UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Dissertação de Mestrado

Considerações sobre alguns resultados obtidos no contexto da Cosmologia Newtoniana: aspectos clássicos e quânticos

Danielle Lima de Loiola

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Abril 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Considerações sobre alguns resultados obtidos no contexto da Cosmologia Newtoniana: aspectos clássicos e quânticos.

Danielle Lima de Loiola

Dissertação de Mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba(UFPB) como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Abril de 2011

L834c Loiola, Danielle Lima de.
Considerações sobre alguns resultados obtidos no contexto da cosmologia newtoniana / Danielle Lima de Loiola.- João Pessoa, 2011.
81f.
Orientador: Valdir Barbosa Bezerra
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Cosmologia Newtoniana. 3. Gravitação de Newton – Teoria. 4. Mecânica quântica.

UFPB/BC CDU: 53(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 25 de abril de 2011, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **aprova Danielle Lima deLoiola** na defesa de sua dissertação intitulada **"***Considerações sobre alguns resultados obtidos no contexto da cosmologia Newtoniana: aspectos clássicos e quânticos***"**.

João Pessoa, 25 de abril de 2011

Carlos Augusto Romero Filho	Valdir B. Bezerra
1º Ex. Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho (DCE/UFPB)	Presidente (Orientador) Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB)
Geusa de A. Marques	*NÃO HÁ*
2º Ex. Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques (UFCG)	(Co-Orientador) --- (---)

Agradecimentos

A Deus por me conceder a vida.

À minha família, e em especial, à minha mãe e irmão pelo amor e pela confiança que depositam em mim.

Ao professor Valdir Bezerra pela orientação e contribuição no meu aprendizado, pela compreensão e pelas palavras de consolo e de motivação.

Ao meu namorado e amigo Lúcio meus sinceros agradecimentos pelo carinho, amor, companheirismo e "por todo o tempo"que dedicou a mim para tornar essa conquista realidade.

Aos professores e amigos do IFMA Francisco Miranda, Fábio Sales e Marcos Rogério pelos esforços e contribuições acadêmicas e pessoais que me fizeram vir a João Pessoa.

Aos professores da Pós-Graduação em Física pela contribuição em minha formação acadêmica, aos amigos e colegas das salas 4, 5, 13 e 15, aos colegas de grupo pelas contribuições e discussões no decorrer do trabalho e aos amigos que adquiri na cidade em especial Cristiana, Dulcilene e Aliliane pelos momentos de alegrias e tristezas que compartilhamos juntos que ficarão na memória.

Ao programa REUNI por financiar meus estudos durante o mestrado.

Resumo

As equações de movimento são obtidas na cosmologia Newtoniana, com o uso da dinâmica Newtoniana e da teoria da gravitação de Newton. Mostra-se que estas equações são equivalentes às da relatividade geral, com o fator de escala obedecendo a mesma equação em ambas as teorias, quando a pressão é desprezível. Discute-se as características da expansão para universos dominados por radiação, matéria ou vácuo.

A gravitação Newtoniana é formulada na linguagem geométrica. Neste cenário, mostra-se que para universos homogêneos e isotrópicos, a equação para o desvio geodésico na cosmologia Newtoniana é exatamente a mesma que é obtida na teoria de Einstein.

Discutimos as possíveis consequências de admitirmos a correção de Yukawa à interação gravitacional Newtoniana. Mostra-se que esta correção não introduz modificações nas equações cosmológicas.

Apresentamos e discutimos um resultado sobre a evolução de perturbações em modelos cosmológicos Newtonianos, com criação de matéria, no caso em que a pressão é desprezível. Comentários adicionais são feitos para um sistema no qual a pressão é considerada.

Investigamos, também, alguns aspectos da cosmologia Newtoniana quântica e construímos uma função de onda para um universo com criação contínua de matéria, no contexto da mecânica quântica não-relativística.

Palavras-chave: Cosmologia Newtoniana, Cosmologia Newtoniana Quântica, Crescimento de Inomogeneidades.

Abstract

The equations of motion are obtained in the framework of Newtonian cosmology using only the Newtonian dynamics and Newtonian gravity. It is shown that these equations are in close correspondence with the ones obtained in the framework of general relativity, with the scale factor satisfying the same equation in both theories, when the pressure is neglected. The characteristics of the expansion for a universe dominated by radiation, matter or vacuum are obtained.

The Newtonian gravity is formulated in geometrical language. In this scenario, it is shown that for homogeneous and isotropic universes, the equation for the geodesic deviation in Newtonian cosmology is exactly the same as the geodesic equation in Einstein cosmology.

We discuss possible consequences of the assumption of a Yukawa correction to the Newtonian gravitational interaction. It is shown that this correction does not introduce any modification in the cosmological equations.

We present and discuss a result obtained concerning the growth of density perturbations in Newtonian cosmological models with creation of matter, in the case in which the pressure is neglected. Some addition comments are done for a system in which the pressure is considered.

We also investigate some aspects of quantum Newtonian cosmology and construct a wave function for a universe with continuous matter creation, in the framework of non-relativistic quantum mechanics.

Keywords: Newtonian Cosmology, Quantum Newtonian Cosmology, Growth of inhomogeneities.

[...] Ah que ilha inexata quando toca o coração,
eu te toco e tu me tocas
cai nas cordas do violão
e se um dia eu for embora
para bem longe deste chão
eu jamais te esquecerei
São Luís do Maranhão
eu jamais te esquecerei
São Luís do Maranhão
eu jamais te esquecerei
São Luís do Maranhão.
Cesar Nascimento-Ilha Magnética

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia moderna, relativística ou *Einsteiniana*, é descrita com o uso da teoria da relatividade geral, cuja formulação é geométrica, de modo que as descrições dos efeitos cosmológicos estão associadas à geometria do espaço-tempo. Esta formulação faz uso do conceito de espaço-tempo que é compreendido, matematicamente, através do conceito de variedade diferenciável. Outros temas da matemática moderna, de natureza complexa, tais como álgebra tensorial, e grupos contínuos também são usados nessa formulação.

Inicialmente, a cosmologia relativística não foi aceita para descrever o universo, constituindo-se, assim, em apenas mais uma nova teoria cosmológica, diferente das teorias anteriores. Nos seus primórdios, mais exatamente, no ano de 1917, duas soluções foram encontradas. A primeira pelo próprio Einstein e a outra, pelo astrônomo holandês, Willen de Sitter. Essas duas soluções faziam previsões sobre universos completamente distintos. A primeira tratava de um universo com matéria, enquanto a segunda levava à existência de um universo vazio. A partir destas soluções, podemos entender porque àquela altura não havia aceitação da "nova teoria do cosmo", uma vez que as previsões astronômicas não confirmavam esses cenários.

Outras soluções foram encontradas por Friedmann e Lemaitre, que passaram despercebidas por algum tempo, até que o astrônomo americano Edwin Hubble descobriu o *efeito Döppler* ao examinar a luz proveniente de estrelas distantes. A descoberta de Hubble levou os cosmólogos à conclusão de que o desvio para o vermelho da luz emitida por essas estrelas poderia estar associado ao fato de que o universo está em expansão.

Durante uma reunião da "*British Association for the Advancement of Science*", em 1931, o astrônomo belga Georges Lemaitre apresentou sua teoria, na qual o universo estava em expansão. Nascia, nesse momento, a moderna cosmologia, baseada na teoria geral da relatividade, e conhecida como cosmologia relativística ou *Einsteiniana*.

Nesses primeiros anos da década de 30 do século passado, a cosmologia relativística passou a ser aceita, com menos restrições, tendo em vista que ela previa uma modelo compatível com as observações astronômicas. No entanto, em 1934, o astrofísico e matemático britânico Edward Milne [1] adotou uma abordagem baseada na teoria de Newton, na qual os fenômenos gravitacionais não estão associados aos efeitos da curvatura do espaço-tempo. Nesse contexto, foi mostrado que o comportamento do universo poderia ser entendido com base na física clássica [1], [2] a qual dispensa a complexidade matemática do estudo do universo baseado na cosmologia relativística. Isto significa, dentre outras coisas, que é possível, nesse cenário, reobter os resultados fornecidos por modelos homogêneos e isotrópicos do universo, de uma maneira bastante simples, do ponto de vista matemático.

Na abordagem de Milne [1] denominada cosmologia Newtoniana, a expansão do Universo não era algo dinâmico, inerente ao próprio universo. Nesta, o universo é estático. No entanto, era preciso incorporar as observações de Hubble sobre o universo em expansão. A solução encontrada foi admitir que a expansão observada está associada ao movimento das partículas no universo. Portanto, este movimento das partículas no espaço estático produziria os mesmos fenômenos que os gerados por partículas estacionárias no universo em expansão. Assim, a expansão era entendida como sendo provocada pelos movimentos das partículas, e não do espaço, o que permitia preservar a geometria Euclideana, não havendo, portanto a necessidade de se introduzir o espaço-tempo curvo da abordagem relativística.

A correspondência do ponto de vista algébrico, entre a dinâmica Newtoniana e a teoria de Einstein, com o fator de escala obedecendo à mesma equação em ambas as teorias, foi estabelecida por Milne e também pelo astrônomo e matemático britânico William McCrea [2].

A cosmologia Newtoniana foi formulada, inicialmente, para pressão nula. Algumas décadas depois, o termo de pressão foi incluído [3], [4]. Desde então, vários estudos foram realizados no contexto da cosmologia Newtoniana, tais como a sua generalização para fluidos não-homogêneos [5], a formulação para um potencial do tipo Yukawa [6], o que trata do cenário no qual há criação de matéria [7], dentre outros [8] - [11].

Milne e McCrea [2] mostraram que é possível reobter equações cosmológicas semelhantes às de Friedmann [12]. Contudo, o termo no qual aparece a energia tem uma interpretação diferente daquela do contexto relativístico, no qual o termo correspondente a este está associado à curvatura do espaço-tempo. Assim, foi possível obter as equações de Friedmann, com o uso da física Newtoniana, do Princípio Cosmológico, que equivale a admitir a isotropia e homogeneidade do universo, e do fato de que a posição de cada partícula que faz parte do universo, muda com o tempo, de modo que a densidade de matéria também depende do tempo.

É importante salientar que apesar das equações obtidas na cosmologia Newtoniana serem semelhantes, algebricamente, às de Friedmann, para pressão nula, existe uma diferença conceitual conforme já salientamos. Na teoria Newtoniana o termo que contém a energia pode ser relacionado com a velocidade de escape. Neste contexto, os valores $\kappa > 0$, $\kappa = 0$ e $\kappa < 0$ (ver eq. 2.19) significam que a matéria tem uma velocidade menor, igual ou maior, respectivamente, do que a velocidade de escape do campo gravitacional. Outro estudo na mesma linha foi realizado por Bonnor [13], no final da década de 50 do século passado.

A descrição de fenômenos da natureza abordados pela cosmologia moderna podem ser descritos de uma perspectiva puramente clássica, usando-se o espaço Euclideano, estático, o tempo Newtoniano, a dinâmica e a lei da gravitação de Newton, acrescidos de hipóteses tomadas da cosmologia relativística. Essa descrição evita o uso de complexos conceitos matemáticos, presentes na teoria da relatividade geral, e fornece os mesmos resultados obtidos na cosmologia Einsteiniana, dentro de certas restrições, como por exemplo, a equivalência entre as duas abordagens no limite de baixas velocidades, e somente do ponto de vista local. Outra restrição da cosmologia Newtoniana é que os resultados obtidos não são válidos em espaços infinitos. Este e outros fatos têm levado a discussões questionando a possível validade da cosmologia Newtoniana [14] , bem como à confirmação de que essa abordagem descreve muito bem o universo, no qual a pressão é nula ou desprezível [15], [16].

À primeira vista parece curioso que a cosmologia Newtoniana tenha sido descoberta somente depois da cosmologia Einsteiniana, cujo nível de complexidade matemática é bem maior. No entanto, podemos entender esse fato em virtude do papel que a teoria da relatividade geral tem na formulação da cosmologia Newtoniana, emprestando-lhe algumas hipóteses ad hoc, de modo que esta formulação não é baseada puramente nas equações da hidrodinâmica e na teoria da gravitação de Newton. É importante ressaltar que no caso em que a pressão é zero, os resultados obtidos no contexto da cosmologia Newtoniana relativos à expansão do universo e os cálculos de perturbações até primeira ordem, coincidem com os da cosmologia Einsteiniana.

A cosmologia Newtoniana é interessante por duas razões. A primeira, é que ela reproduz as mesmas equações para a expansão do universo que são obtidas no modelo de Friedmann. Um outro ponto a se considerar é que a definição de valores médios em cosmologia não está bem solucionada no contexto da relatividade geral, enquanto no contexto Newtoniano é possível resolver parcialmente esse problema. O uso de teoria de perturbação no contexto da formulação de Cartan da teoria de Newton pode nos fornecer um indicativo de como resolver os problemas que envolvem a expansão perturbativa em relatividade geral.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos uma revisão sobre a cosmologia Newtoniana. No capítulo 3, fazemos uma comparação entre as formulações Newtoniana e Einsteiniana. No capítulo 4, apresentamos uma descrição geométrica da cosmologia Newtoniana baseada na idéia de Cartan . No capítulo 5, descrevemos a cosmologia usando um potencial de Yukawa. No capítulo 6, estudamos o crescimento de densidade em modelos com a constante cosmológica variável. No capítulo 7, fazemos uma breve inserção nos aspectos quânticos da cosmologia Newtoniana. Finalmente, no capítulo 8, apresentamos as considerações finais.

Capítulo 2

Cosmologia Newtoniana

2.1 Cosmologia Newtoniana: Modelo Discreto

Inicialmente, vamos apresentar a cosmologia Newtoniana, através de um modelo simples [17], admitindo que o universo é formado por um número finito de partículas que interagem gravitacionalmente. Vamos considerar que a partícula i possui massa m_i e encontra-se na posição $r_i(t)$, em um sistema de coordenadas de origem $\mathcal{O}$. Ao aplicarmos o princípio cosmológico, a distribuição das partículas deve ser esfericamente simétrica em torno de $\mathcal{O}$ e, portanto, o movimento destas será radial, com a localização de cada partícula dada por

$$\vec{r}_i(t) = r_i(t)\hat{r}. \tag{2.1}$$

A energia cinética desse conjunto de partículas é

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2. \tag{2.2}$$

A energia potencial gravitacional de um par de partículas, com massas m_i e m_j, é dada por

$$V_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \tag{2.3}$$

e portanto, a energia potencial total é

$$V = -G \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \tag{2.4}$$

onde a restrição imposta na soma garante que não teremos dupla contagem.

No cenário que inclui a constante cosmológica, vamos introduzir uma força cosmológica atuando na partícula i, que pode ser escrita na forma

$$\vec{F}_i = \frac{1}{3}\Lambda m_i \vec{r}_i, \tag{2.5}$$

onde Λ é a constante cosmológica. Associada a essa força, existe uma energia potencial que é dada por

$$V_c = -\frac{1}{6}\Lambda \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,2}. \tag{2.6}$$

Podemos, então, escrever a energia total do sistema, $E = T + V + V_c$, que é dada pela seguinte expressão

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 - G \sum_{i,j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|} - \frac{1}{6}\Lambda \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{2.7}$$

Admitindo que em dado instante, t_0, conhecemos o movimento e a distribuição das partículas, o princípio cosmológico exige que o movimento seja radial, isto é, em qualquer tempo t,

$$r_i\left(t\right) = S\left(t\right) r_i\left(t_0\right), \tag{2.8}$$

onde $S\left(t\right)$ é uma função universal do tempo, e portanto, é a mesma para todas as partículas e é chamada *fator de escala.* Esta função nos diz como as separações físicas entre duas ou mais partículas crescem com o tempo, uma vez que as distâncias coordenadas, $r_i\left(t_0\right)$, são fixas. Em outras palavras, podemos dizer que o tamanho do universo em um tempo t qualquer é modelado pela variação do fator de escala. Isto significa que a representação do movimento das partículas por meio do fator de escala é a maneira de mostrar, matematicamente, que os únicos movimentos compatíveis com a homogeneidade e isotropia são aqueles de expansão ou de contração uniforme, isto é, um simples aumento ou diminuição associado à variação do fator de escala com o tempo.

