

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

TÓPICOS EM COSMOLOGIA COM
CAMPOS ESCALARES

JOSÉ JAMILTON RODRIGUES DOS SANTOS

JOÃO PESSOA
2011

TÓPICOS EM COSMOLOGIA COM CAMPOS ESCALARES

S237t Santos, José Jamilton Rodrigues dos.
Tópicos em cosmologia com campos escalares / José
Jamilton Rodrigues dos Santos.- João Pessoa, 2011.
129f.
Orientador: Dionsio Bazeia Filho
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Cosmologia. 3. Campos escalares. 4. Inflação
cósmica. 5. Energia escura.

UFPB/BC

CDU: 54(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TÓPICOS EM COSMOLOGIA COM CAMPOS ESCALARES

Tese realizada sob orientação do
Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho,
apresentada ao Departamento de
Física, em complementação aos re-
quisitos para obtenção do título de
Doutor em Física.

JOSÉ JAMILTON RODRIGUES DOS SANTOS



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 20 de maio de 2011, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **aprova** o Sr. **José Jamilton Rodrigues dos Santos** na defesa de sua tese intitulada "*Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares*".

João Pessoa, 20 de maio de 2011

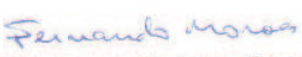
Orientador:


Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
(UFPB)

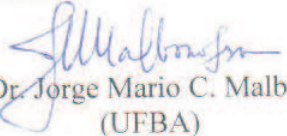
Co-Orientador:

Prof. Dr. Laércio Losano
(UFPB)

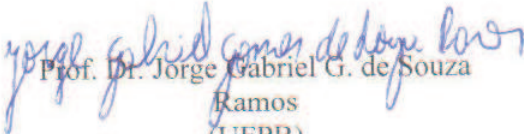
1º Examinador:


Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
(UFPB)


2º Examinador:


Prof. Dr. Jorge Mario C. Malbouisson
(UFBA)

3º Examinador:


Prof. Dr. Jorge Gabriel G. de Souza
Ramos
(UFPB)

4º Examinador:


Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
(UFCG)

*À todos que compõe minha família.
Especialmente à minha esposa Fabrycianne.*

AGRADECIMENTOS

Não posso deixar de dedicar um primeiro agradecimento ao Prof. Dionisio Bazeia Filho, que representa a imagem mais presente de toda a minha formação acadêmica. Correndo o risco do *cliché*, foram inúmeras às vezes em que saí da sua sala, no Departamento de Física da UFPB, carregando uma boa dose extra de conhecimento e incentivo, que certamente minimizaram as minhas dificuldades na realização de nossa pesquisa. Estendo esse agradecimento aos Profs. Laércio Losano (UFPB), Roberto Menezes (UFPB) e Pedro Pina Avelino (UP-Portugal), pela forma produtiva com que conduzimos as nossas discussões, sempre pautados em uma relação de colaboração mútua que me deixou um saldo bastante positivo. Agradeço ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, no conjunto de seus Professores e Funcionários, por oferecer um ensino de qualidade e a estrutura necessária para o desenvolvimento de minhas atividades. Agradeço também a minha esposa Fabrycianne Gonçalves Costa, por propiciar e compartilhar alguns dos melhores momentos da minha vida, me ajudando a manter o equilíbrio suficiente para seguir a jornada. À minha mãe Edite de Arruda Santos, pelo incentivo sempre presente e exemplo de dedicação, bem como à meu pai Sebastião Rodrigues dos Santos, por seus sempre valorosos conselhos. Ainda na classe dos que compõe a minha família, à Joseclécio Dutra Dantas e Manoel Barbosa Dantas, pelo exemplo de amizade que cultivamos, ao primeiro ainda por todas as vezes em que realizamos discussões sempre muito enriquecedoras, menção essa naturalmente estendida a Francisco Geraldo da Costa. Agradeço ainda a Breno Ferraz, Denis Barbosa, Erms Rodrigues, Ferdinande da Conceição e Washington Lima por contribuírem para uma muito boa convivência durante a minha permanência no DF-UFPB. Ao CNPq pelo fomento necessário e sem o qual seria inviável a realização desse trabalho. Por fim, minhas mais sinceras desculpas aqueles que por uma limitação espaço-temporal não foram citados explicitamente nessas poucas linhas.

Resumo

Modelos cosmológicos envolvendo campos escalares permitem a descrição de uma fase de expansão cósmica acelerada e, portanto, se apresentam como uma alternativa promissora no estudo da inflação cósmica e da energia escura. Estamos aqui interessados em analisar esses modelos cosmológicos; em especial, vamos explorar soluções cosmológicas baseadas no formalismo de primeira ordem. A inclusão desse método favorece a busca por soluções analíticas na cosmologia com campos escalares e isso é particularmente interessante no caso em que consideramos o componente de matéria não relativística (poeira) na presença da energia escura, afim de construir um modelo cosmológico capaz de explicar, em bom acordo com os dados observacionais, a atual fase de aceleração cósmica. Considerando um regime de violação de Lorentz, a utilização desse método nos permitiu verificar que novas considerações devem ser implementadas, para que o regime inflacionário possa resolver o problema das condições iniciais. Outra questão de interesse, que pode ser analisada com auxílio do formalismo de primeira ordem, leva em conta a possibilidade da equação de estado da energia escura ser um constante qualquer diferente de -1 e, nesse caso, obtemos que uma grande quantidade de ajuste fino é necessária, o que deve ser interpretado como uma forte evidência em favor de um modelo dinâmico de energia escura. Também introduzimos o chamado método de deformação a modelos inflacionários sob o regime de rolagem lenta e exploramos essa ferramenta em aplicações de corrente interesse na literatura.

Palavras-Chave: Cosmologia, Inflação, Energia Escura, Campos Escalares

Abstract

Cosmological models involving scalar fields allow the description of a phase of accelerated cosmic expansion and thus appear as a promising alternative for the study of the cosmic inflation and dark energy. We are interested here in analyzing these cosmological models. In particular, we will explore cosmological solutions based on the first order formalism. The inclusion of this method favors the search for analytic solutions with scalar fields in cosmology, and this is particularly important when we consider the component of non-relativistic matter (dust) in the presence of dark energy, in order to construct a cosmological model capable of explaining, in good agreement with observational data, the current phase of cosmic acceleration. Considering a regime of Lorentz violation, the use of this method allowed us to verify that new considerations must be implemented so that the inflationary regime can now solve the problem of initial conditions. Another question of interest, which can be addressed with the aid of the first order formalism, takes into account the possibility of the dark energy equation of state parameter to be a constant other than -1 and in this case we get that a lot of fine-tuning is needed, which should be interpreted as strong evidence in favor of a dynamic model of dark energy. We also introduce the so-called deformation method on the slow-roll inflationary models, and we explore this framework in applications of current interest to this branch of research.

Keywords: Cosmology, Inflation, Dark Energy, Scalar Fields

Conteúdo

1	Relatividade Geral e o MCP	5
1.1	Equações de Campo	5
1.2	Modelo Cosmológico Padrão	9
1.2.1	O Princípio Cosmológico e a Métrica FRW	10
1.2.2	Solução das Equações de Einstein na Métrica FRW	12
1.3	Modificações no MCP - Inflação Cósmica	20
1.3.1	A Teoria da Inflação Cósmica	25
1.3.2	Ínflaton	29
1.4	Modificações no MCP - Energia Escura	33
1.4.1	Λ -CDM	35
1.4.2	ϕ -CDM	36
2	Formalismo de Primeira Ordem	39
2.1	Formalismo de Primeira Ordem e Energia Escura	39

2.1.1	Solução de Espaço Plano	43
2.1.2	Solução de Espaço Curvo	47
2.2	Dinâmica Taquiônica	52
2.2.1	Solução de Espaço Plano para Campos Taquiônicos	54
2.2.2	Solução de Espaço Curvo para Campos Taquiônicos	57
2.3	Formalismo de Primeira Ordem para Energia Escura e Matéria	60
3	Implicações da Violação de Lorentz em Teorias de Inflação	67
3.1	A Teoria do Einstein-æther	69
3.2	Equações de Movimento	70
3.3	Formalismo de Primeira Ordem	73
3.4	Soluções Analíticas	75
3.4.1	Expansão Exponencial ($\bar{q} = 1$)	75
3.4.2	Solução de Potencial Nulo	76
3.4.3	Solução Polinomial	79
4	Modelos de Energia Escura com uma Equação de Estado Constante	83
4.1	Dinâmica Generalizada de Quintessência e Poeira em um Universo FRW . . .	84
4.2	Campo Escalar Padrão e w_e Constante	87
4.2.1	w_e Constante	88

4.3	Campo Escalar Taquiônico e w_e Constante	90
4.3.1	w_e Constante	91
4.3.2	Energia Escura Unificada	95
5	Soluções Inflacionárias e o Método de Deformação	97
5.1	Método de Deformação	97
5.2	Modelo de Origem	98
5.3	Deformando Modelos Inflacionários	101
5.4	Aplicando o Método de Deformação em Modelos Inflacionários sob o Regime de Rolagem Lenta	103
	Bibliografia	110

Introdução

O modelo de Universo em melhor acordo com os mais recentes dados observacionais considera a presença de duas fases de expansão cósmica acelerada, que são associadas à teoria da inflação cósmica e à recente descoberta da energia escura [1, 2]. A teoria da inflação cósmica propõe uma fase de expansão acelerada para os estágios iniciais do Universo primitivo afim de resolver o assim chamado problema das condições iniciais. Essa teoria precisa também ser capaz de gerar inomogeneidades no Universo, o que permite explicar o mecanismo de formação de estruturas; mecanismo esse que deve ocorrer durante uma fase de expansão cósmica desacelerada, em que o Universo passa a ser dominado pelo conteúdo de matéria não relativística (poeira). Em 1998, duas equipes independentes, estudando um tipo muito peculiar de objetos astrofísicos, as Supernovas tipo IA, trouxeram surpresa à comunidade científica ao anunciar que o Universo está atravessando uma fase de expansão acelerada [3]; o objeto inicial das observações seria medir a esperada taxa de desaceleração do Universo, uma vez que a atração gravitacional é puramente atrativa, o que provocaria a recessão no movimento de expansão das galáxias. Uma consequência imediata dessa observação, dentro do contexto da Relatividade Geral, é a descoberta de uma nova forma de energia que não interage com a luz, por isso denominada “energia escura”, e que representa aproximadamente $3/4$ do conteúdo do Universo atual.

Podemos construir um modelo de expansão cósmica acelerada com a inclusão de uma simples constante cosmológica, Λ , porém essa não é uma boa alternativa no âmbito da

teoria da inflação cósmica, entre outros motivos porque não é possível reverter o processo de aceleração cósmica e conduzir o modelo ao fim do regime inflacionário; uma constante cosmológica também não consegue explicar as inomogeneidades necessárias para formação de estruturas. Por outro lado, o modelo conhecido como Λ -CDM [4] propõe que a energia escura do Universo seja resultado da presença dessa tal constante cosmológica; nesse modelo, CDM são as iniciais da expressão *Cold Dark Matter*, uma forma de matéria escura não relativística, ou melhor, como na tradução da expressão, uma matéria escura fria. Esse modelo tem logrado êxito em descrever várias propriedades observacionais da atual fase de aceleração do Universo. No entanto, problemas envolvendo Λ precisam também ser resolvidos nesse contexto; um exemplo é o chamado problema da coincidência cósmica [5] (muito mais filosófico do que físico): se existe essa tal constante, ela deve ser a mesma desde a origem do Universo e, portanto ter atravessado todas as fases da evolução cósmica, a ponto de ser dominante apenas na fase atual. Outro problema que precisa ser resolvido é a enorme diferença entre as previsões teóricas do Modelo Padrão da Física de Partículas e o valor observado para a constante cosmológica; na melhor das hipóteses, quando consideramos a existência de supercampos, essa diferença é algo em torno de 60 ordens de grandeza [6].

A realização de uma fase de expansão cósmica acelerada pode também ser estudada a partir da inclusão de um campo escalar, ϕ , espalhado homogêneo e isotropicamente no Universo. Considerando o regime inflacionário, a presença desse campo escalar, conhecido como *inflaton*, permite a construção de um modelo capaz de responder os principais conflitos apresentados na teoria padrão e, embora não exista consenso na literatura sobre a real necessidade de uma fase inflacionária, o bom acordo com os dados observacionais torna a tarefa de obter um modelo alternativo bastante complexa. A inclusão de um campo escalar nos permite também elaborar um modelo ϕ -CDM, onde o campo escalar ϕ responde pelo conteúdo de energia escura do Universo [7]. Para esse modelo, a aceleração cósmica na fase atual é consequência da dinâmica associada ao campo escalar, em que, diferentemente da constante cosmológica, podemos ter

uma equação de estado, ω_e , variável. De fato, podemos mostrar que uma equação de estado constante apenas é consistente para $\omega_e = -1$; mesmo que os dados observacionais pareçam ser consistentes com uma equação de estado constante diferente de -1 , uma grande quantidade de fine-tuning (ajuste fino) deve ser adicionada ao modelo, o que deve ser interpretado como uma forte evidência em favor de um modelo dinâmico de energia escura [8].

Durante esse trabalho de tese, estamos interessados em explorar o método de redução de ordem de equações diferenciais em Cosmologia, preconizado por Bazeia et al. [9], o assim chamado *formalismo de primeira ordem*. Inicialmente, no Cap. 1, faremos uma breve revisão da Relatividade Geral, apresentando os principais resultados para elaboração do Modelo Cosmológico Padrão (MCP). Ainda neste capítulo, elencamos as dificuldades desse modelo em resolver os problemas que culminaram na teoria da inflação cósmica e também discutimos como incluir no MCP um componente de energia escura, responsável pela atual aceleração do Universo. No Cap. 2 apresentamos o formalismo de primeira ordem: A utilização desse método facilita a busca por soluções analíticas em Cosmologia; nesse capítulo aplicamos essa ferramenta teórica a um modelo de energia escura incluindo um termo de poeira (matéria escura + matéria bariônica). Voltamos o nosso interesse ao estudo da inflação cósmica no Cap. 3, em que consideramos um regime de violação da simetria local de Lorentz, na presença do Einstein-æther; a aplicação do formalismo de primeira ordem, nesse caso, nos permite revisitar o problema das condições iniciais e novas considerações precisam ser implementadas afim de garantir o sucesso do regime inflacionário. A possibilidade de construir um modelo de constante cosmológica que admita uma equação de estado diferente de -1 é explorada no Cap. 4, onde mostramos que uma grande quantidade de ajuste fino deve ser adicionada ao modelo, o que torna a solução bastante não natural. Também introduzimos, no Cap. 5, o método de deformação em modelos inflacionários sob um regime de rolagem lenta; em especial, mostramos que os potenciais dos modelos considerados apresentam uma relação de deformação explícita. As considerações finais e delimitação de perspectivas concluem o nosso

trabalho.

No decorrer dos nossos cálculos consideramos um sistema de unidades em que $4\pi G = c = H_0 = 1$, onde G é a constante gravitacional newtoniana, c é a velocidade da luz no vácuo e H é o parâmetro de Hubble. Salvo menção contrária, o índice ‘0’ é usado para indicar que a medida da grandeza deve ser realizada no tempo físico presente.

Capítulo 1

Relatividade Geral e o MCP

Como ponto de partida para nosso estudo, faremos aqui uma dedução menorizada das equações de campo da Relatividade Geral, apresentada originalmente por D. Hilbert em 1915 [10], com o simples objetivo de introduzir o ferramental matemático explorado em parte do texto e familiarizar o leitor com os conceitos utilizados em capítulos subseqüentes. Uma vez obtidas as equações de campo, vamos deduzir a solução de Friedmann, que descreve matematicamente o princípio cosmológico e, por sua vez, fundamenta o MCP, levando à elaboração da teoria do Big-Bang. Ainda neste capítulo, elencamos os problemas que culminaram na teoria inflacionária e também mostramos como incluir o conteúdo de energia escura no contexto do MCP, de modo a compatibilizar a teoria com o fato observacional da aceleração cósmica atual.

1.1 Equações de Campo

Dentre as alternativas de dedução das equações de campo da Relatividade Geral, descreveremos aquela baseada no princípio fundamental de mínima ação. Consideramos a ação de Einstein-Hilbert, definida como [10, 11]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right), \quad (1.1)$$

Na ação, R é o escalar de curvatura e $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ é a densidade de Lagrangeana associada aos campos de matéria do Universo. O termo multiplicativo $\sqrt{-g}$, onde g é o determinante do tensor métrico ($g = |g_{\mu\nu}|$), é apropriadamente escolhido [11, 12]; de fato, conhecemos do cálculo sobre \mathbf{R}^n que:

$$d^n x' = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| d^n x, \quad (1.2)$$

onde nessa relação, $\left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|$ é o Jacobiano da transformação. O elemento de volume transforma-se como uma densidade tensorial, sendo necessária a presença do termo $\sqrt{-g}$, para que a ação seja invariante por uma transformação geral de coordenadas.

Variando a ação (1.1), vem:

$$\delta S = \int d^4 x \left[(\delta \sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right) \right] \quad (1.3)$$

e, como $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g$, é preciso diferenciar determinantes de matrizes. Para um tensor A^ν_μ , temos que:

$$4!A = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} A^\mu_\alpha A^\nu_\beta A^\sigma_\gamma A^\rho_\delta, \quad (1.4)$$

onde A é o determinante da matriz definida por A^ν_μ e $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o símbolo de Levi-Civita. Desse modo,

$$3!A^\alpha_\mu A = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} A^\nu_\beta A^\sigma_\gamma A^\rho_\delta. \quad (1.5)$$

Por outro lado, a relação (1.4) também permite escrever

$$4!dA = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} 4 (dA^\mu_\alpha) A^\nu_\beta A^\sigma_\gamma A^\rho_\delta \quad (1.6)$$

e substituindo (1.5) em (1.6) chegamos a

$$dA = A A^\alpha_\mu dA^\mu_\alpha. \quad (1.7)$$

Podemos agora usar (1.7) para calcular o diferencial do tensor métrico, de maneira que

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}.$$

$$\text{Logo, } \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

De posse desses resultados, (1.3) resume-se a

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 2g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \delta \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right]$$

e desde que $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ pode ser escrito como a derivada de um vetor, o teorema de Gauss faz aparecer um termo de superfície na integral acima, que pode ser suprimido¹, uma vez que as condições de contorno impõem que os campos sejam nulos no infinito; de onde chegamos a

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Considerando a ação decomposta em seus termos de curvatura e matéria $S = S_R + S_m$, sendo a ação de curvatura $S_R = \int d^4x \sqrt{-g} (-R/4)$ e a ação dos campos de matéria $S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, podemos definir o tensor energia-momento, que deve satisfazer a relação

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu};$$

um resultado direto dessa formulação é obtido quando fazemos $\delta S_m = 0$. Nesse caso, é possível mostrar que a derivada covariante do tensor energia-momento é nula, ou seja, $T^\nu_{\mu;\nu} = 0$; o que representa uma condição de conservação (vide [14]), importante no contexto da Relatividade Geral.

Reescrevendo a variação da ação (1.1), levando em consideração a definição de $T_{\mu\nu}$, temos agora:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

e então comparando os resultados (1.8) e (1.9) podemos identificar

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathcal{M}}. \quad (1.10)$$

¹isso pode não ser verdadeiro se considerarmos a existência de fronteiras - vide [13].

Como consequência do princípio variacional $\delta S = 0$ e a relação (1.9) nos permite obter as equações de campo da Relatividade Geral:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}.$$

Baseada no princípio de equivalência, como postulado nos trabalhos originais de Einstein em 1916, a proposta da teoria da Relatividade Geral estabelece uma relação entre o conteúdo de geometria e de matéria do Universo, segundo as equações de campo da gravitação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

sendo o lado esquerdo dessa expressão o tensor geométrico de Einstein $G_{\mu\nu}$, que traz informações sobre os efeitos de curvatura do espaço-tempo, enquanto o lado direito é relacionado ao conteúdo de matéria, onde $T_{\mu\nu}$ é o já definido tensor energia-momento.

De fato, o princípio da equivalência exige um tensor de segunda ordem, cuja derivada covariante leva à conservação do tensor energia-momento $T_{\mu\nu;\alpha} = 0$ - vide [15], e foi esse o guia usado por Einstein para escrever o seu tensor geométrico nas equações de movimento; uma vez que essa combinação respeita a identidade de Bianchi e como consequência $G_{\mu\nu;\alpha} = 0$. Usando o princípio da equivalência, é possível também determinar a constante de proporcionalidade, $\kappa = 8\pi G/c^4$ que, de acordo com as nossas convenções, reduz-se a $\kappa = 2$.

Uma vez apresentadas as equações de campo da gravitação podemos nos voltar para a construção de uma solução cosmológica (global) das equações de Einstein, que respeite as condições de homogeneidade e isotopia em um Universo em expansão, e um passo importante nesse caminho é definir o tensor métrico. Essa sequência vai nos permitir construir o MCP e delimitar as bases para o entendimento das correções impostas a esse modelo.

