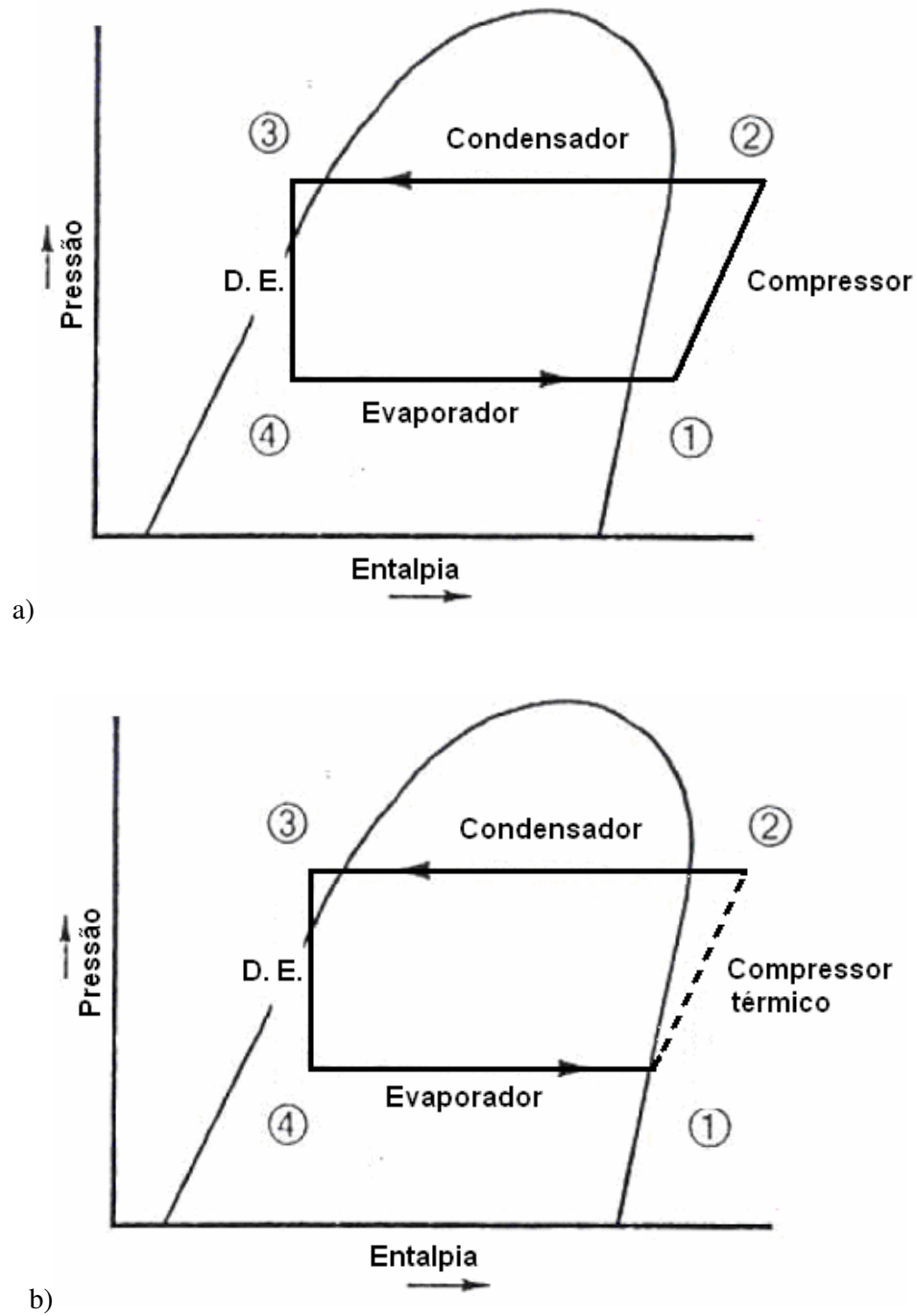


Figura 1.3. Diagrama P-h; a) Refrigeração por compressão, b) Refrigeração por absorção.

DORGAN *et al.*, (1995) mostram que, apesar da configuração física dos dois sistemas ser diferente, o comportamento do refrigerante ao longo do circuito, no que se refere à pressão-entalpia ( $p \times h$ ) no ciclo de absorção é similar ao do ciclo de compressão, ver Figura (1.3) e explicação a seguir.

1 – 2. Em um ciclo de compressão de vapor, o vapor a baixa pressão é mecanicamente comprimido. Em um ciclo de absorção, o vapor a baixa pressão é absorvido em uma solução líquida a baixa pressão, bombeado para uma pressão maior, e então aquecido para produzir vapor à alta pressão. As diferenças entre as temperaturas de evaporação e condensação na saturação são similares nos dois sistemas.

2 – 3 – 4 – 1. Os ciclos de refrigeração são idênticos nos dois sistemas.

Ainda segundo DORGAN *et al.*, (1995), entre as próprias máquinas de absorção, a configuração física real de uma máquina pode diferir de fabricante para fabricante.

## **1.2 CLASSIFICAÇÃO, VANTAGENS, LIMITAÇÕES E APLICAÇÕES DO SISTEMA DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO.**

Um sistema de refrigeração por absorção pode ser classificado por diversas características, como o número de efeitos (vezes que o calor de entrada é usado pela máquina), número de estágios (pares evaporador/absorvedor em diferentes temperaturas), posição (vertical ou horizontal) e etc., cada um apresentando sua vantagem, limitação e aplicação e que, por não ser o foco deste trabalho, não serão comentados aqui. Informações detalhadas a respeito deste assunto são encontradas em DORGAN *et al.* (1995), HEROLD *et al.* (2000) e KREIDER (2001), bem como em muitas outras literaturas especializadas no tema.

Entre os principais benefícios de um sistema de refrigeração por absorção podemos citar:

- Maior independência elétrica do que o sistema por compressão,
- Silencioso e sem vibração,
- Possibilidade de usar calor recuperado para acionamento do ciclo de refrigeração,

- Mostra-se menos agressivo a camada de ozônio e pode ter menos impacto sobre o aquecimento global do que a maioria dos outros sistemas, e;
- Economicamente atrativas quando o custo dos combustíveis é substancialmente menor do que o custo da energia elétrica (DORGAN *et al.*, 1995).

No entanto, este tipo de sistema apresenta as seguintes limitações quando comparados aos de compressão de vapor (ÇENGEL, BOLES, 2006):

- São mais caros;
- São mais complexos;
- Ocupam mais espaço;
- Muito menos eficiente exigindo assim, torres de arrefecimento muito maiores;
- Manutenção mais difícil pois ainda são pouco comuns.

ÇENGEL & BOLES (2006) afirmam ainda que, um sistema de refrigeração por absorção deve ser considerado só quando o custo unitário da energia térmica for baixo e houver a previsão de que permanecerá baixo em relação à eletricidade.

Entre as aplicações estão:

- Recuperação de calor de sistemas de co-geração (conhecido como máquinas de absorção de queima indireta, não só supre a carga de refrigeração como reduz o pico na demanda de energia elétrica);
- Recuperação de calor dos processos industriais

O coeficiente de desempenho (COP) de uma máquina de absorção é uma razão usada para taxar a efetividade de transferência de energia da máquina e, para refrigeração, o COP é a quantidade de frio produzido pela máquina, dividida pela quantidade de energia fornecida necessária à produção do frio, não incluindo a eletricidade auxiliar necessária para a operação das bombas e ventiladores, ver Equação (1.1).

$$COP = \frac{\text{frio produzido}}{\text{energia fornecida}} \quad (1.1)$$

Usualmente o COP de um sistema real de refrigeração por absorção é menor que 1 (ÇENGEL, BOLES, 2006).

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Um dos principais componentes de uma máquina de refrigeração por absorção é o absorvedor e é este componente quem dita, freqüentemente, o desempenho do sistema. O processo de absorção que ocorre no interior deste componente é extremamente complexo e envolve não só a transferência simultânea de calor e massa associada com a absorção, como também, o escoamento do filme líquido como pode ser visto na Figura (1.4).

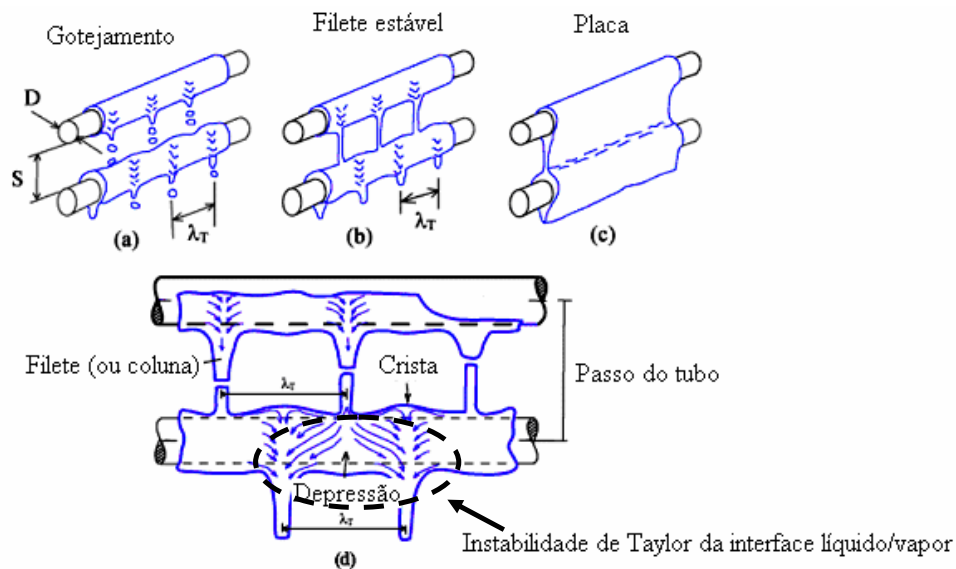


Figura 1.4. Escoamentos e fenômenos presentes no processo de absorção entre tubos.

A Figura (1.5) mostra que existem fases de transição entre cada um dos modos de transição da película entre os tubos.

---

**Instabilidade de Taylor:** fenômeno causado pela interação entre a gravidade e a tensão superficial, amplificando a perturbação em um certo comprimento de onda, formada na interface de dois meios não-sólidos de densidades diferentes, onde o de maior densidade está acima do de menor densidade.

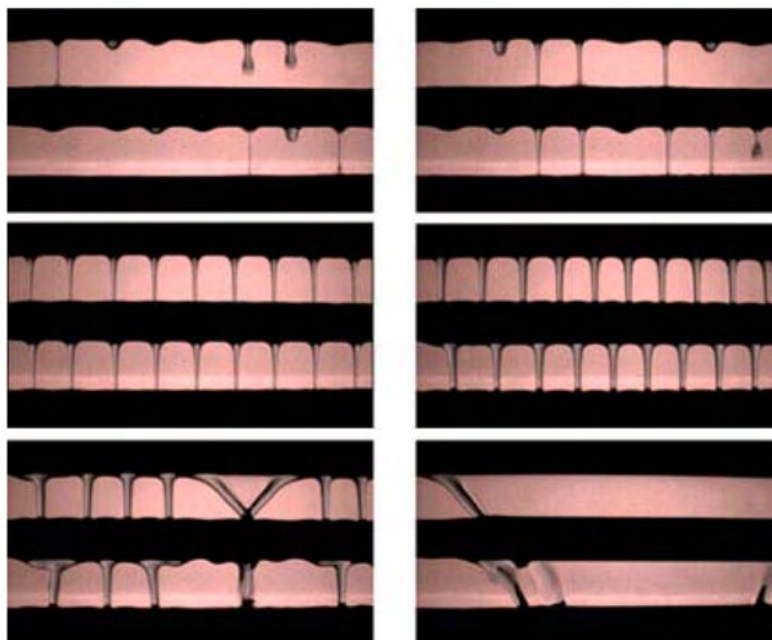


Figura 1.5. Modos de escoamento sobre uma coluna de tubos (da esquerda para direita, de cima para baixo): gota, gota-filete, filete (em linha), filete (staggered), filete-placa e placa.

Um resumo das pesquisas que mais se alinham com esta tese é mostrado a seguir conforme ordem cronológica e respectivas publicações de cada ano.

- 1977. Os primeiros que tentaram solucionar uma formulação completa deste problema foram GRIGOR'EVA & NAKORYAKOV que desenvolveram uma solução em forma de uma expansão em série de autofunções para solucionar as EDPs acopladas governantes do problema.
- 1982. BOYADJIEV determinou a taxa de absorção em filmes líquidos para o caso de reações químicas de primeira ordem que acontecem no filme. Ele mostrou que a alta taxa de reação é a razão para a formação de uma camada limite de concentração muito fina e, por conseguinte, altos gradientes de concentração. O problema foi solucionado supondo que a espessura do filme é muito menor do que seu comprimento e os efeitos não-lineares não foram considerados.
- 1983. GROSSMAN analisou teoricamente a absorção de gases em um escoamento laminar sobre uma placa horizontal e também o escoamento turbulento (GROSSMAN, HEATH, 1984) e, diferentemente da abordagem de

GRIGOR'EVA & NAKORYAKOV, além de resolver o problema pelo método de Fourier para encontrar uma expansão em série de funções, ele usa uma técnica numérica baseada no método das diferenças finitas.

1987. ANDBERG & VLIET apresentaram um modelo simplificado para absorção de vapor em filmes líquidos escoando sobre tubos horizontais resfriados por meio da consideração da camada limite para transporte de energia, massa e quantidade de movimento.
1988. PEREZ-BLANCO descreve um modelo do processo de absorção em um absorvedor água-amônia consistindo de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com condições de entrada e na interface apropriadas. O modelo foi validado comparando seus resultados a dados experimentais.
1992. CONLISK apresentou o desenvolvimento de uma solução para o problema de absorção de um filme laminar, vertical empregando a técnica da transformada de Laplace.
1993. CHOUDHURY *et al.* desenvolveram um método em diferenças finitas baseado na consideração da camada limite e no método das linhas de contorno e perfis para várias condições de contorno e estudou os efeitos de alguns parâmetros do processo de transferência de calor e massa.
1994. WASSENAAR desenvolveu em sua tese de doutorado, ferramentas numéricas para o projeto de trocadores de calor e massa com o intuito de obter uma melhor razão preço-desempenho. Ele usou o método dos elementos finitos padrão de Galerkin.
1995. Baseado em expressões analíticas, CONLISK mostra que à medida que a espessura inicial do filme é reduzida, o coeficiente de transferência de calor aumenta, mas o coeficiente de transferência de massa diminui.
1996. CONLISK & MAO consideraram a absorção transiente em um filme de espessura inicialmente constante em torno de um tubo horizontal sem a existência de um filme de entrada no sistema; PATNAIK & PEREZ-BLANCO estudaram a taxa de transferência de massa em filmes com ondulações na interface sobre um tubo vertical. Equações governantes transientes e bidimensionais foram formuladas para a transferência simultânea de calor e massa no filme, com frentes de ondas hidrodinâmicas como entrada. As equações, não linearmente acopladas na

interface foram solucionadas por meio de um esquema iterativo de diferenças finitas.

1999. MIN & CHOI analisaram o processo de absorção sobre um tubo horizontal usando as equações de Navier-Stokes com os efeitos da tensão superficial solucionando as equações governantes pelo uso do algoritmo SIMPLER, que incorpora o esquema QUICK e o método do gradiente conjugado incompleto de Cholesky; YIGIT descreveu um modelo do processo de absorção em um absorvedor de brometo de lítio – água em um filme laminar sobre um tubo vertical. As equações governantes são solucionadas pelo método Crank-Nicholson.
2001. KILLION & GARIMELLA fizeram uma revisão bastante abrangente e compreensiva dos significativos esforços que os pesquisadores têm feito para modelar matematicamente os fenômenos de transferência de calor e massa acoplados que ocorrem durante o processo de absorção; Resultados da modelagem dos processos de transferência simultânea de calor e massa que acontecem na absorção de vapor sobre um banco de tubos foram descritos por GRIGOR'EVA & NAKORYAKOV e os modelos teóricos de absorção do filme são apresentados com os resultados comparados com dados experimentais da absorção de vapor pela solução de brometo de lítio sobre um tubo vertical.
2003. ISLAM *et al.* descreve o desenvolvimento de um novo conceito de projeto de filme invertido para absorvedores. A superfície sólida do absorvedor é montada para que sejam alternativamente resfriadas de forma periódica; JANI *et al.* analisam a transferência de calor e massa em um banco de tubos horizontais de um gerador de chillers de absorção onde o número de Reynolds é limitado ao escoamento laminar e o efeito da ondulação na superfície livre é ignorado.
2004. JANI *et al.* modelaram a transferência de calor e massa no processo de absorção nos geradores. A análise se baseou no escoamento sobre um tubo e um banco de tubos tendo a temperatura da parede constante;. ISLAM *et al.* desenvolveram um modelo acoplado linearizado para transferência de calor e massa em absorvedores. Sua precisão é estabelecida pela comparação dos resultados com os de um modelo não linear e uma simulação numérica. Este modelo linearizado leva a expressões analíticas que são usadas para determinar os coeficientes de transferência de calor e massa a partir de dados experimentais para um absorvedor de tubo horizontal e

vertical; KILLION & GARIMELLA apresentam os resultados da visualização da solução água-brometo de lítio escoando sobre tubos de diâmetro externo 15,9 mm usando câmeras de alta velocidade. Os resultados ilustram a evolução do modelo característico de gota.

2005. GONZÁLEZ desenvolveu em sua tese de doutorado, ferramentas numéricas de simulação para o projeto de máquinas de absorção com a possibilidade de serem acionadas por energia solar; BABADI & FARHANIEH trataram numericamente as características do processo em uma solução de LiBr-H<sub>2</sub>O sobre tubos completamente molhados e a absorção de vapor associada a grandes números de Reynolds.
2007. KYUNG *et al.* modelaram o processo sobre um tubo liso horizontal considerando o escoamento dividido em três regimes: contato com o tubo, formação da gota na parte inferior do tubo e queda da gota entre os tubos; Em outro artigo, KYUNG *et al.* apresentam um modelo para absorção do vapor de água em uma solução de brometo de lítio escoando sobre tubos horizontais lisos com o objetivo de prever o desempenho de um banco de tubos. Os resultados são comparados com dados experimentais e se mostram fortemente dependentes da difusividade de massa; SULTANA *et al.* desenvolveram um modelo simplificado para análise e projeto de absorvedores tubulares horizontais que incluem o escoamento do filme sobre os tubos, o escoamento de gotas e filetes entre os tubos e o fluxo de refrigerante na serpentina. O modelo foi usado para extrair os coeficientes de transferência de calor e massa a partir de dados experimentais publicados anteriormente.
2008. ISLAM descreve uma análise experimental e teórica do processo de transferência simultânea de calor e massa que acontece nos absorvedores de sistemas de refrigeração onde os efeitos das principais variáveis de operação são investigados experimentalmente. Um modelo matemático que leva em conta os detalhes geométricos do escoamento da solução e do refrigerante é desenvolvido seguindo a análise tradicional dos trocadores de calor para obter informação adicional a respeito do desempenho do absorvedor; XU *et al.* simularam numericamente um absorvedor vertical onde a dinâmica das ondulações e o fenômeno da transferência de massa associado é discutido e comparado com relações empíricas experimentais.

2009. CASTRO *et al.* modelaram absorvedores resfriados a ar para aplicações de baixa capacidade. Os absorvedores são do tipo escoamento de filme e escoamento de bolhas. Os dois modelos foram validados com dados experimentais obtidos a partir de um dispositivo de testes e resultados numéricos publicados por outros pesquisadores. Em seu estudo o absorvedor de bolhas mostrou melhor desempenho; ISLAM *et al* simularam numericamente a absorção de vapor em soluções de brometo de lítio-água na intenção de investigar os efeitos de ondas solitárias baseada no método das diferenças finitas. As equações governantes são discretizadas em um grid fixo sobre o espaço físico com tamanho da malha constante; KIM & FERREIRA estudaram como as equações governantes de um absorvedor podem ser reduzidas a duas equações diferenciais ordinárias e como expressões analíticas podem se obtidas para os perfis de temperatura e concentração ao longo do absorvedor
2010. BO *et al.* investigaram numericamente a absorção em uma solução água-brometo de lítio usando pacotes de software de dinâmica dos fluidos computacionais do FLUENT. A condição de contorno convectiva prática no lado da água de resfriamento foi considerada. O coeficiente de transferência de calor é assumido constante, e a temperatura de resfriamento muda linearmente ao longo do escoamento. Os resultados numéricos indicam que o perfil de temperatura é exponencial e seus gradientes são altos devido a efeitos térmicos distintos com a absorção na interface; NIU *et al.* fizeram experimentos da absorção água-amônia em campos magnéticos de diferentes intensidades e diferentes direções bem como sob variadas condições de operação. Os resultados mostraram que a concentração de saída da água-amônia, a temperatura de saída da água de resfriamento e a quantidade de absorção de calor e massa nos campos magnéticos são maiores do que nos campos não-magnéticos; KIM & FERREIRA desenvolveram equações de efetividade para absorvedores de filme com solução e meio de resfriamento escoando em contracorrente. É mostrado como a termodinâmica da mistura e a teoria do filme pode ser usado para simplificar o problema para dar soluções de autovalor para os perfis de temperatura e concentração e como as equações de efetividade da transferência de calor e massa podem ser derivadas a partir de tais soluções.

## 1.4 MÉTODO DE TRATAMENTO DO PROBLEMA

As equações diferenciais governantes dos processos difusivos-convectivos do problema tratado nesta tese apresentam estrutura não-linear, onde duas condições de contorno se apresentam fortemente acopladas. Uma solução analítica do problema se torna impossível de se obter através das técnicas clássicas conhecidas. Por tal razão, será aplicada a Técnica da Transformada Integral Generalizada, comumente chamada GITT, da abreviação em inglês, *Generalized Integral Transform Technique*, no tratamento do fenômeno da transferência de calor e massa acoplados.

A GITT, que associa a precisão das técnicas analíticas a um custo computacional competitivo com a grande versatilidade das técnicas numéricas, tem se consolidado cada vez mais ao longo dos anos como uma importante ferramenta híbrida analítico-numérica na solução de problemas de Transferência de Calor e Massa e Mecânica dos Fluidos.

Apresentando uma metodologia similar às idéias da Transformada Integral Clássica, a GITT que, assim como a clássica, transforma um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), tem a vantagem de superar limitações encontradas na aplicação da técnica da transformada clássica. Estas dificuldades podem ser das mais diversas naturezas:

- Coeficientes variáveis nas equações governantes
- Coeficientes variáveis nas condições de contorno
- Geometrias não-convencionais
- Fronteiras móveis
- Sistemas de autovalores não separáveis e/ou não lineares.

Em síntese, a sequência de aplicação da técnica pode ser sistematizada nas seguintes etapas:

1. Escolher um problema auxiliar de autovalor, que carregue o máximo possível de informações do problema original relativo à geometria e aos operadores;
2. Desenvolver o par “transformada-inversa”;

3. Transformar a EDP original, através do uso de operadores apropriados, em um sistema algébrico infinito ou EDO infinito e não-linear, que pode ou não ser acoplado;
4. Truncar e resolver o sistema de EDOs, segundo a precisão pré-estabelecida;
5. Recuperar os potenciais originais, através do uso das fórmulas de inversão.

Para maiores detalhes sobre o desenvolvimento e aplicação da GITT consultar COTTA (1993).

## **1.5 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS**

É do conhecimento de todos desde muito tempo, que os recursos naturais do planeta são finitos e, em geral, não-renováveis. Políticas de preservação ambiental bem como programas de reciclagem e conservação de energia, redução de emissões de poluentes no ar, água e solo, têm sido temas comuns nos dias atuais. Várias soluções técnicas estão em prática e muitas tantas em desenvolvimento nas mais diversas partes do mundo. No entanto, estas soluções técnicas não garantirão por si sós o uso sustentável destes recursos. Se nós consumidores não mudarmos de atitude, se não colaborarmos com a vigilância da boa prática de uso, todo o esforço de anos de pesquisa servirão apenas para adiar uma crise maior. Dentre as soluções técnicas que visam economizar energia, as máquinas de refrigeração por absorção são um bom exemplo, pois são as que mais são usadas nas instalações acionadas por calor (do sol ou calor recuperado).

O significativo crescimento do consumo de energia elétrica nos últimos anos foi produzido pelo crescente aumento na demanda de refrigeração (GONZALEZ, 2005) e desenvolver uma tecnologia baseada em fontes alternativas de energia será fundamental para que os sistemas de refrigeração não colaborem de maneira tão negativa no atual panorama energético mundial.

Reforça ainda mais a motivação nessa pesquisa, o projeto de máquinas de baixa capacidade (menores que 15 kW) resfriadas a ar, e de baixo custo. Outro fato bastante motivador é que ao longo destes quatro anos de pesquisa e leitura de diversos artigos publicados nas mais conceituadas revistas e por pesquisadores não menos conceituados de diferentes países, nenhum trabalho que tratasse do problema de transferência simultânea de

calor e massa nos absorvedores do sistema de refrigeração por absorção usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada na solução das equações diferenciais parciais governantes do problema foi encontrado.

## **CAPÍTULO II**

### **IDENTIFICAÇÃO DOS FENÔMENOS ENVOLVIDOS DURANTE O PROCESSO DE TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA SOBRE O BANCO DE TUBOS HORIZONTAIS NO INTERIOR DO ABSORVEDOR**

Dentre as diversas configurações usadas em máquinas de refrigeração por absorção, o projeto mais comum é o absorvedor com um banco de tubos horizontais (SULTANA *et al.*, 2007). A solução absorvente é borrifada no topo do absorvedor por um distribuidor enquanto água de resfriamento escoar em contracorrente no interior dos tubos. Como visto na seção anterior, a solução escoar sobre estes na forma de uma película passando de um para o outro em forma de gotas, filetes ou placa e seu comportamento deve ser analisado tanto do ponto de vista hidrodinâmico, como do ponto de vista da transferência de calor e massa.

#### **2.1 AVALIAÇÃO FÍSICA DOS FENÔMENOS ENVOLVIDOS**

Para efeito de abordagem, é interessante subdividir o escoamento da película em regiões (sobre o tubo e entre os tubos) para que se possa identificar com clareza que ponto deste está representado no modelo proposto (GONZÁLEZ, 2005, JANI *et al.*, 2004).

Como se pode ver na Figura (2.1), entre os tubos o escoamento da película pode ser analisado como gotas, filetes ou placa. Já sobre o tubo, JANI *et al.* (2004) analisaram o problema sob os aspectos hidrodinâmico e da transferência de calor e massa.

Do ponto de vista hidrodinâmico, a película é dividida em zonas de estagnação, de impacto (ou mudança de fluxo) e a de fluxo paralelo (*falling film*). Do ponto de vista da transferência de calor e massa, além das duas primeiras citadas anteriormente, ele mostra uma zona de penetração e uma zona totalmente desenvolvida, como ilustrado na Figura (2.2).

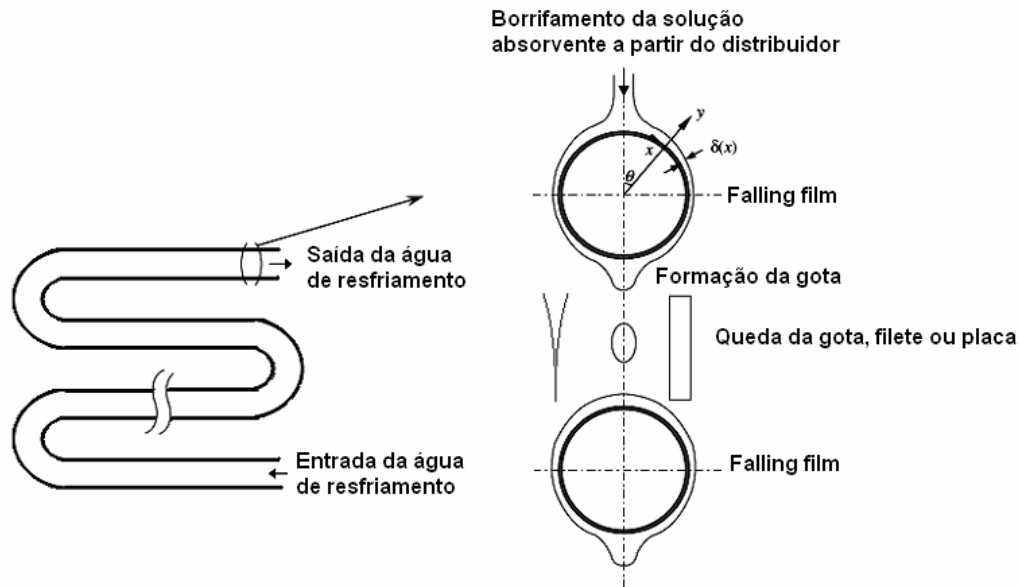


Figura 2.1 – Geometria e regimes de escoamento para absorvedores de tubo horizontal.

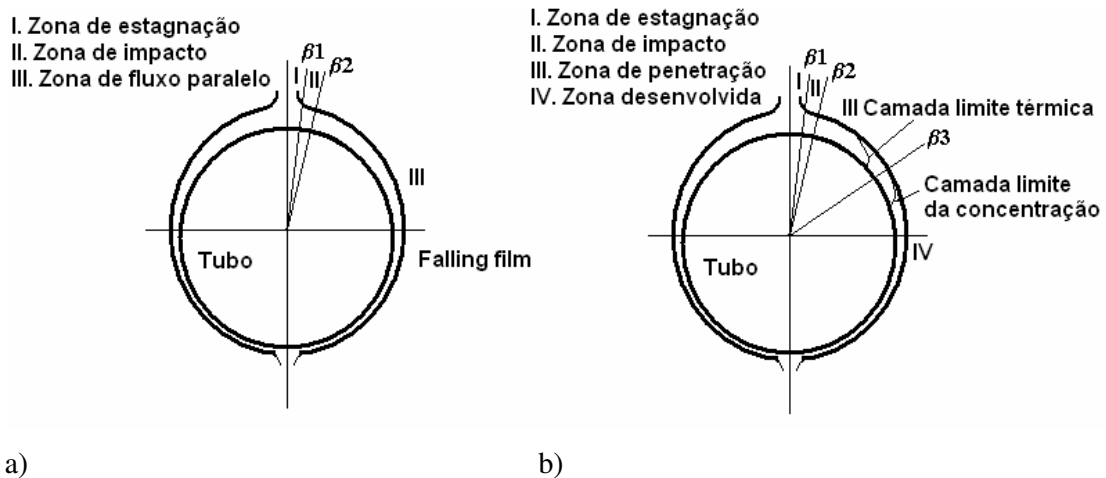


Figura 2.2. a) Zoneamento do escoamento da película sobre o tubo; b) Zoneamento da transferência de calor e massa no interior da película.

Segundo SULTANA *et al.* (2007), a superfície externa dos tubos do absorvedor coberta pela solução tende a diminuir progressivamente à medida que a película escoá para a parte inferior do tubo. Mesmo quando se ignora isto, bem como o tipo de escoamento entre os tubos, a modelagem de um absorvedor tubular horizontal como um trocador simultâneo de calor e massa se mostra bastante complicada. Na verdade, o fenômeno de transferência simultânea de calor e massa durante o processo de absorção de uma película escoando sobre um único tubo já carrega tantos problemas adicionais que se torna extremamente difícil tratar a todos simultaneamente (CHOUDHURY *et al.*, 1993). De maneira geral, pode-se citar como dificuldades principais:

- O escoamento sobre a superfície do tubo pode não estar exatamente no formato cilíndrico (SULTANA *et al.*, 2007);
- Existe uma complexa interdependência dos processos de transferência de calor, massa e quantidade de movimento (CHOUDHURY *et al.*, 1993).
- A espessura do filme muda à medida que ele escoá sobre a superfície do tubo;
- A posição angular determina tanto a espessura como o campo de escoamento dentro do filme.