Usando a equação (2.8), podemos escrever a velocidade radial da partícula i, como sendo

$$\dot{r}_i(t) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} r_i(t) \,. \tag{2.9}$$

Vamos definir o *parâmetro de Hubble H(t)* como a relação entre a taxa de variação temporal do fator de escala e este fator, ou seja,

$$H(t) = \frac{\dot{S}}{S}. \tag{2.10}$$

Esta equação nos diz que a taxa de expansão do universo é definida em termos da derivada no tempo do fator de escala. Assim, a equação (2.9) pode ser reescrita como

$$v_i(t) = H(t)\, r_i(t) \tag{2.11}$$

que é chamada *Lei de Hubble.* Esta lei expressa o fato de que em um universo em expansão, a velocidade radial de recessão de uma partícula i, a uma distância r_i do ponto $\mathcal{O}$, é proporcional a esta distância. O valor do parâmetro de Hubble para a época atual é a constante de Hubble H_0.

Pelo que foi estabelecido, a única grandeza que temos a determinar é o fator de escala $S(t)$. Portanto, precisamos encontrar a equação satisfeita por esta quantidade. Na cosmologia Newtoniana isto é feito considerando a energia total de um sistema de partículas.

Para isto, vamos substituir as equações (2.8) e (2.9) em (2.7). Assim, temos a seguinte expressão para a energia total do sistema

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{S}^2(t) \left[r_i(t_0)\right]^2 - G \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} \frac{m_i m_j}{\left|S(t)\, r_i(t_0) - r_j(t_0)\right|} - \frac{1}{6}\Lambda \sum_{i=1}^{n} m_i S^2 \left[r_i(t_0)\right]^2 . \tag{2.12}$$

Podemos escrever a equação (2.12) na forma

$$E = \frac{1}{2} A \dot{S}^2 - G\frac{B}{S} - \frac{\Lambda}{6} A S^2 \tag{2.13}$$

onde as constantes A e B são definidas por

$$A \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \left[r_i(t_0)\right]^2 , \tag{2.14}$$

$$B \equiv \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} \frac{m_i m_j}{|r_i(t_0) - r_j(t_0)|}. \tag{2.15}$$

A equação (2.13) é uma equação diferencial cosmológica para o fator de escala $S(t)$. Vamos analisar o que acontece quando Λ é igual a zero. Neste caso, não temos o último termo da equação. Se o universo está se expandindo, o segundo termo do lado direito diminui e como a energia total permanece constante, então, o primeiro termo também deve diminuir, o que significa que a expansão deve desacelerar. Com $\Lambda > 0$, todas as partículas, nesse universo, estão sofrendo uma repulsão cósmica que as empurra para longe da origem. Neste caso, a constante cosmológica contribui positivamente para a expansão do universo. Se $\Lambda < 0$ ocorre o contrário e todas as partículas vão sofrer uma atração cósmica em direção a origem, e consequentemente a constante cosmológica age contra a expansão do universo.

Vamos, agora, reescrever a equação (2.13) em uma forma algébrica idêntica à obtida na cosmologia relativística. Colocando $\dot{S}^2$ em evidência na equação (2.13), temos

$$E = \dot{S}^2 \left[\frac{A}{2} - G\frac{B}{S\dot{S}^2} - \frac{\Lambda}{6} A \left(\frac{S}{\dot{S}} \right)^2 \right]. \tag{2.16}$$

Vamos, agora, reescalonar o fator $S(t)$ para obter um novo fator de escala $R(t)$, dado por

$$R(t) = \mu S(t), \tag{2.17}$$

onde μ é uma constante. Em termos do novo fator de escala, $R(t)$, a equação (2.13) pode ser escrita como

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = -\frac{\kappa}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2.18}$$

onde κ é definido por

$$\kappa = -\frac{2E\mu^2}{A}, \tag{2.19}$$

e ,

$$\rho = \frac{\rho_0}{R^3},\ \rho_0 = \frac{3B\mu^3}{4\pi A}. \tag{2.20}$$

Se a energia total E do sistema for igual a zero, então, podemos escolher μ arbitrariamente, e qualquer que seja seu valor, a equação (2.19) nos diz que κ também será zero. Se $E \neq 0$ podemos escolher μ de forma que

$$\mu^2 = \frac{A}{2\left|E\right|}. \tag{2.21}$$

Como a normalização do fator de escala é arbitrária, através do parâmetro μ, então, se $E > 0$, podemos escolher μ de tal modo que temos $\kappa = -1$, e se $E < 0$, podemos escolher $\kappa = +1$. Pela opção do reescalonamento (2.17), temos que a constante κ pode ter os valores +1, 0, ou -1. Note que o valor de E (energia total) não é importante no que diz respeito ao comportamento do universo. De fato, é o sinal de E que determina o seu comportamento. É importante chamar a atenção para o fato de que a equação (2.18) tem a mesma forma algébrica da *equação de Friedmann* obtida na cosmologia relativística, e corresponde ao caso em que $\rho \propto R^{-3}$, ou seja, à matéria sem pressão.

2.2 Cosmologia Newtoniana: Modelo Contínuo

Nesta seção, vamos adotar a abordagem de Ribeiro [17] para obtermos a descrição contínua a partir do modelo discreto. Neste caso, o uso do princípio cosmológico não permite afirmar que toda a massa do universo está distribuída de maneira uniforme em cada época t. Portanto, a densidade de matéria vai depender somente do tempo, ou seja, $\rho = \rho\left(t\right)$. Consideremos que nosso modelo de universo é limitado por uma superfície esférica $\mathcal{A}$, cujo raio é somente função do tempo. O raio da esfera em qualquer tempo t é dado por $a\left(t\right)$, medido em relação à origem do sistema de coordenadas, $\mathcal{O}$, situado no centro da esfera.

Na cosmologia Newtoniana, a equação para o fator de escala é obtida considerando as forças que atuam sobre diferentes partículas localizadas na superfície da esfera de raio $a\left(t\right)$. Esta esfera é considerada parte do universo, mas é suficientemente grande para representar o universo como um todo. É importante chamar a atenção para o fato de que somente a massa no interior da esfera de raio $a\left(t\right)$ produz uma força gravitacional não-nula sobre as partículas na superfície dessa esfera, de acordo com o teorema de Gauss para a dinâmica Newtoniana. Assim, a massa distribuída numa esfera de raio $a_i > a\left(t\right)$, não contribui para a força.

Em uma época t_0, ou seja, no tempo de referência t_0 onde a dinâmica do sistema é conhecida, a massa contida numa casca esférica de espessura dx é dada por

$$dm\left(x\right) = 4\pi x^2 \rho\left(t_0\right) dx. \tag{2.22}$$

Para passarmos da descrição discreta para a contínua devemos considerar que a massa total na região limitada por uma esfera de raio $a\left(t_0\right)$ é dada por

$$\int_0^{a(t_0)} 4\pi x^2 \rho\left(t_0\right) dx. \tag{2.23}$$

Vamos, agora, supor que $f\left(r_i\right)$ seja uma função qualquer das n partículas situadas numa região limitada pela superfície esférica. Para qualquer função $f\left(r_i\right)$, a soma $m_i f\left(r_i\right)$ pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i f\left(r_i\right) \Rightarrow \int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 f\left(x\right) dx, \tag{2.24}$$

onde, $\rho_0 = \rho\left(t_0\right)$. Fazendo as devidas substituições em (2.14), temos

$$A = \int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 x^2 dx \tag{2.25}$$

ou seja,

$$A = \frac{4\pi}{5} \rho_0 a_0^5, \tag{2.26}$$

sendo $a_0 = a\left(t_0\right)$.

Agora vamos definir a massa total do sistema, M, que é dada por

$$M = \int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 dx, \tag{2.27}$$

ou

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a_0^3. \tag{2.28}$$

Combinando as equações (2.26) e (2.28), podemos escrever A da seguinte forma

$$A = \frac{3M}{5} a_0^2. \tag{2.29}$$

Considerando o fato de que M é uma constante no tempo, então, $\rho_0 a_0^3 = \rho a^3 = cte$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = 0, \tag{2.30}$$

para um tempo, t, qualquer.

Para calcular B, vamos supor que $i < j$, se a partícula j está mais distante do centro $\mathcal{O}$ que a partícula i. Então, o potencial gravitacional experimentado pela partícula j em um tempo t_0, devido às partículas i situadas mais próximas do centro $\mathcal{O}$ que j, é

$$\Phi\left[\vec{r}_j\left(t_0\right)\right] = -G\sum_{i=1}^{j-1}\frac{m_i}{\left|\vec{r}_i\left(t_0\right) - \vec{r}_j\left(t_0\right)\right|}. \tag{2.31}$$

Podemos, então, escrever (2.15) como:

$$B = \sum_{\substack{i=1 \\ (i<j)}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i\left(t_0\right) - \vec{r}_j\left(t_0\right)\right|}, \tag{2.32}$$

$$B = \sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{i=1}^{j-1}\frac{m_i}{\left|\vec{r}_i\left(t_0\right) - \vec{r}_j\left(t_0\right)\right|},$$

ou

$$B = \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{G}\left\{-\Phi\left[\vec{r}_j\left(t_0\right)\right]\right\}. \tag{2.33}$$

Através da relação (2.24) podemos escrever a equação (2.33) da seguinte forma

$$B = -\frac{1}{G}\int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 \Phi\left(x, t_0\right) dx \tag{2.34}$$

em que $\Phi\left(x, t_0\right)$ é o potencial gravitacional Newtoniano a uma distância x de $\mathcal{O}$ em um tempo t_0, devido a todas as massas $\mathcal{M}\left(x\right)$ que estão situadas dentro da esfera de raio $x\,(x \leq a_0)$. De acordo com (2.22), temos, então,

$$\mathcal{M}\left(x\right) = \int_0^x dm\left(x\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 x^3 \tag{2.35}$$

e o potencial gravitacional será dado por

$$\Phi\left(x, t_0\right) = -\frac{G\mathcal{M}\left(x\right)}{x} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 x^2. \tag{2.36}$$

Esse potencial gravitacional corresponde apenas à distribuição de massa no interior de uma esfera de raio x. Portanto, somente a fração $\mathcal{M}$ de M contribui para Φ na equação (2.36).

Utilizando (2.36) e substituindo em (2.34), temos

$$B = \frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2 a_0^5. \tag{2.37}$$

Usando as equações (2.8) e (2.17), podemos escrever

$$\frac{R(t)}{\mu} = \frac{r_i(t)}{r_i(t_0)}, \tag{2.38}$$

Essa relação pode ser escrita, também, da seguinte forma

$$\frac{R(t)}{\mu} = \frac{a(t)}{a(t_0)}, \tag{2.39}$$

pois o fator de escala $R(t)$ é o mesmo para todas as partículas do substrato cosmológico. Lembrando que ρa^3 é constante para qualquer tempo t, temos a relação

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{R^3}{\mu^3}. \tag{2.40}$$

Pode-se pensar no substrato cosmológico com uma grande nuvem gasosa, arbitrariamente grande, entretanto finita. A consideração aqui feita do universo ser finito é devido ao fato de que a gravitação Newtoniana quando aplicada em um modelo de universo infinito, encontra problemas com o cálculo do potencial gravitacional para um sistema homogêneo e esfericamente simétrico, que se torna infinito num determinado ponto em decorrência da quantidade de matéria do universo. Na superfície esférica $\mathcal{A}$, o potencial gravitacional dado por (2.36) torna-se

$$\Phi(a_0, t_0) = -\frac{4}{3}\pi G\rho a_0^2, \tag{2.41}$$

que nos mostra que para um universo infinito, $a_0 \to \infty$, o potencial diverge e a força gravitacional torna-se infinita.

Ao admitir que a nuvem gasosa é finita, entra-se em conflito com o princípio cosmológico, pois, sendo finita, passa a ter um centro de referência. Para solucionar esse problema vamos considerar que a nuvem gasosa é uniforme até sua borda, isotrópica em torno do seu centro e possui tamanho maior do que qualquer distância astronômica que possa ser medida. Portanto, ele é tão grande quanto possamos imaginar, porém, finito [14], [18]. Para essa nuvem gasosa, o movimento das partículas é estritamente radial. Portanto,

$$\vec{r}\,(t) = R(t)\vec{r}\,(t_0)\,, \tag{2.42}$$

na época $t = t_0$, onde t_0 representa o tempo presente. Da eq. (2.42), vemos que $R\,(t_0) = 1$. Derivando (2.42), encontramos

$$\vec{v}(r, H) = H\,(t)\,\vec{r}(t) \tag{2.43}$$

que é a lei de velocidade-distância, onde $H(t) = \dot{R}/R$.Vamos, agora, impor a lei de conservação da massa à nuvem gasosa. Portanto, à medida que a esfera se expande, a massa é conservada, e assim, considerando a lei de velocidade-distância e o fato de que $\rho = \rho\,(t)$, temos

$$\rho\,(t) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3\,(t)} = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R\,(t)}\right)^3, \tag{2.44}$$

onde $R_0 = R\,(t_0)$.

Podemos considerar, também, a equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\,(\rho\vec{v}) = \frac{d\rho}{dt} + 3\rho H\,(t) = 0, \tag{2.45}$$

ou

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho\,(t)\,H(t). \tag{2.46}$$

Note que se o fluido for inicialmente homogêneo, o uso da equação de continuidade nos leva à conclusão de que a relação velocidade versus distância da lei de Hubble é imprescindível para garantir a homogeneidade para qualquer tempo.

Substituindo o valor de $H(t)$ e integrando obtemos

$$\int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\rho} = -3\int_{R(t_0)}^{R(t)} \frac{dR}{R} \tag{2.47}$$

$$\frac{\rho}{\rho\,(t_0)} = \frac{1}{R^3(t)}. \tag{2.48}$$

Essa equação mostra como a condição de conservação da massa, determina a dependência da densidade em termos do fator de escala. Vamos obter a equação da dinâmica usando a equação de Euler. A pressão do gás será dada por $p = p(t)$, pois as grandezas cósmicas só dependem do tempo, de acordo com o princípio cosmológico. Portanto, a equação de Euler fica

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{f} = 0. \tag{2.49}$$

onde p é a pressão e $\vec{f}$ é a força experimentada pela partícula, por unidade de massa.

Calculando dv/dt, temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dH}{dt}r + H\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dH}{dt}r + H^2 r = \left(\frac{dH}{dt} + H^2\right) r.$$

Substituindo dv/dt em (2.49) obtemos a seguinte equação

$$\left[\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t)\right]\vec{r} - \vec{f} = 0, \tag{2.50}$$

onde consideramos o fato de que a pressão é nula.

Usando o fato de que a força gravitacional $\vec{f}$, pode ser escrita $\vec{f} = -\vec{\nabla}\Phi$, e usando a equação de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho,$$

obtemos o seguinte resultado

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = -4\pi G\rho. \tag{2.51}$$

A divergência de (2.50) resulta em

$$3\left[\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t)\right] = -4\pi G\rho. \tag{2.52}$$

Usando a definição do parâmetro de Hubble dado na equação (2.52), temos,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{-4\pi G}{3}\rho$$

ou

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho R, \tag{2.53}$$

que é a equação para a aceleração.

As equações (2.46) e (2.53) determinam as evoluções de $\rho(t)$ e $R(t)$, com o tempo. Estas equações foram obtidas no contexto da física Newtoniana, porém, elas coincidem exatamente com as obtidas na teoria da relatividade geral, e são conhecidas como equações de Friedmann.

Examinando a equação (2.53) podemos perceber que para $\dot{R} = \ddot{R} = 0$, o universo é estático. Note que estamos considerando a ausência de pressão. O curioso é que neste caso a única possibilidade seria $\rho = 0$ (densidade nula). Este resultado foi um sério problema para a cosmologia Newtoniana e a forma encontrada para superá-lo foi admitir a existência de uma força adicional que somente é relevante para grandes distâncias. Uma possibilidade de resolver esse problema é considerarmos a presença da constante cosmológica. Vamos, agora admitir que além da força gravitacional Newtoniana sobre uma partícula, devido à matéria contida na esfera de raio $a(t_0)$, existe uma outra de natureza cosmológica.