1.2 Modelo Cosmológico Padrão

Logo depois de publicados os trabalhos de Einstein, duas soluções foram apresentadas, a solução de Minkowski, como uma generalização do espaço-tempo euclidiano plano, e a solução de Karl Schwarzschild, para o espaço-tempo esfericamente simétrico e vazio, que reduz as equações de campo a $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$, ou apenas $R_{\mu\nu} = 0$. Pouco mais de um ano depois, em 1917, Einstein apresenta o primeiro modelo cosmológico relativista. A comunidade científica na época acreditava ser o Universo estático, porém as equações de campo da gravitação são dinâmicas; para obter um Universo estacionário, Einstein é levado a modificar as equações originais da Relatividade Geral, introduzindo um termo repulsivo, afim de contrabalancear o efeito atrativo da gravitação, denominado constante cosmológica, tal que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = kT_{\mu\nu},$$

onde Λ representa a constante cosmológica; uma solução justificada por Einstein para reproduzir a baixa velocidade das estrelas, o que estaria de acordo com o princípio de Mach - para um estudo detalhado vide, por exemplo, [11]. Poucos meses depois, o astrônomo holandês Willem de Sitter conseguiu obter outra solução das equações de campo, para um Universo vazio², com constante cosmológica. Porém, o Universo apresentado por de Sitter está em expansão e agora a velocidade de afastamento de partículas testes, espalhadas aleatoriamente no Universo, aumenta com a distância, resultado que explicava o desvio espectral observado em nebulosas espirais pelo astrônomo americano Vesto M. Slipher, alguns anos antes. O próprio de Sitter não acreditava que a sua solução pudesse descrever um Universo em expansão. Segundo ele, uma boa escolha do sistema de coordenadas poderia eliminar esses “efeitos espúrios” da teoria.

²já se sabia que a densidade de energia no Universo é baixa e a solução de de Sitter era considerada como uma aproximação de densidade nula [11].

Apenas em 1922, o cosmólogo e matemático russo Alexander Friedmann aponta a possibilidade teórica de um Universo em expansão. Em um primeiro trabalho, Friedmann estuda espaços com curvatura constante e positiva; os espaços com curvatura constante negativa foram apresentados em um segundo trabalho, no mesmo periódico, em 1924 [16]. A solução explorada por Friedmann, considera que o Universo é homogêneo e isotrópico. Pouco estudado pela comunidade científica, esse trabalho foi revisado pelo físico e astrônomo belga George Lemaître, em 1927, que encontra de maneira independente, os mesmos resultados obtidos por Friedmann. Dois anos mais tarde, é anunciada a descoberta, realizada pelo astrônomo Edwin P. Hubble, de que as galáxias estão se afastando com uma velocidade proporcional a sua distância, o que concretiza a expansão espaço-temporal do Universo e faz Einstein desconsiderar a constante cosmológica. Finalmente em 1930, H. P. Robertson e A. G. Walker estabelecem uma aproximação cinemática que permite obter a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), o que abre caminho para estabelecer matematicamente o princípio cosmológico que fundamenta o Modelo Cosmológico Padrão.

1.2.1 O Princípio Cosmológico e a Métrica FRW

O princípio cosmológico assume que o Universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas³. Baseado inicialmente nas observações de Hubble, esse princípio foi confirmado com a acidental descoberta da radiação cósmica de fundo [18], por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965.

A representação geométrica mais simples a ser considerada, que incorpore as condições de homogeneidade e isotropia, é uma generalização do espaço euclidiano, escrito em coordenadas esféricas e corrigido por um fator de escala. Medimos distância no espaço-tempo, para essa

³em Cosmologia, algo maior do que 10^2Mpc [17].

representação, com o elemento de linha⁴

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

Usando os argumentos do princípio cosmológico, esse resultado pode ser estendido ao caso não euclidiano - para mais detalhes, vide [19]. Isotropia implica em simetria esférica (de rotação), de modo que podemos reescrever o elemento de linha como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[\lambda^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

desde que qualquer variação na parte angular $r^2 d\Omega^2$ não altera a isotropia do espaço-tempo. Uma maneira de determinar a função $\lambda(r)$, considerada ao quadrado apenas por conveniência, é calcular o escalar de curvatura para o espaço-tridimensional, induzido pelo elemento de linha acima, o que implica na relação

$${}^3R = \frac{3}{2a^2 r^3} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(r)} \right) \right].$$

Porém o espaço-tempo é considerado homogêneo e isso faz com que todas as propriedades geométricas sejam independentes de r , logo 3R deve ser constante e obtemos

$$r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(r)} \right) = C_1 r^4 + C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. A fim de evitar qualquer singularidade, devemos fazer $C_2 = 0$.

Podemos então determinar

$$\lambda^2(r) = \frac{1}{1 - C_1 r^2} = \frac{1}{1 - \frac{C_1}{|C_1|} r'^2},$$

de modo que C_1 é diferente de zero e com isso o elemento de linha para um Universo homogêneo e isotrópico, que define a métrica FRW, é descrito por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

⁴assumimos a assinatura $(+, -, -, -)$.

Nessa relação k é a curvatura da hipersuperfície de simultaneidade e define três geometrias⁵:

Geometria Plana ($k = 0$)

Baseada nos axiomas da geometria euclidiana, sua linha geodésica é uma reta. O Universo descrito nessa geometria deve ter volume infinito e é por vezes denominado Universo PLANO. Veremos adiante que existem fortes indicações de que essa geometria seja a que mais se aproxima da geometria do Universo atual.

Geometria Esférica ($k = 1$)

Esse tipo de geometria viola os postulados de Euclides e descreve um Universo FECHADO, onde os ângulos internos de um triângulo somam mais que 180° e o perímetro de uma circunferência é menor do que $2\pi r$. Partindo do equador, linhas paralelas se cruzam nos pólos e, embora de volume finito, esse tipo de Universo não tem limites ou barreiras.

Geometria Hiperbólica ($k = -1$)

Quando a geometria do Universo é hiperbólica, que também é não-euclidiana, as linhas paralelas sempre se distanciam umas das outras, caracterizando um Universo ABERTO e de volume infinito, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° e o perímetro de uma circunferência mede mais do que $2\pi r$.

1.2.2 Solução das Equações de Einstein na Métrica FRW

Uma vez conhecido o elemento de linha que define a métrica para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico em expansão, podemos agora resolver as equações de campo da

⁵que podem ser ainda identificadas a partir do jacobiano associado à transformação [11].

gravitação,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}.$$

Considerando a métrica FRW,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right],$$

é possível escrever a matriz do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

que permite determinar as componentes do tensor de Ricci, desde que seja válido o teorema de Levi-Civita [12], e temos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a},$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2},$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2,$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2\theta;$$

sendo o escalar de curvatura

$$R = R^\mu{}_\mu = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right).$$

De acordo com o princípio cosmológico, o conteúdo de matéria do Universo se comporta como um fluido perfeito, em largas escalas, de modo que o tensor energia-momento é dado por [11]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu},$$

onde u^μ é o vetor da 4-velocidade normalizado, $u^\mu u_\mu = -1$. Nessa relação ρ é a densidade de energia e p a pressão do fluido cosmológico. Podemos assim escrever a matriz do tensor energia-momento, como [11, 20]

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Com base nos resultados acima, as equações de campo ficam reduzidas a

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = 2T^0_0 \implies \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

e

$$R^1_1 - \frac{1}{2}R = 2T^1_1 \implies \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p).$$

As componentes $R^2_2 - (1/2)R = 2T^2_2$ e $R^3_3 - (1/2)R = 2T^3_3$ apresentam o mesmo resultado da expressão anterior; uma considerável simplificação, decorrente das simetrias associadas à métrica FRW.

A lei de Hubble afirma ser a velocidade de afastamento das galáxias \mathbf{v} proporcional à distância \mathbf{r} de um observador em um ponto qualquer do Universo:

$$\mathbf{v} = |\dot{\mathbf{r}}| \hat{\mathbf{r}} \implies \mathbf{v} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}.$$

Escrevendo \mathbf{r} em termos das coordenadas comóveis, $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{r}'$, onde $a(t)$ é o já definido fator de escala, temos

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{r}$$

e podemos identificar $H = \dot{a}/a$ como o parâmetro de Hubble. A célebre descoberta de Hubble teve um profundo impacto na Cosmologia da época, principalmente por sua análise sobre a origem do Universo. Perceba que H tem dimensão de inverso do tempo; isso permite

avaliar a idade do Universo, um dado bastante controverso, que se estima ser da ordem de 13,7 bilhões de anos, tempo decorrido desde uma fase em que o Universo era muito quente e denso, denominada *Big Bang quente*. Por essa razão, é comum encontrar-se textos que versam sobre o MCP como o modelo de Big Bang quente.

A partir dessas identificações reescrevemos as soluções das equações de campo da gravitação como,

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.12)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \quad (1.13)$$

denominadas, respectivamente, a equação de Friedmann e a equação da aceleração⁶.

A equação de Friedmann relaciona a taxa de crescimento do fator de escala $a(t)$ com a densidade de energia total e a geometria do Universo

$$\rho = \frac{3}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right);$$

no caso $k = 0$, essa relação conduz a densidade de energia crítica $\rho_c = (3/2)H^2$, que representa a densidade de energia total associada a um Universo plano. Outro parâmetro de relevância na análise de modelos cosmológicos é o parâmetro de densidade $\Omega = \rho/\rho_c$, que permite reescrever a equação de Friedmann como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.14)$$

Dessa relação podemos verificar que Ω é uma medida indireta da geometria do Universo: para um Universo esférico, ou seja, com $k = 1$, $\Omega > 1$; para um Universo hiperbólico, ou seja, com $k = -1$, $\Omega < 1$. Mais adiante, veremos que dados observacionais têm mostrado que o Universo é aproximadamente plano, $k = 0$, o que torna $\Omega \approx 1$ - vide [21].

⁶algumas vezes vamos nos dirigir a esse conjunto de equações com o termo *equações de Friedmann*.

Por outro lado, a equação da aceleração, (1.13), nos permite estimar a variação da taxa de expansão do Universo. Isso pode ser feito levando em consideração a chamada condição de energia forte $\rho + 3p \geq 0$: dentro do seu regime de validade, a igualdade $\rho + 3p = 0$ implica em uma evolução cosmológica estacionária, $\ddot{a} = 0$, enquanto $\rho + 3p > 0$ é associada à desaceleração cósmica, $\ddot{a} < 0$. Nesse sentido, o Universo apresenta um regime de expansão acelerada, $\ddot{a} > 0$, apenas quando a condição de energia forte é violada, sendo neste caso $\rho + 3p < 0$.

Embora \ddot{a} seja uma boa estimativa da aceleração do Universo, é mais comum na literatura utilizar a definição do parâmetro de desaceleração cósmica. Consideremos uma expansão em série de Taylor do fator de escala em torno de t_0 :

$$a(t) = a_0 + (t - t_0)\dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\ddot{a}(t_0) + \dots$$

reescrevemos essa relação como

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{1}{2}q_0(t_0 - t)^2H_0^2 + \dots$$

onde t_0 , a_0 e H_0 , medem o tempo físico, fator de escala e o parâmetro de Hubble⁷, respectivamente, para o instante presente. Definimos o parâmetro de desaceleração cósmica como:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2},$$

um parâmetro adimensional que permite classificar a evolução do Universo como desacelerada ($q > 0$), estática ($q = 0$) ou acelerada ($q < 0$). Embora o sinal na expressão acima pareça não natural, ele reflete a expectativa da comunidade científica à época anterior a descoberta da aceleração cósmica, em 1998; desde que em um Universo dominado por matéria os efeitos gravitacionais, sempre atrativos, teriam como consequência a desaceleração da expansão cósmica.

⁷ $H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a_0}$.

Manipulando as equações de Friedmann (1.12) e (1.13), obtemos

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -(\rho + p) + \frac{k}{a^2}, \quad (1.15)$$

o que permite reescrever o parâmetro de desaceleração cósmica em termos do parâmetro de Hubble e de sua taxa de variação como

$$q = - \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right).$$

Uma vez assumido um modelo de Universo em expansão adiabática, cujo conteúdo material é representado por um fluido perfeito espalhado homogêneo e isotropicamente, podemos também definir para esse fluido uma equação de estado $\omega \equiv p/\rho$. A análise desse parâmetro permite avaliar tanto características do fluido, quanto da própria evolução cosmológica; de fato, manipulando as equações (1.12) e (1.15) temos

$$\omega = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{H^2}{H^2 + \frac{k}{a^2}} q.$$

Essa relação mostra que para a solução estacionária o parâmetro de desaceleração $q = 0$ corresponde à equação de estado $\omega = -1/3$; podemos verificar também que para um espaço plano ($k = 0$), ou esférico ($k > 0$), o parâmetro de desaceleração cósmica $q \geq 0$ é correspondente às condições $\omega \geq -1/3$. No caso hiperbólico ($k < 0$), entretanto, podemos ter duas situações: **1.** $a^2 H^2 > 1$ e obtemos $q \geq 0 \rightarrow \omega \geq -1/3$; **2.** $0 < a^2 H^2 < 1$ e o parâmetro de desaceleração cósmica $q \geq 0$ corresponde às condições $\omega \leq -1/3$, sendo agora a desaceleração cósmica associada à violação da condição de energia forte sobre o fluido, o que viola o princípio de conservação de energia. Devemos portanto descartar a situação **2.** e vincular um Universo hiperbólico em expansão a condição adicional $aH > 1$.

Combinando ainda a equação (1.15) com a equação de Friedmann (1.12), podemos escrever uma equação da continuidade para o fluido cosmológico

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0; \quad (1.16)$$

obtida de uma maneira mais rigorosa a partir da conservação do tensor energia-momento, $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$, ou mesmo, a partir do princípio de conservação de energia, na forma da primeira lei da termodinâmica $dE = pdV \rightarrow d(\rho a^3) = pd(a^3)$, desde que admitimos ser o Universo em expansão adiabática, preenchido com um fluido perfeito espalhado homogêneo e isotropicamente.

Resolvendo (1.16) para a densidade de energia, chegamos a

$$\rho = \rho_0 \exp \left(- \int_{a_0}^a 3(1 + \omega(a)) d \ln(a) \right),$$

sendo ρ_0 e a_0 a densidade de energia hoje e o fator de escala hoje, respectivamente.

De acordo com a teoria do Big Bang, o Universo atravessa em sua evolução fases cosmológicas em que a equação de estado é bem definida, $\omega a = \omega$, e a expressão acima fica reduzida a

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}.$$

Dois exemplos de interesse são a fase dominada por radiação (fase relativística) e a fase dominada por matéria (fase não relativística). Para a fase dominada por radiação, o fato do comprimento de onda ser proporcional ao fator de escala implica em $\rho \propto a^{-4}$ e devemos ter $\omega = 1/3$. Já para a fase dominada por matéria, desde que é um fluido de pressão nula, a equação da continuidade implica que a densidade de energia é $\rho \propto a^{-3}$ e, da relação acima, podemos identificar a equação de estado para matéria como $\omega = 0$. Podemos assim reescrever a equação de Friedmann considerando que a densidade de energia é composta de ambas as matérias, relativística e não relativística, de modo que obtemos

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{k0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right), \quad (1.17)$$

onde o subscrito ‘0’ representa medidas para o tempo físico presente e definimos $\Omega_{k0} = -k/(a_0^2 H_0^2)$, sujeito ao vínculo $\Omega_{r0} + \Omega_{m0} + \Omega_{k0} = 1$.

A observação de Hubble da expansão cósmica, aliada as definições do princípio cosmológico, nos leva a conclusão do resfriamento térmico do Universo. Admitindo uma reversão temporal, essas observações sugerem então que o Universo tenha sido mais quente e denso no início da expansão⁸. Temos então uma transição da fase relativística, seguida de uma expansão com resfriamento a uma fase não relativística. Isso pode ser visto diretamente da relação (1.17); a contribuição da radiação Ω_{r0} se torna mais relevante, nos estágios iniciais do Universo, quando a é pequeno, caracterizando a fase relativística. À medida que o Universo expande, o termo de poeira passa a ser mais relevante e Ω_{m0} passa a ser predominante, caracterizando a fase não relativística. Vejamos alguns detalhes dessas fases separadamente:

Radiação

Para essa fase cosmológica $\rho = \rho_{0r}(a_0/a)^4$ e resolvendo (1.17), quando o termo de radiação é dominante, temos $a \propto \sqrt{t}$. Uma estimativa da aceleração do fator de escala é dada por $\ddot{a} \propto -t^{-3/2}$, ou melhor, $q_0 = -a\ddot{a}/\dot{a}^2 = 1$, de modo que um Universo dominado por matéria relativística apresenta desaceleração cósmica; de fato, a equação de estado para radiação é positiva e portando superior a $-1/3$.

A idade do Universo e o parâmetro de Hubble são relacionados nessa fase por

$$t_0 = \frac{1}{2H_0},$$

sendo a evolução da densidade de energia com o tempo físico $\rho = \frac{3}{8}t^{-2}$.

Matéria

À medida que o Universo expande e arrefece, são estabelecidas as condições necessárias para a formação de estruturas [20]; a evolução cósmica passa a ser dominada por um fluido

⁸desconsideramos a inflação cósmica, mencionada a seguir.

de pressão nula. Nesse caso $\rho = \rho_{0m}(a_0/a)^3$ e, resolvendo (1.17) para o termo de matéria dominante, obtemos $a \propto t^{2/3} \rightarrow q_0 = 1/2$, o que caracteriza uma fase de expansão cósmica desacelerada; como esperado, devido aos efeitos gravitacionais, sempre atrativos.

Diferentemente da fase dominada por radiação, a idade do Universo e o parâmetro de Hubble são agora relacionados por [20]

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6,52 \times 10^9 h^{-1} \text{yr}$$

e a evolução temporal da densidade de energia varia com o tempo físico de acordo com $\rho = \frac{2}{3}t^{-2}$.

Por muito tempo, essa descrição da fase não relativística foi o modelo cosmológico mais aceito pela comunidade científica. Porém, a estimativa da idade do Universo, da ordem da idade dos sistemas estelares, se apresentava, dentre outras dificuldades, como uma clara indicação da necessidade de modificações no modelo padrão da Cosmologia.

1.3 Modificações no MCP - Inflação Cósmica

A proposta do Big-Bang quente se mostrou bastante eficiente em determinar a abundância dos elementos leves, assim como na estimativa da temperatura da radiação cósmica de fundo, realizada inicialmente por G. Gamow e R. Alpher (5 K) em 1948 e medida na ordem de 3,5 K por A. Penzias e R. Wilson em 1965. No entanto, o modelo apresentava problemas; em especial, no início de 1970, E. R. Harrison, P. J. E. Peebles e J. T. Yu, e Ya. B. Zel'dovich sugeriram, independentemente, que a radiação cósmica de fundo deveria apresentar inomogeneidades da ordem de 10^{-4} ou 10^{-5} , o que seria necessário, entre outros requisitos, para a construção de um modelo capaz de descrever a formação de estruturas no Universo. Além de não conseguir justificar a presença dessa inomogeneidade fundamental na radiação cósmica de fundo (apenas observada anos mais tarde, pelo satélite observacional COBE),

a teoria também não conseguia resolver o, assim chamado, problema das condições iniciais do Universo, que inclui o problema da planura, o problema do horizonte e a abundância de relíquias cosmológicas, como os monopolos magnéticos, os gravitinos, dentre outras partículas supermassivas. Também pesava sobre o modelo a dificuldade em apresentar uma melhor estimativa da própria idade do Universo [22, 23, 24]. Foi esse contexto que levou Alan Guth [25], Andrei Linde [26], Andreas Albrecht e Paul Steinhardt [27], no início da década de 80, a propor modificações no MCP, de modo a incluir uma fase de inflação cósmica na evolução do Universo.

Problema da planura

Podemos analisar o problema da planura a partir da relação (1.14),

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.18)$$

Para o tempo físico presente, essa relação é reescrita como

$$\Omega_0 - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (1.19)$$

e, eliminando o parâmetro k em (1.18) e (1.19), obtemos

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{a_0^2 H_0^2}{a^2 H^2}. \quad (1.20)$$

Dados observacionais impõem o vínculo $|\Omega_0 - 1| < 0,02$ [20, 28], de modo que o Universo é muito próximo da planura hoje. Por outro lado, a relação anterior exige que o Universo tenha sido cada vez mais plano à medida que consideramos fases mais remotas, o que configura o chamado problema da planura: Por que o Universo primordial foi assim tão plano?

Considerando o Universo dominado por radiação e poeira, como proposto pelo MCP

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3}$$

e combinando essa relação com (1.20) chegamos a

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{a_0^2 a^2}{\Omega_{r0} + a \Omega_{m0}}. \quad (1.21)$$

Esse resultado mostra que Ω desvia da unidade no período de dominação matéria-radiação, sendo portanto necessário ajustar o valor de Ω para que ele esteja ainda mais próximo da unidade nessa fase, afim de que esse desvio não comprometa o vínculo observacional para Ω_0 . Isso fica evidente quando consideramos cada uma das fases da evolução cósmica separadamente:

Na era da radiação, a relação (1.21) fica reduzida a

$$|\Omega - 1|_r \propto a^2 \propto t,$$

e ainda, para a fase dominada por matéria

$$|\Omega - 1|_m \propto a \propto t^{2/3}.$$

Assuma, em acordo com os dados observacionais, $\Omega_{r0} = 8,3 \times 10^{-5}$ e $\Omega_{m0} = 0,27$ [28]⁹. Sabemos que Ω_0 deve se aproximar da unidade no presente, tal que $|\Omega_0 - 1| \lesssim 10^{-3}$. Isso nos permite estimar o desvio (1.21) extrapolando os resultados acima. À época da igualdade matéria-radiação, por exemplo, $a_{rm} \approx 2,8 \times 10^{-4}$, o parâmetro de densidade Ω_{rm} desvia da unidade dentro da estimativa

$$|\Omega_{rm} - 1| \lesssim 10^{-6}.$$

Considerando à época da nucleossíntese primordial $a_{nuc} \approx 3,6 \times 10^{-8}$ devemos obter

$$|\Omega_{nuc} - 1| \lesssim 10^{-16},$$

de modo que esse desvio é realmente muito sensível. Variações acima desse limite teriam como consequência um Universo fora da planura no presente, ou em uma situação mais drástica,

⁹como veremos adiante, a energia escura é estimada em $\Omega_{e0} = 0,73$.

poderiam responder por uma rápida contração espaço-temporal, o que levaria o Universo ao que chamamos de Big-Crunch; existe também a possibilidade de uma muito rápida expansão do Universo, diluindo o seu conteúdo de matéria a um regime de muito baixa densidade, cenário esse denominado Big-Chill.