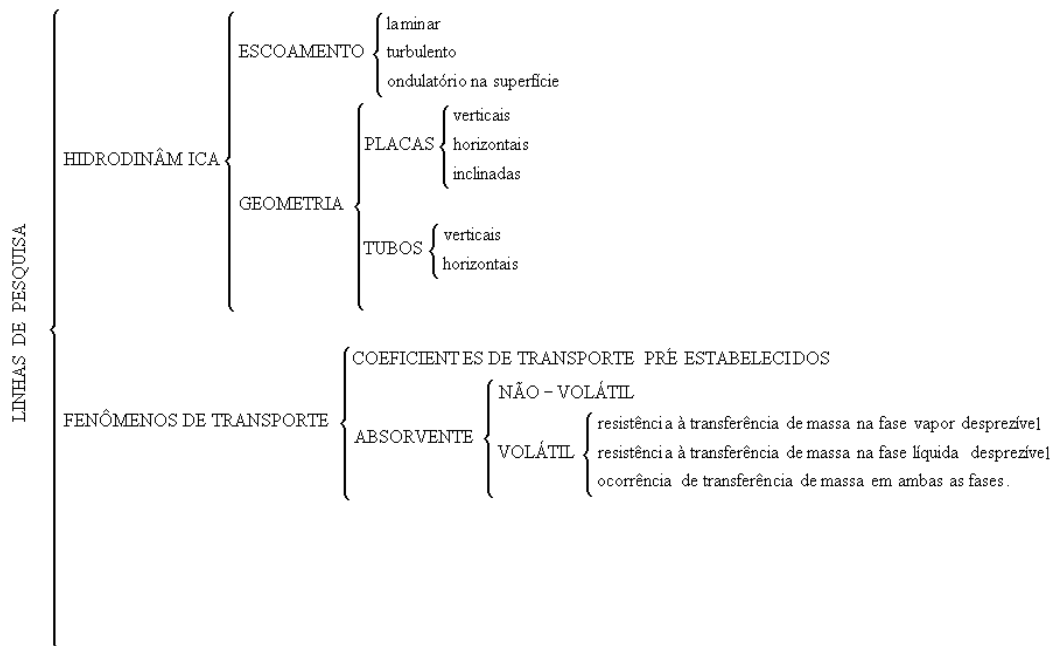


Figura 2.3. Linhas de pesquisa na área de transferência simultânea de calor e massa por absorção.

## **2.2 DIFICULDADES ADICIONAIS DO ESTUDO**

Além dos fatores acima, as condições de entrada, a temperatura da parede, o campo de velocidade, a tensão interfacial, a tensão superficial entre outros, influenciam tão significativamente o fenômeno de absorção que, para se ter idéia, vários dos resultados experimentais obtidos foram realizados em condições tão particulares e limitadas de um pesquisador para outro que muitos destes resultados não podem ser usados em procedimentos analíticos por engenheiros de projeto (BABADI, FARHANIEH, 2005).

A Figura (2.3) tenta resumir a extensa revisão que KILLION & GARIMELA (2001) fizeram sobre as diversas pesquisas existentes a respeito do fenômeno.

## **2.3 MODELAGEM DO ABSORVEDOR**

Olhando para a Figura (2.3), esta tese se situa na seguinte linha de pesquisa: sob o aspecto hidrodinâmico, um escoamento laminar sobre tubos horizontais; e, sob o aspecto da transferência de calor e massa, os fenômenos de transporte envolvem um absorvente não-volátil (LiBr).

A modelagem do absorvedor que melhor representa a condição real deve ser dividida nas seguintes fases:

- Processo de absorção sobre um único tubo;
- Processo de absorção entre os tubos;
- Influência do número de tubos.

O modelo considera as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. O sistema está em regime permanente.
2. O líquido é newtoniano e tem propriedades físicas constantes. O valor das propriedades depende das condições de entrada do líquido.
3. O movimento do líquido é afetado só pela gravidade e atrito na parede do tubo.
4. O aumento no fluxo de massa da mistura ao longo do tubo devido à absorção de vapor é desprezível.

5. Na interface o vapor e o líquido estão em estado de equilíbrio. A relação entre temperatura da interface e a concentração é linear com coeficientes constantes.
6. Todo calor de absorção é liberado na interface.
7. O líquido é uma mistura binária e só um componente está presente na fase vapor.
8. Não existe transferência de calor do líquido para o vapor, nem transferência de calor por radiação, dissipação viscosa, gradientes de pressão, gradientes de concentração (efeito Dufour), ou efeitos gravitacionais.
9. Não existe difusão por causa de gradientes de pressão, gradientes de temperatura (efeito Soret), ou reações químicas.
10. A difusão de calor e massa na direção do escoamento é desprezível em relação à difusão perpendicular a direção do escoamento.
11. A espessura do filme é extremamente pequena em relação ao raio do tubo. Isto permite a formulação do problema em coordenadas retangulares como pode ser visto na Figura (2.4).

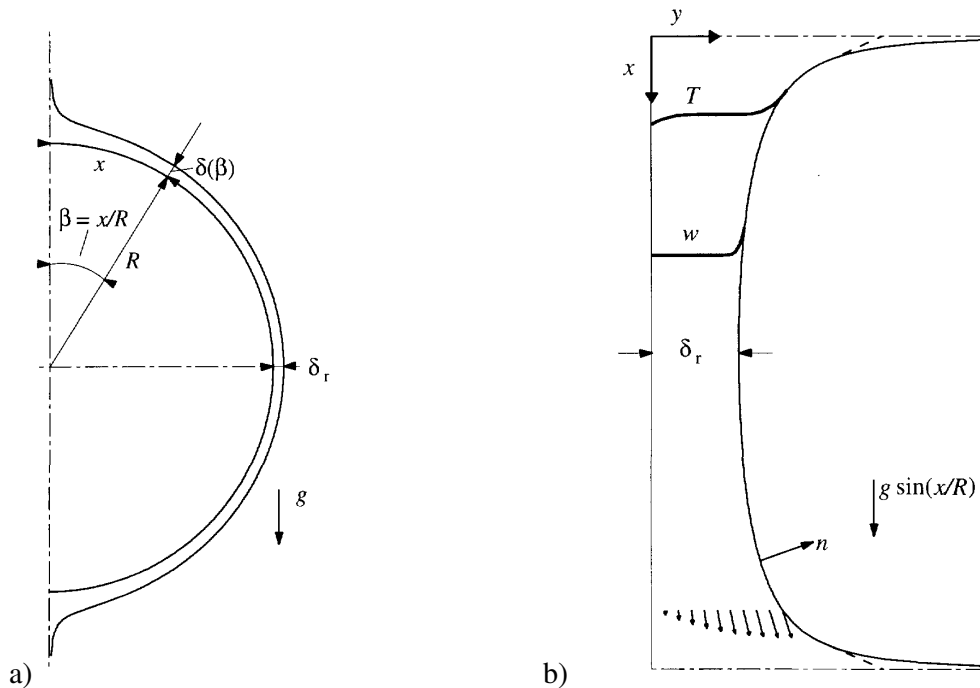


Figura 2.4. – a) Filme de espessura  $\delta(\beta)$  escoando em torno de um tubo horizontal de raio  $R$ ; b) Geometria do problema em coordenadas retangulares.

Estabelecidas as hipóteses simplificadoras, o passo seguinte é escrever as equações governantes do problema, tendo sempre em mente a idéia de que se trata de um

sistema multicomponente. Nesta sessão, o fenômeno de transporte envolvido é representado pelas leis de conservação da energia e da continuidade para o componente volátil na forma vetorial para um caso geral. Então, sob as hipóteses 2, 8 e 9 temos respectivamente, para um sistema coordenado fixo, as equações da energia e da continuidade para o regime permanente como segue:

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \rho D \vec{\nabla} C \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial h}{\partial C} \quad (2.1)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C = \vec{\nabla} \cdot \rho D \vec{\nabla} C \quad (2.2)$$

A dedução da Equação (2.1) é mostrada no Apêndice – A e o último termo do lado direito da expressão representa o fluxo de entalpia causado pela difusão dos componentes 1 e 2.

### **2.3.1 PROCESSO DE ABSORÇÃO SOBRE UM ÚNICO TUBO HORIZONTAL (*FALLING FILM*)**

A representação esquemática do absorvedor dada na Figura (2.1) mostra uma solução absorvente escoando sobre um tubo enquanto absorve o vapor que o circunda. A absorção do vapor pela solução se dá na interface líquido-vapor, onde o calor de absorção é liberado, e transportado através da película líquida e da parede do tubo para o meio refrigerante que escoar em seu interior. O vapor ao ser absorvido pelo filme, se difunde no interior da película.

### **2.3.2 PROCESSO DE ABSORÇÃO NA REGIÃO ENTRE TUBOS**

O escoamento da solução entre os tubos consecutivos do banco de tubos de um absorvedor é um processo complexo, geralmente transiente e que pode envolver um dos modelos de escoamento descritos na Figura (2.1).

Na transferência por gotejamento, as gotas se originam em pontos localizados na parte de baixo do tubo e, dependendo do espaçamento entre os tubos e da taxa de

escoamento de líquido, uma gota pode se desenvolver até tocar a superfície do tubo inferior. Quando isto acontece, a gota forma um fio fino que, ao se quebrar, uma parte do líquido retorna para o tubo superior e a outra parte passa para o inferior. Se o espaçamento entre tubos for suficientemente grande, a gota se desenvolverá totalmente e se separará. O líquido separado assumirá a forma esférica e cairá por gravidade como uma gota sobre o tubo inferior.

Na transferência por filetes ou placas, o vapor é absorvido na superfície externa da solução como no caso do “falling film” sobre o tubo. Tanto no modo filete como no modo placa, o escoamento se comporta como se estivesse em um canal elástico com seção transversal variável e, como nenhum meio refrigerante escoar no interior da película, o processo de absorção se dá de forma adiabática.

Os detalhes deste processo de geração e queda de gotas são explicados por KILLION & GARIMELA (2004), SULTANA *et al.* (2007) e ISLAM *et al.* (2004).

### **2.3.3 MODELO PARA UM BANCO DE TUBOS**

A Figura (2.1) esboça o banco de tubos horizontais do absorvedor. A mesma análise feita para um único tubo pode ser adaptada para um banco de tubos a partir de algumas considerações. As temperatura e concentração de entrada da solução que atinge o topo de um tubo e sai pela parte inferior deste são consideradas espacialmente uniforme e a análise deve levar em consideração a variação da temperatura da água de resfriamento em um tubo, para efeito de se estimar a transferência de calor do filme para a água. Uma maneira alternativa seria considerar a temperatura média da água de resfriamento para cada tubo.

Do exposto acima se percebe a enorme dificuldade em construir um modelo que represente fielmente a situação real dentro de um absorvedor.

## CAPÍTULO III

### ABORDAGEM SIMPLIFICADA DO PROBLEMA: ESCOAMENTO LAMINAR UNIDIMENSIONAL

A absorção de um vapor em filmes líquidos se deve aos mecanismos de difusão e convecção e equivale ao transporte simultâneo de calor e massa. A transferência por convecção depende do regime de escoamento, mas este é considerado não influenciado pelo fenômeno de absorção. Portanto, as equações que descrevem o escoamento podem ser solucionadas separadamente das que descrevem o processo de absorção.

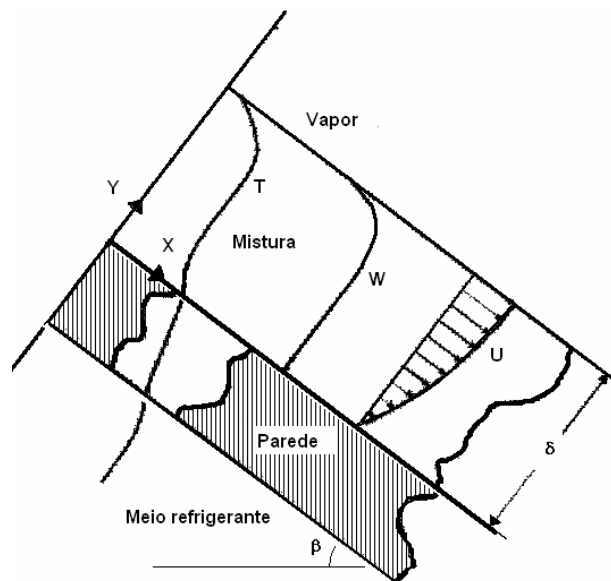


Figura 3.1 – Escoamento da película absorvente sobre uma placa inclinada com espessura constante e regime laminar.

Sob certas condições de operação, a mistura líquida escoar em regime laminar em torno do tubo, mas tanto o espaçamento como a dependência temporal complicam excessivamente a obtenção da solução devido o aparecimento de um termo extra nas equações. Outro problema é que essa dependência indica que a forma da área ou volume em que as condições são válidas variam com o tempo.

Para efeito de familiarização com o problema, este capítulo desenvolve um modelo simplificado em que são consideradas apenas a difusão perpendicular à parede e a convecção ao longo desta, em um escoamento laminar do filme com espessura constante sobre uma placa plana inclinada em um ângulo  $\beta$  em relação à horizontal como pode ser visto na Figura (3.1).

### 3.1 MODELO MATEMÁTICO DIMENSIONAL

Sob as hipóteses 1, 2, 3 e 4, o perfil de velocidades e a espessura da película são determinadas a partir das soluções de Nusselt (Apêndice – B).

$$u = \frac{3}{2} \bar{u} \left[ 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (3.0a)$$

$$\bar{u} = \frac{\Gamma}{\rho \delta} \quad (3.0b)$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\nu\Gamma}{\rho g \text{Sen}(\beta)}} \quad (3.0c)$$

Sob as hipóteses 2 e 10, para Equação (2.1) e para a Equação (2.2), pode-se montar o seguinte sistema de equações diferenciais parciais representativas do fenômeno de absorção sobre um filme líquido escoando sobre uma placa.

### **Energia**

$$u(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \quad 0 < y < \delta, \quad x > 0 \quad (3.1a)$$

$$T(0, y) = T_0 \quad (3.1b)$$

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_0 & \text{(isotérmica)} \\ \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0 & \text{(adiabática)} \end{cases} \quad (3.1c, d)$$

$$k \frac{\partial T(x, \delta)}{\partial y} = H_{\text{abs}} \rho \frac{D}{C_s} \frac{\partial C(x, \delta)}{\partial y} \quad (3.1e)$$

### **Concentração**

$$u(y) \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial y^2} \quad 0 < y < \delta, \quad x > 0 \quad (3.2a)$$

$$C(0, y) = C_0 \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial C(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad (3.2c)$$

$$T(x, \delta) = A C(x, \delta) + B \quad (3.2d)$$

As Equações (3.1a) e (3.2a) descrevem a distribuição de energia e difusão no interior do filme líquido, onde as condições de entrada são descritas por (3.1b) e (3.2b).

As Equações (3.1c) e (3.1d) consideram dois casos de interesse prático: no primeiro a parede é mantida a uma temperatura constante e no segundo a parede é

considerada adiabática. Evidentemente, em um caso real, estas considerações são valores limites e o processo se dá entre estas duas condições.

A Equação (3.2c) mostra que a parede é impermeável, ou seja, não existe fluxo de massa através dela.

Na interface líquido-vapor, três incógnitas devem ser relacionadas tanto entre si como com a posição longitudinal que são: a temperatura, a concentração e o fluxo de massa. A Equação (3.1e) relaciona o fluxo de calor com o fluxo de massa na interface. A Equação (3.2d) estabelece que a temperatura e concentração na interface em equilíbrio com o vapor à pressão constante obedecem a uma relação linear entre eles. Os coeficientes A e B são determinados pela pressão de vapor (GROSSMAN, G., 1983) e estas constantes determinam o estado de saturação sobre a interface líquido-vapor (GRIGOR'EVA, NAKORYAKOV, 1977).

### 3.2 MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL: CASO ADIABÁTICO

Para efeito de generalização do modelo, as equações serão normalizadas com o uso dos seguintes grupos adimensionais:

$$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}; \quad Y = \frac{y}{\delta}; \quad U(Y) = \frac{u(y)}{\bar{u}} = \frac{3}{2}(2Y - Y^2); \quad (3.3a, b, c)$$

$$\theta(X, Y) = \frac{T(x, y) - T_0}{T_e - T_0}; \quad W(X, Y) = \frac{C(x, y) - C_0}{C_e - C_0}; \quad (3.3ad, e)$$

$$T_e = A W_0 + B; \quad T_0 = A W_e + B \quad (3.3f, g)$$

onde  $T_e$  é a temperatura de uma solução de fração de massa  $W_0$  em equilíbrio com o vapor,  $W_e$  é a fração de massa de uma solução de temperatura  $T_0$  em equilíbrio com o vapor.

O modelo adimensional resultante para os campos de energia e concentração para o caso adiabático é (o caso isotérmico está desenvolvido no Apêndice – C):

### **Energia**

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad 0 < Y < 1, \quad X > 0 \quad (3.4a)$$

### **Condições de entrada e de contorno**

$$\theta(0, Y) = 0 \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial \theta(X, 0)}{\partial Y} = 0 \quad (3.4c)$$

$$\frac{\partial \theta(X, 1)}{\partial Y} = f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} \quad (3.4d)$$

Na condição de contorno (3.4d)  $f_{ac}$  é um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela expressão

$$f_{ac} = \frac{D}{\alpha} \frac{1}{C_{INT}} \frac{H_{ABS}}{C_p} \frac{C_e - C_0}{T_e - T_0} \quad (3.5)$$

### **Concentração**

$$U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} \quad 0 < Y < 1, \quad X > 0 \quad (3.6a)$$

### **Condições de entrada e de contorno**

$$W(0, Y) = 0 \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial W(X, 0)}{\partial Y} = 0 \quad (3.6c)$$

$$\theta(X,1) + W(X,1) = 1 \quad (3.6d)$$

As Equações (3.4) e (3.6) formam um sistema linear de EDP's parabólicas de segunda ordem com um conjunto de condições de contorno apresentando não-homogeneidade nas interfaces. De modo a conseguir uma aceleração na convergência da solução na abordagem via GITT, seria interessante, mas não imperativo, a obtenção de um filtro que tornasse homogênea as condições de contorno (COTTA, 1993) o que, conseqüentemente, melhoraria o desempenho computacional.

Embora o impulso inicial tenha sido este, optou-se por não seguir esse caminho já que, mesmo o filtro encontrado tendo homogeneizado o sistema, não transmitiu segurança em seu uso, pois o filtro apresentava um potencial em função do outro, ou seja, uma incógnita em função de outra.

### 3.3 TRATAMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS VIA GITT

Como visto no Capítulo I, o tratamento do problema via GITT exige o uso de um problema de autovalor associado, também chamado de problema auxiliar, que possa representar o mais fielmente possível, o sistema de EDP's em questão, também chamado de problema principal. Com base nisso, os problemas de autovalor associados escolhidos são (ÖZISIK, 1980):

#### Problema auxiliar da energia

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_i(Y)}{dY^2} + \mu_i^2 \bar{\Psi}_i(Y) = 0 \quad 0 < Y < 1 \quad (3.7a)$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_i(0)}{dY} = 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{\Psi}_i(1)}{dY} = 0 \quad (3.7b, c)$$

$$\Psi_i(Y) = \text{Cos}(\mu_i Y) \quad (3.7d)$$

$$\text{Sen}(\mu_i) = 0 \quad \therefore \quad \mu_i = 0 \quad (3.7e)$$

$$\bar{\Psi}_i(Y) \equiv \frac{\Psi(\mu_i, Y)}{\sqrt{N_{\theta,i}}} \quad (3.7f)$$

$$N_{\theta,i} = \int_0^1 [\Psi_i(Y)]^2 dY \quad (3.7g)$$

### **Par transformado**

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}_i(Y) \bar{\theta}_i(X) \quad (\text{fórmula de inversão}) \quad (3.8a)$$

$$\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y) \theta(X, Y) dY \quad (\text{potencial transformado}) \quad (3.8b)$$

### **Problema auxiliar da concentração**

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_i(Y)}{dY^2} + \lambda_i^2 \bar{\Phi}_i(Y) = 0 \quad 0 < Y < 1 \quad (3.9a)$$

$$\frac{d\bar{\Phi}_i(0)}{dY} = 0 \quad ; \quad \bar{\Phi}_i(1) = 0 \quad (3.9b, c)$$

$$\bar{\Phi}_i(Y) = \text{Cos}(\lambda_i Y) \quad (3.9d)$$

$$\text{Cos}(\lambda_i) = 0 \quad (3.9e)$$

$$\bar{\Phi}_i(Y) \equiv \frac{\Phi(\lambda_i, Y)}{\sqrt{N_{w,i}}} \quad (3.9f)$$

$$N_{w,i} = \int_0^1 [\Phi_i(Y)]^2 dY \quad (3.9g)$$

### **Par transformado**

$$W(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Phi}_i(Y) \bar{W}_i(X) \quad (\text{fórmula de inversão}) \quad (3.10a)$$

$$\bar{W}_i(X) = \int_0^1 \bar{\Phi}_i(Y) W(X, Y) dY \quad (\text{potencial transformado}) \quad (3.10b)$$

Nas Equações (3.7d, e, f, g) e (3.9d, e, f, g) estão representadas para cada um dos potenciais a autofunção, a autocondição, a autofunção normalizada e a norma respectivamente.

### **3.3.1 PROBLEMA DA ENERGIA**

Seguindo o formalismo da técnica, após aplicarem-se os operadores  $\int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y) dY$  e  $\int_0^1 \theta(X, Y) dY$  nas Equações (3.4a) e (3.7a) respectivamente e somar os resultados, a equação resultante fica:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y) \frac{\partial \theta}{\partial X} dY + \mu_i^2 \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y) \theta dY \\ & - \left\{ \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} dY - \int_0^1 \theta \frac{d^2 \bar{\Psi}_i(Y)}{dY^2} dY \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.11a)$$

O termo entre chaves na equação anterior representa uma integral de volume. Antes de substituir a fórmula da inversa nesta equação, transformamos este termo em uma integral de superfície através da fórmula de Green (COTTA, 1993) o que leva ao seguinte resultado:

$$\int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y) \frac{\partial \theta}{\partial X} dY + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \left[ \bar{\Psi}_i(Y) \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \theta \frac{d \bar{\Psi}_i(Y)}{dY} \right]_0^1 = 0 \quad (3.11b)$$

Aplicando as condições de contorno (3.4c), (3.4d), (3.7b) e (3.7c) no termo entre colchetes tem-se:

$$Y = 0 \Rightarrow \left[ \bar{\Psi}_i(0) \frac{\partial \theta(X,0)}{\partial Y} - \theta(X,0) \frac{d \bar{\Psi}_i(0)}{dY} \right] = 0 \quad (3.11c)$$

$$Y = 1 \Rightarrow \left[ \bar{\Psi}_i(1) \frac{\partial \theta(X,1)}{\partial Y} - \theta(X,1) \frac{d \bar{\Psi}_i(1)}{dY} \right] = f_{ac} \bar{\Psi}_i(1) \frac{\partial W(X,1)}{\partial Y} \quad (3.11d)$$

Inserindo os resultados (3.11c) e (3.11d) na Equação (3.11b), esta é reescrita como:

$$\int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y) \frac{\partial \theta}{\partial X} dY + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - f_{ac} \bar{\Psi}_i(1) \frac{\partial W(X,1)}{\partial Y} = 0 \quad (3.12a)$$

A substituição direta da fórmula da inversa no termo que representa a condição de contorno na interface líquido-vapor na equação anterior não é recomendada já que as condições de contorno do problema original não são necessariamente regidas pelas autofunções. Assim, conforme sugerido por COTTA (1993) e demonstrado no Apêndice – D, será usado o recurso do balanço integral da equação da concentração, ou seja, a Equação (3.6a) é integrada sobre o domínio e a condição de contorno na parede é aplicada resultando na Equação (3.12b):

$$\frac{\partial W(X,1)}{\partial Y} = Le \int_0^1 U \frac{\partial W}{\partial X} dY \quad (3.12b)$$

Substituindo a Equação (3.12b) na Equação (3.12a) tem-se:

$$\int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y) \frac{\partial \theta}{\partial X} dY + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - f_{ac} \bar{\Psi}_i(1) \left( Le \int_0^1 U \frac{\partial W}{\partial X} dY \right) = 0 \quad (3.13)$$

### 3.3.2 PROBLEMA DA CONCENTRAÇÃO

Seguindo o mesmo raciocínio usado para o problema da energia, após o uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada, o modelo matemático que representa o problema da concentração é escrito como na Equação (3.14) e cujo tratamento matemático pode ser visto no Apêndice – E.

$$\int_0^1 U \bar{\Phi}_i(Y) \frac{\partial W}{\partial X} dY + \frac{\lambda_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \theta(X,1) = 0 \quad (3.14)$$

Para evitar o potencial na fronteira também é feito o balanço integral sobre a Equação (3.4a) o qual resulta em

$$\theta(X,1) = \theta(X,0) + \int_0^1 \left( \int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} dY' \right) dY \quad (3.15)$$

Introduzindo-se a Equação (3.15) na Equação (3.14) a equação da concentração assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 U \bar{\Phi}_i(Y) \frac{\partial W}{\partial X} dY + \frac{\lambda_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \\ & - \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \left[ \theta(X,0) + \int_0^1 \left( \int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} dY' \right) dY \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.4 PROBLEMA TRANSFORMADO

Aplicando-se as fórmulas das inversas (3.8a) e (3.10a) nas Equações (3.13) e (3.16) respectivamente, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias representativas dos potenciais desejados e que, escrito de forma compacta, assumem a seguinte forma:

### **Energia**

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ CT1_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} - CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} \right\} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = 0 \quad (3.17a)$$

$$\therefore \quad \bar{\theta}_i(0) = 0 \quad (3.17b)$$

$$CT1_{ij} = \left[ \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y) \bar{\Psi}_j(Y) dY \right] \quad (3.17c)$$

$$CT2_{ij} = f_{ac} Le \bar{\Psi}_i(1) \left[ \int_0^1 U \bar{\Phi}_j(Y) dY \right] \quad (3.17d)$$

### **Concentração**

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ CC1_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} - CC2_{ij} \bar{\theta}_j(X) - CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} \right\} + \frac{\lambda_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + CC4_i = 0 \quad (3.18a)$$

$$\therefore \quad \bar{W}_i(0) = 0 \quad (3.18b)$$

$$CC1_{ij} = \left[ \int_0^1 U(Y) \bar{\Phi}_i(Y) \bar{\Phi}_j(Y) dY \right] \quad (3.18c)$$

$$CC2_{ij} = \frac{1}{Le} \left[ \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \bar{\Psi}_j(0) \right] \quad (3.18d)$$

$$CC3_{ij} = \frac{1}{Le} \left[ \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left( \int_0^{Y'} U(Y') \bar{\Psi}_j(Y') dY' \right) dY \right] \quad (3.18e)$$

$$CC4_i = \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (3.18f)$$

O sistema (3.17) e (3.18) compõem um problema de valor inicial acoplado que pode ser solucionado numericamente pela sub-rotina científica DIVPAG disponível na biblioteca IMSL do Fortran 90-95, ou pelo NDSolve do Mathematica.

A solução final procurada é obtida recuperando-se os potenciais completos representados pelas fórmulas de inversão (3.8a) e (3.10a).

## **CAPÍTULO IV**

### **MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA PARA O CASO DE ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL: ESCOAMENTO SOBRE UM TUBO**

Um filme escoa no modo bidimensional se existir alguma aceleração positiva ou negativa presente, como seria o caso das zonas de entrada, escoamento em torno de superfícies curvas e escoamento ondulatório, ou se existir um fluxo de massa perpendicular a uma parede como na presença de uma fonte ou sorvedouro ou grandes taxas de fluxos de absorção de massa ou de condensação.

O fenômeno de absorção tratado neste capítulo acontece quando uma película absorvente escoa sobre um tubo horizontal enquanto absorve vapor através de sua interface. O calor de absorção é liberado na interface, transportado através da película de filme líquido e da parede do tubo até o meio responsável pelo resfriamento do absorvedor que circula no interior dos tubos.

Do ponto de vista físico, o problema hidrodinâmico é composto por um campo de velocidades em desenvolvimento simultâneo aos campos térmico e de concentração e cuja espessura da película é dependente da posição em que se encontra ao longo do escoamento. Matematicamente falando, este problema é representado por três potenciais acoplados se desenvolvendo no interior da película absorvente onde uma das fronteiras (interface líquido-vapor) é móvel. A abordagem via GITT sob esta condição exigirá a escolha de um problema auxiliar para o campo de velocidades e, conseqüentemente, o mesmo procedimento seguido para os potenciais de energia e concentração demonstrados no capítulo III.

No entanto, para efeito estritamente comparativo bem como para mostrar o crescimento da dificuldade de se modelar um absorvedor cada vez mais realístico, este capítulo mostrará a abordagem utilizada por WASSENAAR (1994), em que o campo de escoamento é solucionado separadamente dos campos de temperatura e concentração.

O modelo apresentado a seguir considera a solução da camada limite desprezando o termo de difusão axial.

#### 4.1 MODELO MATEMÁTICO DIMENSIONAL

Como no capítulo anterior, os perfis de velocidade nas direções normal e tangencial do escoamento em relação à parede do tubo, bem como a espessura da película, que agora varia com a posição, são obtidas a partir das soluções de Nusselt. Então, das hipóteses 1, 2, 3 e 4 apresentadas no Capítulo II, tem-se:

$$\delta(x) = \sqrt[3]{\frac{3 \nu \Gamma}{\rho g \sin(x/R)}} = \frac{\delta_r}{\sqrt[3]{\sin(x/R)}} \quad (4.1a)$$

$$u(x, y) = \frac{3}{2} \bar{u}_r \left[ 2 \frac{y}{\delta(x)} - \frac{y^2}{\delta(x)^2} \right] \sin(x/R) \quad \therefore \quad \bar{u}_r = \frac{\rho g \delta_r^2}{3\mu} \quad (4.1 \text{ b, c})$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2} \bar{u}_r \frac{\delta(x)}{R} \left[ 3 \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^2 - \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^3 \right] \cos(x/R) \quad (4.1d)$$

Nas equações anteriores,  $\bar{u}_r$  e  $\delta_r$  são valores de referência para a velocidade média e espessura da película, e que serão comentados mais adiante.

Sob a hipótese 2, para Equação (2.1) e para a Equação (2.2), os problemas de energia e da conservação de massa para um sistema bidimensional são representados como:

### **Energia**

$$u(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \delta(x), \quad x > 0 \quad (4.2a)$$

$$T(0, y) = T_0 \quad (4.2b)$$

$$k \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = h_{\text{conv}} [T(x, 0) - T_{\text{refr}}] \quad (4.2c)$$

$$k \frac{\partial T[x, \delta(x)]}{\partial y} = H_{\text{abs}} \rho \frac{D}{C_s} \frac{\partial C[x, \delta(x)]}{\partial y} \quad (4.2d)$$

### **Concentração**

$$u(x, y) \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \delta(x), \quad x > 0 \quad (4.3a)$$

$$C(0, y) = C_0 \quad (4.3b)$$

$$\frac{\partial C(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad (4.3c)$$

$$T[x, \delta(x)] = A C[x, \delta(x)] + B \quad (4.3d)$$

Na condição de contorno (4.2c) se o coeficiente convectivo,  $h_{\text{conv}}$ , for zero, a parede é considerada adiabática, se for infinito, a parede será considerada isotérmica. Um problema real de transferência de calor está situado entre estes dois valores extremos.

Na condição de contorno (4.2d), como também na (3.1e), está representado um balanço entre as leis de Fourier e de Fick na interface líquido-vapor.

As condições de contorno (4.3c) e (4.3d) representam, respectivamente, a impermeabilidade da parede do tubo e a relação linear existente na interface entre a temperatura e a concentração no equilíbrio com o vapor à pressão constante.

#### 4.2 MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL

Para efeito de generalização do modelo, as equações serão normalizadas com o uso dos seguintes grupos adimensionais:

$$X = \frac{x}{\delta_r}; \quad Y = \frac{y}{\delta_r}; \quad U(X, Y) = \frac{u(x, y)}{\bar{u}_r}; \quad V(X, Y) = \frac{v(x, y)}{\bar{u}_r};$$

$$\theta(X, Y) = \frac{T(x, y) - T_0}{T_e - T_0}; \quad W(X, Y) = \frac{C(x, y) - C_0}{C_e - C_0}; \quad \theta_{\text{refr}} = \frac{T_{\text{refr}} - T_0}{T_e - T_0}$$

$$T_e = A W_0 + B; \quad T_0 = A W_e + B$$

Ao contrário de um escoamento sobre uma placa plana, aqui só um comprimento e uma velocidade de referência são usados para normalizar posição e velocidade. Como fez WASSENAAR (1994), para este problema de tubo horizontal a espessura do filme e a velocidade média na posição  $x = \frac{\pi}{2} R$  são escolhidos como valores de referência:  $\delta_r$  e  $\bar{u}_r$  respectivamente (Fig. 2.3).

