

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA**

**DA LÓGICA PARACONSISTENTE À QUASE-VERDADE: UM EXAME DE DOIS
TRABALHOS DE NEWTON DA COSTA**

Dídimo George de Assis Matos

João Pessoa
2012

DÍDIMO GEORGE DE ASSIS MATOS

DA LÓGICA PARACONSISTENTE À QUASE-VERDADE: UM EXAME DE DOIS
TRABALHOS DE NEWTON DA COSTA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Filosofia, na linha de pesquisa Lógica e Epistemologia.

Orientador: Prof. Dr. Giovanni da Silva de Queiroz

JOÃO PESSOA – PB
Maio, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

M433d Matos, Dídimio George de Assis.

*Da lógica paraconsistente à quase-verdade:
um exame de dois trabalhos de Newton da Costa /
Dídimio George de Assis Matos.-- João Pessoa,
2012.*

114f.

Orientador: Giovanni da Silva Queiroz

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCHLA

*1. Costa, Newton da – crítica e interpretação. 2.
Filosofia. 3. Lógica. 4. Lógica paraconsistente. 5.
Quase-verdade.*

DÍDIMO GEORGE DE ASSIS MATOS

DA LÓGICA PARACONSISTENTE À QUASE-VERDADE: UM EXAME DE DOIS
TRABALHOS DE NEWTON DA COSTA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia como
requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Filosofia, na linha de pesquisa
Lógica e Epistemologia.

Dissertação aprovada em / / 2012

BANCA EXAMINADORA

Profº. Drº Giovanni da Silva Queiroz(UFPB)_____

Orientador

Profª. Drª. Ana Leda de Araújo(UFPB)_____

Examinador

Profª. Drª. Maria da Paz N. de Medeiros (UFRN) _____

Examinador

À minha esposa Irisvanda Matos, minha
segurança para todos os dias, e meus filhos
que tiveram menos do meu tempo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que contribuíram para que esse trabalho fosse realizado:

Em primeiro lugar ao meu orientador Giovanni da Silva de Queiroz, por ter acreditado no meu projeto, incentivado-me de muitas maneiras e tido a paciência de corrigir meus erros, se sobrou algum a culpa é minha, claro.

À Capes pelo financiamento de parte dessa pesquisa.

Ao Prof. Dr. Newton da Costa, esse ícone da ciência nacional, que consta em qualquer lista boa dos grandes lógicos do século XX e de todos os tempos.

Aos professores Ricardo Silvestre e Ana Leda pelas valiosas sugestões e pelo ensinamento imprescindível promovido por cursos ministrados por um ou por outra e com os quais aprendi muito.

RESUMO

O presente trabalho examina dois dos resultados de da Costa a fim de mostrar sua utilidade para a filosofia e apontar possíveis desenvolvimentos filosóficos. Examina-se, em primeiro lugar, a lógica paraconsistente, tanto do ponto de vista histórico e técnico, quanto alguns de seus desenvolvimentos; depois examina-se a teoria da quase-verdade. Por fim, propõe-se usos desses desenvolvimentos na filosofia, buscando mostrar caminhos em filosofia da ciência e metafísica..

Palavras chave: lógica, lógica paraconsistente, quase-verdade.

ABSTRACT

This dissertation examines two of the results of da Costa in order to show its usefulness to the philosophy and to point out possible philosophical developments. At first, It examines the paraconsistent logic, both from the historical and technical point of view as well as some of its developments. Next, it examines the theory of quasi-truth. Finally, it is proposed uses of these developments in philosophy, trying to show tricks in the philosophy of science and metaphysics.

Key words: logic, paraconsistent logic, quasi-truth.

SUMÁRIO

Introdução.....	10
Capítulo I - A Lógica Paraconsistente.....	12
1. Uma breve história da lógica paraconsistente.....	12
1.1 Influências da matemática do século XIX.....	12
1.2 Pré-história da lógica paraconsistente.....	14
1.2.1 Łukasiewicz e o princípio ou lei de (não) contradição.....	14
1.2.2 Vasiliev e a lógica imaginária.....	22
1.2.3 Jaśkowski e a lógica discussiva.....	24
1.2 A Lógica Paraconsistente de Newton da Costa.....	25
2. Um breve exame dos primeiros escritos de da Costa.....	28
Capítulo II – Lógica paraconsistente – sintaxe, semântica e desenvolvimentos.....	31
1. O sistema C_1 de Newton da Costa.....	31
1.1 O cálculo C_1	31
1.2 Aspectos semânticos de C_1	40
1.3 Um método de dedução natural para C_1	51
Capítulo III – A teoria da quase-verdade.....	63
Capítulo IV – Algumas aplicações possíveis em filosofia.....	77
1. Paraconsistência e metafísica.....	77
2. A quase-verdade e a filosofia da ciência.....	82
Considerações finais.....	89
Referências bibliográficas.....	91
Apêndice I.....	94
Bibliografia Newton da Costa.....	94
Apêndice II.....	107
Apêndice III.....	110

Introdução

A lógica e os conceitos de verdade têm, desde, praticamente, os primórdios da filosofia, gerado problemas filosóficos de primeira grandeza. Durante dois mil anos, a lógica conhecida, utilizada, ensinada, foi a lógica aristotélica; vários grandes filósofos disseram que esta não precisava de acréscimos ou correções, um deles foi Kant, que no prefácio de sua **Crítica da Razão Pura**, edição de 1787, afirma explicitamente que a lógica não tinha dado qualquer passo importante, para frente ou para trás, desde Aristóteles, e parecia estar acabada e completa.

Os desenvolvimentos levados a cabo por Leibniz, Boole e, finalmente, por Frege demonstraram o erro de Kant; a lógica passou por uma revolução sem precedentes com esse último autor, passou a ter meios de discutir e analisar conjuntos inteiros de argumentos que eram desprezados pela lógica aristotélica. O **Begriffsschrift** de Frege só é comparado, em importância, na história da lógica, aos **Primeiros Analíticos** de Aristóteles.

Russell e Whitehead demonstram a maturidade do modelo fregiano em seu **Principia Mathematica**; esses autores buscam fundamentar a matemática na lógica, entretanto, acabam se defrontando com alguns problemas que Russell já havia percebido nos trabalhos de Frege, que são os paradoxos, raciocínios que em tudo parecem corretos, mas que geram resultados absurdos ou contraditórios.

Várias tentativas de solução são geradas para livrar-se dos paradoxos e das contradições, muita discussão é travada e se passa a pensar em possibilidades que não mais se preocupavam exclusivamente em livrar-se das contradições, mas até em meios de conviver com ela. Desse novo paradigma surgem as lógicas não clássicas como a que abordaremos nesse trabalho, a lógica paraconsistente, que é explicada em contextos histórico e técnico nos capítulos I e II desta dissertação.

De outro lado, do exame do conceito de verdade pelos filósofos, surgem diversas teorias da verdade que buscam esclarecer tal conceito da melhor maneira possível. Na maior parte, tais teorias servem pouco ao uso de linguagens formais, mas Tarski, buscando examinar a verdade como correspondência e tendo em vista linguagens artificiais e sistemas formais, consegue desenvolver o esquema $T(X \text{ é verdadeira, se e somente se, } p \text{ ou "A neve é branca", é verdadeira se e somente se, a neve é branca})$, que captura em tais linguagens o essencial, ou parte dele, da teoria enunciada por Aristóteles

no livro Gama da Metafísica: “ verdade é dizer do que é, que é e do que não é, que não é, falsidade é dizer do que não é, que é e do que é que não é”.

Há, entretanto, alguns problemas relativos à verdade em ciência que não são contornados por nenhuma das teorias da verdade, mesmo a de Tarski. Pensando nesse problema Newton da Costa, que é também o criador da lógica paraconsistente anunciada acima, trabalhou uma teoria que buscava captar da prática científica seu relacionamento com a verdade. Ele batizou o conceito decorrente de sua análise de quase-verdade, tema que será desenvolvido no capítulo III, deste trabalho.

Depois de examinarmos a lógica paraconsistente e a teoria da quase-verdade; passaremos a analisar suas possibilidades de aplicação em filosofia e nos deteremos em dois casos mais especificamente: i) a aplicação de lógicas paraconsistentes aos problemas da metafísica por meio de uma avaliação da teoria dos objetos de Meinong; e, ii) um exame de possíveis aplicações da teoria da quase-verdade na filosofia da ciência.

A partir desse exame concluiremos pela relevância das teorias ora estudadas, a saber, a quase-verdade e a lógica paraconsistente como instrumentos da filosofia em seus desenvolvimentos, acreditamos ter encontrado um bom argumento para demonstrar isso.

Tudo isso, os desenvolvimentos e a relevância das teorias, será apresentado no capítulo IV, que finaliza a presente pesquisa.

Capítulo I - A Lógica Paraconsistente

1. Uma breve história da lógica paraconsistente

1.1 Influências da matemática do século XIX

Algumas das ideias básicas da matemática do século XIX influenciaram fundamentalmente a cultura e o pensamento em geral e, especificamente, contribuíram diretamente ou foram causa, indireta ou heurística, do surgimento da lógica matemática e também das lógicas não clássicas¹.

Um dos acontecimentos cruciais a ser levado em conta é o surgimento das geometrias não euclidianas, com as ideias de Lobachevski, Bólyai em maior grau, e posteriormente com o trabalho de Riemann.

Para da Costa, esse talvez tenha sido um dos maiores acontecimentos da história da matemática e da cultura em geral e, até hoje, tais geometrias são motivação heurística ou analógica para construção de lógicas não clássicas. O polonês Łukasiewicz e o russo Vasiliev, quando discutiram os sistemas não clássicos, ou os propuseram, declararam-se diretamente motivados pelo surgimento de geometrias não-euclidianas.

O uso do termo “geometrias não-euclidianas”, refere-se não apenas à geometria de Lobachevski e Bólyai, mas também à geometria de Riemann que engloba uma das três geometrias elementares não-euclidianas e a teoria geral dos espaços de Riemann, que “modificou radicalmente a noção de espaço e constitui uma modificação tão radical quanto à provocada pela geometria de Lobachevski e Bolyai²”.

Outro ponto a ser levantado é a construção e desenvolvimento da geometria projetiva, que é mais geral que a euclidiana e se afasta da noção comum de espaço. Desargues, Poncelet e outros desenvolveram enormemente essa geometria e descobriram, entre muitas outras coisas, a lei da dualidade, que mostra que ao fazer permutações entre o ponto e a reta, a geometria projetiva do plano permanece a mesma, o que indicava que “a geometria se derivava de certos axiomas puramente formais³”.

¹ Acompanharemos aqui o dito por DA COSTA em um estudo empreendido sobre o período, veja: DA COSTA, N. C. A. *O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX*. In: ÉVORA, Fátima R.R. (ed.). **Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: UNICAMP/Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1992, p. 59-65. (Coleção CLE, v.11).

² DA COSTA, 1992 – p. 61.

³ DA COSTA, 1992 – p. 61.

Com as obras de Hamilton, álgebras não-comutativas, e Grassman, a álgebra linear, com a teoria dos espaços vetoriais, mudou, de modo radical, a maneira de encarar a matemática. Até aí, ela era confundida com a ciência física e, a partir desses autores, passou a ser vista ou a tornar-se algo abstrato, começando a separar-se da física e das demais ciências naturais.

Uma coisa, também fundamental, foi a evolução do método axiomático. Contribuíram para tal evolução Peano e sua escola, vários matemáticos alemães, e, de maneira definitiva, o grande geômetra Hilbert, que dizia que o método axiomático só se completava quando se estudassem todas as alternativas de uma determinada axiomática. Sendo assim, não bastava investigar a axiomática da geometria euclídeana, tinha-se que estudar as geometrias construídas por substituições dos vários postulados. Hilbert afirmou em 1900 que no verdadeiro método axiomático se deveria tratar de todas as possibilidades lógicas existentes.

O que abrilhanta ainda mais todo esse movimento é a obra de Cantor, o criador da teoria dos conjuntos. Perceba-se que tão importante quanto a criação da teoria dos conjuntos, por ele, foi a modificação de paradigma que tal teoria provocou.

A maior lição de Cantor, para da Costa, pode ser resumida em uma frase que ele colocou como divisa em um de seus artigos, afirmando que “A essência da matemática consiste em sua liberdade”, com isso querendo dizer que “a essência da matemática consiste no fato de que é possível desenvolvê-la em plano totalmente independente do mundo físico real⁴”.

Em resumo ao que foi dito até aqui, listamos algumas contribuições para o desenvolvimento da lógica tal como estudada atualmente, seja clássica ou não clássica: as geometrias não euclídeanas sugeriram a possibilidade de lógicas diferentes da clássica, a geometria projetiva contribuiu para que se concebesse a matemática, e também a lógica, de maneira formal e abstrata, as obras de Hamilton e Grassman corroboraram a importância dos desenvolvimentos provindos das geometrias não euclídeanas, o cantorismo conduziu a axiomatizações da teoria dos conjuntos e a formulação das lógicas abstratas, por fim, a matemática dos franceses desembocou no construtivismo das lógicas intuicionistas.

⁴ DA COSTA, 1992, p. 64.

1.2 Pré-história da lógica paraconsistente

Nas primeiras décadas do século XX, vários filósofos, por motivos diferentes, criaram novos sistemas lógicos, diferentes da lógica aristotélica. Trataremos do conceito de paraconsistência em geral tal como surgiu no início do século em filósofos e lógicos como Łukasiewicz e Vasiliev. Trataremos, ainda, acerca de como tal conceito evoluiu até os trabalhos de da Costa, que é considerado o fundador da lógica paraconsistente tendo em vista que apresentou o sistema técnico mais completo.

1.2.1 Łukasiewicz e o princípio ou lei de (não) contradição⁵

Łukasiewicz em um livro e um artigo, com o mesmo nome: *Sobre a lei da contradição em Aristóteles*, ambos publicados em 1910, examina detidamente a possibilidade de reformular os princípios básicos da lógica, motivado tanto nos avanços da geometria quanto nos avanços da lógica simbólica.

Logo no início do artigo, Łukasiewicz declara uma de suas motivações, afirmando que, dado o avanço da lógica simbólica com os trabalhos de Boole, De Morgan, Peirce, Schröder, Frege, Peano, Russell, entre outros, havia a necessidade de uma revisão da lei de contradição de Aristóteles, exposta no livro *Γ* da *Metafísica*.

A outra motivação é exposta por Łukasiewicz logo a seguir:

Assim como, no decorrer do século XIX, uma prova mais precisa do princípio euclideo das linhas paralelas conduziu a sistemas geométricos novos não-euclidianos, do mesmo modo não seria de se excluir a suposição que uma revisão fundamental das leis básicas de Aristóteles possa fornecer o ponto de partida para sistemas de lógicas novos e não-aristotélicos.⁶

Łukasiewicz quer saber como as leis fundamentais mais elevadas da lógica, que, de acordo com ele, o número tem se elevado bastante desde Aristóteles, devem ser formuladas e a) como estão em relação umas as outras, b) se são todas independentes entre si, c) se podem ser todas derivadas de um princípio último e, ainda, d) se seu âmbito de aplicação é ilimitado ou se admite certas exceções.

⁵ Examinaremos detidamente o artigo: *Sobre a lei da contradição em Aristóteles*, de 1910. A tradução do artigo para o português é de Raphael Zillig, in ZINGANO, Marco. *Sobre a metafísica de Aristóteles*. São Paulo: Odyseus, 2005.

⁶ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO, 2005, p. 02.

Para empreender seu estudo começa identificando como a lei de contradição é descrita/apresentada por Aristóteles, e localiza três diferentes versões dessa lei, uma ontológica, uma lógica e uma psicológica. Passa então a listar tais versões:

- (I) A formulação ontológica tal qual apresentada por Aristóteles em *Metafísica* Γ 3, 1005b19-20: “É impossível que o mesmo simultaneamente pertença e não pertença ao mesmo sob o mesmo aspecto”⁷, ou “o mesmo atributo não pode, ao mesmo tempo, pertencer e não pertencer ao mesmo sujeito com relação a mesma coisa”⁸, reformulada por Łukasiewicz com a seguinte redação: “*A nenhum objeto a mesma propriedade pode simultaneamente pertencer e não pertencer*”.
- (II) A formulação lógica, encontrada em *Metafísica* Γ 6 1011b 13-14: “O mais seguro de todos os princípios básicos é que asserções contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras”⁹ e que reformulada por Łukasiewicz ganha a seguinte redação: “*Duas asserções contraditórias não podem ser ambas verdadeiras*”.
- (III) A formulação psicológica, encontrada em *Metafísica* Γ 3, 1005b23-24: “não se pode crer que a mesma coisa seja e não seja”¹⁰ reescrita por Łukasiewicz como: “*Dois atos de crença correspondendo a duas asserções contraditórias não podem existir simultaneamente na mesma consciência*”.

Łukasiewicz percebe ainda que Aristóteles parece acreditar que a lei lógica e a lei ontológica de contradição são equivalentes. Isso se deve ao fato de que Aristóteles considera que asserções, que são o discurso ao qual se aplica o ser-verdadeiro e o ser-falso, são representações de fatos objetivos e estabelece uma correlação de um a um entre eles. Dessa correlação um a um entre fatos e asserções resulta a equivalência entre a lei lógica e a ontológica.

⁷ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO, 2005, p. 02.

⁸ ARISTOTELES, *Metafísica*, Porto Alegre: Editora Globo, 1969, p. 92.

⁹ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO, 2005, p. 02.

¹⁰ ARISTOTELES, 1969, P.92.

Após apresentar as três formulações da lei de contradição e a equivalência estabelecida por Aristóteles entre a lei ontológica e a lei lógica, Łukasiewicz passa a analisar o conjunto de argumentos apresentados por Aristóteles na defesa dessas leis.

O primeiro argumento que Aristóteles apresenta é quanto a lei psicológica, que Aristóteles busca demonstrar usando a lei lógica, e Łukasiewicz reconstrói da seguinte maneira:

Se dois atos de crença correspondendo a asserções contraditórias pudessem ocorrer ao mesmo tempo na mesma consciência, então características opostas antiteticamente pertenceriam ao mesmo tempo a essa consciência. Mas, a partir do princípio lógico da contradição, é impossível que características incompatíveis pertençam simultaneamente ao mesmo objeto. Conseqüentemente, dois atos de crença correspondendo a asserções[proposições] contraditórias não podem ocorrer ao mesmo tempo na mesma consciência.¹¹

Łukasiewicz argumenta que essa lei, apesar dos esforços de Aristóteles, não pode ser demonstrada *a priori*, pois trata-se de uma lei da experiência e só pode ser demonstrada de maneira empírica. Afirma também que o argumento acima reconstruído apenas mostra que o estagirita comete o erro do “logicismo em psicologia” que consiste em, ao analisar funções psíquicas, ater-se as asserções a elas correspondentes e suas funções lógicas. Por fim, lembra que certos filósofos, como Hegel, defenderam, conscientemente, crenças contraditórias.

Aristóteles afirma a indemonstrabilidade da lei de contradição, mas se esforça em defendê-la, para isso apresenta duas modalidades de exposição; uma chamada de elêntica¹² ou negativa, e a outra, é a modalidade apagógica, acerca da qual Łukasiewicz faz um reparo afirmando que tal tipo de demonstração necessita da lei de contradição como pressuposto¹³. Passo a apresentar as demonstrações¹⁴, algumas já nas versões apresentadas pelo lógico polonês.

As demonstrações elênticas:

¹¹ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO, 2005, p. 05 – tradução modificada cotejando o texto em inglês.

¹² Por *elenchos*, Aristóteles entende o silogismo que fornece o oposto contraditório de uma tese, de acordo com afirmação de Łukasiewicz.

¹³ No livro de 1980, *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, da Costa afirma que tal reparo não faz sentido visto já estar provado que a lei de não contradição não é pressuposto para demonstrações apagógicas.

¹⁴ As formulações abaixo são expostas nas páginas 10-12 da tradução do artigo de 1910, encontra-se em ZINGANO, 2005.

- a) Com a palavra *A* designo algo que em sua essência é *B*. Conseqüentemente, o objeto *A* é necessariamente um *B*. Mas se *A* é necessariamente um *B*, então é impossível – devido ao significado da palavra “necessariamente” – que ele não seja *B*. Assim sendo, nenhum *A* pode ser e não ser *B* ao mesmo tempo.
- b) Com a palavra *A* designo algo que em sua essência é unitário. Conseqüentemente, o objeto *A*, que é em sua essência *B*, não pode ao mesmo tempo em sua essência não ser *B*, pois de outra forma ele não seria unitário em sua essência. Assim sendo, *A* não pode ao mesmo tempo ser e não ser *B* em sua essência.

As demonstrações apagógicas:

- c) A primeira demonstração apagógica: *Met.* Γ 4, 1007^b18-21 – “Ainda, se todas as asserções contraditórias são simultaneamente verdadeiras com relação ao mesmo, então tudo evidentemente será um. Nesse caso, trirreme, parede e homem seriam o mesmo”.
- d) A segunda demonstração apagógica: *Met.* Γ 4, 1008^a28-30 – “Além disso, segue-se que todos diriam o verdadeiro e todos diriam o falso e todos teriam de admitir que falam o falso”.
- e) A terceira demonstração apagógica: *Met.* Γ 4, 1008^b12-19 – “Disso, melhor do que de qualquer outro modo, pode-se concluir que ninguém crê em algo desse tipo, nem quem professa tal doutrina, nem alguém outro. Senão, por quê ele vai a Megara, ao invés de permanecer quieto em casa opinando que está indo para lá? Ou por quê ele não se atira uma bela manhã no poço ou abismo quando este encontra-se no seu caminho e, em vez disso, claramente toma cuidado, como se ele não considerasse a queda indiferentemente não-bom e bom? É, portanto, evidente que ele toma uma das opções como sendo a melhor e a outra não”.

Łukasiewicz encarando a argumentação aristotélica como demonstrações propriamente ditas e apreciando-as do ponto de vista lógico, apresenta várias objeções:

- 1- A primeira demonstração elêntica não institui a lei de contradição, no máximo, ela prova o princípio da dupla negação: se *A* é *B*, então *A* não pode ser não *B*, entretanto, deste não se deriva aquele.
- 2- A segunda prova elêntica estabelece a lei de contradição apenas para certos objetos, as *essências* das coisas ou *substâncias*. Com efeito, a existência de substâncias é provável apenas, e isso tira força do argumento.

- 3- As provas apagógicas são inadequadas para Łukasiewicz por dois motivos: i) envolvem *petitio principii* pelo motivo de o raciocínio apagógico se basear na lei de contradição, ii) todas as provas *ad impossibile*, ocultam uma *ignoratio elenchi*. Aristóteles não demonstra que a mera negação da lei da contradição levaria a consequências absurdas, mas trata de extrair as consequências absurdas de se supor que todas as proposições e suas negações são verdadeiras. Quem nega a lei de contradição, ou exige uma demonstração para ela, não está afirmando, nem precisa supor, que tudo seja contraditório, principalmente naquelas coisas que se referem à vida prática.

Łukasiewicz afirma, baseado nas considerações listadas acima, que Aristóteles, apesar de seus esforços, não conseguiu demonstrar a lei de contradição. Além disso, levando em consideração outros escritos do estagirita, afirma ainda que o grego deslocou a prova e passou a buscar apenas uma verdade absoluta que pudesse fundamentar a falsidade da tese oposta por contrariedade à lei de contradição: “*A mesma propriedade simultaneamente pertence e não pertence a todo objeto*”.

Łukasiewicz apresenta ainda a tese de que o próprio Aristóteles percebe limitações na aplicação da lei de contradição. Aristóteles, já tinha uma ideia sobre a possibilidade de derrogar a lei de contradição. Com efeito, Łukasiewicz escreve:

No entanto, a lei da contradição *não* é a lei mais superior nem mesmo para Aristóteles, ao menos não no sentido em que ela *constituiria uma pressuposição necessária para todos os outros axiomas lógicos*. Em especial, o *princípio do silogismo é independente da lei da contradição*. Isso é claro a partir de uma longa passagem despercebida e mal compreendida dos *Segundos Analíticos* [10]: *Seg. An. A 11, 77^a10-22* – “Que seja impossível simultaneamente afirmar e negar, isso não é pressuposto por nenhuma demonstração [silogismo], a menos quando a própria conclusão devesse demonstrar tal coisa. Isso, então, demonstra-se na medida em que se supõe ser verdadeiro predicar o primeiro termo do termo médio, e não-verdadeiro não predicá-lo. Mas, no que diz respeito ao termo médio e também ao terceiro termo, não faz qualquer diferença supor que ele é e não é. Seja dado um objeto qualquer [por exemplo, Calias], do qual se possa dizer com verdade que ele é homem, apenas sendo homem um animal e não um não-animal; será, então, verdadeiro predicar de Calias que ele é um animal e não é um não-animal, ainda que homem fosse não-homem e Calias fosse não-Calias. A razão disso é que o primeiro termo vale não apenas do termo médio, mas também de outros objetos, uma vez que ele tem um âmbito de aplicação maior [do que o termo médio], de modo que não faz qualquer

diferença para a conclusão que o termo médio seja e não seja o mesmo”.