Devemos salientar que não existe nada de não natural nesses resultados, o Universo pode simplesmente ter sido muito próximo da planura no passado. O que a resolução do problema da planura se propõe é exatamente justificar o porquê de o Universo primordial ter sido tão plano no passado.

Problema do horizonte

O problema do horizonte questiona a homogeneidade e isotropia do Universo em larga escala. Essas suposições foram fundamentais para a construção do MCP e simplificam enormemente a estrutura matemática relacionada à teoria do Big-Bang. Por que então consideramos a homogeneidade e isotropia do Universo um problema? Para um melhor entendimento dessa questão, precisamos definir dois parâmetros cosmológicos: a distância própria e o horizonte de partícula. Aqui entenda o termo “horizonte” como a superfície esférica centrada no observador.

A distância própria é definida como

$$d_p(t_0) = a_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a},$$

onde t_0 é o tempo físico presente e t_e é o tempo de emissão do sinal da partícula. Para um Universo descrito pelas equações de Friedmann, definimos o horizonte de partícula como

$$d_{hor}(t_0) = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a},$$

que pode ser interpretado como a distância própria da partícula no limite $t_e \rightarrow 0$.

A homogeneidade e isotropia do Universo são identificadas especialmente na radiação cósmica de fundo e desde que a última superfície de espalhamento, impressa no fundo cósmico, ocorreu muito antes do tempo físico presente $t_{se} \ll t_0$, a distância própria e o horizonte de partícula são resultados bastante aproximados. Considere então dois pontos, diametralmente opostos sobre a última superfície de espalhamento, cuja distância ao observador é, por definição, igual ao horizonte de partícula $d_{hor}(t_0)$; a separação entre esses dois pontos é equivalente a uma distância própria $d_p(t_0) = 2d_{hor}(t_0)$ e, portanto, esses pontos não podem se comunicar no Universo, ou ainda, não podem entrar em equilíbrio térmico. As observações, entretanto, revelam que esses dois pontos da última superfície de espalhamento têm aproximadamente as mesmas propriedades; como isso é possível?

Desde que as inhomogeneidades não podem ser dissolvidas durante a expansão cósmica, o Universo homogêneo e isotrópico no presente deve ser consequência de uma região de homogeneidade e isotropia inicial, de modo que o comprimento físico

$$l(t) \equiv d_{hor}(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a},$$

para um instante inicial $t = t_i$, pode ser escrito como [29]

$$l_i \approx t_0 \frac{a_i}{a_0},$$

uma vez que para o Universo primordial $l_0 \approx t_0 \approx d_{hor}(t_0)$. Podemos agora comparar esse resultado com o comprimento físico causal $l_c \approx t_i \approx d_{hor}(t_i)$ como segue

$$\frac{l_i}{l_c} \approx \frac{t_0}{t_i} \frac{a_i}{a_0}. \quad (1.22)$$

Para fazer uma estimativa desse resultado vamos considerar condições iniciais associadas à escala de Planck: temperatura $T_{pl} \approx 10^{32}$ K, tempo $t_{pl} \approx 10^{-43}$ s. Sendo $a_i/a_0 \approx T_0/T_{pl} \approx 10^{-32}$ e para a idade do Universo estimada em $t_0 \approx 10^{17}$ s, chegamos a

$$\frac{l_i}{l_c} \approx 10^{28},$$

logo o tamanho do Universo é inicialmente muito maior que o tamanho da região causal. Assumindo ainda que o fator de escala do Universo evolua como alguma potência do tempo físico, a aproximação $\dot{a} \approx a/t$ é válida e reescrevemos a relação (1.22) na forma

$$\frac{l_i}{l_c} \approx \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0};$$

porém a teoria do Big-Bang quente afirma que a expansão do Universo primordial é desacelerada, decorrente da gravidade ser sempre atrativa, e por conseqüência a região causal é sempre maior que o Universo observável, o que impede o equilíbrio térmico do Universo e sumariza o problema do horizonte.

Problema dos monopolos magnéticos

Diferentemente do problema da planura e do horizonte, o problema da abundância de relíquias cosmológicas não é relacionado diretamente às condições iniciais do Universo primordial, mas a uma combinação dos resultados da teoria do Big-Bang quente com os resultados das Teorias de Grande Unificação da física de partículas. De acordo com essas teorias o Universo primordial apresenta uma transição de fase, quando a temperatura atravessa a barreira $T_{TGU} \approx 10^{28}$ K, em que ocorre uma quebra espontânea de simetria, associada a um campo escalar [24]. Como conseqüência dessa quebra espontânea de simetria, surgem defeitos topológicos que permeiam o Universo primordial, dentre tais os monopolos magnéticos. Em acordo com a teoria do Big-Bang quente os monopolos magnéticos deveriam ocorrer em uma abundância relativa de um monopolo por bárion, o que não é evidenciado e caracteriza o problema dos monopolos magnéticos.

1.3.1 A Teoria da Inflação Cósmica

Uma alternativa de solução para esses problemas é apresentada a partir da teoria da inflação cósmica, que propõe a inclusão de uma fase de expansão acelerada à evolução do

Universo primordial. Assumindo que a dinâmica do Universo é governada pelas equações de Friedmann, a equação da aceleração (1.13)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p),$$

mostra que, para um regime inflacionário, $\omega < -1/3$. Descartada por Einstein depois da descoberta de Hubble da expansão cósmica, uma constante cosmológica com sinal contrário Λ_{ic} , poderia ser responsável pela aceleração cósmica primordial, uma vez que $\omega_{\Lambda_{ic}} = -1$. Admitindo a presença de uma constante cosmológica, as equações de Friedmann precisam ser rescritas [24],

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (1.23a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.23b)$$

e sendo a inflação cósmica um regime em que a constante cosmológica Λ_{ic} é dominante, essas equações são reduzidas a

$$\begin{aligned} H_{ic}^2 &= \frac{\Lambda_{ic}}{3}; \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{\Lambda_{ic}}{3} > 0, \end{aligned}$$

de modo que o fator de escala evolui exponencialmente com o tempo físico $a \propto \exp(H_{ic}t)$. Considerando que a inflação ocorre durante a fase da radiação, tendo seu início no instante t_i e término do instante t_f , podemos escrever a evolução do fator de escala como

$$a = a_i \exp(H_{ic}(t - t_i)),$$

sendo $t_i < t < t_f$. Com isso $a_f/a_i = e^N$, onde $N \equiv H_{ic}(t_f - t_i)$ é o número de e-foldings, um parâmetro adimensional usado como medida de duração da inflação cósmica. Considere, como um possível modelo, que a inflação tem início em torno do instante em que ocorre a unificação das forças fundamentais $t_i \approx t_{TGU} \approx 10^{-36}$ s e que o período inflacionário transcorra o equivalente a $N \approx 100$ e-foldings. Nesse caso

$$a_f \approx a_i e^{100} \approx 10^{43}$$

e, portanto, o fator de escala foi inflado em 10^{43} vezes o seu tamanho original sob ação da constante cosmológica Λ_{ic} .

Vejamos como esse modelo resolve o problema da planura. A evolução do parâmetro de densidade é dada por

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}$$

e sendo o Universo dominado por uma constante cosmológica, o que implica em $a \propto e^{H_{ic}t}$, obtemos

$$|\Omega - 1| \propto e^{-2H_{ic}t},$$

ou seja, o parâmetro de densidade se aproxima da unidade exponencialmente. Esse resultado pode ser mensurado para $t = t_i$, no início da inflação, e para $t = t_f$, no fim da inflação, tal que

$$|\Omega_f - 1| = e^{-2N} |\Omega_i - 1|,$$

onde usamos a definição $N = H_{ic}(t_f - t_i)$. Desse modo, mesmo que o Universo esteja fora da planura no início do regime inflacionário, $|\Omega_i - 1| \approx 1$, por exemplo, decorridos um número de 100 e-foldings para a duração da inflação $|\Omega_f - 1| \approx e^{-200} \approx 10^{-87}$ e o Universo no fim da inflação é muito próximo da planura. Para que a inclusão de um regime inflacionário consiga resolver o problema da planura, o número de e-foldings reconhecido na literatura é da ordem 75; porém esse número pode ser maior, desde que os dados observacionais são consistentes com um parâmetro de densidade muito próximo da unidade hoje, $|\Omega_0 - 1| \ll 1$.

Analisamos agora o problema do horizonte. Para um tempo físico arbitrário, calculamos o horizonte de partícula como

$$d_{hor}(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a}.$$

Em nosso modelo a inflação transcorre durante a fase dominada por radiação, nesse caso

$$d_{hor}(t_i) = a_i \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} = 2t_i$$

e para o fim do regime inflacionário

$$d_{hor}(t_f) = a_i e^N \left(\int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i e^{H_{ic}(t-t_i)}} \right),$$

onde usamos $a_f = a_i e^N$. Calculando as integrais acima, levando em consideração um grande número de e-foldings, chegamos a

$$d_{hor}(t_f) = e^N (2t_i + H_{ic}^{-1}).$$

Se assumirmos $t_i \approx 10^{-36}$ s, o parâmetro de Hubble durante o regime inflacionário é dado por $H_{ic} \propto t_i^{-1} \approx 10^{36}$ s⁻¹ e obtemos¹⁰ $d_{hor}(t_i) \approx 6 \times 10^{-28}$ m, de modo que decorrido um número de 100 e-foldings

$$d_{hor}(t_f) = e^N (3t_i) \approx 0,8 \text{ pc}.$$

Com o fim do período inflacionário o horizonte de partícula volta a crescer linearmente com o tempo físico; como esperado para a fase de dominação da radiação.

A inclusão da fase inflacionária tem o efeito de corrigir o horizonte de partícula por um fator e^N . Seja, por exemplo, o horizonte de partícula para a última superfície de espalhamento, em acordo com o modelo do Big-Bang quente $d_{hor}(t_{se}) \approx 0,4$ Mpc; decorridos 100 e-foldings no regime inflacionário teríamos agora uma região na ordem de 10^{43} Mpc, suficiente para tornar a última superfície de espalhamento em contato causal.

Podemos também comparar a distância própria e o horizonte de partícula no início do regime inflacionário. A distância própria da última superfície de espalhamento é hoje dada por $d_p(t_o) \approx 1,4 \times 10^4$ Mpc, tal que no fim da inflação, quando $t_f \approx 10^{-34}$ s e $a_f = 2 \times 10^{-27}$ Mpc

$$d_p(t_f) = a_f d_p(t_o) \approx 3 \times 10^{-23} \text{ Mpc} \approx 0,9 \text{ m},$$

¹⁰lembre-se que nossa escolha de unidades faz $c = 1$, explicitamente $d_{hor}(t_i) = 2ct_i$.

e admitindo uma duração de 100 e-foldings para o regime inflacionário

$$d_p(t_i) = e^{-N} d_p(t_f) \approx 3 \times 10^{-44} \text{ m}$$

uma quantidade 16 ordens de grandeza menor que o tamanho do horizonte de partícula no início da inflação $d_{hor}(t_i) \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}$, garantindo um alcance causal para a parte do Universo que observamos hoje.

Esse modelo também permite resolver o problema da abundância de relíquias cosmológicas. Se essas relíquias foram criadas antes, ou mesmo durante, o regime inflacionário, então a densidade de número dessas relíquias seria reduzida a uma quantidade não detectável. No caso dos monopolos, por exemplo, a densidade de número decresce com a terceira potencia do fator de escala, $n_{mon} \propto e^{-3H_{ic}t}$, de modo que na época da grande unificação $n_{mon}(t_{TGU}) = 10^{82} \text{ m}^{-3}$ e decorridos 100 e-foldings de inflação $n_{mon}(t_f) = e^{-3N} n_{mon}(t_{TGU}) \approx 10^{-49} \text{ m}^{-3}$, o que permite estimar a medida para o tempo físico presente $n_{mon}(t_0) \approx 10^{-61} \text{ Mpc}^{-3}$, sendo portanto a possibilidade observacional dos monopolos magnéticos muito reduzida [24].

1.3.2 Ínflaton

Ainda que o modelo de inflação guiado por uma constante cosmológica tenha resolvido os problemas apresentados acima no contexto da teoria do Big-Bang quente, somos levados a descartar esse modelo em função de um modelo dinâmico de inflação. Um dos problemas que nos leva a essa modificação é a dificuldade de compatibilizar a constante cosmológica necessária para guiar o regime inflacionário, $\rho_{\Lambda_{ic}} \approx 10^{105} \text{ Tev m}^{-3}$, com o valor observável atualmente, da ordem de $\rho_{\Lambda_0} \approx 4 \times 10^{-3} \text{ Tev m}^{-3}$; comparando esses resultados temos uma diferença em torno de 107 ordens de magnitude [6, 20], resultado conhecido na literatura como problema da constante cosmológica. Além desse resultado bastante desfavorável contra a constante cosmológica, também precisamos explicar a presença da curvatura local, observada na radiação cósmica de fundo; uma variação na ordem de um por 10^5 , em relação a uma

temperatura de fundo de aproximadamente 2,73 K , que teria sido responsável por gerar as inhomogeneidades e anisotropias necessárias para a formação de estruturas no Universo [30].

Apresentado inicialmente por A. Guth, vamos explorar aqui um modelo de Universo inflacionário em que um campo escalar, associado a uma transição de fase em Teorias de Grande Unificação, responde pela pressão negativa que acelera a expansão cósmica primordial, o *ínflaton*. A dinâmica do Universo primordial é descrita pela ação de Einstein-Hilbert, assumindo que o ínflaton é minimamente acoplado a gravidade

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (1.24)$$

onde $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ é a Lagrangeana do ínflaton ϕ . Perceba que não consideramos a presença de uma Lagrangeana de matéria; como no modelo de constante cosmológica, vamos considerar que o campo escalar domina a densidade de energia do Universo primordial. A Lagrangeana do ínflaton é assumida aqui como a Lagrangeana padrão de campos escalares¹¹

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V \quad (1.25)$$

onde $V = V(\phi)$ é o potencial associado ao ínflaton.

Desde que seja válida a relação (1.10), podemos escrever o tensor energia-momento, nesse caso, como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right], \quad (1.26)$$

sendo a densidade de energia e pressão do Universo primordial dadas por

$$\rho_{ic} = T^0_0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V, \quad p_{ic} = -T^1_1 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V. \quad (1.27)$$

$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3$, desde que consideramos uma métrica FRW. A equação de estado total é agora dada por

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V},$$

¹¹essa condição pode ser relaxada e permite variações na descrição do ínflaton [23].

limitada ao intervalo $[-1, 1]$, incluindo a condição inflacionária $\omega < -1/3$.

Nesse caso as equações de Friedmann são

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}; \quad (1.28a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (1.28b)$$

combinando essas relações, podemos escrever a equação de movimento do ínflaton como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0, \quad (1.29)$$

onde o índice ‘ ϕ ’ representa derivada em relação ao campo.

Aproximação de Rolagem Lenta

Durante o regime inflacionário podemos assumir que o ínflaton varia lentamente em um potencial $V(\phi)$, tal que

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \ll V$$

e a densidade de energia pode então ser associada ao termo potencial $\rho_{ic} \approx V$, o que nos leva a $\rho_{ic} \approx -p_{ic}$, ou melhor, $\omega_{ic} \approx -1$. Nesse caso, o ínflaton passa a desempenhar o papel de uma constante cosmológica, gerando uma rápida expansão do Universo primitivo, o que permite resolver o problema das condições iniciais do Universo, que passam agora a ser determinadas pelo ínflaton. Isto permite fazer $k = 0$ na equação de Friedmann e podemos escrever

$$H^2 \simeq \frac{2}{3} V. \quad (1.30)$$

Por outro lado, o requisito de rolagem lenta sobre a equação de movimento do ínflaton nos leva a descartar o termo de aceleração $\ddot{\phi}$ frente a derivada do potencial V_{ϕ} , sendo o termo de resistência $3H\dot{\phi}$, que lentifica a rolagem do campo em direção ao mínimo do potencial, dado por

$$3H\dot{\phi} \simeq -V_{\phi}. \quad (1.31)$$

Parâmetros de Rolagem Lenta

É muito comum na literatura definir parâmetros que estabelecem condições de validade da aproximação de rolagem lenta [30]. Da definição de aceleração cósmica, obtemos

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1,$$

combinando esse resultado com as relações (1.30) e (1.31) podemos escrever a condição

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \ll 1.$$

Similarmente, para que $\ddot{\phi} \ll V_\phi$ seja válida, as relações (1.30) e (1.31) exigem que

$$\eta(\phi) \equiv \frac{1}{2} \frac{V_{\phi\phi}}{V} \ll 1.$$

Embora as condições $\epsilon(\phi) \ll 1$ e $\eta(\phi) \ll 1$ sejam necessárias, elas não são suficientes para a validade do procedimento, sendo também exigido que ϕ se aproxime de uma solução atrator, descrita por $3H\dot{\phi} \simeq -V_\phi$ - vide [20].

Em um regime inflacionário, a rápida expansão do Universo primordial nos leva a uma condição de superresfriamento e, portanto, a inflação deve incluir um processo de reaquecimento que precede a nucleossíntese e a formação de estruturas. Diferentes formas de gerar um processo de reaquecimento foram apresentadas na literatura. No modelo original de A. Guth, conhecido como velha inflação, esse processo é decorrente de uma transição de fase em Teorias de Grande Unificação, em que atingida a temperatura crítica T_{TGU} , uma quebra espontânea de simetria geraria bolhas inflacionárias que eventualmente colidem e reaquecem o Universo a partir da conversão da energia cinética das paredes das bolhas em energia térmica. Guth não leva em consideração que a região entre as bolhas também infla e impede a percolação. O modelo de nova inflação, preconizado por Linde, propõe que a inflação apenas ocorre após a transição de fase e, portanto, temos uma única bolha em que o processo

de reaquecimento é agora associado a criação de pares de partículas, a partir da oscilação do inflaton em torno do mínimo de potencial. No entanto a condição da transição de fase inicial do Universo primitivo pode ser relaxada e abre espaço para a elaboração do modelo de inflação caótica, onde o inflaton é escolhido para assumir qualquer condição inicial, em especial o modelo de inflação caótica para potencial quadrático é compatível com o dados observacionais [28]. Outros modelos inflacionários de interesse como a inflação eterna, a inflação natural, a inflação hilltop são bastante exploradas na literatura e apresentam diferentes alternativas no estudo da inflação cósmica.

1.4 Modificações no MCP - Energia Escura

Após o grande avanço na pesquisa observacional, conseguido com o satélite observacional COBE, favorecendo os resultados preditos pela teoria inflacionária, um forte estímulo para uma determinação mais precisa de parâmetros cosmológicos foi iniciado em meados da década de 90. Em especial, dois projetos, envolvendo o estudo de um objeto astrofísico muito peculiar, as Supernovas tipo IA (SN IA), surpreenderam a comunidade científica com seus resultados [31, 32]. As observações divulgadas pelo High-z Supernova Search Team, em 1998 [33], liderado por A.G. Riess, e pelo Supernova Cosmology Project, em 1999 [34], liderado por S. Perlmutter, indicaram que as SN IA, com redshift $z \equiv -1 + 1/a \gtrsim 0,3$ apresentavam um desvio positivo do módulo de distância em relação à previsão do MCP. Desde que a estimativa do módulo de distância é realizada a partir de¹².

$$\mu(z) \equiv m - M \approx 43,17 - 5 \log_{10} \left(\frac{H_0}{70 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}} \right) + 5 \log_{10} z + \frac{5}{2 \ln(10)} (1 - q_0) z,$$

sendo $\mu(z)$ o módulo de distância, m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta do objeto observado, podemos associar esse desvio a um valor de q_0 negativo, de onde se conclui que o Universo está atravessando uma fase de expansão cósmica acelerada.

¹²para uma dedução detalhada desse resultado vide, por exemplo, Cap. 7 de [20].

Essa observação tem implicações de grande relevância para a Cosmologia; pode ser essa, por exemplo, uma indicação de que a Relatividade Geral não é uma teoria válida para descrever a dinâmica do Universo em largas escalas, sendo portanto necessário sua modificação, ou mesmo, substituição. Assumindo, por outro lado, que a Relatividade Geral é uma teoria válida em largas escalas, precisamos considerar uma nova forma de energia, com pressão suficientemente negativa para estar de acordo com os dados observacionais citados acima, a assim chamada *energia escura*.

Esses resultados foram confirmados por uma série de outras observações [35], incluindo os resultados do satélite espacial WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Lançado em 2001, sob a liderança de Charles L. Bennett, esse experimento deu continuidade às análises iniciadas pelo COBE e seus resultados permitiram avaliar precisamente muitos parâmetros cosmológicos [36, 37, 38]. Segundo a análise mais recente, que inclui sete anos de operação¹³, o WMAP7 [39], o parâmetro de Hubble é estimado em 70,4 km/s/Mpc e a composição atual do Universo inclui aproximadamente: 4,6% de energia na forma de matéria bariônica e um colossal setor escuro, dividido em 22,7% de matéria escura e 72,8% de energia escura. Nesse sentido, precisamos elaborar uma nova modificação ao MCP, afim de compatibilizar a teoria com os dados observacionais.

Até o presente momento, a natureza do setor escuro e a origem da aceleração cósmica são questões ainda em aberto na Cosmologia; mesmo assim, algumas propriedades desses componentes em largas escalas podem ser determinadas. O setor de matéria (bariônica + escura) deve responder por uma equação de estado nula ($\omega_m = 0$), uma vez que a pressão associada a esse fluido cósmico é nula, e desse modo a equação da continuidade exige que $\rho_m \propto a^{-3}$. Por outro lado, a energia escura deve apresentar uma pressão negativa que, em acordo com os dados observacionais, deve ser vinculada a uma equação de estado $\omega_e \approx -1$; essa

¹³ Alguns dados ainda estão sendo analisados nessa plataforma, que deverão ser complementados pelo satélite espacial PLANCK; em atividade desde fevereiro de 2010.

condição favorece uma gama de alternativas para descrever a energia escura e por seqüência levar o Universo a sua atual fase de aceleração cósmica.