Então se pode escrever:

$$\Delta(X) = \frac{\delta(x)}{\delta_r} = \frac{\delta_r}{\sqrt[3]{\text{sen}(x/R)}} \frac{1}{\delta_r} \Rightarrow \Delta(X) = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{sen}(x/R)}} \quad (4.1a^*)$$

$$U(X, Y) = \frac{3}{2} \left[ 2 \left( \frac{Y}{\Delta(X)} \right) - \left( \frac{Y}{\Delta(X)} \right)^2 \right] \text{Sen}(X \delta_r / R) \quad (4.1 b^*)$$

$$V(X, Y) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta(X) \delta_r}{R} \left[ 3 \left( \frac{Y}{\Delta(X)} \right)^2 - \left( \frac{Y}{\Delta(X)} \right)^3 \right] \cos(X \delta_r / R) \quad (4.1d^*)$$

Uma observação importante deve ser feita sobre a Equação (4.1a\*). Quando  $X$  se aproxima de zero, a espessura do filme torna-se infinita. Este é o caso para o qual o filme escoa entre os tubos na forma de placa. Como desejamos trabalhar com uma espessura finita, trocamos a superfície do filme entre zero e um certo valor teórico  $X_t$  (ver Fig. 2.3) pela tangente neste ponto  $X_t$ . Esta aproximação arbitrária tem como vantagem garantir a continuidade da espessura do filme e das velocidades, bem como a continuidade das derivadas da espessura do filme e da velocidade (WASSENAAR, 1994).

O modelo adimensional resultante para os campos de energia e concentração é:

### **Energia**

$$U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} + V(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad (4.4a)$$

### **Condições de entrada e de contorno**

$$\theta(0, Y) = 0 \quad (4.4b)$$

$$\frac{\partial \theta(X, 0)}{\partial Y} = Bi[\theta(X, 0) - \theta_{refr}] \quad (4.4c)$$

$$\frac{\partial \theta[X, \Delta(X)]}{\partial Y} = f_{ac} \frac{\partial W[X, \Delta(X)]}{\partial Y} \quad (4.4d)$$

Na condição de contorno (4.4d)  $f_{ac}$  é um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela Equação (3.5).

### **Concentração**

$$U(X, Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} + V(X, Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} = \frac{1}{LePe} \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} \quad (4.5a)$$

### **Condições de entrada e de contorno**

$$W(0, Y) = 0 \quad (4.5b)$$

$$\frac{\partial W(X, 0)}{\partial Y} = 0 \quad (4.5c)$$

$$\theta[X, \Delta(X)] + W[X, \Delta(X)] = 1 \quad (4.5d)$$

## **4.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS**

Antes de seguir o formalismo da técnica, especial atenção deve ser voltada ao problema a ser resolvido. As Equações (4.4a) e (4.5a) formam um sistema de equações diferenciais com acoplamento em uma das fronteiras. Este problema é classificado como problema de classe III (MIKHAILOV, ÖZISIK, 1984) com condições de contorno do 3º tipo para o problema de energia e do 2º tipo para o problema de concentração. Outra coisa que também deve ser observada é que a interface líquido-vapor, a qual representa uma das fronteiras do problema, estabelece a espessura da película que, por sua vez, varia ao longo da circunferência do tubo. Tal comportamento é conhecido como problema de fronteira móvel.

Um problema de fronteira móvel implicará na inconveniência de um problema de autovalor dependente de duas variáveis independentes (X, além do Y). Para evitar tal inconveniente se faz necessário uma transformação de coordenadas (COTTA, 1993) como pode ser visto a seguir e cuja dedução se encontra no Apêndice – F.

Fazendo

$$X^* = X \quad \text{e} \quad Y^* = \frac{Y}{\Delta(X)} \quad \therefore \quad \Delta(X) = Y_{\text{int}}(X)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial}{\partial Y^*}, \quad \frac{1}{\partial X} = \frac{1}{\partial X^*} - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \frac{Y^*}{\partial Y^*}$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \dot{\Delta}(X) \equiv \partial [\Delta(X)] X' \\ U \\ V \\ \theta \\ W \end{array} \right\} \equiv f(X^*, Y^*)$$

Os sistemas de EDPs (4.4) e (4.5) em questão podem ser reescritos sob novas coordenadas da seguinte forma:

### **Energia**

$$U \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial X^*} - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} Y^* \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} \right\} + V \left\{ \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} \right\} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{1}{\Delta(X)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^{*2}} \quad (4.6a)$$

### **Condições de entrada e de contorno**

$$\theta(0, Y^*) = 0 \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial \theta(X^*, 0)}{\partial Y^*} = \Delta(X) \text{Bi} [\theta(X^*, 0) - \theta_{\text{refr}}] \quad (4.6c)$$

$$\frac{\partial [\theta(X^*, 1)]}{\partial Y^*} = f_{\text{ac}} \frac{\partial [W(X^*, 1)]}{\partial Y^*} \quad (4.6d)$$

### **Concentração**

$$U \left\{ \frac{\partial W}{\partial X^*} - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} Y^* \frac{\partial W}{\partial Y^*} \right\} + V \left\{ \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial W}{\partial Y^*} \right\} = \frac{1}{LePe} \frac{1}{\Delta(X)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^{*2}} \quad (4.7a)$$

### **Condições de entrada e de contorno**

$$W(0, Y^*) = 0 \quad (4.7b)$$

$$\frac{\partial W(X^*, 0)}{\partial Y^*} = 0 \quad (4.7c)$$

$$\theta(X^*, 1) + W(X^*, 1) = 1 \quad (4.7d)$$

## **4.4 TRATAMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS VIA GITT**

Os problemas de autovalor associados ao problema são dados a seguir com suas respectivas autofunções, autocondições, autofunções normalizadas e normas (ÖZISIK, 1980):

### **Energia**

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_i(Y^*)}{dY^{*2}} + \mu_i^2 \bar{\Psi}_i(Y^*) = 0 \quad (4.8a)$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_i(0)}{dY^*} - Bi \bar{\Psi}_i(0) = 0 ; \quad \frac{d\bar{\Psi}_i(1)}{dY^*} = 0 \quad (4.8b, c)$$

$$\bar{\Psi}_i(Y^*) = \text{Cos}[\mu_i (1 - Y^*)] \quad (4.8d)$$

$$\mu_i \text{Tan}(\mu_i) = Bi \quad (4.8e)$$

$$\bar{\Psi}_i(Y^*) \equiv \frac{\Psi(\mu_i, Y^*)}{\sqrt{N_i}} \quad (4.8f)$$

$$N_i = \int_0^1 [\Psi_i(Y^*)]^2 dY^* \quad (4.8g)$$

### **Par transformado**

$$\theta(X^*, Y^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}_i(Y^*) \bar{\theta}_i(X^*) \quad (\text{fórmula de inversão}) \quad (4.9a)$$

$$\bar{\theta}_i(X^*) = \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y^*) \theta(X^*, Y^*) dY^* \quad (\text{potencial transformado}) \quad (4.9b)$$

### **Problema auxiliar da concentração**

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_i(Y^*)}{dY^{*2}} + \lambda_i^2 \bar{\Phi}_i(Y^*) = 0 \quad (4.10a)$$

$$\frac{d\bar{\Phi}_i(0)}{dY^*} = 0 \quad ; \quad \bar{\Phi}_i(1) = 0 \quad (4.10b, c)$$

$$\bar{\Phi}_i(Y^*) = \text{Cos}[\lambda_i Y^*] \quad (4.10d)$$

$$\text{Cos}(\lambda_i) = 0 \quad (4.10e)$$

$$\bar{\Phi}_i(Y^*) \equiv \frac{\Phi(\lambda_i, Y^*)}{\sqrt{N_i}} \quad (4.10f)$$

$$N_i = \int_0^1 [\Phi_i(Y^*)]^2 dY^* \quad (4.10g)$$

### **Par transformado**

$$W(X^*, Y^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Phi}_i(Y^*) \bar{W}_i(X^*) \quad (\text{fórmula de inversão}) \quad (4.11a)$$

$$\bar{W}_i(X^*) = \int_0^1 \bar{\Phi}_i(Y^*) W(X^*, Y^*) dY^* \quad (\text{potencial transformado}) \quad (4.11b)$$

#### **4.4.1 PROBLEMA DA ENERGIA**

Seguindo o formalismo da técnica, aplicam-se os operadores  $\int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y^*) dY^*$  e  $\frac{1}{Pe} \frac{1}{\Delta(X)^2} \int_0^1 \theta(X^*, Y^*) dY^*$  nas Equações (4.6a) e (4.8a) respectivamente e os resultados são somados. A equação resultante fica:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 U Y^* \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* \\ & + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 V \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* + \frac{1}{Pe} \frac{1}{\Delta(X)^2} \mu_i^2 \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y^*) \theta dY^* \\ & - \frac{1}{Pe} \frac{1}{\Delta(X)^2} \left\{ \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^{*2}} dY^* - \int_0^1 \theta \frac{d^2 \bar{\Psi}_i(Y^*)}{dY^{*2}} dY^* \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.12a)$$

O termo entre chaves na equação anterior representa uma integral de volume. Antes de substituir a fórmula da inversa nesta equação, transformamos este termo em uma integral de superfície através da fórmula de Green (COTTA, 1993). Logo, a equação resultante fica:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 U Y^* \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* \\
& + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 V \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* + \frac{\mu_i^2}{\text{Pe} \Delta(X)^2} \bar{\theta}_i(X^*) - \\
& \frac{1}{\text{Pe}} \frac{1}{\Delta(X)^2} \left[ \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} - \theta \frac{d \bar{\Psi}_i(Y^*)}{d Y^*} \right]_0^1 = 0
\end{aligned} \tag{4.12b}$$

Aplicando as condições de contorno no termo entre colchetes tem-se:

$$\begin{aligned}
Y^* = 0 \Rightarrow \quad & \left[ \bar{\Psi}_i(0) \frac{\partial \theta(X^*, 0)}{\partial Y^*} - \theta(X^*, 0) \frac{d \bar{\Psi}_i(0)}{d Y^*} \right] = \\
& \bar{\Psi}_i(0) \Delta(X) \text{Bi} [\theta(X^*, 0) - \theta_{\text{refr}}] - \theta(X^*, 0) \text{Bi} \bar{\Psi}_i(0) = \\
& \text{Bi} \bar{\Psi}_i(0) [\theta(X^*, 0) (\Delta(X) - 1) - \Delta(X) \theta_{\text{refr}}]
\end{aligned} \tag{4.12c}$$

$$Y^* = 1 \Rightarrow \quad \left[ \bar{\Psi}_i(1) \frac{\partial \theta(X^*, 1)}{\partial Y^*} - \theta(X^*, 1) \frac{d \bar{\Psi}_i(1)}{d Y^*} \right] = f_{\text{ac}} \bar{\Psi}_i(1) \frac{\partial W(X^*, 1)}{\partial Y^*} \tag{4.12d}$$

A Equação (4.12b) é reescrita como

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 U Y^* \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* \\
& + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 V \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* + \frac{\mu_i^2}{\text{Pe} \Delta(X)^2} \bar{\theta}_i(X^*) - \\
& \frac{1}{\text{Pe}} \frac{1}{\Delta(X)^2} \left[ f_{\text{ac}} \bar{\Psi}_i(1) \frac{\partial W(X^*, 1)}{\partial Y^*} - \text{Bi} \bar{\Psi}_i(0) [\theta(X^*, 0) (\Delta(X) - 1) - \Delta(X) \theta_{\text{refr}}] \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como feito no Capítulo III, e pelas mesmas razões, as expressões representando os potenciais e fluxos na interface serão substituídas pelas expressões do balanço integral. Assim,

$$\left[ \frac{\partial W(X^*, l)}{\partial Y^*} \right] = Le Pe \Delta(X)^2 \left\{ \int_0^l U \left\{ \frac{\partial W}{\partial X^*} - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} Y^* \frac{\partial W}{\partial Y^*} \right\} dY^* + \int_0^l V \left\{ \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial W}{\partial Y^*} \right\} dY^* \right\} \quad (4.14)$$

Substituindo a Equação (4.14) na Equação (4.13) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^l U \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^l U Y^* \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* \\ & + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^l V \bar{\Psi}_i(Y^*) \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* + \frac{\mu_i^2}{Pe \Delta(X)^2} \bar{\theta}_i(X^*) - \\ & f_{ac} \bar{\Psi}_i(l) Le \left\{ \int_0^l U \frac{\partial W}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^l U Y^* \frac{\partial W}{\partial Y^*} dY^* + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^l V \frac{\partial W}{\partial Y^*} dY^* \right\} + \\ & \frac{1}{Pe} \frac{1}{\Delta(X)^2} Bi \bar{\Psi}_i(0) [\theta(X^*, 0) (\Delta(X) - 1) - \Delta(X) \theta_{refr}] = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

#### 4.4.2 PROBLEMA DA CONCENTRAÇÃO

Seguindo o mesmo raciocínio usado para o problema da energia, o problema da concentração após ser tratado pela técnica fica:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 U \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{\partial W}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 U Y^* \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{\partial W}{\partial Y^*} dY^* \\
& + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 V \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{\partial W}{\partial Y^*} dY^* + \frac{\lambda_i^2}{\text{Le Pe } \Delta(X)^2} \bar{W}_i(X^*) \\
& - \frac{1}{\text{Le Pe}} \frac{1}{\Delta(X)^2} \frac{d\bar{\Phi}_i(l)}{dY^*} [\theta(X^*, l) - 1] = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Fazendo um balanço integral na equação da energia para determinar o potencial na fronteira e usando a condição de contorno (4.6c) temos.

$$\begin{aligned}
\theta(X^*, l) = \text{Pe } \Delta(X)^2 & \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} U \frac{\partial \theta}{\partial X^*} dY^* \right] dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} U Y^* \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* \right] dY^* + \right. \\
& \left. \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} V \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} dY^* \right] dY^* \right\} + \\
& [\text{Bi} \Delta(X) + 1] \theta(X^*, 0) - \text{Bi} \Delta(X) \theta_{\text{refr}} = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A forma final da equação da concentração é como segue:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 U \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{\partial W}{\partial X^*} dY^* - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 U Y^* \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{\partial W}{\partial Y^*} dY^* \\
& + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 V \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{\partial W}{\partial Y^*} dY^* + \frac{\lambda_i^2}{\text{Le Pe } \Delta(X)^2} \bar{W}_i(X^*) + \frac{1}{\text{Le Pe}} \frac{1}{\Delta(X)^2} \frac{d\bar{\Phi}_i(l)}{dY^*} \\
& - \frac{1}{\text{Le Pe}} \frac{1}{\Delta(X)^2} \frac{d\bar{\Phi}_i(l)}{dY^*} \left\{ \text{Pe } \Delta(X)^2 \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} U \frac{\partial \theta}{\partial X^*} dY^* \right] dY^* \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^{*'}} U Y^{*'} \frac{\partial \theta}{\partial Y^{*'}} dY^{*'} \right] dY^{*} + \frac{1}{\Delta(X)} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^{*'}} V \frac{\partial \theta}{\partial Y^{*'}} dY^{*'} \right] dY^{*} \Bigg\} + \\
& \left[ \text{Bi} \Delta(X) + 1 \right] \theta(X^{*}, 0) - \text{Bi} \Delta(X) \theta_{\text{refr}} \Bigg\} = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

#### 4.5 PROBLEMA TRANSFORMADO

Aplicando as fórmulas das inversas (4.9a) e (4.11a) nas Equações (4.15) e (4.18) respectivamente, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias representativas dos potenciais desejados e que, escrito de forma compacta, assumem a seguinte forma:

##### Energia

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \Bigg\{ & \text{CT1}_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X^{*})}{dX^{*}} - [\text{CT2}_{ij} - \text{CT3}_{ij} - \text{CT4}_{ij}] \bar{\theta}_j(X^{*}) - \text{CT5}_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X^{*})}{dX^{*}} \\
& + [\text{CT6}_{ij} - \text{CT7}_{ij}] \bar{W}_j(X^{*}) \Bigg\} + \frac{\mu_i^2}{\text{Pe} \Delta(X)^2} \bar{\theta}_i(X^{*}) - \text{CT8}_i = 0
\end{aligned} \tag{4.19a}$$

$$\therefore \quad \bar{\theta}_i(0) = 0 \tag{4.19b}$$

$$\text{CT1}_{ij} = \left[ \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y^{*}) \bar{\Psi}_j(Y^{*}) dY^{*} \right] \tag{4.19c}$$

$$\text{CT2}_{ij} = \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \left[ \int_0^1 U Y^{*} \bar{\Psi}_i(Y^{*}) \frac{d\bar{\Psi}_j(Y^{*})}{dY^{*}} dY^{*} \right] \tag{4.19d}$$

$$\text{CT3}_{ij} = \frac{1}{\Delta(X)} \left[ \int_0^1 V \bar{\Psi}_i(Y^{*}) \frac{d\bar{\Psi}_j(Y^{*})}{dY^{*}} dY^{*} \right] \tag{4.19e}$$

$$CT4_{ij} = \frac{Bi[\Delta(X)-1]}{Pe \Delta(X)^2} [\bar{\Psi}_i(0) \bar{\Psi}_j(0)] \quad (4.19f)$$

$$CT5_{ij} = f_{ac} Le \bar{\Psi}_i(1) \left[ \int_0^1 U \bar{\Phi}_j(Y^*) dY^* \right] \quad (4.19g)$$

$$CT6_{ij} = \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} f_{ac} Le \bar{\Psi}_i(1) \left[ \int_0^1 U Y^* \frac{d\bar{\Phi}_j(Y^*)}{dY^*} dY^* \right] \quad (4.19h)$$

$$CT7_{ij} = \frac{f_{ac} Le}{\Delta(X)} \bar{\Psi}_i(1) \left[ \int_0^1 V \frac{d\bar{\Phi}_j(Y^*)}{dY^*} dY^* \right] \quad (4.19i)$$

$$CT8_i = \frac{Bi \theta_{refr}}{Pe \Delta(X)^2} \bar{\Psi}_i(0) \quad (4.19j)$$

### **Concentração**

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ CC1_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X^*)}{dX^*} - [CC2_{ij} - CC3_{ij}] \bar{W}_j(X^*) - CC4_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X^*)}{dX^*} \right. \\ \left. + \left[ CC5_{ij} - CC6_{ij} - CC7_{ij} \right] \bar{\theta}_j(X^*) \right\} + \frac{\lambda_i^2}{Le Pe \Delta(X)^2} \bar{W}_i(X^*) + CC8_i + CC9_i = 0 \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\therefore \bar{W}_i(0) = 0 \quad (4.20b)$$

$$CC1_{ij} = \left[ \int_0^1 U \bar{\Phi}_i(Y^*) \bar{\Phi}_j(Y^*) dY^* \right] \quad (4.20c)$$

$$CC2_{ij} = \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \left[ \int_0^1 U Y^* \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{d\bar{\Phi}_j(Y^*)}{dY^*} dY^* \right] \quad (4.20d)$$

$$CC3_{ij} = \frac{1}{\Delta(X)} \left[ \int_0^1 v \bar{\Phi}_i(Y^*) \frac{d\bar{\Phi}_j(Y^*)}{dY^*} dY^* \right] \quad (4.20e)$$

$$CC4_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY^*} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} U \bar{\Psi}_j(Y^{*'}) dY^{*'} \right] dY^* \quad (4.20f)$$

$$CC5_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY^*} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} U Y^{*'} \frac{d\bar{\Psi}_j(Y^{*'})}{dY^{*'}} dY^{*'} \right] dY^* \quad (4.20g)$$

$$CC6_{ij} = \frac{1}{Le\Delta(X)} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY^*} \int_0^1 \left[ \int_0^{Y^*} v \frac{d\bar{\Psi}_j(Y^{*'})}{dY^{*'}} dY^{*'} \right] dY^* \quad (4.20h)$$

$$CC7_{ij} = \frac{1}{LePe} \frac{[Bi\Delta(X)+1]}{\Delta(X)^2} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY^*} \bar{\Psi}_j(0) \quad (4.20i)$$

$$CC8_i = \frac{Bi\theta_{refr}}{LePe\Delta(X)} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY^*} \quad (4.20j)$$

$$CC9_i = \frac{1}{LePe} \frac{1}{\Delta(X)^2} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY^*} \quad (4.20k)$$

Os sistemas de Equações (4.19) e (4.20) formam um problema de valor inicial acoplado e que, ao ser solucionado, permite recuperar os potenciais completos representados pelas fórmulas de inversão (4.9a) e (4.11a).

## **CAPÍTULO V**

### **RESULTADOS**

Este capítulo compila os resultados obtidos para o modelo unidimensional desenvolvido no Capítulo III. Um código em linguagem Mathematica foi desenvolvido para a solução do problema de absorção em filmes escoando sobre uma placa plana inclinada em regime laminar. O código avalia de maneira simultânea seis condições de operação diferentes, ou seja, diferentes combinações de valores de número de Lewis e fatores de acoplamento. De posse dos resultados das distribuições de temperatura e concentração ao longo da película para ambos os casos (parede adiabática e parede isotérmica), resultados de interesse prático podem ser obtidos como: potenciais médios, números de Nusselt e Sherwood bem como o fluxo de massa na interface.

#### **5.1 GRANDEZAS DE INTERESSE PRÁTICO**

A solução dos modelos discutidos nos capítulos III e IV depende do conhecimento dos números adimensionais  $Le$ ,  $f_{ac}$ ,  $Bi$  e  $\theta_{refr}$ . Os dois primeiros números são ditados pelas propriedades físicas da mistura (como função da temperatura, concentração e pressão) já os números de  $Bi$  e  $\theta_{refr}$  são determinados pelas condições de operação do sistema.

Os valores médios da temperatura e concentração são obtidos respectivamente pelas expressões a seguir:

$$\theta_{\text{MÉD}} = \frac{\int_0^1 U(Y) \theta(X, Y) dY}{\int_0^1 U(Y) dY} = \int_0^1 U(Y) \theta(X, Y) dY \quad (5.1a)$$

$$W_{\text{MÉD}} = \frac{\int_0^1 U(Y) W(X, Y) dY}{\int_0^1 U(Y) dY} = \int_0^1 U(Y) W(X, Y) dY \quad (5.1b)$$

Substituindo as fórmulas de inversão dos respectivos potenciais, estes podem ser reescritos como segue,

$$\theta_{\text{MÉD}} = \sum_{i=1}^{\infty} \text{CTM}_{ij} \bar{\theta}_i(X) \quad (5.2a)$$

$$W_{\text{MÉD}} = \sum_{i=1}^{\infty} \text{CCM}_{ij} \bar{W}_i(X) \quad (5.2b)$$

onde

$$\text{CTM}_{ij} = \int_0^1 U(Y) \bar{\psi}(Y) dY \quad (5.2c)$$

$$\text{CCM}_{ij} = \int_0^1 U(Y) \bar{\Phi}(Y) dY \quad (5.2d)$$

Os coeficientes de transferência de massa, Sh, e de calor, Nu, da interface para o interior do filme são definidos através das expressões seguintes.

$$\text{Sh}_{\text{INT}} = \frac{k \delta}{D} = \frac{1}{W_{\text{INT}} - W_{\text{MED}}} \left. \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad (5.3a)$$

$$NU_{INT} = \frac{h_{INT} \delta}{k} = \frac{1}{\theta_{INT} - \theta_{MÉD}} \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} = \frac{f_{ac}}{\theta_{INT} - \theta_{MÉD}} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} \quad (5.3b)$$

Como feito nos capítulos anteriores, por serem fenômenos de fronteira, as grandezas  $Sh$ ,  $Nu$  e fluxo de massa são calculados através do balanço integral. Portanto,

$$Sh_{INT} = \frac{Le}{W_{INT} - W_{MÉD}} \int_0^1 U \frac{\partial W}{\partial X} dY \quad (5.3c)$$

$$NU_{INT} = \frac{f_{ac}}{\theta_{INT} - \theta_{MÉD}} Le \int_0^1 U \frac{\partial W}{\partial X} dY \quad (5.3d)$$

Substituindo as fórmulas das inversas nas Equações (5.3c) e (5.3d), estas tomam as seguintes formas:

$$Sh_{INT} = \sum_{i=1}^{\infty} CSh_{INT,i} \bar{W}_i(X) \quad (5.4a)$$

$$NU_{INT} = \sum_{i=1}^{\infty} CNU_{INT,i} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} \quad (5.4b)$$

onde,

$$CSh_{INT,i} = \frac{Le}{W_{INT} - W_{MÉD}} \int_0^1 U(Y) \bar{\Phi}_i(Y) dY \quad (5.4c)$$

$$CNU_{INT,i} = \frac{f_{ac} Le}{\theta_{INT} - \theta_{MÉD}} \int_0^1 U(Y) \bar{\Phi}_i(Y) dY \quad (5.4d)$$

Para o caso de parede isotérmica, como a transferência de calor se dá da interface para a película, se difunde através desta e da parede do tubo até o meio de resfriamento que

passa no interior destes, o número de Nusselt do filme para a parede também deve ser calculado. Isto é possível pela seguinte expressão:

$$NU_{PAR} = \frac{1}{\theta_{MÉD} - \theta_{PAR}} \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (5.5a)$$

A substituição da fórmula da inversa leva à seguinte expressão:

$$NU_{PAR} = \sum_{i=1}^{\infty} C NU_{PAR,i} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} \quad (5.5b)$$

$$CNU_{PAR,i} = \frac{1}{\theta_{MÉD} - \theta_{PAR}} \frac{d\bar{\psi}(0)}{dY} \quad (5.5c)$$

## 5.2 AVALIAÇÃO DE CONVERGÊNCIA

As tabelas a seguir fazem uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo proposto para diferentes números de autovalores com a intenção de mostrar o comportamento dos potenciais na interface, parede e seu valor médio ao longo do comprimento longitudinal da película absorvente e determinar a partir de que ponto estes valores convergem para o mesmo resultado.

As tabelas estão organizadas por condição de parede (adiabática ou isotérmica), e por região da película (parede, média ou interface)

Tabela 5.1 – Distribuição da concentração para diversos autovalores ao longo de X (parede adiabática).

| PAREDE ADIABÁTICA (LE = 1000, fac = 0,01) |        |        |        |        |        |        |        |        |           |        |        |        |
|-------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| X↓ N→                                     | MEDIA  |        |        |        | PAREDE |        |        |        | INTERFACE |        |        |        |
|                                           | 100    | 110    | 120    | 130    | 100    | 110    | 120    | 130    | 100       | 110    | 120    | 130    |
| 0,00                                      | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000    | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,10                                      | 0,0087 | 0,0088 | 0,0090 | 0,0091 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7843    | 0,7816 | 0,7794 | 0,7776 |
| 0,20                                      | 0,0130 | 0,0132 | 0,0133 | 0,0134 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7713    | 0,7694 | 0,7679 | 0,7666 |
| 0,30                                      | 0,0162 | 0,0164 | 0,0165 | 0,0166 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7598    | 0,7582 | 0,7569 | 0,7557 |
| 0,40                                      | 0,0189 | 0,0190 | 0,0192 | 0,0193 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7474    | 0,7459 | 0,7446 | 0,7436 |
| 0,50                                      | 0,0212 | 0,0213 | 0,0214 | 0,0215 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7345    | 0,7331 | 0,7319 | 0,7309 |
| 0,60                                      | 0,0231 | 0,0233 | 0,0234 | 0,0235 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7219    | 0,7205 | 0,7194 | 0,7184 |
| 0,70                                      | 0,0249 | 0,0250 | 0,0251 | 0,0252 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7097    | 0,7084 | 0,7073 | 0,7064 |
| 0,80                                      | 0,0265 | 0,0266 | 0,0267 | 0,0268 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6981    | 0,6968 | 0,6958 | 0,6949 |
| 0,90                                      | 0,0279 | 0,0280 | 0,0281 | 0,0282 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6871    | 0,6859 | 0,6849 | 0,6841 |
| 1,00                                      | 0,0292 | 0,0293 | 0,0295 | 0,0295 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6767    | 0,6756 | 0,6746 | 0,6738 |
| 2,00                                      | 0,0386 | 0,0387 | 0,0388 | 0,0388 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5972    | 0,5962 | 0,5955 | 0,5949 |
| 5,00                                      | 0,0520 | 0,0520 | 0,0521 | 0,0521 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4733    | 0,4727 | 0,4723 | 0,4719 |
| 10,00                                     | 0,0619 | 0,0619 | 0,0620 | 0,0620 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3778    | 0,3775 | 0,3772 | 0,3770 |
| 20,00                                     | 0,0708 | 0,0708 | 0,0708 | 0,0708 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2906    | 0,2905 | 0,2903 | 0,2902 |
| 30,00                                     | 0,0753 | 0,0753 | 0,0753 | 0,0754 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2459    | 0,2458 | 0,2457 | 0,2456 |
| 40,00                                     | 0,0782 | 0,0782 | 0,0782 | 0,0782 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0006 | 0,2174    | 0,2173 | 0,2173 | 0,2172 |
| 50,00                                     | 0,0802 | 0,0802 | 0,0802 | 0,0802 | 0,0027 | 0,0028 | 0,0028 | 0,0029 | 0,1972    | 0,1972 | 0,1971 | 0,1971 |
| 60,00                                     | 0,0818 | 0,0818 | 0,0818 | 0,0818 | 0,0064 | 0,0065 | 0,0065 | 0,0065 | 0,1820    | 0,1820 | 0,1819 | 0,1819 |
| 70,00                                     | 0,0830 | 0,0830 | 0,0830 | 0,0830 | 0,0111 | 0,0112 | 0,0112 | 0,0112 | 0,1700    | 0,1700 | 0,1699 | 0,1699 |
| 80,00                                     | 0,0840 | 0,0840 | 0,0840 | 0,0840 | 0,0164 | 0,0165 | 0,0165 | 0,0165 | 0,1602    | 0,1602 | 0,1601 | 0,1601 |
| 90,00                                     | 0,0848 | 0,0848 | 0,0848 | 0,0848 | 0,0221 | 0,0221 | 0,0221 | 0,0221 | 0,1521    | 0,1520 | 0,1520 | 0,1520 |
| 100,00                                    | 0,0855 | 0,0855 | 0,0855 | 0,0855 | 0,0277 | 0,0277 | 0,0277 | 0,0277 | 0,1451    | 0,1451 | 0,1451 | 0,1451 |
| 200,00                                    | 0,0891 | 0,0891 | 0,0891 | 0,0891 | 0,0675 | 0,0675 | 0,0675 | 0,0675 | 0,1092    | 0,1092 | 0,1092 | 0,1092 |
| 300,00                                    | 0,0903 | 0,0903 | 0,0903 | 0,0903 | 0,0827 | 0,0827 | 0,0827 | 0,0827 | 0,0975    | 0,0975 | 0,0974 | 0,0974 |
| 400,00                                    | 0,0907 | 0,0907 | 0,0907 | 0,0907 | 0,0880 | 0,0880 | 0,0880 | 0,0880 | 0,0934    | 0,0933 | 0,0933 | 0,0933 |
| 500,00                                    | 0,0908 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0899 | 0,0899 | 0,0899 | 0,0899 | 0,0919    | 0,0919 | 0,0919 | 0,0919 |
| 600,00                                    | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0905 | 0,0905 | 0,0905 | 0,0905 | 0,0914    | 0,0914 | 0,0914 | 0,0914 |
| 700,00                                    | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0907 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0913    | 0,0912 | 0,0912 | 0,0912 |
| 800,00                                    | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0908 | 0,0912    | 0,0912 | 0,0912 | 0,0911 |
| 900,00                                    | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0912    | 0,0911 | 0,0911 | 0,0911 |
| 1000,00                                   | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0909 | 0,0912    | 0,0911 | 0,0911 | 0,0911 |

Tabela 5.2 – Distribuição da temperatura para diversos autovalores ao longo de X (parede adiabática).