A força gravitacional é dada por

$$\vec{f} = \overrightarrow{\ddot{r}}(t) = -\frac{GM}{[r(t)]^2}r = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t)\vec{r}. \tag{2.54}$$

Adicionando a força cosmológica na equação (2.54), temos que a força total experimentada pela partícula é dada por

$$\vec{f} = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t)\vec{r}+\frac{1}{3}\Lambda\vec{r}. \tag{2.55}$$

Neste caso, a equação de Poisson fica

$$\nabla.\vec{f} = -4\pi G\rho + \Lambda. \tag{2.56}$$

Reescrevendo a equação (2.53) temos,

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho R + \frac{1}{3}\Lambda R \tag{2.57}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2 - \frac{8\pi G\rho}{3R} - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) = 0. \tag{2.58}$$

A equação (2.58) resulta em

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda}{3}R^2 - \kappa, \tag{2.59}$$

onde

$$C = 8\pi G\rho_0/3 \tag{2.60}$$

e κ é uma constante de integração.

Uma análise da equação (2.57) nos mostra que se fizermos $\ddot{R} = 0$, universo estático, isto não implica $\rho = 0$, mas tão somente que existe um efeito produzido pela força cosmológica que compensa o efeito gravitacional gerado pela matéria, de tal modo que no final, temos um universo estático.

2.3 Obtenção da equação de movimento segundo Milne

Nesta seção vamos mostrar como o uso da dinâmica Newtoniana e da teoria da gravitação de Newton permitiram que Milne [1] obtivesse o modelo de Einstein-de-Sitter. Para isto, foi considerado que partículas que se movem em um espaço estático produzem os mesmos fenômenos que partículas estacionárias em um espaço em expansão.

Vamos considerar uma esfera de raio r e massa $M(r)$. De acordo com a teoria da gravitação de Newton, a velocidade de escape de uma partícula é dada pela seguinte relação

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM(r)}{r}. \tag{2.61}$$

Escrevendo a equação (2.61) em termos da densidade, temos

$$v^2 = \frac{8\pi G}{3}r^2\rho. \tag{2.62}$$

O movimento dessa partícula deve ser tal que a equação de continuidade deve ser satisfeita. Esta pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho v\right) = 0, \tag{2.63}$$

onde v é uma função de t e r, dada por (2.62).

Substituindo (2.62) em (2.63), obtemos

$$\rho^{-3/2}\frac{d\rho}{dt}+3\left(\frac{8\pi G}{3}\right)^{1/2}=0, \tag{2.64}$$

cuja integral fornece o seguinte resultado

$$-2\rho^{-1/2}+(24\pi G)^{1/2}\,t=0, \tag{2.65}$$

onde foi feita uma escolha apropriada da origem do tempo. A equação (2.65) nos fornece

$$\rho=\frac{1}{6\pi G t^2}. \tag{2.66}$$

Substituindo a expressão para $\rho\,(t)$ dada por (2.66), na equação (2.62), obtemos

$$v=\frac{2r}{3t}. \tag{2.67}$$

Para testar que essa é a solução do problema, vamos calcular a aceleração, que é dada por

$$\frac{Dv}{dt}=\frac{D}{dt}\left(\frac{2r}{3t}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{v}{t}-\frac{r}{t^2}\right)=-\frac{2r}{9t^2}. \tag{2.68}$$

O resultado dado pela eq. (2.68) é precisamente a aceleração Newtoniana $-GM\,(r)\,/r^2$, uma vez que

$$-\frac{GM\,(r)}{r^2}=-\frac{4}{3}\pi G r^3\rho\frac{1}{r^2}=-\frac{4}{3}\pi G r^3\frac{1}{6\pi G t^2}\frac{1}{r^2}=-\frac{2r}{9t^2}. \tag{2.69}$$

Para fazer uma comparação com o universo de Einstein-de-Sitter, obtido no contexto da relatividade geral, vamos considerar as equações que descrevem o universo Newtoniano e são dadas pelas equações (2.61) e

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{GM\,(r)}{r^2}, \tag{2.70}$$

onde, $M\,(r)=\frac{4}{3}\pi\rho r^3$.

Diferenciando a equação (2.61) e usando a equação (2.70), encontramos a seguinte equação

$$\frac{d}{dt}M\,(r)=0. \tag{2.71}$$

Fazendo

$$r = fR(t), \tag{2.72}$$

onde f é uma constante, que na realidade, corresponde à posição inicial de cada partícula, temos que

$$v = f\frac{dR}{dt} \tag{2.73}$$

e

$$\frac{dv}{dt} = f\frac{d^2R}{dt^2}. \tag{2.74}$$

Substituindo (2.73) em (2.61) e (2.74) em (2.70), obtemos, respectivamente, os seguintes resultados

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{3}k\rho \tag{2.75}$$

e

$$\frac{2}{R}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = 0, \tag{2.76}$$

onde $k = 8\pi G$.

Essas equações são idênticas às equações relativísticas para um universo em expansão, com geometria da seção espacial plana e pressão zero, conhecido como universo de Einstein-de-Sitter.

2.4 Considerações adicionais sobre o caso contínuo

As equações de movimento podem ser obtidas a partir da energia do sistema, que é dada pela soma da energia cinética e da energia potencial. A expansão do universo é observada através do movimento das galáxias. O universo se expande como um gás de galáxias, porém cada galáxia, individualmente não se expande. A lei de Hubble nos diz como essa expansão ocorre. Ela é tal que as galáxias afastam-se com uma velocidade que é proporcional à separação entre estas e o observador. Assim, galáxias a uma distância $R(t)$ estão se afastando com uma velocidade tal que

$$\frac{dR}{dt} = HR. \tag{2.77}$$

Vamos determinar a equação de movimento de uma galáxia. Para isto, considere um corpo de massa, m, colocado sobre a superfície de uma esfera, a uma distância $R(t)$ da origem. A única força que atua sobre o corpo é devido a massa M no interior da esfera. A energia cinética mais a potencial desse corpo (ou galáxia) é

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{R}, \tag{2.78}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, sendo

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \tag{2.79}$$

a massa contida na esfera de raio $R(t)$, e ρ a densidade de massa.

A equação (2.78) representa a conservação da energia, semelhante à de uma pedra que é lançada para o ar, no campo gravitacional terrestre. Se $E > 0$, a pedra escapa; se $E < 0$, ela retorna.

Substituindo M em (2.78) e utilizando a lei de Hubble, podemos escrever a energia total como

$$E = \frac{1}{2}mH^2R^2 - \frac{4}{3}\frac{Gm}{R}\pi\rho R^3 \tag{2.80}$$

ou

$$\frac{2E}{mR^2} = H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho. \tag{2.81}$$

A equação (2.81) nos permite concluir que em um dado instante t, as funções H e ρ são constantes, independentemente da galáxia considerada. Assim, se considerarmos uma segunda galáxia, por exemplo, o lado direito da equação será o mesmo para as duas galáxias, ou seja, $2E/mR^2$. Esse raciocínio pode ser generalizado para n galáxias. Para todas elas, em um dado instante, $2E/mR^2$ terá o mesmo valor. Na realidade, não só o valor permanece o mesmo, mas o sinal de E (positivo ou negativo) e o fato de ser nulo. Para E diferente de zero podemos redefinir a energia total em um dado tempo t_1, de tal modo que $|2E/mR(t_1)^2|$ seja igual a 1. Então, podemos escrever

$$\frac{(dR/dt)^2}{R^2} - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{\kappa R(t_1)^2}{R^2} \tag{2.82}$$

onde $\kappa = -2E/mR(t_1)^2$ é 1, 0 ou -1 dependendo do valor de E. A constante $R(t_1)^2$ tem magnitude $2E/m$.

Vamos reescrever a equação de conservação da energia, a equação (2.78), na forma

$$E = \frac{R^2H^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}\frac{\rho R^3}{R}. \tag{2.83}$$

A equação (2.83) nos diz que o sinal de E depende da razão entre a densidade, ρ e H^2. Então, podemos definir a densidade crítica

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{2.84}$$

tal que para $\rho > \rho_{cr}$, temos $E < 0$ e o universo recolapsa, enquanto que para $\rho < \rho_{cr}$ temos $E > 0$, e o universo irá se expandir para sempre.

Podemos também definir o parâmetro de densidade $\Omega(t)$, da seguinte forma:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)}. \tag{2.85}$$

É importante chamar a atenção para o fato de que o valor de E ou Ω, determina a curvatura espacial do universo, de acordo com a teoria da relatividade geral. O caso $E < 0$ ($\Omega > 1$) corresponde a um universo fechado, finito e que recolapsa (espaço parabólico). O caso $E > 0$ ($\Omega < 1$) representa um universo aberto, o qual se expande para sempre (espaço hiperbólico). O caso $E = 0$ ($\Omega = 1$) corresponde a um espaço Euclideano infinito, que se expande para sempre.

Na equação Newtoniana deduzida, a energia E é uma constante, e portanto κ também é uma constante. A equação obtida, (2.82), corresponde à equação de Friedmann para o universo Newtoniano. Para comparar a equação cosmológica Newtoniana com a equação de Friedmann, o termo que contém a energia, naquela equação, deve corresponder ao parâmetro que define as possíveis geometrias do espaço-tempo.

Capítulo 3

Cosmologias Newtoniana e Einsteiniana

Neste capítulo vamos discutir a cosmologia Newtoniana sem a inclusão do termo correspondente à constante cosmológica, ou seja, vamos fazer $\Lambda = 0$, e também apresentar alguns resultados da cosmologia Einsteiniana, quando incluímos o termo de pressão.

Conforme já estudado, a equação que rege o comportamento de uma dada galáxia, colocada na fronteira do universo, devido à atração gravitacional que este universo exerce, é dada por

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \tag{3.1}$$

onde M e $R\,(t)$ são a massa e o raio do universo, respectivamente.

Multiplicando ambos os membros da equação (3.1) por $\dot{R}$ e integrando, obtemos

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + \kappa = \frac{GM}{R}, \tag{3.2}$$

onde κ é uma constante de integração, que pode ser positiva, negativa ou nula, e está associada à energia total da galáxia.

A equação (3.2) também pode ser escrita na forma

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2\kappa}{R^2} = \frac{2GM}{R^3}. \tag{3.3}$$

Usando a definição do parâmetro de Hubble e considerando que a densidade de massa da esfera de raio R (universo) é dada por $\rho = M/\frac{4}{3}\pi R^3$, a equação (3.3) pode ser reescrita como

$$H^2 + \frac{2\kappa}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho. \tag{3.4}$$

Usando a equação (3.1) e substituindo em (3.3), obtemos a seguinte equação

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2\kappa = 0. \tag{3.5}$$

Se considerarmos $R(t)$ como sendo o fator de escala e não o raio do universo, é possível reescaloná-lo. Portanto, se trocarmos R por λR, onde λ é um número positivo arbitrário, a equação (3.5) permanecerá com a mesma forma desde que κ seja trocado por $\kappa\lambda^{-2}$. Isto significa que podemos arbitrar os valores possíveis de κ. No entanto, o sinal de κ é importante e não pode ser alterado por uma mudança de escala.

Note que a equação (3.5) para um fluido perfeito pode ser escrita, no contexto da cosmologia relativística, na forma [19]

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2\kappa - 4\pi G(\rho - p) R^2 = 0 \tag{3.6}$$

A segunda equação dinâmica, nesse caso, é dada por

$$3\ddot{R} + 4\pi G(\rho + 3p) R = 0. \tag{3.7}$$

Para obtermos a eq. (3.7), vamos supor que o volume V do universo se expande de uma quantidade dV. Desta forma, a pressão p exerce um trabalho dado por pdV, o que implica em um decréscimo de energia da mesma quantidade. Considerando-se uma esfera de raio R, temos

$$d\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right) = -pd(\frac{4}{3}\pi R^3), \tag{3.8}$$

ou

$$R^3 d\rho + 3\rho R^2 dR = -3pR^2 dR, \tag{3.9}$$

que pode ser escrita como

$$R^3\dot{\rho} + 3\rho R^2\dot{R} + 3pR^2\dot{R} = 0, \tag{3.10}$$

onde usamos $\dot{R} = dR/dt$ e $\dot{\rho} = d\rho/dt$. A equação (3.9) também poderá ser escrita na forma:

$$R\frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + p)\frac{dR}{dt} = 0. \tag{3.11}$$

Vamos, agora, reescrever a equação (3.4) da seguinte maneira:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - 2\kappa. \tag{3.12}$$

Derivando a equação (3.12) em relação ao tempo, teremos:

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8}{3}\pi G\left(\dot{\rho}\right)R^2 + \frac{8}{3}\pi G\rho\left(2R\dot{R}\right),$$
$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8}{3}\pi G\left(\dot{\rho}R\right).R + \frac{8}{3}\pi G\rho 2R\dot{R},$$

ou

$$\dot{R}\ddot{R} = \frac{4}{3}\pi G(-3(\rho - p)\dot{R}).R + \frac{8}{3}\pi G\rho R\dot{R}, \tag{3.13}$$

onde usamos a relação

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] = 2\frac{dR}{dt}\frac{d^2R}{dt^2} = 2\dot{R}\ddot{R} = \frac{d}{dt}\left[\left(\dot{R}\right)^2\right]. \tag{3.14}$$

A equação (3.13), pode ser manipulada algebricamente para se obter a equação (3.7), que é a outra equação dinâmica para um fluido perfeito, obtida no contexto da cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker.

3.1 Densidade e Pressão

A pressão depende somente da natureza da energia, que pode estar associada à matéria, radiação ou vácuo ou combinações destas grandezas. A densidade de energia de matéria não produz pressão capaz de interferir na expansão do universo, no caso de um gás não-relativístico.

A densidade e pressão de radiação são relacionadas por

$$p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma. \tag{3.15}$$

O trabalho realizado por cada componente diminui a energia do universo à medida que acontece a expansão. Então, a equação (3.8) é válida para cada uma dessas componentes (matéria, radiação ou vácuo) que faz parte do universo, e portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\rho_i R^3 = -p_i \frac{d}{dt} R^3, \tag{3.16}$$

onde i indica uma das componentes, que vamos representar por m, γ ou ν, para matéria, radiação e vácuo, respectivamente. Para a matéria, a pressão p_m , é nula, logo,

$$\frac{d}{dt}\rho_m R^3 = 0. \tag{3.17}$$

Neste caso, a dependência temporal de ρ_m ocorre através de R, da seguinte forma

$$\rho_m \propto \frac{1}{R^3}. \tag{3.18}$$

Para radiação, as equações (3.15) e (3.16) nos fornecem,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_\gamma R^4\right) = \frac{d}{dt}\left(R\rho_\gamma R^3\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_\gamma R^4\right) = \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} + R\frac{d}{dt}\left(\rho_\gamma R^3\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_\gamma R^4\right) = \rho_\gamma R^3 \frac{dR}{dt} - R^3 \rho_\gamma \frac{dR}{dt} = 0, \tag{3.19}$$

e portanto,

$$\rho_\gamma \propto \frac{1}{R^4}. \tag{3.20}$$

O comprimento de onda da radiação, λ, é proporcional a R, devido à expansão do universo, e está relacionada com a velocidade da luz, c, através da relação

$$\nu\lambda = c, \tag{3.21}$$

onde ν é a frequência de radiação.

A energia de um fóton é dada por

$$E = h\nu, \tag{3.22}$$

onde h é a constante de Planck.

A energia média de um fóton de radiação em equilíbrio a uma temperatura T é $\bar{E} \approx 2.7kT$ [20], onde k é a constante de Boltzmann. Essas relações nos permitem escrever as seguintes dependências para λ, E e T, com o fator de escala:

$$\begin{aligned} \lambda &\propto R \\ E &\propto \nu \propto \frac{1}{R} \\ T &\propto \bar{E} \propto \frac{1}{R}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

O número de fótons não muda com a expansão. No entanto, o número de fótons por unidade de volume n_γ ou seja, a densidade de fótons diminui com a expansão do volume, de modo que

$$n_\gamma \propto \frac{1}{R^3}.$$

A energia por unidade de volume de radiação é dada por

$$\rho_\gamma = n_\gamma \bar{E}.$$

Para radiação em equilíbrio a uma temperatura T, a fórmula de Stefan-Boltzmann-Planck [20] fornece

$$n_\gamma \propto T^3$$

e

$$\rho_\gamma \propto T^4.$$

A densidade de energia no vácuo é constante, e portanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_v R^3\right) = \rho_v \frac{d}{dt} R^3, \tag{3.24}$$

o que implica, com o uso de (3.16), que $p_v = -\rho_v$.