1.4.1 Λ -CDM

A constante cosmológica é um candidato natural a energia escura, uma vez que sua equação de estado $\omega_\Lambda = -1$, está em acordo com os principais resultados observacionais [35, 39]. Uma possível extensão do MCP que inclui uma constante cosmológica é conhecida na literatura como Λ -CDM¹⁴. Para esse modelo, as equações de Friedmann são dadas por

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3} \right) - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (1.32a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} \left(2 \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3} \right) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.32b)$$

e podemos observar que, quando $\Lambda > 2 \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3}$, o Universo atravessa uma fase de aceleração cósmica.

A evolução do parâmetro de Hubble pode ainda ser reescrita como

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{k0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda 0} \right), \quad (1.33)$$

uma extensão da relação (1.17), onde definimos $\Omega_{\Lambda 0} = \Lambda/(3H_0^2)$, tal que (1.33) reproduz a equação de Friedmann na presença de uma constante cosmológica (1.32a). Esta escolha está em acordo com os dados observacionais para $\Omega_{r0} \approx 8,24 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m0} \approx 0,27$, $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,73$ e $\Omega_{k0} \approx -0.02$, vide [37, 39].

À parte do sucesso observacional preconizado pelo Λ -CDM, a existência de uma constante cosmológica é bastante questionada na literatura, em especial pelo conhecido “problema da constante cosmológica”, já discutido no caso inflacionário e também pelo “problema da coincidência cósmica” que questiona o tamanho preciso que devemos assumir para que a

¹⁴CDM são as iniciais da expressão “Cold Dark Matter”; para uma revisão sobre matéria escura vide [40].

constante cosmológica seja responsável pela aceleração cósmica apenas em um período muito recente da história evolutiva do Universo, não afetando o processo de formação de estruturas, como as galáxias, por exemplo [24, 30].

1.4.2 ϕ -CDM

Uma alternativa à problemática constante cosmológica é a escolha de um modelo dinâmico para energia escura, em que um campo escalar homogêneo e isotrópico responde pela atual aceleração cósmica do Universo. Essa alternativa é considerada no modelo ϕ -CDM, segundo a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} + \mathcal{L}_e(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (1.34)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{L}_e(\phi, \partial_\mu \phi)$ são, respectivamente, a Lagrangeana dos campos de matéria e a Lagrangeana do campo escalar.

Variando (1.34), as equações de campo da gravitação para a métrica FRW são dadas por

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}; \quad (1.35a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \quad (1.35b)$$

onde assumimos que o fluido cósmico se comporta como um fluido perfeito $T^\mu_\nu = (\rho, -p, -p, -p)$. Essas equações são as já definidas equações de Friedmann, porém agora a densidade de energia $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi$ e a pressão $p = p_r + p_m + p_\phi$, onde ρ_ϕ e p_ϕ são a densidade e pressão do campo escalar, respectivamente.

Reescrevendo a equação da aceleração (1.35b) em termos dos componentes do fluido cósmico, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} \left(2 \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \frac{\rho_{m0}}{a^3} + \rho_\phi(1 + 3\omega_\phi) \right)$$

e desde que, por definição, ρ_ϕ é uma quantidade positiva, a equação de estado ω_ϕ deve ser suficientemente negativa, afim de que $\ddot{a} > 0$.

No caso especial em que o campo escalar ϕ admite uma dinâmica padrão, conhecido como modelo de quintessência, a Lagrangeana na ação (1.34) é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

e podemos determinar a densidade de energia e pressão do campo escalar, a partir de (1.26), como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi).$$

Neste caso a equação de estado $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$ é dada por

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)},$$

que pode variar no intervalo $[-1, 1]$, incluindo o vínculo observacional $\omega_e \approx -1$. Uma escolha apropriada da dinâmica do campo também permite uma transição entre uma fase desacelerada a uma fase acelerada do Universo, o que vincula o problema da “coincidência cósmica” à solução do campo escalar.

Por outro lado, o campo escalar associado à energia escura não precisa necessariamente estar ligado a uma dinâmica padrão; outras possibilidades de interesse são abordadas na literatura - vide, por exemplo, [7, 41]. O caso em que a dinâmica do campo escalar segue uma dinâmica taquiônica, segundo a Lagrangeana

$$\mathcal{L}_t = -V(\phi) \sqrt{1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}.$$

também pode ser considerada como alternativa à constante cosmológica. Substituindo \mathcal{L}_t em (1.10) obtemos

$$T_{\mu\nu} = \frac{V(\phi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} + g_{\mu\nu} V(\phi) \sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}.$$

A densidade de energia e a pressão do campo escalar são nesse caso¹⁵

$$\rho_t = T^0_0 = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \quad \text{e} \quad p_t = -T^1_1 = -V(\phi)\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}, \quad (1.36)$$

de modo que a equação de estado é dada por,

$$\omega_\phi = -1 + \dot{\phi}^2,$$

limitada agora ao intervalo $[-1, 0]$ - vide [42].

Apesar de reproduzir com bastante precisão os dados observacionais, a natureza dos campos escalares nunca foi confirmada experimentalmente. Além disso, a liberdade oferecida pelos dados para a escolha da dinâmica do campo escalar limita uma resposta mais eficiente para o problema da coincidência cósmica e torna o estudo da energia escura ainda mais instigante e desafiador.

¹⁵como antes $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3$.

Capítulo 2

Formalismo de Primeira Ordem

Neste capítulo, apresentamos um procedimento que auxilia à procura e análise de modelos cosmológicos em que a energia escura do Universo é descrita por um campo escalar. A proposta é baseada na redução de ordem das equações de movimento e tem relevância no estudo de soluções analíticas em Cosmologia. Em um primeiro momento, vamos explorar um Universo dominado por essa energia escura; inicialmente para o caso em que o campo escalar segue uma dinâmica padrão e então estendemos o procedimento para o caso de uma dinâmica taquiônica. A presença de um componente de matéria escura como poeira também é estudada neste capítulo, que segue os resultados apresentados em [8, 9].

2.1 Formalismo de Primeira Ordem e Energia Escura

A inclusão de um campo escalar representando o conteúdo de energia escura no MCP (ϕ -CDM) nos permite explorar soluções cosmológicas baseadas nas equações de movimento associadas à dinâmica desse campo escalar, o que de um modo geral se resume a resolver um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Uma possível simplificação na obtenção dessas soluções pode ser conseguida realizando uma redução de ordem dessas

equações de movimento; uma técnica já conhecida na literatura¹ e introduzida em modelos de energia escura por Bazeia et al. na Ref. [9].

Nessa referência, Bazeia et al. consideram um modelo em que a densidade de energia do Universo é dominada por um conteúdo de energia escura, descrita por um campo escalar real, segundo a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (2.1)$$

sendo $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ a Lagrangeana dos campos escalares. Assumimos que o Universo se comporta como um fluido perfeito em um espaço homogêneo e isotrópico, descrito pela métrica FRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right),$$

onde Ω identifica a parte angular, para o qual $T^\mu_\nu = (\rho, -p, -p, -p)$, e com isso as equações de campo da gravitação ficam reduzidas às conhecidas equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}; \quad (2.2a)$$

$$\dot{H} = -(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \quad (2.2b)$$

Considerando um modelo de quintessência, em que o campo escalar admite uma dinâmica padrão, a Lagrangeana na ação (2.1) é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.3)$$

que permite determinar a densidade de energia e pressão do campo escalar como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V, \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V.$$

Nesse caso, a equação de estado total $\omega = p/\rho$, onde ρ e p são a densidade de energia e pressão totais, é equivalente à equação de estado do campo escalar $\omega = \omega_\phi$, dada por

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V},$$

¹especialmente no estudo de defeitos topológicos [43, 44].

sendo limitada ao intervalo $[-1, 1]$, incluindo a condição $\omega < -1/3$ de um Universo acelerado e dominado por uma energia escura. Essa descrição não é rigorosa no sentido de que sabemos que a evolução cosmológica é mais complexa; não estamos considerando, por exemplo, a presença de matéria, escura ou bariônica; mesmo assim essa proposta se justifica - da mesma maneira que se justifica definir uma fase dominada por matéria ou por radiação para o Universo primordial - propondo um estudo em primeira análise do problema. Mais à frente, implementaremos o nosso modelo de Universo incluindo um termo de poeira que responderá pelo conteúdo de matéria (bariônica + escura).

Sendo $\rho = \rho_\phi$ e $p = p_\phi$ podemos agora reescrever as equações de Friedmann como

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}; \quad (2.4a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (2.4b)$$

Combinando essas relações obtemos o potencial associado à evolução cosmológica,

$$V(a) = \frac{3}{2} H^2 + \frac{1}{2} \dot{H} + \frac{k}{a^2}; \quad (2.5)$$

uma função explícita do fator de escala, desde que $H = H(a)$.

Equação de movimento

Uma dedução mais formal da equação de movimento do campo escalar, governado pela Lagrangeana (2.3), pode ser realizada considerando que a dinâmica desse campo escalar é vinculada ainda às equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

de modo que

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = \square \phi + V_\phi = 0.$$

O índice ϕ representa derivada com relação ao campo. Da definição de conexão afim, podemos mostrar que² $\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma = \partial_\mu(\ln \sqrt{-g})$, logo a derivada covariante de um vetor, $A^\mu_{;\mu}$, fica determinada por

$$A^\mu_{;\mu} = \partial_\mu A^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma A^\nu \implies A^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu).$$

Se considerarmos A^μ como o gradiente do nosso campo escalar, então $A^\mu_{;\mu}$ representa o laplaciano covariante de ϕ e obtemos

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (2.6)$$

de modo que podemos escrever

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + V_\phi = 0.$$

Uma vez que consideramos a métrica FRW, chegamos à equação de movimento do campo escalar, na forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (2.7)$$

Diferentemente da relação (2.5), aqui o potencial é visto como uma função explícita do campo escalar. Dessa relação emerge uma equação da continuidade, que pode ser vista como consequência da conservação do tensor energia-momento, já definido como $T^\mu_\nu = (\rho, -p, -p, -p)$. De fato,

$$T^\mu_{o;\mu} = \partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0 \implies \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.8)$$

Essa expressão também pode ser encontrada diretamente das equações de Friedmann, como vimos no capítulo 2.

²vide [19], para mais detalhes dos cálculos subseqüentes.

Formalismo de primeira ordem - O método

O sistema de equações que precisamos resolver para obtenção de soluções nesse modelo é formado pelas equações de Friedmann (2.2) e pela equação de movimento (2.7). Essa não é uma tarefa simples, mesmo considerando um único fluido dominando o conteúdo de energia do Universo, mas que pode ser minimizada com a introdução do método de redução de ordem das equações de movimento.

O ponto de partida na construção do formalismo de primeira ordem é assumir que o parâmetro de Hubble pode ser escrito como uma função do campo escalar

$$H(a) = W(\phi). \quad (2.9)$$

Essa suposição é razoável, uma vez que o potencial pode ser obtido como uma função do fator de escala $V(a)$, o que nos permite escrever $V(\phi) = V(\phi(a))$, sendo $\phi(a)$ uma função inversível.

Com o interesse de melhor explorar as consequências da definição (2.9) vamos analisar a seguir uma solução de espaço plano em nosso modelo.

2.1.1 Solução de Espaço Plano

Fazendo $k = 0$ nas relações (2.4a) e (2.4b)

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V; \quad (2.10a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 \quad (2.10b)$$

e desde que $H = W(\phi) \Rightarrow \dot{H} = W_\phi \dot{\phi}$, podemos escrever

$$\dot{\phi} = -W_\phi; \quad (2.11)$$

uma equação diferencial de primeira ordem, assim como (2.9). Desse modo, conhecido $W(\phi)$, precisamos agora resolver duas equações diferenciais de primeira ordem, o que fundamenta o formalismo.

O potencial que descreve a evolução cósmica, nesse caso, é obtido a partir das relações (2.10) e (2.11) como segue³,

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V \implies V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.12)$$

Essa formulação tem importantes implicações na presença de inomogeneidades no espaço-tempo, porém aqui apresentamos sua versão homogênea aplicada à Cosmologia do espaço plano - vide [22].

De agora em diante preferimos definir o parâmetro de aceleração cósmica \bar{q} , ao invés do parâmetro de desaceleração cósmica, relacionados por $q = -\bar{q}$, tal que [46]

$$\bar{q} = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.13)$$

Substituindo as relações (2.9) e (2.11) esse parâmetro é, nesse caso

$$\bar{q} = 1 - \left(\frac{W_\phi}{W} \right)^2. \quad (2.14)$$

Para a escolha do potencial dado por (2.12), as soluções do conjunto de equações (2.9) e (2.11) também resolvem as equações de Friedmann no caso plano (2.10). Isso introduz um novo procedimento em que a evolução do parâmetro de Hubble pode ser avaliada resolvendo o conjunto de equações acima para um determinado W , o que veremos em detalhe em alguns exemplos. O potencial independe do sinal de W ($W = -W \rightarrow V(W) = V(-W)$), de modo que podemos fazer a escolha inicial $H = -W$, e obtemos $\dot{\phi} = W_\phi$, que resulta em outra forma de construir o formalismo. Escolher uma dessas formas não resulta em qualquer perda de generalidade; por conveniência manteremos a escolha $H = W$.

³esse resultado é equivalente a formulação de Hamilton-Jacobi, como estudado inicialmente por D.S. Salopek e J.R. Bond, em modelos de inflação cósmica [45].

Universo oscilante

Para ilustrar a aplicação do formalismo de primeira ordem, vamos apresentar como exemplo uma solução de Universo oscilante, em que uma fase de desaceleração é seguida por uma fase de aceleração, sendo esse ciclo repetido perpetuamente. Uma vez válidas as condições $H = W$ e $\dot{\phi} = -W_{\phi}$, o parâmetro de aceleração cósmica (2.13) pode ser reescrito como

$$\bar{q} = 1 - a^2 \left(\frac{d\phi}{da} \right)^2. \quad (2.15)$$

e desde que, para o caso plano, o parâmetro de aceleração cósmica é relacionado à equação de estado ω por

$$\bar{q} = -\frac{1}{2}(1 + 3\omega),$$

segue que \bar{q} deve respeitar os limites correspondentes ao intervalo $-1 \leq \omega \leq 1$ e devemos ter $-2 \leq \bar{q} \leq 1$, onde $\bar{q} = 1$ corresponde ao limite $\omega = -1$ e $\bar{q} = -2$ corresponde ao limite $\omega = 1$. Desse modo, como \bar{q} não pode variar arbitrariamente para o nosso modelo, $\phi(a)$ deve respeitar essas condições apropriadamente.

Uma possível solução para $\phi(a)$ é dada por $\phi = \sqrt{3} \cos(\ln(a))$, o que nos leva a

$$\bar{q} = 1 - 3 \sin^2(\ln(a))$$

e a partir desse resultado, a evolução da equação do estado com o fator de escala é

$$\omega = -1 + 2 \sin^2(\ln(a)).$$

A evolução do parâmetro de aceleração cósmica e da equação de estado com o fator de escala são mostrados nas Figs. 2.1 e 2.2, respectivamente, sendo $q(a = 1) = -\omega(a = 1) = 1$, como favorecido pelos dados observacionais; em especial as figuras exibem o comportamento exigido para a solução de um modelo de quintessência, quando devemos ter $-1 \leq \omega \leq 1$ ($-2 \leq \bar{q} \leq 1$).

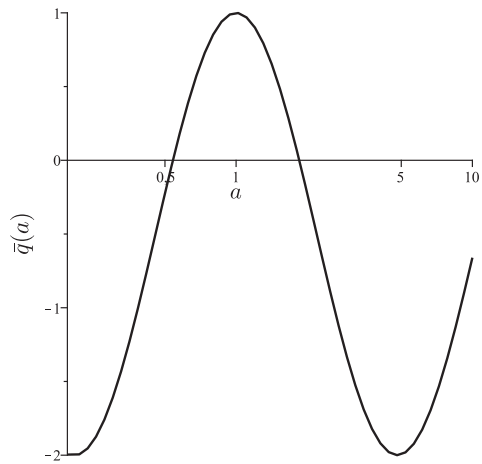


Figura 2.1: Evolução do parâmetro de aceleração cósmica com o fator de escala a , perceba que $\bar{q}(a = 1) = 1$.

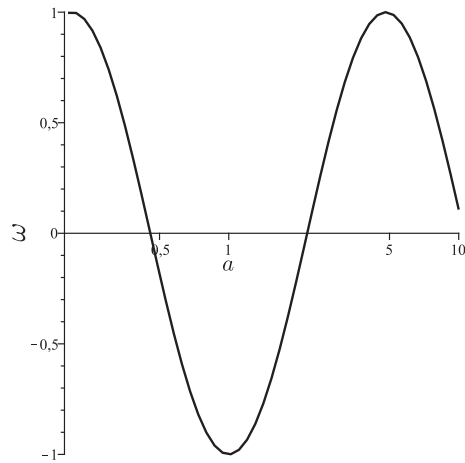


Figura 2.2: Evolução da equação de estado com o fator de escala a , perceba que $\omega(a = 1) = -1$.

O parâmetro de Hubble, nesse caso, é descrito por

$$H = a^{-3/2} \exp \left(\frac{3}{4} \sin(2 \ln(a)) \right),$$

onde a constante de integração foi escolhida de modo que $H_0 = 1$. Combinando esse resultado com o inverso de $\phi(a)$ encontramos

$$W = \exp \left(\frac{1}{2} \sqrt{3 - \phi^2} \phi - \frac{3}{2} \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \phi \right) \right),$$

o que nos leva ao potencial da solução

$$V = \frac{1}{2} \phi^2 \exp \left(\sqrt{3 - \phi^2} \phi - 3 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \phi \right) \right).$$

Esse exemplo ilustra a simplicidade do método, considerando um modelo de Universo plano dominado por quintessência; nesse caso a dinâmica do Universo é determinada a partir da solução escolhida para o campo escalar ϕ , o que nos permite manipular facilmente uma solução de Universo oscilante. Entretanto, a busca por soluções analíticas se torna mais complexa quando incrementamos o nosso modelo de Universo; considerando outros componentes além da quintessência (energia escura), novos vínculos devem ser obedecidos pela solução. Isso pode ser ilustrado, por exemplo, quando consideramos a presença de curvatura em um Universo dominado por quintessência, como fazemos a seguir.

2.1.2 Solução de Espaço Curvo

Reconstruímos agora o formalismo de primeira ordem considerando a presença de curvatura. Mesmo desfavorecido pelos dados observacionais para a presente época do Universo, a curvatura cósmica ainda não pode ser descartada⁴. Podemos incorporar um termo de curvatura como um componente extra do fluido cósmico que altera a estrutura do

⁴a presença de curvatura é importante para descrever fases iniciais do Universo, especialmente no estudo de perturbações no fim da inflação [30], bem como em alguns modelos alternativos à inflação cósmica [47].

formalismo, em maneira similar ao que será apresentado quando considerarmos a presença de matéria (bariônica+escura).

No caso geral em que o espaço-tempo pode ser curvo, o sistema de equações que devemos resolver é agora composto pela equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0$$

e pelas equações de Friedmann, incluindo o termo de curvatura,

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V - \frac{k}{a^2}; \quad (2.16a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (2.16b)$$

Como ponto de partida para obtenção do formalismo de primeira ordem no espaço curvo, assim como fizemos no caso plano, definimos o parâmetro de Hubble como uma função do campo escalar $H = W$, porém agora (2.16b) não nos leva diretamente a relação $\dot{\phi} = -W_{\phi}$. Por outro lado, sendo $\phi(a)$ uma função inversível, podemos ainda definir $\dot{\phi}$ como uma função do campo escalar, ou seja [48],

$$\dot{\phi} = Z, \quad (2.17)$$

uma equação diferencial de primeira ordem para o campo, como no caso plano. Aqui $Z = Z(\phi)$ é uma função, a priori arbitrária, porém com restrições determinadas pelo formalismo. Essa definição tem como consequência imediata a expressão

$$\frac{k}{a^2} = Z(W_{\phi} + Z). \quad (2.18)$$

Desse resultado vemos que $Z = -W_{\phi}$ implica em $k = 0$ e (2.17) fica reduzido à solução de espaço plano $\dot{\phi} = -W_{\phi}$; nesse sentido soluções de espaço curvo devem ser tais que $Z \neq -W_{\phi}$.

A expressão (2.18) permite reescrever

$$V = \frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}\dot{H} + \frac{k}{a^2}$$

e desde que sejam válidas as relações $H = W$ e $\dot{\phi} = Z$, obtemos a forma geral para o potencial, na presença de curvatura, dada por

$$V = \frac{3}{2} (W^2 + W_\phi Z) + Z^2. \quad (2.19)$$

Similarmente ao caso plano, as escolhas $H = W$ e $\dot{\phi} = Z$ resolvem as equações de Friedmann para o potencial (2.19). Entretanto para resolver a equação de movimento (2.7) é necessário considerar a presença do termo de curvatura no cálculo. Prosseguindo a derivação que conduz a cada termo dessa equação, obtemos a condição de consistência

$$2(WW_\phi + ZZ_\phi) + W_{\phi\phi}Z + W_\phi Z_\phi + 2WZ = 0, \quad (2.20)$$

condição essa que reduz a arbitrariedade de $Z(\phi)$ e $W(\phi)$; em especial $Z = -W_\phi$ é uma solução geral de (2.20), o que elimina o vínculo para o caso plano. Esse resultado pode também ser obtido diretamente a partir da definição do parâmetro de Hubble

$$H = -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{a^n} \right), \quad (2.21)$$

desde que seja válida a expressão já estabelecida, $k/a^2 = Z(W_\phi + Z)$. O parâmetro de aceleração cósmica, definido em (2.13), é agora

$$\bar{q} = 1 + \frac{W_\phi Z}{W^2}. \quad (2.22)$$

Energia escura dominante + curvatura

Afim de ilustrar o procedimento, apresentamos aqui uma solução em que o Universo é preenchido por uma quintessência, representando a energia escura dominante, considerando a presença de curvatura. No caso curvo é necessário que uma solução, envolvendo as funções $W(\phi)$ e $Z(\phi)$, resolva o vínculo (2.20). Inicialmente fazemos a escolha $Z = A - W_\phi$, de modo que o vínculo fica reduzido a

$$W_{\phi\phi} - 2W = 0, \quad (2.23)$$

em que $W = A \cosh(\sqrt{2}\phi)$ é uma solução da equação diferencial, sendo A um parâmetro positivo. Podemos então resolver a equação diferencial $\dot{\phi} = Z = A - W_\phi$ e obtemos a evolução do campo escalar com o fator de escala

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{k}{A^2 a^2} \right) \right]. \quad (2.24)$$

O potencial associado a esta solução é dado por

$$V = \frac{A^2}{2} \left[\sinh(\sqrt{2}\phi)(\sinh(\sqrt{2}\phi) - \sqrt{2}) + 5 \right] \quad (2.25)$$

e pode ser estudado como uma extensão daquele analisado em [49, 50], para o caso em que o termo de curvatura é considerado.