| PAREDE ADIABÁTICA (LE = 1000, fac = 0,01) |         |        |        |        |        |        |        |        |        |           |        |        |        |
|-------------------------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| X↓                                        | N→      | MEDIA  |        |        |        | PAREDE |        |        |        | INTERFACE |        |        |        |
|                                           |         | 100    | 110    | 120    | 130    | 100    | 110    | 120    | 130    | 100       | 110    | 120    | 130    |
|                                           | 0,00    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
|                                           | 0,10    | 0,0867 | 0,0884 | 0,0898 | 0,0909 | 0,0142 | 0,0147 | 0,0152 | 0,0157 | 0,2157    | 0,2184 | 0,2206 | 0,2224 |
|                                           | 0,20    | 0,1299 | 0,1315 | 0,1329 | 0,1340 | 0,0647 | 0,0660 | 0,0671 | 0,0681 | 0,2287    | 0,2306 | 0,2321 | 0,2334 |
|                                           | 0,30    | 0,1623 | 0,1639 | 0,1653 | 0,1664 | 0,1108 | 0,1123 | 0,1136 | 0,1147 | 0,2402    | 0,2418 | 0,2431 | 0,2443 |
|                                           | 0,40    | 0,1889 | 0,1905 | 0,1917 | 0,1928 | 0,1474 | 0,1489 | 0,1503 | 0,1514 | 0,2526    | 0,2541 | 0,2554 | 0,2564 |
|                                           | 0,50    | 0,2116 | 0,2130 | 0,2143 | 0,2153 | 0,1769 | 0,1785 | 0,1798 | 0,1808 | 0,2655    | 0,2669 | 0,2681 | 0,2691 |
|                                           | 0,60    | 0,2313 | 0,2327 | 0,2339 | 0,2349 | 0,2016 | 0,2031 | 0,2043 | 0,2054 | 0,2781    | 0,2795 | 0,2806 | 0,2816 |
|                                           | 0,70    | 0,2489 | 0,2502 | 0,2514 | 0,2524 | 0,2228 | 0,2242 | 0,2254 | 0,2264 | 0,2903    | 0,2916 | 0,2927 | 0,2936 |
|                                           | 0,80    | 0,2647 | 0,2660 | 0,2671 | 0,2680 | 0,2414 | 0,2428 | 0,2439 | 0,2449 | 0,3019    | 0,3032 | 0,3042 | 0,3051 |
|                                           | 0,90    | 0,2790 | 0,2803 | 0,2814 | 0,2823 | 0,2580 | 0,2593 | 0,2605 | 0,2614 | 0,3129    | 0,3141 | 0,3151 | 0,3159 |
|                                           | 1,00    | 0,2922 | 0,2935 | 0,2945 | 0,2954 | 0,2730 | 0,2743 | 0,2754 | 0,2763 | 0,3233    | 0,3244 | 0,3254 | 0,3262 |
|                                           | 2,00    | 0,3858 | 0,3868 | 0,3876 | 0,3882 | 0,3755 | 0,3765 | 0,3773 | 0,3780 | 0,4028    | 0,4038 | 0,4045 | 0,4051 |
|                                           | 5,00    | 0,5198 | 0,5203 | 0,5208 | 0,5212 | 0,5156 | 0,5162 | 0,5166 | 0,5170 | 0,5267    | 0,5273 | 0,5277 | 0,5281 |
|                                           | 10,00   | 0,6190 | 0,6193 | 0,6195 | 0,6198 | 0,6170 | 0,6173 | 0,6176 | 0,6178 | 0,6222    | 0,6225 | 0,6228 | 0,6230 |
|                                           | 20,00   | 0,7080 | 0,7081 | 0,7083 | 0,7084 | 0,7072 | 0,7073 | 0,7075 | 0,7076 | 0,7094    | 0,7095 | 0,7097 | 0,7098 |
|                                           | 30,00   | 0,7533 | 0,7534 | 0,7535 | 0,7535 | 0,7528 | 0,7529 | 0,7530 | 0,7531 | 0,7541    | 0,7542 | 0,7543 | 0,7544 |
|                                           | 40,00   | 0,7820 | 0,7821 | 0,7822 | 0,7822 | 0,7817 | 0,7818 | 0,7818 | 0,7819 | 0,7826    | 0,7827 | 0,7827 | 0,7828 |
|                                           | 50,00   | 0,8023 | 0,8024 | 0,8024 | 0,8025 | 0,8021 | 0,8022 | 0,8022 | 0,8022 | 0,8028    | 0,8028 | 0,8029 | 0,8029 |
|                                           | 60,00   | 0,8177 | 0,8177 | 0,8178 | 0,8178 | 0,8175 | 0,8175 | 0,8176 | 0,8176 | 0,8180    | 0,8180 | 0,8181 | 0,8181 |
|                                           | 70,00   | 0,8298 | 0,8298 | 0,8298 | 0,8299 | 0,8296 | 0,8296 | 0,8297 | 0,8297 | 0,8300    | 0,8300 | 0,8301 | 0,8301 |
|                                           | 80,00   | 0,8396 | 0,8396 | 0,8396 | 0,8397 | 0,8395 | 0,8395 | 0,8395 | 0,8395 | 0,8398    | 0,8398 | 0,8399 | 0,8399 |
|                                           | 90,00   | 0,8478 | 0,8478 | 0,8478 | 0,8478 | 0,8477 | 0,8477 | 0,8477 | 0,8477 | 0,8479    | 0,8480 | 0,8480 | 0,8480 |
|                                           | 100,00  | 0,8547 | 0,8547 | 0,8548 | 0,8548 | 0,8546 | 0,8546 | 0,8547 | 0,8547 | 0,8549    | 0,8549 | 0,8549 | 0,8549 |
|                                           | 200,00  | 0,8907 | 0,8907 | 0,8907 | 0,8908 | 0,8907 | 0,8907 | 0,8907 | 0,8907 | 0,8908    | 0,8908 | 0,8908 | 0,8908 |
|                                           | 300,00  | 0,9025 | 0,9025 | 0,9025 | 0,9026 | 0,9025 | 0,9025 | 0,9025 | 0,9025 | 0,9025    | 0,9025 | 0,9026 | 0,9026 |
|                                           | 400,00  | 0,9066 | 0,9066 | 0,9067 | 0,9067 | 0,9066 | 0,9066 | 0,9067 | 0,9067 | 0,9066    | 0,9067 | 0,9067 | 0,9067 |
|                                           | 500,00  | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081    | 0,9081 | 0,9081 | 0,9081 |
|                                           | 600,00  | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086    | 0,9086 | 0,9086 | 0,9086 |
|                                           | 700,00  | 0,9087 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9087 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9087    | 0,9088 | 0,9088 | 0,9088 |
|                                           | 800,00  | 0,9088 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9089 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9088 | 0,9089 | 0,9088    | 0,9088 | 0,9088 | 0,9089 |
|                                           | 900,00  | 0,9088 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9088 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9088    | 0,9089 | 0,9089 | 0,9089 |
|                                           | 1000,00 | 0,9088 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9088 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9089 | 0,9088    | 0,9089 | 0,9089 | 0,9089 |

Tabela 5.3 – Distribuição da concentração para diversos autovalores ao longo de X (parede isotérmica).

|         |    | PAREDE ISOTÉRMICA (LE = 1000, fac = 0,01) |        |        |        |        |        |        |        |           |        |        |        |
|---------|----|-------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| X↓      | N→ | MÉDIA                                     |        |        |        | PAREDE |        |        |        | INTERFACE |        |        |        |
|         |    | 180                                       | 190    | 195    | 200    | 180    | 190    | 198    | 200    | 180       | 190    | 195    | 200    |
| 0,00    |    | 0,0000                                    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000    | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,10    |    | 0,0097                                    | 0,0098 | 0,0098 | 0,0098 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7594    | 0,7604 | 0,7589 | 0,7584 |
| 0,20    |    | 0,0151                                    | 0,0151 | 0,0152 | 0,0152 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7272    | 0,7281 | 0,7267 | 0,7263 |
| 0,30    |    | 0,0196                                    | 0,0196 | 0,0197 | 0,0197 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7073    | 0,7082 | 0,7069 | 0,7065 |
| 0,40    |    | 0,0235                                    | 0,0236 | 0,0236 | 0,0237 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6971    | 0,6979 | 0,6967 | 0,6964 |
| 0,50    |    | 0,0270                                    | 0,0271 | 0,0272 | 0,0272 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6937    | 0,6944 | 0,6934 | 0,6931 |
| 0,60    |    | 0,0303                                    | 0,0303 | 0,0304 | 0,0304 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6953    | 0,6959 | 0,6950 | 0,6947 |
| 0,70    |    | 0,0332                                    | 0,0333 | 0,0333 | 0,0334 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7001    | 0,7006 | 0,6999 | 0,6996 |
| 0,80    |    | 0,0360                                    | 0,0361 | 0,0361 | 0,0361 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7072    | 0,7076 | 0,7070 | 0,7068 |
| 0,90    |    | 0,0385                                    | 0,0386 | 0,0387 | 0,0387 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7157    | 0,7161 | 0,7155 | 0,7154 |
| 1,00    |    | 0,0410                                    | 0,0411 | 0,0411 | 0,0411 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7251    | 0,7254 | 0,7249 | 0,7248 |
| 2,00    |    | 0,0599                                    | 0,0600 | 0,0601 | 0,0601 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8115    | 0,8115 | 0,8114 | 0,8114 |
| 5,00    |    | 0,0960                                    | 0,0961 | 0,0961 | 0,0961 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8970    | 0,8970 | 0,8970 | 0,8970 |
| 10,00   |    | 0,1364                                    | 0,1364 | 0,1365 | 0,1365 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9295    | 0,9295 | 0,9295 | 0,9295 |
| 20,00   |    | 0,1933                                    | 0,1934 | 0,1934 | 0,1935 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9509    | 0,9509 | 0,9509 | 0,9509 |
| 30,00   |    | 0,2369                                    | 0,2370 | 0,2370 | 0,2370 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9602    | 0,9603 | 0,9602 | 0,9602 |
| 40,00   |    | 0,2734                                    | 0,2735 | 0,2736 | 0,2736 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0005 | 0,9658    | 0,9658 | 0,9658 | 0,9658 |
| 50,00   |    | 0,3056                                    | 0,3056 | 0,3057 | 0,3057 | 0,0054 | 0,0055 | 0,0055 | 0,0056 | 0,9695    | 0,9695 | 0,9695 | 0,9695 |
| 60,00   |    | 0,3345                                    | 0,3346 | 0,3346 | 0,3346 | 0,0145 | 0,0146 | 0,0147 | 0,0147 | 0,9723    | 0,9723 | 0,9723 | 0,9723 |
| 70,00   |    | 0,3610                                    | 0,3611 | 0,3611 | 0,3611 | 0,0277 | 0,0278 | 0,0279 | 0,0279 | 0,9745    | 0,9745 | 0,9745 | 0,9745 |
| 80,00   |    | 0,3855                                    | 0,3856 | 0,3856 | 0,3857 | 0,0444 | 0,0445 | 0,0446 | 0,0446 | 0,9762    | 0,9762 | 0,9762 | 0,9762 |
| 90,00   |    | 0,4085                                    | 0,4086 | 0,4086 | 0,4086 | 0,0640 | 0,0641 | 0,0641 | 0,0641 | 0,9777    | 0,9777 | 0,9777 | 0,9777 |
| 100,00  |    | 0,4301                                    | 0,4302 | 0,4302 | 0,4303 | 0,0856 | 0,0857 | 0,0857 | 0,0858 | 0,9790    | 0,9790 | 0,9790 | 0,9790 |
| 200,00  |    | 0,5989                                    | 0,5990 | 0,5990 | 0,5991 | 0,3250 | 0,3251 | 0,3252 | 0,3252 | 0,9862    | 0,9862 | 0,9862 | 0,9862 |
| 300,00  |    | 0,7147                                    | 0,7148 | 0,7149 | 0,7149 | 0,5180 | 0,5181 | 0,5181 | 0,5181 | 0,9903    | 0,9903 | 0,9903 | 0,9903 |
| 400,00  |    | 0,7968                                    | 0,7969 | 0,7969 | 0,7970 | 0,6568 | 0,6569 | 0,6569 | 0,6569 | 0,9931    | 0,9931 | 0,9931 | 0,9931 |
| 500,00  |    | 0,8551                                    | 0,8552 | 0,8552 | 0,8553 | 0,7555 | 0,7556 | 0,7557 | 0,7557 | 0,9951    | 0,9951 | 0,9951 | 0,9951 |
| 600,00  |    | 0,8965                                    | 0,8966 | 0,8966 | 0,8967 | 0,8257 | 0,8258 | 0,8259 | 0,8259 | 0,9965    | 0,9965 | 0,9965 | 0,9965 |
| 700,00  |    | 0,9260                                    | 0,9261 | 0,9261 | 0,9261 | 0,8756 | 0,8757 | 0,8758 | 0,8758 | 0,9975    | 0,9975 | 0,9975 | 0,9975 |
| 800,00  |    | 0,9469                                    | 0,9470 | 0,9470 | 0,9471 | 0,9111 | 0,9112 | 0,9113 | 0,9113 | 0,9982    | 0,9982 | 0,9982 | 0,9982 |
| 900,00  |    | 0,9618                                    | 0,9619 | 0,9619 | 0,9619 | 0,9363 | 0,9364 | 0,9365 | 0,9365 | 0,9988    | 0,9988 | 0,9988 | 0,9988 |
| 1000,00 |    | 0,9723                                    | 0,9724 | 0,9725 | 0,9725 | 0,9542 | 0,9543 | 0,9544 | 0,9544 | 0,9991    | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 |

Tabela 5.4 – Distribuição de temperatura para diversos autovalores ao longo de X (parede isotérmica).

| PAREDE ISOTÉRMICA (LE = 1000, fac = 0,01) |         |        |        |        |        |           |        |        |        |
|-------------------------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| X↓                                        | N→      | MÉDIA  |        |        |        | INTERFACE |        |        |        |
|                                           |         | 150    | 160    | 170    | 180    | 150       | 160    | 170    | 180    |
|                                           | 0,00    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
|                                           | 0,10    | 0,0935 | 0,0943 | 0,0950 | 0,0956 | 0,2355    | 0,2370 | 0,2384 | 0,2396 |
|                                           | 0,20    | 0,1356 | 0,1364 | 0,1371 | 0,1378 | 0,2681    | 0,2695 | 0,2708 | 0,2719 |
|                                           | 0,30    | 0,1611 | 0,1619 | 0,1626 | 0,1632 | 0,2884    | 0,2897 | 0,2908 | 0,2918 |
|                                           | 0,40    | 0,1760 | 0,1768 | 0,1774 | 0,1780 | 0,2991    | 0,3002 | 0,3012 | 0,3021 |
|                                           | 0,50    | 0,1840 | 0,1846 | 0,1852 | 0,1858 | 0,3029    | 0,3039 | 0,3048 | 0,3056 |
|                                           | 0,60    | 0,1871 | 0,1877 | 0,1882 | 0,1887 | 0,3018    | 0,3027 | 0,3035 | 0,3041 |
|                                           | 0,70    | 0,1869 | 0,1875 | 0,1879 | 0,1883 | 0,2974    | 0,2981 | 0,2988 | 0,2994 |
|                                           | 0,80    | 0,1845 | 0,1850 | 0,1854 | 0,1857 | 0,2906    | 0,2913 | 0,2918 | 0,2924 |
|                                           | 0,90    | 0,1806 | 0,1810 | 0,1813 | 0,1816 | 0,2824    | 0,2830 | 0,2835 | 0,2839 |
|                                           | 1,00    | 0,1757 | 0,1760 | 0,1763 | 0,1765 | 0,2734    | 0,2738 | 0,2742 | 0,2746 |
|                                           | 2,00    | 0,1217 | 0,1218 | 0,1218 | 0,1219 | 0,1883    | 0,1884 | 0,1884 | 0,1885 |
|                                           | 5,00    | 0,0651 | 0,0651 | 0,0651 | 0,0651 | 0,1029    | 0,1029 | 0,1029 | 0,1030 |
|                                           | 10,00   | 0,0443 | 0,0443 | 0,0443 | 0,0443 | 0,0705    | 0,0705 | 0,0705 | 0,0705 |
|                                           | 20,00   | 0,0308 | 0,0308 | 0,0308 | 0,0308 | 0,0490    | 0,0490 | 0,0490 | 0,0491 |
|                                           | 30,00   | 0,0249 | 0,0249 | 0,0249 | 0,0249 | 0,0397    | 0,0397 | 0,0397 | 0,0397 |
|                                           | 40,00   | 0,0214 | 0,0214 | 0,0214 | 0,0214 | 0,0342    | 0,0342 | 0,0342 | 0,0342 |
|                                           | 50,00   | 0,0191 | 0,0191 | 0,0191 | 0,0191 | 0,0305    | 0,0305 | 0,0305 | 0,0305 |
|                                           | 60,00   | 0,0173 | 0,0173 | 0,0173 | 0,0173 | 0,0277    | 0,0277 | 0,0277 | 0,0277 |
|                                           | 70,00   | 0,0160 | 0,0160 | 0,0160 | 0,0160 | 0,0255    | 0,0255 | 0,0255 | 0,0255 |
|                                           | 80,00   | 0,0149 | 0,0149 | 0,0149 | 0,0149 | 0,0237    | 0,0238 | 0,0238 | 0,0238 |
|                                           | 90,00   | 0,0140 | 0,0140 | 0,0140 | 0,0140 | 0,0223    | 0,0223 | 0,0223 | 0,0223 |
|                                           | 100,00  | 0,0132 | 0,0132 | 0,0132 | 0,0132 | 0,0210    | 0,0210 | 0,0210 | 0,0210 |
|                                           | 200,00  | 0,0086 | 0,0086 | 0,0086 | 0,0086 | 0,0138    | 0,0138 | 0,0138 | 0,0138 |
|                                           | 300,00  | 0,0061 | 0,0061 | 0,0061 | 0,0061 | 0,0097    | 0,0097 | 0,0097 | 0,0097 |
|                                           | 400,00  | 0,0043 | 0,0043 | 0,0043 | 0,0043 | 0,0069    | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 |
|                                           | 500,00  | 0,0031 | 0,0031 | 0,0031 | 0,0031 | 0,0049    | 0,0049 | 0,0049 | 0,0049 |
|                                           | 600,00  | 0,0022 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0035    | 0,0035 | 0,0035 | 0,0035 |
|                                           | 700,00  | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0025    | 0,0025 | 0,0025 | 0,0025 |
|                                           | 800,00  | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0018    | 0,0018 | 0,0018 | 0,0018 |
|                                           | 900,00  | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0012    | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 |
|                                           | 1000,00 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0009    | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 |

### 5.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As Figuras (5.1a) e (5.1b), e (5.2a) e (5.2b) mostram a distribuição da temperatura e concentração para os casos de parede adiabática e isotérmica respectivamente. Nelas estão representados o comportamento destes potenciais na parede, na interface líquido-vapor, e seus valores médios ao longo do escoamento, posição X. Estas figuras apresentam ainda, com o intuito de consolidar o modelo proposto, uma comparação com a principal

referência. Os resultados obtidos por GROSSMAN (1983) foram inseridos por meio do programa ENGAUGE DIGITIZER, versão 2.15, usado para captura de pontos sobre imagens, onde foi gerada uma planilha de extensão “.DAT” que possibilitou gerar o gráfico juntamente com os resultados desta tese. Este programa é do tipo código aberto e está disponível gratuitamente para “download” na internet.

Nos trechos iniciais do escoamento, para valores muito pequenos de  $X$ , nota-se uma disparidade muito grande nos resultados da referência em relação aos encontrados neste trabalho na região da interface líquido-vapor. Este fato se deve a um recurso usado pela referência para superar a dificuldade inicial na forma de um ponto de singularidade já que, devido o acoplamento na interface, a condição de contorno nesta fronteira estabelece que, ao longo desta,  $W(X,1) + \theta(X,1) = 1$ . No entanto, como as condições iniciais dos dois potenciais, são nulas, esta condição de fronteira não é satisfeita no ponto  $X=0$ . Tanto GROSSMAN (1983) como WASSENAAR (1994), usaram uma expressão em função do número de Lewis,  $Le$ , e do fator de acoplamento,  $f_{ac}$ , na obtenção de valores iniciais para a interface. Pelo uso da GITT, esta singularidade é superada sem problemas.

Nas Figuras (5.3a), e (5.3b), se pode notar que, para pequenos valores de  $X$ , tanto no caso adiabático como no caso isotérmico, as curvas mostram comportamento praticamente igual. O líquido na interface alcança o equilíbrio termodinâmico com o vapor quase que imediatamente após o contato (em  $X = 0$ ). No entanto, este efeito precisa de uma distância um pouco maior para se difundir através da película e atingir a parede. Em consequência disso, a temperatura e concentração na parede permanecem praticamente zero neste trecho.

Para o caso de parede adiabática, as temperaturas na parede, na interface e média, aumentam gradativamente, tendendo para um valor comum, se tornando cada vez mais próximas uma das outras à medida que o valor de  $X$  aumenta. Este aumento se deve ao fato do calor de absorção não está sendo removido do sistema.

Para o caso de parede isotérmica, a temperatura na interface tem um ligeiro aumento no início do escoamento enquanto que a temperatura média tende a acompanhar esta elevação à medida que o calor se difunde da interface para o interior do filme. Em seguida, ambas as temperaturas começam a diminuir até atingir o valor zero, devido à retirada de calor do sistema através da parede.

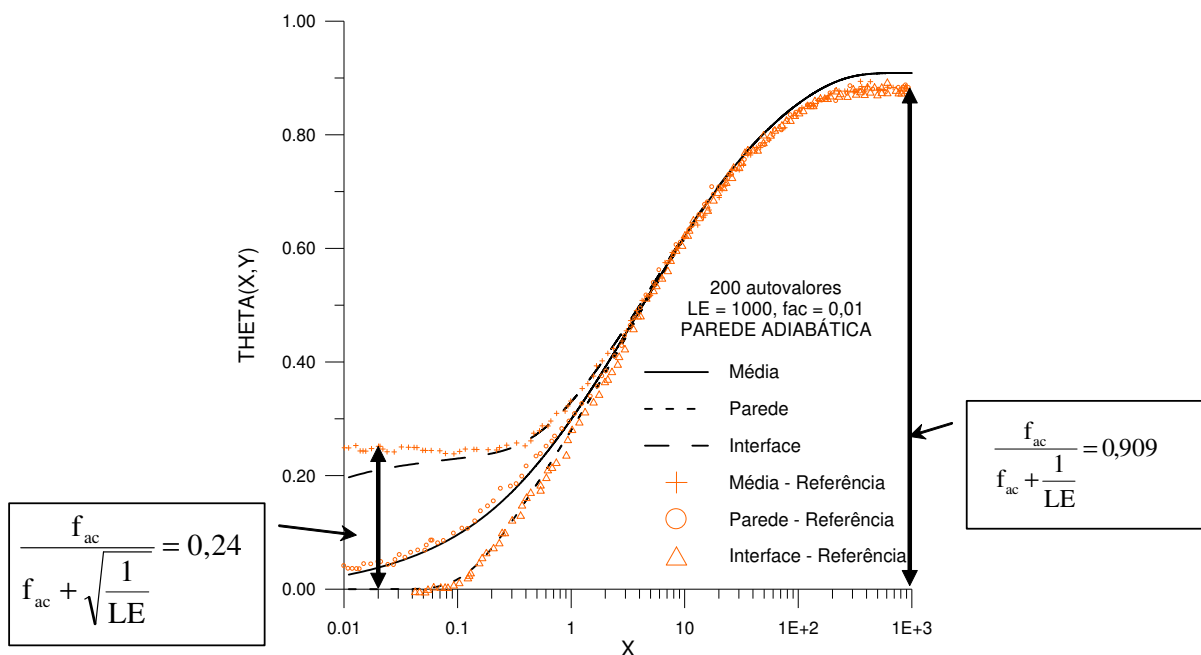


Figura 5.1a. Comparação da distribuição de temperatura para  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  em relação aos resultados obtidos pela referência (parede adiabática, 200 autovalores).

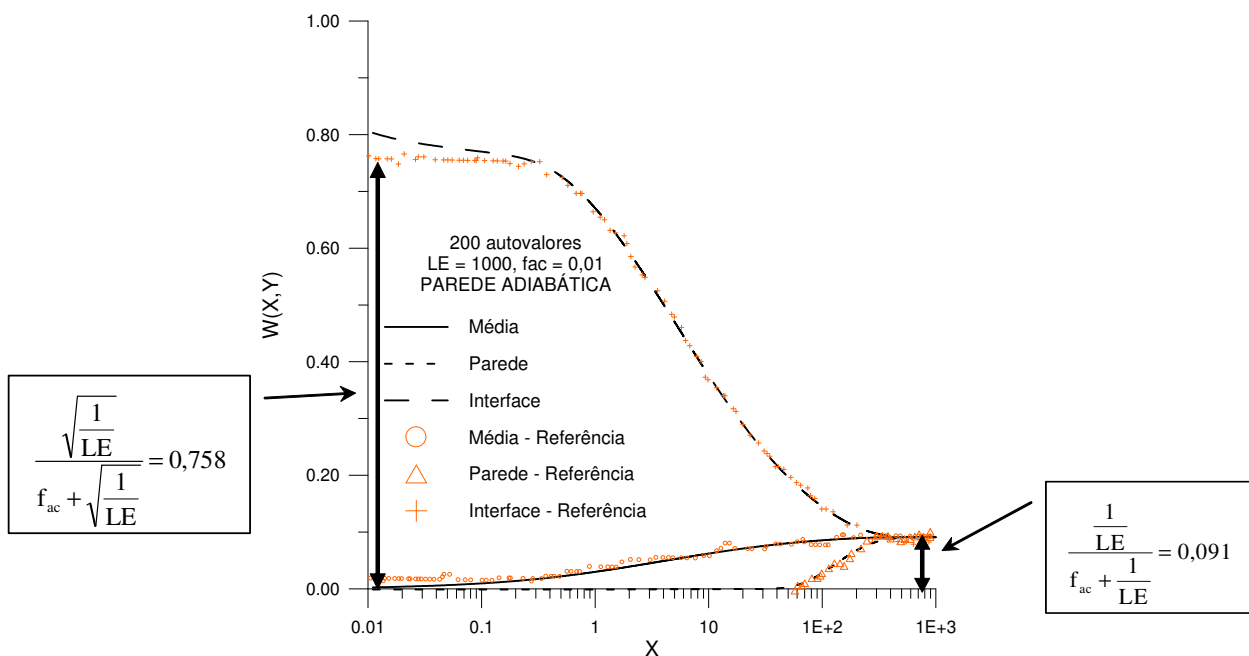


Figura 5.1b. Comparação da distribuição de concentração para  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  em relação aos resultados obtidos pela referência (parede adiabática, 200 autovalores).

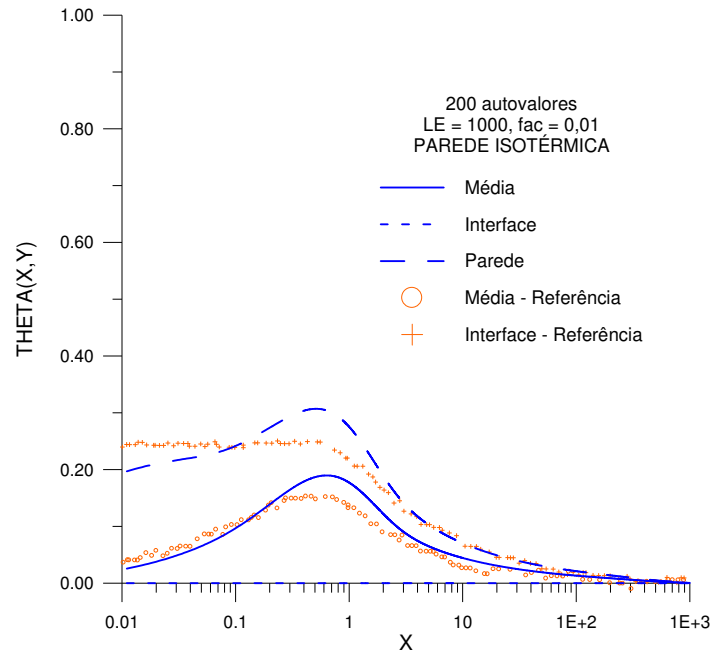


Figura 5.2a. Comparação da distribuição de temperatura para  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  em relação aos resultados obtidos pela referência (parede isotérmica, 200 autovalores).

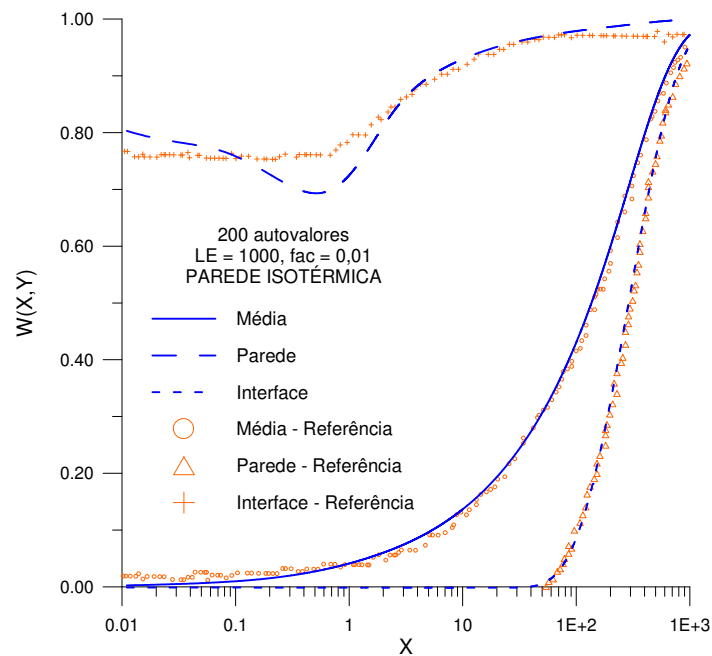


Figura 5.2b. Comparação da distribuição de concentração para  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  em relação aos resultados obtidos pela referência (parede isotérmica, 200 autovalores).

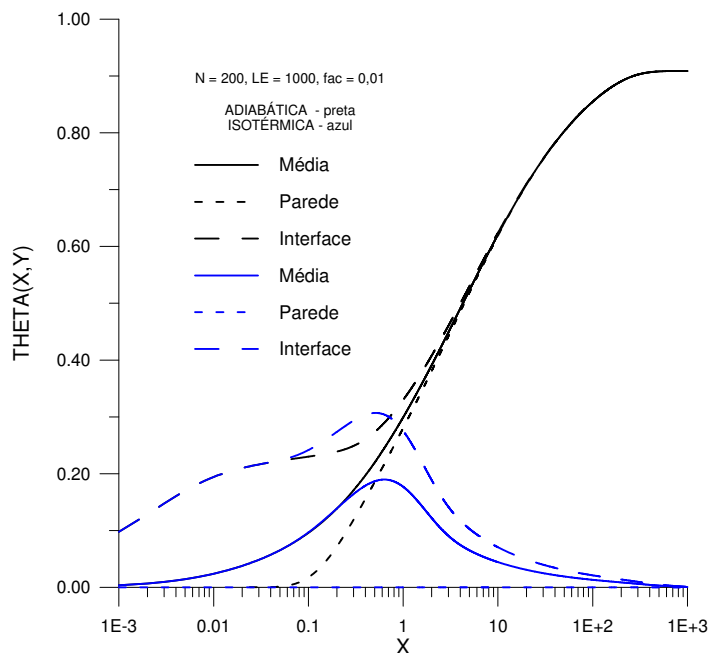


Figura 5.3a. Comportamento da distribuição de temperatura para os casos de parede adiabática e isotérmica para as mesmas condições de operação.

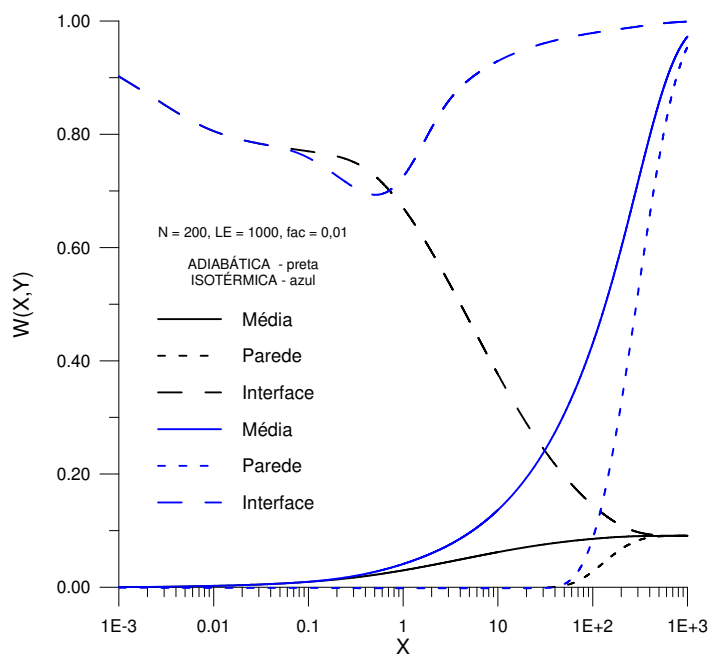


Figura 5.3b. Comportamento da distribuição de concentração para os casos de parede adiabática e isotérmica para as mesmas condições de operação.