Assim, para Aristóteles o silogismo seguinte é correto (A = animal, B = homem, C = Calias):

B é A (e não também não- A).

C , que é não- C , é B e não- B .

C é A (e não também não- A).

Mas se um silogismo é correto quando não vale mais a lei da contradição, então o princípio do silogismo (e, na realidade, o *dictum de omni et nullo*) é independente da lei da contradição.¹⁵

De acordo com da Costa¹⁶, o silogismo acima é válido e isso representa dizer que há leis válidas do raciocínio que são independentes da lei da contradição.

Para da Costa, aceitando-se a interpretação de Łukasiewicz, constata-se que ao admitir princípios válidos de inferência independentes da lei de contradição, Aristóteles aceita um fato corroborado pelas investigações lógicas atuais, e, ainda, que o filósofo grego pode ser levado em consideração como precursor da lógica paraconsistente.

De seu estudo, Łukasiewicz retira várias conclusões, vejamos.

1. A lei de contradição não pode ser provada apelando para sua evidência devido a, pelo menos, dois motivos: i) a evidência não parece ser um critério aceitável de verdade, ii) a lei de contradição não parece evidente para todo mundo, há filósofos, como Hegel, que não a consideram evidente, por exemplo.

2. A lei de contradição não pode ser provada sendo apresentada como uma lei natural que é determinada pela organização psicológica do homem. Uma lei psicológica da contradição só poderia ser provada pelo método experimental.

3. A lei de contradição não pode ser provada por meio da definição de negação ou de falsidade. Se admitir-se a falsidade de “ A é B ” advindo pela afirmação de que A não é B , parece que a lei de contradição surge com tal definição, mas tal não se realiza

¹⁵ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO, 2005 - p. 16-17.

¹⁶ DA COSTA, N. C.A.. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, São Paulo: Hucitec, 2008, trabalho original de 1980 – análise do trabalho de Łukasiewicz.

posto que ambos podem ser verdadeiros ao mesmo tempo bastando para isso que A é B seja verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Como assinala da Costa, a lei da contradição depende da noção de conjunção e não decorre unicamente da definição de negação. Mais à frente veremos que isso gera uma controvérsia com Vasiliev que admite exatamente o contrário, ou seja, que a lei de contradição deriva da noção de negação (falsidade).

4. O lógico polonês coloca ainda em questão que qualquer um que queira defender a lei de contradição deve levar em conta que existem *objetos contraditórios* como o círculo quadrado de Meinong. Para tais objetos a lei não vige.

Da Costa põe em relevo que, independentemente das concepções filosóficas, os estudos atuais mostram, de modo positivo, que há teorias lógico-matemáticas nas quais figuram objetos contraditórios e que, por conseguinte, derogam a lei de contradição.

5. Łukasiewicz afirma categoricamente que a lei da contradição em sua formulação mais geral - “a mesma propriedade não pode ao mesmo tempo pertencer e não pertencer ao mesmo objeto” é, com toda certeza, falsa. Ela seria verdadeira apenas para o caso em que a palavra “objeto” significasse apenas “objetos sem contradição”, que seriam aqueles encontráveis no mundo. Surge então, para o lógico polonês, a questão fundamental, tais objetos existem, em absoluto, no real e possível?

Łukasiewicz distingue, então, três tipos de objeto: i) as abstrações construtivas como os objetos da matemática ortodoxa, ii) as abstrações reconstrutivas, que são conceitos elaborados para representar coisas reais, e iii) os objetos reais.

No que tange as abstrações construtivas, paradoxos como o de Russell, embora tenha sido criado por nós em certo sentido, possui relações espontâneas entre eles sob as quais não temos controle, assim, nunca teremos certeza que não infringirão a lei de contradição.

No tocante as abstrações reconstrutivas e aos objetos reais, como representantes da realidade, parecem estar livres de contradição; até hoje não se conhece nenhum caso, ou se o admite, de contradição existindo na realidade. Mais ainda, não há contradições diretamente perceptíveis, pois as negações relacionadas a juízos perceptíveis não são, por sua vez, elas próprias, perceptíveis. Qualquer constatação de contradições reais, em

nosso estado atual de conhecimento, só pode ser mediata, resultado de inferências¹⁷. Entretanto, deve-se levar em consideração que se tem defendido que o movimento e a mudança envolvem contradições; apesar de tais dificuldades lógicas terem sido eludidas por meio de acertos teóricos, como decorrem de inferências, não há nenhuma prova definitiva de que não haja contradições no mundo.

6. A lei de contradição não tem valor lógico, tendo em vista que pode ser apenas suposta, mas possui, no entanto, valor ético e prático sumamente importante: “o princípio da contradição é a única arma contra o engano e a mentira”¹⁸. Se não reconhecêssemos tal princípio, não teríamos como nos defender de afirmações falsas ou mentirosas proferidas contra nós. Se não o aceitássemos nas atividades práticas, estaríamos sujeitos a todo tipo de dificuldades. Para a vida prática ordinária, a lei de contradição constitui pressuposto essencial.

Łukasiewicz resume assim suas conclusões:

Parece que também Aristóteles, se não reconheceu claramente o valor ético-prático da lei da contradição, ao menos sentiu-o. Em uma época de declínio político da Grécia, Aristóteles tornou-se fundador e promotor do trabalho cultural científico e sistemático. Talvez ele tenha vislumbrado nisso um consolo para o futuro e a grandeza vindoura de sua nação. Ele deve ter-se empenhado em elevar o valor da pesquisa científica. A negação da lei da contradição teria escancarado as portas a toda falsidade e asfixiado a jovem e florescente ciência no seu primeiro germe de vida. Por isso, o estagirita investe com palavras fortes, nas quais parece sensível um fervor interno, contra os opositores daquela lei, contra os pensadores erísticos de Megara, os cínicos da escola de Antístenes, os partidários de Heráclito, os adeptos de Protágoras e luta com todos eles por um princípio teórico como se fosse por um bem pessoal. Ele próprio pode muito bem ter sentido as fraquezas de sua argumentação e ter, assim, proclamado o seu princípio como um *axioma* último, como um *dogma* intocável.¹⁹

Por mais controvérsias que a interpretação de Łukasiewicz possa gerar, é inegável que ele põe em cheque a lei de contradição como lei última e indemonstrável da razão, tal como o pareceu defender Aristóteles; restou claro ainda, de sua investigação, que mesmo o estagirita não pensava ser, tal lei, válida em geral e que na sua formulação geral, apontada acima, é possivelmente falsa.

1.2.2 Vasiliev e a lógica imaginária.

¹⁷ DA COSTA, 1980.

¹⁸ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO pag. 21.

¹⁹ ŁUKASIEWICZ, in ZINGANO. P. 21-22.

Vasiliev era um jovem médico da Universidade de Kazan na Rússia, a mesma universidade de Lobachevsky. Da mesma maneira que o matemático russo, explorando os postulados da geometria euclideana, criou uma geometria não euclideana a que chamou de Geometria Imaginária, Vasiliev explorou as possibilidades de derrogar os princípios da lógica aristotélica e desenvolveu sistemas de lógica não aristotélica, a um deles chamou Lógica Imaginária, atestando diretamente uma das suas fontes motivadoras e heurísticas.

Vasiliev escreveu cinco textos sobre o assunto; destes, dois são resumos. Neles se encontram certas abordagens que são muito relevantes já que o russo estabelece aí parâmetros para uma nova lógica não aristotélica.

No primeiro texto, de 1910, “*Sobre os juízos particulares, o triângulo das oposições e a lei do quarto excluído*”²⁰ Vasiliev mostra que é possível derrogar a lei do terceiro excluído na seguinte formulação: “duas proposições contraditórias não podem ser ambas verdadeiras e não podem ser ambas falsas”, mantendo-se, entretanto, a lei da contradição.

Nos artigos posteriores, de 1911 a 1913, ele passa a tratar da possibilidade de derrogação da lei de contradição e a possibilidade de, a partir disso, construir sistemas de lógica não aristotélica nos quais vale uma forma dessa lei, mas não a outra. Posteriormente a esse período, ele publicou um trabalho em um congresso em 1924, mas para Arruda, o resumo é um tanto confuso e não é representativo de sua obra.²¹

Para Vasiliev, qualquer sistema lógico é composto de duas partes: a *Metalógica*, em que estariam às leis relacionadas ao pensamento, que são aquelas que, se eliminadas, fazem com que o sistema deixe de ser lógico, e a outra parte, que Arruda chama de *parte ontológica da lógica* – em que estariam as leis que dependem de propriedades do objetos.

A lei ontológica da contradição, que diz que um objeto não pode ter um predicado que o contradiga, pode ser derrogada; entretanto, a lei metalógica de ‘não-autocontradição’ que afirma que um juízo não pode ser ao mesmo tempo verdadeiro e falso, não pode ser eliminada, sob pena de que quem o infringisse, deixasse de pensar logicamente.

²⁰ ARRUDA, Aída I. N. A. *Vasiliev e a lógica paraconsistente*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE, 1990.

²¹ ARRUDA, 1990, p. 10

Para Vasiliev, a lógica aristotélica se refere ao mundo real; a lógica imaginária se refere a mundos imaginários, assim, a lógica imaginária é não-aristotélica. A metalógica, por sua vez, é uma espécie de lógica universal, pois é parte de qualquer sistema de lógica, sem exceção.

Vasiliev não esclareceu quais as leis de sua metalógica nem, tampouco, da lógica que visava construir; apenas discutiu a lei da contradição e da não-autocontradição. Entretanto, devido ao contexto, percebe-se claramente que, para ele, não existia uma lógica imaginária única, mas tantas quanto fossem os mundos imaginários.

Não se tem conhecimento de que Vasiliev conhecesse o trabalho de Łukasiewicz, de 1910, mas em muitos momentos sua argumentação assemelha-se muito à do lógico polonês, apesar de em alguns momentos chegarem a resultados opostos; vejamos.

Para o polonês, a lei de não contradição não está contida na definição de negação ou falsidade, enquanto para o russo, “A lei de contradição expressa a incompatibilidade da afirmação com a negação, e a negação é aquilo que é incompatível com a afirmação. *Isto torna claro que a lei da contradição já se encontra na definição de negação.*”²²

É importante destacar, acerca de Vasiliev, que seu trabalho é precursor da lógica paraconsistente e das lógicas não clássicas polivalentes. Arruda, por exemplo, ao formalizar alguns pontos de vista do russo, conseguiu, por resultado, três sistemas de cálculo proposicional paraconsistente²³. Além disso, enfatiza-se que, segundo Vasiliev, uma contradição não invalida, ou seja, não trivializa, seu sistema; assim, sua lógica imaginária satisfaz a condição necessária para que a lógica seja paraconsistente.

1.2.3 Jaśkowski e a lógica discussiva

Jaśkowski, que foi um dos discípulos de Łukasiewicz, a partir de diversas motivações e partindo de diversos problemas relativos a contradições, principalmente aqueles referentes a “raciocínios convincentes que levam a duas conclusões contraditórias”, elaborou o que talvez tenha sido o primeiro sistema formal de lógica paraconsistente. Publicou dois artigos: o primeiro em 1948 e o outro no ano seguinte,

²² ARRUDA, 1990 p. 45.

²³ ARRUDA, A. I. *On the imaginary logic of N. A. Vasiliev*. In ARRUDA, A.I., DA COSTA, N. C. A., CHUAQUI, R. (Ed.). **Non-classical, model theory and computability**. Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 3-24.

1949, ambos em polonês. Sua primeira tradução para o inglês, do artigo de 1948, foi aparecer apenas em 1969.

De acordo com Arruda, dentre as motivações de Jaśkowski para a construção de seu sistema, as principais são as seguintes: o problema da sistematização de teorias que contêm contradições, como no caso da dialética; o estudo de certas teorias nas quais existem contradições causadas por “vaguidade”; e o estudo direto de certas teorias empíricas cujos postulados ou princípios fundamentais são de alguma forma contraditórios.

O lógico polonês colocou em relevo claramente a distinção entre sistemas contraditórios, que incluem duas teses tais que uma contradiz a outra, e sistemas triviais, ou, para usar sua terminologia, supercompletos, nos quais qualquer fórmula é teorema desse sistema. Considerou que a lógica clássica não é a lógica adequada para o estudo de certos sistemas que, apesar de contraditórios, são não triviais ou supercompletos.

Baseado nessas idéias, Jaśkowski propôs como problema a construção de um cálculo proposicional que possuísse as seguintes propriedades:

“(i) Quando aplicado a sistemas contraditórios não levaria sempre à sua supercompletude;

(ii) Deveria ser suficientemente rico para permitir inferências práticas;

(iii) Deveria ter uma justificativa intuitiva.”²⁴

Jaśkowski construiu uma solução própria, que ficou apenas no nível proposicional, construída a partir do sistema modal S5, conhecida como lógica discursiva, às vezes também chamada discussiva e conhecida por sistema D2 de Jaśkowski. A lógica discursiva é entendida como formalização de uma lógica do discurso. Além de ser paraconsistente, é também não-adjuntiva, ou seja, a conjunção de suas proposições A e B nem sempre é derivável, isto é, apesar de A e B serem teoremas do sistema, sua conjunção A & B não é, necessariamente, um teorema nesse mesmo sistema. As idéias por trás da construção do sistema D2 são bastante interessantes e ligam as lógicas discursivas com outras classes de lógicas não-clássicas estudadas

²⁴ D’OTAVIANNO, I. M. L. *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. Conferência apresentada na UNESP em abril de 2003.

atualmente, como é o caso, por exemplo, das lógicas doxásticas e as lógicas não-monotônicas, estas últimas de interesse para a ciência da computação²⁵.

1.2 A Lógica Paraconsistente de Newton da Costa

A lógica paraconsistente é uma lógica não clássica que permite a manipulação formal de sistemas de proposições que encerram contradições (inconsistências), sem que tais sistemas se trivializem. Trivial é o sistema S em que todas as fórmulas são teoremas de S. Na lógica clássica se se deduz uma fórmula e sua negação pode-se demonstrar qualquer coisa, ou seja, uma contradição torna o sistema trivial.

A lógica paraconsistente nasce, entre outras coisas, do problema de estudar algumas áreas do conhecimento que parecem envolvidas em trivialidade e ou paradoxos, pois são inconsistentes. Isso ocorreu, por exemplo, com a teoria ingênua dos conjuntos de Cantor. Esta teoria, como foi visto por alguns filósofos e matemáticos, conduz aos paradoxos conjuntistas, “contradições que viciavam a teoria do ponto de vista da lógica clássica”²⁶.

Não há, até hoje, nenhuma demonstração de consistência absoluta de nenhuma teoria de conjuntos. Com o uso da lógica paraconsistente “pode-se provar que tais teorias são triviais se, e somente se, as teorias clássicas correspondentes forem inconsistentes”. Isso implica a possibilidade de construção de matemáticas paraconsistentes, algumas contendo a matemática tradicional. Alguns filósofos, como Diego Marconi²⁷, acreditavam, ainda, que é possível usar tal lógica para axiomatização de variantes da dialética.

Há, ainda, usos práticos de lógica paraconsistente para informática e economia. No primeiro caso na construção de sistemas especialistas que precisam manipular informação inconsistente. No segundo como base para a Teoria da Decisão.

A lógica paraconsistente só foi efetivamente elaborada nos anos 1950, de maneira independente pelo polonês Jaśkowski e o brasileiro Newton da Costa. Ela se desenvolveu muito nos anos 1960 do século XX no mundo todo, e em especial no Brasil. Sobre lógica paraconsistente, já se realizaram vários congressos mundo afora.

²⁵ D’OTAVIANNO, 2003.

²⁶ DA COSTA, 1980, 2008.

²⁷ Marconi é organizador de uma antologia acerca da relação entre lógica paraconsistente e dialética; *La formalizzazione della dialettica*. Torino: Rosenberg & Sellier, 1979.

Para filósofos como Von Wright, a lógica paraconsistente é a realização mais importante para a lógica na segunda metade do século XX.

Nos anos 1950, sem conhecimento do trabalho de Jaśkowski, da Costa começou a desenvolver suas idéias sobre a importância de estudar teorias contraditórias.

Em 1958 e 1959, publicou seus primeiros trabalhos em português: “Uma nota sobre o conceito de contradição” e “Observação sobre o conceito de existência em matemática”. Em 1958 propõe o seguinte *Princípio de Tolerância em Matemática*: “do ponto de vista sintático e semântico toda teoria é aceitável desde que não seja trivial”.

As idéias de da Costa estavam completas em 1963, quando publicou sua tese de Cátedra que continha as hierarquias de lógicas de 1ª ordem para o estudo de teorias inconsistentes e não triviais. Introduz os sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Neste trecho descreve uma de suas motivações para os estudos sobre paraconsistência:

Por muitas razões, como por exemplo, a análise comparativa com sistemas consistentes, e para uma análise metamatemática adequada do princípio[de não contradição] em consideração, é conveniente estudar “diretamente” os sistemas inconsistentes.²⁸

Outras motivações são:

1. Estabelecer técnicas lógico-formais capazes de permitir uma melhor compreensão das estruturas lógicas subjacentes às concepções dos partidários da dialética;
2. Contribuir para o entendimento das leis da lógica clássica;
3. Estudar o esquema de separação da teoria dos conjuntos quando enfraquecemos as restrições que lhe são impostas, pesquisando até que ponto teorias de conjuntos inconsistentes, mas não triviais, podem ser elaboradas;
4. Contribuir para a sistematização e avaliação de novas teorias que contenham contradições ou antigas teorias abandonadas por esse motivo, caso da teoria dos objetos de Meinong, por exemplo;
5. Colaborar para a apreciação correta dos conceitos de negação e contradição.

²⁸ DA COSTA, 1963.

Ele considerou que para tal estudo seria preciso desenvolver novos tipos de lógica elementar apropriados.

Os cálculos desenvolvidos por Da Costa satisfaziam as seguintes condições:

- (I) o princípio da não contradição, na forma $\neg(A \ \& \ \neg A)$ não vale em geral para todos os casos;
- (II) de duas premissas contraditórias A e $\neg A$, não deveríamos deduzir qualquer fórmula B ;
- (III) conter os mais importantes esquemas e regras da lógica clássica compatíveis com as duas primeiras condições.

Posteriormente, da Costa estendeu os cálculos C_n a uma hierarquia de cálculos de predicados de 1ª ordem C_n^* , $1 \leq n \leq \omega$; de cálculos de predicados com igualdade $C_n=$, $1 \leq n \leq \omega$; de cálculos de descrições D_n , $1 \leq n \leq \omega$; e de teorias de conjuntos NF_n , $1 \leq n \leq \omega$, inconsistentes porém não triviais.

Da Costa e seus discípulos, desde então, foram ampliando seus estudos e tendo obtido resultados relativos à decidibilidade dos sistemas, estruturas algébricas a eles correspondentes, teoria de modelos, significado filosófico e relações com outros tipos de lógicas não-clássicas.

O desenvolvimento das lógicas não-clássicas, e a lógica paraconsistente não é exceção, suscita dúvidas como:

- Existe uma única razão?
- Existe uma única lógica?
- Estamos derrubando a lógica clássica?

Da Costa responde negativamente a todas essas questões²⁹. Sua crença, de acordo com D'Ottaviano, é que “a razão se constitui através da História, seguindo principalmente a contingência originada pelo progresso científico”³⁰.

Em tal visão, a natureza *a priori* da razão aparece relativa. A razão se transforma em elemento constitutivo da cultura de uma época, tendo conotações sociais

²⁹ DA COSTA, 1979, 2008.

³⁰ D'OTAVIANO, 2003.

e culturais relativamente à sua própria história. A razão é dialética e evolui, de acordo com o avanço da ciência. As categorias da razão são históricas. Assim, a razão não pode ser determinada *a priori* via um sistema lógico fixo.

Não existe uma única lógica. Não se está derogando a lógica clássica; há muitas situações em que a análise depende dela. Há, entretanto, lógicas, e dentre elas uma pode ser mais apropriada para certo tipo de problema, não havendo porque decidir isto a partida. Então, a edificação de lógicas não-clássicas é tão importante quanto o foi à edificação de geometrias não-euclidianas.

2. Um breve exame dos primeiros escritos de da Costa

Em 1958 e 1959 da Costa escreve dois textos, *Nota sobre o conceito de contradição*³¹ e *Observações sobre o conceito de existência em matemática*³², que antecipam o seu trabalho em lógica paraconsistente; esses textos se seguem a alguns trabalhos nos quais descreve seu método de trabalho³³. Vamos examiná-los brevemente antes de entrar na parte mais técnica em que exporemos o sistema C_1 nas dimensões sintática e semântica.

No primeiro texto, *Nota sobre o conceito de contradição*, da Costa examina o papel que o conceito de contradição possui nos fundamentos da matemática. Ele afirma que tal conceito tem tamanha importância que, por vezes, se acredita que a propriedade básica de uma teoria matemática é sua consistência, ou seja, o fato mesmo de não possuir contradições; isso levou Hilbert a criar a metamatemática com a finalidade de provar a consistência das diversas teorias matemáticas.

Em seu exame, da Costa afirma que há dois tipos de argumentos para excluir as inconsistências do domínio da matemática. Há, em primeiro lugar, as razões de ordem técnica e ainda as razões de ordem filosófica.

As razões de ordem técnica se referem, por exemplo, à trivialização de uma teoria na presença de uma contradição. Mantidos os princípios da lógica clássica, prova-se facilmente que, se em uma teoria forem demonstráveis uma proposição p , e sua negação, $\neg p$, então qualquer proposição da teoria pode ser demonstrada. Como consequência tem-se que não é possível distinguir o que é ou não demonstrável.

³¹ Publicado no Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática, vol. 1, nova série, 1958. Apêndice 02.

³² Publicado no Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática, vol. 2, nova série, 1959. Apêndice 03.

³³ Caso de: DA COSTA, NCA. *Sobre a teoria lógica da linguagem*, Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo, v. 8, p. 58-70, 1958.

Quanto aos argumentos filosóficos, eles se apóiam em princípios lógicos de um modo geral. Dada a lei clássica de não contradição, uma proposição e sua negação não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo e assim não é possível uma teoria logicamente válida com contradições internas; acreditar no contrário disso seria um erro filosófico.

Para da Costa a matemática possui três dimensões: a sintática, a semântica e a pragmática. Sintaticamente uma disciplina matemática é de um puro cálculo, um jogo de símbolos sem significação. Semanticamente os símbolos matemáticos *representam* determinados objetos, mesmo que hipoteticamente. E, há ainda a dimensão pragmática que percebe a matemática como obra do matemático e como condicionada por esse fato.

Do prisma sintático-semântico, a escolha dos postulados que estruturam as disciplinas matemáticas e que as definem, é inteiramente livre, afirma da Costa. Afirma ainda que o essencial não são os postulados e suposições iniciais, mas as afirmações que tais e tais suposições implicam certas consequências.

Ele retira as seguintes conclusões do acima descrito que: a) sob os aspectos sintático e semântico, uma linguagem objeto onde aparecem contradições não pode ser *a priori* excluída; b) não seria conveniente utilizar o cálculo clássico para estruturar uma tal linguagem; c) a concepção pragmática da linguagem não pode deixar de lado teorias inconsistentes apenas por serem inconsistentes, e d) a consistência ou inconsistência são propriedades metateóricas das disciplinas dedutivas e há teorias consistentes e inconsistentes nos Fundamentos da Matemática.

Disso, de acordo com da Costa, resulta “a possibilidade de se estudar ‘linguagens objeto’ inconsistentes em pé de igualdade com as outras”, e que tal investigação das teorias inconsistentes é, tanto sintática quanto semanticamente, lícita, igual é lícita a investigação das consistentes.

No segundo artigo, *Nota sobre o conceito de existência em matemática*, da Costa examina o problema da existência em matemática e retoma o problema do artigo anterior, ele mostra em um primeiro momento que há afirmações opostas como as de Hilbert e Brouwer acerca da noção existência dos objetos matemáticos, enquanto para o primeiro, “existir” resume-se a não conter contradições, o segundo não admite tal critério e estabelece que a matemática é construída pelo matemático, assim, “existe” o que foi construído.

Prosseguindo, da Costa afirma que se encaramos apenas do ponto de vista sintático, ou seja, por seu aspecto de cálculo, “x existe” deve ser tomado como sinônimo de “x é construído”, na acepção intuicionista.

Afirma ainda que sintática e semanticamente, nada impede que estudemos sistemas de quaisquer natureza. Afirma também que desse prisma, todo sistema matemático é lícito, desde que não seja trivial.

Frisa que mudando-se algumas das regras lógicas que são utilizadas no mecanismo dedutivo tradicional, é possível, pelo menos em princípio, estudar teorias que não satisfaçam o requisito da consistência.

Termina o artigo enunciando o seu princípio de tolerância em matemática, de que já falamos acima, da seguinte maneira: *do prisma sintático-semântico, toda teoria matemática é admissível, desde que não seja trivial*. E explica que, em sentido lato, existe, em matemática, aquilo que não for trivial.