Vamos admitir que a densidade de energia, ρ_w e pressão p_w , obedecem à seguinte equação de estado:

$$p_w = w\rho_w,$$

onde w é uma constante. A dependência no tempo de ρ_w pode ser determinada a partir da equação (3.11), que pode ser escrita na forma

$$R\frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + wp)\frac{dR}{dt} = 0, \tag{3.25}$$

ou

$$\frac{1}{\rho}d\rho = -3\left(1+w\right)\frac{dR}{R}. \tag{3.26}$$

A integração membro a membro da equação (3.26), nos fornece

$$\rho_w = \frac{\alpha}{R^{3(1+w)}}, \tag{3.27}$$

onde α é uma constante.

Portanto, a dependência temporal de ρ_w está contida no termo $R^{3(1+w)}$.

3.2 Dependência Temporal do fator de escala

Para determinar explicitamente a dependência temporal de $R\left(t\right)$, vamos supor que κ é zero. Então, a equação de Friedmann é tal que

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \propto \rho R^2. \tag{3.28}$$

Vamos considerar o caso em que o universo contém somente uma das componentes. Para a radiação, temos que da equação (3.20)

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R} \tag{3.29}$$

e portanto,

$$R \propto t^{1/2}. \tag{3.30}$$

Para a matéria, temos de (3.18)

$$\frac{dR}{dt} \propto \frac{1}{R^{1/2}} \tag{3.31}$$

$$R \propto t^{2/3}. \tag{3.32}$$

Para o vácuo, a equação (3.24) nos fornece o seguinte resultado

$$\frac{dR}{dt} \propto R, \tag{3.33}$$

ou

$$R \propto \exp\left(Ht\right), \tag{3.34}$$

com $H = (dR/dt)/R$. A expansão exponencial produzida pela energia de vácuo é chamada inflação.

No caso em que todos as componentes estão presentes no universo, a densidade total e a pressão total são dadas pelas somas seguintes:

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_m + \rho_v \tag{3.35}$$

$$p = p_\gamma + p_v. \tag{3.36}$$

Podemos determinar também o parâmetro de Hubble H como função do tempo. Primeiramente vamos considerar $R \propto t^{1/2}$, que corresponde a um universo preenchido por radiação.

Nesse caso, podemos escrever

$$R = \varepsilon t^{1/2}. \tag{3.37}$$

Ou,

$$\dot{R} = \frac{\varepsilon}{2} t^{-1/2}.$$

Usando a relação que define o parâmetro de Hubble

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{3.38}$$

e substituindo R e $\dot{R}$, temos

$$H = \frac{1}{2}t^{-1} = \frac{1}{2t}. \tag{3.39}$$

Agora, vamos considerar, o caso em que $R \propto t^{2/3}$. Temos, então, que

$$\dot{R} = \frac{2}{3}\varepsilon t^{-1/3}$$

e portanto,

$$H = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon t^{-1/3}}{\varepsilon t^{2/3}}$$

ou

$$H = \frac{2}{3t}. \tag{3.40}$$

Podemos usar a equação (3.27) para determinar a dependência de R com o tempo. Para isto, vamos considerar a relação entre ρ e R, na forma geral, dada por

$$R^{(3+3\omega)}\rho = \alpha, \tag{3.41}$$

onde α é uma constante.

Derivando ambos os membros, obtemos

$$(3+3\omega)\, R^{3(1+\omega)}\dot{\rho} = 0. \tag{3.42}$$

Considerando $\rho = \alpha R^{-3(1+\omega)}$, a sua derivada será dada pela seguinte expressão

$$\frac{d\rho}{dt} = -c3\,(1+\omega)\, R^{-3(1+\omega)-1}\dot{R}. \tag{3.43}$$

Considerando a eq. (3.42), temos

$$(3+3\omega)\, R^{-1}\dot{R}\rho + \dot{\rho} = 0. \tag{3.44}$$

Substituindo ρ na equação (3.44), obtemos

$$
\begin{aligned}
R\frac{d\rho}{dt} &= -\left(3+3\omega\right)\rho\frac{dR}{dt}, \\
&= -\left(3+3\omega\right)cR^{-3(1+\omega)}\frac{dR}{dt}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= R^2\rho, \\
\frac{dR}{dt} &= \pm\sqrt{\alpha}R^{-1/2-3/2\omega}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\frac{R^{1/2(1+3\omega)+1}}{\left(\frac{1}{2}\left(1+3\omega\right)+1\right)} = \pm\sqrt{\alpha}t. \tag{3.45}
$$

Portanto, podemos escrever

$$
R = \gamma^{\frac{2}{(3+3\omega)}}t^{\frac{2}{3+3\omega}} \tag{3.46}
$$

onde $\gamma = \pm\sqrt{c}$. Neste caso, temos, que a proporcionalidade entre $R\left(t\right)$ e t é dada por

$$
R \propto t^{\frac{2}{3+3\omega}}. \tag{3.47}
$$

Vamos agora analisar o caso em que $\kappa = 0$.

Partindo de

$$
R = Ae^{i\omega t} \tag{3.48}
$$

e usando a equação de Friedmann

$$
\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho+3p\right)R,
$$

temos que

$$
A\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\left(\rho+3p\right)R. \tag{3.49}
$$

Portanto,

$$
\omega = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\left(\rho+3p\right)}. \tag{3.50}
$$

Usando o fato de que $-\rho_v = p_v$, obtemos, $\omega = \pm i\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_v} = \pm\frac{2}{3}i\sqrt{6\pi G\rho_v}$.

Logo, a dependência de R com o tempo será dada por

$$R^{3/2} = Ae^{\pm\sqrt{6\pi G\rho_v}t}. \tag{3.51}$$

Do ponto de vista algébrico, as equações cosmológicas nos modelos Newtoniano e Einsteiniano são semelhantes. Conceitualmente, as diferenças são expressivas. Enquanto na cosmologia Newtoniana a obtenção da equação cosmológica é feita a partir da equação de movimento para uma partícula submetida à força gravitacional, na cosmologia Einsteiniana a obtenção da equação cosmológica é baseada numa teoria métrica da interação gravitacional, em que esta é medida pela curvatura do espaço-tempo Riemanniano.

Outra diferença conceitual diz respeito ao fato de que no modelo Newtoniano, o espaço é infinito, mas a quantidade de matéria no universo é finita. No modelo Friedmanniano, se $\kappa = +1$, o espaço é elíptico, o seu volume é finito, e a quantidade de matéria é finita; se $\kappa = 0$ ou $\kappa = -1$, o volume do espaço é infinito e, portanto, contém uma quantidade infinita de matéria, uma vez que esta é homogênea em todo o espaço.

Capítulo 4

Descrição Geométrica da cosmologia Newtoniana

A cosmologia Newtoniana pode ser descrita com o uso da linguagem geométrica, o que não significa que esta seja equivalente, do ponto de vista conceitual, à cosmologia Einsteiniana. Esta descrição foi obtida com o uso de uma abordagem geométrica desenvolvida por Cartan [21], [22]. Nesta abordagem, podemos mostrar que as órbitas de partículas em um campo gravitacional Newtoniano podem ser vistas como geodésicas de um espaço afim, e portanto, neste contexto, a gravitação pode ser considerada como uma manifestação do efeito da curvatura associada à uma conexão afim, e não como uma força. A formulação de Cartan da teoria da gravitação Newtoniana pode ser obtida a partir da equação do desvio geodésico.

Para desenvolver a formulação geométrica da cosmologia Newtoniana [23], vamos deduzir a equação para o desvio geodésico, que é exatamente igual à equação do desvio geodésico para observadores normais à hipersuperfície de homogeneidade e isotropia do universo de Friedmann.

Usando a equação de continuidade, que é a mesma tanto na abordagem Newtoniana quanto na Einsteniana, a equação para o desvio geodésico pode ser integrada, em ambos os casos, para se obter a equação cosmológica Newtoniana e a equação de Friedmann.

Neste capítulo vamos fazer uma revisão sobre a descrição geométrica da cosmologia Newtoniana segundo Tipler [23] e tecer alguns comentários sobre as conclusões ali contidas.

A equação de movimento para uma partícula de massa arbitrária colocada em um campo gravitacional gerado pelo potencial Φ, é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\Phi \tag{4.1}$$

que corresponde a 2^a lei de Newton, e que pode ser escrita como

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \nabla\Phi = 0 \tag{4.2}$$

ou

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = 0. \tag{4.3}$$

Vamos fazer uso de um parâmetro afim $\lambda = at + b$, definido em termos de um tempo Newtoniano t. Ao tomarmos a segunda derivada de t em relação a λ, obtemos:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0. \tag{4.4}$$

Em termos do parâmetro λ, a equação (4.3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0. \tag{4.5}$$

Consideremos a equação geodésica que é dada por

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \tag{4.6}$$

onde α, β, $\gamma = 0$, 1, 2, 3. Considerando $\alpha = 0$, a eq. (4.6) reduz-se a

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2} + \Gamma^0_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \tag{4.7}$$

onde $x^0 = t$. Comparando as eqs. (4.7) e (4.4), concluímos que $\Gamma^0_{\beta\gamma} = 0$, para todos os valores de β e γ.

Note que a equação (4.6) pode ser escrita para $\alpha = i\,(i = 1, 2, 3)$, da seguinte forma

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^0}{d\lambda} = 0, \tag{4.8}$$

onde fizemos $\beta = \gamma = 0$.

Reescrevendo a eq. (4.5) na forma

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^0}{d\lambda} = 0, \tag{4.9}$$

e comparando com (4.8), concluímos que os coeficientes Γ^i_{00} são dados em termos do potencial Newtoniano através da seguinte relação

$$\Gamma^i_{00} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \tag{4.10}$$

sendo todos os outros coeficientes nulos.

Vamos considerar a expressão para o tensor de Riemann

$$R^i_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{jk} + \Gamma^r_{jl}\Gamma^i_{rk} - \Gamma^r_{jk}\Gamma^i_{rl}. \tag{4.11}$$

Levando-se em conta que somente os Γ^i_{00} são diferentes de zero, então, as únicas componentes do tensor de Riemann diferentes de zero são

$$R^i_{0k0} = \partial_k\Gamma^i_{00} - \partial_0\Gamma^i_{0k} + \Gamma^r_{00}\Gamma^i_{rk} - \Gamma^r_{0k}\Gamma^i_{r0}, \tag{4.12}$$

o que nos leva ao seguinte resultado para as componentes não-nulas

$$R^i_{0k0} = -R^i_{00k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^k}. \tag{4.13}$$

Nesse caso, a componente do tensor de Ricci diferente de zero é $R_{00} = R^\alpha_{0\alpha 0} = R^i_{0i0} = \nabla^2\Phi$. Assim, a equação de Poisson para o potencial gravitacional pode ser escrita na forma [23],

$$R_{00} = 4\pi G\rho. \tag{4.14}$$

Com a expressão (4.13) para a curvatura, a equação para o desvio geodésico

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha_{\mu\beta\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\eta^\beta\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \tag{4.15}$$

torna-se [24]

$$\frac{d^2n^0}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2n^i}{dt^2} + R^i_{0j0}n^j = 0. \tag{4.16}$$

Considerando todas as quantidades físicas dependentes somente do tempo, a posição como função do tempo de uma geodésica está relacionada com uma posição fixa, dadas pelas coordenadas $x = (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) =$ constante, através da seguinte relação

$$\vec{n}\,(t) = R\,(t)\,\vec{x}. \tag{4.17}$$

Se, inicialmente, temos $\vec{n}(t_0) = (n^1, 0, 0)$, então, em qualquer tempo t devemos ter $\vec{n}\,(t) = [R\,(t)\,x, 0, 0]$. Portanto, para $n^2 = n^3 = 0$, em $t = t_0$, a equação do desvio geodésico, eq. (4.16), resulta em

$$\frac{d^2 n^i}{dt^2} = -R^i_{010} n^1 \tag{4.18}$$

para $i \neq 0$. A eq. (4.18) não será compatível com $\vec{n}(t) = [R\,(t)\,x, 0, 0]$, a menos que $R^i_{010} = 0$ para $i \neq 0$, para qualquer instante t.

Repetindo esse argumento para $\vec{n}(t_0) = (0, n^2, 0)$, temos que $\vec{n}(t) = (0, R(t)y, 0)$ e para $\vec{n}(t_0) = (0, 0, n^3)$, implica que $\vec{n}(t) = (0, 0, R\,(t)\,z)$. Portanto, as únicas componentes não-nulas do tensor de Riemann são R^i_{0i0} (não existe soma em i).

Repetindo esse argumento para uma direção inicial arbitrária $\vec{n}(t) = R(t)\vec{x}$, temos [23]

$$R^1_{010} = R^2_{020} = R^3_{030},$$

que implica que $R^i_{0i0} = (1/3)\,R_{00}$. Ao combinarmos esse resultado com a eq. (4.14) mostramos que para um desvio entre duas geodésicas quaisquer, podemos escrever (4.16) como sendo

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho R. \tag{4.19}$$

Podemos integrar (4.19), se admitirmos que a densidade de matéria ρ (depende somente do tempo t) através do fator de escala $R(t)$. Esta hipótese está baseada no Princípio Cosmológico, e resulta na seguinte relação

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\,(t)\,R^3\,(t)\right) = 0, \tag{4.20}$$

que é a equação de continuidade usual.

Integrando essa equação obtemos,

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3(t)}. \tag{4.21}$$

Substituindo (4.21) em (4.19) e multiplicando ambos os membros por dR/dt temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{1}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

ou

$$d\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_0^3\right)\frac{dR}{R^2\,(t)}. \tag{4.22}$$

Realizando a integração, obtemos,

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR^2}{dt}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{R_0^3}{R^3} + \frac{R_0^2}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\Bigg|_{t=t_0} - \frac{R_0^2}{R^2}\frac{8\pi}{3}G\rho_0\frac{R_0^3}{R},$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\,(t) - \frac{R_0^2\left[\frac{8\pi G\rho}{3} - \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2\right]\Big|_{t=t_0}}{R^2\,(t)} \tag{4.23}$$

que é a equação de Friedmann, onde a constante é dada por

$$k \equiv \left[\frac{8\pi G\rho}{3} - \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2\right]\Bigg|_{t=t_0}. \tag{4.24}$$

A constante dada por (4.24) é invariante por mudança de escala $R(t) \rightarrow \beta R(t)$, onde β é uma constante arbitrária. Esta invariância é uma manifestação do fato de que as mudanças $R(t) \rightarrow \beta R(t)$ e $\vec{x} \rightarrow \beta\vec{x}$ não alteram a distância própria entre dois pontos do espaço, e portanto, não possuem significado físico. Esta mesma invariância está presente na equação de Friedmann da relatividade geral para o caso plano $k = 0$, dada por

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\,(t)\,. \tag{4.25}$$

A invariância de (4.25) por $R(t) \rightarrow \beta R(t)$ é uma consequência do fato de que as surpefícies de homogeneidade e isotropia para $k = 0$, são planas.

Com base nessa formulação geométrica, [23] afirma que a cosmologia Newtoniana, obtida desta forma, é tão rigorosa quanto a cosmologia relativística, uma vez que as equações geodésicas são as mesmas, em ambas as formulações. Nosso entendimento é que essa afirmativa feita por Tipler [23] não faz sentido, visto que o fato das equações serem as mesmas não garante, necessariamente, que as duas formulações possuam o mesmo grau de rigor. Caso houvesse sentido nessa afirmativa, as deduções feitas por Milne [1] e Milne e McCrea [2], que conduzem às mesmas equações de movimento do caso relativístico, poderiam ser usadas para afirmar que as duas formulações são igualmente rigorosas, o que não é correto se considerarmos os diferentes aspectos e as limitações da abordagem Newtoniana.