A distribuição da concentração na interface para ambos os casos segue uma tendência oposta a da distribuição de temperatura, representada pela condição de contorno (3.6d). A concentração média aumenta nas duas situações tendendo sempre a um valor igual ao da concentração na interface no final do escoamento.

No caso da parede isotérmica, a temperatura do filme fica igual à temperatura da parede (zero), enquanto que a concentração atinge o equilíbrio,  $W(X,1) = 1$ .

As Figuras (5.4) e (5.5) mostram perfis de temperatura e concentração ao longo do filme para diversos valores de  $X$ , para os casos adiabático e isotérmico. Nota-se que existem duas camadas limites, uma de temperatura e uma de concentração, sendo que a primeira se desenvolve mais rapidamente que a segunda já que a difusividade térmica,  $\alpha$ , é maior do que a difusividade de massa,  $D$ . Ao passo que o valor de  $X$  aumenta, os efeitos sofridos na interface se difundem na direção da parede e os gradientes de temperatura e concentração tornam-se mais moderados. Para pequenos valores de  $X$ , estes gradientes são limitados a uma estreita camada próxima a interface.

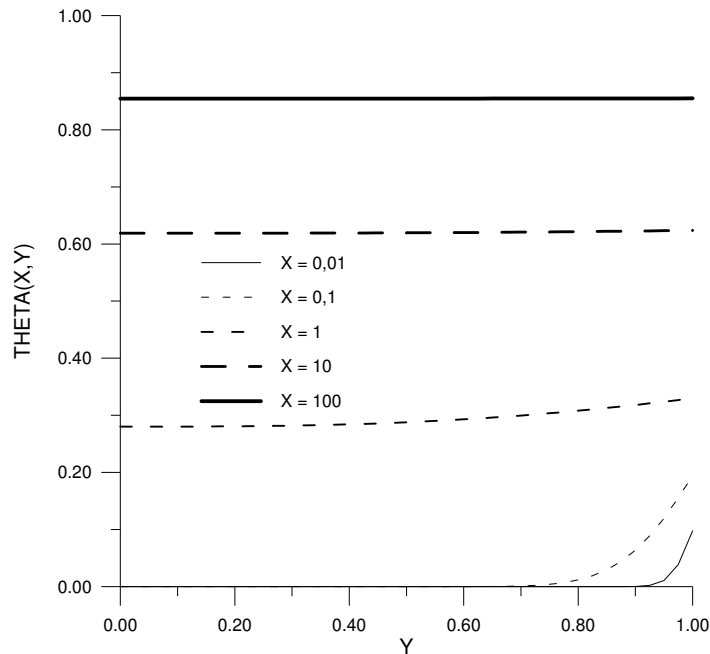


Figura 5.4a. Perfis de temperatura para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede adiabática, 200 autovalores).

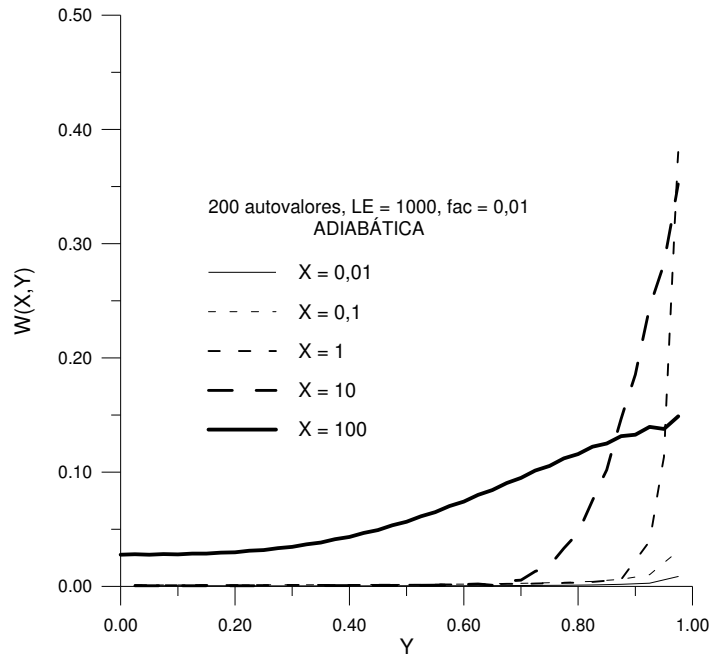


Figura 5.4b. Perfis de concentração para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede adiabática, 200 autovalores).

As distribuições de temperatura e concentração sob a influência do calor de absorção (na forma do fator de acoplamento) tanto na interface como na parede são mostradas a seguir. A Figura (5.6a) mostra que o valor inicial da temperatura na interface cresce com o fator de acoplamento enquanto que o valor inicial da concentração diminui. O fator de acoplamento não mostrou influência sobre a distância necessária para o desenvolvimento da camada limite nestes dois casos, ou seja, o desenvolvimento destas é imediato.

A Figura (5.6b) indica que as alterações da temperatura e concentração na parede começam praticamente no mesmo ponto para todos os valores de  $f_{ac}$ . No limite, quando o calor de absorção for desprezível ( $f_{ac} = 0$ ), a temperatura é zero através de filme e a concentração na interface é 1 ao longo de todo o  $X$ . Na parede, a concentração só começa a se desenvolver depois de uma certa distância, enquanto que o campo de temperatura se desenvolve quase que imediatamente.

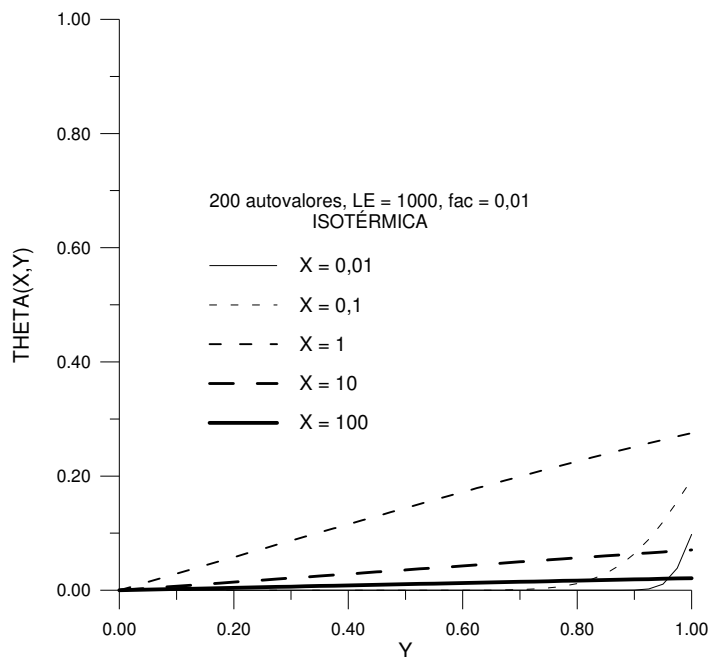


Figura 5.5a. Perfis de temperatura para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede isotérmica, 200 autovalores).

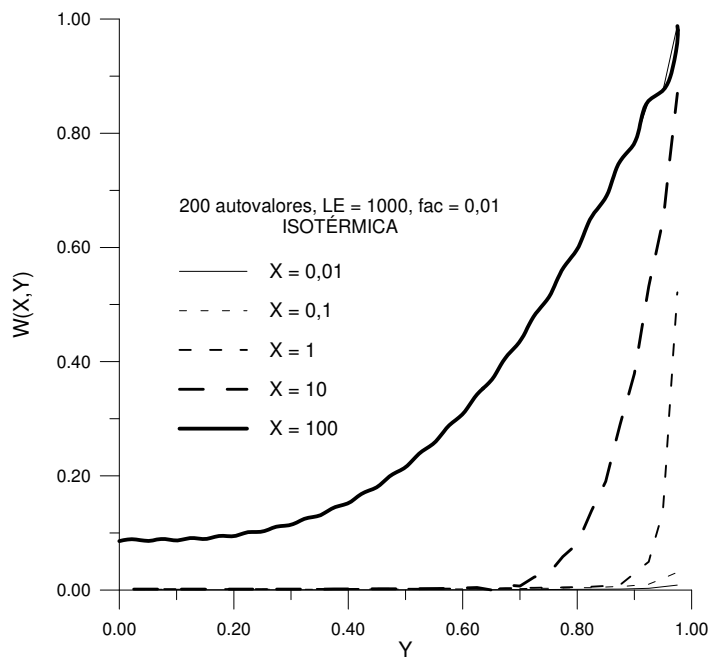


Figura 5.5b. Perfis de concentração para diferentes valores de  $X$  com  $Le = 1000$  e  $f_{ac} = 0,01$  (parede isotérmica, 200 autovalores).

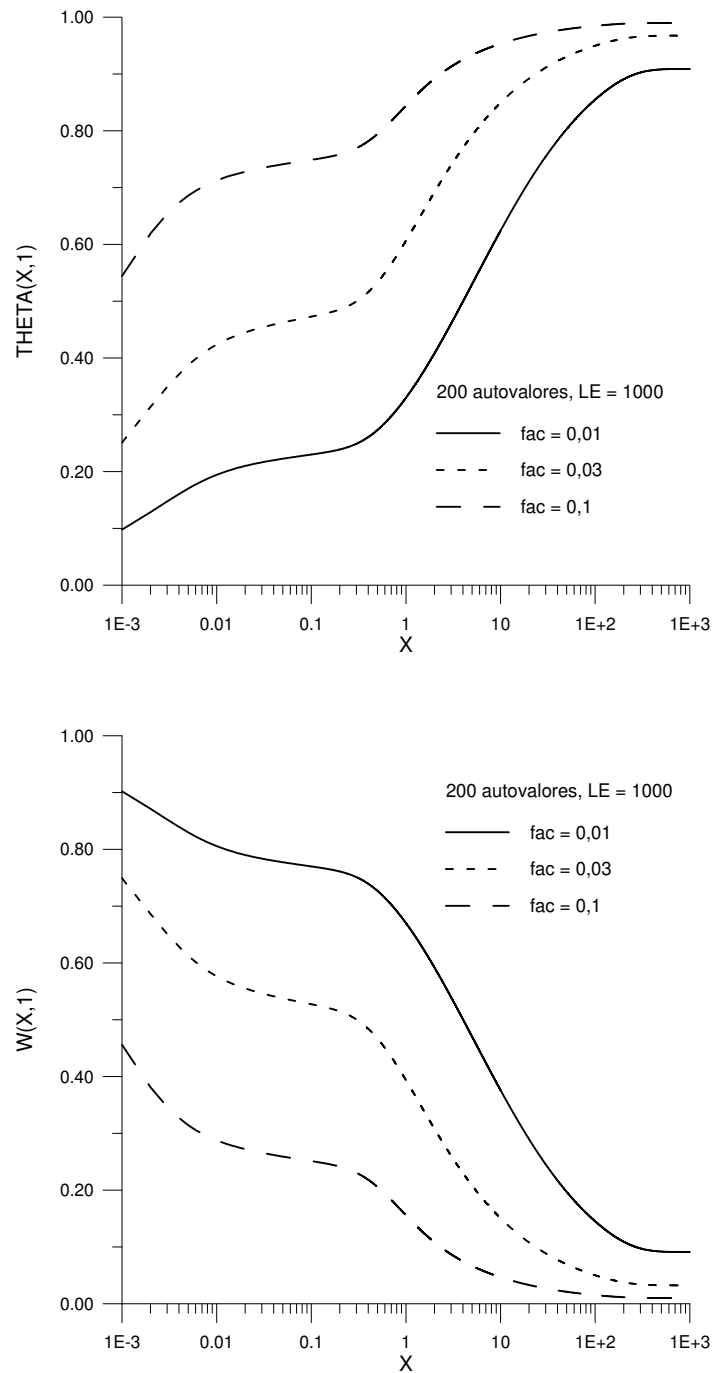


Figura 5.6a. Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede adiabática, 200 autovalores).

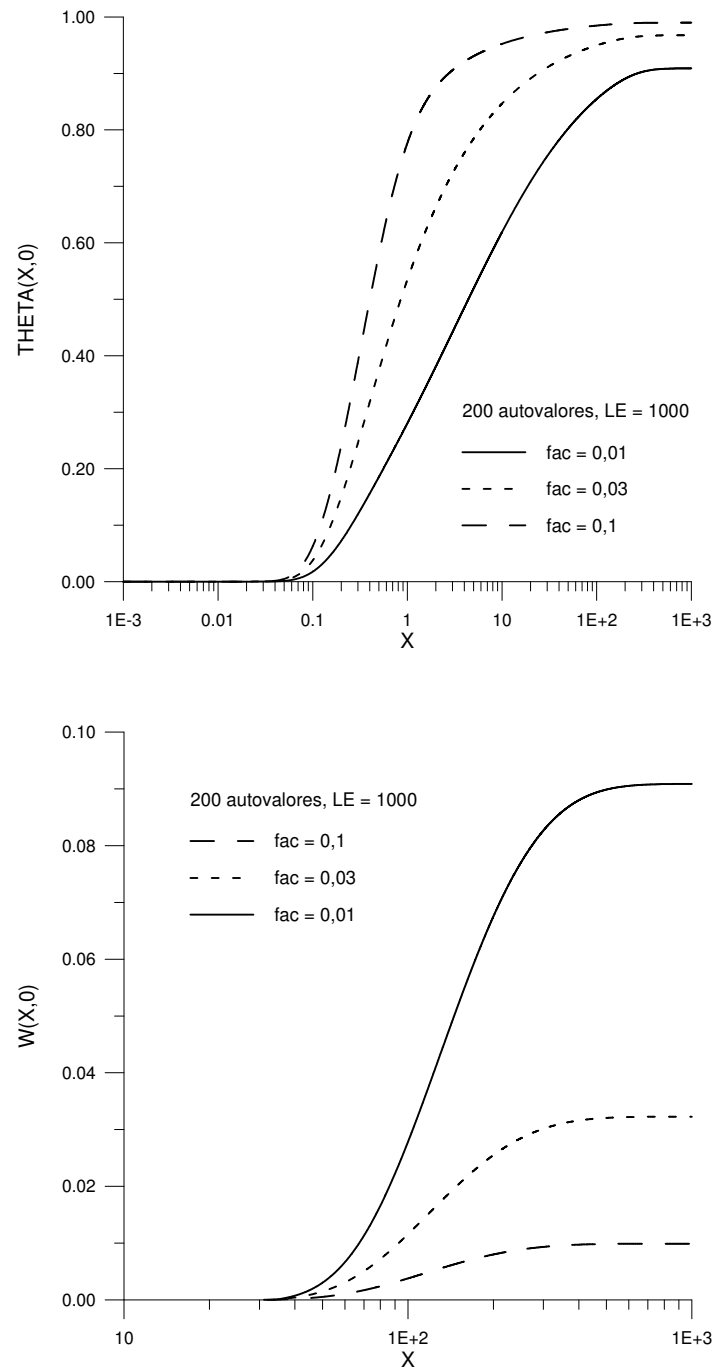


Figura 5.6b. Distribuição de temperatura e concentração na parede para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede adiabática, 200 autovalores).

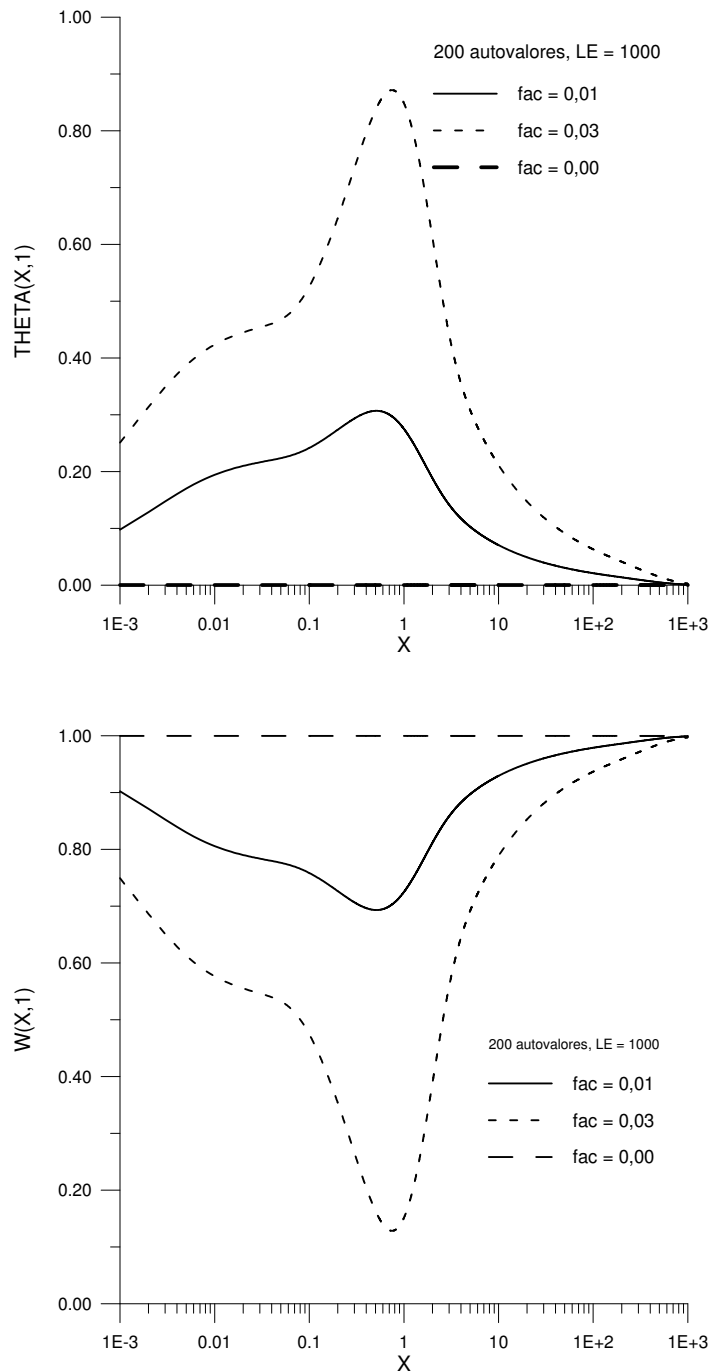


Figura 5.7a. Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede isotérmica, 200 autovalores).

A Figura (5.7a) exibe a mesma situação considerando o caso de parede isotérmica. A análise na interface e na parede são idênticas as das Figuras (5.6a) e (5.6b). No entanto,

nota-se que na parede, Figura (5.7b), a distribuição de concentração para os três fatores de acoplamento testado é praticamente coincidente.

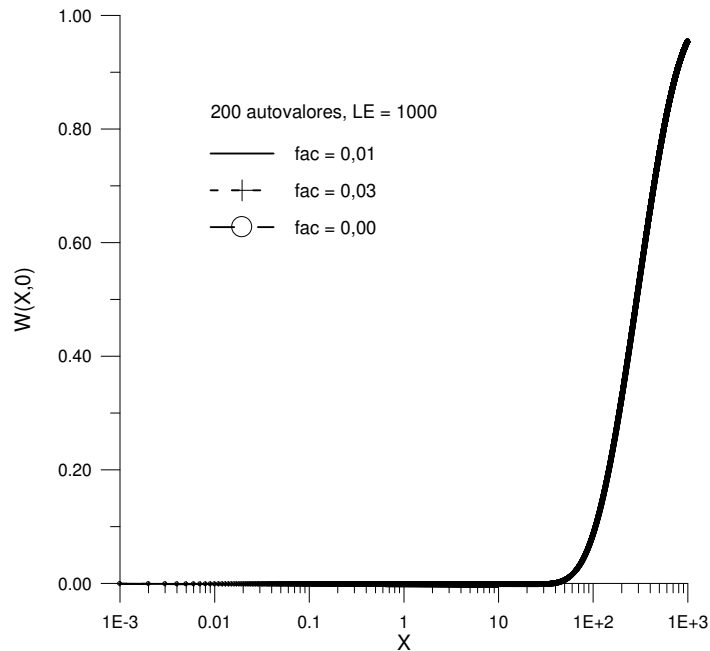


Figura 5.7b. Distribuição da concentração na parede para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  (parede isotérmica, 200 autovalores).

A Figuras (5.8a) e (5.8b) mostram a distribuição da temperatura e concentração na interface e na parede respectivamente, sob o efeito do número de Lewis.

Um aumento no número de Lewis leva a um aumento no valor inicial da temperatura na interface e a uma diminuição no valor inicial da concentração. Efeito igual ocorre quando  $X \rightarrow \infty$  para o caso de parede adiabática.

Outro efeito imposto pelo valor do  $Le$  sobre o desenvolvimento da camada limite de concentração na parede é mostrado nas Figuras (5.9a) e (5.9b). Tanto no caso adiabático, como no isotérmico, um aumento no valor do  $Le$  aumenta a distância necessária para que a mudança na concentração atinja a parede.

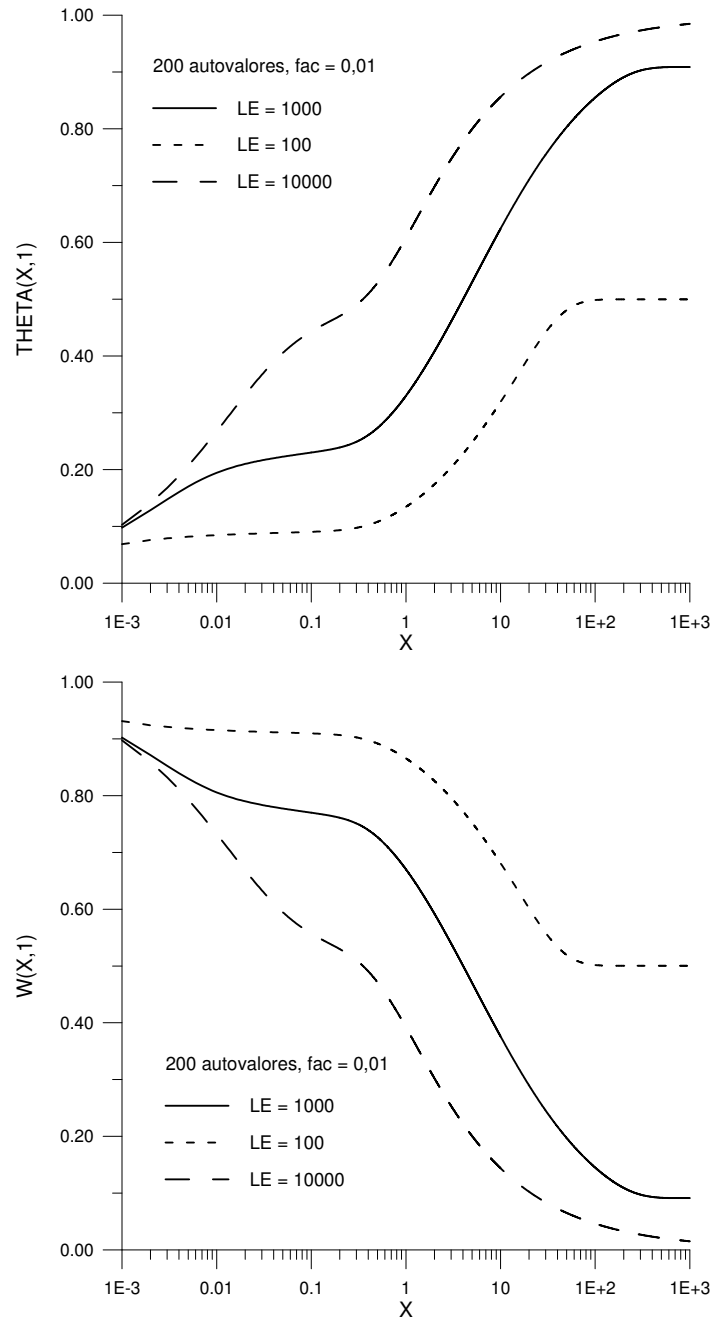


Figura 5.8a. Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede adiabática, 200 autovalores).

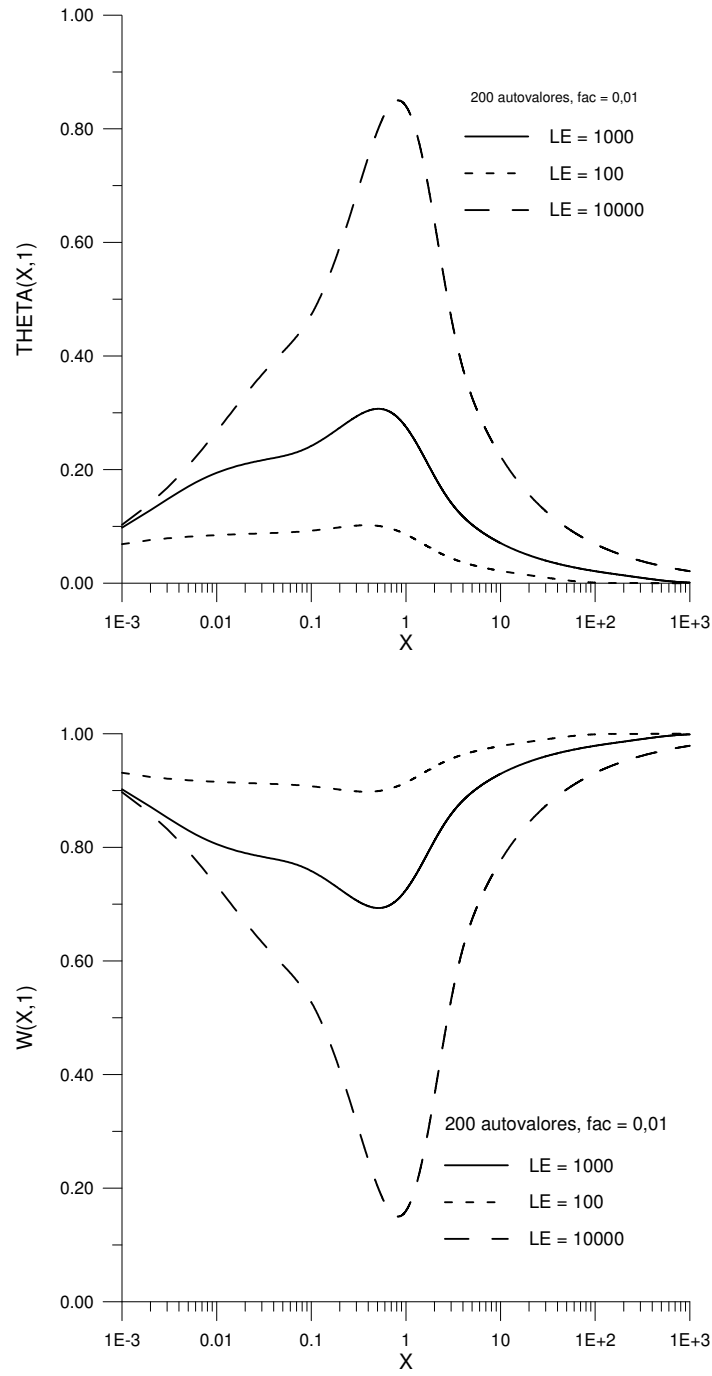


Figura 5.8b. Distribuição de temperatura e concentração na interface para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede isotérmica, 200 autovalores).

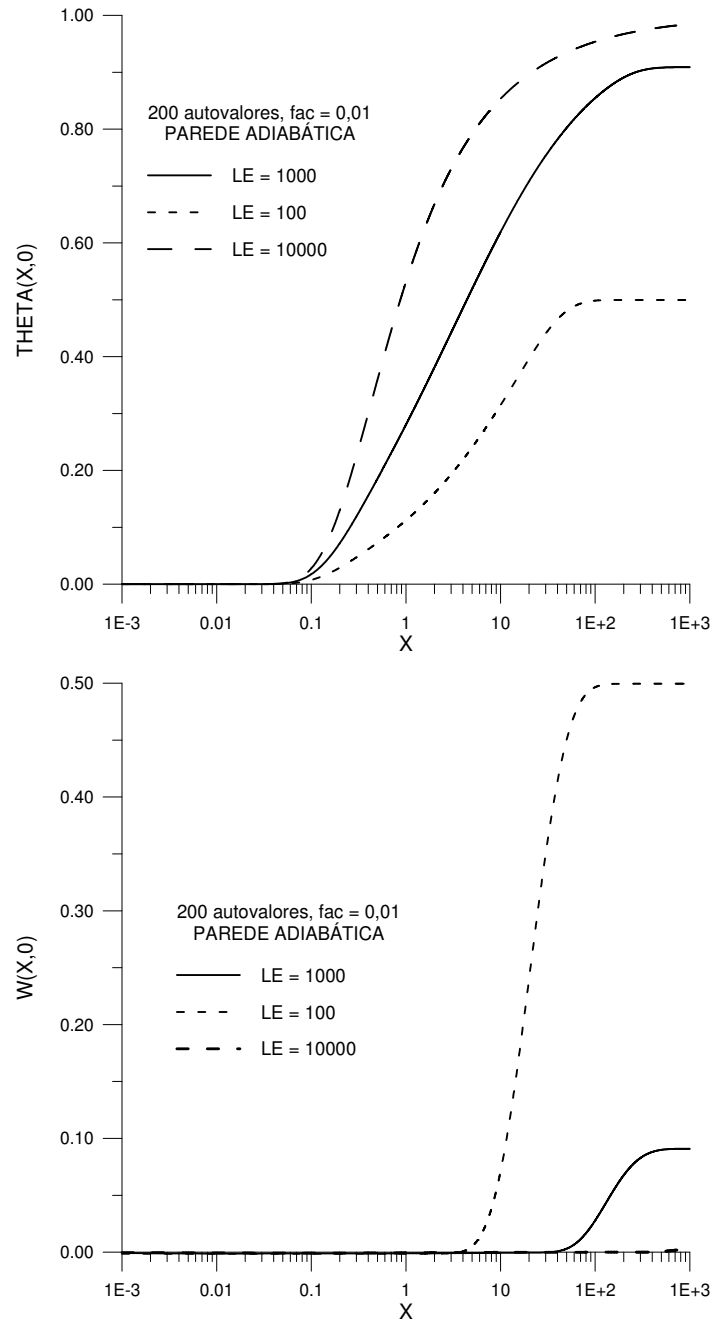


Figura 5.9a. Distribuição de temperatura e concentração na parede para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede adiabática, 200 autovalores).

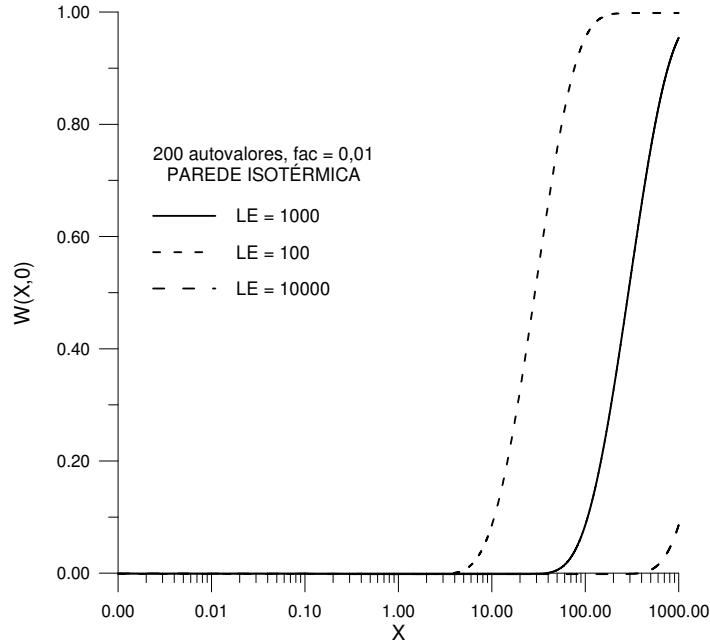


Figura 5.9b. Distribuição da concentração na parede para  $f_{ac} = 0,01$  e diferentes valores de  $Le$  (parede isotérmica, 200 autovalores).