Percebemos pelo exame dos dois artigos acima que o cálculo apresentado em 1963 foi precedido por estudos matemáticos e filosóficos dos conceitos de contradição e de existência em matemática, tais estudos motivaram o nosso autor a pensar cálculos diferentes do tradicional, que pudessem tratar teorias inconsistentes tal como eram trabalhadas as teorias consistentes e reduzir o “temor”, por parte dos matemáticos, das contradições.

Capítulo II – Lógica paraconsistente – sintaxe, semântica e desenvolvimentos

1. O sistema C_1 de Newton da Costa

O desenvolvimento da lógica paraconsistente é a primeira grande realização intelectual de Newton da Costa, como vimos no capítulo anterior seus estudos sobre contradição e existência no âmbito matemático são um primeiro passo dado no sentido de enfrentar os problemas que o conduzirão ao desenvolvimento do Cálculo C_1 que será exposto em detalhes nesse capítulo.

Apresentaremos a linguagem do cálculo e seus aspectos semânticos, bem como alguns desenvolvimentos posteriores; iremos ainda exibir a demonstração de alguns metateoremas relacionados a esse sistema.

Um sistema axiomático como C_1 é, no que se refere a sintaxe, composto por uma tripla $\langle L, Ax, R \rangle$ no qual L é a linguagem fixada, vocabulário e gramática, Ax é um conjunto de esquemas de axiomas e R é um conjunto de regras.

Sendo o sistema C_1 um cálculo proposicional sua linguagem possui; i) um conjunto infinito e contável **Var** das variáveis proposicionais formado por $\{A, B, C, \dots\}$; ii) um conjunto finito de constantes lógicas **Con** formado pelos símbolos lógicos $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$, lidos como “não”, “e”, “ou” e “implica” (ou “se...então...”), respectivamente; iii) sinais de pontuação (,), abre e fecha parênteses, as vírgulas também podem ser usadas como sinais de pontuação quando for o caso e, ainda, iv) regras de formação para fórmulas bem formadas.

1.1 O cálculo C_1

São esquemas de axiomas do cálculo, em que α° é a abreviação de $\neg(\alpha \& \neg \alpha)$:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow c)) \rightarrow (\alpha \rightarrow c))$
3. $(\alpha \& \beta) \rightarrow \alpha$
4. $(\alpha \& \beta) \rightarrow \beta$
5. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \& \beta)))$
6. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
7. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

8. $(\alpha \rightarrow c) \rightarrow ((\beta \rightarrow c) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow c))$
9. $\alpha \vee \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
11. $\beta^0 \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$
12. $\alpha^0 \& \beta^0 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)^0$
13. $\alpha^0 \& \beta^0 \rightarrow (\alpha \& \beta)^0$
14. $\alpha^0 \& \beta^0 \rightarrow (\alpha \vee \beta)^0$

A regra a ser utilizada nessa lógica é a regra de inferência *Modus (Ponendo)* *Ponens* (MP). Se tivermos duas fórmulas quaisquer A e $A \rightarrow B$, obtém-se B, ou seja, $A, A \rightarrow B \vdash B$ ³⁴.

Tendo em vista os postulados acima, estudaremos aspectos interessantes de C_1 começando pelo metateorema conhecido como *teorema da dedução* e por um teorema que evidencia que o cálculo satisfaz as seguintes condições: a) não vale, em geral, o princípio de não contradição; b) de duas proposições contraditórias, isto é, uma das quais é a negação da outra, não deve ser possível deduzir qualquer proposição.

Metateorema 0.1 (Teorema da Dedução) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, A e B fórmulas quaisquer. Então, se $\Gamma, A \vdash B$, tem-se que $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Demonstração: A demonstração é tal qual encontrada em Mendelson³⁵.

Teorema 1. Em C_1 não são demonstráveis os seguintes esquemas:

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$;
3. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$;
4. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$;
5. $A \& \neg A \rightarrow B$;
6. $A \& \neg A \rightarrow \neg B$;
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$;

³⁴ A regra *Modus Ponens* foi tomada como axioma no sistema desenvolvido por da Costa em sua tese de cátedra **Sistemas Formais Inconsistentes**, aqui a tomaremos como regra de dedução ou inferência. No sistema original havia ainda o axioma $A^0 \rightarrow (\neg A)^0$, que não aparece na formulação aqui apresentada.

³⁵ MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1963

$$8. A \rightarrow \neg\neg A;$$

$$9. (A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow B;$$

$$10. (A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow \neg B;$$

$$11. \neg(A \& \neg A);$$

$$12. A \& \neg A \rightarrow \neg(A \& \neg A);$$

Demonstração. Basta utilizar os quadros abaixo em que 1 e 2 são valores distinguidos³⁶:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \& B$	$A \vee B$
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	3	1
1	2	1	1	1
2	2	1	1	1
3	2	1	3	1
1	3	3	3	1
2	3	3	3	1
3	3	1	3	3

A	$\neg A$
1	3
2	1
3	1

³⁶ Faz-se aqui necessário uma ressalva, as matrizes apresentadas pressupõem algum tipo de noção semântica, o que não caberia nesse momento, entretanto como são usadas apenas para provas negativas, tomamos a liberdade de fazê-lo, até porque é praxe nesse tipo de apresentação, como pode ser visto DA COSTA, 1963 e vários outros textos.

Em C_1 , portanto, não valem princípios como:

1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ e 2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ como podemos ver nas matrizes abaixo.

1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
1	1	3	1	1
1	2	3	1	1
1	3	3	3	1
2	1	1	1	1
2	2	1	1	1
2	3	1	3	3
3	1	1	1	1
3	2	1	1	1
3	3	1	1	1

2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \rightarrow \neg B$	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
1	1	3	3	3	1
1	2	3	1	1	1
1	3	3	1	1	1
2	1	1	3	3	3
2	2	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1
3	1	1	3	1	1
3	2	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1

Bem como esquemas do tipo:

3) $A \& \neg A \rightarrow B$ e 4) $A \& \neg A \rightarrow \neg B$,

3) $A \& \neg A \rightarrow B$;

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$A \& \neg A \rightarrow B$
1	1	3	1	1
1	2	3	1	1
1	3	3	1	1
2	1	1	1	1
2	2	1	1	1
2	3	1	3	3
3	1	1	1	3
3	2	1	1	3
3	3	1	3	3

4) $A \& \neg A \rightarrow \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	$A \& \neg A \rightarrow \neg B$
1	1	3	3	1	1
1	2	3	1	1	1
1	3	3	1	1	1
2	1	1	3	3	3
2	2	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1
3	1	1	3	3	3
3	2	1	1	1	3
3	3	1	1	1	3

Estes esquemas desempenham um papel fundamental na derivação de certos paradoxos que conduzem a trivialização.

Teorema 2. Em C_1 vale o seguinte método de prova por redução ao absurdo paraconsistente:

$\Gamma \vdash B^\circ, \Gamma \cup \{A\} \vdash B$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$ acarretam $\Gamma \vdash \neg A$

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash B^\circ, \Gamma \cup \{A\} \vdash B$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$. Então $\Gamma \vdash B^\circ, \Gamma \vdash A \rightarrow B$ e $\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$. Como $\Gamma \vdash B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$, aplica-se modus ponens sucessivamente e obtém-se $\Gamma \vdash \neg A$.

Corolário 1. Em C_1 valem as regras:

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B^\circ, \Gamma \cup \{A\} \vdash B$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$ acarretam $\Gamma \vdash \neg A$; e, $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B^\circ, \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ e $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$ acarretam $\Gamma \vdash A$

Demonstração. Consequência do teorema 2 e do esquema axioma 10.

Teorema 3. Se juntarmos a C_1 o princípio de não contradição, $\neg(A \ \& \ \neg A)$, como postulado extra, obtemos o cálculo proposicional clássico.

Demonstração. Neste caso seria demonstrável o esquema $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$, resultando os postulados que formam o cálculo proposicional clássico.

Teorema 4. C_1 é um subcálculo próprio do cálculo proposicional clássico.

Demonstração. Todos os postulados de C_1 são válidos no cálculo proposicional clássico como se pode verificar em uma tabela de verdade. Além disso, sabemos que há esquemas válidos no cálculo clássico que não valem em C_1 .

Teorema 5. Em C_1 não valem os esquemas $(A \vee B) \ \& \ \neg A \rightarrow B$ e $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ vale em C_1 . Como, pelo postulado 6, $A \rightarrow A \vee B$, tem-se, pela transitividade da implicação e MP que $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, esquema não demonstrável em C_1 . Logo, segue que $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ não vale em C_1 .

Corolário 2. As seguintes regras não valem em C_1 : $A \vee B, \neg A/B$ e $\neg A \vee B, A/B$

Teorema 6. Sendo $p_1, p_2, \dots, p_n$ as variáveis proposicionais que ocorrem em A , condição necessária e suficiente para que $\vdash A$ no cálculo proposicional clássico é que $(p_1)^0 \& (p_2)^0 \& \dots \& (p_n)^0 \vdash A$ em C_1 .

Demonstração. É evidente que se $(p_1)^0 \& (p_2)^0 \& \dots \& (p_n)^0 \vdash A$ em C_1 , então $\vdash A$ no cálculo proposicional clássico, dado que $(p_i)^0$ é o teorema do cálculo clássico de que C_1 é subcálculo.

De outro lado temos que, se $\vdash A$ no cálculo proposicional clássico, existe uma prova P de A em tal cálculo, na qual só figuram fórmulas $B_1, B_2, \dots, B_n$ que somente contem variáveis proposicionais que ocorram em A . Logo, sendo B_i uma das fórmulas que figuram em P , tem-se que $(p_1)^0 \& (p_2)^0 \& \dots \& (p_n)^0 \vdash (B_i)^0$ em C_1 , dado que em C_1 , fórmulas formadas por componentes bem comportados são bem comportadas. Uma fórmula é *bem comportada* quando satisfaz a lei de não contradição, se isso não se der, temos uma fórmula *mal comportada*.

Teorema 7. Em C_1 tem $\vdash A^{0037}$

Demonstração. Observe que A^{00} significa $\neg(A^0 \& \neg A^0)$, ou seja, $\neg(A^0 \& \neg\neg(A \& \neg A))$. Mas é evidente que $A^0 \& \neg\neg(A \& \neg A) \vdash A^0$ e, como pelo postulado 10, $\neg\neg(A \& \neg A) \vdash A \& \neg A$, temos que $A^0 \& \neg\neg(A \& \neg A) \vdash A$ e também que $A^0 \& \neg\neg(A \& \neg A) \vdash \neg A$. Logo, por redução ao absurdo paraconsistente $\vdash \neg(A^0 \& \neg\neg(A \& \neg A))$, i.e. $\vdash A^{00}$.

Uma fórmula demonstrável no cálculo clássico pode ser demonstrada em C_1 , desde que se postule o bom comportamento de todas as suas variáveis proposicionais. Aliás, bom comportamento tem relação direta com comportamento clássico. Negação forte será usada para referir à negação de uma fórmula bem comportada, como veremos a seguir.

Definição 1. $\neg^*A =_{\text{def}} \neg A \& A^0$ ($\neg^*A$ é a *negação forte* de A)

Tal negação se comporta, tal qual a negação clássica, ou seja, essa negação, pode-se demonstrar, é regida por postulados clássicos, quais sejam:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg^*B) \rightarrow \neg^*A)$$

$$A \rightarrow (\neg^*A \rightarrow B)$$

$$A \vee \neg^*A$$

Teorema 8. Em C_1 , $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg^*B) \rightarrow \neg^*A)$

³⁷ É chamado às vezes de teorema Arruda.

Demonstração. Temos, por MP que $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \vdash \neg^*B$ e, pela definição de $\neg^*$, que $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \vdash \neg B \ \& \ B^0$. Logo, pelos axiomas 3 e 4, temos tanto $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \vdash B^0$ quanto $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \vdash \neg B$. Por MP obtemos $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \vdash B$. Assim, por redução ao absurdo paraconsistente temos, $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \vdash \neg A$. Portanto, por monotonicidade, $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A^0 \vdash \neg A$, e, por autodedutibilidade, $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A^0 \vdash A^0$. Sendo assim temos, $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A^0 \vdash \neg^*A$ e, pelo teorema da dedução temos que

$$i) A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, \vdash A^0 \rightarrow \neg^*A$$

Seguindo o raciocínio apresentado e levando em conta que $A \ \& \ \neg A \vdash A$, temos que, $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \ \& \ \neg A \vdash B^0$, e também que $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \ \& \ \neg A \vdash B$ e, ainda, que $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B, A \ \& \ \neg A \vdash \neg B$. Por conseguinte, usando a redução ao absurdo paraconsistente, obtemos, $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B \vdash \neg(A \ \& \ \neg A)$, isto é:

$$ii) A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B \vdash A^0$$

De i e ii, por meio de MP temos que $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg^*B \vdash \neg^*A$, se aplicarmos o teorema da dedução duas vezes, obtemos $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg^*B) \rightarrow \neg^*A)$.

Isso significa que podemos interpretar a lógica clássica em C_1 e afirmar que, neste sentido, o cálculo proposicional clássico está contido em C_1 , apesar de C_1 ser um subcálculo próprio do clássico.

Portanto, são válidos os seguintes esquemas:

$$\neg^*(A \ \& \ \neg^*A)$$

$$A \leftrightarrow \neg^*\neg^*A$$

$$(A \leftrightarrow \neg^*A) \rightarrow B$$

Teorema 9. Os conectivos $\rightarrow, \ \&, \vee$ e $\neg^*$ satisfazem, em C_1 , todos os esquemas e regras do cálculo proposicional clássico.

Demonstração. Em C_1 , como vimos, valem os esquemas:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg^*B) \rightarrow \neg^*A)$$

$$A \rightarrow (\neg^*A \rightarrow B)$$

$$A \vee \neg^*A$$

Juntando esses esquemas a lógica positiva intuicionista, que é subcálculo de C_1 , obtém-se um sistema de axiomas equivalente ao clássico.

Teorema 10. C_1 é consistente.

Um sistema não trivial S é finitamente trivializável se existe uma fórmula F tal que, ao juntar F a S como um novo axioma, obtém-se um sistema trivial. Os cálculos proposicionais e os cálculos de predicados, clássico e intuicionista, são, ambos, finitamente trivializáveis.

Teorema 11. C_1 é finitamente trivializável.

Demonstração. Qualquer fórmula do tipo $A \ \& \ \neg^* A$ trivializa C_1 .

1.2 Aspectos semânticos de C_1

Até agora apresentamos os aspectos sintáticos de C_1 , passaremos agora aos aspectos semânticos e vamos demonstrar os teoremas de completude e correção para esse cálculo.

O conjunto de fórmulas de C_1 será denominado por $\mathcal{F}$. Γ denotará um subconjunto qualquer de $\mathcal{F}$. O conjunto $\{A \in \mathcal{F} : \Gamma \vdash A\}$ será denotado por FOR^* .

Definição 2. Dizemos que Γ é *trivial* se $\text{FOR}^* = \mathcal{F}$. Em caso contrário, Γ se diz que é *não-trivial*.

Definição 3. Γ é *inconsistente* quando ocorre de existir ao menos uma fórmula A tal que $A, \neg A \in \text{FOR}^*$. Em caso contrário, Γ é *consistente*.

Definição 4. Γ é *não-trivial maximal* se Γ é não-trivial e, para todo A , se $A \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{A\}$ é trivial.

Definição 5. Uma *valoração* para C_1 é uma função $v : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

- (1) $v(A) = 0 \Rightarrow v(\neg A) = 1$;
- (2) $v(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow v(A) = 1$;
- (3) $v(B^\circ) = v(A \rightarrow B) = v(A \rightarrow \neg B) = 1 \Rightarrow v(A) = 0$;
- (4) $v(A \rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$;
- (5) $v(A \ \& \ B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = v(B) = 1$;
- (6) $v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$;
- (7) $v(A^\circ) = v(B^\circ) = 1 \Rightarrow v((A \vee B)^\circ) = v((A \ \& \ B)^\circ) = v((A \rightarrow B)^\circ) = 1$.

Teorema 12. Se v é uma valoração para C_1 , então v tem as propriedades abaixo:

$$\begin{aligned}
v(A) = 1 &\Leftrightarrow v(\neg^*A) = 0; \\
v(A) = 0 &\Leftrightarrow v(\neg^*A) = 1; \\
v(A) = 0 &\Leftrightarrow v(A) = 0 \text{ e } v(\neg A) = 1; \\
v(A) = 1 &\Leftrightarrow v(A) = 1 \text{ ou } v(\neg A) = 0.
\end{aligned}$$

Definição 6. Uma fórmula é *válida* se, para qualquer valoração v , $v(A) = 1$.

Definição 7. Uma valoração v é um *modelo* de um conjunto Γ de fórmulas, se $v(A) = 1$ para qualquer fórmula $A \in \Gamma$.

Teorema 13 (correção). $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

Demonstração. Por indução no comprimento da demonstração de A a partir de Γ . Seja $A_1, A_2, \dots, A_n = A$ uma demonstração de A a partir de Γ . Mostraremos que $v(A_i) = 1$ para $1 \leq i \leq n$. Para $i = 1$, temos que A_i é axioma ou $A_i \in \Gamma$. No primeiro caso $v(A_i) = 1$. No segundo caso, se v é um modelo de Γ , então $v(A_i) = 1$. Para $i > 1$, temos que A_i é axioma, $A_i \in \Gamma$, ou A_i foi obtida de fórmulas anteriores por meio de MP. Se A_i é axioma ou $A_i \in \Gamma$, segue que $v(A_i) = 1$ como visto acima. Se A_i foi obtida de fórmulas anteriores A_k e A_j por MP, então essas fórmulas são do seguinte formato $B \rightarrow A_i$ e B . Por hipótese de indução $v(B \rightarrow A_i) = v(B) = 1$, pelo visto acima, obtemos $v(A_i) = 1$.

Corolário do Teorema da Correção. $\vdash A \Rightarrow \models A$

O teorema da correção e seu corolário garantem que qualquer dedução de A a partir de Γ em C_1 é tal que A é uma consequência semântica de Γ . Em particular temos que, se A é demonstrável em C_1 , então A é válida.

Para provar a recíproca, ou seja, que toda fórmula válida é teorema de C_1 , usaremos os lemas³⁸ abaixo:

Lema 1. (Lindenbaum). Todo conjunto não trivial de fórmulas está contido em um conjunto maximal não trivial.

Lema 2. Todo conjunto maximal não trivial possui modelo.

Teorema 14 (completude). $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \models A$. Portanto, todo modelo de Γ é modelo de A . Logo, não existe um modelo v de Γ tal que $v(A) = 0$. Temos então, não existe modelo de v de Γ tal que $v(\neg^*A) = 1$. Logo, $\Gamma \cup \{\neg^*A\}$ não tem modelo. Dado isso, como todo conjunto não trivial tem modelo, temos que $\Gamma \cup \{\neg^*A\}$ é trivial. Segue-se que $\Gamma \cup \{\neg^*A\} \vdash$

³⁸ Demonstrados em COSTA, N. C. A., MARANHÃO, J. S. de A. e SOUZA, Edelcio G. *Introdução à lógica paraconsistente: a hierarquia Cn*. São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2001.

$\neg^*\neg^*A$. Ademais, como $\neg^*$ tem todas as propriedades da negação clássica, obtemos $\vdash A \rightarrow \neg^*\neg^*A$ e, conseqüentemente, $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg^*\neg^*A$. Temos, também, que $\Gamma \cup \{A \vee \neg^*A\} \vdash \neg^*\neg^*A$. Como em C_1 temos que $A \vee \neg^*A$ é teorema, obtem-se $\Gamma \vdash \neg^*\neg^*A$. Logo, como $\Gamma \vdash \neg^*\neg^*A$, temos que $\Gamma \vdash A$.

Por meio da semântica de valorações para C_1 , podemos obter, também, um método de decisão. Tal método consiste na elaboração de tabelas, chamadas *quase-matrizes*³⁹. Com quase-matrizes podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 15. C_1 é decidível pelo método das quase-matrizes⁴⁰. Exemplos⁴¹:

(1) $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \ \& \ \neg B$ não é válida em C_1 :

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \ \& \ \neg B$	$\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$ $\& \neg B$
0	0	1	1	0	1	1	1
		0	1	1	0	0	1
1	0				0	1	1
		1	1	1		1	1
			0	1	0	0	1
0	1	1			0	1	1
			1	1		1	1
			0	1	0	0	1
		0			0	0	1
			1	1		1	0
1	1				0	0	1
			0	1		1	0
		1			0	1	1
			1	1		1	1

³⁹ Uma definição completa do que são tais tabelas encontra-se em COSTA, N. C. A., ALVES, Elias H., *A semantical analysis of the calculi C_n* , **Notre Dame Journal of Formal Logic**, v. XVIII, n. 4, p. 621-630, 1977.

⁴⁰ Uma quase-matriz é uma matriz não funcional, ou seja, as avaliações das fórmulas por meio de valores 0 e 1 não são dadas por funções, como nas tabelas de verdade, assim; se partirmos de uma fórmula A com valor não designado, então $\neg A$ terá valor designado, uma vez que em C_1 vale o princípio do Terceiro Excluído, mas se partirmos de uma fórmula A com valor designado, $\neg A$ poderá assumir tanto valor designado quanto não designado tendo em vista a não validade, em geral, do Princípio de (não) Contradição.

⁴¹ Os exemplos abaixo foram retirados de ALVES, Elias H. *Observações históricas sobre a semântica de valorações para os sistemas paraconsistentes de da Costa*. Artigo inédito. No prelo.

(2) $\neg(A \& B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$ é válida em C_1 :

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \& B$	$\neg(A \& B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \& B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Além de C_1 , Newton da Costa edificou infinitos cálculos proposicionais C_n ($1 \leq n \leq w$) e cálculos de predicados com e sem igualdade, falaremos um pouco acerca da hierarquia C_n a partir do trabalho desenvolvido por Alves e Queiroz⁴² e ainda sobre alguns outros desenvolvimentos nesse sentido.

O trabalho de Alves e Queiroz busca mostrar que as críticas quanto às desvantagens filosóficas e técnicas dos sistemas C_n de da Costa, bem como a afirmação que sua construção era artificial poderiam ser superadas tendo em vista existir uma construção natural para tais cálculos, que era uma construção “dual” à construção do cálculo intuicionista de Heyting.

Para Alves e Queiroz, usaremos a notação dos autores com pequenas modificações quando for o caso; os cálculos proposicionais C_n ($1 \leq n \leq w$) de da Costa, constituem uma categoria especial de lógicas paraconsistentes, contruídas em observância as seguintes condições:

1. O princípio de não contradição, $\neg(A \& \neg A)$, não seria válido em geral;

⁴² ALVES, Elias H. QUEIROZ, Giovanni da S. de. *The construction of calculi C_n of da Costa*. The Journal of non-classical logic, Campinas-SP, v. 8, p. 67-78, 1991.

2. De duas fórmulas contraditórias, A e $\neg A$, não seria possível deduzir uma fórmula arbitrária;
3. C_n , ($1 \leq n \leq w$) deveria conter a maior parte dos esquemas e regras do cálculo proposicional clássico que não interferissem com as primeiras condições.

Em resposta às críticas levantadas contra os sistemas C_n os autores mostram que contrariamente a elas, existe uma construção natural de tais sistemas.

Da Costa construiu uma hierarquia de cálculos, tal que cada cálculo é estritamente mais forte que aquele que o segue. Os autores se concentraram em C_1 para elaboração de seu trabalho como veremos.

Os autores definem um cálculo como uma tripla $C = \langle \text{FOR}, A, R \rangle$, em que FOR é o conjunto das expressões bem formada, A é um subconjunto de FOR, $A \neq \emptyset$ e R , $R \neq \emptyset$, é um conjunto de relações sobre FOR, chamado de regras de inferência. Dado certo cálculo, é possível definir quando uma fórmula A é uma consequência de um conjunto G de fórmulas (simbolizado é $G \vdash A$).

$Cn(G)$ é chamado de conjunto das consequências de G , ou seja, $Cn(G) = \{A : G \vdash A\}$. Seguindo Tarski, os autores axiomatizam a noção de consequência do seguinte modo:

- (C) $G \subseteq Cn(G)$ Cumulação
- (M) $G \subseteq D \Rightarrow Cn(G) \subseteq Cn(D)$ Monotonicidade
- (I) $Cn(Cn(G)) \subseteq Cn(G)$ Idempotência

Também axiomatizam o operador de consequência proposicional clássico adicionando os funtores usuais do modo que segue:

$$(\neg) Cn(\{G, \neg A\}) = \text{FOR se, e somente se, } A \in Cn(G)$$

$$(\&) Cn(\{G, A \& B\}) = Cn(\{G, A, B\})$$

$$(\vee) Cn(\{G, A \vee B\}) = Cn(\{G, A\}) \text{ ou } Cn(\{G, B\})$$

$$(\rightarrow) B \in Cn(\{G, A\}) \text{ se, e somente se, } A \rightarrow B \in Cn(G)$$

$$(F) A \in Cn(G) \text{ se, e somente se, para algum D-finito, } D \subseteq G, A \in Cn(D).$$

A lógica clássica é definida como o fecho de prova de qualquer conjunto de fórmulas sob as seguintes condições:

RD – Regra de destacamento, ou *Modus Ponens* como vimos acima: $A, A \rightarrow B / B$

A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$

A4) $(A \& B) \rightarrow A$

A5) $(A \& B) \rightarrow B$

A6) $A \rightarrow (A \vee B)$

A7) $B \rightarrow (A \vee B)$

A8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

A9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

A10) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

A11) $\neg\neg A \rightarrow A$

A partir daqui os autores passam a analisar, em sua investigação, as condições de Tarski sobre a negação. A ideia mais básica sobre a negação é que a oposição lógica significa inconsistência. Classicamente, em uma teoria T, dada uma contradição, qualquer fórmula é derivável e tais teorias são triviais; todavia, podemos distinguir inconsistência de trivialidade. Nesse sentido uma lógica paraconsistente pode ser usada como lógica subjacente para teorias inconsistentes, mas não triviais.