Combinando o inverso de (2.24) com a solução $W = A \cosh(\sqrt{2}\phi)$ chegamos a

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2} A \sqrt{2 + \left(1 - \frac{k}{A^2 a^2} \right)^2}, \quad (2.26)$$

de modo que para $k = 0$ o parâmetro de Hubble é uma constante e temos $\bar{q} = 1$; para uma escolha geral de k , entretanto, o parâmetro de aceleração cósmica tem a forma

$$\bar{q} = 1 + 2 \frac{k}{A^2 a^2} \left(1 - \frac{k}{A^2 a^2} \right) \Bigg/ \left[2 + \left(1 - \frac{k}{A^2 a^2} \right)^2 \right], \quad (2.27)$$

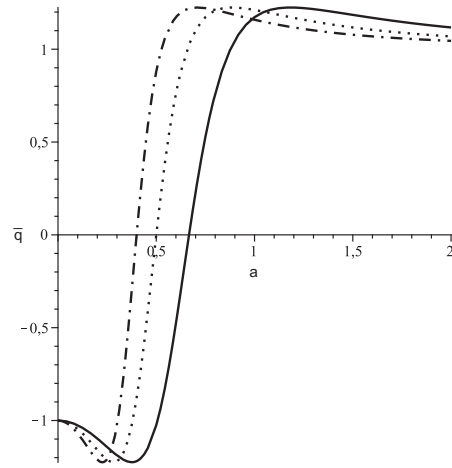
o que determina a evolução da equação de estado, uma vez que sabemos ser

$$\omega = -\frac{1}{3} \left(1 + 2 \frac{H^2}{H^2 + k/a^2} \bar{q} \right), \quad (2.28)$$

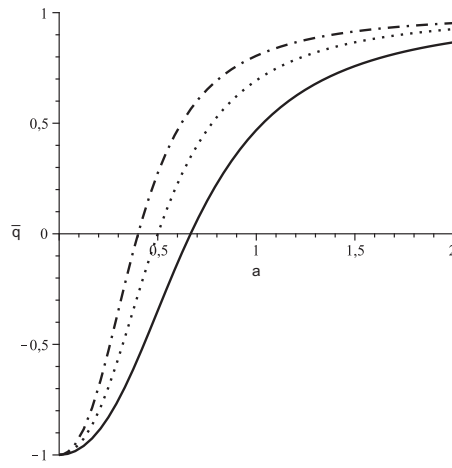
sendo nesse caso

$$\omega = -1 + \frac{4}{3} \frac{k^2}{3A^4 a^4 + k^2}. \quad (2.29)$$

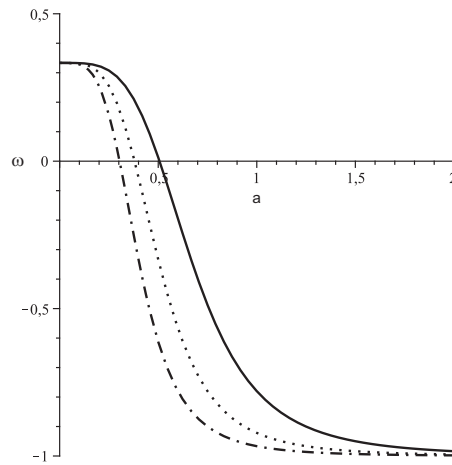
Na Fig. 2.3 mostramos o comportamento de \bar{q} e ω para alguns valores específicos de A . A aceleração e a equação de estado mudam de sinal, indicando que a evolução cósmica segue de uma fase desacelerada para uma fase acelerada. Para o caso $k = 1$, o parâmetro de aceleração apresenta um setor em que $\bar{q} > 1$, um efeito que apenas é possível devido à presença de



a.



b.



c.

Figura 2.3: Comportamento da aceleração cósmica (2.27) para $k = 1$ (a.), $k = -1$ (b.), e da equação de estado (2.29) (c.); uma linha sólida, tracejada ou sólido-tracejada indica o redshift de aceleração $z_{acc} = 0,5$, $z_{acc} = 1$ ou $z_{acc} = 1,5$, respectivamente.

curvatura⁵; nesta solução, a geometria esférica. Para o caso hiperbólico, $-1 \leq \bar{q} \leq 1$. Observe ainda que a evolução da equação de estado é uma função de k^2 e não muda com a escolha da geometria.

O redshift de aceleração, que mede o redshift da transição da fase desacelerada para a fase acelerada, é escrito como

$$z_{acc} = -1 + (1, i) \frac{3^{1/4} A}{\sqrt{k}}, \quad (2.30)$$

onde temos $z_{acc} = -1 + 3^{1/4} A/\sqrt{k}$ para a geometria esférica e $z_{acc} = -1 + i 3^{1/4} A/\sqrt{k}$ para a geometria hiperbólica. Desse modo é possível fitar o parâmetro A , como foi feito na Fig. 2.3 - vide [52, 53, 54].

2.2 Dinâmica Taquiônica

A proposta de descrever a energia escura como um campo escalar homogêneo e isotrópico que permeia todo o Universo como um fluido perfeito, essencialmente não exige que esse campo escalar admita uma dinâmica padrão, como apresentada por (2.3). Levantamos essa possibilidade considerando que o campo escalar ϕ possa admitir uma dinâmica taquiônica, sendo a Lagrangeana associada [55]

$$\mathcal{L}_t = -V(\phi) \sqrt{1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}. \quad (2.31)$$

A proposta da Lagrangeana acima advém do estudo de cordas cósmicas, quando A. Sen [56] sugeriu a presença de condensados taquiônicos, no decaimento de D-branas, com as características de um gás sem pressão, com densidade de energia finita, como uma poeira clássica. Campos taquiônicos também têm despertado o interesse da comunidade científica em estudos de unificação de matéria e energia escura; de acordo com esses modelos, todo o setor escuro é descrito por um único fluido, associado à dinâmica do campo escalar - vide [57].

⁵essa não é uma evidência de uma fase Quintom do Universo [51], desde que a equação de estado descrevendo a energia escura continua limitada ao intervalo $[-1, 1]$, não extrapolando, portanto, o limite $\omega_e = -1$.

Como sabemos, a densidade de energia e a pressão para campos taquiônicos, (1.36), são

$$\rho_t = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \quad \text{e} \quad p_t = -V(\phi)\sqrt{1 - \dot{\phi}^2},$$

sendo a equação de estado,

$$\omega_t = -1 + \dot{\phi}^2, \quad (2.32)$$

limitada ao intervalo $-1 \leq \omega_t \leq 0$ [42]. Desse modo, as equações de Friedmann (2.2) resumem-se agora a

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \frac{k}{a^2}; \quad (2.33a)$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} V + \frac{k}{a^2} \quad (2.33b)$$

e essas relações permitem verificar que o potencial taquiônico tem a forma

$$V = \frac{(1 - \dot{\phi}^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2} \left(\frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}\dot{H} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.34)$$

Uma expansão em primeira ordem com relação ao termo cinético na Lagrangeana para táquions (2.31) leva imediatamente a Lagrangeana padrão (2.3), essa correspondência é refletida no cálculo do potencial taquiônico que se reduz ao potencial padrão (2.5), quando realizamos essa expansão.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange a (2.31) e considerando que o d'alembertiano covariante tem a forma dada em (2.6), podemos mostrar que a equação de movimento para um campo escalar taquiônico é dada por

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2) \left(3H\dot{\phi} + \frac{V_{\phi}}{V} \right) = 0; \quad (2.35)$$

essa equação é equivalente a uma equação da continuidade e pode ser obtida diretamente de (2.8); uma consequência da definição do campo escalar taquiônico, como um fluido perfeito globalmente isotrópico, que permeia o Universo, porém sob entropia constante.

2.2.1 Solução de Espaço Plano para Campos Taquiônicos

Assim como no caso padrão, vamos analisar inicialmente a proposta mais simples, em que a densidade de energia do Universo é dominada por um campo escalar seguindo uma dinâmica taquiônica.

Considerando $k = 0$, as equações de Friedmann ficam reduzidas a

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}; \quad (2.36a)$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} V. \quad (2.36b)$$

Eliminando o potencial nessas expressões podemos obter,

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.37)$$

Com o objetivo de construir um formalismo de primeira ordem para o caso taquiônico plano, vamos novamente considerar a escolha $H = W \rightarrow \dot{H} = W_\phi \dot{\phi}$; o que implica em

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{W_\phi}{W^2}, \quad (2.38)$$

uma equação diferencial de primeira ordem, completamente determinada se conhecemos a função $W(\phi)$.

Substituindo esses resultados em (2.34), determinamos o potencial taquiônico para o caso plano

$$V = \frac{3}{2} W^2 \left[1 - \frac{4}{9} \left(\frac{W_\phi}{W^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.39)$$

sendo agora o parâmetro de aceleração cósmica, definido em (2.13), dado por

$$\bar{q}_t = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{W_\phi}{W^2} \right)^2. \quad (2.40)$$

Para $W = \text{const.} \neq 0$ temos $\bar{q}_t = -\omega = 1$. Nesse caso, $\dot{\phi} = 0$ e o potencial $V = (3/2)W^2$ é equivalente a densidade de energia de uma constante cosmológica; considerando, entretanto, $V = 0$ segue $\omega = 0 \rightarrow \bar{q}_t = -1/2$, o que representa a equação de estado, e o correspondente parâmetro de aceleração, de um gás de poeira⁶. Esses resultados podem ser também obtidos considerando $\dot{\phi} = C$, ou melhor, $\phi - \phi_0 = \ln(a/a_0)^C$; em especial, para $C = \sqrt{2/3}$, o parâmetro de aceleração é nulo $\bar{q}_t = 0 \rightarrow \omega = -1/3$.

A escolha do potencial (2.39) resolve a equação de movimento (2.35), desde que $H = W$ e $\dot{\phi} = -2W_\phi/(3W^2)$ sejam válidas. Também no caso taquiônico o potencial não é alterado por um sinal na definição $H = W$ e podemos ter equivalentemente $H = -W \rightarrow \dot{\phi} = 2W_\phi/(3W^2)$.

Energia escura taquiônica dominante

Como no caso plano não existe uma condição de consistência a ser estabelecida⁷, podemos escolher livremente uma forma específica para W . Para explorar o formalismo neste caso vamos considerar, por exemplo, a solução

$$\phi(a) = \text{arccsch}(Ba),$$

tal que a evolução da equação de estado é descrita por

$$\omega = -1 + \frac{1}{1 + B^2 a^2}, \quad (2.41)$$

sendo o parâmetro de aceleração cósmica

$$\bar{q} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{(1 + B^2 a^2)}. \quad (2.42)$$

Para essa solução

$$W = \cosh(\phi)^{3/2}$$

⁶condição necessária aos modelos de unificação de matéria e energia escura [57].

⁷lembre-se que a equação de movimento é resolvida para as escolhas consideradas.

e o potencial associado tem a forma

$$V = \frac{3}{2} \cosh^3(\phi) \sqrt{1 - \tanh^2(\phi) \operatorname{sech}^3(\phi)}.$$

Nesse caso, o parâmetro de Hubble evolui de acordo com a relação

$$H = (1 + B^2 a^2)^{3/4}.$$

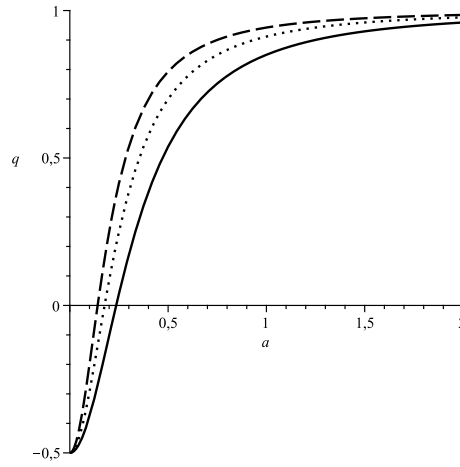


Figura 2.4: Comportamento da aceleração cósmica (2.42).

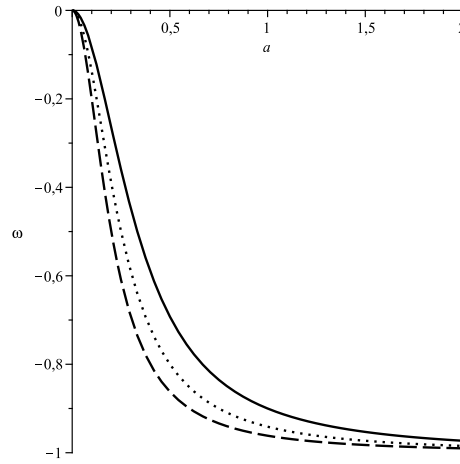


Figura 2.5: Comportamento da equação de estado (2.41).

Nas Figs. 2.4 e 2.5 apresentamos o comportamento da equação de estado e do parâmetro de aceleração cósmica com o fator de escala. Em especial, observamos que o parâmetro de

aceleração cósmica muda de sinal, indicando a transição de uma fase desacelerada para uma fase acelerada.

Assim como no caso plano para uma energia escura dominante guiada por um campo escalar padrão, também é possível apresentar uma solução de Universo oscilante quando o campo segue uma dinâmica taquiônica; considerando, por exemplo, a solução $\phi(a) = \sin(\ln(a))$. Os cálculos que seguem essa dedução são bastante similares àqueles apresentados anteriormente e podem ser verificados facilmente.

2.2.2 Solução de Espaço Curvo para Campos Taquiônicos

Seguindo as mesmas motivações que levaram a considerar a presença de curvatura no caso em que o campo escalar segue uma dinâmica padrão, vamos agora estender o formalismo de primeira ordem ao caso em que a energia escura é descrita por uma dinâmica taquiônica na presença de curvatura. Consideramos, como antes

$$H = W, \quad \dot{\phi} = Z. \quad (2.43)$$

Combinando as equações de Friedmann (2.36), de modo a eliminar o potencial, as escolhas (2.43) nos permite escrever

$$\frac{k}{a^2} = \frac{W_\phi Z + (3/2)Z^2 W^2}{1 - (3/2)Z^2}. \quad (2.44)$$

De acordo com essa relação $Z = -(2/3)W_\phi/W^2$, sendo ainda $Z \neq (2/3)^{1/2}$, implica em $k = 0$ e as escolhas (2.43) reduzem-se ao formalismo de primeira ordem para o caso plano [9]. Nesse sentido, soluções para o espaço curvo devem ser obtidas, de modo que $Z \neq -(2/3)W_\phi/W^2$.

Substituindo (2.43) e (2.44) na expressão geral do potencial taquiônico (2.34), chegamos a

$$V = \frac{3}{2} (1 - Z^2)^{1/2} \left(W^2 + \frac{W_\phi Z + \frac{3}{2} W^2 Z^2}{1 - \frac{3}{2} Z^2} \right), \quad (2.45)$$

e agora podemos determinar a condição de consistência, a partir da equação de movimento (2.35)

$$Z \left(1 - \frac{3}{2} Z^2 \right) (W_{\phi\phi} + 3W^3) + \left(1 + \frac{3}{2} Z^2 \right) Z_{\phi} W_{\phi} + 2 \left(1 - \frac{9}{4} Z^4 \right) W W_{\phi} + 3 Z Z_{\phi} W^2 = 0. \quad (2.46)$$

Uma solução geral dessa equação diferencial é dada por $Z = -(2/3)W_{\phi}/W^2$, com $Z \neq (2/3)^{1/2}$, o que está de acordo com a ausência do vínculo para o caso plano.

Para esse modelo, o parâmetro de aceleração cósmica é dado por

$$\bar{q}_t = 1 + \frac{W_{\phi} Z}{W^2}. \quad (2.47)$$

Energia escura taquiônica dominante + curvatura

Afim de ilustrar a presença de curvatura neste cenário, vamos analisar alguns exemplos. Inicialmente, considerando $Z = \text{const.} = C$, podemos verificar que

$$W = \frac{1}{A\phi + B} \quad (2.48)$$

resolve a condição de consistência (2.46), para $C = 1/A$. Neste caso, o potencial taquiônico (2.45) é identicamente nulo, $V = 0$, e o campo escalar evolui de acordo com

$$\phi = \frac{-B + a/\sqrt{-k}}{A}. \quad (2.49)$$

A partir desse resultado obtemos o parâmetro de Hubble $H = \sqrt{-k}/a$, que implica em um Universo estacionário $\bar{q} = 0$, sendo a equação de estado total $\omega = -1 + 1/A^2$.

Mantendo a escolha $Z = C$, podemos ainda obter uma solução de interesse, desde que

$$W = \left(\frac{\alpha}{\phi} + \beta\phi \right)^{-1}, \quad (2.50)$$

também resolve a condição de consistência, segundo as escolhas $C = \sqrt{3}/3$ e $\beta = \sqrt{3}/2$. A evolução temporal do campo taquiônico segue $\phi = (\sqrt{3}/3)t$ e o potencial é agora dado por⁸

$$V = \frac{\sqrt{2}}{\alpha + \beta\phi^2}. \quad (2.51)$$

O parâmetro de Hubble associado a evolução cósmica, pode ser determinado como

$$H = \left[-k \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\alpha\beta k}} \right) \right]^{1/2} \frac{1}{a}, \quad (2.52)$$

o que nos permite escrever o parâmetro de aceleração cósmica, na forma

$$\bar{q} = 1 - \frac{\sqrt{\alpha\beta k} + a/2}{\sqrt{\alpha\beta k} + a}. \quad (2.53)$$

Para essa solução, a relação (2.28), ou (2.41), implica em uma equação de estado total constante, $\omega = -2/3$.

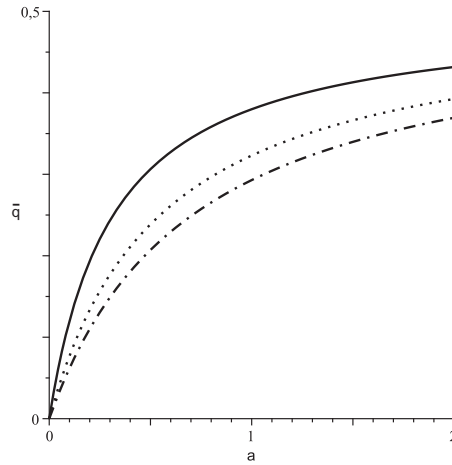


Figura 2.6: Comportamento da aceleração cósmica (2.53) para $\alpha = -0.1$ (linha sólida), $\alpha = -0.2$ (linha tracejada) e $\alpha = -0.3$ (linha sólido-tracejada).

O comportamento da aceleração cósmica \bar{q} é mostrado na Fig. 2.6 e podemos observar que no limite $a \gg 1$ o parâmetro de aceleração tende assintoticamente a $1/2$.

⁸esse potencial é conhecido na literatura e aparece de maneira recorrente em vários estudos envolvendo campos taquiônicos - vide, por exemplo, [58].

2.3 Formalismo de Primeira Ordem para Energia Escura e Matéria

Exploramos agora um modelo de Universo mais realístico, em que consideramos, além de energia escura, também o conteúdo de matéria não relativística, incluindo tanto matéria bariônica quanto matéria escura. A proposta de uma matéria escura não relativística (poeira), em largas escalas, é uma aproximação razoável, uma vez que o processo de formação de galáxias e aglomerados de galáxias é mais bem representado em um cenário de matéria escura fria [30, 59]. Assumindo ainda que a energia escura do Universo é descrita por um campo escalar, compondo o fluido cósmico espalhado homogêneo e isotropicamente no Universo, podemos identificar esse modelo ao conhecido ϕ -CDM e passamos à questão de interesse de aplicar a esse modelo o formalismo de primeira ordem, desenvolvido nas seções anteriores.

Em nossa análise, vamos descartar a presença dos termos de curvatura e radiação, tanto em razão da pequena contribuição em relação a totalidade da densidade de energia do Universo ($\Omega_{k0} \lesssim 10^{-3}$, $\Omega_{r0} \approx 10^{-5}$), como pela própria dificuldade em obter soluções analíticas em um Universo multifluido com mais de dois componentes. Desse modo, a densidade de energia total do Universo pode ser escrita como $\rho = \rho_e + \rho_m$, onde os índices e e m são relativos ao conteúdo de energia escura e matéria, respectivamente. Nessa relação $\rho_m(a) = \bar{\rho}/a^3$, onde $\bar{\rho}$ é uma constante real positiva, descrevendo a densidade de energia da matéria não relativística hoje ($a = 1$). Também temos $p = p_e$, desde que $p_m = 0$; matéria não relativística⁹ apresenta pressão nula. As equações de Friedmann são agora

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho_e + \frac{2}{3}\frac{\bar{\rho}}{a^3}; \quad (2.54a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho_e + 3p_e) - \frac{1}{3}\frac{\bar{\rho}}{a^3}. \quad (2.54b)$$

⁹durante o nosso texto, entenda “matéria não relativística = poeira”; de fato, para um gás ideal com pressão nula, no limite não relativístico $\omega_m = 2/3$.