A Figura (5.10) mostra o fluxo de massa através da interface ao longo de  $X$  para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  nos casos de parede adiabática e isotérmica.

Para pequenos valores de  $X$ , os valores iniciais do fluxo de massa para os dois casos são praticamente coincidentes. Contudo, quando  $X$  aumenta, após a camada limite térmica ter se desenvolvido completamente, o calor removido pela parede para o caso isotérmico otimiza a transferência de massa. Outro fato interessante é que o ponto no qual as curvas partem serve como uma medida para o comprimento necessário ao desenvolvimento completo da camada limite térmica. Quando  $X \rightarrow \infty$  em ambos os casos o fluxo de massa tende a zero. O aumento do valor do fator de acoplamento diminui o fluxo de massa, e a curva  $f_{ac} = 0$  descreve o caso de transferência de massa isotérmica, cujo valor é o máximo possível para o  $Le$  dado.

A Figura (5.11) descreve número de Sherwood como função de  $X$  para diferentes valores de  $Le$  e  $f_{ac}$ . Os valores iniciais de  $Sh$  são geralmente grandes e diminuem à medida que  $X$  cresce. No caso da parede isotérmica, para o mesmo  $Le$ , o efeito do fator de acoplamento é pequeno. Fixando o valor do  $f_{ac}$ ,  $Sh$  é maior para o maior valor de  $Le$ . Um número de  $Le$  maior exige uma distância maior para o desenvolvimento completo da camada limite de concentração tornar-se totalmente desenvolvida.

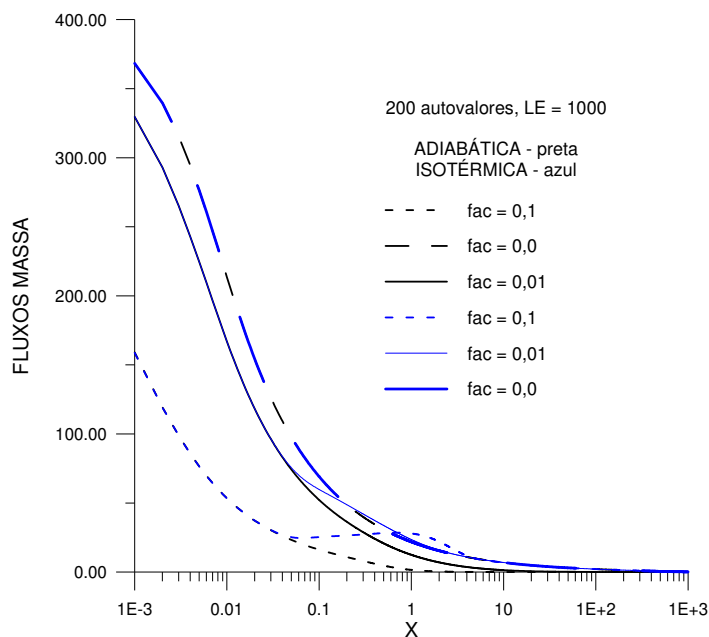


Figura 5.10. Fluxo de massa na interface para  $Le = 1000$  e diferentes valores de  $f_{ac}$  nas condições de parede adiabática e isotérmica (200 autovalores).

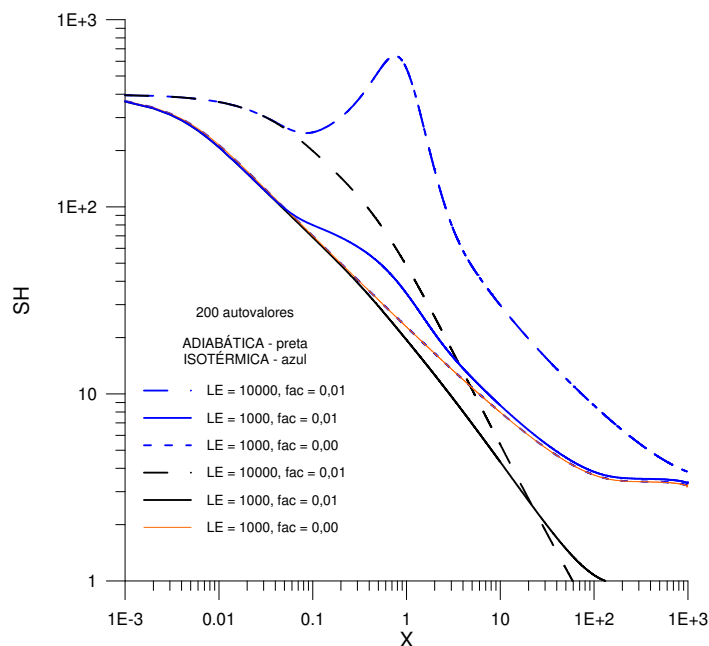


Figura 5.11. Número de Sherwood para diferentes combinações  $Le$ ,  $f_{ac}$  e condições de parede adiabática e isotérmica (200 autovalores).

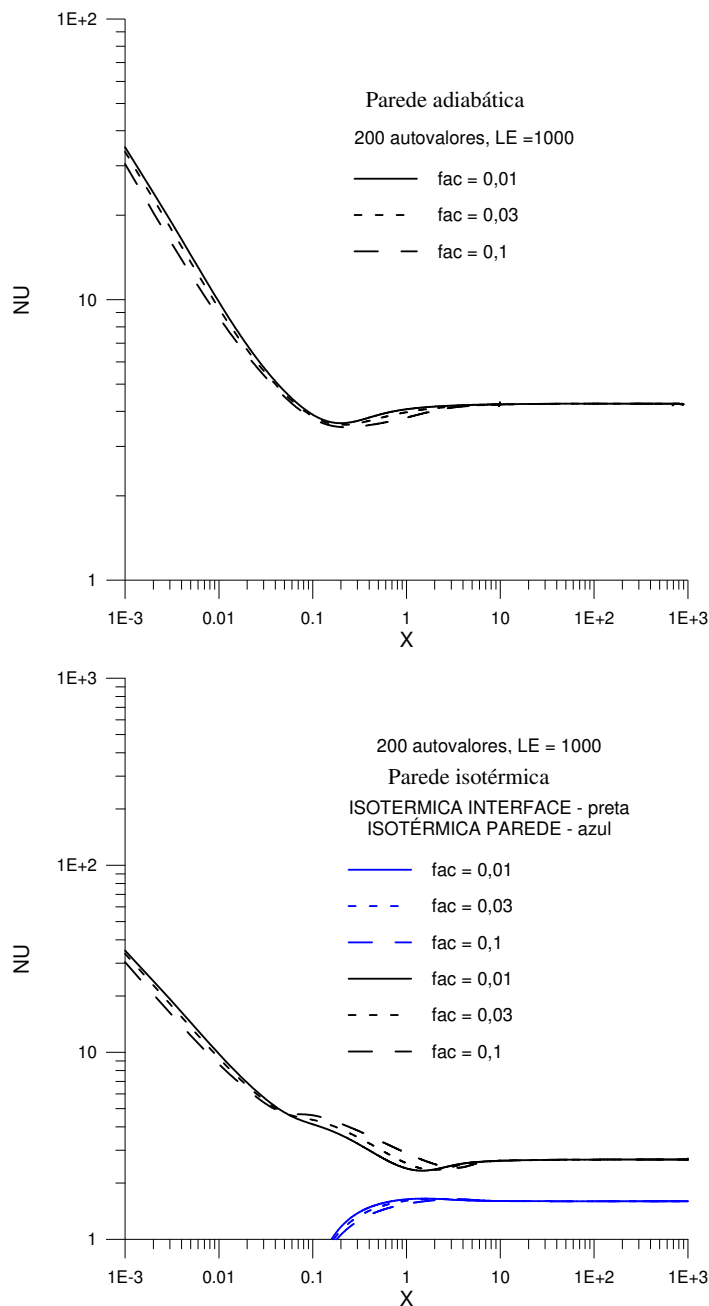


Figura 5.12. Número de Nusselt local para diferentes pares  $Le$ ,  $f_{ac}$  (parede adiabática – acima; e isotérmica - abaixo, 200 autovalores).

No caso de parede adiabática, o aumento do fator de acoplamento reduz significativamente o valor de  $Sh$ .

A Figura (5.12) ilustra a variação do número de Nusselt com o comprimento  $X$  para a condição de parede adiabática, Nusselt na interface, e na parede isotérmica, Nusselt

na interface e na parede. Na região inicial, o número de Nusselt na interface diminui do mesmo modo para os casos adiabático e isotérmico.

Após esta região inicial, o  $Nu$  praticamente não sofre mais variação e tem seu comportamento pouco afetado pelo número de Lewis e pelo fator de acoplamento para uma grande faixa de valores deste parâmetro.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS

O fenômeno da transferência simultânea de calor e massa presente nos absorvedores das máquinas de refrigeração por absorção, classificado como problemas de difusão acoplados, apresenta um forte acoplamento na interface e com isso as equações que representam as distribuições de energia e concentração da película líquida durante o escoamento, não podem ser solucionadas separadamente. Uma condição de equilíbrio na interface líquido-vapor foi considerada para se conseguir a solução das equações de difusão da energia e concentração. Foram modeladas três situações práticas de interesse. O escoamento sobre uma placa plana inclinada com condição de parede adiabática e parede isotérmica cuja espessura da película é constante ao longo do escoamento, e o escoamento da película sobre um único tubo, base para a modelagem completa do absorvedor (banco de tubos) cuja espessura da película varia ao longo do perímetro do tubo. Os dois problemas foram abordados via Técnica da Transformada Integral Generalizada, GITT, e um código computacional foi desenvolvido em Linguagem MATHEMATICA apresentando excelentes resultados. Para o caso de escoamento sobre placa, o código simula seis condições de operação diferentes simultaneamente, ou seja, seis diferentes combinações do número de Lewis,  $Le$ , e fator de acoplamento,  $f_{ac}$ . A extensão da placa onde o escoamento ocorre, normalizada em função do número de Peclet,  $Pe$ , e da espessura do filme, foi discretizada em 10000 pontos e o código suporta rodar com até 200 autovalores. Embora os resultados para o caso de escoamento sobre placa plana tenham mostrado excelente convergência quando comparados à referência (GROSSMAN, 1983), o modelo não pode ser testado para o caso bidimensional, pois o programa pára com a mensagem de memória insuficiente. O mesmo tem acontecido para situações mais extremas de condições de

operação até mesmo para o caso unidimensional como número de Lewis muito grandes ou fatores de acoplamentos.

Outra importante observação a ser feita é que os potenciais e seus fluxos nas fronteiras só passaram a ter resultados coerentes após a abordagem via balanço integral. Sem este recurso, estes valores se mostraram pouco confiáveis. O desenvolvimento das camadas limites térmica e de concentração foram descritas pelo modelo, bem como as variações de temperatura, concentração e fluxos de massa e calor. Na forma adimensional, estas grandezas são dependentes dos parâmetros característicos  $Le$  e  $f_{ac}$ . Tabelas com resultados adimensionais para os potenciais ao longo de  $X$ , bem como para os números de Nusselt e Sherwood, e fluxo de massa para as condições de operação analisadas neste trabalho, estão disponíveis nos Apêndices – G e H.

O campo de escoamento que ocorre sobre um tubo tratado nesta tese foi considerado como independente do processo de absorção, para efeito de simplificação, bem como evidenciar o crescimento na dificuldade da modelagem matemática. Como sugestão de pesquisas futuras, fica a complementação da modelagem nos seguintes aspectos:

- Desenvolver um código em linguagem Fortran para possibilitar a validação do modelo 2D e aumentar a possibilidade de testes para diversas condições de operação e número de autovalores.
- A inclusão do estudo do fenômeno da transferência simultânea de calor e massa entre os tubos;
- A consideração do número de tubos existentes no absorvedor; e;
- A inclusão dos termos de difusão axial nas equações da energia e concentração.
- Desenvolver um modelo que considere o campo de velocidades e a espessura variável da película acoplado aos campos de temperatura e concentração, ou seja, modelar simultaneamente quatro potenciais acoplados via GITT.

## REFERÊNCIAS

- ANDBERG, J. W., VLIET, G. C., 1987, “A Simplified Model for Absorption of Vapors into Liquid Films Flowing over Cooled Horizontal Tubes”, *ASHRAE Transactions*, v. 93, part. 2, pp. 2454 - 2466.
- BABADI, F., FARHANIEH, B., 2005, “Characteristics of Heat and Mass Transfer in Vapor Absorption of Falling Film Flow on a Horizontal Tube”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 32, n. 9 (October), pp. 1253-1265.
- BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E. N., 2002, *Transport Phenomena*. 2 ed., New York, John Wiley & Sons, Inc..
- BO, S., MA, X., LAN, Z., CHEN, J., CHEN, H., 2010, “Numerical Simulation on the Falling Film Absorption Process in a Counter-Flow Absorber, v. 156, pp. 607-612.
- BOSNJAKOVIC, F., 1965, *Technical Thermodynamics*, 1 ed. St. Paul, Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- BOYADJIEV, C., 1982, “Non-Linear Mass Transfer in Falling Films”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 25, n. 4, pp. 535 – 540.
- CASTRO, J., OLIET, C., RODRÍGUEZ, I., OLIVA, A., 2009, “Comparison of the Performance of Falling Film and Bubble Absorbers for Air-Cooled Absorption Systems”, *International Journal of Thermal Sciences*, v. 48, pp. 1355–1366.
- ÇENGEL, Y. A. E BOLES, M. A, 2006, *Thermodynamics: an Engineering Approach*, McGraw-Hill Companies, Inc.
- CHOUDHURY, S. K., HISAJIMA, D., OHUCHI, T., NISHIGUCHI, A., FUKUSHIMA, T., SAKAGUCHI, S., 1993, “Absorption of Vapors into Liquid Films Flowing over Cooled Horizontal Tubes”, *ASHRAE Transactions*, v. 99, n. 2, pp. 81-89.

- CONLISK, A. T., 1992, "Falling Film Absorption on a Cylindrical Tube", *AIChE Journal*, v. 38, n. 11 (November), pp. 1716-1728.
- CONLISK, A. T., 1995, "Analytical Solutions for the Heat and Mass Transfer in a Falling Film Absorber", *Chemical Engineering Science*, v. 50, n. 4 (February), pp. 651-660.
- CONLISK, A. T., MAO, J., 1996, "Nonisothermal Absorption on a Horizontal Cylindrical Tube - 1. The Film Flow", *Chemical Engineering Science*, v. 51, n. 8 (April), pp. 1275-1285.
- COTTA, R. M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, 1 ed., Florida, CRC Press, Inc.
- DORGAN, C. B., LEIGHT, S. P. E DORGAN, C. E., 1995, *Application Guide For Absorption Cooling/Refrigeration Using Recovered Heat*, Atlanta, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc..
- ENGAGE DIGITIZER, digitizing software, Version 2.15. Disponível em: <http://digitizer.sourceforge.net/>.
- FORTTRAN POWERSTATION, (1990). Version 4.0; Microsoft Corporation.
- GONZÀLEZ, J. C., 2005, *Simulation of Heat and Mass Transfer Phenomena in the Critical Elements of H<sub>2</sub>O-LiBr Absorption Cooling Machines. Experimental Validation and Application to Design*. Tesi Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.
- GRIGOR'EVA, N. I., NAKORYAKOV, V. E., 1977, "Combined Heat and Mass Transfer During Absorption in Drops and Films", *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, v. 32, n. 3 (March), pp. 399 - 405.
- GRIGOR'EVA, N. I., NAKORYAKOV, V. E., 1977, "Exact Solution of Combined Heat and Mass Transfer Problem during Film Absorption", *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, v. 33, n. 5 (November), pp. 893- 898.
- GRIGOR'EVA, N. I., NAKORYAKOV, V. E., 2001, "Modeling of Heat and Mass Transfer in Absorption in Two-Phase Binary Systems used in Heat Pumps", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, v. 42, n. 1 (January), pp. 103 – 110.

- GROSSMAN, G., 1983, "Simultaneous Heat and Mass Transfer in Film Absorption under Laminar Flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 26, n. 3 (March), pp. 357-371.
- GROSSMAN, G., HEATH, M. T., 1984, "Simultaneous Heat and Mass Transfer in Absorption of Gases in Turbulent Liquid Films", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 27, n. 12 (December), pp. 2365-2376.
- HEROLD, K. E, RADERMACHER, R. E KLEIN S. A, 2000, *Absorption Chillers and Heat Pumps*, CRC Press, Inc..
- ISLAM, M. A., MIYARA, A., SETOGUCHI, T., 2009, "Numerical Investigation of Steam Absorption in Falling Film of LiBr Aqueous Solution with Solitary Waves", *International Journal of Refrigeration*, v. 32, pp. 1597-1603.
- ISLAM, Md. R., 2008, "Absorption Process of A Falling Film on a Tubular Absorber: An Experimental and Numerical Study", *Applied Thermal Engineering*, v. 28, n. 11-12 (August), pp. 1386-1394.
- ISLAM, Md. R., WIJEYSUNDERA, N. E., HO, J. C., 2004, "Simplified Models for Coupled Heat and Mass Transfer in Falling-Film Absorbers", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 2 (January), pp. 395-406.
- JANI, S., SAIDI, M. H., MOZAFFARI, A. A., 2003, "Tube Bundle Heat and Mass Transfer Characteristics in Falling Film Absorption Generators", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 30, n. 4 (May), pp. 565-576.
- JANI, S., SAIDI, M. H., MOZAFFARI, A. A., HEYDARI, A., 2004, "Modeling Heat and Mass Transfer in Falling Film Absorption Generators", *Scientia Iranica*, v. 11, n. 1-2 (April), pp. 81-89.
- KILLION, J. D., GARIMELLA, S., 2001, "A Critical Review of Models of Coupled Heat and Mass Transfer in Falling-Film Absorption", *International Journal of Refrigeration*, v. 24, n. 8 (December), pp. 755-797.
- KILLION, J. D., GARIMELLA, S., 2004, "Pendant Droplet Motion for Absorption on Horizontal Tube Banks", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 19-20 (September), pp. 4403-4414.
- KIM, D. S., INFANTE FERREIRA, C. A., 2009, "Analytic Modelling of a Falling Film Absorber and Experimental Determination of Transfer Coefficients", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, pp. 4757-4765.

- KIM, D. S., INFANTE FERREIRA, C. A., 2010, "Effectiveness of Non-Volatile Falling Film Absorbers with Solution and Coolant in Counter-Flow", *International Journal of Refrigeration*, v. 33, pp. 79-87.
- KREIDER, J. F. et al., 2001, *Handbook Of Heating, Ventilation and Air Conditioning*, Boca Raton, CRC Press LLC.
- KYUNG, I., HEROLD, K. E., KANG, Y. T., 2007, "Experimental Verification of H<sub>2</sub>O/LiBr Absorber Bundle Performance with Smooth Horizontal Tubes", *International Journal of Refrigeration*, v. 30, n. 4 (June), pp. 582-590.
- KYUNG, I., HEROLD, K. E., KANG, Y. T., 2007, "Model for Absorption of Water Vapor into Aqueous LiBr Flowing Over A Horizontal Smooth Tube", *International Journal of Refrigeration*, v. 30, n. 4 (June), pp. 591-600.
- MATHEMATICA 7 . Version 7.0.1.0. Wolfram Research, Inc.
- MEDRANO, M., BOUROUIS, M., PEREZ-BLANCO, H., CORONAS, A., 2003, "A Simple Model For Falling Film Absorption On Vertical Tubes In The Presence Of Non-Absorbables", *International Journal of Refrigeration*, v. 26, n. 1 (January), pp. 108-116.
- MERRIL, T. L., PEREZ-BLANCO, H., 1997, "Combined Heat and Mass Transfer During Bubble Absorption in Binary Solutions", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, V. 40, N. 3 (February), pp. 589-603.
- MIKHAILOV, M. D., ÖZISIK, M. N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, New York, John Wiley, Inc.
- MIN, J. K., CHOI, D. H., 1999, "Analysis of the Absorption Process on a Horizontal Tube using Navier–Stokes Equations with Surface-Tension Effects", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, n. 24 (December), pp. 4567-4578.
- NIU, X. F., DU, K., XIAO, F., 2010, "Experimental Study on Ammonia-Water Falling Film Absorption in External Magnetic Fields", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 33, pp. 686-694.
- ÖZISIK, M. N., 1980, *Heat Conduction*, New York, John Wiley, Inc.
- PATNAIK, V., PEREZ-BLANCO, H., 1996, "A Study of Absorption Enhancement by Wavy Film Flows", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 17, n. 1 (February), pp. 71-77.

- PEREZ-BLANCO, H., 1988, "A Model of an Ammonia-Water Falling Film Absorber", *ASHRAE Transactions*, v. 94, part 1, pp. 467 – 483.
- STUHLTRÄGER, E., MIYARA, A., UEHARA, H., 1995, "Flow Dynamics and Heat Transfer of a Condensate Film on a Vertical Wall—II", *Flow dynamics and heat transfer, International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 38, n. 15 (October), pp 2715-2722.
- STUHLTRÄGER, E., NARIDOMI, Y., MIYARA, A., UEHARA, H. 1993, "Flow Dynamics and Heat Transfer of a Condensate Film on a Vertical Wall—I", *Numerical analysis and flow dynamics, International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 36, n. 6, pp. 1677-1686.
- SULTANA, P., WIJEYSUNDERA, N. E., HO, J. C., YAP, C., 2007, "Modeling of Horizontal Tube-Bundle Absorbers of Absorption Cooling Systems", *International Journal of Refrigeration*, v. 30, n. 4 (June), pp. 709-723.
- THOME, J. R., 2004, "Falling Film Evaporation", In: Wolverine Tube Inc. (ed), *Wolverine Engineering Data Book III*, chapter 14, <http://www.wlv.com/index.php/products/156>.
- WASSENAAAR, R. H., 1994, *Simultaneous Heat and Mass Transfer in a Horizontal Tube Absorber – numerical tools for present and future absorber designs*, Delft University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Marine Technology.
- XU, Z. F., KHOO, B. C., WIJEYSUNDERA, N. E., 2008, "Mass Transfer across the Falling Film: Simulations and Experiments", *Chemical Engineering Science*, v. 63, n. 9 (May), pp. 2559-2575.
- YIGIT, A., 1999, "A Numerical Study of Heat and Mass Transfer in Falling Film Absorber", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 26, n. 2 (February), pp. 269-278.

## APÊNDICE – A

### DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA UMA MISTURA MULTICOMPONENTE (Eq.2.1)

Se os efeitos do gradiente de pressão, dissipação viscosa, forças externas, efeito Dufour, e da radiação forem desprezíveis podemos escrever, para um sistema multi-componentes em condições estacionárias, a equação da energia (em termos da entalpia parcial) com relação a um sistema coordenado fixo como:

$$\vec{\nabla} \cdot \sum \vec{\phi}_{m,i} h_{p,i} = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T \quad (A1)$$

Após a substituição da primeira lei de Fick para um sistema binário (BIRD et al., 2002) o lado esquerdo da equação anterior é reescrito da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \left\{ -\rho D \vec{\nabla} C_1 + C_1 (\vec{\phi}_{m,1} + \vec{\phi}_{m,2}) \right\} h_{p,1} + \left\{ -\rho D \vec{\nabla} C_2 + C_2 (\vec{\phi}_{m,1} + \vec{\phi}_{m,2}) \right\} h_{p,2} \right] = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T \quad (A2)$$

Fazendo,

$$\therefore \begin{cases} C_1 = C \\ C_2 = 1 - C \\ (\vec{\phi}_{m,1} + \vec{\phi}_{m,2}) = \rho \vec{v} \end{cases}$$

a Equação (A2) é reescrita como:

$$-\vec{\nabla} \cdot \rho D \vec{\nabla} C_1 h_{p,1} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} C_1 h_{p,1} - \vec{\nabla} \cdot \rho D \vec{\nabla} C_2 h_{p,2} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} C_2 h_{p,2} = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T \quad (A3)$$

que, reorganizada torna-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} [C_1 h_{p,1} + C_2 h_{p,2}] - \vec{\nabla} \cdot [\rho D \vec{\nabla} C (h_{p,1} - h_{p,2})] = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T \quad (A4)$$

Com as seguintes relações

$$\therefore \begin{cases} C_1 h_{p,1} + C_2 h_{p,2} = h \\ h_{p,1} - h_{p,2} = \phi_c = \frac{\partial h}{\partial C} \end{cases}$$

a Equação (A4) é reescrita como segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} h - \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho D \vec{\nabla} \left( C \frac{\partial h}{\partial C} \right) \right] = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T \quad (A5a)$$

Ou, após usar a equação da continuidade,

$$\rho v \vec{\nabla} h = \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho D \vec{\nabla} \left( C \frac{\partial h}{\partial C} \right) \right] \quad (A5b)$$

Para uma mistura binária, a entalpia pode ser escrita da seguinte forma:

$$dh = c_p dT - \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right] dp + \sum_K \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right)_K dC_K \quad \therefore \quad K = 1 \quad (A6a)$$

Na forma vetorial

$$\vec{\nabla} h = c_p \vec{\nabla} T - \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right] \vec{\nabla} p + \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \vec{\nabla} C \quad (A6b)$$

Para a situação estudada nesta tese, a equação anterior é simplificada para a seguinte forma:

$$\vec{\nabla}h = c_p \vec{\nabla}T + \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \vec{\nabla}C \quad (\text{A6c})$$

Desenvolvendo então o lado esquerdo da Equação (A6c) tem-se:

$$\rho v \vec{\nabla}h = \rho v \left[ c_p \vec{\nabla}T + \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \vec{\nabla}C \right] = \rho v c_p \vec{\nabla}T + \rho v \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \vec{\nabla}C \quad (\text{A7a})$$

Desenvolvendo o lado direito da Equação (A6c) tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla}T + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho D \nabla \left( C \frac{\partial h}{\partial C} \right) \right] &= \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla}T + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\rho D \vec{\nabla}C) \frac{\partial h}{\partial C} \right] \\ &= \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla}T + \frac{\partial h}{\partial C} \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla}C) + (\rho D \vec{\nabla}C) \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \end{aligned} \quad (\text{A7b})$$

Da equação da difusão para o regime estacionário,  $\vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla}C) = \rho v \vec{\nabla}C$ , substituindo na equação anterior esta relação, e igualando os termo desenvolvidos para a equação da energia resulta,

$$\begin{aligned} \rho v c_p \vec{\nabla}T + \rho v \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \vec{\nabla}C &= \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla}T + \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \rho v \vec{\nabla}C + (\rho D \vec{\nabla}C) \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \Rightarrow \\ \rho v c_p \vec{\nabla}T &= \vec{\nabla} \cdot k \vec{\nabla}T + (\rho D \vec{\nabla}C) \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\partial h}{\partial C} \right) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Admitindo que  $k$  e  $\left(\frac{\partial h}{\partial C}\right)$  são constantes, a Equação (A8), sob as condições simplificadoras, resulta, para os casos unidimensional e bidimensional respectivamente como as Equações (3.1a) e (4.1a).

## APÊNDICE – B

### OBTENÇÃO DOS PERFIS DE VELOCIDADE $U(X,Y)$ E $V(X,Y)$ PARA O ESCOAMENTO DE UM “FALLING FILM”

É reproduzida agora a obtenção dos perfis de velocidade sobre uma placa para uma película absorvente escoando em regime permanente (BIRD et. al, 2002) usada por WASSENAAR (19944) e admitida nesta tese.

Seja uma placa com uma inclinação  $\beta$  em relação a horizontal sobre a qual ocorre o escoamento da película (Fig. 3.1).

Da lei da conservação da quantidade de movimento tem-se:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho g \text{Sen}(\beta) \quad (B1)$$

Integrando em  $y$  tem-se:

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = -\int \left( \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) \right) dy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) y + C1 \quad (B2)$$

Na interface da película

$$y = \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) \delta + C1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad C1 = \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) \delta \quad (B3)$$

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) y + \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) \delta = \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) [\delta - y] \quad (\text{B4})$$

Integrando a equação anterior em y tem-se:

$$\int \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int \left( \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) [\delta - y] \right) dy + C2 \quad \Rightarrow$$

$$u = \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) \left[ \delta y - \frac{y^2}{2} \right] + C2 \quad (\text{B5})$$

Sobre a parede

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad C2 = 0$$

Assim, o perfil de velocidade na direção do escoamento é

$$u = \frac{\rho g}{\mu} \text{Sen}(\beta) \left[ \delta y - \frac{y^2}{2} \right] \quad (\text{B6})$$

que pode ser reescrito de forma mais apropriada como

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \text{Sen}(\beta) \left[ 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (\text{B7})$$

Para o caso onde o escoamento se dá sobre um tubo, como no capítulo IV, sob a hipótese de que a espessura da película é tão pequena em relação ao raio do tubo que este pode ser considerado como um escoamento sobre uma placa. Dessa forma, o ângulo será trocado por  $\beta = \frac{x}{R}$  e a Equação (B7) fica

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \text{Sen}\left(\frac{x}{R}\right) \left[ 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]. \quad (\text{B8})$$

Como o fato do escoamento ser sobre uma superfície curva gera o aparecimento da componente normal ao escoamento, esta é determinada pelo uso da equação da continuidade. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B9})$$

Do perfil u tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \left[ 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] \text{Cos}\left(\frac{x}{R}\right) \frac{1}{R} \quad (\text{B10})$$

Substituindo (B10) na equação da continuidade

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\rho g}{2\mu R} \delta^2 \text{Cos}\left(\frac{x}{R}\right) \left[ 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] \quad (\text{B11})$$

Integrando (B11) em y tem-se:

$$\int \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = v = -\frac{\rho g}{2\mu R} \delta^2 \text{Cos}\left(\frac{x}{R}\right) \left[ \frac{1}{\delta} y^2 - \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{y^3}{3} \right) \right] + C1 \quad (\text{B12})$$

Na parede,

$$y = 0 \Rightarrow v = 0, \quad -\frac{\rho g}{2\mu R} \delta^2 \text{Cos}\left(\frac{x}{R}\right) \left[ \frac{1}{\delta} y^2 - \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{y^3}{3} \right) \right] + C1 = 0 \Rightarrow C1 = 0 \quad (\text{B13})$$

Assim, o perfil transversal de velocidade é

$$v = -\frac{\rho g}{2\mu R} \delta^2 \cos\left(\frac{x}{R}\right) \left[ \frac{y^2}{\delta} - \frac{1}{3} \left( \frac{y^3}{\delta^2} \right) \right] \quad (\text{B14})$$

o qual pode ser reescrito da seguinte forma

$$v = -\frac{\rho g}{2\mu R} \delta^3 \cos\left(\frac{x}{R}\right) \left[ \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \quad (\text{B15})$$

Para o caso do escoamento unidimensional, ou seja, escoamento sobre uma placa, tratado no capítulo III, a espessura da película é considerada constante e o perfil transversal é nulo. Para o escoamento bidimensional, tratado no capítulo IV, onde o escoamento se dá sobre um tubo, a espessura da película varia ao longo do perímetro do tubo e o perfil transversal é considerado. Para este caso, os perfis são escritos da seguinte forma:

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \sin\left(\frac{x}{R}\right) \left[ 2 \left( \frac{y}{\delta(x)} \right) - \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^2 \right] \quad (\text{B16a})$$

$$v = -\frac{\rho g}{2\mu R} \delta^3 \cos\left(\frac{x}{R}\right) \left[ \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^3 \right] \quad (\text{B16b})$$

A velocidade média na direção do escoamento é calculada integrando-se o perfil  $u$  sobre o domínio, o que resulta em:

$$\bar{u} = \frac{1}{3} \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \sin\left(\frac{x}{R}\right) \quad (\text{B17a})$$

Como no escoamento sobre um tubo cilíndrico, considerado no capítulo IV, o ponto de referência é o ponto  $x = \pi \frac{R}{2}$ , a adimensionalização das componentes da velocidade é feita com base na velocidade média neste ponto, ou seja,

$$\bar{u}_r = \frac{1}{3} \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \quad (\text{B17b})$$

## APÊNDICE – C

### PROBLEMA DE ENERGIA PARA O CASO ISOTÉRMICO VIA GITT

A forma unidimensional do sistema (3.1) para a condição de parede isotérmica na forma unidimensional é como segue

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad (C.1a)$$

#### Condições de entrada e de contorno

$$\theta(0, Y) = 0 \quad (C.1b)$$

$$\theta(X, 0) = 0 \quad (C.1c)$$

$$\frac{\partial \theta(X, 1)}{\partial Y} = f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} \quad (C.1d)$$

O problema de autovalor associado é (ÖZISIK, 1980):

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_i(Y)}{dY^2} + \mu_i^2 \bar{\Psi}_i(Y) = 0 \quad (C.2a)$$

$$\bar{\Psi}_i(0) = 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{\Psi}_i(1)}{dY} = 0 \quad (C.2b, c)$$

$$\therefore \begin{cases} \Psi_i(Y) = \text{Sen}(\mu_i Y) \\ \text{Cos}(\mu_i) = 0 \\ \bar{\Psi}_i(Y) \equiv \frac{\Psi(\mu_i, Y)}{\sqrt{N_{\theta,i}}} \\ N_{\theta,i} = \int_0^1 [\Psi_i(Y)]^2 dY \end{cases} \quad (\text{C.2d, e, f, g})$$

### **Par transformado**

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}_i(Y) \bar{\theta}_i(X) \quad (\text{fórmula de inversão}) \quad (\text{C.3a})$$

$$\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 \bar{\Psi}_i(Y) \theta(X, Y) dY \quad (\text{potencial transformado}) \quad (\text{C.3b})$$

Seguindo o procedimento já desenvolvido neste trabalho para o tratamento de um sistema de EDP's via GITT, o problema transformado resultante é:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ CT1_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} - CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} \right\} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = 0 \quad (\text{C.4a, b})$$

$$\therefore \quad \bar{\theta}_i(0) = 0$$

$$CT1_{ij} = \left[ \int_0^1 U \bar{\Psi}_i(Y) \bar{\Psi}_j(Y) dY \right] \quad (\text{C.4c, d})$$

$$CT2_{ij} = f_{ac} Le \bar{\Psi}_i(1) \left[ \int_0^1 U \bar{\Phi}_j(Y) dY \right]$$

## APÊNDICE – D

### BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS E FLUXO NA INTERFACE

#### Energia

Seja a equação da conservação da energia (Eq. 3.4a)

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad 0 < Y < 1, \quad X > 0 \quad (D1)$$

Fazendo uma integração para os limites de 0 a Y como segue tem-se:

$$\int_0^Y \left( U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right) dY = \int_0^Y \left( \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \right) dY \quad \Rightarrow \quad (D2)$$

Resolvendo a integral do lado direito da Equação (D2) e aplicando a condição de contorno (3.4c) obtém-se:

$$\int_0^Y \left( U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right) dY = \left[ \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right]_0^Y = \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} - \frac{\partial \theta(X, 0)}{\partial Y} \quad (D3)$$

Integrando novamente a Equação (D3) para os limites 0 até 1, tem-se:

$$\int_0^1 \left[ \int_0^{Y'} \left( U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} \right) dY' \right] dY = \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right) dY = [\theta(X, Y)]_0^1 \quad (D4)$$

Organizando a Equação (D4) o potencial da energia na interface é representado como mostra a Equação (D5)

$$\theta(X, 1) = \theta(X, 0) + \int_0^1 \left( \int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} dY' \right) dY \quad (D5)$$

### **Concentração**

Seja a equação da conservação da concentração (Eq. 3.6a) integrada como:

$$\int_0^1 \left( U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} \right) dY = \frac{1}{Le} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} \right) dY \Rightarrow \quad (D6)$$

$$Le \int_0^1 \left( U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} \right) dY = \left[ \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \right]_0^1 = \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} - \frac{\partial W(X, 0)}{\partial Y} \quad (D7)$$

Usando a condição de contorno (3.6c) a Equação (D7) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = Le \int_0^1 \left( U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} \right) dY \quad (D8)$$

As Equações (D5) e (D8) representam respectivamente o potencial da energia e o fluxo de concentração na interface. A Figura (D1) compara o comportamento dos potenciais na interface quando se faz a substituição direta da fórmula da inversa e quando se usa o balanço integral. Percebe-se que o início e o final das curvas são coincidentes, mas elas seguem direções diferentes no interior do domínio atingindo, inclusive, valores sem significado físico.