Pode-se obter sublógicas consistentes a partir da lógica clássica enfraquecendo a condição de Tarski sobre a negação ($\neg$).

A primeira modificação natural de $(\neg)$, de acordo com os autores, é a versão da “conclusão negada”:

$$(I\neg) \text{ } Cn(\{G, A\}) = \text{FOR se, e somente se, } \neg A \in Cn(G),$$

Isto resulta no cálculo intuicionista (LI). Este cálculo é definido por RD, (A1) – (A10) acima.

Pode-se enfraquecer as bases axiomáticas de LI retirando os axiomas de negação, ao passo que se define *cálculos positivos* como os que satisfazem os axiomas positivos de Tarski, e *cálculos minimais* como cálculos positivos satisfazendo (A9).

O cálculo minimal axiomático chamado de lógica minimal de Johánsson (LMJ) teria as seguintes condições no estilo de Tarski:

$$(1J\neg) \neg B \in Cn(G) \text{ se, e somente se, } \neg A \in Cn(\{G, A\})$$

$$(2J\neg) \neg A \in Cn(\{B \& \neg B\}).$$

Também podemos considerar duas teses negativas básicas:

(CM) Contraposição minimal:

$$\neg B \rightarrow \neg A \in Cn(\{G, A \rightarrow B\})$$

(RM) Redução minimal:

$$\neg A \in Cn(\{G, A \rightarrow \neg A\})$$

Seja LP (lógica positiva) definida como RD, (A1) – (A8). Podemos definir uma sublógica própria da lógica minimal de Johánsson como segue:

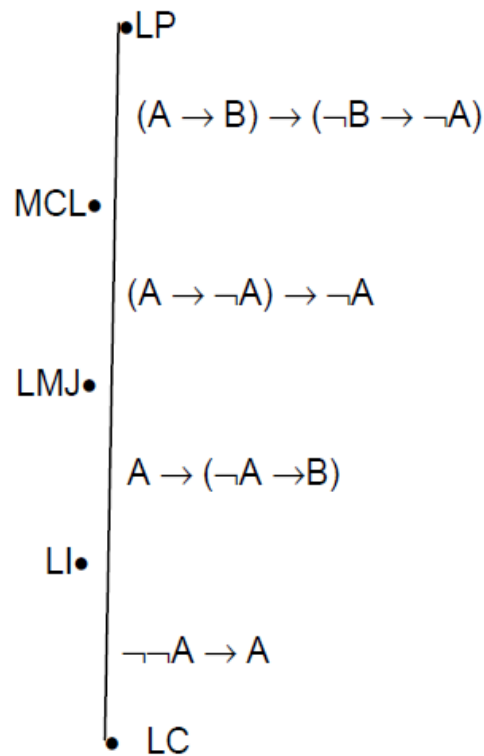
$$\text{MCL} = \text{LP} + (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

Então, temos o seguinte resultado:

$$\text{MCL} + (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A = \text{LMJ}$$

$$\text{LMJ} + A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) = \text{LI}.$$

Isto pode ser visualizado pelo esquema:



Como é bem conhecido, o signo de inconsistência da lógica clássica, $A \ \& \ \neg A$, também é signo de inconsistência na lógica intuicionista, mas não o é na lógica minimal de Johánsson. Neste caso, $A \ \& \ \neg A$ trivializa somente a parte negativa do cálculo.

Ora, de modo análogo, podemos encontrar a rota para a construção do cálculo paraconsistente C1, substituindo o signo de inconsistência, $A \ \& \ \neg A$, por $A \ \& \ \neg A^\circ$ ou por $A \ \& \ \neg^*A$, agora chamado signo de trivialidade (podemos definir $\neg(B \ \& \ \neg B)$ por B° e $\neg B \ \& \ B^\circ$ por $\neg^*B$).

Então, a condição de Tarski para a negação é como segue:

$$(P\neg) \ Cn(\{G, \neg A\}) = \text{FOR se, e somente se, } A \ \& \ \neg A^\circ \in Cn(G)$$

ou

$$Cn(\{G, \neg A\}) = \text{FOR se, e somente se, } A \in Cn(\{G, A^\circ\}).$$

Com esta modificação, podemos obter das condições de Tarski os axiomas a seguir:

$$(RD) \ A, A \rightarrow B / B$$

$$(A1) - (A8) \text{ tal como no cálculo clássico}$$

$$(A9) B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

$$(A10) A^\circ \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$$

$$(A11) A \vee \neg A.$$

Se acrescentarmos aos axiomas acima os esquemas procedentes:

$$(A12) A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \& B)^\circ$$

$$(A13) A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \vee B)^\circ$$

$$(A14) A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ$$

Obtém-se daí o cálculo C_1 de da Costa. Percebe-se que $(A10) A^\circ \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ é equivalente, em C, a $\neg\neg A \rightarrow A$, que foi um axioma na formulação original.

Daqui, pode-se então construir C_1 do cálculo positivo tomando $A \& \neg A$ & A° como signo de trivialidade, ou seja, assumindo-se que $(P\neg)$. Podemos formular:

(CM $^\circ$) Contraposição minimal paraconsistente:

$$\neg B \rightarrow \neg A \in Cn(\{G, A \rightarrow B, B^\circ\}) \text{ ou}$$

$$\neg A \in Cn(\{G, A \rightarrow B, B^\circ, \neg B\}).$$

Obtemos a seguinte lógica:

$$(MCL)^\circ = PL + B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)).$$

Ao juntar-se a redução minimal (RM) a $(MCL)^\circ$, obtemos *Reductio ad Absurdum* Paraconsistente

((A9) de C_1) e chama-se ao sistema obtido $(LRA1)^\circ$.

O próximo passo consiste em fortalecer tal lógica regularizando a composição de fórmulas “bem comportadas”, isto é, o conjunto de fórmulas que obedecem ao princípio de não-contradição. Para este fim, adicionamos as seguintes fórmulas:

$$A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \& B)^\circ$$

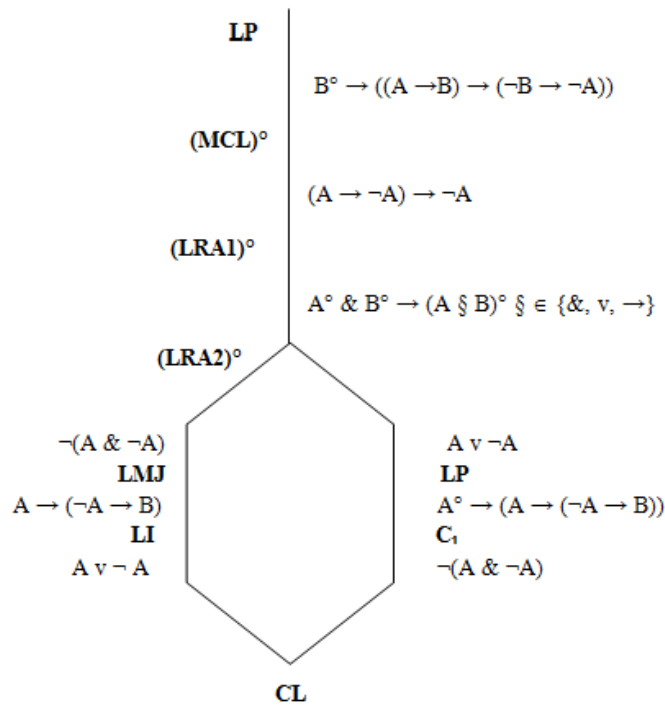
$$A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \vee B)^\circ$$

$$A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ$$

$$A^\circ \rightarrow (\neg A)^\circ.$$

Então obtemos um novo sistema chamado (LRA2)^o.

Agora temos uma escolha: o princípio de não-contradição $\neg(A \ \& \ \neg A)$ deve ser um esquema válido; sua adição em (LRA2)^o dá-nos a lógica minimal de Johánsson (LMJ). Se a esta adiciona-se a Lei de Duns Scotus, obtém-se a lógica intuicionista (LI). Claramente, se adicionar-se a lei do terceiro excluído a LI, obteremos a lógica clássica. Mas pode-se fortalecer o cálculo (LRA2)^o em uma outra direção, assumindo-se a lei do terceiro excluído no lugar de seu “dual”, o princípio de não contradição. Com tal procedimento obtém-se, pois o que chamamos lógica paraconsistente minimal (LPM). Se acrescentarmos ao sistema (LPM) a fórmula $A^o \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ (ou, alternativamente, $\neg\neg A \rightarrow A$), obtém-se como resultado o cálculo C₁. Como é bem conhecido C₁ mais $\neg(A \ \& \ \neg A)$ dá-nos a lógica clássica (LC). Então temos o seguinte quadro:



Como observamos anteriormente, na lógica minimal de Johánsson, nós não temos signo de inconsistência. Para o que importa, uma contradição em MJL trivializa apenas a parte negativa do cálculo, isto é,

$\vdash_{LMJ} A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$, mas

$\not\vdash_{LMJ} A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

De modo análogo, na lógica minimal paraconsistente (LMP), tem-se:

$\vdash_{\text{LMP}} A^\circ \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$, mas

$\nvdash_{\text{LMP}} A^\circ \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$.

Isto significa que, em LMP, nós não temos signo de trivialidade; uma contradição,

$A \ \& \ \neg A \ \& \ A^\circ$,

trivializa somente a parte negativa do cálculo.

Como foi observado, a condição (P $\neg$) caracteriza um cálculo C, que é mais fraco que C_1 . Se se apagar deste cálculo (A9) e substituir-se (A10) por $\neg\neg A \rightarrow A$, obtém-se o cálculo C_w de da Costa; então, afirmam os autores, o cálculo C está situado entre C_1 e C_w .

Com o apresentado, os autores mostram que o cálculo C_1 de da Costa tem uma construção muito “natural” a partir da Lógica Positiva, de um modo que permite considerá-lo “dual” da construção do Cálculo Intuicionista.

1.3 Um método de dedução natural para C_1

Além dos resultados obtidos por Alves e Queiroz, é, ainda, importante mostrar que há outros trabalhos sendo desenvolvidos, é o caso, por exemplo, da construção de métodos de dedução natural para lógica paraconsistente⁴³. Vejamos o método apresentado por Castro⁴⁴.

Em sua dissertação de mestrado Castro apresenta um método de dedução natural para ser aplicado às lógicas proposicionais paraconsistentes. No que segue apresentaremos o método desenvolvido para C_1 .

Um método de dedução natural consiste em um sistema lógico constituído exclusivamente por regras de dedução(ou esquemas de dedução), dispensando, os esquemas de axiomas de C_1 anteriormente apresentados.

Castro adota um sistema composto de treze regras de dedução, e informa que tais regras permitirão deduzir todas as fórmulas dedutíveis no sistema axiomático C_1 .

⁴³ Um método de dedução natural recebe esse nome devido à proximidade com o raciocínio habitual das pessoas no cotidiano, isso justifica por si a apresentação desse método em um trabalho que visa discutir a aplicabilidade do instrumental discutido em filosofia.

⁴⁴ CASTRO, Milton Augustinis de. *O método de dedução natural aplicado às lógicas proposicionais paraconsistentes Cn*. Dissertação de Mestrado, Campinas, 1998.

Ele chama o sistema em discussão de DNC_1 , que será o primeiro de uma série de sistemas para as lógicas proposicionais paraconsistentes. Este será o único sistema que apresentaremos nesse trabalho⁴⁵.

Quem está habituado a sistemas de dedução natural para o cálculo proposicional clássico perceberá certas diferenças, sendo a primeira quanto ao número de regras primitivas ou básicas, em DNC_1 há mais regras. Há também outras diferenças que merecem destaque, a principal é que certas regras, caso da *reductio ad absurdum*(RAD), mas não somente desta, exigem a imposição de certas restrições. Para se aplicar RAD em DNC_1 é preciso que já se tenha uma determinada fórmula anterior à aplicação, o que não ocorre na lógica clássica.

As regras de formação de DNC_1 compartilham o alfabeto de C_1 e são as mesmas que as daquele sistema, a saber:

- (1) Toda variável proposicional é uma fórmula;
- (2) Se A é uma fórmula, $\neg A$ é uma fórmula;
- (3) Se A e B são fórmulas, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ são fórmulas,
- (4) As fórmulas são obtidas apenas por (1)-(3).

A estrutura de uma prova em DNC_1 é de provas subordinadas, que tem a vantagem, de acordo com o autor, de tratar simultaneamente com várias deduções subordinadas, permitindo escrever várias deduções como parte uma da outra. Veremos alguns exemplos abaixo.

Vejamos as regras de DNC_1 .

1. Regra de transporte:

Repetição

- | | | |
|----|----|--------------------------------|
| 1. | A1 | Premissa |
| 2. | A2 | Premissa |
| . | . | |
| n | An | Premissa |
| . | . | |
| k | Ai | (R, i), onde $1 \leq i \leq n$ |

⁴⁵ Para os demais conferir CASTRO, 1998.

2. Regras de introdução

Introdução da implicação ($I \rightarrow$)

1. $A1$ Premissa
2. $A2$ Premissa
.
.
n A_n Premissa
.
.
k | [B] Premissa provisória
.
 | .
s | C
s+1 $B \rightarrow C$ k-s, $I \rightarrow$

Introdução da conjunção ($I - \&$)

1. $A1$ Premissa
2. $A2$ Premissa
.
.
n A_n Premissa
.
.
k B
.
.
s C
.
.
u $B \& C$ k, s, $I - \&$

Introdução da disjunção ($I - \vee$)

1. A1 Premissa
 2. A2 Premissa
 . .
 n An Premissa
 . .
 k B
 . .
 s B $\vee$ C k, I - v

Introdução restringida da negação [ou reductio ad absurdum] (I - $\neg$ (rest))

1. A1 Premissa
 2. A2 Premissa
 . .
 n An Premissa
 . .
 p B⁰
 . .
 k | [C] premissa provisória
 . | .
 r | B
 . | .
 t | $\neg$ B
 u $\neg$ C p, k-t, I - $\neg$ (rest)

Distribuição da negação na conjunção (DN&)

1. A1 Premissa

2. A2 Premissa

. .

n An Premissa

. .

p $\neg(A \& B)$

. .

r $\neg A \vee \neg B$ p. DN&

Distribuição restringida da negação na disjunção (DN $\vee$ (rest))

1. A1 Premissa

2. A2 Premissa

. .

n An Premissa

. .

p A^0

. .

r B^0

. .

t $\neg(A \vee B)$

. .

u $\neg A \& \neg B$ p, r, t, DN $\vee$ (rest)

Distribuição restringida da negação na implicação (DN $\rightarrow$ (rest))

1. A1 Premissa

2. A2 Premissa

. .
 n A_n Premissa

 . .
 p A^0

 . .
 r B^0

 . .
 t $\neg(A \rightarrow B)$

 . .
 u $A \ \& \ \neg B$ p, r, t DN $\rightarrow$ (rest)

Dilema não-contrutivo (DNc)

1. A_1 Premissa
 2. A_2 Premissa

 . .
 n A_n Premissa

 . .
 k | [B] premissa provisória
 . | .
 r | D
 s | [$\neg B$] premissa provisória
 . | .
 u | D

 v D k-r, s-u, DNc

3. Regras da eliminação

Elimininação da implicação ($E \rightarrow$)

1. A1 Premissa
2. A2 Premissa
- . .
- n An Premissa
- . .
- k $B \rightarrow C$
- . .
- p B
- . .
- r C p,q, $E \rightarrow$

Eliminação da conjunção ($E - \&$)

1. A1 Premissa
2. A2 Premissa
- . .
- n An Premissa
- . .
- k $B \& C$
- . .
- p B (ou C) p, E -&

Eliminação da disjunção ($E - \vee$)

1. A1 Premissa
2. A2 Premissa
- . .

n	$A \rightarrow n$	Premissa
.	.	
o	$B \vee C$	
.	.	
k		[B] premissa provisória
.		.
r		D
s		[C] premissa provisória
.		.
u		D
v		D o, k-r, s-u, E - v

Eliminação da dupla negação (E $\neg\neg$)

1.	$A1$	Premissa
2.	$A2$	Premissa
.	.	
n	$A \rightarrow n$	Premissa
.	.	
k	$\neg\neg B$	
.	.	
q	B	p, E $\neg\neg$

Após apresentar as regras tem-se que mostrar a equivalência entre tal sistema e o sistema C_1 , para isso, Castro demonstra que todo axioma de C_1 é dedutível em DNC_1 e que toda regra de DNC_1 é dedutível no sistema axiomático de C_1 . Seguem

abaixo algumas demonstrações da primeira parte, ou seja, que os axiomas de C_1 são dedutíveis em DNC_1 ⁴⁶.

Axioma 1 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

- | | |
|--------------------------------------|---------------------|
| 1. A | Premissa provisória |
| 2. B | Premissa provisória |
| 3. A | 1, repetição |
| 4. $B \rightarrow A$ | 2,3 $I \rightarrow$ |
| 5. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ | 1-4 $I \rightarrow$ |

Axioma 2 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $A \rightarrow B$ | Premissa provisória |
| 2. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | Premissa provisória |
| 3. A | Premissa provisória |
| 4. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | 2, repetição |
| 5. $B \rightarrow C$ | 3,4, $E \rightarrow$ |
| 6. $A \rightarrow B$ | 1, repetição |
| 7. B | 3,6, $E \rightarrow$ |
| 8. C | 5,7, $E \rightarrow$ |
| 9. $A \rightarrow C$ | 3-8 $I \rightarrow$ |
| 10. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | 2-9 $I \rightarrow$ |
| 11. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | 1-10 $I \rightarrow$ |

Axioma 3 $\vdash A \& B \rightarrow A$

- | | |
|-------------|---------------------|
| 1. $A \& B$ | Premissa provisória |
|-------------|---------------------|

⁴⁶ Para ver a segunda parte, cf CASTRO, 1998.

2. A 1, E-&
3. $A \& B \rightarrow A$ 1-2 I $\rightarrow$

Axioma 5 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$

1. A Premissa provisória
2. B Premissa provisória
3. A 1, repetição
4. $A \& B$ 2, 3, I - &
5. $B \rightarrow A \& B$ 2-4 I $\rightarrow$
6. $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$ 1-5 I $\rightarrow$

Axioma 6 $\vdash A \rightarrow A \vee B$

1. A Premissa provisória
2. $A \vee B$ 1, Iv
3. $A \rightarrow A \vee B$ 1,2 I $\rightarrow$

Axioma 11 $\vdash B^0 \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

1. B^0 Premissa provisória
2. $A \rightarrow B$ Premissa provisória
3. $A \rightarrow \neg B$ Premissa provisória
4. A Premissa provisória
5. $A \rightarrow B$ 2, repetição
6. B 4, 5, E $\rightarrow$
7. $A \rightarrow \neg B$ 3, repetição
8. $\neg B$ 4, 7, E $\rightarrow$
9. $\neg A$ 1,4-8, I - $\neg$ (rest)
10. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ 3-10, I $\rightarrow$

11. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ 2-11, I $\rightarrow$
12. $B^0 \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$ 1-12, I $\rightarrow$

Axioma 12 $\vdash A^0 \& B^0 \rightarrow (A \& B)^0$

1.	$A^0 \& B^0$	Premissa provisória
2.	A^0	1, E - &
3.	B^0	1, E - &
4.	$\neg(A \& B)^0$	Premissa provisória
5.	$\neg\neg((A \& B) \& \neg(A \& B))$	4, Definição 1
6.	$(A \& B) \& \neg(A \& B)$	5, E $\neg\neg$
7.	$A \& B$	6, E - &
8.	A	7, E - &
9.	B	7, E - &
10.	$\neg(A \& B)$	6, E - &
11.	$\neg A \vee \neg B$	10, DN&
12.	$\neg A$	Premissa provisória
13.	$\neg A$	12, repetição
14.	$\neg B$	Premissa provisória
15.	A	Premissa provisória
16.	B	9, repetição
17.	$\neg B$	14, repetição
18.	$\neg A$	3, 15-17, I - $\neg$ (rest)
19.	$\neg A$	11, 12-13, 14-18, Ev
20.	$\neg\neg(A \& B)^0$	2, 4-19, I - $\neg$ (rest)
21.	$(A \& B)^0$	20, E $\neg\neg$

$$22. A^0 \& B^0 \rightarrow (A \& B)^0$$

1-21, I $\rightarrow$

Axioma 13 $\vdash A^0 \& B^0 \rightarrow (A \vee B)^0$

$$1. A^0 \& B^0$$

Premissa provisória

$$2. A^0$$

1, E - &

$$3. B^0$$

1, E - &

$$4. \neg(A \vee B)^0$$

Premissa provisória

$$5. \neg\neg((A \vee B) \& \neg(A \vee B))$$

4, Definição 1

$$6. (A \vee B) \& \neg(A \vee B)$$

5, E $\neg\neg$

$$7. \neg A \vee B$$

6, E - &

$$8. A^0 \& B^0$$

1, repetição

$$9. \neg A \vee B$$

7, repetição

$$10. \neg A \& \neg B$$

8,9, DN $\vee$ (rest)

$$11. \neg A$$

10, E - &

$$12. \neg B$$

10, E - &

$$13. A \vee B$$

6, E - &

$$14. A$$

Premissa provisória

$$15. A$$

14, repetição

$$16. B$$

Premissa provisória

$$17. \neg A$$

Premissa provisória

$$18. B$$

16, repetição

$$19. \neg B$$

12, repetição

$$20. \neg\neg A$$

3, 17-19, I - $\neg$ (rest)

$$21. A$$

20, E $\neg\neg$

$$22. A$$

13, 14-15, 16-21, E - $\vee$

$$23. \neg A$$

11, repetição

- | | |
|---|----------------------------|
| 24. $\neg\neg(A \vee B)^0$ | 2, 4-23, I - $\neg$ (rest) |
| 25. $(A \vee B)^0$ | 24, E - $\neg\neg$ |
| 26. $A^0 \& B^0 \rightarrow (A \vee B)^0$ | 1 - 25, I $\rightarrow$ |

Axioma 14 $\vdash A^0 \& B^0 \rightarrow (A \rightarrow B)^0$

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $A^0 \& B^0$ | Premissa provisória |
| 2. A^0 | 1, E - $\&$ |
| 3. B^0 | 1, E - $\&$ |
| 4. $\neg(A \rightarrow B)^0$ | Premissa provisória |
| 5. $\neg\neg((A \rightarrow B) \& \neg(A \rightarrow B))$ | 4, definição 1 |
| 6. $(A \rightarrow B) \& \neg(A \rightarrow B)$ | 5, E $\neg\neg$ |
| 7. $\neg(A \rightarrow B)$ | 6, E - $\&$ |
| 8. $A^0 \& B^0$ | 1, repetição |
| 9. $A \& \neg B$ | 7, 8, DN $\rightarrow$ (rest) |
| 10. A | 9, E - $\&$ |
| 11. $\neg A$ | 9, E - $\&$ |
| 12. $A \rightarrow B$ | 6, E - $\&$ |
| 13. A | Premissa provisória |
| 14. $A \rightarrow B$ | 12, repetição |
| 15. B | 13, 14, E $\rightarrow$ |
| 16. $\neg B$ | 11, repetição |
| 17. $\neg A$ | 3, 13-16, I - $\neg$ (rest) |
| 18. $\neg\neg(A \rightarrow B)^0$ | 2, 4-17, I - $\neg$ (rest) |
| 19. $(A \rightarrow B)^0$ | 18, E $\neg\neg$ |
| 20. $A^0 \& B^0 \rightarrow (A \rightarrow B)^0$ | 1-19, I $\rightarrow$ |

Vimos os aspectos históricos e técnicos da lógica paraconsistente nos capítulos precedentes, conhecendo essa lógica desde o trabalho de seus precursores até um sistema de dedução natural para a mesma, mais adiante discutiremos sua aplicação na solução de problemas filosóficos envolvendo inconsistências.

Capítulo III – A teoria da quase-verdade

Nesse capítulo iremos abordar a formalização do conceito de quase-verdade, definido abaixo, elaborada por da Costa em conjunto com seus colaboradores filósofos, lógicos e matemáticos (Mikemberg, Chuaqui⁴⁷, French⁴⁸, Bueno⁴⁹), bem como alguns desenvolvimentos feitos a partir do seu trabalho (Krause⁵⁰, Hifume⁵¹).