Assim, no nosso entendimento, a descrição geométrica é antes de tudo uma forma elegante de se obter as equações de movimento no contexto da cosmologia Newtoniana, mas que não permite que se estabeleça comparações no que diz respeito ao rigor das cosmologias Newtoniana e a Einsteiniana, pelo simples fato de haver coincidências entre as equações do desvio geodésico.

Capítulo 5

Cosmologia Newtoniana para um potencial com correção do tipo Yukawa

O problema referente à possível existência de uma correção ao potencial Newtoniano, do tipo Yukawa, tem sido objeto de estudo desde os anos 80 do século passado até os dias atuais [25], [26]. Em meados dos anos 80, essa questão foi amplamente discutida, não sendo observado nenhum desvio das previsões feitas pela gravitação Newtoniana. Recentemente, essa questão foi retomada numa perspectiva de se confirmar se essa correção do tipo Yukawa existe, e em caso afirmativo, qual é o intervalo de validade, ou melhor, para que distâncias existe essa correção.

Neste capítulo, vamos fazer a revisão de um trabalho que se propõe examinar as consequências de uma cosmologia Newtoniana tomando como base o potencial Newtoniano acrescido de uma correção do tipo Yukawa [6].

Vamos considerar a energia potencial V de duas massas m_1 e m_2 separadas por uma distância r, modificada com o termo de Yukawa, e que é dada pela expressão

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right), \tag{5.1}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, sendo α e λ parâmetros relativos à intensidade da correção e ao intervalo de validade desta, respectivamente. Os valores possíveis de α e λ são estabelecidos através de análise de experimentos, sendo os valores mais recentes dados a partir de elementos fornecidos por experiências sobre o efeito Casimir [26].

Admitindo que exista essa nova interação, com um termo de curto alcance, D' Olivo e Ryan [6] examinaram as implicações, no cenário cosmológico, do termo adicional de Yukawa dado em (5.1). O método que somos impelidos a usar para tratar o problema é construir uma cosmologia Newtoniana seguindo o mesmo procedimento de Milne e McCrea. Usando-se o potencial Newtoniano, as equações de movimento para um universo homogêneo e isotrópico são as mesmas obtidas no contexto da teoria da relatividade geral, para pressão nula. Para o potencial dado por (5.1), podemos enumerar alguns possíveis problemas, a saber: (a) não existe nenhuma garantia que na cosmologia Newtoniana construída, com esse potencial, as equações de movimento sejam semelhantes às da teoria relativística; e (b) não é evidente que possa ser construída a cosmologia Newtoniana, uma vez que o método de Milne e McCrea é fortemente dependente da forma da interação.

Conforme já foi discutido, uma partícula no fluido cosmológico em movimento, tem uma velocidade que está relacionada com o fator de escala, $R(t)$, através da seguinte expressão

$$\vec{v}=\left(\dot{R}/R\right)\vec{r}. \tag{5.2}$$

A equação de Euler e a equação de continuidade para esse fluido de densidade $\rho(t)$,são dadas por

$$\vec{r}\left[\ddot{R}/R\right]-\vec{F}=0, \tag{5.3}$$

$$d\rho/dt+3\rho\dot{R}/R=0, \tag{5.4}$$

onde $\vec{F}$ é a força gravitacional por unidade de massa que atua sobre a partícula.

A eq. (5.4) pode ser reescrita na forma,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=-\frac{3\dot{R}}{R}, \tag{5.5}$$

ou

$$\frac{1}{\rho}d\rho=-\frac{3}{R}dR. \tag{5.6}$$

Integrando a eq. (5.6) obtemos,

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -3\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \tag{5.7}$$

o que implica no resultado

$$\rho = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3}, \tag{5.8}$$

onde ρ_0 e R_0 são constantes.

Esta equação nos diz que a densidade depende do tempo, t, através do fator de escala, sendo inversamente proporcional ao cubo desta quantidade, que é um resultado já conhecido.

A força que atua sobre a partícula pode ser calculada a partir do potencial gravitacional gerado pela casca esférica, admitindo que o potencial fora da esfera vai para zero quando $r \to \infty$, no centro da esfera vai para infinito e é contínuo através da superfície da esfera.

Dentro da esfera, para $r < \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é o raio da esfera, a equação de Poisson pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho. \tag{5.9}$$

Integrando a eq. (5.9) entre 0 a $\mathcal{R}$, obtemos,

$$\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho\frac{r^3}{3} \tag{5.10}$$

Ao integrarmos a expressão acima chegamos ao seguinte resultado para o potencial gravitacional dentro da esfera

$$\phi_1(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 + \sigma, \tag{5.11}$$

onde σ é uma constante.

Para $r > \mathcal{R}$, ou seja, fora da esfera, temos:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0, \tag{5.12}$$

o que nos permite concluir que $r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}$ é uma constante, que podemos designar, C. Assim, temos

$$\phi_2(r) = -\frac{C}{r} + B, \;\; B = 0 \text{ pois } \phi(\infty) = 0. \tag{5.13}$$

Usando a condição $\phi\left(r\rightarrow\infty\right)\rightarrow0$, obtemos

$$\phi_2\left(r\right)=-\frac{C}{r}. \tag{5.14}$$

Para encontrar o valor da constante σ, vamos igualar (5.11) a (5.14) e também as suas derivadas, ou seja,

$$\begin{aligned}\phi_1\left(r\right)&=\phi_2\left(r\right) \\ \frac{\partial\phi_1\left(r\right)}{\partial r}&=\frac{\partial\phi_2\left(r\right)}{\partial r}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

De (5.15), obtemos as seguintes relações

$$\frac{2}{3}\pi G\rho R^2+\sigma=-\frac{C}{R}, \tag{5.16}$$

$$\frac{4}{3}\pi G\rho R=\frac{C}{R^2}. \tag{5.17}$$

Manipulando algebricamente as eqs. (5.16) e (5.17), obtemos que a constante σ é dada por $\sigma=-2\pi G\rho R^2$.

Vamos considerar a equação satisfeita pelo potencial gravitacional Newtoniano, a equação de continuidade e a equação de movimento, que são dadas, respectivamente, por

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho, \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\right)=0, \tag{5.19}$$

e

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot v=-\vec{\nabla}\phi, \tag{5.20}$$

onde estamos considerando a pressão nula.

Suponhamos que o universo é estático e homogêneo, o que significa dizer que $\vec{v}=0$ e $\rho\left(t\right)=\rho_0$ é constante no tempo. Consideremos a solução da eq. (5.18) como sendo dada pela eq. (5.11). As hipóteses feitas sobre $\vec{v}$ e ρ são compatíveis com a eq. (5.19). No entanto, a eq. (5.20) não é satisfeita, pois $\vec{\nabla}\phi\neq0$. Assim, a solução encontrada não é válida para um universo estático e homogêneo. Ela corresponde a um universo não-estático, no qual a expansão está associada ao movimento das partículas.

Para encontrar a força gravitacional $\vec{F}$, vamos considerar, inicialmente, $r < \mathcal{R}$, e usar a relação entre $\vec{F}$ e ϕ, dada por

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi. \tag{5.21}$$

Portanto, para $r < \mathcal{R}$, temos o seguinte resultado

$$\vec{F} = -\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\pi}{3}G\rho r^2\right),$$

que pode ser reescrita na forma

$$\vec{F} = -\frac{4\pi}{3}G\rho\vec{r}. \tag{5.22}$$

Substituindo (5.22) em (5.3) e multiplicando por R^3, obtemos:

$$R^2\ddot{R} + \frac{4}{3}\pi G\rho_0 = 0. \tag{5.23}$$

Vamos reescrever (5.23) na forma

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\frac{1}{R^2} \tag{5.24}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\frac{1}{R^2}. \tag{5.25}$$

Multiplicando a eq. (5.25) por dR/dt, temos

$$\frac{dR}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\frac{1}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2\right) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0\left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R} + k\right)\right), \tag{5.26}$$

onde k é uma constante. A integração de (5.26) nos fornece a seguinte equação

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{k}{R^2} \tag{5.27}$$

A constante k, no contexto Newtoniano, é a energia e pode ter os valores $+1, 0$ ou -1, por uma escolha conveniente das constantes que aparecem em sua definição. A equação (5.27) corresponde exatamente a equação de Friedmann.

Os resultados obtidos são independentes do valor de $\mathcal{R}$, e portanto podemos fazer $\mathcal{R} \to \infty$. Neste caso, $\sigma \to -\infty$, mas as equações para R e ρ permanecem as mesmas.

Vamos considerar o potencial modificado através de uma contribuição do tipo Yukawa. Neste caso, podemos escrever

$$\Phi = -G\frac{m}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(1+\alpha e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right). \tag{5.28}$$

O potencial gerado por uma massa dm é dado por

$$d\Phi = -\frac{Gdm}{|r-r'|}\left(1+\alpha e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right), \tag{5.29}$$

ou

$$d\Phi = -\frac{G\rho}{|r-r'|}\left(1+\alpha e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right)dv, \tag{5.30}$$

onde, $dm = \rho dv$.

A eq. (5.30), pode ser escrita, na forma integral, como

$$\Phi = -G\int\frac{\rho}{|r-r'|}dv + \alpha G\int\frac{\rho}{|r-r'|}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}dv \equiv \Phi_1+\Phi_2 \tag{5.31}$$

onde $\Phi_1 = -G\int\frac{\rho}{|r-r'|}dv$ e $\Phi_2 = \alpha G\int\frac{\rho}{|r-r'|}e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|/\lambda}$.

Podemos escrever, então, que,

$$\nabla^2\Phi = \nabla'^2\Phi_1 + \nabla'^2\Phi_2, \tag{5.32}$$

onde

$$\nabla'^2\Phi_1 = -G\int\rho(r)\,\nabla'^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dv,$$

ou

$$\nabla'^2 \Phi_1 = -4\pi G \int \rho(r)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, dv,$$

que pode ser escrita na forma

$$\nabla'^2 \Phi_1 = -4\pi G \rho(r'). \tag{5.33}$$

O segundo termo em (5.32) é dado por

$$\nabla'^2 \Phi_2 = \alpha G \int \rho(r)\, \nabla'^2 \left(\frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv, \tag{5.34}$$

ou

$$\nabla'^2 \Phi_2 = \alpha G \int \rho(r) \left[\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla'^2 \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) + \right.$$
$$\left. + 2\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{\nabla}' \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) \right] dv$$

que ainda pode ser escrita como

$$\nabla'^2 \Phi_2 = \alpha G \int \rho(r)\, 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} dv + \alpha G \int \frac{\rho(r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla'^2 \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) dv +$$
$$+ 2\alpha G \int \rho(r)\, \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{\nabla}' \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) dv,$$

ou

$$\nabla'^2 \Phi_2 = 4\pi \alpha G \rho(r') + \alpha G \int \frac{\rho(r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla'^2 \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) dv +$$
$$2\alpha G \int \rho(r)\, \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{\nabla}' \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) dv, \tag{5.35}$$

onde, $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ e,

$$\nabla \left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right) = -\frac{1}{\lambda} \left[\vec{\nabla} |r - r'|\, e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}} \right] = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right], \tag{5.36}$$

e foi usado o fato de que

$$\vec{\nabla} \cdot |\vec{r} - \vec{r}'| = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Vamos tomar o divergente de (5.36), dado por

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right)=\nabla\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right)\right],$$

que pode ser reescrito como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right)=\frac{1}{\lambda}\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}+\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{\nabla}\left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right)\right)\right],$$

e que resulta em :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right)=\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}+\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}\right].$$

Fazendo as substituições na equação (5.35) temos,

$$\nabla'^2\Phi_2=4\pi\alpha G\rho\left(r'\right)+\frac{1}{\lambda^2}\underbrace{\int\frac{\rho\left(r\right)}{|r-r'|}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}dv}_{\Phi_2}+\frac{2\alpha G}{\lambda}\int\frac{\rho\left(r\right)}{|r-r'|^2}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}dv-\frac{2\alpha G}{\lambda}\int\frac{\rho\left(r\right)}{|r-r'|^2}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\lambda}}dv,$$

que pode ser escrito na forma

$$\nabla'^2\Phi_2-\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2=4\pi\alpha G\rho\left(r'\right). \tag{5.37}$$

Vamos considerar o potencial (5.28) que é soma de dois potenciais que obedecem às equações

$$\nabla^2\Phi_1=0, \tag{5.38}$$

$$\nabla^2\Phi_2=-\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2=0, \tag{5.39}$$

onde estamos considerando as soluções na ausência de matéria. Para soluções no vazio (dentro e fora da casca esférica) temos que,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi_2}{dr}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\Phi_2$$

que nos leva a

$$\Phi_2\left(r\right)=\frac{Ae^{r/\lambda}}{r}+\frac{Be^{-r/\lambda}}{r}. \tag{5.40}$$

A solução da eq. (5.38) é dada por

$$\Phi_1(r) = -\frac{C}{r} + D. \tag{5.41}$$

Dentro da esfera temos que Φ_1 e Φ_2 são finitos, e fora da esfera, quando $r \to \infty$, as duas soluções vão para zero. O potencial total dentro e fora da esfera é dado por $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Considerando a eq. (5.41) para $r \to \infty$, concluímos que

$$\Phi_1(r) = -\frac{C}{r}. \tag{5.42}$$

Por outro lado, nesse mesmo limite, a eq. (5.40) implica que $A = 0$, e portanto,

$$\Phi_2(r) = \frac{Be^{-r/\lambda}}{r}. \tag{5.43}$$

Para as soluções interiores, temos que

$$\Phi_{1,int} = -\frac{C_i}{r} + D_i \tag{5.44}$$

e

$$\Phi_{2,int} = \frac{A_i e^{r/\lambda}}{r} + \frac{B_i e^{-r/\lambda}}{r}. \tag{5.45}$$

Considerando as condições de contorno na origem, $r = 0$, temos que

$$\Phi_{1,int} = D_i \tag{5.46}$$

e

$$\Phi_{2,int} = 2A_i \sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right).$$

Portanto, o potencial no interior da esfera é dado por

$$\Phi_{int} = 2A_i \sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right) + D_i. \tag{5.47}$$

O potencial externo é dado por

$$\Phi_{ext} = \frac{A_{ext}}{r} e^{-r/\lambda} - \frac{C_{ext}}{r}. \tag{5.48}$$

Para fixar as constantes A_i e D_i, vamos admitir que o potencial no centro da esfera é a soma de todas as contribuições de cada camada infinitesimal da esfera, tratada como uma massa puntiforme que dá uma contribuição igual ao potencial (5.1). Podemos encontrar o potencial fora da esfera usando a condição do potencial ser contínuo através da camada esférica. O potencial total dentro e fora da camada esférica (com densidade ρ e espessura da) é dado por

$$\Phi_{int} = -4\pi G\rho_Y \alpha a\lambda da e^{-a/\lambda}\left[\sinh\left(r/\lambda\right)\right]/r - 4\pi G\rho a da, \tag{5.49}$$

$$\Phi_{ext} = -4\pi G\rho_Y \alpha a\lambda \sinh(a/\lambda) da e^{-r/\lambda}/r - 4\pi G\rho a^2 da, \tag{5.50}$$

onde ρ é a densidade de matéria e ρ_Y é a densidade de matéria que gera o termo de Yukawa. O potencial dentro da esfera sólida de raio $\mathcal{R}$ e densidade constante é

$$\int_0^r \Phi_{ext}\left(a\right) da + \int_0^{\mathcal{R}} \Phi_{int}\left(a\right) da$$

$$= -4\pi G\rho_Y\alpha\lambda^2 + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 - 2\pi G\rho\mathcal{R}^2 + 4\pi G\rho_Y\alpha\lambda^2\left\{\left[\sinh\left(r/\lambda\right)\right]/\left(r/\lambda\right)\right\}\left(\mathcal{R}/\lambda+1\right)e^{-\mathcal{R}/\lambda}. \tag{5.51}$$

Ao tomarmos $\mathcal{R}$ indo para o infinito, o último termo vai para zero e o potencial se reduz ao potencial Newtoniano,

$$\Phi\left(r\right) = -4\pi G\rho_Y\alpha\lambda^2 + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 - 2\pi G\rho\mathcal{R}^2. \tag{5.52}$$

Da equação (5.52) temos a força sobre uma partícula do fluido é igual a força Newtoniana. As equações para $\rho\left(t\right)$ e $R\left(t\right)$ são dadas por (5.8), (5.23) e (5.27), e portanto o universo é o mesmo do modelo de Friedmann-Robertson-Walker.