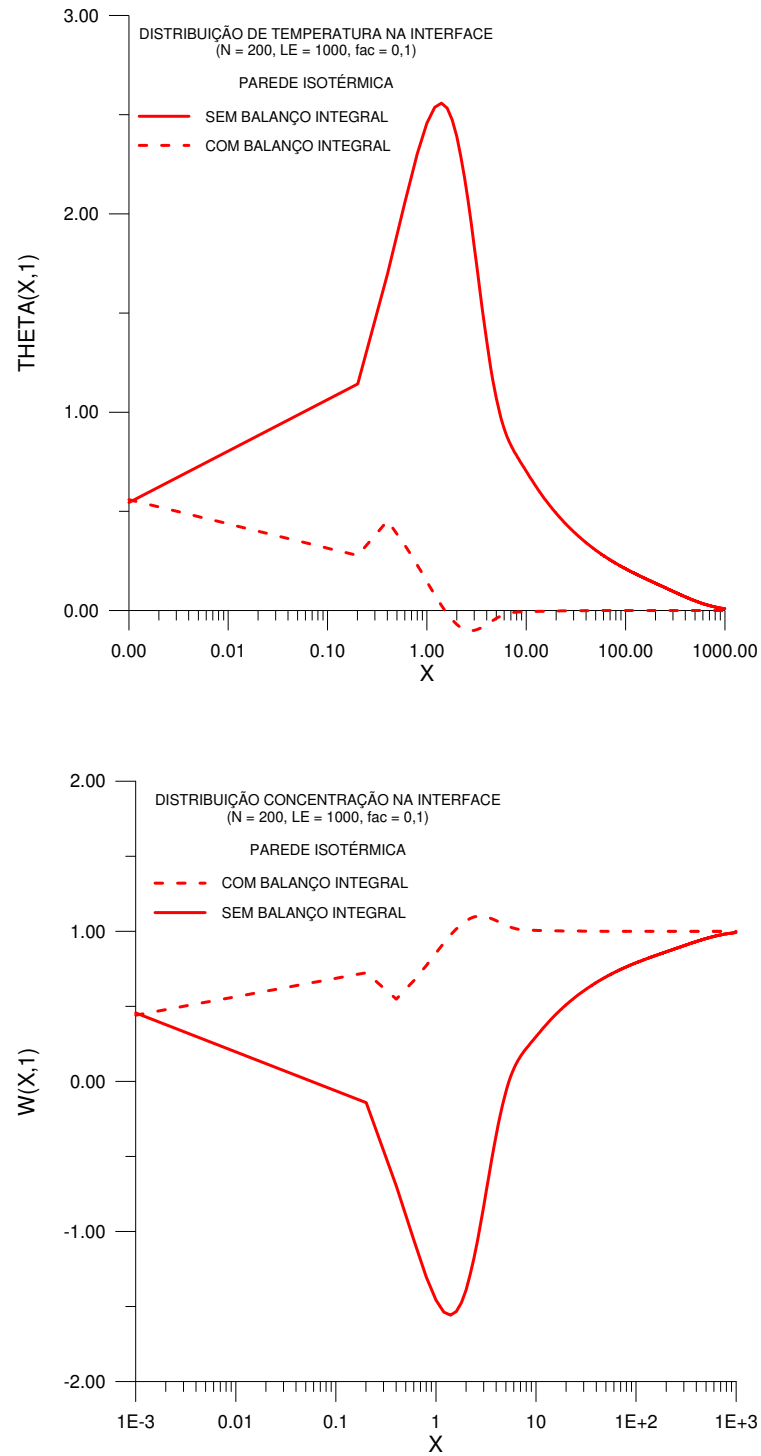


Figura D1. Comparação do comportamento dos potenciais na interface quando se aplica a fórmula da inversa diretamente e quando se usa o balanço integral.

## APÊNDICE – E

### TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONCENTRAÇÃO VIA GITT PARA O MODO 1D

Aplicando os operadores  $\int_0^1 \bar{\Phi}_i(Y) dY$  e  $\int_0^1 W(X, Y) dY$  nas Equações (3.6a) e (3.9a) respectivamente e em seguida, somando-se os resultados temos como resultado:

$$\int_0^1 U \bar{\Phi}_i \frac{\partial W}{\partial X} dY + \frac{1}{Le} \lambda_i^2 \int_0^1 \bar{\Phi}_i W dY - \frac{1}{Le} \left\{ \int_0^1 \bar{\Phi}_i \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} dY - \int_0^1 W \frac{d^2 \bar{\Phi}_i}{dY^2} dY \right\} = 0 \quad (E1)$$

Fazendo uso da Fórmula de Green (COTTA, 1993), o termo entre chaves é transformado de uma integral de volume para uma integral de superfície. Logo, a Equação (E1) é reescrita como,

$$\int_0^1 U \bar{\Phi}_i \frac{\partial W}{\partial X} dY + \frac{1}{Le} \lambda_i^2 \bar{W}_i - \frac{1}{Le} \left[ \bar{\Phi}_i \frac{\partial W}{\partial Y} - W \frac{d\bar{\Phi}_i}{dY} \right]_0^1 = 0 \quad (E2)$$

Aplicando as condições de contorno (3.6c), (3.6d), (3.9b) e (3.9c) o termo entre colchetes tem-se:

$$Y=0 \Rightarrow \left[ \bar{\Phi}_i(0) \frac{\partial W(X,0)}{\partial Y} - W(X,0) \frac{d\bar{\Phi}_i(0)}{dY} \right] = 0 \quad (E3)$$

$$\begin{aligned}
Y=1 \quad \Rightarrow \quad & \left[ \bar{\Phi}_i(1) \frac{\partial W(X,1)}{\partial Y} - W(X,1) \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \right] = -W(X,1) \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \\
\Rightarrow \quad & -W(X,1) \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} = -[1 - \theta(X,1)] \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (E4)
\end{aligned}$$

Assm, a Equação (E2) é reescrita como:

$$\int_0^1 U \bar{\Phi}_i \frac{\partial W}{\partial X} dY + \frac{1}{Le} \lambda_i^2 \bar{W}_i + \frac{1}{Le} \frac{d\bar{\Phi}_i(1)}{dY} [1 - \theta(X,1)] = 0 \quad (E5)$$

## APÊNDICE – F

### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Quando um sistema de equações diferenciais parciais é tratado via GITT, e este problema apresenta fronteiras móveis, o problema de autovalor associado será dependente de mais uma variável independente. Para evitar esse contratempo, se faz necessário transformar as coordenadas. Então, para um problema que tem variáveis X e Y, devemos fazer:

$$X^* = X \quad \text{e} \quad Y^* = \frac{Y}{\Delta(X)} \quad \therefore \quad \Delta(X) = Y_{\text{int}}(X) \quad (\text{F1})$$

A partir das relações (F1) podemos desenvolver expressões para as derivadas parciais como é visto a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial [\Delta(X) Y^*]} = \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial}{\partial Y^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial}{\partial Y^*} \quad (\text{F2})$$

$$\partial Y^* = \partial [Y / \Delta(X)] \quad \Rightarrow \quad \frac{(\partial Y) \Delta(X) - Y \partial [\Delta(X)] \partial X}{\Delta(X)^2} \quad \Rightarrow \quad (\text{F3})$$

$$\partial Y^* = \frac{(\partial Y)}{\Delta(X)} - \frac{\partial [\Delta(X)] Y \partial X}{\Delta(X)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\partial X} = \frac{1}{\Delta(X)} \frac{1}{\partial X} \frac{\partial Y}{\partial Y^*} - \frac{\partial [\Delta(X)]}{\Delta(X)^2} \frac{Y}{\partial Y^*} \quad (\text{F4})$$

$$\frac{1}{\partial X} = \frac{1}{\Delta(X)} \frac{1}{\partial X} \frac{\partial[\Delta(X) Y^*]}{\partial Y^*} - \frac{\partial[\Delta(X)]}{\Delta(X)^2} \frac{\Delta(X) Y^*}{\partial Y^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\partial X} = \frac{1}{\partial X} - \frac{\partial[\Delta(X)]}{\Delta(X)} \frac{Y^*}{\partial Y^*} \quad (\text{F5})$$

$$\frac{1}{\partial X} = \frac{1}{\partial X^*} - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \frac{Y^*}{\partial Y^*} \quad \therefore \quad \dot{\Delta}(X) \equiv \partial[\Delta(X)] \quad (\text{F6})$$

Então, resumem-se a seguir as relações que serão utilizadas para transformar as coordenadas dos sistemas de equações presentes no capítulo (IV)

$$X^* = X \quad \text{e} \quad Y^* = \frac{Y}{\Delta(X)} \quad \therefore \quad \Delta(X) = Y_{\text{int}}(X) \quad (\text{F7a})$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta(X)} \frac{\partial}{\partial Y^*} \quad (\text{F7b})$$

$$\frac{1}{\partial X} = \frac{1}{\partial X^*} - \frac{\dot{\Delta}(X)}{\Delta(X)} \frac{Y^*}{\partial Y^*} \quad (\text{F7c})$$

Onde

$$U, \quad V, \quad \theta \quad \text{e} \quad W \quad \equiv \quad f(X^*, Y^*)$$

## APÊNDICE – G

### DISTRIBUIÇÃO DOS POTENCIAIS EM FUNÇÃO DE X.

DISTRIBUIÇÃO ADIMENSIONAL DOS POTENCIAIS (PAREDE ADIABÁTICA)  
200 autovalores, LE = 1000, fac = 0,01

| DISTRIBUIÇÃO DE CONCENTRAÇÃO |                    |                     |                        | DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA |                   |                      |                            |
|------------------------------|--------------------|---------------------|------------------------|-----------------------------|-------------------|----------------------|----------------------------|
| X                            | W <sub>média</sub> | W <sub>parede</sub> | W <sub>interface</sub> | $\theta_{m\acute{e}dia}$    | $\theta_{parede}$ | $\theta_{interface}$ | $\theta + W_{(interface)}$ |
| 0,000                        | 0,000              | 0,000               | 1,000                  | 0,000                       | 0,000             | 0,000                | 1,000                      |
| 0,001                        | 0,000              | 0,000               | 0,902                  | 0,004                       | 0,000             | 0,098                | 1,000                      |
| 0,002                        | 0,001              | 0,000               | 0,871                  | 0,007                       | 0,000             | 0,129                | 1,000                      |
| 0,003                        | 0,001              | 0,000               | 0,853                  | 0,009                       | 0,000             | 0,147                | 1,000                      |
| 0,004                        | 0,001              | 0,000               | 0,840                  | 0,012                       | 0,000             | 0,160                | 1,000                      |
| 0,005                        | 0,001              | 0,000               | 0,830                  | 0,014                       | 0,000             | 0,170                | 1,000                      |
| 0,006                        | 0,002              | 0,000               | 0,823                  | 0,016                       | 0,000             | 0,177                | 1,000                      |
| 0,007                        | 0,002              | 0,000               | 0,817                  | 0,019                       | 0,000             | 0,183                | 1,000                      |
| 0,008                        | 0,002              | 0,000               | 0,813                  | 0,020                       | 0,000             | 0,187                | 1,000                      |
| 0,009                        | 0,002              | 0,000               | 0,809                  | 0,022                       | 0,000             | 0,191                | 1,000                      |
| 0,010                        | 0,002              | 0,000               | 0,806                  | 0,024                       | 0,000             | 0,194                | 1,000                      |
| 0,011                        | 0,003              | 0,000               | 0,803                  | 0,026                       | 0,000             | 0,197                | 1,000                      |
| 0,012                        | 0,003              | 0,000               | 0,801                  | 0,027                       | 0,000             | 0,199                | 1,000                      |
| 0,013                        | 0,003              | 0,000               | 0,799                  | 0,029                       | 0,000             | 0,201                | 1,000                      |
| 0,014                        | 0,003              | 0,000               | 0,797                  | 0,030                       | 0,000             | 0,203                | 1,000                      |
| 0,015                        | 0,003              | 0,000               | 0,796                  | 0,031                       | 0,000             | 0,204                | 1,000                      |
| 0,016                        | 0,003              | 0,000               | 0,794                  | 0,033                       | 0,000             | 0,206                | 1,000                      |
| 0,017                        | 0,003              | 0,000               | 0,793                  | 0,034                       | 0,000             | 0,207                | 1,000                      |
| 0,018                        | 0,004              | 0,000               | 0,792                  | 0,035                       | 0,000             | 0,208                | 1,000                      |
| 0,019                        | 0,004              | 0,000               | 0,791                  | 0,037                       | 0,000             | 0,209                | 1,000                      |
| 0,020                        | 0,004              | 0,000               | 0,790                  | 0,038                       | 0,000             | 0,210                | 1,000                      |
| 0,025                        | 0,004              | 0,000               | 0,786                  | 0,043                       | 0,000             | 0,214                | 1,000                      |
| 0,030                        | 0,005              | 0,000               | 0,784                  | 0,048                       | 0,000             | 0,216                | 1,000                      |
| 0,035                        | 0,005              | 0,000               | 0,782                  | 0,053                       | 0,000             | 0,218                | 1,000                      |
| 0,040                        | 0,006              | 0,000               | 0,780                  | 0,057                       | 0,000             | 0,220                | 1,000                      |
| 0,045                        | 0,006              | 0,000               | 0,779                  | 0,061                       | 0,001             | 0,221                | 1,000                      |
| 0,050                        | 0,007              | 0,000               | 0,777                  | 0,065                       | 0,001             | 0,223                | 1,000                      |
| 0,055                        | 0,007              | 0,000               | 0,776                  | 0,069                       | 0,002             | 0,224                | 1,000                      |
| 0,060                        | 0,007              | 0,000               | 0,775                  | 0,072                       | 0,003             | 0,225                | 1,000                      |
| 0,065                        | 0,008              | 0,000               | 0,775                  | 0,076                       | 0,004             | 0,225                | 1,000                      |
| 0,070                        | 0,008              | 0,000               | 0,774                  | 0,079                       | 0,005             | 0,226                | 1,000                      |
| 0,075                        | 0,008              | 0,000               | 0,773                  | 0,082                       | 0,007             | 0,227                | 1,000                      |
| 0,080                        | 0,008              | 0,000               | 0,772                  | 0,085                       | 0,009             | 0,228                | 1,000                      |
| 0,085                        | 0,009              | 0,000               | 0,772                  | 0,088                       | 0,011             | 0,228                | 1,000                      |
| 0,090                        | 0,009              | 0,000               | 0,771                  | 0,090                       | 0,013             | 0,229                | 1,000                      |
| 0,095                        | 0,009              | 0,000               | 0,771                  | 0,093                       | 0,015             | 0,229                | 1,000                      |
| 0,100                        | 0,010              | 0,000               | 0,770                  | 0,096                       | 0,018             | 0,230                | 1,000                      |
| 0,200                        | 0,014              | 0,000               | 0,761                  | 0,139                       | 0,072             | 0,239                | 1,000                      |
| 0,300                        | 0,017              | 0,000               | 0,751                  | 0,171                       | 0,119             | 0,249                | 1,000                      |
| 0,400                        | 0,020              | 0,000               | 0,739                  | 0,197                       | 0,156             | 0,261                | 1,000                      |

continuação

| DISTRIBUIÇÃO DE CONCENTRAÇÃO |                    |                     |                        | DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA |                            |                               |                             |
|------------------------------|--------------------|---------------------|------------------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| X                            | W <sub>média</sub> | W <sub>parede</sub> | W <sub>interface</sub> | $\theta$ <sub>média</sub>   | $\theta$ <sub>parede</sub> | $\theta$ <sub>interface</sub> | $\theta + W$<br>(interface) |
| 0,500                        | 0,022              | 0,000               | 0,727                  | 0,220                       | 0,185                      | 0,273                         | 1,000                       |
| 0,600                        | 0,024              | 0,000               | 0,715                  | 0,239                       | 0,210                      | 0,285                         | 1,000                       |
| 0,700                        | 0,026              | 0,000               | 0,703                  | 0,256                       | 0,231                      | 0,297                         | 1,000                       |
| 0,800                        | 0,027              | 0,000               | 0,691                  | 0,272                       | 0,249                      | 0,309                         | 1,000                       |
| 0,900                        | 0,029              | 0,000               | 0,681                  | 0,286                       | 0,265                      | 0,319                         | 1,000                       |
| 1,000                        | 0,030              | 0,000               | 0,670                  | 0,299                       | 0,280                      | 0,330                         | 1,000                       |
| 2,000                        | 0,039              | 0,000               | 0,592                  | 0,391                       | 0,381                      | 0,408                         | 1,000                       |
| 3,000                        | 0,045              | 0,000               | 0,540                  | 0,449                       | 0,442                      | 0,460                         | 1,000                       |
| 4,000                        | 0,049              | 0,000               | 0,501                  | 0,490                       | 0,485                      | 0,499                         | 1,000                       |
| 5,000                        | 0,052              | 0,000               | 0,470                  | 0,523                       | 0,519                      | 0,530                         | 1,000                       |
| 6,000                        | 0,055              | 0,000               | 0,445                  | 0,549                       | 0,546                      | 0,555                         | 1,000                       |
| 7,000                        | 0,057              | 0,000               | 0,424                  | 0,571                       | 0,568                      | 0,576                         | 1,000                       |
| 8,000                        | 0,059              | 0,000               | 0,406                  | 0,590                       | 0,587                      | 0,594                         | 1,000                       |
| 9,000                        | 0,061              | 0,000               | 0,390                  | 0,606                       | 0,604                      | 0,610                         | 1,000                       |
| 10,000                       | 0,062              | 0,000               | 0,376                  | 0,621                       | 0,619                      | 0,624                         | 1,000                       |
| 20,000                       | 0,071              | 0,000               | 0,290                  | 0,709                       | 0,708                      | 0,710                         | 1,000                       |
| 30,000                       | 0,075              | 0,000               | 0,245                  | 0,754                       | 0,753                      | 0,755                         | 1,000                       |
| 40,000                       | 0,078              | 0,001               | 0,217                  | 0,782                       | 0,782                      | 0,783                         | 1,000                       |
| 50,000                       | 0,080              | 0,003               | 0,197                  | 0,803                       | 0,802                      | 0,803                         | 1,000                       |
| 60,000                       | 0,082              | 0,007               | 0,182                  | 0,818                       | 0,818                      | 0,818                         | 1,000                       |
| 70,000                       | 0,083              | 0,011               | 0,170                  | 0,830                       | 0,830                      | 0,830                         | 1,000                       |
| 80,000                       | 0,084              | 0,017               | 0,160                  | 0,840                       | 0,840                      | 0,840                         | 1,000                       |
| 90,000                       | 0,085              | 0,022               | 0,152                  | 0,848                       | 0,848                      | 0,848                         | 1,000                       |
| 100,000                      | 0,085              | 0,028               | 0,145                  | 0,855                       | 0,855                      | 0,855                         | 1,000                       |
| 150,000                      | 0,088              | 0,052               | 0,122                  | 0,878                       | 0,878                      | 0,878                         | 1,000                       |
| 200,000                      | 0,089              | 0,068               | 0,109                  | 0,891                       | 0,891                      | 0,891                         | 1,000                       |
| 250,000                      | 0,090              | 0,077               | 0,102                  | 0,898                       | 0,898                      | 0,898                         | 1,000                       |
| 300,000                      | 0,090              | 0,083               | 0,097                  | 0,903                       | 0,903                      | 0,903                         | 1,000                       |
| 350,000                      | 0,091              | 0,086               | 0,095                  | 0,905                       | 0,905                      | 0,905                         | 1,000                       |
| 400,000                      | 0,091              | 0,088               | 0,093                  | 0,907                       | 0,907                      | 0,907                         | 1,000                       |
| 450,000                      | 0,091              | 0,089               | 0,092                  | 0,908                       | 0,908                      | 0,908                         | 1,000                       |
| 500,000                      | 0,091              | 0,090               | 0,092                  | 0,908                       | 0,908                      | 0,908                         | 1,000                       |
| 550,000                      | 0,091              | 0,090               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 600,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 650,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 700,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 750,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 800,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 850,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 900,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 950,000                      | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |
| 1000,000                     | 0,091              | 0,091               | 0,091                  | 0,909                       | 0,909                      | 0,909                         | 1,000                       |

**DISTRIBUIÇÃO ADIMENSIONAL DOS POTENCIAS (PAREDE ISOTÉRMICA)**  
**200 autovalores, LE = 1000, fac = 0,01**

| X     | DISTRIBUIÇÃO DE CONCENTRAÇÃO |                     |                        | DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA |                            |                               |                          |
|-------|------------------------------|---------------------|------------------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------------------|--------------------------|
|       | W <sub>média</sub>           | W <sub>parede</sub> | W <sub>interface</sub> | $\theta$ <sub>média</sub>   | $\theta$ <sub>parede</sub> | $\theta$ <sub>interface</sub> | $\theta + W$ (interface) |
| 0,000 | 0,000                        | 0,000               | 1,000                  | 0,000                       | 0,000                      | 0,000                         | 1,000                    |
| 0,001 | 0,000                        | 0,000               | 0,902                  | 0,004                       | 0,000                      | 0,098                         | 1,000                    |
| 0,002 | 0,001                        | 0,000               | 0,871                  | 0,007                       | 0,000                      | 0,129                         | 1,000                    |
| 0,003 | 0,001                        | 0,000               | 0,853                  | 0,009                       | 0,000                      | 0,147                         | 1,000                    |
| 0,004 | 0,001                        | 0,000               | 0,840                  | 0,012                       | 0,000                      | 0,160                         | 1,000                    |
| 0,005 | 0,001                        | 0,000               | 0,830                  | 0,014                       | 0,000                      | 0,170                         | 1,000                    |
| 0,006 | 0,002                        | 0,000               | 0,823                  | 0,016                       | 0,000                      | 0,177                         | 1,000                    |
| 0,007 | 0,002                        | 0,000               | 0,817                  | 0,019                       | 0,000                      | 0,183                         | 1,000                    |
| 0,008 | 0,002                        | 0,000               | 0,813                  | 0,020                       | 0,000                      | 0,187                         | 1,000                    |
| 0,009 | 0,002                        | 0,000               | 0,809                  | 0,022                       | 0,000                      | 0,191                         | 1,000                    |
| 0,010 | 0,002                        | 0,000               | 0,806                  | 0,024                       | 0,000                      | 0,194                         | 1,000                    |
| 0,110 | 0,010                        | -0,001              | 0,755                  | 0,102                       | 0,000                      | 0,245                         | 1,000                    |
| 0,120 | 0,011                        | -0,001              | 0,751                  | 0,107                       | 0,000                      | 0,249                         | 1,000                    |
| 0,130 | 0,012                        | -0,001              | 0,747                  | 0,112                       | 0,000                      | 0,253                         | 1,000                    |
| 0,140 | 0,012                        | -0,001              | 0,744                  | 0,116                       | 0,000                      | 0,256                         | 1,000                    |
| 0,015 | 0,003                        | 0,000               | 0,796                  | 0,031                       | 0,000                      | 0,204                         | 1,000                    |
| 0,160 | 0,013                        | -0,001              | 0,738                  | 0,125                       | 0,000                      | 0,262                         | 1,000                    |
| 0,170 | 0,014                        | -0,001              | 0,735                  | 0,128                       | 0,000                      | 0,265                         | 1,000                    |
| 0,180 | 0,014                        | -0,001              | 0,732                  | 0,132                       | 0,000                      | 0,268                         | 1,000                    |
| 0,190 | 0,015                        | -0,001              | 0,729                  | 0,136                       | 0,000                      | 0,271                         | 1,000                    |
| 0,020 | 0,004                        | 0,000               | 0,790                  | 0,038                       | 0,000                      | 0,210                         | 1,000                    |
| 0,025 | 0,004                        | 0,000               | 0,786                  | 0,043                       | 0,000                      | 0,214                         | 1,000                    |
| 0,030 | 0,005                        | 0,000               | 0,784                  | 0,048                       | 0,000                      | 0,216                         | 1,000                    |
| 0,035 | 0,005                        | 0,000               | 0,782                  | 0,053                       | 0,000                      | 0,218                         | 1,000                    |
| 0,040 | 0,006                        | 0,000               | 0,780                  | 0,057                       | 0,000                      | 0,220                         | 1,000                    |
| 0,045 | 0,006                        | 0,000               | 0,778                  | 0,061                       | 0,000                      | 0,222                         | 1,000                    |
| 0,050 | 0,007                        | 0,000               | 0,776                  | 0,065                       | 0,000                      | 0,224                         | 1,000                    |
| 0,055 | 0,007                        | 0,000               | 0,775                  | 0,069                       | 0,000                      | 0,225                         | 1,000                    |
| 0,060 | 0,007                        | 0,000               | 0,773                  | 0,072                       | 0,000                      | 0,227                         | 1,000                    |
| 0,065 | 0,008                        | 0,000               | 0,771                  | 0,076                       | 0,000                      | 0,229                         | 1,000                    |
| 0,070 | 0,008                        | 0,000               | 0,770                  | 0,079                       | 0,000                      | 0,230                         | 1,000                    |
| 0,075 | 0,008                        | 0,000               | 0,768                  | 0,082                       | 0,000                      | 0,232                         | 1,000                    |
| 0,080 | 0,009                        | 0,000               | 0,766                  | 0,085                       | 0,000                      | 0,234                         | 1,000                    |
| 0,085 | 0,009                        | 0,000               | 0,764                  | 0,088                       | 0,000                      | 0,236                         | 1,000                    |
| 0,090 | 0,009                        | 0,000               | 0,762                  | 0,091                       | 0,000                      | 0,238                         | 1,000                    |
| 0,095 | 0,010                        | 0,000               | 0,760                  | 0,094                       | 0,000                      | 0,240                         | 1,000                    |
| 0,100 | 0,010                        | 0,000               | 0,758                  | 0,097                       | 0,000                      | 0,242                         | 1,000                    |
| 0,200 | 0,015                        | 0,000               | 0,726                  | 0,139                       | 0,000                      | 0,274                         | 1,000                    |
| 0,300 | 0,020                        | 0,000               | 0,707                  | 0,164                       | 0,000                      | 0,293                         | 1,000                    |
| 0,400 | 0,024                        | 0,000               | 0,696                  | 0,179                       | 0,000                      | 0,304                         | 1,000                    |
| 0,500 | 0,027                        | 0,000               | 0,693                  | 0,187                       | 0,000                      | 0,307                         | 1,000                    |
| 0,600 | 0,030                        | 0,000               | 0,695                  | 0,189                       | 0,000                      | 0,305                         | 1,000                    |
| 0,700 | 0,033                        | 0,000               | 0,700                  | 0,189                       | 0,000                      | 0,300                         | 1,000                    |
| 0,800 | 0,036                        | 0,000               | 0,707                  | 0,186                       | 0,000                      | 0,293                         | 1,000                    |
| 0,900 | 0,039                        | 0,000               | 0,715                  | 0,182                       | 0,000                      | 0,285                         | 1,000                    |
| 1,000 | 0,041                        | 0,000               | 0,725                  | 0,177                       | 0,000                      | 0,275                         | 1,000                    |
| 2,000 | 0,060                        | 0,000               | 0,811                  | 0,122                       | 0,000                      | 0,189                         | 1,000                    |
| 3,000 | 0,074                        | 0,000               | 0,858                  | 0,091                       | 0,000                      | 0,142                         | 1,000                    |
| 4,000 | 0,086                        | 0,000               | 0,882                  | 0,075                       | 0,000                      | 0,118                         | 1,000                    |
| 5,000 | 0,096                        | 0,000               | 0,897                  | 0,065                       | 0,000                      | 0,103                         | 1,000                    |
| 6,000 | 0,105                        | 0,000               | 0,907                  | 0,059                       | 0,000                      | 0,093                         | 1,000                    |
| 7,000 | 0,114                        | 0,000               | 0,915                  | 0,054                       | 0,000                      | 0,085                         | 1,000                    |
| 8,000 | 0,122                        | 0,000               | 0,921                  | 0,050                       | 0,000                      | 0,079                         | 1,000                    |

continuação

| DISTRIBUIÇÃO DE CONCENTRAÇÃO |                    |                     |                        | DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA |                          |                             |                                   |
|------------------------------|--------------------|---------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| X                            | $W_{\text{média}}$ | $W_{\text{parede}}$ | $W_{\text{interface}}$ | $\theta_{\text{média}}$     | $\theta_{\text{parede}}$ | $\theta_{\text{interface}}$ | $\theta + W_{\text{(interface)}}$ |
| 9,000                        | 0,129              | 0,000               | 0,925                  | 0,047                       | 0,000                    | 0,075                       | 1,000                             |
| 10,000                       | 0,137              | 0,000               | 0,929                  | 0,044                       | 0,000                    | 0,071                       | 1,000                             |
| 20,000                       | 0,193              | 0,000               | 0,951                  | 0,031                       | 0,000                    | 0,049                       | 1,000                             |
| 30,000                       | 0,237              | 0,000               | 0,960                  | 0,025                       | 0,000                    | 0,040                       | 1,000                             |
| 40,000                       | 0,274              | 0,001               | 0,966                  | 0,021                       | 0,000                    | 0,034                       | 1,000                             |
| 50,000                       | 0,306              | 0,006               | 0,970                  | 0,019                       | 0,000                    | 0,030                       | 1,000                             |
| 60,000                       | 0,335              | 0,015               | 0,972                  | 0,017                       | 0,000                    | 0,028                       | 1,000                             |
| 70,000                       | 0,361              | 0,028               | 0,974                  | 0,016                       | 0,000                    | 0,026                       | 1,000                             |
| 80,000                       | 0,386              | 0,045               | 0,976                  | 0,015                       | 0,000                    | 0,024                       | 1,000                             |
| 90,000                       | 0,409              | 0,064               | 0,978                  | 0,014                       | 0,000                    | 0,022                       | 1,000                             |
| 100,000                      | 0,430              | 0,086               | 0,979                  | 0,013                       | 0,000                    | 0,021                       | 1,000                             |
| 150,000                      | 0,523              | 0,207               | 0,983                  | 0,010                       | 0,000                    | 0,017                       | 1,000                             |
| 200,000                      | 0,599              | 0,325               | 0,986                  | 0,009                       | 0,000                    | 0,014                       | 1,000                             |
| 250,000                      | 0,662              | 0,429               | 0,988                  | 0,007                       | 0,000                    | 0,012                       | 1,000                             |
| 300,000                      | 0,715              | 0,518               | 0,990                  | 0,006                       | 0,000                    | 0,010                       | 1,000                             |
| 350,000                      | 0,759              | 0,593               | 0,992                  | 0,005                       | 0,000                    | 0,008                       | 1,000                             |
| 400,000                      | 0,797              | 0,657               | 0,993                  | 0,004                       | 0,000                    | 0,007                       | 1,000                             |
| 450,000                      | 0,829              | 0,711               | 0,994                  | 0,004                       | 0,000                    | 0,006                       | 1,000                             |
| 500,000                      | 0,855              | 0,756               | 0,995                  | 0,003                       | 0,000                    | 0,005                       | 1,000                             |
| 550,000                      | 0,878              | 0,794               | 0,996                  | 0,003                       | 0,000                    | 0,004                       | 1,000                             |
| 600,000                      | 0,897              | 0,826               | 0,997                  | 0,002                       | 0,000                    | 0,003                       | 1,000                             |
| 650,000                      | 0,913              | 0,853               | 0,997                  | 0,002                       | 0,000                    | 0,003                       | 1,000                             |
| 700,000                      | 0,926              | 0,876               | 0,998                  | 0,002                       | 0,000                    | 0,002                       | 1,000                             |
| 750,000                      | 0,937              | 0,895               | 0,998                  | 0,001                       | 0,000                    | 0,002                       | 1,000                             |
| 800,000                      | 0,947              | 0,911               | 0,998                  | 0,001                       | 0,000                    | 0,002                       | 1,000                             |
| 850,000                      | 0,955              | 0,925               | 0,999                  | 0,001                       | 0,000                    | 0,001                       | 1,000                             |
| 900,000                      | 0,962              | 0,936               | 0,999                  | 0,001                       | 0,000                    | 0,001                       | 1,000                             |
| 950,000                      | 0,968              | 0,946               | 0,999                  | 0,001                       | 0,000                    | 0,001                       | 1,000                             |
| 1000,000                     | 0,973              | 0,954               | 0,999                  | 0,001                       | 0,000                    | 0,001                       | 1,000                             |