Dada uma teoria qualquer T, que é elaborada para dar conta de certo domínio D do conhecimento, para que T seja quase-verdadeira em D é preciso que ‘salve as aparências’ nesse domínio, ou seja, estabeleça um modelo a partir do qual seja possível elaborar previsões que estejam em acordo com os enunciados básicos de D, que são assumidos como verdadeiros estrito senso.

A quase-verdade envolve tanto uma generalização da definição de verdade de Tarki quanto estabelece de certa forma uma teoria de modelos paraconsistente, como veremos abaixo.

Há, pelo menos, três teorias da verdade que possuem relevância para o filósofo que se ocupa da Lógica ou da Teoria da Ciência: 1ª) a Teoria da Correspondência, particularmente na forma que lhe conferiu A. Tarski; 2ª) a Teoria da Coerência; 3ª) a Teoria Pragmática.

Segundo a Teoria da Verdade como Correspondência, o conceito de verdade relaciona proposições, juízos ou sentenças a estados de coisas no mundo; e uma proposição, um juízo ou uma sentença é verdadeiro se, e somente se, reflete a realidade, se corresponde aos fatos, sendo fatos as coisas que efetivamente ocorrem. Em outras palavras, uma proposição é verdadeira se ela corresponde à realidade, se o que ela afirma de fato é.

⁴⁷ MIKENBERG, J. ; COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R. . Pragmatic Truth and Approximation to Truth. *Journal of Symbolic Logic*, v. 51, n. 51, p. 201-221, 1986.

⁴⁸ COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . *Science and Partial Truth*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2003

⁴⁹ BUENO, O.; COSTA, N. C. A. . *Quasi-truth, paraconsistency, and the foundations of science. Synthese (Dordrecht)*, v. 154, p. 383-399, 2007.

⁵⁰ KRAUSE, Décio. *Newton da Costa e a filosofia da quase-verdade*. **Principia**, v. 13(2), p. 105-28, 2009. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~principi/p132-1.pdf>

⁵¹ HIFUME, Carlos. *Uma teoria da verdade pragmática: a quase-verdade de Newton da Costa*. Dissertação de Mestrado: Campinas, 2003.

Aristóteles, no Livro Gama da *Metafísica*, define a verdade da seguinte maneira: "Dizer daquilo que é, que é, e daquilo que não é, que não é, é verdadeiro; dizer daquilo que não é, que é, e daquilo que é, que não é, é falso".⁵²

Na Idade Média, os filósofos Escolásticos afirmavam que verdade é a adequação entre o pensamento e a realidade. As afirmações anteriores sobre a correspondência da verdade são válidas, no sentido de que são usadas, entretanto, não podem servir de base para um tratamento lógico-matemático do conceito de verdade como correspondência.

O grande mérito de Tarski foi ter desenvolvido uma formulação matematicamente tratável da Teoria da Correspondência. Com isso, revolucionou a lógica e lançou as bases de uma Teoria Clássica de Modelos, uma das partes mais importantes dos estudos em lógica atualmente. Tal teoria é relevante, não somente pelos seus resultados teóricos, como, também, por suas aplicações em Matemática, nas Ciências Empíricas e em Tecnologia.

A idéia central de Tarski foi a de considerar o conceito de verdade como consistindo em uma relação entre sentenças de uma linguagem e a estrutura na qual esta linguagem é interpretada. Não há sentido falar de verdade ou de falsidade de uma sentença a não ser que se saiba a que linguagem essa sentença pertence e como a linguagem é interpretada.

A definição de Tarski pressupõe que uma linguagem de base possui uma estrutura bem definida, pois ela deve ser tratada do ponto de vista matemático. Portanto, tal definição se aplica principalmente às linguagens artificiais, simbólicas, da lógica e da matemática, ou seja, a linguagens formalizadas.

A Teoria de Tarski⁵³ é demasiadamente técnica, apresentaremos abaixo apenas uma breve introdução. Não obstante, como ela faz parte da base da lógica tradicional, pode ser encontrada em bons livros de introdução à lógica ou a teorias da verdade⁵⁴. Destacamos que conforme a linguagem estudada, a definição correspondente de verdade possui características peculiares.

No entanto, lembramos que o conceito de verdade, tal como é entendido por Tarski, deve satisfazer o chamado esquema T, que, para um caso particular, é o seguinte:

⁵² ARISTÓTELES. *Metafísica*. Porto Alegre: Editora Globo, 1969. 1011b25, p. 107.

⁵³ TARSKI, Alfred. *A concepção Semântica da Verdade*. São Paulo: Unesp, 2007.

⁵⁴ KIRKHAM, Richard L. *Teorias da Verdade*. São Leopoldo: Unisinos, 2003.

T: "A grama é verde" é verdadeira se, e somente se, a grama é verde.

Dizendo de outro modo, o esquema T, que a definição de verdade de Tarski satisfaz, garante que a verdade é uma conexão entre linguagem e realidade (na Teoria Abstrata de Modelos⁵⁵ diz-se que é uma relação entre linguagens artificiais e certas estruturas matemáticas que se chamam modelos).

A Teoria da Coerência não considera a verdade como uma relação entre linguagem ou pensamento e realidade. Pelo contrário, concebe-a como sendo uma propriedade eminentemente lingüística, de caráter puramente sintático; diversos autores, de uma maneira ou outra, defendem essa teoria, entre eles pode-se citar G. Hegel, B. Bosanquet, F. Bradley e H. Joachim bem como alguns dos membros do Círculo de Viena, tais como O. Neurath e H. Hahn.

Segundo os adeptos da Teoria da Coerência, não há como comparar uma sentença à realidade, para sabermos se é verdadeira ou falsa. Com efeito, a realidade nos afeta e por meio de nossa experiência podemos testar uma sentença; entretanto, como nossa experiência se reduz a sentenças de um certo tipo, segue-se disso que só se pode comparar sentenças com outras sentenças.

O cientista a partir de um conjunto de sentenças que são aceitas como verdadeiras, as concilia com outras sentenças que devem ser coerentes (não encerrar contradições, por exemplo) e aspirar à maximalidade: isto é, o cientista sempre procura receber e formar conjuntos coerentes maximais de sentenças.

Sempre que uma parte de nosso sistema de crenças não funciona bem, é preciso modificá-lo, realizando a comparação de sentenças entre si, de modo a se obter um novo sistema que seja coerente e, se possível, maximal.

Assim, Neurath diz que “somos como marinheiros obrigados a reparar o seu barco no alto mar, sem qualquer possibilidade de desmontar todas as peças e de o reconstruir em doca seca”⁵⁶. A Teoria da Coerência é muito interessante e hoje tanto a lógica como a matemática possuem meios para tratá-la de uma forma conveniente.

Por fim, chegamos à teoria pragmática da verdade na qual nos deteremos um pouco mais, por ter se convertido numa das mais importantes concepções de verdade,

⁵⁵ Mais sobre teoria abstrata de modelos pode ser encontrado em livros sobre teorias de modelos ou em boas introduções à lógica.

⁵⁶ NEURATH, Otto. *Enunciados Protoculares*, in Arte de Pensar-11, Aires Almeida e outros, Didáctica Editora, 2004.

com significativas aplicações à lógica e a matemática e, também, à filosofia da ciência e mesmo a ciência da informação.

A concepção pragmática da verdade se deve basicamente a C. S. Peirce, filósofo americano que é um dentre os grandes lógicos do século XIX, viveu até o início do século passado, é o criador do pragmatismo, ou pragmaticismo como o chamava para se distinguir do pragmatismo de James, por exemplo.

De acordo com Peirce:

considere que efeitos práticos concebemos que o objeto de nossa concepção tem. Então, nossa concepção desses efeitos constitui o conteúdo total de nossa concepção desse objeto.⁵⁷

A afirmação de Peirce pode ser claramente interpretada como significando que a verdade de uma proposição depende de seus efeitos práticos, verdade, para Peirce, é verdade pragmática, supondo-se, naturalmente, que esses efeitos sejam aceitos como verdadeiros, ou falsos, no sentido comum da palavra verdade.

Observa-se no trabalho conjunto de Mikenberg, da Costa e Chuaqui, que tais efeitos podem ser formulados como certas proposições básicas e, portanto, uma asserção ou teoria pode ser tida como quase-verdadeira se suas conseqüências básicas são verdadeiras, no sentido da Teoria da Correspondência. Para eles, esta interpretação do *dictum* de Peirce constitui a essência da teoria da verdade de Peirce.

Assim, a quase-verdade é fundada em suas conseqüências básicas ou efeitos práticos, e não se mostra completamente independente no sentido de correspondência com a realidade. Como afirmam da Costa e Chuaqui:

Ao contrário, um enunciado — em geral, um enunciado teórico — é pragmaticamente verdadeiro somente quando os enunciados básicos que ele implica são verdadeiros no sentido da Teoria da Correspondência da Verdade. Mas, ainda, uma asserção básica é verdadeira, do ponto de vista pragmático, se, e somente se, ela é verdadeira de acordo com a Teoria da

⁵⁷ Citado por ABE, Jair M. *Verdade Pragmática*. **Estudos Avançados** vol.5 N.12 São Paulo May/Aug. 1991. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?pid=s0103-40141991000200010&script=sci_arttext

Correspondência. Assim, a verdade pragmática não é inteiramente arbitrária.⁵⁸

Acrescentam ainda que: "Em geral, pode-se manter que em Ciência sempre obtemos verdade pragmática, embora a verdade pragmática assim obtida se aproxime da verdade" (no sentido da Teoria da Correspondência).

Tal idéia pode ser tornada rigorosa por meio da definição de quase-verdade. E esta parece ser, também, a posição de Peirce, que afirma:

Diferentes pessoas podem começar com os mais antagônicos pontos de vista, mas o progresso da investigação acaba por levá-los, forçosamente, para fora de si mesmos, à única e mesma conclusão. Essa atividade do pensamento por meio da qual somos levados, não aonde desejamos, mas a uma finalidade pré-fixada, é semelhante à questão do destino. Nenhuma modificação do ponto de vista inicial, nenhuma mudança natural de postura, pode fazer com que um homem escape da crença predestinada. Esta grande esperança é englobada na concepção da verdade e da realidade.

Os autores em questão desenvolvem as idéias anteriores da mesma forma que Tarski formalizou a Teoria da Correspondência. Antes, porém, de mostrarmos como se efetua isto, diremos alguma coisa sobre as concepções de James.

James reformula a definição de Peirce, levando em conta, especialmente, questões não-científicas. Em particular, procura estabelecer uma teoria da verdade pragmática que justifique as crenças religiosas. Falando sem rigor, a crença em Deus, por exemplo, seria pragmaticamente verdadeira se suas conseqüências, na vida de todos os dias, fossem interessantes, agradáveis e convenientes para a pessoa que crê.

Autores como Kirkham sustentam que a teoria de James é menos rigorosa que a de Peirce e que carece de valor científico, mas embora a teoria de William James divirja da de Peirce, e muitas de suas teses não tenham sido aceitas por este, seria interessante proceder-se uma formalização dos aspectos mais salientes da posição de James.

⁵⁸ Abe, 1991.

Mikenberg, da Costa e Chuaqui nos apresentam, como já dissemos acima, uma matematização de uma concepção pragmática de verdade que eles denominaram de quase-verdade. Embora não encarem sua definição como exegese da posição peirciana, a definição dada por eles capta, de modo muito relevante, aspectos significativos da doutrina da verdade de Peirce.

Falando de maneira informal, de modo sucinto e sem o simbolismo e as técnicas necessárias para sua formulação precisa, vamos fazer uma apresentação inicial da definição de Mikenberg, da Costa e Chuaqui.

Mikenberg, da Costa e Chuaqui propõem modificar a noção tarskiana de "uma sentença *s* é verdadeira em uma interpretação *i*" de maneira tal que a noção resultante, matematicamente tratada, seja fiel a uma das noções pragmáticas da verdade.

De acordo com o artigo⁵⁹, o contexto completo para o uso apropriado das frases "pragmaticamente verdadeiro" e "pragmaticamente falso" vai além do contexto acima do uso apropriado, clássico, de "verdadeiro" e "falso" sob dois aspectos: (a) a interpretação *i* é parcial (não necessariamente total) e (b) existe relativização a um conjunto *P* de sentenças "estabelecidas". Em consequência, a noção a ser definida é expressa por "uma sentença *s* é pragmaticamente verdadeira em uma interpretação parcial *i* relativa a um conjunto *P* de sentenças". A condição necessária e suficiente proposta como definitiva é "*s* e as sentenças em *P* são simultaneamente satisfeitas por uma extensão total de *i*". Grosso modo, de acordo com o artigo, se uma sentença é quase-verdadeira, "ela salva as aparências", como visto na definição apresentada no início desse capítulo.

Os autores constroem um sistema formal de dedução à la Gentzen para acompanhar as semânticas acima. Eles obtêm um teorema de completude e alguns outros resultados matemáticos, incluindo uma demonstração de um teorema sobre extensões de grupos semi-ordenados, que fora enunciado, sem demonstração, por Tarski. Há, ainda, aplicações a problemas de filosofia da ciência, por exemplo o de explicar a idéia de uma teoria anterior ser uma "aproximação" de uma posterior, que seja, entretanto, mais adequada.

⁵⁹ MIKENBERG, J. ; COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R. . Pragmatic Truth and Approximation to Truth. *Journal of Symbolic Logic*, v. 51, n. 51, p. 201-221, 1986

O artigo não busca mostrar que sua definição é fiel a uma ideia endossada por um filósofo pragmático, mas apenas mostrar que ideias matematicamente rigorosas, refletindo o pensamento pragmático, possuem conseqüências interessantes, bem como construir uma extensão pragmática da Teoria Clássica de Modelos.

Mikenberg, da Costa e Chuaqui, seguindo Tarski, sublinham que a definição de de quase-verdade, como eles a conceberam, só pode ser feita com relação a uma determinada linguagem, interpretada em uma estrutura conveniente. Uma das grandes novidades da concepção apresentada reside no fato de que as estruturas nas quais a linguagem é interpretada são estruturas parciais.

Na teoria da verdade de Tarski, as linguagens são interpretadas em estruturas que se compõem de um conjunto A , denominado universo da estrutura e de certo conjunto R de relações, envolvendo objetos de A ; assim, se tivermos uma relação binária, em R , então, dados dois objetos x e y quaisquer de A , eles estão ou não ligados por essa relação. Essas relações são sempre definidas para todos os objetos de A . Na teoria de Mickemberg, da Costa e Chuaqui isso não ocorre, pelo seguinte: os objetos x e y de A podem estar ligados por uma relação de R , podem não estar ligados por essa relação ou, finalmente, pode não estar definido se eles possuem ou não a relação entre si.

A partir de estruturas parciais e de conjuntos de certas sentenças que expressam proposições de nossa experiência, verdadeiras ou falsas, de acordo com a teoria da correspondência, e de sentenças mais complexas, expressando proposições anteriormente aceitas, define-se o conceito de quase-verdade de uma sentença por um processo parecido com o tarskiano e que nele se apóia.

O resultado, por sua vez, é o que segue: uma sentença s é quase-verdadeira num determinado domínio do conhecimento, ou em uma estrutura, se tudo se passa nessa estrutura ou domínio, como se s fosse verdadeira de acordo com a teoria da correspondência. Ou, o que é a mesma coisa, uma sentença é quase-verdadeira num campo de conhecimento se, e somente se, salvar as aparências desse campo, ou seja, se funciona. A definição de quase-verdade generaliza a definição de Tarski e seus autores constroem uma teoria generalizada de modelos que encontrou várias aplicações em lógica e Matemática, por exemplo, a formalização de certas teorias físicas elaboradas

por da Costa e Bueno ou da Costa e French que são aplicações lógicas da quase-verdade⁶⁰.

Para Corcoran

Filosofias Pragmáticas enfatizam a prioridade da experiência e da ação sobre o ser e o pensamento. Oponentes do pragmatismo são algumas vezes chamados de 'intelectualistas'. Característica das Filosofias Pragmáticas é o fato delas manterem pontos de vista claros sobre três questões: (1) significado, (2) verdade e (3) conhecimento. Devido a extensas variações entre tais filosofias, é simplista considerar qualquer combinação destes pontos de vista como típica (veja A. O. Lovejoy, J. Philos. 5 (1908), nº 1, 5-12; ibid. 5 (1908), nº 2, 29-39). Todavia, a seguinte combinação pode ser tida como um exemplo. (1) O significado de uma proposição é identificado com seu significado experimental e prático, i.e., com a totalidade das experiências possíveis que ela prediz. (2) A verdade de uma proposição consiste na realização no decurso do tempo (passado, presente e futuro) de seu sentido. (3) A crença na verdade de uma proposição é garantida pelo grau com que ela tem sido testada na prática e se mostrado satisfatória (pela pessoa ou comunidade que possui a crença).⁶¹

Tendo em vista o exposto anteriormente e o sumário de Corcoran acima, percebe-se que a definição de quase-verdade satisfaz os principais requisitos a que uma definição de verdade pragmática parece condicionada. De acordo com Abe, é, especialmente notável, o fato de que a quase-verdade é um processo de se salvar as aparências, quando não se conhece a verdade segundo a teoria da correspondência.

Buscando uma explicação um pouco mais rigorosa temos que a investigação detalhada de certo domínio do conhecimento envolve, em geral, a elaboração e o emprego de certas estruturas matemáticas. Essas estruturas podem ser caracterizadas de diversas maneiras, proporcionando, por assim dizer, diferentes formatos de aplicação.

⁶⁰ Ver COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . Science and Partial Truth. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2003, ou, BUENO, O.; COSTA, N. C. A. . *Quasi-truth, paraconsistency, and the foundations of science*. **Synthese (Dordrecht)**, v. 154, p. 383-399, 2007.

⁶¹ CORCORAN, J. in ABE, 1991.

Seja Δ um domínio a ser investigado. A fim de estudarmos o comportamento dos objetos de Δ , introduzimos certos elementos conceituais que nos ajudam a representar e a sistematizar informações a respeito desses objetos. Para tanto, associamos a Δ um conjunto D , contendo não apenas objetos reais como também objetos ideais. Esses últimos nos auxiliam no processo de sistematização daquilo que conhecemos acerca de Δ ⁶².

O que esta abordagem assume é o interesse que temos em certas relações entre os objetos de D , que intuitivamente representam toda informação que temos, em certo momento, sobre Δ .

Há um componente *pragmático* nesse ponto, já que tais informações são relativas aos nossos interesses, e são obtidas de acordo com o que tomamos como *relevante* em determinado contexto.

Independente deste aspecto, e mais importante, há em certo sentido uma incompletude nas informações, exatamente na medida em que não sabemos se algumas relações entre os objetos de D são ou não estabelecidas. Na proporção que obtemos maiores informações sobre D , podemos então determinar se algumas relações de fato se dão, e isso representa uma ampliação de nosso conhecimento acerca de Δ .

Essas relações são *parciais* no exato sentido em que não estão necessariamente definidas para todas as n -uplas de objetos de D . Uma tal incompletude se constitui numa das maiores motivações para a introdução da abordagem baseada em estruturas parciais.

Com efeito, trata-se de proporcionar um quadro conceitual em cujo interior se possa acomodar o emprego de estruturas na ciência em contextos nos quais não há completude informacional. Não há, pois, qualquer incompatibilidade entre uma tal incompletude e o uso de estruturas conjuntistas, como fica claro com a introdução do conceito de relação parcial.

De maneira menos informal, cada relação parcial R_i em D pode ser caracterizada como uma tripla ordenada $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$, em que R_1 , R_2 , e R_3 são conjuntos disjuntos, com $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = D^n$, e tais que R_1 é o conjunto das n -uplas que pertencem a R_i , R_2 das n -uplas que não pertencem a R_i , e R_3 daquelas n -uplas acerca das quais não está definido,

⁶² Como se pode ver em BUENO, Otávio. *Quase-verdade: significado e importância*. 2012. No prelo.

ou não se sabe, se pertencem a R_i ou não. Veja que se R_3 for vazio, R_i será uma relação n -ária usual, que pode ser identificada com R_1 .

Com esta noção de relação parcial, representamos as informações de que dispomos acerca de um certo domínio do conhecimento, e mapeamos as regiões que ainda precisam de mais investigação representadas acima pelo componente R_3 . Desse modo, é possível acomodar, em alguma medida, formalmente a incompletude das informações existente em um certo campo do conhecimento científico. Vemos, portanto, que este se constitui no papel epistêmico das relações parciais. Há ainda um aspecto semântico, a ser empregado para se definir uma generalização do conceito tarskiano de verdade: a quase-verdade.

Para formularmos este último conceito, necessitamos de duas noções auxiliares. A primeira delas, intimamente relacionada com o conceito de relação parcial, é a noção de *estrutura parcial* (ou estrutura pragmática simples - EPS). Uma *estrutura parcial*, ou EPS, é uma estrutura matemática do seguinte tipo: $A = \langle D, R_i, P \rangle_{i \in I}$, onde D é um conjunto não vazio, $(R_i)_{i \in I}$ é uma família de relações parciais definidas em D , e P é um conjunto de sentenças acerca de D aceitas como verdadeiras, no sentido da teoria da correspondência da verdade⁶³).

De acordo com a interpretação do conhecimento científico adotada, os elementos de P poderão incluir leis ou mesmo teorias, ou, de outro lado, enunciados de observação. De qualquer modo, e este é o motivo de se introduzir o conjunto P , a cada momento particular, há um certo conjunto de sentenças aceitas em um domínio de conhecimento, e que proporcionam restrições acerca das possíveis extensões do conhecimento científico.

Intuitivamente, as estruturas parciais modelam aspectos de nosso conhecimento a respeito desse domínio.

A segunda noção a ser introduzida relaciona-se intimamente com o objetivo de se formular um conceito mais amplo de verdade. Tal como no caso da caracterização tarskiana, segundo a qual a verdade é definida numa estrutura, a quase-verdade também será formulada em termos estruturais.

⁶³ MIKENBERG, DA COSTA e CHUAQUI, 1986, ou DA COSTA, N.C. A. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1999.

Para tanto, dada uma estrutura parcial $A = \langle D, R_i, P \rangle_{i \in I}$, dizemos que $B = \langle D', R'_i, P' \rangle_{i \in I}$ é uma *estrutura A-normal* se:

$$(1) D = D';$$

(2) cada R'_i estende a relação parcial correspondente R_i a uma relação total, isto é, diferentemente de R_i , R'_i está definida para todas as n -uplas de objetos de D' ;

(3) se c é uma constante da linguagem interpretada por A e por B , em ambas as estruturas, c é associada ao mesmo objeto de D ;

(4) se α é uma sentença de P , então α é verdadeira em B .

O emprego de estruturas A -normais na formulação da quase-verdade é similar ao do conceito de interpretação no caso da proposta de Tarski.

De posse das duas noções acima, podemos finalmente definir o conceito de quase-verdade.

Dizemos que uma sentença α é *quase-verdadeira* na estrutura parcial A de acordo com B se

(1) A é uma estrutura parcial,

(2) B é uma estrutura A -normal, e,

(3) α é verdadeira em B , segundo a teoria da correspondência de Tarski.

Se α não é quase-verdadeira em A de acordo com B , dizemos que α é *quase-falsa*, em S de acordo com B . Assim, em linhas gerais, uma sentença α é quase-verdadeira numa estrutura parcial A se existe uma estrutura A -normal (estrutura total) B na qual α é verdadeira.

Deve-se notar, todavia, que não é sempre o caso que, dada uma estrutura parcial, é possível estender essa EPS a uma estrutura total. Condições necessárias e suficientes para tanto podem ser apresentadas, esquematicamente, da seguinte maneira.

Dada uma estrutura parcial $A = \langle D, R_i, P \rangle_{i \in I}$, para cada relação parcial R_i , construímos um conjunto M_i de sentenças atômicas e de negações de sentenças atômicas de tal forma que as primeiras correspondem às n -uplas que satisfazem R_i , e as últimas às n -uplas que não satisfazem R_i . Seja M o conjunto $\cup_{i \in I} M_i$. Desse modo, uma estrutura

pragmática simples A admite uma estrutura A -normal se, e somente se, o conjunto $M \cup P$ é consistente.

Em outras palavras, a extensão de uma estrutura pragmática simples A a uma estrutura A -normal B é possível apenas quando o processo de extensão das relações parciais pode ser realizado de tal forma que se assegure a consistência entre as novas relações estendidas e as proposições básicas aceitas (P).

É interessante notar que tal resultado proporciona evidência para que se interprete o conceito de quase-verdade como uma noção do tipo *como se*. Se α é uma sentença quase-verdadeira, podemos afirmar que α descreve o domínio em questão *como se* sua descrição fosse verdadeira no sentido da teoria da correspondência da verdade de Tarski.

Por ser consistente com o conhecimento básico disponível no domínio em exame (representado pelo conjunto P), α permite a representação de algumas das principais informações a respeito deste último, sem todavia comprometer-nos com a aceitação da verdade dos demais itens de informação, formulados pela estrutura A -normal, que é uma estrutura total.