O potencial dado por (5.52) está associado à mesma expressão para a força dada por (5.22). Portanto, a equação de movimento, neste caso, é dada pela eq. (5.27), que é a mesma obtida no caso do potencial Newtoniano. Logo, neste contexto, a correção ao potencial Newtoniano, dada pelo termo de Yukawa, não tem nenhuma influência na dinâmica do universo. Este resultado está coerente, apesar de não ser consequência direta, com o fato de que até mesmo a distância micrométricas, a correção de Yukawa não ter nenhuma influência na interação gravitacional Newtoniana.

Assim, o estudo de modelos do universo que são compatíveis com o potencial dado pela eq. (5.1), qualquer que seja o modelo cosmológico considerado, deve levar a um resultado que preserva a equação cosmológica. Este resultado é compatível com o fato de que a interação gravitacional Newtoniana não é sensível à correção de Yukawa, e portanto, as equações de movimento devem ser as mesmas, quer consideremos ou não a correção, pelo menos no contexto cosmológico. Caso fossem diferentes, e matematicamente, isto seria possível, teríamos uma incompatibilidade com o fato observacional que a interação gravitacional Newtoniana não sofre nenhuma modificação, pelo menos, até distâncias micrométricas entre os corpos.

Capítulo 6

Evolução das perturbações na cosmologia Newtoniana com constante cosmológica variável

A constante cosmológica Λ foi introduzida na teoria da relatividade geral, para resolver os conflitos entre a teoria e os dados observacionais disponíveis no início do século passado. Então, para se obter um modelo estático era preciso introduzir um termo extra, contendo a constante cosmológica, de modo a evitar o colapso em virtude da ação gravitacional da matéria. Atualmente, a inclusão da constante cosmológica também é uma imposição dos dados observacionais que indicam que o universo está expandindo-se de maneira acelerada, o que pode ser obtido em modelos com constante cosmológica, dentre outros [27].

Uma pergunta que podemos fazer relacionada com a constante cosmológica é a seguinte: Quais são as possíveis implicações de uma constante cosmológica que varia com o tempo?

Algumas implicações foram estudadas considerando que Λ depende do tempo através de R^{-2}, ou seja, $\Lambda = \alpha R^{-2}$, onde α é uma constante [28], ou através de uma combinação que envolve também o parâmetro de Hubble, que pode ser escrita na forma $\Lambda = 3\beta \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \alpha R^{-2}$, onde β é uma constante [29].

O trabalho de Arcuri e Waga [9] investiga o problema relacionado com a evolução de perturbações, no contexto da cosmologia Newtoniana, também em um cenário onde Λ varia com o tempo através do parâmetro de Hubble.

O papel da constante cosmológica tem sido objeto de discussões, tendo tomado ímpeto com o cenário de um universo acelerado, no qual essa constante pode ser responsável pela repulsão cósmica necessária para acelerá-lo. Uma revisão acerca dos vários momentos dessa constante pode ser vista em [30], [31].

Neste capítulo, vamos fazer uma revisão do trabalho de Arcuri e Waga [9] no qual eles investigam o crescimento das perturbações em modelos cosmológicos Newtonianos com criação de matéria, nos quais esse processo ocorre através da dependência da constante cosmológica com o tempo, por intermédio do parâmetro de Hubble. Iremos adicionar alguns comentários aos resultados obtidos e fazer uma extensão parcial desse trabalho, com a introdução de um termo de pressão nas equações cosmológicas.

6.1 Equações Diferenciais para δ

As equações fundamentais da hidrodinâmica que descrevem o movimento do fluido cósmico são:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_r + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}_r\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}_r\Phi \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_r + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho\vec{u}) = \Psi, \tag{6.2}$$

e

$$\nabla_r^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \tag{6.3}$$

As equações (6.1) - (6.3) correspondem a equação de conservação de momento, a equação da continuidade, e a equação de Poisson, respectivamente, sendo $\vec{u}$ a velocidade de um elemento do volume do fluido, ρ a densidade de massa, Φ o potencial gravitacional, e Λ a constante cosmológica que é considerada como uma função do tempo Newtoniano absoluto t. Vamos considerar a pressão do fluido desprezível. Para considerar modelos cosmológicos com criação de matéria, será incluído na equação da continuidade, o termo fonte, que denotaremos por Ψ [32].

Esse novo termo de fonte modifica a equação de Euler, que passa a ser escrita na forma [32]

$$\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)_r+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}_r\right)\vec{u}=-\vec{\nabla}_r\Phi+\frac{\Psi}{\rho}\left(c-\vec{u}\right). \tag{6.4}$$

Note que na equação acima, foi admitido que a criação de partículas não afeta a velocidade das partículas existentes, e além disto, as partículas criadas, também possuem esta mesma velocidade.

Vamos introduzir a coordenada comóvel $\vec{x}$, relacionada a coordenada $\vec{r}$, por [33], [34]

$$\vec{x}=\frac{r}{R} \tag{6.5}$$

onde $R=R\left(t\right)$ é o fator de escala. A velocidade do fluido e a densidade em termos dessa nova coordenada são dadas por

$$\vec{u}=\dot{R}\vec{x}+R\overrightarrow{\dot{x}}=\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\left(\vec{x},t\right) \tag{6.6}$$

e

$$\rho=\rho_0\left(t\right)\left[1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right], \tag{6.7}$$

onde $\vec{v}$ e δ são perturbações de primeira ordem da velocidade $\dot{R}\vec{x}$ e da densidade ρ_0, respectivamente. Vamos admitir, como é usual, que essas quantidades são pequenas, isto é, $\delta\ll 1$ e $v\ll u$.

Em termos das novas coordenadas $(\vec{x},t)$, podemos estabelecer as seguintes relações entre operadores

$$\vec{\nabla}_x\equiv\vec{\nabla}\equiv R\vec{\nabla}_r \tag{6.8}$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x\equiv\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r+\frac{\dot{R}}{R}\vec{x}\cdot\vec{\nabla}_x. \tag{6.9}$$

Usando esses novos operadores, podemos reescrever as equações (6.1) - (6.3). Inicialmente, vamos considerar a equação (6.1), que passa a ser reescrita como,

$$\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)_x-\frac{\dot{R}}{R}\left(x\cdot\nabla_x\right)\vec{u}+\frac{\left(\vec{u}\cdot\nabla_x\right)}{R}\vec{u}=-\vec{\nabla}_x\Phi, \tag{6.10}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\right)-\left(\frac{\dot{R}}{R}\vec{x}\cdot\nabla_x\right)\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\right)+\frac{1}{R}\left\{\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\right)\nabla_x\right\}\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\right)=-\frac{\vec{\nabla}_x}{R}\Phi. \tag{6.11}$$

Podemos transformar a equação (6.11) em

$$\ddot{R}\vec{x}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\frac{\dot{R}}{R}\left(\vec{x}\cdot\nabla_x\right)\vec{v}+\frac{\dot{R}}{R}\left(\vec{x}\cdot\nabla_x\right)\vec{v}+\frac{\dot{R}}{R}\left(\vec{v}\cdot\nabla_x\right)\left(\vec{x}\right)=-\frac{\nabla_x}{R}\Phi, \tag{6.12}$$

a qual resulta em

$$\ddot{R}\vec{x}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{\dot{R}}{R}\vec{v}=-\frac{1}{R}\nabla\Phi. \tag{6.13}$$

A equação (6.2), pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_r+\left(\nabla_r\rho\right)\cdot\vec{u}+\rho\cdot\left(\nabla_r\vec{u}\right)=\Psi, \tag{6.14}$$

ou

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_x-\frac{\dot{R}}{R}\vec{x}\cdot\nabla_x\rho+\frac{1}{R}\left(\nabla\times\rho\right)\cdot\vec{u}+\frac{\rho}{R}\nabla\times\vec{u}=\Psi. \tag{6.15}$$

Substituindo ρ e $\vec{u}$ na equação (6.15), temos,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_0\left(1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right)\right]_x-\frac{\dot{R}}{R}\vec{x}\cdot\nabla_x\left(\rho_0\left[1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right]\right)+\frac{1}{R}\left\{\nabla_x\left(\rho_0\left[1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right]\right)\right\}\cdot\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\left(\vec{x},t\right)\right)+$$
$$+\frac{\rho_0}{R}\left[1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right]\nabla_x\left(\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\right)\left(\vec{x},t\right)\right)=\Psi \tag{6.16}$$

ou ainda

$$\dot{\rho}_0\left(1+\delta\left(\vec{x},t\right)\right)+\rho_0\dot{\delta}\left(\vec{x},t\right)-\frac{\dot{R}}{R}\rho_0\vec{x}\cdot\nabla_x\left(\delta\left(\vec{x},t\right)\right)+\frac{\rho_0}{R}\left[\nabla_x\delta\left(\vec{x},t\right)\right]\cdot\left(\dot{R}\vec{x}+\vec{v}\right)+$$
$$+\frac{\rho_0}{R}\left(1+\delta\right)\left\{\dot{R}\nabla_x\vec{x}+\nabla_x\vec{v}\right\}=\Psi, \tag{6.17}$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{\rho}_0+\dot{\rho}_0\delta+\rho_0\dot{\delta}+\frac{\rho_0}{R}\dot{R}\left(\nabla_x\delta\right)\cdot\vec{v}+3\frac{\dot{R}}{R}\rho_0+\rho_0 3\frac{\dot{R}}{R}\delta+\frac{\rho_0}{R}\left(\nabla\times\vec{v}\right)+\frac{\rho_0\delta}{R}\nabla\times\vec{v}=\Psi. \tag{6.18}$$

Usando a equação (6.2) para ρ_0, que é dada por

$$\dot{\rho}_0 + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho_0 = \Psi \tag{6.19}$$

e substituindo na equação (6.18), obtemos o seguinte resultado

$$R\Psi\left(\frac{\delta}{\rho_0}\right) + R\dot{\delta} + \dot{R}\left(\nabla_x\delta\right)\cdot\vec{v} + \left(\nabla_x\cdot\vec{v}\right) + \delta\left(\nabla\times\vec{v}\right) = 0. \tag{6.20}$$

Como o valor de δ e υ são muito pequenos, podemos desprezar os termos que contém produtos envolvendo δ e υ, o que nos permite obter o seguinte resultado

$$\nabla\cdot\vec{v} = -R\left[\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\Psi\delta}{\rho_0}\right]. \tag{6.21}$$

A equação (6.3) toma a seguinte forma

$$\frac{1}{R^2}\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0\left(1+\delta\right) - \Lambda. \tag{6.22}$$

Escrevendo Φ como [32]

$$\Phi = \phi\left(\vec{x},t\right) + \frac{2}{3}\pi G\rho_0 R^2 x^2 - \frac{1}{6}\Lambda R^2 x^2 \tag{6.23}$$

e a equação (2.57), na aproximação de ordem zero ou seja, em termos de ρ_0, temos

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi G\rho_0 + \Lambda. \tag{6.24}$$

Substituindo Φ dado por (6.23) em (6.13), temos

$$\ddot{R}\vec{x} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{R}}{R}\vec{v} = -\frac{\nabla\phi}{R} - \frac{2}{3}\pi G\rho_0 R^2\left(\nabla x^2\right) + \frac{\Lambda}{6}R\left(\nabla x^2\right). \tag{6.25}$$

Usando a relação $\nabla\left(x^2\right) = 2\vec{x}$, e substituindo na equação (6.25), temos

$$\ddot{R}\vec{x} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{R}}{R}\vec{v} = -\frac{\nabla\phi}{R} - \frac{4}{3}\pi G\rho_0 R^2\vec{x} + \frac{\Lambda}{3}R\vec{x}. \tag{6.26}$$

Reescrevendo (6.24) na forma

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 R + \frac{\Lambda R}{3}, \tag{6.27}$$

e substituindo em (6.26), obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}=-\frac{\nabla\phi}{R}. \tag{6.28}$$

Agora, vamos substituir Φ, dado por (6.23) em (6.22). Assim procedendo, obtemos

$$\frac{1}{R^2}\nabla^2\phi+\frac{2}{3}\pi\frac{G}{R^2}\rho_0 R^2\nabla^2\left(x^2\right)=4\pi G\rho_0\left(1+\delta\right)-\Lambda, \tag{6.29}$$

o que resulta em

$$\nabla^2\phi=4\pi G R^2\rho_0\delta, \tag{6.30}$$

ao usarmos a relação $\nabla^2\left|\vec{x}\right|^2=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left|\vec{x}\right|^2=6$.

Tomando a divergência em (6.28), obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)+\frac{\dot{R}}{R}\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)=-\nabla\cdot\frac{\left(\nabla\phi\right)}{R}. \tag{6.31}$$

Substituindo (6.21) na equação (6.31), obtemos o seguinte resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-R\left[\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\Psi\delta}{\rho_0}\right]\right)+\frac{\dot{R}}{R}\left(-R\left[\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\Psi\delta}{\rho_0}\right]\right)=-\frac{\nabla^2\phi}{R}. \tag{6.32}$$

Substituindo $\nabla^2\phi$ pela expressão dada em (6.30), obtemos

$$-\dot{R}\left(\dot{\delta}+\frac{\Psi\delta}{\rho_0}\right)-R\left(\ddot{\delta}+\dot{\Psi}\frac{\delta}{\rho_0}+\frac{\Psi}{\rho_0}\dot{\delta}\right)-\dot{R}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\Psi\delta}{\rho_0}\right)=-4\pi G R\rho_0\delta, \tag{6.33}$$

que após manipulação algébrica se reduz a

$$2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}+2\frac{\dot{R}}{R}\frac{\Psi\delta}{\rho_0}+\ddot{\delta}+\dot{\Psi}\frac{\delta}{\rho_0}+\frac{\Psi}{\rho_0}\dot{\delta}-4\pi G R\rho_0\delta=0, \tag{6.34}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}+\left[2\frac{\dot{R}}{R}+\frac{\Psi}{\rho_0}\right]\frac{\partial\delta}{\partial t}-\left[4\pi G R\rho_0-2\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\Psi}{\rho_0}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Psi}{\rho_0}\right)\right]\delta=0. \tag{6.35}$$

É importante chamar a atenção para o fato de que se considerarmos $\Psi=0$, vamos obter exatamente a equação que rege o comportamento e evolução das perturbações, no contexto da cosmologia Newtoniana, na ausência do termo de pressão.

6.2 Evolução das perturbações no modelo com Λ variável

Nesta seção será feita um revisão da seção III do trabalho de Arcuri e Waga [9]. Portanto, vamos considerar a equação de evolução para as perturbações, no contexto da cosmologia Newtoniana, num cenário em que a constante cosmológica está presente, e cuja variação com o tempo dá origem a um processo de criação de matéria.

A relação entre Λ e a constante de Hubble, será admitida como tendo a forma [32]

$$\Lambda = 3\beta H^2. \tag{6.36}$$

O termo de fonte responsável pela criação de matéria e a constante cosmológica estão relacionados por [32]

$$\Psi = -\frac{1}{8\pi G}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \tag{6.37}$$

A solução da eq. (6.35) pode ser obtida através de uma mudança da variável t para R. Fazendo esta mudança, obtemos a seguinte equação [9]

$$R^2\frac{\partial^2 \delta}{\partial R^2} + \frac{3}{2}R\left(1+3\beta\right)\frac{\partial \delta}{\partial R} - \frac{3}{2}\left(1+\beta\right)\left(1-3\beta\right)\delta = 0. \tag{6.38}$$

Na obtenção da eq. (6.38), usamos as seguintes relações:

$$\frac{3}{2}\left(1-\beta\right)\frac{\dot{R}^2}{R^2} = 4\pi G\rho_0, \tag{6.39}$$

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2}R\left(1-3\beta\right)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \tag{6.40}$$

e

$$\frac{\Psi}{\rho_0} = 3\frac{\dot{R}}{R}. \tag{6.41}$$

A integração da eq. (6.38) fornece a seguinte solução [9]

$$\delta = AR^{-3(1+\beta)/2} + BR^{1-3\beta}, \tag{6.42}$$

onde A e B são constantes.