Inicialmente vamos escolher uma dinâmica padrão para o campo escalar, tal que

$$\rho_e = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad p_e = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \quad (2.55)$$

A equação de movimento tem a conhecida forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (2.56)$$

Substituindo a densidade de energia e pressão do campo nas Eqs. (2.54) chegamos a

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V + \frac{2}{3}\frac{\bar{\rho}}{a^3}; \quad (2.57a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 - \frac{\bar{\rho}}{a^3}, \quad (2.57b)$$

Assim, o conjunto de Eqs. (2.56) e (2.57) constitui o sistema que precisamos resolver no caso em que o campo escalar admite uma dinâmica padrão.

Seguindo as escolhas feitas nas seções anteriores escrevemos $H = W$ e $\dot{\phi} = Z$. No entanto, para fazer com que os resultados apresentados estejam em acordo com [8] vamos aqui considerar que W e Z têm formas específicas e escolhemos

$$H = W + \alpha\bar{\rho}Z; \quad (2.58a)$$

$$\dot{\phi} = -W_\phi - \beta\bar{\rho}Z_\phi, \quad (2.58b)$$

onde $W = W(\phi)$ e $Z = Z(\phi)$ são em princípio funções arbitrárias de ϕ ; α e β são constantes e consideramos $\alpha \neq \beta$. Rigorosamente, deveríamos escrever $W = \tilde{W} + \alpha\bar{\rho}\tilde{Z}$ e $Z = -\tilde{W}_\phi - \beta\bar{\rho}\tilde{Z}_\phi$; vamos omitir essa notação e continuamos a escrever como em (2.58).

As equações de Friedmann (2.57) combinadas com a escolha (2.58) nos permite obter o potencial associado à evolução cósmica, na forma

$$V = \frac{3}{2}(W + \alpha\bar{\rho}Z)^2 - \frac{1}{2}(W_\phi + \beta\bar{\rho}Z_\phi)[W_\phi + (2\alpha - \beta)\bar{\rho}Z_\phi]. \quad (2.59)$$

A presença de um termo de matéria faz aparecer novas interações, descritas pelas funções $W(\phi)$, $Z(\phi)$ e suas derivadas, emergindo agora um novo vínculo entre essas funções, de modo que a equação de consistência

$$W_\phi Z_{\phi\phi} + W_{\phi\phi} Z_\phi + 2\beta\bar{\rho}Z_\phi Z_{\phi\phi} - 3\alpha\bar{\rho}ZZ_\phi - 3WZ_\phi = 0 \quad (2.60)$$

deve ser obedecida para uma solução qualquer do modelo. Nesse sentido, as soluções obtidas a partir do formalismo de primeira ordem dependem da maneira com que o conteúdo de energia escura e de matéria interagem entre si. Na ausência do termo de matéria, o potencial acima se torna $V = (3/2)W^2 - (1/2)W_\phi^2$, e o formalismo fica reduzido ao caso mais simples, de quintessência dominante [9, 60].

A partir da definição do parâmetro de aceleração cósmica $\bar{q} = 1 + \dot{H}/H^2$, podemos também obter

$$\bar{q} = 1 - \frac{(W_\phi + \alpha\bar{\rho}Z_\phi)(W_\phi + \beta\bar{\rho}Z_\phi)}{(W + \alpha\bar{\rho}Z)^2}. \quad (2.61)$$

Antes de explorar soluções para o formalismo incluindo poeira, vamos voltar a nossa atenção para o caso em que o campo escalar segue uma dinâmica taquiônica. Neste caso, a densidade de energia e pressão para o campo escalar são

$$\rho_\phi = V/\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}, \quad p_\phi = -V\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}, \quad (2.62)$$

sendo a equação de movimento do campo taquiônico

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2) \left(3H\dot{\phi} + \frac{V_\phi}{V} \right) = 0. \quad (2.63)$$

Considerando um termo de matéria, as Eqs. (2.57) são agora

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\rho}}{a^3}; \quad (2.64a)$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} V - \frac{\bar{\rho}}{a^3}. \quad (2.64b)$$

A presença da raiz quadrada torna o algebrismo um pouco mais intrincado e se insistimos em obter um formalismo de primeira ordem no caso taquiônico, a escolha anterior $H = W + \alpha \bar{\rho} Z$ já não permite escrever uma representação razoável. Entretanto, seguindo a proposta da referência [8], uma solução é possível se agora escolhemos

$$H = \sqrt{W^2 + \frac{2}{3} \alpha \bar{\rho} Z^2}. \quad (2.65)$$

Como antes, α é uma constante e $Z = Z(\phi)$. Neste caso, temos

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{W_\phi}{W \sqrt{W^2 + (2/3) \alpha \bar{\rho} Z^2}} \quad (2.66)$$

e o potencial é dado por

$$V = \frac{3}{2} W^2 \left(1 - \frac{4}{9} \frac{W_\phi^2 / W^2}{W^2 + (2/3) \alpha \bar{\rho} Z^2} \right)^{1/2}. \quad (2.67)$$

As funções W e Z agora obedecem a seguinte condição de consistência:

$$W^3 Z + \frac{2}{3} \alpha \bar{\rho} W Z^3 - \frac{4}{9} W_\phi Z_\phi = 0. \quad (2.68)$$

A equação de estado para energia escura segundo o campo taquiônico é, como já tínhamos obtido, $\omega_e = -1 + \dot{\phi}^2$. Dados observacionais [61] impõem o vínculo $\omega \in [-1.10, -0.98]$, mostrando que $\dot{\phi}$ deve ser próximo de zero. Se considerarmos $\dot{\phi}$ pequeno em relação ao termo potencial, podemos recorrer a aproximação de rolagem-lenta [30, 45, 62] e como foi mostrado na Ref. [63], nesse regime a dinâmica taquiônica é aproximadamente a dinâmica padrão, no espaço plano. Isso permanece válido na presença de um termo de poeira: para o densidade taquiônica (4.13) podemos escrever [64, 65] $-V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{1/2} \approx V(\phi)\dot{\phi}^2/2 - V(\phi) = \dot{\chi}^2/2 - V(\chi)$, onde usamos a redefinição $\chi = f(\phi)$. Nesse sentido, observações tornam o estudo de soluções para o formalismo de primeira ordem em que o campo segue uma dinâmica taquiônica pouco interessante para descrever energia escura, quando consideramos a presença de matéria escura como poeira. Por outro lado, em modelos de unificação de matéria e energia escura, o campo escalar taquiônico representa uma alternativa de interesse na descrição

do setor escuro do Universo; campos escalares seguindo uma dinâmica padrão apresentam dificuldades, neste contexto, relativas à velocidade quadrática do som c_s^2 no processo de formação de estruturas - vide [57].

Energia escura + poeira

Retornamos agora a nossa atenção para uma solução específica do modelo de campo escalar seguindo uma dinâmica padrão, na presença de matéria. Como mencionado antes, trabalhamos no contexto de um Universo plano, de modo que a densidade de energia total é dada pela densidade crítica ρ_c . Em nosso modelo é possível manter α e β arbitrários, com as funções W e Z consistentemente obedecendo ao vínculo (2.60), vamos então explorar, como exemplo, as escolhas $\alpha = 0$ e $Z = W$, por simplicidade. Neste caso, o vínculo (2.60) fica reduzido a $2(1 + \beta\bar{\rho})W_{\phi\phi} - 3W = 0$, que pode ser resolvido para $W = A \cosh(B\phi)$, onde A e B são constantes, sendo $B = \pm\sqrt{3/2(1 + \beta\bar{\rho})}$. O potencial associado a essa solução é dado por

$$V = \frac{3}{4}A^2 \left((1 + \beta\bar{\rho}) \cosh^2(B\phi) + (1 - \beta\bar{\rho}) \right). \quad (2.69)$$

A partir de (2.58b), determinamos a evolução do campo escalar em função do tempo físico

$$\phi(t) = \frac{1}{B} \ln \left(\tanh \left(\frac{3}{4} At \right) \right), \quad (2.70)$$

tal que o fator de escala pode ser escrito como

$$a(t) = \left(-\frac{2}{3\beta A^2} \sinh^2 \left(\frac{3}{2} At \right) \right)^{1/3}. \quad (2.71)$$

Nesse caso, o parâmetro de Hubble é dado por

$$H(t) = A \tanh^{-1} \left(\frac{3}{2} At \right) \quad (2.72)$$

e a densidade de energia total admite a forma

$$\rho(a) = -\frac{\rho_m}{\beta\bar{\rho}} \left(1 - \frac{f(a)}{1 + (1 - f(a))^{1/2}} \right)^2, \quad (2.73)$$

onde $f(a) = \frac{3}{2}\beta A^2 a^3$. As constantes A e β são fixadas, de modo que $\rho(a=1) = \rho_c = 1$ e $\rho_e(a=0) = 0$.

Na Fig. 2.7 mostramos a evolução de $\Omega_e(a) = 1 - \Omega_m(a) = \rho_e/(\rho_e + \rho_m)$ e $\Omega_m(a)$ com o fator de escala a no intervalo $0 \leq a \leq 2$, sendo $a = 1$ hoje. Os gráficos foram plotados para os valores de $A = 0,70$, $\beta = -3,83$, e $\bar{\rho} = 0,26$. Por construção temos $\Omega_e = 0,74$ e $\Omega_m = 0,26$ hoje, apresentando a mesma proporção no passado, para $a = 0,70$.

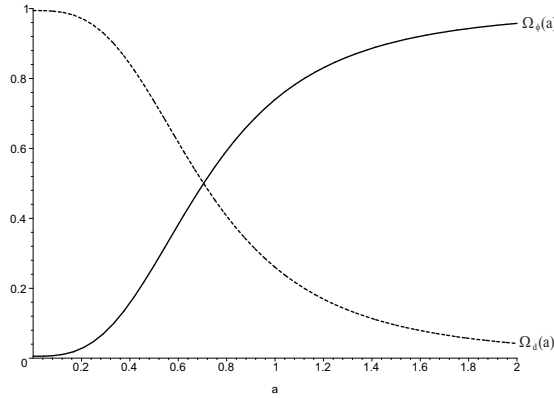


Figura 2.7: Evolução de Ω_e (linha sólida) e Ω_m (linha tracejada) em relação ao fator de escala a , no intervalo $0 \leq a \leq 2$, com $a = 1$ hoje.

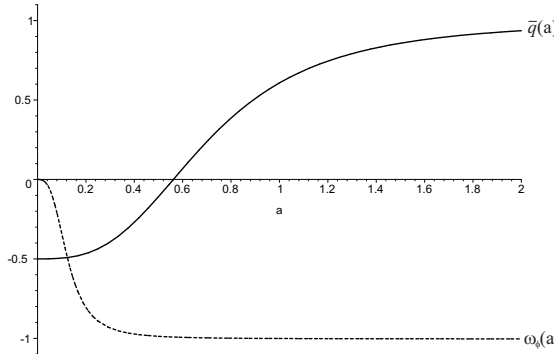


Figura 2.8: Evolução do parâmetro de aceleração cósmica \bar{q} (linha sólida) e da equação de estado para quintessência ω_e (linha tracejada), ambas em função do fator de escala a , no intervalo $0 \leq a \leq 2$, com $a = 1$ hoje.

O parâmetro de aceleração, neste modelo, é dado por

$$\bar{q}(a) = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{1 - f(a)} \quad (2.74)$$

e a evolução da equação de estado para o componente de energia escura é obtida a partir de

$\omega_e = p_e/\rho_e$, que para a solução apresentada pode ser escrito como

$$\omega_e(a) = \frac{4f(a)}{(1 + \beta\bar{\rho}) \left(1 + (1 - f(a))^{1/2}\right)^2 + 2\beta\bar{\rho}f(a)}. \quad (2.75)$$

Na Fig. 2.8 mostramos como o parâmetro de aceleração se comporta como uma função do fator de escala, para os mesmos valores de parâmetros usados anteriormente. Para $a \gg 1$ o parâmetro de aceleração \bar{q} tende a unidade, mudando de sinal, no passado, quando $a = 0,56 \rightarrow z_{acc} \approx 0,8$. Neste redshift, $\Omega_e = 0,34$ e $\Omega_d = 0,66$. A mesma figura apresenta também como a equação de estado $\omega_e(a)$ varia com o fator de escala, a . Em $a = 0,70$, onde $\Omega_e = \Omega_m$, o parâmetro de aceleração e a equação de estado são $\bar{q} = 0,24$ e $\omega_e \approx -1$.

Os resultados da solução apresentada estão em acordo com os dados observacionais. Em particular, a transição da fase desacelerada (“dominada” por matéria) para a fase acelerada (“dominada” por energia escura) ocorre em $a = 0,56$, dentro das estimativas baseadas nos dados [38]. Este modelo ilustra bem a aplicação do formalismo de primeira ordem, limitado a evolução cósmica próxima da época presente, onde radiação não apresenta uma contribuição significativa, mostrando que a inclusão de matéria torna a análise mais interessante e realística.

Capítulo 3

Implicações da Violação de Lorentz em Teorias de Inflação

A inclusão do mecanismo de Higgs no modelo eletrofraco sugere uma quebra de simetria conduzida por um campo escalar assumindo um valor esperado no vácuo não-nulo espontaneamente, o que seria responsável pela geração de massa das partículas fundamentais [66]. Como essa quebra de simetria envolve um campo escalar homogêneo e isotropicamente espalhado no Universo, não ocorre, neste caso, a escolha de uma direção preferencial no espaço, de modo que preservamos a simetria de Lorentz localmente. Esse não é o caso quando consideramos, por exemplo, a presença de um campo vetorial dinâmico; desde que o valor esperado do campo vetorial no vácuo seja não-nulo espontaneamente, temos uma direção preferencial no espaço e assim uma violação da simetria de Lorentz localmente [67, 68, 69]. Nesse sentido, a possibilidade de violação da simetria de Lorentz abre caminho para investigações em física de altas energia e justifica a busca por sinais dessa violação como uma herança de uma fase do Universo inacessível experimentalmente.

De início, a motivação apresentada para a violação da simetria de Lorentz foi voltada ao estudo da teoria dos Parâmetros Pós-Newtonianos (PPN) por C.M. Will e K. Nordtvedt na década de 1970 [67, 68]. Em seguida, M. Gasparini e G. Veneziano [70] sugeriram que essa

violação poderia eliminar as singularidades cosmológicas devidas a geodésicas tipo-tempo no modelo padrão. De acordo com essa teoria, a presença de um campo escalar violando a condição de energia forte pode ser associada a um sistema preferencial de referência, de modo que o campo escalar é associado ao clássico æther [71].

Baseados nas idéias de Will e Nordtvedt [67, 68], T. Jacobson e D. Mattingly [72] propuseram a versão mais bem difundida sobre o estudo da violação da simetria de Lorentz em teorias de gravitação, a teoria do Einstein-æther, em que o æther é um campo vetorial acoplado não minimamente ao tensor métrico, ocupando no máximo derivadas de segunda ordem [71]. De um modo geral, é assumido que a norma do æther tem um valor esperado não-nulo espontaneamente - para mais detalhes vide [72, 73, 74].

O espaço de parâmetros da teoria, até o presente momento, é severamente restrito a vínculos sobre PPN [75], bem como por dados observacionais de pulsares [76]. Alguns vínculos cosmológicos sobre a violação da simetria de Lorentz, no contexto da teoria do Einstein-æther, tem sido investigados por vários autores que mostram ser a teoria consistente com dados observacionais e experimentais dentro do seu espaço de parâmetros. Em pequenas escalas, o campo vetorial do Einstein-æther permite a renormalização da constante de Newton local [77], enquanto sobre largas escalas poderia ser identificado em observações do espectro de galáxias, ou mesmo no espectro de potências do CMB [78, 79, 80] (veja também [81, 82]).

Neste capítulo investigamos uma simples extensão da teoria do Einstein-æther no contexto da inflação cósmica, inicialmente estudada S. Kanno e J. Soda [83], incluindo um campo escalar não minimamente acoplado a gravidade como um ingrediente extra. Assumiremos que esse campo escalar é um campo ínflaton, guiando um período de expansão acelerada no Universo primordial. No decorrer dos nossos cálculos, escolhemos a assinatura $[-, +, +, +]$, afim de que os resultados encontrados estejam em acordo com a Ref. [84].

3.1 A Teoria do Einstein-æther

A teoria do Einstein-æther é descrita pela ação [83]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right), \quad (3.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_V$, sendo \mathcal{L}_m a Lagrangeana padrão dos campos de matéria e \mathcal{L}_V a Lagrangeana que responde pelo setor de violação da simetria de Lorentz, compondo no máximo termos derivativos de segunda ordem, tal que

$$\mathcal{L}_V = K^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \nabla_\mu A^\alpha \nabla_\nu A^\beta + \lambda (A^\mu A_\mu + 1), \quad (3.2)$$

com

$$K^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = -c_1 g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - c_2 \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - c_3 \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu - c_4 A^\mu A^\nu g_{\alpha\beta}.$$

Nessas expressões $g^{\mu\nu}$ representa as componentes do tensor métrico, λ é um multiplicador de Lagrange e A^μ é o campo vetorial fundamental da teoria do Einstein-æther. Sendo esse campo vetorial adimensional, os parâmetros c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) devem ter dimensão de massa ao quadrado, de modo que cada $\sqrt{c_i}$ indica a escala de massa da quebra de simetria [83]; de agora em diante, vamos nos referir a esse campo vetorial apenas como “Einstein-æther”. Perceba que fazendo $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, voltamos ao caso padrão descrito pela Relatividade Geral [81].

Posto que a ação (3.1) é invariante por uma transformação de Lorentz, assumiremos que a invariância de Lorentz é espontaneamente quebrada, com a norma do Einstein-æther adquirindo um valor esperado não nulo no vácuo, $A_\mu A^\mu = -1$; o que define uma direção preferencial no espaço para uma solução particular na teoria. A condição $A_\mu A^\mu = -1$ em \mathcal{L}_V assegura que o Einstein-æther é um campo vetorial tipo-tempo, sendo essa condição necessária para garantir a estabilidade da teoria, como discutido em [73, 85].

Nosso interesse é voltado ao estudo do cenário inflacionário, na presença do Einstein-æther, de modo que vamos aqui considerar uma teoria mais geral - vide [83] - em que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_\phi$, conhecida como teoria Escalar-Vetor-Tensorial. Para essa teoria os coeficientes c_i são agora considerados funções do campo escalar real ϕ , que segue uma dinâmica padrão descrita por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi),$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo escalar.

3.2 Equações de Movimento

Aplicando o princípio variacional à ação (3.1), obtemos as conhecidas equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu},$$

onde $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(A)} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ é o tensor de energia-momento total, sendo $T_{\mu\nu}^{(m)}$, $T_{\mu\nu}^{(A)}$ e $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ os tensores de energia-momento dos campos de matéria, do Einstein-æther e do campo escalar, respectivamente, segundo

$$T_{\mu\nu}^{(\kappa)} = -2\frac{\partial\mathcal{L}^{(\kappa)}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}^{(\kappa)}, \quad \kappa = m, A, \phi. \quad (3.3)$$

Assumindo que o Universo é homogêneo e isotrópico, sendo o elemento de linha do tipo Friedmann-Robertson-Walker, o Einstein-æther deve ser escrito como $A^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Em nosso estudo, estamos interessados em analisar uma fase inflacionária do Universo primordial e consideramos $\mathcal{L}_m = 0$. Nesse caso, os componentes temporal e espacial do tensor energia momento são dados por

$$T^0_0 = -\rho_A - \rho_\phi, \quad T^i_i = p_A + p_\phi,$$

ou melhor,

$$T^0_0 = 3\beta H^2 - \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right), \quad T^i_i = 3\beta H^2 + 2\dot{\beta}H + 2\beta\dot{H} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V$$

onde obtemos $\rho_A = -3\beta H^2$ e $p_A = 3\beta H^2 + 2\dot{\beta}H + 2\beta\dot{H}$ resolvendo (3.3) para a Lagrangeana (3.2) e escrevemos $\beta(\phi) = c_1(\phi) + 3c_2(\phi) + c_3(\phi)$.

Aplicando esses resultados às equações de campo, a dinâmica do Universo passa a ser então inteiramente descrita pelas equações de movimento

$$(1 + 2\beta)H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}; \quad (3.4)$$

$$(1 + 2\beta)\dot{H} = -\dot{\phi}^2 - 2\beta_\phi H\dot{\phi} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.5)$$

Note que a contribuição do termo de curvatura no lado direito de Eq. (3.4) não necessariamente decresce durante inflação. A densidade crítica é dada por

$$\rho_c = \frac{3}{2}(1 + 2\beta)H^2, \quad (3.6)$$

de modo que consideramos o coeficiente $1 + 2\beta > 0$, e podemos reescrever a equação (3.4) como

$$\Omega - 1 = \frac{3k}{2a^2\rho_c} = \frac{k}{a^2(1 + 2\beta)H^2}, \quad (3.7)$$

onde $\Omega \equiv \rho/\rho_c$.

No regime inflacionário, $|\Omega - 1|$ deve ser uma função decrescente em relação ao tempo físico e, nesse caso, (3.7) exige que

$$\frac{d(H^2 a^2 (1 + 2\beta))}{dt} > 0, \quad (3.8)$$

ao invés da condição inflacionária padrão na ausência da violação da simetria de Lorentz $d(H^2 a^2)/dt > 0$. Esse resultado nos leva a uma releitura nas condições necessárias para descrever o regime inflacionário. Por exemplo, sabemos que o parâmetro de aceleração cósmica é dado por,

$$\bar{q} \equiv \frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2H^3 a^2} \frac{d}{dt} (a^2 H^2). \quad (3.9)$$

Se $\bar{q} < 0$ temos uma fase desacelerada e conseqüentemente Ha decresce com o tempo cósmico, t . Por outro lado $\bar{q} > 0$ implica que o Universo está acelerando (inflando) e, neste caso, Ha

é uma função crescente de t . Para $\bar{q} = 1$ o parâmetro de Hubble é constante e a expansão é exponencial, como já tínhamos discutido anteriormente. Se $\bar{q} > 1$ o parâmetro de Hubble cresce com t e temos um regime de superinflação.