Com efeito, há diversas estruturas A -normais compatíveis com uma dada estrutura parcial A , e que estendem esta última a uma estrutura total.

Em outras palavras, em virtude das definições apresentadas, uma sentença quase-verdadeira, numa EPS A , não é necessariamente verdadeira; ela é apenas verdadeira, por assim dizer, naquele domínio delimitado por A .

Por outro lado, segue-se imediatamente que toda sentença verdadeira é quase-verdadeira. Sendo assim, é claro em que medida tal definição representa uma generalização da noção de verdade proposta por Tarski; ambas as definições coincidem quando a primeira é restrita a estruturas totais.

Embora não possamos afirmar que algumas teorias sejam verdadeiras caso da teoria newtoniana da gravitação universal, podemos afirmá-las como *quase-verdadeiras* basta considerarmos apenas objetos que não estejam sujeitos a campos gravitacionais muito intensos ou aqueles que a velocidade seja pequena em comparação à velocidade da luz, por exemplo.

Percebe-se, observando as estruturas parciais descritas acima, que a lógica subjacente à quase-verdade é, pois, uma lógica paraconsistente, não adjuntiva e que a quase-verdade busca uma explicação intuitiva da paraconsistência no campo científico.

O trabalho de desenvolvimento da concepção semântica de quase-verdade é resultado, ou um sub-resultado, por assim dizer, do desenvolvimento da paraconsistência como conceito, e além disso, desenvolve-se a partir dela, a quase-verdade, novos sistemas paraconsistentes, apresentamos abaixo um desses sistemas, denominado PV que é um tipo de lógica discussiva.

PV sistematiza a noção de quase-verdade, ou verdade pragmática estrita⁶⁴, possui uma linguagem cujos símbolos primitivos são os de uma formalização padrão do cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade e constantes individuais, mais o símbolo $\Box$. O símbolo $\Box$ que em lógica modal representa a noção de necessidade em PV representa o conceito de validade pragmática em uma EPS, o símbolo de possibilidade $\Diamond$, definido por meio de $\Box$ e da negação, por sua vez, representa o conceito de verdade pragmática, em dadas EPS. Os símbolos definidos são introduzidos da maneira usual, e na formulação dos postulados, na escritura de fórmulas, as convenções comuns serão utilizadas sem menção explícita.

Os postulados de PV são os seguintes:

- 1) Se α for a instância de uma tautologia proposicional, então α é um axioma.
- 2) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$
- 3) $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
- 4) $\Box\alpha \rightarrow \alpha$
- 5) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
- 6) $\forall x \alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$
- 7) $\alpha / \Box\alpha$
- 8) $\alpha \rightarrow \beta(x) / \alpha \rightarrow \forall x \beta(x)$
- 9) $x = x$
- 10) $x = y \rightarrow (\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(y))$

⁶⁴ DA COSTA, 1999. Pag. 136 e seguintes.

O operador $\Box$ possui restrições similares às que governam o quantificador universal e o conceito de dedução é o usual⁶⁵, sendo assim, valem as regras derivadas comuns e o teorema da dedução.

Vemos que PV é uma lógica paraconsistente, tendo em vista que certa classe de seus postulados coincide com a lógica de Jaśkowski⁶⁶, além de PV, outras lógicas paraconsistentes podem ser desenvolvidas sob o conceito de quase-verdade, pode-se encontrar algumas dessas lógicas no trabalho de Hifume, 2003⁶⁷, neste trabalho foram apresentadas as provas de correção e completude de PV, que lá é denominada QV.

Podem ser encontradas também em outros trabalhos conduzidos por da Costa ou por seus colaboradores, ou, ainda, em trabalhos de orientandos de seus colaboradores, como é o caso de Silvestrini, 2011⁶⁸.

Em seu trabalho Silvestrini apresenta uma extensão da noção de predicados como ternas para fórmulas complexas. Essa definição generaliza a noção clássica de que cada fórmula (complexa) A define indutivamente um conjunto R formado pelas n-uplas tais que a estrutura E satisfaz A com parâmetros. A partir desta nova abordagem, obtém-se uma definição de quase-verdade via noção de satisfação pragmática de uma fórmula A em uma estrutura parcial E.

Silvestrini introduz uma lógica subjacente à nossa nova definição de quase-verdade, a saber, a lógica paraconsistente trivalente LPT1, a qual possui uma axiomática de primeira ordem. Relaciona a noção de quase-verdade com algumas lógicas paraconsistentes já existentes, bem como defende que a formalização das Sociedades Abertas, introduzidas por Carnielli e Lima-Marques, 1999⁶⁹, quando combinada com quantificadores modulados, introduzidos por Grácio, 1999⁷⁰, constitui uma alternativa para capturar a componente indutiva presente na atividade científica, e mostra, a partir disso, que a proposta original de da Costa e colaboradores pode ser explicada em termos da nova noção de sociedades moduladas.

⁶⁵ Tal como pode ser encontrado em boas introduções à lógica.

⁶⁶ DA COSTA, 1999. Pag. 136

⁶⁷ HIFUME, Carlos. *Uma teoria da verdade pragmática: a quase-verdade de Newton da Costa*. Dissertação de Mestrado: Campinas, 2003.

⁶⁸ SILVESTRINI, Luiz Henrique da Cruz. *Uma Nova Abordagem para a Noção de Quase-Verdade*. Tese de Doutorado: Campinas, 2011.

⁶⁹ CARNIELLI, W. A. e M. LIMA-MARQUES: *Society semantics and multiple-valued logics*. **Advances in Contemporary Logic and Computer Science**, 235, p. 33-52, 1999.

⁷⁰ GRÁCIO, M. C. C.: *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de Doutorado: Campinas, 1999.

Capítulo IV – Algumas aplicações possíveis em filosofia.

1. Paraconsistência e metafísica

Nesse capítulo iremos discutir o valor filosófico da lógica paraconsistente e algumas aplicações possíveis das teorias estudadas nos capítulos I e II. Estudamos a lógica paraconsistente e a quase-verdade; agora veremos que tipo de aplicações podemos fazer dessas teorias na filosofia, examinaremos os casos da metafísica e da epistemologia tentando apontar alguns caminhos de aplicações.

Lembramos, antes de mais nada, que a lógica paraconsistente por si já apresenta relevantes questões filosóficas, vimos acima, por exemplo, que as lógicas subjacentes ao conceito de quase-verdade são lógicas paraconsistentes, mas o que vamos discutir abaixo é sua aplicação como ferramenta para trabalhar teorias em metafísica e epistemologia ou teoria/filosofia da ciência.

A legitimidade de buscar tais aplicações é discutida desde a criação da lógica paraconsistente, por exemplo, veja-se o que diz da Costa ao falar das motivações que o levaram a elaborar os sistemas formais inconsistentes hoje conhecidos como lógicas paraconsistentes(LPs):

4) Contribuir para a sistematização e o balanço de teorias novas que encerram contradições e de antigas que, por esse motivo, foram abandonadas ou praticamente relegadas a segundo plano. Exemplo marcante dessas últimas são a teoria dos objetos de Meinong e a teoria dos infinitésimos em sua forma original[...] ⁷¹.

Como se vê, dentre as motivações para a criação das LPs está o estudo de teorias que contenham contradições como a teoria metafísica de Meinong acerca dos objetos. Essa preocupação inicial, manifestada nas motivações não deixará de ser parte do projeto de da Costa, como podemos ver em uma entrevista dada a Bobenrieth:

⁷¹ DA COSTA, 1980, 2008, p.172.

Pero, paralelamente, siempre me interesé por três problemas que son muy importantes desde el punto de vista filosófico. El primero era la posibilidad de dar una fundamentación sensata a la teoria de objetos de von Meinong[...] ⁷²

A teoria dos objetos de Meinong será efetivamente tratada por uma lógica paraconsistente em trabalho que escreveu em conjunto com Dória e Papavero ⁷³, falaremos desse artigo mais adiante; por hora vamos entender a teoria de Meinong.

Alexius Von Meinong, filósofo austríaco, é bastante conhecido por sua teoria dos objetos. A teoria dos objetos, para ele, seria uma ciência mais geral que a Metafísica que é definida por Meinong como “a apreensão da totalidade do mundo em sua essência e fundamentos últimos” ⁷⁴ e sofreria do preconceito de valorizar demais ao efetivo, ao atual.

A teoria dos objetos de Meinong leva em consideração o problema do *não ser*, que é tão antigo quanto a Barba de Platão, segundo Quine, um dos críticos dessa teoria ⁷⁵. Nessa teoria Meinong defende que “a totalidade do que existe, incluindo aí o que existiu e o que existirá, é infinitamente pequena em relação à totalidade dos objetos do conhecimento” ⁷⁶.

Para Meinong há que se distinguir entre juízos acerca do *ser* (Sein) de objetos intencionados do pensamento e juízos acerca de seu caráter de *ser assim e assim* (Sosein), que se refere à natureza do objeto, sendo que objeto é tudo aquilo que pode ser pensado.

Afirma que todo pensamento se dirige intencionalmente ao objeto transcendente independente da mente, a respeito do qual o pensamento pretende ser, isso acarreta em alguns casos em objetos não existentes. Afirma, também, que o *Sosein* de um objeto intencionado é diferente de seu *Sein*, ou seja, o fato de ser assim e assim é independente de ele ser efetivo, real.

⁷² MISERDA, 1996.

⁷³ DA COSTA, N. C. A.; DORIA, F. A.; PAPAVERO, N. 1992. *Meinong's theory of objects and Hilbert's*

ε-Symbol. **Reports on Mathematical Logic** 25: 118–32.

⁷⁴ MEINONG, Alexius. *Sobre a teoria dos objetos*. 1904 in BRAÍDA, Celso. *Três aberturas em ontologia – Frege, Twardowski e Meinong*. Santa Catarina: Rocca Brayde Edições, 2005. P. 96. Encontrável em: http://www.cfh.ufsc.br/~nim/textos_nim_files/textos_pdf/aberturas.pdf

⁷⁵ Como se pode ver em um de seus textos mais conhecidos “*Sobre o que há*”.

⁷⁶ MEINONG, 1904. P. 96.

A teoria de Meinong pode ser resumida nas seguintes teses:

- I) Há objetos que não existem, ou, o que é o mesmo, que meramente subsistem;
- II) Qualquer coisa que possa ser pensada é um objeto;
- III) Os objetos tem realmente seus atributos característicos, por exemplo, a montanha de ouro é de ouro. Dizendo de outra forma, se nós usamos uma descrição para apresentar um objeto que não existe, então ele tem as propriedades que lhe atribuímos na descrição.
- IV) Podem haver sentenças verdadeiras acerca daquilo que não têm ser.
- V) Há objetos intencionados que não têm nenhum tipo de *Sein* são objetos em relação aos quais pode-se dizer que não existem.

Percebemos, portanto, que nosso pensamento, de acordo com a teoria, não está limitado nem ao que existe nem ao que é possível. Vemos ainda que há uma divisão entre o que existe e o que apenas subsiste (Existenz/Bestand) dentre os objetos intencionados.

Os objetos que estão localizados no espaço e no tempo existem, os demais, apenas subsistem. Assim, o ventilador ligado enquanto escrevo e o notebook no qual digito esse trabalho existem, enquanto o Pernalonga, o Curupira ou o Dr. Watson e Sherlock Holmes apenas subsistem. Entre os objetos que subsistem estão objetos impossíveis como o quadrado redondo e outros acerca dos quais apesar de poder se falar em existência apenas subsistem, caso de objetos matemáticos, diz Meinong⁷⁷.

A inclusão de objetos impossíveis na sua teoria dos objetos confronta diretamente a possibilidade de seu exame com a lógica clássica, isso fica evidente no conjunto de objeções apresentadas a essa teoria por Russell em “On Denoting”⁷⁸, que veremos mais abaixo, tentemos antes entender melhor o que diz Meinong.

Dada uma sentença S qualquer, por exemplo:

(S) Don Vito Corleone não existe.

Se S está negando a existência no espaço e no tempo de Vito Corleone, ela é verdadeira, entretanto, se ela quiser negar qualquer tipo de existência ao chefe da

⁷⁷ MEINONG, 1904, p. 102.

⁷⁸ RUSSELL, Bertrand. *Da Denotação*. São Paulo: Abril Cultural, 1978, P 3-14. (Coleção: Os Pensadores)

família Corleone ela é falsa. Percebemos que quando estamos julgando a inexistência, é a inexistência de algo que julgamos, podemos então distinguir entre ser e existir.

Podemos então dizer que *ser* é tudo que é concebível, tudo que pode ser pensado, qualquer coisa que possa aparecer em uma proposição, inclusa a própria proposição. Já *existir* se destina apenas aqueles objetos que tem uma relação específica com a existência.

Acerca da subsistência, ela pode ser afirmada de qualquer coisa que não tenha localização espaço temporal, por exemplo: a diferença entre duas cores, o número de Napier ou mesmo objetos impossíveis ou incompletos, como o quadrado redondo ou “uma coisa vermelha”, respectivamente.

Isso respalda a afirmação da independência entre as características de algo e sua existência efetiva ou atual. Um quadrado redondo é quadrado, mesmo que não exista. Assim, se eu afirmo

(P1) O quadrado redondo é quadrado, e,

(P2) O quadrado redondo não existe,

P1 é verdadeira, apesar da verdade de P2.

P1 possui uma segunda característica que é a de violar o princípio de não contradição, mas para Meinong apenas o que existe não poderia violar tal princípio, voltaremos a isso mais a frente.

A ideia de que mundos imaginários não tinham que obedecer às leis da lógica estava presente em Vasiliev, acredito que o lógico russo pode ter tido alguma influência das ideias desse pensador, assim como ocorreu com Łucasiewicz, mas o interessante seria uma descrição da teoria usando os resultados lógicos do russo, entretanto, não tentaremos tal coisa aqui, ficando para um próximo trabalho.

A distinção entre objetos possíveis e impossíveis pode ser dada da seguinte maneira: um objeto é impossível quando tem características (*Sosein*) contraditórias, o quadrado redondo, por exemplo. E é possível em caso contrário.

Para Krause⁷⁹, Meinong teria distinguido entre negar um predicado, como em ‘x é não verde’ que pode ser simbolizado assim $(\sim V)(x)$ e ‘é falso que x é verde’ que seria

⁷⁹ KRAUSE, Décio. *Tópicos em Ontologia Analítica*. Santa Catarina: UFSC, 2009. Apostila de curso.

assim $\neg V(x)$. Krause destaca o uso de dois símbolos para negação. Afirma então que é provável que Meinong aceitasse os princípios que seguem abaixo:

Princípio de não contradição

$$\forall F \forall x \neg (F(x) \wedge \neg F(x)) \quad (1)$$

Princípio do terceiro excluído

$$\forall F \forall x (F(x) \vee \neg F(x)) \quad (2)$$

E ainda os seguintes:

$$\exists F \exists x (F(x) \wedge (\sim F)(x)) \quad (3)$$

$$\exists F \exists x \neg (F(x) \vee (\sim F)(x)) \quad (4)$$

Tendo em vista tais princípios, Krause comenta que dado que a lógica clássica não distingue as duas negações, 1 e 3 seriam a negação uma da outra, bem como o mesmo ocorreria com 2 e 4. Por estas razões, Meinong foi taxado por alguns, caso de Russell, de ser inconsistente. Entretanto, outros filósofos pensam poder fundar uma teoria de objetos inconsistente e propõem que a teoria de Meinong deveria ser baseada em uma lógica distinta da clássica, como vimos acima e discutiremos um pouco mais.

Nesse ponto percebemos que a lógica paraconsistente pode servir como lógica subjacente à teoria de objetos de Meinong tendo em vista que nessa lógica o princípio de não contradição não vale em geral. Foi exatamente o que fizeram da Costa e colaboradores no artigo citado acima, *Meinong's theory of objects and Hilbert's $\mathcal{E}$ -Symbol*, procuraram, por meio da lógica paraconsistente e utilizando o símbolo $\mathcal{E}$ de Hilbert, formalizar a teoria dos objetos do filósofo. No apresentado no capítulo I apenas mencionamos a existência de cálculos de predicados de primeira ordem paraconsistente sem apresenta-los efetivamente, mas cálculos C_n^* , ..., C_ω^* ⁸⁰ podem ser utilizados para esse fim.

Vemos, pois que a lógica paraconsistente além de ser, ela própria, objeto de estudo da filosofia, tendo em vista poder ser estudada para se descobrir se é um mero formalismo matemático ou se é uma *verdadeira* lógica, ou poder ser utilizada para fundar conceitos como o de quase-verdade, pode servir como base para o estudo de

⁸⁰ Uma descrição desses cálculos e seus esquemas de axiomas podem ser encontrados em DA COSTA, 1980, 2008. Apêndice 1, p. 273.

teorias filosóficas abandonadas por terem sido consideradas inconsistentes, como é o caso da teoria dos objetos de Meinong.

2. A quase-verdade e a filosofia da ciência

Foram desenvolvidas várias aplicações para a noção de quase-verdade. Dentre elas podemos destacar o uso dessa noção para desenvolver uma nova interpretação da probabilidade que foi elaborada, articulando o conceito de probabilidade pragmática. A idéia básica consiste em perceber que, em vários cenários, embora não haja a probabilidade de que certas teorias científicas sejam verdadeiras, a probabilidade de que tais teorias sejam quase-verdadeiras não o é.

Em linhas gerais, a noção de probabilidade pragmática consiste na avaliação da probabilidade da quase-verdade de uma teoria, em vez da verdade. Como resultado, pode-se avaliar a probabilidade pragmática de teorias científicas mesmo quando a probabilidade de que sejam verdadeiras não existe. Assim, pode haver uma nova interpretação da probabilidade, interpretação tal que desenvolve uma nova versão da concepção subjetivista de probabilidade sem gerar os problemas presentes nas versões mais utilizadas da mesma⁸¹.

Novos modelos de caracterização da dinâmica de teorias científicas foram também elaborados empregando-se a noção de quase-verdade, bem como uma concepção unificada do conhecimento científico pode ser articulada com base nessa noção⁸². O conceito gerou um verdadeiro e vasto programa de pesquisa, e como resultado, uma maneira nova de examinar a natureza do conhecimento científico foi desenvolvida.

Uma das áreas em que a quase-verdade foi muito explorada é a filosofia da ciência. Isso se deveu, entre outras coisas, devido a sua neutralidade com relação a diferentes visões da ciência. A quase-verdade pode ser adotada tanto por realistas em ciência quanto por anti-realistas.

De acordo com Bueno⁸³, realistas científicos, realistas de entidades, realistas estruturais e semi-realistas podem se beneficiar com o emprego da teoria da quase-

⁸¹ DA COSTA, 1986, 2008.

⁸² DA COSTA E FRENCH, 2003.

⁸³ BUENO, Otávio. *Quase-verdade: Seu significado e relevância*. 2012, no prelo. Disponível em http://web.me.com/otaviobueno/Site/Online_Papers_files/QuaseVerdade_Signific%26Import.pdf

verdade, bem como podem se beneficiar também empiristas construtivos e empiristas estruturais. Devido a neutralidade da teoria da quase-verdade, um importante quadro conceitual no qual diversos aspectos da prática científica pode ser descrito.

Bueno afirma que, de acordo com a visão realista da ciência, termos teóricos como genes, elétrons ou fótons, possuem referência, e denotam objetos cujas propriedades são caracterizadas, por teorias científicas como a biologia molecular, mecânica quântica etc. O sucesso da ciência, para realistas, é resultado do fato de que teorias científicas descrevem e capturam de modo correto, ou aproximadamente correto, as propriedades dos objetos estudados. Assim, teorias científicas são verdadeiras, ou aproximadamente verdadeiras.

A quase-verdade oferece, para Bueno, um quadro conceitual que pode ser empregado seja por um realista científico para formular um aspecto importante do conceito de aproximação da verdade, no sentido que uma teoria quase-verdadeira, embora não sendo verdadeira em sentido estrito, pode ser parte de uma série de teorias que se aproximam sucessivamente da verdade.

O sentido em que pode ser usado é explicado por Bueno da seguinte maneira:

cada teoria da série captura sucessivamente mais aspectos da estrutura A -normal que representa as informações completas acerca do domínio em investigação. De forma intuitiva, essa proposta pode ser formulada da seguinte maneira. Considere o cardinal dos componentes R_3 das relações parciais que caracterizam, em parte, uma teoria científica. Suponha que, para cada teoria da série (com exceção da primeira), esse cardinal seja menor do que o cardinal correspondente das teorias anteriores (até que R_3 seja finalmente vazio). Nesse caso, de forma intuitiva, teríamos o aumento do conteúdo informativo das teorias ao longo da série. Assim, supondo-se que o desenvolvimento científico satisfaça tais condições, as teorias em questão estariam sucessivamente mais próximas da verdade, embora nenhuma delas seja estritamente verdadeira, já que, por hipótese, são apenas quase-verdadeiras. Um aspecto importante do realismo científico é então capturado em termos da abordagem baseada em estruturas parciais.⁸⁴

Com o quadro conceitual oferecido pela teoria da quase-verdade, é possível

⁸⁴ BUENO, 2012, p. 6.

também capturar um aspecto importante do realismo estrutural, afirma Bueno. De acordo com essa proposta, o que há fundamentalmente são somente estruturas, e não objetos particulares que não nos seriam acessíveis. A preservação de estruturas ao longo do desenvolvimento científico é, assim, uma característica central dessa concepção, Bueno explica como tal preservação de estruturas pode ser caracterizada, assim:

Há mapeamentos parciais entre as diversas estruturas (parciais) empregadas na ciência, tais como isomorfismos parciais ou homomorfismos parciais, que ampliam para contextos envolvendo incompletude informacional os mapeamentos normalmente empregados no caso das estruturas usuais (Bueno, French, e Ladyman [2002]).⁸⁵ Esses mapeamentos parciais mostram a possibilidade da preservação de certas estruturas mesmo quando as informações disponíveis não são completas. Se estes mapeamentos forem tais que teorias posteriores eliminem sucessivamente (tanto quanto possível) os componentes R_3 das relações parciais envolvidas em teorias anteriores, temos num sentido claro a preservação de progressivamente mais estruturas ao longo da mudança científica. Afinal, supondo que, por hipótese, a ciência de fato se desenvolva dessa maneira, um conteúdo informacional maior (representado pelas componentes R_1 e R_2 das relações parciais envolvidas) é encontrado nas estruturas associadas às teorias desenvolvidas posteriormente ao longo da mudança científica.⁸⁶ O realista estrutural considerará essas estruturas, assim preservadas, como sendo aquelas que capturam aspectos significativos da descrição científica do mundo. Desse modo,

⁸⁵ Nota do texto original: Sejam $S = \langle D, R_i \rangle_{i \in I}$ e $S' = \langle D', R'_i \rangle_{i \in I}$ estruturas parciais. Desse modo, cada R_i é uma relação parcial da forma $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$, e cada R'_i uma relação parcial da forma $\langle R'_1, R'_2, R'_3 \rangle$. (Por simplicidade, assumirei que tais relações sejam binárias. Contudo, as definições abaixo se aplicam a relações de qualquer aridade.)

Dizemos que uma função parcial (isto é, uma função que não se encontra definida para todos os elementos de seu domínio) $f: D \rightarrow D'$ é um *isomorfismo parcial* entre S e S' se (i) f é bijetora, e (ii) para todo x e $y \in D$, $R_1xy \leftrightarrow R'_1f(x)f(y)$ e $R_2xy \leftrightarrow R'_2f(x)f(y)$. Desse modo, se R_3 e R'_3 forem vazios (isto é, ao considerarmos estruturas totais), obtemos o conceito usual de isomorfismo.

Além disso, dizemos que uma função parcial $f: D \rightarrow D'$ é um *homomorfismo parcial* entre S e S' se para todo x e y em D , $R_1xy \rightarrow R'_1f(x)f(y)$ e $R_2xy \rightarrow R'_2f(x)f(y)$. Novamente, se R_3 e R'_3 forem vazios, obtemos o conceito usual de homomorfismo como caso particular.

⁸⁶ Nota do texto original: Se a ciência de fato se articula dessa maneira é uma questão no mínimo controversa. Parece claro haver perdas—mesmo estruturais—ao longo do desenvolvimento científico (um ponto enfatizado, há bastante tempo, por Kuhn e Laudan, entre outros). Minha sugestão consiste apenas em indicar de que modo o realista estrutural poderia representar a preservação de estruturas envolvida na mudança científica *assumindo que tal preservação de fato ocorre*. Um ponto importante é que, com as estruturas parciais, o realista estrutural pode representar a preservação *parcial* de estruturas, ainda que a preservação de estruturas completas jamais seja o caso.

uma forma de realismo estrutural pode ser acomodada no interior do quadro teórico desenvolvido em termos de estruturas parciais e quase-verdade.

Há outras formas de realismo que podem ser formuladas nesse contexto, caso do realismo de entidades. O compromisso do realista de entidades se restringe às entidades com as quais se estabelece um controle experimental caso daquelas entidades que são empregadas sistematicamente no uso de instrumentos que produzem resultados confiáveis acerca de certo domínio experimental, é o caso, por exemplo, dos microscópios eletrônicos empregam regularmente elétrons na produção de seus resultados.