## **APÊNDICE – H**

### **GRANDEZAS DE INTERESSE PRÁTICO**

**NÚMERO DE NUSSELT AO LONGO DE X PARA DIVERSOS VALORES DE fac**  
**200 autovalores; LE = 1000**

| X     | PAREDE ADIABÁTICA |          |             | PAREDE ISOTÉRMICA |            |            |          |           |         |
|-------|-------------------|----------|-------------|-------------------|------------|------------|----------|-----------|---------|
|       | INTERFACE         |          |             | INTERFACE         |            |            | PAREDE   |           |         |
|       | fac = 0,1         | fac 0,01 | fac = 0,000 | fac=0,1           | fac = 0,01 | fac = 0,00 | fac= 0,1 | fac =0,01 | fac=0,0 |
| 0,001 | 30,442            | 34,990   | 35,894      | 30,359            | 35,002     | 35,890     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,002 | 20,392            | 24,036   | 24,794      | 20,392            | 24,035     | 24,792     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,003 | 16,247            | 19,222   | 19,918      | 16,247            | 19,221     | 19,917     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,004 | 13,869            | 16,369   | 17,011      | 13,869            | 16,369     | 17,011     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,005 | 12,298            | 14,439   | 15,033      | 12,298            | 14,439     | 15,032     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,006 | 11,170            | 13,030   | 13,580      | 11,170            | 13,030     | 13,579     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,007 | 10,316            | 11,949   | 12,459      | 10,316            | 11,949     | 12,459     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,008 | 9,642             | 11,090   | 11,564      | 9,642             | 11,090     | 11,564     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,009 | 9,095             | 10,390   | 10,831      | 9,095             | 10,390     | 10,831     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,010 | 8,641             | 9,807    | 10,219      | 8,641             | 9,807      | 10,218     | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,011 | 8,256             | 9,314    | 9,698       | 8,256             | 9,314      | 9,698      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,012 | 7,926             | 8,891    | 9,251       | 7,926             | 8,891      | 9,251      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,013 | 7,638             | 8,523    | 8,861       | 7,638             | 8,523      | 8,861      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,014 | 7,385             | 8,201    | 8,519       | 7,384             | 8,201      | 8,519      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,015 | 7,160             | 7,917    | 8,216       | 7,159             | 7,917      | 8,216      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,016 | 6,958             | 7,663    | 7,946       | 6,958             | 7,663      | 7,946      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,017 | 6,776             | 7,435    | 7,703       | 6,776             | 7,435      | 7,703      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,018 | 6,611             | 7,230    | 7,484       | 6,611             | 7,230      | 7,483      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,019 | 6,461             | 7,043    | 7,284       | 6,461             | 7,043      | 7,284      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,020 | 6,323             | 6,873    | 7,103       | 6,323             | 6,873      | 7,102      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,025 | 5,773             | 6,204    | 6,388       | 5,778             | 6,204      | 6,388      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,030 | 5,379             | 5,734    | 5,888       | 5,399             | 5,737      | 5,887      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,035 | 5,081             | 5,383    | 5,516       | 5,133             | 5,393      | 5,515      | 0,000    | 0,000     | 0,000   |
| 0,040 | 4,847             | 5,111    | 5,227       | 4,950             | 5,131      | 5,227      | 0,018    | 0,009     | 0,007   |
| 0,045 | 4,658             | 4,894    | 4,997       | 4,829             | 4,929      | 4,997      | 0,049    | 0,038     | 0,034   |
| 0,050 | 4,502             | 4,715    | 4,809       | 4,754             | 4,770      | 4,808      | 0,088    | 0,074     | 0,069   |
| 0,055 | 4,372             | 4,567    | 4,653       | 4,710             | 4,643      | 4,651      | 0,133    | 0,117     | 0,111   |
| 0,060 | 4,261             | 4,441    | 4,521       | 4,687             | 4,542      | 4,517      | 0,182    | 0,164     | 0,157   |
| 0,065 | 4,167             | 4,334    | 4,409       | 4,675             | 4,459      | 4,403      | 0,235    | 0,216     | 0,208   |
| 0,070 | 4,085             | 4,242    | 4,312       | 4,668             | 4,390      | 4,304      | 0,288    | 0,270     | 0,262   |

continuação

NÚMERO DE NUSSELT AO LONGO DE X PARA DIVERSOS VALORES DE fac

| X      | PAREDE ADIABÁTICA |          |             | PAREDE ISOTÉRMICA |            |            |          |           |         |
|--------|-------------------|----------|-------------|-------------------|------------|------------|----------|-----------|---------|
|        | INTERFACE         |          |             | INTERFACE         |            |            | PAREDE   |           |         |
|        | fac = 0,1         | fac 0,01 | fac = 0,000 | fac=0,1           | fac = 0,01 | fac = 0,00 | fac= 0,1 | fac =0,01 | fac=0,0 |
| 0,075  | 4,014             | 4,162    | 4,228       | 4,663             | 4,331      | 4,216      | 0,341    | 0,324     | 0,317   |
| 0,080  | 3,952             | 4,093    | 4,155       | 4,657             | 4,281      | 4,139      | 0,393    | 0,379     | 0,372   |
| 0,085  | 3,897             | 4,032    | 4,091       | 4,649             | 4,236      | 4,071      | 0,443    | 0,433     | 0,428   |
| 0,090  | 3,849             | 3,978    | 4,035       | 4,637             | 4,196      | 4,009      | 0,491    | 0,486     | 0,482   |
| 0,095  | 3,807             | 3,931    | 3,986       | 4,623             | 4,159      | 3,953      | 0,537    | 0,537     | 0,535   |
| 0,100  | 3,770             | 3,890    | 3,943       | 4,605             | 4,125      | 3,902      | 0,580    | 0,586     | 0,586   |
| 0,200  | 3,515             | 3,627    | 3,673       | 4,151             | 3,613      | 3,324      | 1,059    | 1,167     | 1,220   |
| 0,300  | 3,527             | 3,697    | 3,761       | 3,821             | 3,252      | 2,998      | 1,248    | 1,379     | 1,439   |
| 0,400  | 3,569             | 3,798    | 3,879       | 3,581             | 2,993      | 2,772      | 1,349    | 1,481     | 1,532   |
| 0,500  | 3,613             | 3,880    | 3,968       | 3,399             | 2,805      | 2,616      | 1,412    | 1,539     | 1,580   |
| 0,600  | 3,654             | 3,941    | 4,028       | 3,256             | 2,667      | 2,510      | 1,456    | 1,576     | 1,608   |
| 0,700  | 3,693             | 3,986    | 4,070       | 3,139             | 2,565      | 2,436      | 1,488    | 1,600     | 1,626   |
| 0,800  | 3,729             | 4,020    | 4,099       | 3,043             | 2,490      | 2,387      | 1,512    | 1,617     | 1,637   |
| 0,900  | 3,764             | 4,046    | 4,120       | 2,962             | 2,434      | 2,355      | 1,531    | 1,629     | 1,644   |
| 1,000  | 3,796             | 4,066    | 4,136       | 2,892             | 2,394      | 2,335      | 1,547    | 1,637     | 1,649   |
| 2,000  | 4,022             | 4,157    | 4,202       | 2,523             | 2,366      | 2,388      | 1,620    | 1,648     | 1,645   |
| 3,000  | 4,118             | 4,188    | 4,222       | 2,414             | 2,475      | 2,489      | 1,639    | 1,631     | 1,629   |
| 4,000  | 4,161             | 4,204    | 4,232       | 2,431             | 2,542      | 2,547      | 1,638    | 1,620     | 1,619   |
| 5,000  | 4,184             | 4,214    | 4,238       | 2,505             | 2,577      | 2,578      | 1,627    | 1,614     | 1,614   |
| 6,000  | 4,199             | 4,220    | 4,242       | 2,572             | 2,597      | 2,597      | 1,615    | 1,611     | 1,611   |
| 7,000  | 4,208             | 4,225    | 4,244       | 2,610             | 2,610      | 2,610      | 1,609    | 1,608     | 1,608   |
| 8,000  | 4,215             | 4,229    | 4,247       | 2,626             | 2,619      | 2,619      | 1,606    | 1,607     | 1,607   |
| 9,000  | 4,221             | 4,232    | 4,248       | 2,631             | 2,625      | 2,625      | 1,605    | 1,606     | 1,606   |
| 10,000 | 4,244             | 4,258    | 4,253       | 2,636             | 2,635      | 2,633      | 1,604    | 1,605     | 1,605   |
| 20,000 | 4,243             | 4,247    | 4,255       | 2,653             | 2,653      | 2,653      | 1,601    | 1,601     | 1,601   |
| 30,000 | 4,249             | 4,251    | 4,257       | 2,660             | 2,660      | 2,660      | 1,600    | 1,600     | 1,600   |
| 40,000 | 4,252             | 4,253    | 4,258       | 2,663             | 2,663      | 2,663      | 1,599    | 1,599     | 1,599   |
| 50,000 | 4,253             | 4,255    | 4,258       | 2,665             | 2,665      | 2,665      | 1,599    | 1,599     | 1,599   |
| 60,000 | 4,255             | 4,255    | 4,259       | 2,667             | 2,667      | 2,667      | 1,599    | 1,599     | 1,599   |
| 70,000 | 4,256             | 4,256    | 4,259       | 2,668             | 2,668      | 2,668      | 1,599    | 1,599     | 1,599   |

continuação

NÚMERO DE NUSSELT AO LONGO DE X PARA DIVERSOS VALORES DE fac

| X        | PAREDE ADIABÁTICA |          |             | PAREDE ISOTÉRMICA |            |            |          |           |         |
|----------|-------------------|----------|-------------|-------------------|------------|------------|----------|-----------|---------|
|          | INTERFACE         |          |             | INTERFACE         |            |            | PAREDE   |           |         |
|          | fac = 0,1         | fac 0,01 | fac = 0,000 | fac=0,1           | fac = 0,01 | fac = 0,00 | fac= 0,1 | fac =0,01 | fac=0,0 |
| 80,000   | 4,256             | 4,257    | 4,259       | 2,668             | 2,668      | 2,668      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 90,000   | 4,257             | 4,257    | 4,259       | 2,669             | 2,669      | 2,669      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 100,000  | 4,257             | 4,257    | 4,260       | 2,669             | 2,669      | 2,669      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 150,000  | 4,258             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 200,000  | 4,257             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 250,000  | 4,258             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 300,000  | 4,258             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 350,000  | 4,254             | 4,259    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 400,000  | 4,256             | 4,257    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 450,000  | 4,254             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 500,000  | 4,254             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 550,000  | 4,254             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 600,000  | 4,253             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 650,000  | 4,254             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 700,000  | 4,213             | 4,258    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 750,000  | 4,147             | 4,257    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 800,000  | 4,115             | 4,250    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 850,000  | 4,234             | 4,234    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 900,000  | 4,284             | 4,251    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 950,000  | 4,040             | 4,244    | 4,260       | 2,671             | 2,671      | 2,671      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |
| 1000,000 | 4,272             | 4,650    | 4,463       | 2,675             | 2,709      | 2,798      | 1,598    | 1,598     | 1,598   |

| NÚMERO DE SHERWOOD AO LONGO DE X |            |            |           |            |            |           | FLUXO DE MASSA AO LONGO DE X |            |           |            |            |           |
|----------------------------------|------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|------------------------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|
| 200 autovalores, LE = 1000       |            |            |           |            |            |           |                              |            |           |            |            |           |
| X                                | ADIABÁTICO |            |           | ISOTÉRMICO |            |           | ADIABÁTICO                   |            |           | ISOTÉRMICO |            |           |
|                                  | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1                    | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 |
| 0,001                            | 349,127    | 365,460    | 368,520   | 348,196    | 365,623    | 368,519   | 159,124                      | 329,601    | 368,339   | 158,695    | 329,745    | 368,339   |
| 0,002                            | 313,153    | 336,378    | 339,955   | 313,153    | 336,377    | 339,955   | 119,146                      | 292,918    | 339,656   | 119,143    | 292,916    | 339,656   |
| 0,003                            | 285,476    | 311,369    | 315,946   | 285,477    | 311,369    | 315,946   | 98,761                       | 265,176    | 315,557   | 98,760     | 265,174    | 315,557   |
| 0,004                            | 262,854    | 289,816    | 295,159   | 262,856    | 289,815    | 295,159   | 85,754                       | 242,976    | 294,700   | 85,753     | 242,973    | 294,699   |
| 0,005                            | 244,224    | 271,185    | 277,065   | 244,226    | 271,185    | 277,065   | 76,589                       | 224,709    | 276,551   | 76,588     | 224,708    | 276,551   |
| 0,006                            | 228,704    | 255,013    | 261,233   | 228,705    | 255,013    | 261,233   | 69,721                       | 209,404    | 260,676   | 69,720     | 209,403    | 260,676   |
| 0,007                            | 215,615    | 240,906    | 247,311   | 215,616    | 240,906    | 247,311   | 64,350                       | 196,402    | 246,718   | 64,349     | 196,401    | 246,718   |
| 0,008                            | 204,442    | 228,536    | 235,007   | 204,444    | 228,536    | 235,007   | 60,015                       | 185,231    | 234,386   | 60,015     | 185,230    | 234,386   |
| 0,009                            | 194,796    | 217,630    | 224,077   | 194,798    | 217,630    | 224,077   | 56,429                       | 175,540    | 223,432   | 56,429     | 175,539    | 223,432   |
| 0,010                            | 186,383    | 207,962    | 214,324   | 186,384    | 207,962    | 214,324   | 53,404                       | 167,060    | 213,660   | 53,403     | 167,059    | 213,660   |
| 0,011                            | 178,973    | 199,346    | 205,578   | 178,974    | 199,346    | 205,578   | 50,809                       | 159,582    | 204,897   | 50,809     | 159,582    | 204,896   |
| 0,012                            | 172,392    | 191,626    | 197,700   | 172,392    | 191,626    | 197,700   | 48,555                       | 152,941    | 197,004   | 48,555     | 152,941    | 197,004   |
| 0,013                            | 166,501    | 184,674    | 190,573   | 166,502    | 184,674    | 190,573   | 46,573                       | 147,006    | 189,865   | 46,573     | 147,005    | 189,865   |
| 0,014                            | 161,191    | 178,383    | 184,097   | 161,192    | 178,383    | 184,097   | 44,813                       | 141,668    | 183,378   | 44,813     | 141,667    | 183,378   |
| 0,015                            | 156,373    | 172,665    | 178,190   | 156,375    | 172,664    | 178,190   | 43,237                       | 136,842    | 177,462   | 43,237     | 136,841    | 177,462   |
| 0,016                            | 151,977    | 167,443    | 172,781   | 151,981    | 167,442    | 172,781   | 41,816                       | 132,456    | 172,044   | 41,816     | 132,455    | 172,044   |
| 0,017                            | 147,947    | 162,655    | 167,809   | 147,952    | 162,655    | 167,809   | 40,525                       | 128,450    | 167,064   | 40,526     | 128,450    | 167,064   |
| 0,018                            | 144,234    | 158,247    | 163,223   | 144,241    | 158,248    | 163,223   | 39,346                       | 124,776    | 162,472   | 39,347     | 124,776    | 162,472   |
| 0,019                            | 140,797    | 154,175    | 158,978   | 140,811    | 154,176    | 158,978   | 38,264                       | 121,392    | 158,220   | 38,266     | 121,393    | 158,220   |
| 0,020                            | 137,605    | 150,399    | 155,038   | 137,628    | 150,401    | 155,038   | 37,265                       | 118,264    | 154,275   | 37,270     | 118,265    | 154,275   |
| 0,025                            | 124,466    | 134,962    | 138,899   | 124,670    | 134,984    | 138,899   | 33,224                       | 105,556    | 138,113   | 33,260     | 105,572    | 138,113   |
| 0,030                            | 114,588    | 123,505    | 126,910   | 115,454    | 123,603    | 126,910   | 30,254                       | 96,203     | 126,107   | 30,401     | 96,275     | 126,107   |
| 0,035                            | 106,799    | 114,573    | 117,574   | 109,184    | 114,861    | 117,574   | 27,950                       | 88,955     | 116,758   | 28,337     | 89,166     | 116,759   |
| 0,040                            | 100,445    | 107,357    | 110,044   | 105,480    | 107,989    | 110,045   | 26,095                       | 83,125     | 109,219   | 26,875     | 83,584     | 109,220   |
| 0,045                            | 95,126     | 101,367    | 103,806   | 104,084    | 102,513    | 103,807   | 24,558                       | 78,303     | 102,972   | 25,878     | 79,129     | 102,973   |
| 0,050                            | 90,586     | 96,291     | 98,529    | 104,786    | 98,111     | 98,531    | 23,258                       | 74,228     | 97,688    | 25,237     | 75,531     | 97,690    |
| 0,055                            | 86,648     | 91,916     | 93,989    | 107,427    | 94,544     | 93,992    | 22,138                       | 70,724     | 93,142    | 24,860     | 72,595     | 93,144    |
| 0,060                            | 83,189     | 88,094     | 90,029    | 111,923    | 91,631     | 90,033    | 21,160                       | 67,669     | 89,176    | 24,674     | 70,172     | 89,180    |
| 0,065                            | 80,116     | 84,716     | 86,535    | 118,276    | 89,230     | 86,540    | 20,297                       | 64,973     | 85,678    | 24,618     | 68,149     | 85,682    |
| 0,070                            | 77,363     | 81,703     | 83,423    | 126,599    | 87,228     | 83,429    | 19,526                       | 62,573     | 82,561    | 24,649     | 66,436     | 82,567    |

continuação

| X      | NÚMERO DE SHERWOOD AO LONGO DE X |            |           |            |            |           | FLUXO DE MASSA AO LONGO DE X |            |           |            |            |           |
|--------|----------------------------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|------------------------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|
|        | ADIABÁTICO                       |            |           | ISOTÉRMICO |            |           | ADIABÁTICO                   |            |           | ISOTÉRMICO |            |           |
|        | fac = 0,1                        | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1                    | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 |
| 0,075  | 74,875                           | 78,993     | 80,627    | 137,134    | 85,537     | 80,634    | 18,833                       | 60,416     | 79,761    | 24,731     | 64,966     | 79,768    |
| 0,080  | 72,612                           | 76,537     | 78,098    | 150,295    | 84,090     | 78,106    | 18,205                       | 58,464     | 77,228    | 24,843     | 63,685     | 77,236    |
| 0,085  | 70,541                           | 74,299     | 75,795    | 166,746    | 82,832     | 75,804    | 17,631                       | 56,686     | 74,922    | 24,967     | 62,552     | 74,931    |
| 0,090  | 68,635                           | 72,247     | 73,687    | 187,525    | 81,723     | 73,697    | 17,105                       | 55,058     | 72,811    | 25,092     | 61,535     | 72,821    |
| 0,095  | 66,872                           | 70,357     | 71,747    | 214,291    | 80,731     | 71,758    | 16,620                       | 53,559     | 70,868    | 25,213     | 60,610     | 70,880    |
| 0,100  | 65,235                           | 68,608     | 69,955    | 249,807    | 79,830     | 69,967    | 16,170                       | 52,173     | 69,074    | 25,325     | 59,759     | 69,086    |
| 0,200  | 45,663                           | 48,588     | 49,752    | -127,488   | 68,502     | 49,772    | 10,813                       | 36,307     | 48,840    | 26,451     | 48,711     | 48,860    |
| 0,300  | 35,391                           | 39,269     | 40,803    | -57,208    | 61,169     | 40,823    | 7,962                        | 28,821     | 39,875    | 27,201     | 42,013     | 39,895    |
| 0,400  | 28,411                           | 33,484     | 35,469    | -39,288    | 55,438     | 35,487    | 6,022                        | 24,092     | 34,530    | 27,771     | 37,295     | 34,549    |
| 0,500  | 23,298                           | 29,456     | 31,829    | -31,127    | 50,638     | 31,846    | 4,635                        | 20,763     | 30,882    | 28,160     | 33,721     | 30,900    |
| 0,600  | 19,412                           | 26,464     | 29,143    | -26,479    | 46,493     | 29,158    | 3,623                        | 18,276     | 28,190    | 28,382     | 30,885     | 28,207    |
| 0,700  | 16,387                           | 24,141     | 27,055    | -23,491    | 42,869     | 27,070    | 2,873                        | 16,343     | 26,096    | 28,450     | 28,561     | 26,113    |
| 0,800  | 13,992                           | 22,276     | 25,373    | -21,422    | 39,685     | 25,387    | 2,311                        | 14,793     | 24,409    | 28,382     | 26,614     | 24,426    |
| 0,900  | 12,070                           | 20,739     | 23,980    | -19,916    | 36,883     | 23,993    | 1,883                        | 13,520     | 23,012    | 28,194     | 24,957     | 23,028    |
| 1,000  | 10,512                           | 19,447     | 22,801    | -18,781    | 34,417     | 22,813    | 1,554                        | 12,454     | 21,829    | 27,901     | 23,528     | 21,845    |
| 2,000  | 3,962                            | 12,616     | 16,426    | -15,232    | 20,992     | 16,434    | 0,394                        | 6,978      | 15,426    | 22,005     | 15,772     | 15,441    |
| 3,000  | 2,336                            | 9,717      | 13,607    | -17,436    | 16,137     | 13,614    | 0,182                        | 4,810      | 12,588    | 15,819     | 12,653     | 12,603    |
| 4,000  | 1,671                            | 8,043      | 11,930    | -26,539    | 13,704     | 11,937    | 0,110                        | 3,635      | 10,896    | 11,833     | 10,917     | 10,911    |
| 5,000  | 1,312                            | 6,932      | 10,788    | -58,092    | 12,182     | 10,795    | 0,075                        | 2,898      | 9,741     | 9,725      | 9,756      | 9,756     |
| 6,000  | 1,087                            | 6,131      | 9,947     | -377,085   | 11,106     | 9,953     | 0,056                        | 2,393      | 8,888     | 8,663      | 8,903      | 8,903     |
| 7,000  | 0,931                            | 5,522      | 9,294     | 156,173    | 10,292     | 9,301     | 0,043                        | 2,026      | 8,225     | 8,054      | 8,240      | 8,239     |
| 8,000  | 0,817                            | 5,040      | 8,769     | 78,647     | 9,648      | 8,776     | 0,035                        | 1,749      | 7,690     | 7,610      | 7,705      | 7,705     |
| 9,000  | 0,730                            | 4,649      | 8,336     | 55,151     | 9,123      | 8,342     | 0,029                        | 1,532      | 7,247     | 7,226      | 7,262      | 7,262     |
| 10,000 | 0,664                            | 4,348      | 7,977     | 42,869     | 8,698      | 7,984     | 0,025                        | 1,365      | 6,878     | 6,884      | 6,898      | 6,893     |
| 20,000 | 0,359                            | 2,683      | 6,011     | 15,358     | 6,407      | 6,017     | 0,008                        | 0,587      | 4,838     | 4,853      | 4,853      | 4,853     |
| 30,000 | 0,260                            | 2,045      | 5,169     | 10,804     | 5,459      | 5,175     | 0,004                        | 0,347      | 3,933     | 3,948      | 3,948      | 3,948     |
| 40,000 | 0,211                            | 1,702      | 4,684     | 8,871      | 4,922      | 4,690     | 0,003                        | 0,236      | 3,392     | 3,407      | 3,407      | 3,407     |
| 50,000 | 0,183                            | 1,489      | 4,366     | 7,792      | 4,573      | 4,373     | 0,002                        | 0,174      | 3,021     | 3,036      | 3,036      | 3,036     |
| 60,000 | 0,164                            | 1,345      | 4,142     | 7,105      | 4,329      | 4,149     | 0,002                        | 0,134      | 2,746     | 2,760      | 2,760      | 2,760     |

continuação

| X        | NÚMERO DE SHERWOOD AO LONGO DE X |            |           |            |            |           | FLUXO DE MASSA AO LONGO DE X |            |           |            |            |           |
|----------|----------------------------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|------------------------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|
|          | ADIABATICO                       |            |           | ISOTERMICO |            |           | ADIABATICO                   |            |           | ISOTERMICO |            |           |
|          | fac = 0,1                        | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1                    | fac = 0,01 | fac = 0,0 | fac = 0,1  | fac = 0,01 | fac = 0,0 |
| 70,000   | 0,151                            | 1,244      | 3,977     | 6,633      | 4,150      | 3,984     | 0,001                        | 0,108      | 2,531     | 2,545      | 2,545      | 2,545     |
| 80,000   | 0,142                            | 1,170      | 3,853     | 6,293      | 4,015      | 3,860     | 0,001                        | 0,089      | 2,356     | 2,371      | 2,371      | 2,371     |
| 90,000   | 0,136                            | 1,116      | 3,757     | 6,041      | 3,911      | 3,763     | 0,001                        | 0,075      | 2,211     | 2,225      | 2,225      | 2,225     |
| 100,000  | 0,131                            | 1,075      | 3,681     | 5,849      | 3,830      | 3,688     | 0,001                        | 0,064      | 2,087     | 2,101      | 2,101      | 2,101     |
| 150,000  | 0,122                            | 0,980      | 3,486     | 5,371      | 3,619      | 3,493     | 0,000                        | 0,033      | 1,650     | 1,665      | 1,664      | 1,664     |
| 200,000  | 0,119                            | 0,955      | 3,423     | 5,223      | 3,552      | 3,430     | 0,000                        | 0,019      | 1,362     | 1,375      | 1,375      | 1,375     |
| 250,000  | 0,118                            | 0,945      | 3,401     | 5,173      | 3,528      | 3,408     | 0,000                        | 0,011      | 1,139     | 1,152      | 1,152      | 1,152     |
| 300,000  | 0,116                            | 0,936      | 3,392     | 5,152      | 3,519      | 3,399     | 0,000                        | 0,007      | 0,957     | 0,969      | 0,969      | 0,969     |
| 350,000  | 0,113                            | 0,924      | 3,387     | 5,140      | 3,513      | 3,394     | 0,000                        | 0,004      | 0,805     | 0,816      | 0,816      | 0,816     |
| 400,000  | 0,108                            | 0,903      | 3,382     | 5,129      | 3,508      | 3,389     | 0,000                        | 0,002      | 0,678     | 0,688      | 0,688      | 0,688     |
| 450,000  | 0,100                            | 0,871      | 3,377     | 5,118      | 3,503      | 3,384     | 0,000                        | 0,001      | 0,571     | 0,580      | 0,580      | 0,580     |
| 500,000  | 0,087                            | 0,822      | 3,371     | 5,105      | 3,497      | 3,379     | 0,000                        | 0,001      | 0,480     | 0,489      | 0,489      | 0,489     |
| 550,000  | 0,071                            | 0,750      | 3,365     | 5,090      | 3,490      | 3,372     | 0,000                        | 0,000      | 0,404     | 0,412      | 0,412      | 0,412     |
| 600,000  | 0,053                            | 0,654      | 3,357     | 5,072      | 3,481      | 3,364     | 0,000                        | 0,000      | 0,340     | 0,348      | 0,348      | 0,348     |
| 650,000  | 0,037                            | 0,537      | 3,347     | 5,052      | 3,472      | 3,355     | 0,000                        | 0,000      | 0,287     | 0,293      | 0,293      | 0,293     |
| 700,000  | 0,023                            | 0,413      | 3,336     | 5,027      | 3,460      | 3,344     | 0,000                        | 0,000      | 0,241     | 0,247      | 0,247      | 0,247     |
| 750,000  | 0,014                            | 0,297      | 3,323     | 4,998      | 3,446      | 3,331     | 0,000                        | 0,000      | 0,203     | 0,208      | 0,208      | 0,208     |
| 800,000  | 0,008                            | 0,201      | 3,308     | 4,964      | 3,430      | 3,317     | 0,000                        | 0,000      | 0,171     | 0,176      | 0,176      | 0,176     |
| 850,000  | 0,005                            | 0,130      | 3,290     | 4,925      | 3,411      | 3,299     | 0,000                        | 0,000      | 0,144     | 0,148      | 0,148      | 0,148     |
| 900,000  | 0,003                            | 0,082      | 3,269     | 4,879      | 3,389      | 3,278     | 0,000                        | 0,000      | 0,121     | 0,125      | 0,125      | 0,125     |
| 950,000  | 0,001                            | 0,051      | 3,244     | 4,826      | 3,363      | 3,254     | 0,000                        | 0,000      | 0,102     | 0,105      | 0,105      | 0,105     |
| 1000,000 | 0,001                            | 0,034      | 3,369     | 4,770      | 3,380      | 3,379     | 0,000                        | 0,000      | 0,090     | 0,089      | 0,090      | 0,093     |