Também podemos definir o parâmetro análogo

$$\bar{q}_k \equiv \frac{1}{2H^3 a^2 (1 + 2\beta)} \frac{d}{dt} (a^2 H^2 (1 + 2\beta)) , \quad (3.10)$$

que é maior (menor) do que zero, dependendo se $\Omega = 1$ é um atrator (repulsor) – note que $\bar{q}_k = \bar{q}$ se β é uma constante, mas em geral $\bar{q}_k \neq \bar{q}$. Portanto, podemos ter um regime inflacionário que resolve o problema da homogeneidade, mas não o problema da planura do Universo. A partir de agora assumiremos que o Universo é aproximadamente plano durante a maior parte do regime inflacionário. Conseqüentemente, fazemos $k = 0$ na determinação da evolução de a e ϕ com o tempo físico.

O parâmetro \bar{q}_k pode também ser escrito como

$$\bar{q}_k = \bar{q} + \frac{1}{H} \frac{d}{dt} (\ln(1 + 2\beta)) , \quad (3.11)$$

e vemos que $\bar{q}_k > \bar{q}$ ou $\bar{q}_k < \bar{q}$ dependendo se $d\beta/dt$ é maior ou menor do que zero, respectivamente.

Em nosso estudo, negligenciamos o conteúdo de radiação e poeira no regime inflacionário. Se inflação resolve o problema da planura do Universo, isto é de fato uma aproximação razoável durante boa parte do regime inflacionário, uma vez que a razão entre a densidade de energia do campo escalar

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) , \quad (3.12)$$

e a densidade de energia de poeira e radiação deve crescer consideravelmente durante inflação.

A equação de movimento para o campo escalar, ϕ , pode ser obtida combinando as relações

(3.4) e (3.5), ou mesmo, explicitamente da equação de Euler-Lagrange, de modo que

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + 3H^2\beta_\phi + V_\phi = 0. \quad (3.13)$$

Fazendo $\beta = 0$ retornamos a equação de movimento para a dinâmica padrão, como esperado. A presença do termo $3H^2\beta_\phi$ em (3.13) age como um termo de fricção adicional na dinâmica do campo e, portanto, permite modelos em que o Einstein-æther ocorre de maneira a lentificar a evolução do Universo, como investigado nas Refs. [78, 79, 80].

3.3 Formalismo de Primeira Ordem

Para investigar soluções analíticas dentro do contexto de violação de Lorentz, vamos utilizar o formalismo de primeira ordem introduzido no capítulo anterior. Como antes, assumimos que $\dot{\phi}$ é uma função inversível do campo escalar e podemos escrever $\dot{\phi} = Z(\phi)$. No entanto, seguindo a notação da Ref. [84], consideramos

$$\dot{\phi} = -W_\phi \quad (3.14)$$

e nesse caso, segue que

$$t - t_0 = - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{W_\phi}, \quad (3.15)$$

sendo $W(\phi)$ uma função arbitrária de ϕ . Como antes, note que (3.14) é uma equação diferencial de primeira ordem, enquanto (3.13) é de segunda ordem.

Substituindo a Eq. (3.14) na Eq. (3.5), obtém-se (fazendo $k = 0$)

$$(1 + 2\beta) \frac{dH}{d\phi} = W_\phi - 2\beta_\phi H, \quad (3.16)$$

ou, equivalentemente,

$$H(\phi) = \frac{W(\phi)}{1 + 2\beta(\phi)}. \quad (3.17)$$

onde escolhemos uma constante de integração nula¹. Aqui existe uma família de soluções para $H(\phi)$ (e $W(\phi)$) que corresponde ao mesmo $\beta(\phi)$ e ao mesmo potencial do campo escalar, $V(\phi)$. Isso é resultado da liberdade para fixar a energia cinética do campo escalar em um dado tempo inicial. Estamos também implicitamente assumindo que existe apenas um valor de H correspondendo a cada valor de ϕ . Essa suposição é válida em muitas situações de interesse na Cosmologia, mas pode não ser válida em algumas situações, por exemplo, quando ϕ está oscilando em torno de um mínimo de potencial. Em nosso estudo, analisamos a fase inflacionária em que o inflaton rola sobre o potencial e, portanto, essa suposição é mantida válida.

A evolução do fator de escala em relação ao campo escalar pode ser computada usando as Eqs. (3.14) e (3.17)

$$a(\phi) = a_0 e^{-\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{W}{W_\phi} \frac{d\phi}{1+2\beta}}, \quad (3.18)$$

onde o índice ‘0’ denota que as quantidades físicas são avaliadas em algum tempo inicial t_0 . A partir desse resultado podemos calcular o número de e-foldings da inflação, N , entre ϕ_0 e ϕ_e

$$N = -\int_{\phi_0}^{\phi_e} \frac{W}{W_\phi} \frac{d\phi}{1+2\beta} = \ln \left(\frac{a(\phi_e)}{a_0} \right), \quad (3.19)$$

sendo o índice ‘e’ referido ao fim da inflação cósmica.

O parâmetro de aceleração cósmica \bar{q} é dado por

$$\begin{aligned} \bar{q} &\equiv \frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 1 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) + 1 = \\ &= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1+2\beta}{W} \right) W_\phi + 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

e deve ser maior que zero durante a inflação cósmica. Podemos assim determinar o valor de ϕ no fim do regime inflacionário (ϕ_e) resolvendo a equação $\bar{q}(\phi) = 0$. Para as escolhas

¹alternativamente poderíamos definir inicialmente $H = W$, como procedido em resultados anteriores, e obter $\dot{\phi} = -(2\beta_\phi W + (1+2\beta)W_\phi)$.

realizadas, o parâmetro \bar{q}_k é agora dado por

$$\bar{q}_k = \bar{q} - \frac{\beta_\phi W_\phi}{W}. \quad (3.21)$$

Usando a Eq. (3.4) podemos também obter o potencial associado ao campo escalar

$$V(\phi) = \frac{3}{2} \frac{W^2}{1 + 2\beta} - \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (3.22)$$

que representa uma extensão para $\beta \neq 0$ do resultado padrão analisado anteriormente [9, 45, 60].

No caso especial em que o inflaton segue um estágio de rolagem lenta, satisfazendo $\dot{\phi}^2 \ll V$, a Eq. (3.17) nos permite escrever o potencial associado, na forma

$$V(\phi) \sim \frac{3}{2} \frac{W^2}{1 + 2\beta}. \quad (3.23)$$

3.4 Soluções Analíticas

Passamos agora a aplicar o formalismo de primeira ordem descrito na seção anterior para obter novas soluções analíticas no contexto da violação de Lorentz em teorias de inflação. A escolha inicial mais simples que podemos considerar é fazer β uma constante, mas isto nos leva a solução trivial $\bar{q}_k = \bar{q}$, de modo que outras possibilidades mais interessante são obtidas se β tem uma dependência explícita com o campo escalar, $\beta = \beta(\phi)$.

3.4.1 Expansão Exponencial ($\bar{q} = 1$)

Para o caso particular em que o Universo primordial segue uma expansão exponencial, podemos considerar o parâmetro de Hubble, H , constante ($\bar{q} = 1$); neste caso o fator de escala, a , cresce exponencialmente com o tempo físico $a \propto \exp(Ht)$. Na ausência da violação de Lorentz, fazendo $\beta = 0$, temos $H = W = \text{const.}$ e $\dot{\phi} = -W_\phi = 0$, de modo que o potencial

é dado por $V = 3H^2/2 = \text{const.}$ Por outro lado, considerando $H = \text{const.}$, em um regime de violação de Lorentz, $\beta \neq 0$, temos

$$V = \frac{3}{2}H^2(1 + 2\beta) - 2H^2\beta_\phi^2, \quad (3.24)$$

sendo agora o potencial associado a evolução exponencial uma função que varia com o campo escalar. De acordo com o formalismo $\dot{\phi} = -W_\phi = -2H\beta_\phi$, tal que

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\beta_\phi} = -2H(t - t_0).$$

Podemos verificar que a expansão exponencial ocorre mesmo para a solução de potencial nulo, $V = 0$, e nesse caso, (3.24) nos permite obter

$$1 + 2\beta = \frac{1}{4} \left(\sqrt{3}(\phi - \phi_0) + 2(1 + 2\beta_0)^{1/2} \right)^2.$$

Note que, $\beta \rightarrow -1/2$ quando $\phi \rightarrow \phi_0 - 2\sqrt{3}(1 + 2\beta_0)^{1/2}/3$. Logo, esta solução pode ser válida apenas no período de violação de Lorentz da inflação e não tem relevância na transição ao estágio de rolagem lenta padrão, com $|\beta| \ll 1$. Iremos discutir essa transição quando considerarmos uma solução polinomial para W e β .

A evolução de ϕ com o tempo físico é dada por

$$\phi - \phi_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(1 + 2\beta_0)^{1/2} \left(e^{-(3/2)H(t-t_0)} - 1 \right). \quad (3.25)$$

3.4.2 Solução de Potencial Nulo

Podemos ainda construir uma solução inflacionária em que o potencial associado ao inflaton é nulo ($V = 0$), uma vez que sob essa condição

$$\frac{W_\phi^2}{W^2} = \frac{3}{1 + 2\beta} \quad (3.26)$$

e agora a dinâmica do campo escalar é inteiramente associada ao termo cinético.

Da equação diferencial (3.26) obtém-se

$$W(\phi) = W_0 e^{\sqrt{3} \int_{\phi_0}^{\phi} (1+2\beta)^{-1/2} d\phi}. \quad (3.27)$$

Para esta solução, o parâmetro de Hubble é $H = W_\phi^2/(3W)$ e conseqüentemente, usando a Eq. (3.18), temos

$$a = a_0 \left(\frac{W}{W_0} \right)^{-1/3}. \quad (3.28)$$

Por simplicidade vamos considerar a solução

$$W(\phi) = W_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^n, \quad (3.29)$$

com $n > 0$ e $W_0 > 0$. A evolução de ϕ com o tempo físico é encontrada resolvendo a Eq. (3.15), sendo

$$\phi = \phi_0 \left(\frac{n(n-2)W_0}{\phi_0^2} (t - t_0) + 1 \right)^{1/(2-n)}, \quad n \neq 2, \quad (3.30a)$$

$$\phi = \phi_0 e^{-2W_0(t-t_0)/\phi_0^2}, \quad n = 2. \quad (3.30b)$$

Note que se $n \geq 2$ então $\phi \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$; enquanto se $n < 2$ então $\phi \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \phi_0^2/(n(2-n)W_0)$.

As Eqs. (3.26) e (3.29) implicam em

$$1 + 2\beta = \frac{3\phi^2}{n^2} \quad (3.31)$$

e neste caso podemos escrever

$$H = \frac{n^2 W_0}{3\phi_0^2} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{n-2}; \quad (3.32)$$

$$a = a_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-n/3}, \quad (3.33)$$

sendo a evolução de ϕ com o tempo físico, para as escolhas específicas de n , descrita em termos das Eqs. (3.30a) e (3.30b).

Como sabemos, inflação é definida como a época da evolução cósmica que satisfaz a condição $\ddot{a} > 0$ ou, equivalentemente, como

$$\dot{a} = aH \propto \phi^{2n/3-2}, \quad (3.34)$$

uma vez que \dot{a} seja uma função crescente com o tempo físico, o que é esperado para $n < 3$. Se $n = 2$ então H é uma constante e o fator de escala cresce exponencialmente com o tempo físico, $a = a_0 \exp[H(t - t_0)]$. Para a condição $n < 2$, H também é uma função crescente com o tempo físico, porém agora correspondendo a um regime de superinflação ($\bar{q} > 1$). Nesse caso, $a \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow t_0 + \phi_0^2/(n(2 - n)W_0)$.

Como discutido na seção anterior, a condição inflacionária não é suficiente para garantir que o termo de curvatura na Eq. (3.4) torne-se menos importante à medida que o Universo expande aceleradamente. A condição, necessária para que o modelo possa resolver o problema da planura do Universo, requer que a Eq. (3.13) seja também satisfeita, ou melhor, que

$$a^2 H^2 (1 + 2\beta) \propto \phi^{4n/3-2}, \quad (3.35)$$

seja uma função crescente com o tempo físico. Essa condição é estabelecida para $n < 3/2$ e portanto, para $3/2 < n < 3$ o regime inflacionário ocorre, mas não resolve o problema da planura, independentemente de sua duração. Esse resultado pode também ser visto calculando \bar{q} e \bar{q}_k , usando as Eqs. (3.20) e (3.21), respectivamente

$$\bar{q} = \frac{3(2 - n)}{n} + 1; \quad (3.36a)$$

$$\bar{q}_k = \bar{q} - \frac{3}{n} = \frac{3(1 - n)}{n} + 1. \quad (3.36b)$$

Se $\bar{q} < 0$ ($n > 3$) temos desaceleração, enquanto $\bar{q} > 0$ ($n < 3$) implica que o Universo está acelerando (inflando). Para $\bar{q} = 1$ ($n = 2$) o parâmetro de Hubble é uma constante e a expansão é exponencial. Se $\bar{q} > 1$ ($n < 2$) o parâmetro de Hubble é também uma função crescente com o tempo físico, porém agora temos um regime de superinflação. Para que

inflação resolva o problema da planura a condição $\bar{q}_k > 0$ deve ser satisfeita, o que ocorre para $n < 3/2$. Neste sentido, para este modelo, a solução do problema da planura requer um regime de superinflação.

3.4.3 Solução Polinomial

Vamos considerar agora que a solução para $W(\phi)$ seja uma função polinomial, como feito na Eq. (3.29). O potencial correspondente é [84]

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_0^2 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{2n} \left(\frac{3}{1 + 2\beta(\phi)} - \frac{n^2}{\phi^2} \right) \quad (3.37)$$

e a evolução de ϕ com o tempo físico fica determinada pelas Eqs. (3.30a) e (3.30b). Se escolhermos $\beta(\phi)$ como uma função quadrática do campo escalar, na forma

$$\beta(\phi) = \beta_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2, \quad (3.38)$$

então a evolução do campo escalar é descrita como

$$a(\phi) = a_0 \left(\frac{1 + 2\beta_0(\phi/\phi_0)^2}{1 + 2\beta_0} \right)^{-\phi_0^2/(4n\beta_0)}. \quad (3.39)$$

Neste caso, $\beta \rightarrow 0$ quando $\phi \rightarrow 0$ o que significa que esta solução continua válida para a transição a uma fase onde o acoplamento com o setor de violação de Lorentz pode ser desprezado.

Os parâmetros \bar{q} e \bar{q}_k são

$$\bar{q} = -\frac{n^2}{\phi^2} + \frac{2n(2-n)\beta_0}{\phi_0^2} + 1, \quad (3.40)$$

$$\bar{q}_k = \bar{q} - \frac{2n\beta_0}{\phi_0^2} = -\frac{n^2}{\phi^2} + \frac{2n(1-n)\beta_0}{\phi_0^2} + 1, \quad (3.41)$$

e o valor de ϕ no fim da inflação, satisfazendo $\bar{q}(\phi_e) = 0$, é dada por

$$\phi_e = n \left(2n(2-n) \frac{\beta_0}{\phi_0^2} + 1 \right)^{-1/2}. \quad (3.42)$$

Aqui temos assumido implicitamente que $\phi > 0$; e para que seja estabelecido um regime inflacionário, devemos ter $2n(2 - n)\beta_0/\phi_0^2 + 1 > 0$. Por outro lado, a condição $\bar{q}_k(\phi) = 0$ é satisfeita para

$$\phi_c = n \left(2n(1 - n) \frac{\beta_0}{\phi_0^2} + 1 \right)^{-1/2} \quad (3.43)$$

e devemos ter $2n(1 - n)\beta_0/\phi_0^2 + 1 > 0$. Observamos que se $\beta_0 < 0$, então a condição $\phi_c > \phi_e$ é atingida em um tempo físico $t_c < t_e$; entretanto, se $\beta_0 > 0$, então $\phi_c < \phi_e$ é alcançado agora para $t_c > t_e$. Conseqüentemente, se $\beta_0 > 0$ então Ω desvia da unidade no último estágio do período inflacionário (para $\phi_c < \phi < \phi_e$). Por outro lado, Ω pode aproximar-se da unidade, mesmo sem inflação, se $\beta_0 < 0$.

Para essa solução, o número de e-foldings é calculado a partir de

$$N = -\frac{\phi_0^2}{4n\beta_0} \ln \left(\frac{\phi_0^2 + 4n\beta_0}{(1 + 2\beta_0)(\phi_0^2 - 2n(n - 2)\beta_0)} \right). \quad (3.44)$$

Podemos também escolher alternativamente a forma mais geral

$$1 + 2\beta(\phi) = (1 + 2\beta_0) \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^m, \quad (3.45)$$

com $1 + 2\beta_0 > 0$ e $m > 0$ (note que a contribuição para a violação de Lorentz desaparece para $\beta_0 = m = 0$). Se $\beta_0 \neq 0$ ou $m \neq 0$ então β não desaparece no fim da inflação ($\beta \rightarrow -1/2$ quando $\phi \rightarrow 0$). Neste cenário o acoplamento com o setor de violação de Lorentz não pode ser desprezado no fim do período inflacionário e conseqüentemente pode não ser válido durante toda a evolução do campo escalar no regime inflacionário. A evolução de $\beta(\phi)$ dada pela Eq. (3.45) nos permite incrementar a complexidade do nosso modelo, adicionando um parâmetro extra, entretanto mantendo a possibilidade de encontrar soluções analíticas para a dinâmica do Universo.

A partir da escolha acima para $\beta(\phi)$ podemos obter a evolução do fator de escala com o

campo escalar como

$$a = a_0 \exp \left(\frac{\phi_0^2}{n(2-m)(1+2\beta_0)} \left(1 - \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{2-m} \right) \right), \quad (3.46)$$

no caso particular em que $m = 2$, entretanto, devemos escrever

$$a = a_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-\frac{\phi_0^2}{n(1+2\beta_0)}}. \quad (3.47)$$

Note que a tende para uma constante ou para ∞ dependendo se m é menor ou maior do que zero, respectivamente. Os parâmetros \bar{q} e \bar{q}_k são dados por

$$\bar{q} = \frac{n(m-n)(1+2\beta_0)}{\phi_0^2} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{m-2} + 1, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_k &= q - \frac{mn(1+2\beta_0)}{2\phi_0^2} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{m-2}, \\ &= \frac{n(m-2n)(1+2\beta_0)}{2\phi_0^2} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{m-2} + 1. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vemos que se $m \geq n$ ou $m \geq 2$, então a inflação cósmica nunca termina (se $\bar{q} > 0$ em $t = t_0$, então \bar{q} nunca se torna negativo para $t > t_0$). Em particular, se $m = 2$, então ambos \bar{q} e \bar{q}_k são constantes. Por outro lado, para $m = n$ temos $\bar{q} = 1$, levando o Universo a uma expansão exponencial. Podemos ainda verificar que, para $n < 2$ e $m > n$, o estágio inflacionário também nunca termina, apesar do fator de escala, a , se aproximar de uma constante quando $t \rightarrow \phi_0^2/(n(2-n)W_0)$.

Portanto, as soluções de interesse, que apresentam uma transição de uma fase acelerada para uma fase desacelerada, têm $m < n$ e $m < 2$. Neste caso, no fim da inflação cósmica, para $\bar{q}(\phi_e) = 0$, temos,

$$\phi_e = \phi_0 \left(\frac{\phi_0^2}{n(n-m)(1+2\beta_0)} \right)^{1/(m-2)}, \quad (3.50)$$

e a condição $\bar{q}_k(\phi_c) = 0$ nos leva a

$$\phi_c = \phi_0 \left(\frac{2\phi_0^2}{n(2n-m)(1+2\beta_0)} \right)^{1/(m-2)}, \quad (3.51)$$

com $\phi_c < \phi_e$. Novamente vemos que Ω pode desviar da unidade durante o último estágio da inflação.

As soluções apresentadas mostram que, na presença do Einstein-æther, novas condições são impostas para resolver os problemas das condições iniciais no período inflacionário; em especial, na ausência de um termo de potencial para o inflaton, uma fase de superinflação é necessária. Embora nosso trabalho tenha se limitado ao estudo das modificações presentes em um modelo inflacionário, a presença do Einstein-æther pode ainda ser estudada em uma versão vetorial da energia escura [86], além de ser explorada em teorias de mundo brana [87]; outra linha de estudo propõe uma relação direta entre a violação de Lorentz e a Bariogênese [88]. Por outro lado, a dificuldade em estabelecer novos vínculos sobre os PPNs e a possível ampliação do espaço de parâmetros da teoria colocam o estudo da violação de Lorentz ainda em estado de consolidação.

Capítulo 4

Modelos de Energia Escura com uma Equação de Estado Constante

Os dados observacionais parecem ser consistentes com uma densidade de energia escura constante [35, 89] associada a uma equação de estado bem definida, $w_e = -1$, a conhecida constante cosmológica. Entretanto, um modelo dinâmico de energia escura é provavelmente uma alternativa mais razoável na descrição da aceleração da expansão do Universo observável, se levarmos em conta a enorme discrepância entre a densidade de energia do vácuo inferida pelas observações em relação às expectativas teóricas.