O realista de entidades⁸⁷ defende que o compromisso com a existência dos objetos descritos acima é inegável, isso mostra uma similaridade entre o realismo de entidades e o semi-realismo⁸⁸. As duas concepções identificam o compromisso ontológico realista com aqueles itens que são detectados adequadamente: algumas entidades, no primeiro caso, e algumas propriedades, no outro.

O realista de entidades, tem o cuidado, entretanto, de oferecer a ressalva que, apesar do possível sucesso experimental, uma descrição teórica das entidades estudadas pode ser inteiramente falsa. Assim, “o realista de entidades é um anti-realista com relação a teorias científicas”, afirma Bueno⁸⁹, que arremata da seguinte maneira:

Ainda que elétrons existam, dado o sucesso experimental em seu emprego, a descrição teórica oferecida pela mecânica quântica não relativista acerca dos mesmos pode ser (e provavelmente é) falsa.

Para Bueno, tal como os demais realismos, também o realismo de entidades pode ser formulado por meio de estruturas parciais e da quase verdade.

O anti-realismo acerca de teorias que faz parte do realismo de entidades pode ser visto como afirmando que teorias científicas são quase-falsas, ou seja, que nenhuma estrutura parcial *teórica* A, que descreva um domínio do conhecimento sob determinada teoria, pode ser estendida a uma estrutura A-normal: as descrições teóricas podem ser ou são falsas. Entretanto, as estruturas parciais empíricas empregadas na realização de experimentos particulares capturam de maneira correta as relações estabelecidas no

⁸⁷ HACKING, I. *Representing and Intervening*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

⁸⁸ CHAKRAVARTTY, A. *A Metaphysics for Scientific Realism*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

⁸⁹ BUENO, 2012, p. 8.

nível experimental. Tais relações determinam as entidades em questão. Todavia, a descrição dessas relações pode ser inteiramente falsa.

O realismo de entidades é, pois, um realismo parcial; ou seja, apenas alguns aspectos da prática científica são epistemicamente justificados, as outras características recebem um tratamento anti-realista.

Além das concepções realistas, as visões anti-realistas, em filosofia da ciência, também podem ser representadas em termos de estruturas parciais e da teoria da quase-verdade. Considere-se, por exemplo, a forma de anti-realismo defendida pelo empirista construtivo Bass van Fraassen⁹⁰ e por Bueno⁹¹. No entender desses filósofos, teorias científicas não necessitam ser verdadeiras para serem boas ou aceitáveis, é preciso antes que sejam *empiricamente adequadas* (e informativas), isto é, é preciso que sejam verdadeiras no que se refere ao que é observável, para um empirista construtivo, é observável somente aquilo que pode ser observado a olho nu. Veja que uma teoria empiricamente adequada pode ser falsa, já que a descrição que ela proporciona dos aspectos inobserváveis do mundo pode não ser correta.

Para Bueno, empregando-se estruturas parciais, pode-se formular um conceito de adequação empírica sensível às limitações epistêmicas da prática científica⁹². Pois, em qualquer momento do desenvolvimento científico, as informações disponíveis sobre os aspectos experimentais de um domínio do conhecimento são apenas parciais.

Tendo em vista que para verificar a adequação empírica de uma teoria científica é preciso comparar as previsões que a teoria produz com as informações empíricas disponíveis, a avaliação de se tal teoria é empiricamente adequada ou não é sempre relativa, dado que depende das informações acerca dos componentes experimentais. Estas informações podem ser representadas por estruturas parciais empíricas, estruturas parciais que descrevem as relações estabelecidas, bem como aquelas que ainda estão em aberto, acerca do contexto experimental.

Uma teoria científica é então empiricamente adequada quando existe um modelo dessa teoria em todas as subestruturas empíricas desse mesmo modelo são

⁹⁰ VAN FRAASSEN, B.C. *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press, 1980. Versão em português: *A Imagem científica*, UNESP, 2007.

⁹¹ BUENO, O. *O Empirismo Construtivo: Uma Reformulação e Defesa*. Campinas: Coleção CLE, 1999.

⁹² BUENO, O. *Empirical Adequacy: A Partial Structures Approach*, **Studies in History and Philosophy of Science** 28, pp. 585-610, 1997.

parcialmente isomorfas às estruturas parciais empíricas em questão. No entender de van Fraassen, uma teoria é empiricamente adequada quando possui um modelo tal que suas subestruturas empíricas são isomorfas às estruturas que descrevem os resultados experimentais. Bueno, entretanto, ressalva que isomorfismo oferece uma condição demasiadamente forte para dar conta de casos reais de adequação empírica em ciência. É importante, pois, para Bueno, acomodar a parcialidade de informações nesse contexto, e isso pode ser feito introduzindo-se estruturas parciais e isomorfismos parciais ao longo das sugestões indicadas acima⁹³. Com o aumento das informações experimentais disponíveis, ou seja, na medida em que os componentes R_3 das estruturas parciais empíricas vão diminuindo, a teoria científica em questão torna-se mais empiricamente adequada.

Uma outra forma de anti-realismo em filosofia da ciência é o empirismo estrutural⁹⁴. É uma espécie de versão empirista do realismo estrutural e enfatiza que as estruturas preservadas ao longo do desenvolvimento da ciência referem-se a aspectos experimentais e observáveis do mundo, em vez de capturarem aspectos inobserváveis. Essa proposta é agnóstica acerca destes aspectos. Como os aspectos experimentais são parciais, tendo em vista que normalmente não dispomos de informações completas acerca desse tipo de estruturas; as estruturas envolvidas podem ser representadas por meio de estruturas parciais, bem como, a preservação das relações empíricas observáveis ao longo das diversas estruturas parciais pode ser feita por meio de isomorfismos parciais e homomorfismos parciais. Desse modo a abordagem baseada em estruturas parciais pode ser empregada de forma bastante proveitosa nesse contexto.

Como vimos a teoria da quase-verdade, tal como examinamos seu uso em epistemologia e mais detidamente em filosofia da ciência, tem demonstrado enorme utilidade no sentido de ampliar nossos horizontes sobre o conhecimento e a ciência.

Ou seja, tanto a teoria da quase-verdade quanto a lógica paraconsistente se mostram relevantes, seja em seu próprio desenvolvimento enquanto teorias, seja como instrumentos para a filosofia.

Se uma teoria gera discussão de cunho filosófico, então tem relevância comprovada. Ora, pelo levantamento feito acima, dos usos apontados para a lógica paraconsistente e para a teoria da quase-verdade, percebe-se que tais teorias geram

⁹³ BUENO, 1997.

⁹⁴ BUENO, 1999.

muita e boa discussão de cunho filosófico. Portanto, está devidamente comprovado que a lógica paraconsistente e a teoria da quase-verdade possuem interesse filosófico, independentemente de qualquer crítica que se faça a elas, ou mesmo por conta de tais críticas.

Considerações finais

Neste trabalho nos ocupamos de dois resultados de Newton da Costa; a lógica paraconsistente e a teoria da quase-verdade, tendo por fim demonstrar sua relevância filosófica como instrumentos que poderiam ser utilizados seja no desenvolvimento de novas teorias, seja no resgate de antigas, que possuísem contradições ou as gerassem.

Para esse fim apresentamos em primeiro lugar, no capítulo I, à lógica paraconsistente, contamos sua história e como foi desenvolvida, desde suas influências provindas dos avanços matemáticos no século XIX, principalmente do surgimento das geometrias não euclidianas com Lobachevski e Bolyai, de como seus precursores, Łukasiewicz e Vasiliev desenvolveram seus trabalhos paralelamente e sem conhecimento um do outro tratando acerca da possibilidade de lógicas não aristotélicas.

Falamos do surgimento efetivo da lógica paraconsistente nos trabalhos de Jaśkowski e Newton da Costa, esse último sendo considerado o seu fundador, que também foram desenvolvidos paralelamente, um sem o conhecimento do outro, mas que possuíam motivações muito parecidas, dentre elas o resgate ou desenvolvimento de teorias inconsistentes, mas não triviais, seja em ciência, seja em filosofia.

Tratamos, no mesmo capítulo II, do desenvolvimento técnico dos sistemas formais inconsistentes, posteriormente batizados por Miró Quesada de lógicas paraconsistentes, tanto na sua dimensão sintática quanto na semântica expondo sua estrutura, seus esquemas de axiomas, alguns teoremas e demonstrações dos mesmos, alguns metateoremas etc.

Apresentamos ainda, no capítulo II, o trabalho de Alves e Queiroz que demonstrava um desenvolvimento natural de C_1 a partir da Lógica Positiva, de um modo que permite considerá-lo “dual” da construção do Cálculo Intuicionista. E, por fim, nesse mesmo capítulo, o desenvolvimento por Castro de um sistema de dedução natural para essa lógica, que encerra o primeiro capítulo.

No capítulo III apresentamos a teoria da quase-verdade, uma generalização a la Tarski do conceito de verdade pragmática desenvolvida por da Costa e colaboradores e que teria por objetivo ser uma teoria acerca da verdade em ciência. Nesse trabalho da Costa busca capturar o sentido de verdade de filósofos como Peirce e James para aplicação na teoria da ciência. Ou seja, busca solucionar o problema da verdade

provisória que permeia o trabalho do cientista buscando formalizar tal conceito em uma teoria útil aos cientistas e para ser usada pelo filósofo em seu trabalho de descrever a ciência.

Nesse capítulo mostramos um pouco das teorias da verdade mais conhecidas, nos detendo mais na teoria da verdade do pragmaticismo de Peirce e do pragmatismo de James, passamos então a uma apresentação informal do conceito de quase-verdade e finalmente a uma apresentação mais técnica.

No capítulo IV desta dissertação buscamos apresentar o ponto de vista de que ambos os resultados de da Costa, ou seja, a lógica paraconsistente e a teoria da quase-verdade, podem ser e são, como buscamos demonstrar, poderosos instrumentos para o desenvolvimento de teorias filosóficas, ou resgate de antigas teorias.

Nosso ponto foi o de que teorias como a dos objetos de Meinong, que foram abandonadas por acusações de inconsistência poderiam ser resgatadas e formalizadas usando a lógica paraconsistente como lógica subjacente e isso demonstra a utilidade dessa lógica para solucionar questões técnicas em ontologia que permitiriam o exame mais aprofundado de teorias nessa disciplina filosófica também chamada, por vezes, de metafísica.

Além disso, buscamos mostrar a utilidade da teoria da quase-verdade em filosofia da ciência mostrando que esta pode ser usada para o melhor esclarecimento de certas questões envolvendo, por exemplo, realistas e anti-realistas, de vários matizes, nessa disciplina.

O argumento fundamental foi o de que se uma teoria gera discussão filosófica, seja por si, seja porque serve como instrumento da filosofia para análise de outras teorias, tal teoria é relevante, sendo assim, era preciso mostrar que as teorias em discussão cumpriam esse papel, e acredito que o fizemos nas páginas acima, restando então que a lógica paraconsistente e a quase-verdade são relevantes e merecem estudos e desenvolvimentos em filosofia, tal como possuem em ciência em geral e na matemática em particular.

Referências bibliográficas:

1. ABE, Jair M. *Verdade Pragmática*. **Estudos Avançados** vol.5 N.12 São Paulo May/Aug. 1991. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?pid=s0103-40141991000200010&script=sci_arttext
2. ALVES, Elias H. QUEIROZ, Giovanni da S. de. ***The construction of calculi Cn of da Costa***. *The Journal of non-classical logic*, Campinas-SP, v. 8, p. 67-78, 1991.
3. ARISTÓTELES. *Metafísica*. Porto Alegre: Editora Globo, 1969. 1011b25, p. 107.
4. ARRUDA, A. I. *On the imaginary logic of N. A. Vasiliev*. In ARRUDA, A.I., DA COSTA, N. C. A., CHUAQUI, R. (Ed.). **Non-classical, model theory and computability**. Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 3-24.
5. ARRUDA, Aída I. *N. A. Vasiliev e a lógica paraconsistente*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE, 1990.
6. BUENO, O. *Empirical Adequacy: A Partial Structures Approach*, **Studies in History and Philosophy of Science** 28, pp. 585-610, 1997.
7. BUENO, O. *O Empirismo Construtivo: Uma Reformulação e Defesa*. Campinas: Coleção CLE, 1999.
8. BUENO, O. *Quase-verdade: significado e importância*. 2012. No prelo. http://web.me.com/otaviobueno/Site/Online_Papers_files/QuaseVerdade_Signific%26Import.pdf
9. BUENO, O.; COSTA, N. C. A. . *Quasi-truth, paraconsistency, and the foundations of science*. **Synthese (Dordrecht)**, v. 154, p. 383-399, 2007.
10. CARNIELLI, W. A. e M. LIMA-MARQUES: *Society semantics and multiple-valued logics*. **Advances in Contemporary Logic and Computer Science**, 235, p. 33-52, 1999.
11. CASTRO, Milton Augustinis de. *O método de dedução natural aplicado as lógicas proposicionais paraconsistentes Cn*. Dissertação de Mestrado, Campinas, 1998.
12. CHAKRAVARTTY, A. *A Metaphysics for Scientific Realism*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
13. D'OTAVIANNO, I. M. L. *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. Conferência apresentada na UNESP em abril de 2003.
14. DA COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . *Science and Partial Truth*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2003
15. DA COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, São Paulo: Hucitec, 2008, trabalho original de 1980 – análise do trabalho de Łukasiewicz.

16. DA COSTA, N. C. A. *O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX. In: ÉVORA, Fátima R.R. (ed.). Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea.* Campinas: UNICAMP/Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1992, p. 59-65. (Coleção CLE, v.11).
17. DA COSTA, N. C. A., ALVES, Elias H., *A semantical analysis of the calculi* Cn. **Notre Dame Journal of Formal Logic**, v. XVIII, n. 4, p. 621-630, 1977.
18. DA COSTA, N. C. A., MARANHÃO, J. S. de A. e SOUZA, Edelcio G. *Introdução à lógica paraconsistente: a hierarquia* Cn. São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2001.
19. DA COSTA, N. C. A.; DORIA, F. A.; PAPAVERO, N.. *Meinong's theory of objects and Hilbert's $\mathcal{E}$ - Symbol.* **Reports on Mathematical Logic** 25: p. 118–32, 1992.
20. DA COSTA, N.C. A. *O conhecimento científico.* São Paulo: Discurso Editorial, 1999.
21. DA COSTA, NCA. *Sobre a teoria lógica da linguagem*, Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo, v. 8, p. 58-70, 1958.
22. GRÁCIO, M. C. C.: *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza.* Tese de Doutorado: Campinas, 1999.
23. HACKING, I. *Representing and Intervening.* Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
24. HIFUME, Carlos. *Uma teoria da verdade pragmática: a quase-verdade de Newton da Costa.* Dissertação de Mestrado: Campinas, 2003.
25. KIRKHAM, Richard L. *Teorias da Verdade.* São Leopoldo: Unisinos, 2007.
26. KLEENE, S. C. *Introduction to Meta-Mathematics.* New York-Tokio: ISHI PRESS, 1950, 2009.
27. KRAUSE, Décio. *Newton da Costa e a filosofia da quase-verdade.* **Principia**, v. 13(2), p. 105-28, 2009. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~principi/p132-1.pdf>
28. KRAUSE, Décio. *Tópicos em Ontologia Analítica.* Santa Catarina: UFSC, 2009. Apostila de curso.
29. ŁUKASIEWICZ, J. *Sobre a lei da contradição em Aristóteles* ZINGANO, Marco. *Sobre a metafísica de Aristóteles.* São Paulo: Odysseus, 1910, 2005.
30. MARCONI, D. *La formalizzazione della dialettica.* Torino: Rosenberg & Sellier, 1979.
31. MEINONG, Alexius. *Sobre a teoria dos objetos.* 1904 in BRAÍDA, Celso. *Três aberturas em ontologia – Frege, Twardowski e Meinong.* Santa Catarina: Edições Nefelibata, 2005.

32. MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. New York: Van Nostrand, 2^o Edition, 1979.
33. MIKENBERG, J. ; COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R. . Pragmatic Truth and Approximation to Truth. *Journal of Symbolic Logic*, v. 51, n. 51, p. 201-221, 1986.
34. MISERDA, Andrés Bobenrieth. *Inconsistências, por qué no?* Colombia: Colcultura, 1996.
35. MORTARI, C. A., *Introdução à Lógica*, Editora da UNESP, 2003.
36. NEURATH, Otto, *Enunciados Protocolares*, in **Arte de Pensar-11**, Aires Almeida e outros, Lisboa: Didáctica Editora, 2004.
37. RUSSELL, Bertrand. *Da Denotação*. São Paulo: Abril Cultural, 1978, P 3-14. (Coleção: Os pensadores)
38. SILVESTRINI, Luiz Henrique da Cruz. *Uma Nova Abordagem para a Noção de Quase-Verdade* . Tese de Doutorado: Campinas, 2011.
39. TARSKI, Alfred. *A concepção Semântica da Verdade*. São Paulo: Unesp, 2007.
40. VAN FRAASSEN, B.C. *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press, 1980. Versão em português: *A Imagem científica*, UNESP, 2007.

Bibliografia Newton da Costa

Livros:

1. COSTA, N. C. A. ; Grana, N. . *Il Recupero dell' inconsistenza*. Nápoles: L'Orientale, 2009. v. 1. 221 p.
2. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . *On the foundations of science*. Rio de Janeiro: COPPE, 2008. v. 1. 294 p.
3. COSTA, N. C. A. . *Logici Clasice si Neclasice*. 1. ed. Bucareste: Editora Tehnica, 2004. v. 1. 328 p.
4. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . *Science and Partial Truth*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2003. v. 1. 272 p.
5. COSTA, N. C. A. . *Lógica inductiva y probabilidad*. Lima: Fondo de Cultura, 2000. 83 p.
6. COSTA, N. C. A. . *El conocimiento Científico*. Cidade de Máxico: UNAM, 2000. v. 1. 300 p.
7. COSTA, N. C. A. . *O Conhecimento Científico*. 02. ed. São Paulo: Discurso Editorial, 1999. 300 p.
8. COSTA, N. C. A. . *Metamathematics Of Science*. São Paulo: IEA-USP, 1998.
9. COSTA, N. C. A. . *Teorias Paraconsistentes de Conjuntos*. Campinas: CLE-UNICAMP, 1998.
10. COSTA, N. C. A. . *O Conhecimento Científico*. 1. ed. São Paulo: Discurso Editorial/FAPESP, 1997. 278 p.
11. COSTA, N. C. A. . *Logiques Classiques et non classiques*. Paris: Masson, 1997.
12. COSTA, N. C. A. . *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. 2. ed. São Paulo: Hucitec, 1994.
13. COSTA, N. C. A. . *Logica Indutiva e Probabilidade*. SAO PAULO: HUCITEC, 1993. 89 p.
14. COSTA, N. C. A. . *Sistemas Formais Inconsistentes*. 2. ed. Curitiba: Ed. UFPR, 1993.
15. COSTA, N. C. A. . *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. São Paulo: EDUSP, 1992. 90 p.
16. CONIDI, R. B. ; CONCI, D. A. ; COSTA, N. C. A. . *Fenomenologia e Logica Della Metamorfosi*. Napoles: Guida Editori, 1991. 70 p.

17. COSTA, N. C. A. ; CARRION, R. . *Introdução a Lógica Elementar com o Símbolo de Hilbert*. Rio Grande do Sul: Editora da Universidade Federal do RS, 1987. 00066 p.
18. COSTA, N. C. A. . *Ensaio sobre os fundamentos da Lógica*. 1. ed. São Paulo: EDUSP, 1980. 255 p.
19. COSTA, N. C. A. . *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: Hucitec, 1980.
20. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I ; CHUAQUI, R . *Mathematical Logic in Latin America* . [S. l.]: North-Holland, 1980.
21. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I ; SETTE, A M . *Proceedings of the third Brazilian Conference on Math. Logic*. São Paulo: Soc. Bras. Lógica, 1980.
22. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I ; CHUAQUI, R ; DEKKER, Marcel . *Mathematical Logic: proceedings of the first Brazilian Conference*. [S. l.]: [s. n.], 1978.
23. COSTA, N. C. A. . *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. São Paulo: Hucitec, 1977. 66 p.
24. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I ; CHUAQUI, R . *Non-Classical logics, Model theory and Computability*. North-Holland: , 1977.
25. COSTA, N. C. A. . *Álgebras de Curry*. São Paulo: Editora da USP, 1967.
26. COSTA, N. C. A. . *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. Porto Alegre: Globo, 1962.
27. COSTA, N. C. A. . *O Circulo de Viena*. Curitiba: Edições Prata da Casa, 1956. 56 p.

Capítulos de livros:

1. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. . *Quasi-truth and quantum mechanics*. In: Krause, D.; Videira, A.. (Org.). **Brazilian Studies in Philosophy and History of Science**. 1 ed. Dordrecht: Springer, 2011, v. 290, p. 301-312.
2. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . *Hypothesis that imply the independence of $P = NP$ from strong axiomatic systems*. In: Stefano Zambelli. (Org.). **Computable, Constructive and Behavioural Economic Dynamics**. New York: Routledge, 2010, v. 1, p. 79-102.
3. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . *Janus-Faced Physics: on Hilbert's 6th Problem*. In: Cristian S Calude (Editor). (Org.). **Randomness and complexity, from Leibnitz to Chaitin**. Auckland, Nova Zelândia: World Scientific, 2007, v. , p. 25-68.
4. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio . *The logic of complementarity*. In: van Benthem, Johan; Heinzmann, Gerhard; Rebuschi, Manuel; Visser, Henk. (Org.). **The Age of Alternative Logics: Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today**. 1 ed. : Springer, 2006, v. 1, p. 103-120.

5. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio ; BUENO, O. . *Paraconsistent Logics and Paraconsistency*. In: Jacquette,Dale; Gabbay, Dov M.; Thagard, Paul; Woods, John. (Org.). **Philosophy of Logic**, 5. 1 ed. : Elsevier, 2006, v. 5, p. 791-911.
6. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . *Computing the Future*. In: Vela Velupillai. (Org.). **Computability, Complexity and Constructivity in Economic Analysis**. 1 ed. Galway, Irlanda: Blackwell, 2005, v. 1, p. 14-31.
7. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio . *Remarks on the application of paraconsistent logic to physics*. In: Pietrocola, Mauricio; Freire Jr., Olival. (Org.). **Filosofia, Ciência e História: Michel Paty e o Brasil, uma homenagem aos 40 anos de colaboração**. São Paulo: FAPESP e Discurso Editorial, 2005, v. 1, p. 337-359.
8. COSTA, N. C. A. ; BÉZIAU, J. Y. ; BUENO, O. . *On the usefulness of paraconsistent logic*. In: D. Vanderveken (ed.). (Org.). **Logic, Thought and Action**. Dordrecht, Holanda: Springer, 2005, v. , p. 465-478.
9. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio . *Complementarity and paraconsistency*. In: S. Rahman; J. Symons; D. M. Gabbay; J. P. van Bendegen. (Org.). **Logic, Epistemology, and the Unity of Science**. 1 ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004, v. 1, p. 557-568.
10. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. ; VOLKOV, A. . *Outline of a Paraconsistent Category Theory*. In: Weingartner, P.. (Org.). **Alternative Logics. Do Sciences Need Them?**. Berlin: Heidelberg Verlag, 2004, v. , p. 95-114.
11. COSTA, N. C. A. . *Logic and complementarity*. In: Rahman, S.; Symons, J.; Gabay, D. M.; van Bendegen, J. P.. (Org.). **Logic, Epistemology, and the Unity of Science**. Berlin: Springer, 2004, v. 1, p. 41-65.
12. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. . *Paraconsistentia: Catre o posibilita interpretare*. In: Gheorghiu, Dumitru. (Org.). **Ex Falso Quodlibet**. 1 ed. Bucharest: Editura Tehnica, 2004, v. 1, p. 41-66.
13. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio . *Set theoretical models for quantum systems*. In: Dalla Chiara, M.L.; Giuntini, R.; Laudisa, F. (Eds.). (Org.). **Language, Quantum, Music**. : Springer, 1999, v. , p. 171-181.
14. COSTA, N. C. A. . *A model-theoretical approach to variable binding term operators*. In: A. I. Arruda; R. Chuaqui; N. C. A. Costa;. (Org.). **Mathematical Logic in Latin America**. North-Holland: [s.n.], 1980, v. , p. 133-162.
15. COSTA, N. C. A. ; KOTAS, J . *Some problems on logical matrices and valorizations*. In: A. I. Arruda; N. C. A. Costa; A. M. Sette. (Org.). **Proceedings of the third Brazilian Conference on the Math. Logic**. [S. l.]: Soc. Bras. Lógica, 1980, v. , p. 131-146.
16. COSTA, N. C. A. ; KOTAS, J . *On the problem of Ja'skowski and the logics of Lukasiewicz*. In: A. I. Arruda; N. C. A. Costa; R. Chuaqui. (Org.). **Mathematical**

Logic: proceedings of the first Brazilian Conference. [S. l.]: [s. n.], 1978, v. , p. 127-139.