A eq. (6.42) pode ser reescrita na forma

$$\delta = A\delta_-(R) + B\delta_+(R)\,, \tag{6.43}$$

onde δ_- e δ_+ são os modos decrescente e crescente, respectivamente. É importante salientar que a partir da análise de (6.42), concluímos que não é possível ter modo crescente se $\beta \geq 1/3$.

Nesse contexto, a dependência temporal do fator de escala é dado por [32], [35]

$$R(t) = R_a \left[\frac{3}{2} H_a (1-\beta)\, t\right]^{\frac{2}{3}(1-\beta)}, \tag{6.44}$$

onde R_a e H_a são os valores atuais do fator de escala e do parâmetro de Hubble, respectivamente.

Substituindo (6.44) em (6.43) e redefinindo as constantes, podemos escrever a seguinte expressão

$$\delta = \delta_-(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+\beta/1-\beta)} + \delta_+(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2(1-3\beta)/3(1-\beta)}, \tag{6.45}$$

onde $\delta_+(t_0)$ e $\delta_-(t_0)$ indicam as amplitudes dos modos crescente e decrescente em um dado tempo inicial, t_0, respectivamente.

Considerando $\beta = 0$, ou seja, na ausência de criação de matéria, e para um fluido sem pressão, reobtemos os resultados conhecidos, que são

$$\delta_+ = \delta_+(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{6.46}$$

e

$$\delta_- = \delta_-(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}. \tag{6.47}$$

Conforme já salientamos, para $\beta < 1/3$, temos o modo crescente, e portanto, podemos ter, em princípio, formação de estruturas, tais como galáxias, através de um processo chamado de instabilidade gravitacional que se origina a partir de uma pequena inomogeneidade ou pequena variação na densidade de matéria, que dá origem a uma atração da matéria da vizinhança, num processo crescente, que agrega, cada vez mais, matéria. Este processo pode ser compreendido a partir do comportamento da flutuação, δ, que acabamos de determinar. É importante chamar a atenção para o fato de que no modelo investigado por Arcuri e

Waga [9] existe uma forte correlação entre a possibilidade de ocorrência da instabilidade gravitacional, e portanto, de formação de estruturas, e o valor do parâmetro β. Também devemos enfatizar que os resultados obtidos são os mesmos que seriam obtidos no contexto da relatividade geral.

6.3 Alguns comentários sobre a equação de evolução das perturbações na cosmologia Newtoniana com pressão

A descrição da cosmologia Newtoniana, incluindo o termo de pressão, foi feita por McCrea [36], e posteriormente, sem o uso de conceitos advindos da relatividade geral, por Harrison [3]. Na formulação adotada por McCrea [36] foi necessária a adoção de conceitos físicos das teorias da relatividade especial e geral, como por exemplo, preservar a equivalência entre massa e energia e a distinção entre massa inercial e gravitacional.

As equações hidrodinâmicas, nas quais é feita essa extensão para incluir a pressão, são dadas por:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\vec{u}\right] = 0, \tag{6.48}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = -\vec{\nabla}\Phi - \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)^{-1}\vec{\nabla}p, \tag{6.49}$$

e

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \tag{6.50}$$

que correspondem as equações de continuidade, de Euler e de Poisson, respectivamente. É importante chamar a atenção para o fato de que o tratamento perturbativo das eqs. (6.48)-(6.50) não fornecem o mesmo resultado [37] que é obtido na relatividade geral, no gauge síncrono.

Essa discrepância entre os resultados obtidos nos dois contextos mencionados anteriormente, foram resolvidos por Lima e colaboradores [5], que propuseram uma modificação na equação de continuidade, que passou a ser escrita na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \frac{p}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \tag{6.51}$$

Nesse novo cenário, se considerarmos o processo de criação de matéria à semelhança do que foi feito na seção anterior, a equação para a perturbação da densidade será dada por

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \left[2\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\Psi}{\rho_0} \right] \frac{\partial \delta}{\partial t} - \left[4\pi G R \rho_0 \left(1+\nu\right)\left(1+3\nu\right) - 2\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\Psi}{\rho_0}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Psi}{\rho_0}\right) \right] \delta = \frac{v_s^2}{R^2} \nabla^2 \delta, \tag{6.52}$$

onde estamos considerando a equação de estado do gás como sendo dada por $p = \nu \rho$, e $v_s^2 = \partial p / \partial \rho$.

Da equação (6.52) concluímos que os modos crescente e decrescentes dependem, agora, da pressão exercida pelo fluido, não somente através da modificação do coeficiente do termo $G\rho_0$, mas também pelo termo extra $\frac{v_s^2}{R^2}\nabla^2\delta$. Dessa forma, introduzimos no contexto Newtoniano, o papel da pressão na dinâmica do universo, o que acontece de maneira natural quando estamos tratando desse problema, na teoria da relatividade geral. Nesse contexto, qual seja, o da cosmologia Newtoniana, com o termo de pressão e com a modificação apropriada da equação da continuidade, obtemos os mesmos resultados da teoria da relatividade geral, porém, com uma vantagem, que é tratar de maneira mais simples, do ponto de vista matemático, o problema que acabamos de considerar.

Capítulo 7

Algumas considerações sobre a cosmologia Newtoniana quântica

As leis da física que governam o universo, nos dizem como o estado inicial evolui com o passar do tempo. Na física clássica, uma vez especificado o estado inicial, os estados subsequentes poderão ser conhecidos com precisão. Na física quântica, dado o estado inicial, também podemos conhecer a evolução do sistema, e determinar a probabilidade do sistema se encontrar em um certo estado, em um dado instante.

A cosmologia quântica tem como objetivo descrever o universo, usando as leis da física quântica. Mas, a aplicação destas leis, nos remete a um problema que consiste em conhecer o estado inicial do universo.

Uma forma de resolver este problema é usar os dados observacionais e a teoria que é consistente com os mesmos, para entender como era o universo nos instantes iniciais de sua história. Esta abordagem nos remete ao problema das condições iniciais, que pode ser resolvido no contexto da cosmologia quântica, que é fundamentada na aplicação da teoria quântica a todo o universo.

Neste capítulo, vamos considerar alguns resultados obtidos por Romero e Zamora [38] e por Freedman e colaboradores [39], e tecer alguns comentários.

7.1 Abordagem da cosmologia Newtoniana quântica segundo Romero e Zamora

Nesta seção e nas duas próximas, faremos uma breve revisão do trabalho feito por Romero e Zamora [38] e um breve comentário sobre os resultados obtidos.

Vamos considerar a eq. (2.8) que é a expressão da energia total dada por

$$E = \frac{1}{2}A\dot{S}^2 - G\frac{B}{S} - \frac{\Lambda}{6}AS^2 \tag{7.1}$$

onde $A = \sum\limits_{i}^{n} m_i r_i^2\,(t_0)$ e $B = \sum\limits_{i>j}^{n} \frac{m_i m_j}{|r_i(t_0)-r_j(t_0)|}$. Introduzindo um novo fator de escala $R = \mu S$ com μ constante, a eq. (7.1), tal como fizemos na seção 2.1, pode ser reescrita na forma

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -\frac{\kappa}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{7.2}$$

com

$$\kappa = -\frac{2E\mu^2}{A},\ \rho = \frac{\rho_0}{R^3},\ \text{e}\ \rho_0 = \frac{3B\mu^3}{4\pi A}. \tag{7.3}$$

Vamos expressar a eq. (7.2) em termos de variáveis canônicas. A lagrangiana do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}A\dot{S}^2 + G\frac{B}{S} + \frac{\Lambda}{6}AS^2 \\ \mathcal{L} &= \frac{A}{2\mu^2}\dot{R}^2 + G\frac{\mu B}{R} + \frac{\Lambda A}{6\mu^2}R^2.\end{aligned} \tag{7.4}$$

De (7.4) podemos construir dois espaços de fase, o primeiro definido como (S, P_S) onde $P_S = A\dot{S}$ e o segundo como (R, P_R) onde

$$P_R = \frac{A}{\mu^2}\dot{R}. \tag{7.5}$$

Em termos das variáveis (S, P_S), a Hamiltoniana é dada por

$$H = E = \frac{P_S^2}{2A} - \frac{GB}{S} - \frac{\Lambda AS^2}{6}, \tag{7.6}$$

e em termos de (R, P_R) é dada por

$$H=\frac{\mu^2 P_R^2}{2A}-\frac{G\mu B}{R}-\frac{\Lambda}{6}\frac{AR^2}{\mu^2}. \tag{7.7}$$

Podemos ainda escrever a equação de Friedmann (7.2) em termos das variáveis canônicas (R, P_R) como

$$\frac{P_R^2}{R^2}+\left(\frac{A}{\mu^2}\right)^2\left(\frac{\kappa}{R^2}-\frac{\Lambda}{3}-\frac{8\pi G}{3}\rho\right)=0. \tag{7.8}$$

A quantização do sistema é obtida a partir das equações de onda

$$\hat{H}\Psi\left(S\right)=\left(\frac{\hat{P}_S^2}{2A}-\frac{GB}{S}-\frac{\Lambda AS^2}{6}\right)\Psi\left(S\right)=E\Psi\left(S\right) \tag{7.9}$$

e,

$$\hat{H}\Psi\left(R\right)=\left(\frac{\mu^2}{2A}\hat{P}_R^2-\frac{G\mu B}{R}-\frac{\Lambda}{6}\frac{A\dot{R}^2}{\mu^2}\right)\Psi\left(R\right)=E\Psi\left(R\right), \tag{7.10}$$

com $\hat{P}_R=-i\hbar\frac{\partial}{\partial R}$.

Ao resolvermos as eqs. (7.9) e (7.10), estaremos determinando os estados do universo, no contexto da cosmologia Newtoniana quântica.

7.2 Cosmologia Newtoniana Quântica, sem o termo de pressão

Vamos tomar como ponto de partida, a seguinte equação cosmológica

$$-\frac{3\dot{R}^2}{R^2}+\Lambda+8\pi\rho=\frac{3\kappa}{R^2} \tag{7.11}$$

ou

$$\kappa=-\dot{R}^2+\frac{\Lambda R^2}{3}+\frac{8}{3}\pi\rho R^2. \tag{7.12}$$

Vamos multiplicar (7.12) por $\xi/2$ onde ξ é um parâmetro. Assim, temos

$$\frac{\xi}{2}\kappa=-\frac{\xi\dot{R}^2}{2}+\frac{\xi\Lambda R^2}{6}+\frac{4}{3}\xi\pi\rho R^2 \tag{7.13}$$

que podemos escrever como uma Lagrangiana

$$\mathcal{L}\left(\dot{R},R\right)=-\frac{\xi\dot{R}^2}{2}+\frac{\xi\Lambda R^2}{6}+\frac{4}{3}\xi\pi\rho R^2, \tag{7.14}$$

onde o termo cinético é dado por

$$E_C=-\frac{\xi\dot{R}}{2}. \tag{7.15}$$

O momento é definido por

$$P_R=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{R}}=-\xi\dot{R}. \tag{7.16}$$

Vamos reescrever (7.11) da seguinte forma

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2}+\frac{3\kappa}{R^2}-\Lambda-8\pi\rho=0,$$

sendo $\dot{R}=-P_R/\xi$. Portanto, temos

$$3\frac{P_R}{R^2}+\xi^2\left(\frac{3\kappa}{R^2}-\Lambda-8\pi\rho\right)=0. \tag{7.17}$$

A função de onda do universo, $\Psi\left(R\right)$, é encontrada quando resolvemos a equação

$$\left[\frac{3\hat{P}_R^2}{R^2}+\xi^2\left(\frac{3\kappa}{R^2}-\Lambda-8\pi\rho\right)\right]\Psi\left(R\right)=0. \tag{7.18}$$

Para matéria sem pressão temos $\rho\propto R^{-3}$, que mostra que a matéria está dominando o universo, tanto no nível clássico quanto no nível quântico.

Podemos escrever a eq. (7.13) como

$$H\Psi=E\Psi, \tag{7.19}$$

ou

$$\frac{\xi\hat{k}}{2}\Psi=\frac{\xi k}{2}\Psi. \tag{7.20}$$

Portanto, temos que

$$H=-\frac{P^2}{2\xi}+\left(\frac{\xi\Lambda}{6}+\frac{4}{3}\xi\pi\rho\right)R^2, \tag{7.21}$$

pode ser escrita como

$$H = -\frac{P^2}{2\xi} + \frac{1}{2}wR^2 \tag{7.22}$$

onde $w = \left(\frac{\xi\Lambda}{3} + \frac{8}{3}\xi\pi\rho\right)R^2$.

Considerando

$$\hat{P} = -ic\frac{\partial}{\partial R} \tag{7.23}$$

e substituindo (7.22), e (7.23) em (7.19), temos que

$$\frac{c^2}{2\xi}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\Psi + \frac{1}{2}wR^2\Psi = E\Psi \tag{7.24}$$

onde a energia E é dada por

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)w, \tag{7.25}$$

e de acordo com (7.20) podemos inferir que

$$\kappa = \frac{2}{\xi}\left(n + \frac{1}{2}\right)w$$

com κ definido em termos da energia, cujos possíveis valores podem ser tomados como iguais a $-1, 0, 1$.

7.3 Função de Onda no Universo Newtoniano

Vamos obter a função de onda do universo, no contexto da cosmologia Newtoniana. Como S e R são positivas, a equação de onda é definida somente no eixo positivo. Portanto, utilizaremos condições de contorno em $\Psi(\infty) = 0$ e $\Psi(0) = 0$.

Para o caso em que o universo é dominado por uma constante cosmológica negativa, temos que, $\Lambda = -|\Lambda|$ e $\rho \approx 0$. Neste caso, a eq. (7.9) torna-se [38]

$$\hat{H}\Psi(S) = \left[\frac{-\hbar^2}{2A}\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{A|\Lambda|}{6}S^2\right]\Psi(S) = E\Psi(S). \tag{7.26}$$

Vamos introduzir a variável z,

$$z = \left(\frac{A}{\hbar}\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\right)^{1/2} S. \tag{7.27}$$

Fazendo as devidas substituições temos,

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2A}\left(\frac{A}{\hbar}\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{A\,|\Lambda|}{6}\left(\frac{\hbar}{A}\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\right)z^2\right]\Psi\left(z\right)=E\Psi\left(z\right) \tag{7.28}$$

ou

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(\frac{2E}{\hbar\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}}-z^2\right)\right]\Psi\left(z\right)=0, \tag{7.29}$$

que tem como solução fisicamente aceitável [38]

$$\Psi_n\left(z\right)=H_{2n+1}\left(z\right)e^{-z^2/2}, \quad n=0,1,... \tag{7.30}$$

onde $H_N\left(z\right)$ é o polinômio de Hermite de ordem N. O espectro da energia é dado por

$$E_n=\hbar\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\left(2n+\frac{3}{2}\right). \tag{7.31}$$

A análise da expressão para a energia, dada por (7.31), nos mostra que esta só depende do valor da constante cosmológica.

Agora vamos analisar o caso de poeira, ou seja, $\rho=\rho_0/R^3$ e $\Lambda=0$. Neste caso a equação de onda é dada por [38]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2A}\frac{\partial^2}{\partial S^2}-\frac{GB}{S}-E\right]\Psi\left(S\right)=0 \tag{7.32}$$

ou ainda,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial S^2}+\left(\frac{2EA}{\hbar^2}+\frac{2ABG}{\hbar^2}\frac{1}{S}\right)\right]\Psi\left(S\right)=0. \tag{7.33}$$

Introduzindo a variável z,

$$z=\left(\sqrt{\frac{-8EA}{\hbar^2}}\right)S \tag{7.34}$$

e substituindo em (7.33) temos,

$$\left[\frac{-8EA}{\hbar^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{2EA}{\hbar^2}+\frac{2ABG}{\hbar^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{-8EA}{\hbar^2}}z}\right)\right]\Psi\left(z\right)=0 \tag{7.35}$$

que fornece,

$$\left[z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(\gamma-\frac{z}{4}\right)\right]\Psi\left(z\right)=0 \tag{7.36}$$

onde $\gamma=\frac{2ABG}{\hbar^2}\sqrt{-\frac{\hbar^2}{8EA}}$.