17. COSTA, N. C. A. ; DUBIKAJTIS, L . *On Ja'skowski discussive logic*. In: A. I. Arruda; N. C. A. Costa; R. Chuaqui.. (Org.). **Non-Classical Logics, Model Theory and Computability**. North-Holland: , 1977, v. , p. 37-56.

18. COSTA, N. C. A. ; KOTAS, J . *On some modal logical systems defined in connection with Ja'skowski's problem*. In: A. I. Arruda; N. C. A. Costa; R. Chuaqui.. (Org.). **Non-Classical Logics, Model Theory and Computability**. North-Holland: , 1977, v. , p. 57-73.

Artigos:

1. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio ; BUENO, O. . Issues in the foundations of science I: languages, structures and models. Manuscript (UNICAMP), v. 33, p. 123-141, 2010.

2. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. . Non reflexive logics. *Revista Brasileira de Filosofia*, v. 232, p. 181-196, 2009.

3. COSTA, N. C. A. ; Doria, F.A. . How to build a hypercomputer?. *Applied Mathematics and Computation*, v. 215, p. 1361-1367, 2009.

4. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F ; BIR, E . On the metamathematics of the P vs. NP question?. *Applied Mathematics and Computation*, v. 189, p. 1223-1240, 2007.

5. BUENO, O. ; COSTA, N. C. A. . Quasi-truth, paraconsistency, and the foundations of science. *Synthese (Dordrecht)*, v. 154, p. 383-399, 2007.

6. COSTA, N. C. A. ; A. A. M. Rodrigues . Definability and invariance. *Studia Logica*, v. 86, p. 1-30, 2007.

7. COSTA, N. C. A. ; Krause, D. . Logical and Philosophical Remarks on Quasi-Set Theory. *Logic Journal of the IGPL*, v. 15, p. 421-431, 2007.

8. COSTA, N. C. A. . Some aspects of quantum physics. *Principia (Florianópolis. Online)*, v. 11, p. 77-95, 2007.

9. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F . Some thoughts on hypercomputation?. *Applied Mathematics and Computation*, v. 178, p. 83-92, 2006.

10. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . Addendum to Consequences of an exotic formulation for $P = NP$ ". *Applied Mathematics and Computation*, v. 172, p. 1364-1367, 2006.

11. COSTA, N. C. A. ; KRAUSE, Décio . Between Rationalism and Empiricism: Selected Papers in the Philosophy of Physics; E. Scheibe , [Book Review]. *Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, v. 36, p. 210-217, 2005.

12. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. ; FRENCH, S. . A coherence theory of truth. *Manuscrito (UNICAMP)*, v. 28, n. 2, p. 263-290, 2005.
13. DORIA, F. A. ; COSTA, N. C. A. . On Set Theory as a Foundation for Computer Science. *Bulletin of the Section of Logic*, v. 33, p. 33-40, 2004.
14. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . On some recent undecidability and incompleteness results in the axiomatized sciences. *Philosophy of Latin America*, Kluwer, v. 1, p. 273-284, 2003.
15. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. . Consequences of an exotic definition for $=$. *Applied Mathematics and Computation*, v. 145, n. 2-3, p. 655-665, 2003.
16. COSTA, N. C. A. ; French, S. . Inconsistency in science: a partial perspective. *Inconsistency in Science*, J. Mehens Editor, v. 1, p. 105-118, 2002.
17. COSTA, N. C. A. . Logic and ontology. *Principia (Rio de Janeiro)*, v. 56, n. n.1, p. 279-298, 2002.
18. COSTA, N. C. A. ; ANDION, Nelson ; MIRANDA, R. . First order effects in the Michelson-Morley experiment. *Physics Essays*, v. 15, n. 4, p. 422-437, 2002.
19. COSTA, N. C. A. ; SANT'ANNA, A. S. . Time in thermodynamics. *Foundations of Physics*, v. 32, p. 1785-1796, 2002.
20. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. . Paraconsistency: towards a tentative interpretation.. *Theoria (Madrid)*, v. 16, p. 119-145, 2001.
21. COSTA, N. C. A. ; SANT'ANNA, A. S. . The mathematical role of time and space-time in classical physics. *Foundations of Physics Letters*, v. 14, p. 553-563, 2001.
22. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. . Belief change and inconsistency.. *Logique et Analyse, França*, v. 41, p. 31-56, 2000.
23. COSTA, N. C. A. ; French, S. . Models, theories, structures: Thirty years on. *Philosophy Of Science*, v. 67, p. 116-127, 2000.
24. COSTA, N. C. A. ; ABE, J. M. . Paraconsistência em informática e inteligência artificial.. *Estudos Avançados, São Paulo*, v. 14, p. 161-174, 2000.
25. COSTA, N. C. A. ; SEGUNDO, J. A. B. . Sebastião e Silva e o conceito de distribuição. *Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo*, v. 22, p. 114-121, 2000.
26. COSTA, N. C. A., Otavio Bueno, . Quasi-Truth, Supervaluations and Free Logic. *History and Philosophy of Logic*, v. 20, p. 215-226, 1999.
27. COSTA, N. C. A. ; CAIEIRO, R. C. . k-transforms in Classical and Paraconsistent Logics. *Logic and Logical Philosophy*, v. 7, p. 63-80, 1999.

28. COSTA, N. C. A. . Paraconsistent Logic. *Logic and Logical Philosophy*, v. 7, p. 25-34, 1999.
29. COSTA, N. C. A. ; BUENO, S. ; FRENCH, S. . The Logic of Pragmatic Truth. *Journal of Philosophical Logic*, v. 27, p. 603-620, 1998.
30. TSUJI, M. ; COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . The incompleteness of theories of games. *Journal of Philosophical Logic*, v. 27, p. 553-568, 1998.
31. COSTA, N. C. A. ; BUENO, O. ; FRENCH, S. . Suppes Predicates for Space-Time. *Synthese (Dordrecht)*, v. 112, n. 2, p. 271-279, 1997.
32. COSTA, N. C. A. . An Intensional Schrödinger Logic. *Notre Dame Journal of formal Logic*, Polônia, n. 03, p. 179-194, 1997.
33. SANT'ANNA, A. S. ; COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . The Atiyah - Singer index theorem and the gauge field copy problem. *Journal of Physics. A, Mathematical and General*, v. 30, n. 30, p. 5511-5516, 1997.
34. COSTA, N. C. A. . Paraconsistent Mathematics. *Proceedings do First International Congress on Paraconsistency*, Bélgica, 1997.
35. COSTA, N. C. A. . Structures, Suppes Predicates, And Boolean-Valued Models In Science. *Philosophical Logic and Logic Philosophy*, França, v. ., p. 91-118, 1996.
36. COSTA, N. C. A. ; BÉZIAU, J. Y. ; BUENO, O. . Malinowski and Suszko on Many-Valued Logic: On the Reduction of Many-Valuedness to Two-Valuedness. *Modern Logic*, França, v. 6, n. 06, p. 272-299, 1996.
37. COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R ; BUENO, O. . The Logic Of Quasi-Truth. *Notas de la Sociedad Matematica de Chile*, Chile, v. xv, n. 15, p. 7-26, 1996.
38. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . On Jaskowski's Discussive Logic. *Studia Logica*, v. 54, n. 1, p. 33-60, 1995.
39. COSTA, N. C. A. ; BÉZIAU, O. -. ; BUENO, O. . Paraconsistent Logic in a Historical Perspective. *Logique et Analyse*, França, v. ., p. 111-125, 1995.
40. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . Undecidability, incompleteness and Arnold Problems. *Studia Logica*, Varsóvia, v. 55, p. 22-32, 1995.
41. COSTA, N. C. A. ; COSTA JR., N. C. A. . La teoría del caos y el mercado financiero. *Información Tecnológica*, v. 6, p. 63-68, 1995.
42. COSTA, N. C. A. ; BÉZIAU, J. Y. ; BUENO, O. . Aspects of paraconsistent logic. *Bulletin of the IGPL*, v. 3, p. 597-614, 1995.
43. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. ; Furtado-do-Amaral, A. F. ; BARROS, J. A. . Two questions on the geometry of gauge fields. *Foundations of Physics*, v. 24, p. 783-800, 1994.

44. COSTA, N. C. A. ; BEZIAU, J. Y. . Carnot's Logic. Bulletin of the Section of Logic, v. 3, n. 22, p. 98-103, 1993.
45. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . Incomplete Satisfiability Problems. Bulletin of the Section Logic, v. 3, n. 22, p. 98-103, 1993.
46. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . On The Incompleteness Of Axiomatized Models For The Empirical Sciences. Philosophica, v. 50, n. 2, p. 73-100, 1992.
47. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . On The Existence Of Very Difficult Satisfiability Problems. Bulletin of the Section Logic, University of Lodz, v. 4, n. 21, p. 122-133, 1992.
48. COSTA, N. C. A. ; SUBRAHMANIAN, V. S. ; VAGO, C. . The Paraconsistent Logics P. Zeitschrift fur math. Logik und Grundlagen der Mathematik, Alemanha, v. 37, p. 131-148, 1991.
49. COSTA, N. C. A. ; ABE, J. ; SUBRAHAMANIAN, V. S. . Remarks On Annotated Logic. Zeitschrift Fur Logic un Grund Der Mathematik. DTCH VIG D. WISS, Alemanha, v. 37, p. 561-570, 1991.
50. COSTA, N. C. A. ; French, Steven . On Russell's principle of induction. Synthese (Dordrecht), v. 86, n. 2, p. 285-295, 1991.
51. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . Classical physics and Penrose's thesis. Foundations of Physics Letters, v. 4, p. 363-373, 1991.
52. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. . Undecidability and incompleteness in classical mechanics. International Journal of Theoretical Physics, v. 30, p. 1041-1073, 1991.
53. COSTA, N. C. A.; PUGA, L. Z. ; CARNIELLI, Walter Alexandre . Kantian and non-Kantian logics. Logique et Analyse, v. 1, p. 235-254, 1991.
54. COSTA, N. C. A. . Razionalita, Logica e Matematica. Criterio, v. 8, n. 2, p. 102-108, 1990.
55. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . The Model-Theoretic Approach In The Philosophy Of Science. PHILOSOPHY OF SCIENCE, v. 57, n. 2, p. 248-265, 1990.
56. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . Belief, Contradiction And The Logic Of Self-Deception. American Philosophical Quartely, v. 27, n. 3, p. 179-197, 1990.
57. COSTA, N. C. A. . Logics That Are Both Paraconsistent And Paracomplete. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, v. 83, p. 29-32, 1990.
58. COSTA, N. C. A. ; SETTE, A. M. . Remarks On Analogy. TEORIA, v. 10, n. 2, p. 49-58, 1990.

59. COSTA, N. C. A. ; PUGA, L. C. ; VERNENGO, R. . Derecho, Moral y Preferencias Valorativas. *Theoria*, Universidad del Pais Vasco, v. 5, n. 12, p. 9-29, 1990.
60. COSTA, N. C. A. . A Importância Filosófica da Lógica Paraconsistente. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, Curitiba, v. 11, n. 2, p. 91-113, 1990.
61. COSTA, N. C. A. ; DORIA, F. A. ; BARROS, J. A. . A Suppes predicate for general relativity and set-theoretically generic spacetimes. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 29, p. 935-961, 1990.
62. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . On the Logic of Belief. *Philosophy And Phenomenological Research*, n. 49, p. 431-446, 1989.
63. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . A note on temporal logic. *BULLETIN OF THE SECTION OF LOGIC, POLISH ACADEMY OF SCIENCES*, v. 1, n. 18, p. 51-56, 1989.
64. COSTA, N. C. A. ; French, Steven . Pragmatic Truth and the Logic of Induction. *British Journal for the Philosophy of Science*, v. 40, p. 333-356, 1989.
65. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . Belief and Contradiction. *Crítica (UEL)*, n. 20, p. 3-11, 1988.
66. COSTA, N. C. A. ; PUGA, L. Z. . On the Imaginary Logic of N. A. Vasilev. *Zeitschrift Fur Math. Logik Und Grundlagen Der Math.*, n. 34, p. 205-211, 1988.
67. COSTA, N. C. A. ; SYLVAN, R. . Cause as an implication. *Studia Logica*, n. 47, p. 413-428, 1988.
68. COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R. . "On Suppes Set Theoretical Predicates". *ERKENNTNIS*, n. 29, p. 95-112, 1988.
69. COSTA, N. C. A. ; FRENCH, S. . "Pragmatic, Probability, Logical Omniscience And Popper-Miller Argument". *FUNDAMENTA SCIENTIAE*, n. 9, p. 43-53, 1988.
70. COSTA, N. C. A. ; ALCANTARA, L. P. . The Scientific work of A. L. Arruda. *Contemporary Mathematics*, n. 69, p. 1-15, 1988.
71. COSTA, N. C. A. . Aspectos de la Filosofia de la Logica de L. Pena. *Arbor*, n. 132, p. 9-32, 1988.
72. COSTA, N. C. A. ; PUGA, L. Z. . Sobre a Lógica Deontica Não-Clássica. *Crítica (UEL)*, n. 29, p. 19-36, 1987.
73. COSTA, N. C. A. ; ALCANTARA, L. P. . Remarks On Higer-Order Modal Logic. *Acta Cientifica Venezoelana*, v. 16, n. 38, p. 282-284, 1987.
74. COSTA, N. C. A. ; MARCONI, D. . A Note on Paracomplete Logic. *Rendiconti Dell Acad. Nazionale Dei Lincei*, v. 16, n. 80, p. 504-509, 1986.

75. COSTA, N. C. A. ; Carnielli, Walter A. . On paraconsistent deontic logic. *Philosophia* (Ramat Gan), v. 16, n. 39, p. 293-305, 1986.
76. COSTA, N. C. A. . A Note On Type Theory. *C.R. Acad. Bulgare Des Sciences*, n. 39, p. 5-7, 1986.
77. COSTA, N. C. A. . Pragmatic Probability. *Erkenntnis*, n. 25, p. 141-162, 1986.
78. MIKENBERG, J. ; COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R. . Pragmatic Truth and Approximation to Truth. *Journal of Symbolic Logic*, v. 51, n. 51, p. 201-221, 1986.
79. COSTA, N. C. A. . On Paraconsistent Set Theory. *Logique Et Analyse*, n. 115, p. 316-371, 1986.
80. COSTA, N. C. A. ; LOPARIC, A. . Paraconsistency, Paracompleteness, and Induction. *Logique Et Analyse*, n. 113, p. 73-80, 1986.
81. CAICEDO, X. ; CHUAQUI, R ; COSTA, N. C. A. ; PRISCO, C. A. di . Meeting of the Association for Symbolic Logic: Caracas, Venezuela, 1983. *Journal of Symbolic Logic*, v. 49, p. 1430-1440, 1984.
82. ARRUDA, A I ; CAICEDO, X. ; CHUAQUI, R ; COSTA, N. C. A. . Meeting of the Association for Symbolic Logic: Bogota, Colombia, 1981. *Journal of Symbolic Logic*, v. 48, p. 884-892, 1983.
83. ARRUDA, A I ; CHUAQUI, R ; COSTA, N. C. A. ; MIKENBERG, I. . Meeting of the Association for Symbolic Logic: Santiago, Chile, 1978. *Journal of Symbolic Logic*, v. 46, p. 180-190, 1981.
84. COSTA, N. C. A. . El símbolo ϵ de Hilbert. *Lecturas Matemáticas*, [S. l.], v. 1, p. 1-13, 1980.
85. COSTA, N. C. A. ; WOLF, R G . Studies in paraconsistent logic I: the dialectical principle of the unity of opposites. *Philosophia*, [S. l.], v. 9, p. 189-217, 1980.
86. COSTA, N. C. A. ; KOTAS, J . A new formulation of discussive logic. *Studia Logica*, v. 38, p. 429-445, 1979.
87. ARRUDA, A I ; MIRO-QUESADA, F. ; COSTA, N. C. A. ; CHUAQUI, R . Meeting of the Association for Symbolic Logic: Campinas, Brazil 1976. *Journal of Symbolic Logic*, v. 43, p. 352-364, 1978.
88. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . Une sémantique pour le calcul C_1 . *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 284, p. 279-282, 1977.
89. COSTA, N. C. A. ; ALVES, E H . A semantical analysis of the calculi C_n . *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 18, p. 621-630, 1977.

90. COSTA, N. C. A. ; ALVES, E H . Une sémantique pour le calcul $C1'$. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 283, p. 729-731, 1976.
91. COSTA, N. C. A. ; DIAS, M F . Sur le système D^* de théorie des ensembles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 282, p. 5-7, 1976.
92. COSTA, N. C. A. ; PINTER, C . A-logic and infinitary languages. Zeitschrift Math Logik U Grundl d Math, v. 29, p. 105-112, 1976.
93. COSTA, N. C. A. ; DRUCK, I F . Sur les 'vbtos'selon M. Hatcher. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 281, p. 741-743, 1975.
94. COSTA, N. C. A. . Remarks on Ja'skowski's discussive logic. Reports On Math Logic, v. 4, p. 7-16, 1975.
95. COSTA, N. C. A. . α -models and the system T and T^* . Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 14, p. 443-454, 1974.
96. COSTA, N. C. A. . Remarques sur les calculs C_n , C_n^* , $C_n=$ et D_n . Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 278, p. 819-821, 1974.
97. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . Le schéma de la séparation dans les systèmes J_n . Mathematica Japonica, v. 19, p. 183-186, 1974.
98. COSTA, N. C. A. . On the theory of inconsistent formal systems. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 11, p. 497-510, 1974.
99. COSTA, N. C. A. . Sobre o conceito de transformada no cálculo restrito de predicados. . Resenhas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, v. 2, p. 53-57, 1973.
100. COSTA, N. C. A. . Modèles et univers de Dedekker. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 275, p. 483-486, 1972.
101. COSTA, N. C. A. ; BIGNOLE, D . On supernormal Ehresmann-Dedekker universes. Mathematische Zeitschrift, v. 122, p. 342-350, 1971.
102. COSTA, N. C. A. . Remarques sur les systèmes N_{Fi} . Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 272, p. 1149-1151, 1971.
103. COSTA, N. C. A. ; D'OTTAVIANO, I M. . Sur un problème de Jaskowski.. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 270, p. 1349-1353, 1970.
104. COSTA, N. C. A. . On the underlying logic of two systems of set theory.. Proceedings Konenkl Ak Wetens, v. 73, p. 1-8, 1970.

105. COSTA, N. C. A. ; BIGNOLE, D . Sur les systèmes D^* suggéré par Dedeker.. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 270, p. 841-844, 1970.
106. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . Sur le schéma de la séparation.. Nagoya Mathematical Journal, v. 38, p. 71-84, 1970.
107. COSTA, N. C. A. ; SETTE, A M . Les algèbres C_n .. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 268, p. 1011-1014, 1969.
108. COSTA, N. C. A. . On a set theory suggested by Dedeker and Ehresmann.. Proc Japan Academy Of Sciences, v. 45, p. 880-888, 1969.
109. COSTA, N. C. A. ; DUBIKAJTIS, L . Sur la logique discursive de Jaskowski.. Bulletin Academie Polonaise Des Sciences, v. 15, p. 551-557, 1968.
110. COSTA, N. C. A. . Filtres et idéaux d'une algèbre C_n .. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 264, p. 549-552, 1967.
111. COSTA, N. C. A. . Two formal systems of set theory.. Proceedings Konenkl Ak Wetens, v. 70, p. 45-51, 1967.
112. COSTA, N. C. A. . Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes.. Publications Du Département de Mathématiques Université de Lyon, Lyon, v. 4, p. 2-8, 1967.
113. COSTA, N. C. A. . Un nouveau système formel suggéré par Dedeker.. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 256, p. 85-88, 1967.
114. COSTA, N. C. A. ; CAROLI, A de . Remarques sur les univers d'Ehresmann-Dedeker.. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 256, p. 761-763, 1967.
115. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . Transformadas no cálculo restrito de predicados. Anais da Academia Brasileira de Ciências, v. 38, p. 385-390, 1966.
116. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . O paradoxo de Curry-Moh Schaw Kwei. Bol Soc Mat São Paulo, São Paulo, v. 18, p. 83-89, 1966.
117. COSTA, N. C. A. . Opérations non monotones dans les treillis. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 263, p. 429-432, 1966.
118. COSTA, N. C. A. . Sur les systèmes formels C_i , C^*_i , $C_i=$, D_i , et $N F_i$. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique, Paris, v. 260, p. 5427-5430, 1965.
119. COSTA, N. C. A. ; GUILLAUME, M . Negations composées et loi de Peirce dans les systèmes C . Portugaliae Mathematica, v. 24, p. 201-210, 1965.

120. COSTA, N. C. A. . On two systems of set theory. *Proceedings Konenkl Ak Wetens*, v. 68, p. 95-99, 1965.
121. COSTA, N. C. A. . Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 258, p. 27-29, 1964.
122. COSTA, N. C. A. . Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 258, p. 1111-1113, 1964.
123. COSTA, N. C. A. . Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 258, p. 1366-1368, 1964.
124. COSTA, N. C. A. . Sur un système inconsistant de théorie des ensembles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 258, p. 3144-3147, 1964.
125. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . Sur un théorème de Hilbert et Bernays. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 258, p. 6311-6312, 1964.
126. COSTA, N. C. A. ; ARRUDA, A I . Sur une hiérarchie de systèmes formels. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 259, p. 2943-2945, 1964.
127. COSTA, N. C. A. ; GUILLAUME, M . Sur les calculs Cn. *Anais da Academia Brasileira de Ciências, Brasil*, v. 36, p. 379-382, 1964.
128. COSTA, N. C. A. . A situação atual da teoria dos conjuntos. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Paraná*, v. 6, p. 40-43, 1963.
129. COSTA, N. C. A. . Vicente Ferreira da Silva e a lógica. *Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo*, v. 14, p. 499-508, 1963.
130. COSTA, N. C. A. . Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, Paris, v. 257, p. 3790-3793, 1963.
131. COSTA, N. C. A. . Sobre a natureza dos juízos matemáticos. *Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo*, v. 12, p. 207-208, 1962.
132. COSTA, N. C. A. . Um currículo para a formação do professor de Matemática do Ensino Secundário. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Paraná*, v. 5, p. 45-47, 1962.
133. COSTA, N. C. A. . Conceptualización de la filosofía científica. *Revista de Filosofía Universidad de Costa Rica, Costa Rica*, v. 11, p. 363-366, 1960.

134. COSTA, N. C. A. . Correções ao artigo Considerações sobre o cálculo de Heyting. An Soc Paran Mat, Paraná, v. 3, p. 1-11, 1960.
135. COSTA, N. C. A. . Observações sobre o conceito de existência em matemática. An Soc Paran Mat, Paraná, v. 2, p. 16-19, 1959.
136. COSTA, N. C. A. . O significado da obra de Kurt Gödel para os fundamentos da matemática. Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo, v. 9, p. 310-319, 1959.
137. COSTA, N. C. A. . Nota sobre o conceito de contradição. An Soc Paran Mat, Paraná, v. 1, p. 6-8, 1958.
138. COSTA, N. C. A. . Uma questão de filosofia da matemática. An Soc Paran Mat, Paraná, v. 1, p. 21-27, 1958.
139. COSTA, N. C. A. . Sobre a teoria lógica da linguagem. Rev Brasileira de Filosofia, São Paulo, v. 8, p. 58-70, 1958.
140. COSTA, N. C. A. . Uma propriedade dos números primos. Revista da Faculdade de Filosofia Católica do Paraná, Paraná, v. 3, p. 272-273, 1958.
141. COSTA, N. C. A. . Nota sobre a lógica de Brouwer-Heyting. An Soc Paran Mat, Paraná, v. 1, p. 9-10, 1958.
142. COSTA, N. C. A. . Considerações sobre o cálculo de Heyting. An Soc Paran Mat, Brasil, v. 4, p. 42-46, 1957.
143. COSTA, N. C. A. ; BARSOTTI, L . Kurt Gödel e os problemas da matemática atual. An Soc Paran Mat, Paraná, v. 4, p. 53-60, 1957.
144. COSTA, N. C. A. . Une généralisation du théorème de Bouniakowski. An Soc Paran Mat, Brasil, v. 3, p. 12-16, 1956.
145. COSTA, N. C. A. . Alguns teoremas elementares sobre divisibilidade. An Soc Paran Mat, Brasil, v. 3, p. 60-63, 1956.
146. COSTA, N. C. A. . O estado atual da filosofia da matemática. An Soc Paran Mat, Brasil, v. 3, p. 17-27, 1956.
147. COSTA, N. C. A. . Nota sobre o Teorema de Wilson. An Soc Paran Mat, Brasil, v. 2, p. 5-6, 1955.
148. COSTA, N. C. A. . Sobre a teoria lógica da linguagem. Curitiba: Edição "Prata da Casa", 1954.
149. COSTA, N. C. A. . A natureza dos juízos matemáticos. Anais do Congresso Internacional de Filosofia de São Paulo vol. III, 1954, p. 807-811.

Apêndice II

Apendice III