As soluções que da eq. (7.36), que se anulam na origem e no infinito são dadas por [38]

$$\Psi_n\left(z\right)=e^{-z/2}zL_n^1\left(z\right), \tag{7.37}$$

onde $L_n^1\left(z\right)$ é associado ao polinômio de Laguerre de ordem n. Neste caso, a energia é dada por [38]

$$E_n\left(z\right)=-\frac{AB^2G^2}{2\hbar^2(n+1)^2}. \tag{7.38}$$

Para os dois casos analisados encontramos soluções exatas da função de onda da cosmologia Newtoniana. No contexto da cosmologia relativística, os casos correspondentes aos dois tratados nesta seção, as soluções exatas não são conhecidas.

É importante chamar a atenção para a observação feita por Romero e Zamora [38] no sentido de que na presença da constante cosmológica e para pressão nula, o sistema clássico tratado no contexto da cosmologia Newtoniana e no da cosmologia Einsteiniana fornecem os mesmos resultados. Na realidade, essa equivalência é esperada de alguma forma, haja vista que a dinâmica clássica na abordagem Newtoniana e na Einsteiniana, são completamente equivalentes, sendo descritas, do ponto de vista algébrico, pelas mesmas equações. Por outro lado, no regime quântico, eles são completamente diferentes, o que significa que os resultados obtidos não são os mesmos quando estamos no contexto da abordagem quântica dessas teorias.

7.4 Cosmologia Newtoniana quântica e a função de onda

Vamos considerar a equação que permite a obtenção da função de onda do universo, na cosmologia Newtoniana, no contexto da mecânica quântica não-relativística. Para isto, usaremos a equação de Schrödinger para muitas partículas, dada por

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\sum_i\left(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2\Psi\right)+V\Psi, \tag{7.39}$$

onde $\Psi=\Psi\left(\vec{r}_i\right)$, $\nabla_i^2=\frac{\partial}{\partial r_i^2}$ e

$$V=-\sum_i\sum_j G\frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}. \tag{7.40}$$

Suporemos que todas as massas são iguais, ou seja, $m_i=m$, e que a função de onda, Ψ, pode ser escrita na forma

$$\Psi\left(\vec{r}_i\right)\propto\prod_i\Psi'\left(\vec{r}_i\right), \tag{7.41}$$

onde $\Psi'\left(\vec{r}_i\right)$ satisfaz a seguinte equação

$$i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi'+mU\Psi' \tag{7.42}$$

com $\Psi'=\Psi'\left(\vec{r},t\right)$, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ e

$$\nabla^2U=4\pi Gm\left|\Psi'\right|^2, \tag{7.43}$$

sendo U o potencial por unidade de massa.

As equações (7.42) e (7.43) correspondem à equação de Schrödinger dependente do tempo e à equação de Poisson, que é satisfeita pelo potencial que aparece na equação de Schrödinger. Note que essas duas equações estão acopladas.

Vamos admitir que [39]

$$U=F\left(t\right)r^2 \tag{7.44}$$

e

$$\Psi'=A\left(t\right)e^{iS/\hbar}. \tag{7.45}$$

Substituindo as eqs. (7.44) e (7.45) em (7.43), encontramos o seguinte resultado

$$A^2=\frac{3F}{2\pi Gm}. \tag{7.46}$$

Usando a solução dada pela eq. (7.45) e substituindo na equação de Schrödinger, concluímos que

$$S = B\left(t\right) r^2, \tag{7.47}$$

com

$$-\frac{3B}{m} = \frac{\dot{A}}{A}. \tag{7.48}$$

Suponhamos que $A = R^{-3/2}$[39]. Então, $S\left(t\right)$ será dado por

$$S = \frac{1}{2} m \frac{\dot{R}}{R} r^2, \tag{7.49}$$

e a função de onda estará relacionada com o fator de escala por meio da seguinte expressão

$$\Psi' \propto \frac{1}{R^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{2\hbar} m \frac{\dot{R}}{R} r^2\right). \tag{7.50}$$

Vamos considerar a solução para o fator de escala encontrado por Arcuri e Waga [9] dado por

$$R\left(t\right) \propto t^{\frac{2}{3}(1-\beta)}. \tag{7.51}$$

Neste caso, a função de onda guardará a seguinte proporcionalidade

$$\Psi' \propto \exp\left(\frac{i}{3\hbar}(1-\beta) m r^2 t^{-\left(1-\frac{4}{3}\beta\right)}\right). \tag{7.52}$$

Note que se fizermos $t = -i\tau$ e considerarmos $\beta < 1/3$ que é a condição para que tenhamos modos crescentes, então, a função de onda dada coincide, de fato, com a solução para a equação de difusão. Neste caso, a função de onda é normalizável com respeito às integrações nas coordenadas espaciais.

Capítulo 8

Conclusões

Tomamos como base a literatura existente sobre a cosmologia Newtoniana, para reobter a relação entre as características de universos investigados no contexto da cosmologia relativística e aqueles construídos usando, somente, a dinâmica Newtoniana, a teoria da gravitação de Newton e as transformações de Galileu. Mostramos que as equações obtidas são idênticas na forma algébrica, nos dois casos, e portanto, localmente, os resultados obtidos nas duas teorias são insdistinguíveis. Assim, os resultados obtidos no contexto da relatividade geral, na segunda década do século XX, podem ser deduzidos da hidrodinâmica Newtoniana do século XVIII. Naturalmente, existe uma diferença do ponto de vista conceitual, pois enquanto na cosmologia Einsteiniana, nos modelos de Friedmann-Robertson-Walker, $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$ correspondem a diferentes geometrias do espaço-tempo; no contexto da cosmologia Newtoniana, essas situações correspondem aos casos em que a matéria se move com velocidade menor, igual ou maior do que a velocidade de escape do seu próprio campo gravitacional, respectivamente.

A formulação da cosmologia Newtoniana, em linguagem geométrica é uma forma elegante de descrevê-la, no entanto, essa formulação não significa que as duas cosmologias, a Newtoniana e a Einsteiniana, sejam igualmente rigorosas [16]. Na realidade, essa análise do ponto de vista do rigor não faz sentido, a não ser se compararmos de maneira muito subsidiária, os métodos utilizados. O fato de que nessa formualação geométrica a equação geodésica ser a mesma da obtida na relatividade geral também não fundamenta essa pretensa igualdade no rigor na obtenção da cosmologia Newtoniana, se comparada a Einsteiniana.

O fato de que um universo homogêneo e isotrópico, com seção espacial não-compacta, pode expandir-se e recolapsar eternamente, não significa, conforme afirma Tipler [16], que a cosmologia Newtoniana, formulada geometricamente, seja mais geral do que a cosmologia de Friedmann.

As consequências de um termo de correção ao potencial Newtoniano, do tipo Yukawa, não existem na cosmologia Newtoniana, de forma que as equações que descrevem a dinâmica do universo, nesse contexto, são exatamente as mesmas que as obtidas sem a correção. Este resultado teórico, na realidade, está em acordo com os dados observacionais que confirmam a validade da interação gravitacional Newtoniana, até distâncias micrométricas.

A evolução de perturbações em um universo onde existe uma fonte que cria matéria continuamente, depende do coeficiente de proporcionalidade entre a constante cosmológica e o quadrado da constante de Hubble. Vimos que somente existirão modos crescentes, e portanto, a formação de estruturas pelo processo de instabilidade gravitacional, somente para valores dessa constante menores do que a unidade. No caso em que a pressão é diferente de zero, esses modos dependem não somente dessa constante de proporcionalidade, mas também do parâmetro que relaciona a pressão e a densidade, na equação de estado.

Na cosmologia Newtoniana quântica reexaminamos as diferenças entre as duas abordagens, Newtoniana e Einsteiniana, em (2+1) e (3+1) dimensões, exibimos a função de onda do universo, no qual ocorre a criação contínua de matéria. Neste cenário, a função de onda é normalizável. Ela foi obtida como solução da equação de Schrödinger para muitas partículas.

No caso em que a pressão é desprezível, os resultados da cosmologia Newtoniana coincidem, exatamente, com os obtidos no contexto relativístico.

É importante salientar que os resultados obtidos no que é conhecida como cosmologia Newtoniana, são baseados, puramente, na teoria de Newton, mas eles são fundamentados, também, em hipóteses ad hoc tomadas da relatividade geral. Neste contexto, um sistema com pressão zero e constante cosmológica descreve o estágio atual do nosso universo e nas estruturas em grande escala, de modo extremamente satisfatório.

No caso em que a pressão está presente, definindo-se de modo apropriado a equação de continuidade, as equações para as perturbações relativísticas e Newtonianas, são idênticas para grandes comprimentos de onda. Portanto, temos uma forma mais simples, do ponto de vista matemático, para obter esses resultados, com o uso da cosmologia Newtoniana.

Investigamos o formalismo Newtoniano, que é baseado nas equações hidrodinâmicas, para formular a cosmologia Newtoniana, que descreve o comportamento de fluidos cósmicos que permeiam o universo.

Neste contexto foram examinados diferentes aspectos, tais como a formulação geométrica, a introdução de uma correção de Yukawa no potencial Newtoniano e suas consequências, o comportamento das perturbações num universo Newtoniano com variação de matéria, e aspectos da formulação quântica dessa teoria.

Referências Bibliográficas

[1] Milne, E. A., *A Newtonian Expanding Universe*. Quart. J. Math. **5**, 64 (1934).

[2] Milne, E.A. and W. H McCrea., *A Newtonian Universes and the Curvature of Space*. Quart. J.Math. **5**, 73 (1934).

[3] Harrison, E. R., *Cosmology without general relativity*. Ann. of Phys. **35**,437 (1965).

[4] Harrison, E. R., *Normal Models of Vibrations of the Universe*. Rev. Mod. Phys. **39**, 862 (1967).

[5] Lima, J. A. S., V. Zanchin and R. Brandenberger., *On the Newtonian cosmology equations with pressure*. Mon. Not. Roy. Astron.. Soc. 291, **L1** (1994).

[6] J. C. D'Olivo and M. P. Ryan., *A Newtonian cosmology based on a Yukawa-type potential*. Class. Quantum Grav. **4**, L13 (1987).

[7] Campos, M. de. and N. A. Tominura., *The Age Problem and Growing of Structures for Open System Cosmology*. Braz. J. Phys. **31**, 468 (2001).

[8] Reis, R. R.R., *Domain of validity of the evolution of perturbations in Newtonian cosmology with pressure*. Phys. Rev. D **67**, 087301 (2003).

[9] Arcuri, R. C., and I. Waga., *Growth of density inhomogeneities in Newtonian cosmological models with variable* Λ. Phys. Rev. D. **50**, 2928 (1994).

[10] Romero, J. M. and A. Zamora., *"Note in Quantum Newtonian Cosmology"*. gr-qc/ 0504072 (2005).

[11] Räsänen, S., *Aplicability of the linearly pertubed FRW metric and Newtonian Cosmology*. Phys. Rev. D **81**, 103512 (2010).

[12] Friedmann, A.A., *Über die Krümmung des Raumes.* Zeit. für Physik, **10**, 377 (1922).

[13] Bonnor, W. B., *Jean's formula for gravitational instability.* Mon. Not. R. Astron. Soc. **117**, 104 (1957).

[14] Layzer, D., *On the Significance of Newtonian Cosmology.* Astron. J., **59**, 268 (1954).

[15] Callan, C., R. H. Dicke, and P. J. E. Peebles., *Cosmology and Newtonian Mechanics.* Am. J. Phys. **33**, 155 (1965).

[16] Tipler, F. J., *Rigorous Newtonian Cosmology.* Am. J. Phys. **64**, 1311 (1996).

[17] Ribeiro, M. B., *Cosmologia Newtoniana.* Boletim Soc. Astron. Bras. **14**, n^{o}2, 34 (1994).

[18] McCrea, W. H., *Newtonian Cosmology.* Nature, **175**, 466 (1955).

[19] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, USA. John Wiley & Sons, 1972.

[20] Rosser, W. G. V. *An Introduction to Statistical Physics*, New York. Halsted Press,1985.

[21] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie).* Ann. École Norm. Supérieure, **40**, 325 (1923).

[22] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativitégénéralisée (première partie) (Suite).* Ann. École Norm. Supérieure, **41**, 1 (1924).

[23] Tipler, F. J., *Newtonian cosmology revisited.* Mon. Not. R. Astron. Soc. **282**, 206 (1996).

[24] Misner, C. W, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler., *Gravitation*, San Francisco. Freeman, 1973.

[25] Fischbach, E., D. Sudarsky., A. Szafer., C. Talmadge and S. H. Aronson., *Reanalysis of the Eötvös Experiment.* Phys. Rev. Lett. **56**, 3 (1986).

[26] V. B. Bezerra, G. L. Khinchitokaya, V. M. Mostepanenko and C. Romero, *Advance and prospects in constraining the Yukawa-type corrections to Newtonian gravity from the Casimir effect.* Phys. Rev. D **81**, 055003 (2010).

[27] Dodelson, S. *Modern Cosmology*, USA. Academic Press. An Imprint of Elsevier, 2003.

[28] Weichen and Yong-Shi Wu, *Implications of a cosmologica constant varguig as R^{-2}*. Phys. Rev. D **41**, 695 (1990).

[29] J. C. Carvalho and J. A. S. Lima, *Cosmological consequences of a time-dependent Λ term*. Phys. Rev. D **46**, 2404 (1992).

[30] Carrol, S. M., W. H. Press, and E. L. Turner., *The Cosmological Constant*. Annu. Rev. Astron. Astrophys. **30**, 499 (1992).

[31] Weinberg, S., *The cosmological constant problem*. Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

[32] I. Waga, *Decaying Vacuum Flat Cosmological Models: Expressions For Some Observable Quantities And Their Properties*. Astrophys. J. **414**, 436 (1993).

[33] Peebles, P. J. E., *The Large-Scale Structure of the Universe,* Princeton. Princeton University Press, 1980.

[34] Peebles, P. J. E., *Principles of Physical Cosmology*, Princeton. Princeton University Press, 1993.

[35] K. Freese, F. C. Adams, J. A. Frieman and E. Mottola, *Cosmology with decaying vacuum energy*. Nucl. Phys. B **287**, 797 (1987).

[36] McCrea, W. H., *Relativity Theory and the Creation of Matter*. Proc. R. Soc. London **A206**, 562 (1951).

[37] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background. Astrophys. J. **147**, 73 (1967).

[38] Juan M. Romero and Rodolfo Zamora, *Note on Quantum Newtonian Cosmology*. arXiv: gr-qc/ 0504072.

[39] Daniel Z. Freedman, Gary W. Gibbons and Martin Schnabl, *Matrix Cosmology*. arXiv: hep-th/ 0411119v2.

[40] Bondi. H., and T. Gold., *The steady-state theory of the expanding universe*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **108**, 252 (1948).

[41] Harwit, M., *Can Gravitacional Forces Alone Account for Galaxy Formation in a Steady-State Universe?* Mon. Not. R. Astron. Soc. **122**, 47 (1961).

[42] Jordan, T. F., *Cosmology calculations almost without general relativity.* Am. J. Phys. **73**, 653 (2005).

[43] Souza. Ronaldo E., *Introdução à Cosmologia,São Paulo.Edusp,2004.*

[44] Wald, R. M. *General Relativity*, Chicago. U. of Chicago Press, 1984.

[45] McCrea, W. H., *On the Significance of Newtonian Cosmology.* Astron. J., **60**, 271 (1955).

[46] Peebles, P. J. E., *Tests of cosmological models constrained by inflation.* Astrophys. J., **284**, 439 (1984).

[47] Bondi, H. *Cosmology*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1960.