A dificuldade em estabelecer novos vínculos, que permitam explorar essa possível dinâmica da energia escura, deve ser bastante reduzida a partir dos resultados apresentados pelos próximos consórcios observacionais, que devem elevar a precisão sobre w_e à ordem de 10^{-2} , nos próximos anos. Esses resultados são amplamente aguardados pela comunidade científica, especialmente porque eles podem descartar a possibilidade de uma constante cosmológica com equação de estado $w_e = -1$, o que, em primeira análise, não impede que esses resultados sejam consistentes com outra equação de estado constante $w_e \neq -1$ e passamos então a questionar: É plausível descrever o conteúdo de energia escura a partir de um modelo de constante cosmológica com uma equação de estado constante diferente de -1 ? Analisamos

essa questão na Ref. [90], estudada inicialmente por P.P. Avelino, A.M.M. Trindade e P.T.P. Viana em [91], onde foi mostrado que uma significativa quantidade de ajuste fino é exigida ao potencial do campo escalar, representando quintessência, afim de obter uma constante $w_e \neq -1$. Indicando que se futuras evidências excluïrem a constante cosmológica como um candidato a energia escura, isto deve ser interpretado como uma fortíssima evidência em favor de uma teoria de energia escura dinâmica, mesmo que os dados pareçam consistentes com uma quantidade qualquer, independente do tempo, para w_e .

Neste capítulo vamos explorar este problema em um contexto mais amplo. Estendemos a correspondência entre modelos de campos escalares e modelos de campos taquiônicos [63, 92, 93, 94, 95] ao caso de uma equação de estado constante, w_e ; inicialmente considerando um modelo de energia escura (padrão e taquiônica), na presença do conteúdo de matéria. Em seguida aplicamos esse método para analisar um modelo de energia escura unificada [96, 97], onde o campo escalar segue uma dinâmica taquiônica; podemos então avaliar a quantidade de ajuste fino, no potencial do campo escalar, necessária para tornar a equação de estado constante $w_e \neq 1$ em torno do tempo presente, em cada caso.

4.1 Dinâmica Generalizada de Quintessência e Poeira em um Universo FRW

O nosso modelo de Universo, considera, como antes, a presença de um componente de matéria tipo poeira e de um componente de energia escura descrito por um campo escalar real, χ , minimamente acoplado à gravidade. A ação que descreve a dinâmica desse Universo é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_e(\chi, X) \right), \quad (4.1)$$

onde \mathcal{L}_m é a Lagrangeana de matéria e introduzimos a Lagrangeana generalizada do campo escalar $\mathcal{L}_e(\chi, X)$, sendo $X = \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi / 2$.

O tensor energia-momento do campo escalar real pode ser escrito como o tensor energia-momento de um fluido perfeito,

$$T_{[e]}^{\mu\nu} = (\rho_e + p_e)u^\mu u^\nu - p_e g^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

a partir das seguintes identificações [29, 98]

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu \chi}{\sqrt{2X}}, \quad \rho_e = 2X \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial X} - \mathcal{L}_e, \quad p_e = \mathcal{L}_e(X, \chi). \quad (4.3)$$

Na Eq. (4.2), u^μ é o campo vetorial de 4-velocidade descrevendo o movimento do fluido (para $\partial_\mu \chi$ tipo-tempo), enquanto ρ_e e p_e são a densidade de energia e pressão próprias, respectivamente. A equação de estado, w_e é igual a

$$w_e \equiv \frac{p_e}{\rho_e} = \frac{\mathcal{L}_e}{2X \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial X} - \mathcal{L}_e}, \quad (4.4)$$

e a velocidade quadrática do som, definida em [98], é dada por

$$c_{s[e]}^2 \equiv \frac{\frac{\partial p_e}{\partial X}}{\frac{\partial \rho_e}{\partial X}} = \frac{\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial X}}{\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial X^2}}. \quad (4.5)$$

Os componentes do tensor energia-momento dos campos de matéria (poeira) são

$$T_{[m]}^{\mu\nu} = \rho_m v^\mu v^\nu, \quad (4.6)$$

onde v^μ é o campo vetorial de 4-velocidade da matéria e ρ_m é sua densidade de energia própria. A pressão própria para poeira, p_m , é igual a zero, de modo que tanto a equação de estado como a velocidade quadrática do som desaparecem ($w_m = p_m/\rho_m = 0$ e $c_{s[m]}^2 = 0$).

Consideramos o Universo plano em nossos cálculos, de modo que podemos escrever o elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.7)$$

sendo t o tempo físico e x , y e z as coordenadas espaciais comóveis. As equações de Einstein nos permitem escrever

$$H^2 = \frac{2}{3} \rho, \quad (4.8a)$$

$$\dot{H} = -(\rho + p), \quad (4.8b)$$

onde $\rho = \rho_m + \rho_e$ é a densidade de energia total, $p = p_e$ é a pressão total. A conservação do tensor energia-momento para ambos os componentes, poeira e energia escura, nos leva a

$$\dot{\rho}_m = -3H\rho_m; \quad (4.9a)$$

$$\dot{\rho}_e = -3H(1 + w_e)\rho_e, \quad (4.9b)$$

o que implica em $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$, $\rho_e = \rho_{e0}a^{-3(1+w_e)}$ (assumindo uma equação de estado constante w_e). De modo que a Eq.(4.8a) pode também ser escrita como

$$H^2 = \Omega_{e0}a^{-3(1+w_e)} + \Omega_{m0}a^{-3}, \quad (4.10)$$

onde $\Omega_{m0} = 2\rho_{m0}/3$ e $\Omega_{e0} = 2\rho_{e0}/3 = 1 - \Omega_{m0}$.

Revisado esses conceitos básicos, podemos agora escrever o formalismo de primeira ordem explicitamente; seguimos a notação apresentada na referência [90] e consideramos uma classe de soluções satisfazendo

$$\frac{\dot{a}}{a} = H(\chi); \quad (4.11a)$$

$$\dot{\chi} = Z(\chi), \quad (4.11b)$$

sendo $H(\chi)$ e $Z(\chi)$, em princípio, funções arbitrárias do campo escalar, χ . A equação de estado total pode ser determinada e neste caso temos

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{w_e}{1 + \Delta a^{3w_e}} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\frac{dH}{d\chi} Z}{H^2}, \quad (4.12)$$

onde $\Delta \equiv \Omega_{m0}/\Omega_{e0}$.

Durante nossa discussão vamos identificar o campo escalar seguindo uma dinâmica padrão ou taquiônica por diferentes letras gregas (ϕ e ψ , respectivamente). O potencial associado a dinâmica padrão será escrito como $V = V(\phi)$, enquanto para a dinâmica taquiônica preferimos escrever $U = U(\psi)$. Também usaremos a notação $Z = \dot{\phi}$ e $\mathcal{Z} = \dot{\psi}$ afim de distinguir a derivada temporal do campo escalar seguindo uma dinâmica padrão ou taquiônica.

4.2 Campo Escalar Padrão e w_e Constante

Investigamos inicialmente uma família de modelos de campos escalares descritos pela Lagrangeana padrão

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (4.13)$$

onde V é o potencial do campo escalar. A densidade de energia e pressão correspondentes são, como sabemos

$$\rho_e = \frac{1}{2} Z^2 + V, \quad p_e = \frac{1}{2} Z^2 - V, \quad (4.14)$$

de modo que

$$w_e = \frac{Z^2/2 - V(\phi)}{Z^2/2 + V(\phi)}. \quad (4.15)$$

As Eqs. (4.8a) e (4.8b) podem agora ser escritas como

$$H^2 = \frac{1}{3} Z^2 + \frac{2}{3} V + \frac{2}{3} Y; \quad (4.16a)$$

$$H_\phi Z = -Z^2 - Y, \quad (4.16b)$$

onde $Y = \rho_m = 3 \Omega_{m0} a^{-3}/2$ e o índice ϕ representa derivada em relação ao campo. O potencial do campo escalar é dado por

$$V = \frac{3}{2} H^2 + H_\phi Z + \frac{1}{2} Z^2, \quad (4.17)$$

e a Eq. (4.9a) nos permite escrever a condição de consistência

$$ZY_\phi + 3HY = 0, \quad (4.18)$$

sendo

$$Y = -Z(H_\phi + Z). \quad (4.19)$$

Se $\rho_{m0} = 0$ então $Z = -H_\phi$. Nesse limite obtemos o formalismo de primeira ordem estudado no Cap. 2, quando desconsideramos a presença de matéria, e introduzido em [9].

4.2.1 w_e Constante

Nosso interesse é voltado para uma equação de estado constante w_e ; no caso em que o campo escalar segue uma dinâmica padrão, a Eq. (4.15) implica em

$$Z = \pm \left(2V \frac{1+w_e}{1-w_e} \right)^{1/2}. \quad (4.20)$$

No que segue omitiremos o sinal \pm e consideraremos apenas a solução com $Z > 0$. Entretanto, essa suposição pode ser relaxada, desde que o modelo é invariante por uma transformação $\phi \rightarrow -\phi$, $V(\phi) \rightarrow V(-\phi)$. A partir das Eqs. (4.16a), (4.16b) e (4.20), obtém-se

$$H^2 = \frac{2}{9(1-w_e^2)} \frac{V_\phi^2}{V}. \quad (4.21)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (4.21) por $Z^2 = \dot{\phi}^2$ e usando a Eq. (4.20) encontramos a evolução do potencial em função do fator de escala

$$V = V_0 a^{-3(1+w_e)}. \quad (4.22)$$

A partir das Eqs. (4.10), (4.20) e (4.22), levando em conta que $\Delta = \Omega_{m0}/\Omega_{e0}$ e $\rho_{e0} = 2V_0/(1-w_e)$, tal que $V_0 = 3\Omega_{e0}(1-w_e)/4$, podemos mostrar que

$$\frac{d\phi}{da} = \frac{Z}{aH} = \left(\frac{3(1+w_e)/2}{\Delta a^{2+3w_e} + a^2} \right)^{1/2}, \quad (4.23)$$

cuja solução é dada por

$$\phi = 2r \ln \left(\frac{a^{3w_e/2}(1 + \sqrt{1 + \Delta})}{1 + \sqrt{1 + \Delta} a^{3w_e}} \right), \quad (4.24)$$

onde $r = \sqrt{3(1+w_e)/2}/(3w_e)$ e a constante de integração foi escolhida de modo que $\phi_0 = 0$. Invertendo a Eq. (4.24) determinamos o fator de escala como uma função do campo

$$a = \left(\frac{2(1 + \sqrt{1 + \Delta}) e^{\phi/(2r)}}{2(1 + \sqrt{1 + \Delta}) + \Delta(1 - e^{\phi/r})} \right)^{2/(3w_e)}, \quad (4.25)$$

e agora usando a Eq. (4.24) obtemos o potencial associado à solução de equação de estado constante - vide [90, 99]

$$V = V_0 \left(\frac{2(1 + \sqrt{1 + \Delta}) e^{\phi/(2r)}}{2(1 + \sqrt{1 + \Delta}) + \Delta(1 - e^{\phi/r})} \right)^{-2(1+w_e)/w_e}. \quad (4.26)$$

Analisando o comportamento assintótico; na era em que a energia escura é dominante ($a \gg 1$), a evolução de ϕ com o fator de escala será dada por

$$\phi = \phi_{e*} + \sqrt{\frac{3}{2}(1+w_e)} \ln a,$$

onde ϕ_{e*} é uma constante arbitrária. Usando a Eq. (4.22) obtemos o potencial

$$V \propto e^{-\sqrt{6(1+w_e)}\phi}, \quad (4.27)$$

válido em algum instante t_e bem dentro da fase de dominação da energia escura.

Por outro lado, na era em que o conteúdo de matéria é dominante ($a \ll 1$) chegamos a

$$\phi = \phi_{m*} - \frac{2}{3w_e} \sqrt{3(1+w_e)\Delta^{-1}} a^{-3w_e/2},$$

onde ϕ_{m*} é também uma constante arbitrária, e agora usando a Eq. (4.22) obtemos

$$V \propto (\phi - \phi_{m*})^{2(1+w_e)/w_e}, \quad (4.28)$$

que é válido em um instante t_m bem dentro da fase de dominação do conteúdo de matéria.

A rápida mudança na forma do potencial em torno da época presente é devida ao fato de que, embora a função $V(a)$ tenha a mesma forma nas eras de dominação da energia escura ou do conteúdo de matéria, a dinâmica da quintessência, $\phi(a)$, é significativamente afetada

pela mudança na dinâmica do Universo em volta da época presente. Como consequência, tendo em vista que $w_e = \text{const} \neq -1$, a forma do potencial do campo escalar, $V(\phi)$, precisa ser compensada por esta mudança, o que exige uma significativa quantidade de ajuste fino¹, tornando o modelo pouco natural em sua representação. Em geral, considerações sobre o fine-tuning podem ser justificadas envolvendo, por exemplo, o princípio antrópico [6], o que levaria a interpretações filosóficas não completamente aceitas pela comunidade.

4.3 Campo Escalar Taquiônico e w_e Constante

Examinamos agora uma família de modelos de campos escalares descritos pela Lagrangeana taquiônica

$$\mathcal{L} = -U(\psi)\sqrt{1 - \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi}, \quad (4.29)$$

onde U é o potencial para o campo escalar real, ψ . A densidade de energia e pressão são

$$\rho = U \frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{Z}^2}}, \quad p = -U\sqrt{1 - \mathcal{Z}^2}, \quad (4.30)$$

o que implica em $w_e = -1 + \mathcal{Z}^2$, e as Eqs. (4.8a) e (4.8b) podem ser reescritas como

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{U}{\sqrt{1 - \mathcal{Z}^2}} + \frac{2}{3} Y; \quad (4.31a)$$

$$H_\psi \mathcal{Z} = -\frac{\mathcal{Z}^2}{\sqrt{1 - \mathcal{Z}^2}} U - Y, \quad (4.31b)$$

como antes, o índice ψ indica derivada em relação ao campo. Nesse caso, o potencial é dado por

$$U = \frac{3H^2 + 2H_\psi \mathcal{Z}}{2\sqrt{1 - \mathcal{Z}^2}}, \quad (4.32)$$

com o vínculo dado pela Eq.(4.9a)

$$\mathcal{Z}Y_\psi + 3HY = 0, \quad (4.33)$$

¹vide também as Refs. [91, 99].

onde

$$Y = -\frac{\mathcal{Z}(2H_\psi + 3H^2\mathcal{Z})}{2(1 - \mathcal{Z}^2)}. \quad (4.34)$$

Se $\rho_{m0} = 0$, então $\mathcal{Z} = -2H_\psi/(3H^2)$; reproduzindo o formalismo de primeira ordem para campos taquiônicos (desprezando os campos de matéria), no espaço plano, como estudado no Cap. 2.

4.3.1 w_e Constante

Se agora assumimos que w_e é uma constante, então

$$\mathcal{Z} = \dot{\psi} = \pm\sqrt{1 + w_e}. \quad (4.35)$$

De agora em diante omitiremos o sinal \pm e consideraremos apenas a solução com $\mathcal{Z} > 0$. Novamente, esta suposição pode ser relaxada, desde que o modelo é invariante por uma transformação $\psi \rightarrow -\psi$, $U(\psi) \rightarrow U(-\psi)$. Manipulando as Eqs. (4.31a), (4.31b) e (4.35), chegamos a

$$H = -\frac{1}{3\sqrt{1 + w_e}} \frac{U_\psi}{U}, \quad (4.36)$$

que implica em

$$U = U_0 a^{-3(1+w_e)}, \quad (4.37)$$

como no caso em que o campo escalar segue uma dinâmica padrão (veja a Eq.(4.22)). É possível também mostrar que

$$\frac{d\psi}{da} = \frac{\mathcal{Z}}{aH} = \sqrt{1 + w_e} \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{e0}}{a^{1+3w_e}} \right)^{-1/2} \quad (4.38)$$

e obtemos a evolução do campo taquiônico em relação ao fator de escala como

$$\psi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1 + w_e}{\Omega_{m0}}} \left[a^{3/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2w_e}, 1 - \frac{1}{2w_e}; -\frac{a^{-3w_e}}{\Delta} \right) - {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2w_e}, 1 - \frac{1}{2w_e}; -\frac{1}{\Delta} \right) \right],$$

onde a constante de integração foi escolhida, de modo que $\psi_0 = 0$.

A dualidade entre os campos escalares padrão e taquiônico, considerando uma equação de estado constante w_e , pode ser escrita como

$$\psi = \sqrt{1 + w_e} \int \frac{d\phi}{Z}. \quad (4.39)$$

Analiticamente, a relação entre os dois campos escalares não é inversível. Entretanto, usando a Eq. (4.39), podemos encontrar uma correspondência nos limites assintóticos. Na era dominada por energia escura ($a \gg 1$)

$$\psi - \psi_{e*} \propto \exp\left(\frac{\sqrt{6(1 + w_e)}}{2}\phi\right), \quad (4.40)$$

onde ψ_{e*} é uma constante arbitrária. A partir da Eq.(4.27) é então possível encontrar o potencial taquiônico associado à era dominada por energia escura

$$U \propto (\psi - \psi_{e*})^{-2}. \quad (4.41)$$

Para a era dominada por poeira ($a \ll 1$), a relação (4.39) nos permite escrever

$$\phi \propto (\psi - \psi_{m*})^{-w_e}, \quad (4.42)$$

onde ψ_{m*} é também uma constante arbitrária, e o potencial taquiônico correspondente é agora dado por

$$U \propto (\psi - \psi_{m*})^{-2(1+w_e)}. \quad (4.43)$$

A Fig. 4.1 mostra o comportamento da solução $U(\psi)$, assumindo $w_e = -0.97$ durante a evolução cósmica total (linha sólida), bem como o comportamento das soluções analíticas, computadas usando as Eqs. (4.43) ou (4.41), válidas para a era dominada por poeira (linha tracejada) e para a era dominada por energia escura (linha pontilhada), respectivamente. As condições iniciais para a solução de w_e constante foram escolhidas de modo que $\psi_0 = 0$ e as constantes ψ_{e*} e ψ_{m*} foram determinadas para que as soluções analíticas, (4.43) ou (4.41) estivessem em acordo com os resultados para w_e constante, obtidos para as eras dominadas

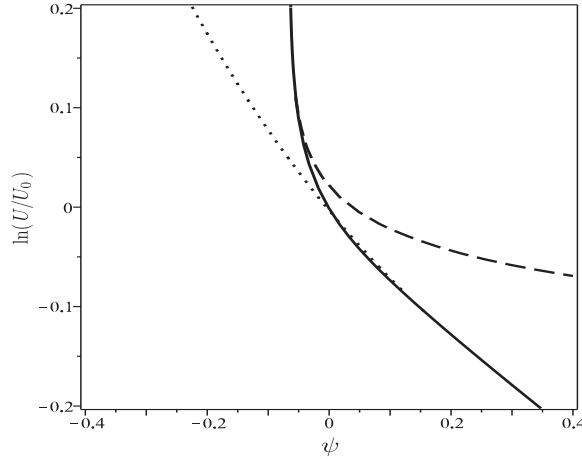


Figura 4.1: Solução para $U(\psi)$ assumindo $w_0 = -0.97$ em toda evolução (linha sólida), tão bem como soluções analíticas para o potencial taquiônico, calculado usando as Eqs. (4.43) e (4.41), válida na era dominada por poeira (linha tracejada) e por energia escura (linha pontilhada) respectivamente. O valor de ψ no tempo presente é $\psi_0 = 0$.

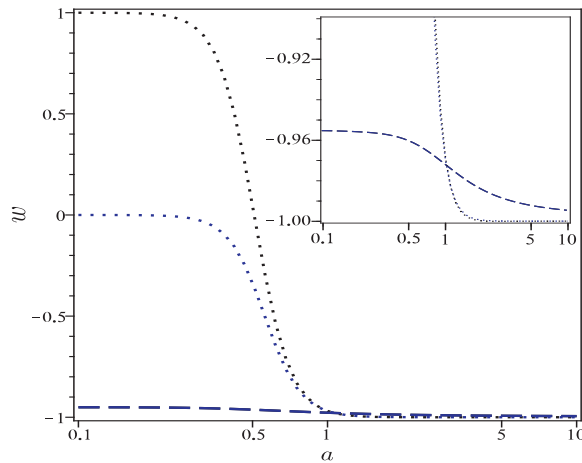


Figura 4.2: Evolução da equação de estado calculada com uma constante w_e para um potencial da quintessência seguindo uma dinâmica padrão ou taquiônica, na era dominada por poeira, dadas pelas Eqs. (4.28) e (4.43) (linhas tracejadas) ou com uma constante w_e para um potencial seguindo uma dinâmica padrão ou taquiônica, na era dominada por energia escura, dadas pelas Eqs. (4.27) e (4.41) (linhas pontilhadas). Significantes diferenças entre os resultados obtidos para os campos padrão ou taquiônico somente aparecem para w_e significativamente maiores do que -1 .

por poeira ou por energia escura, respectivamente. Temos também considerado $\Omega_{m0} = 0.27$ e $\Omega_{e0} = 0.73$ como favorecido pelos resultados de sete anos do WMAP [39, 89]. A Fig. 4.1 mostra que, para termos $w_e = \text{const}$, a forma do potencial deve sofrer um ajuste fino em volta de $\psi = \psi_0 = 0$, de modo a ser consistente com o comportamento assintótico da solução², o que novamente faz o modelo bastante não natural e, portanto, a indicação observacional de uma equação de estado $w_e = \text{const} \neq -1$ deve ser entendida como uma forte evidência em favor de um modelo dinâmico para w_e .

Isso é também mostrado na Fig. 4.2, onde apresentamos o comportamento da evolução da equação de estado, sendo os potenciais V e U propostos para obter uma equação de estado constante w_e nas eras dominadas por poeira e energia escura (linhas tracejadas e pontilhadas, respectivamente). Como esperado, a figura mostra que w_e é rigorosamente constante nas fases dominadas por poeira (linha tracejada) ou energia escura (linha pontilhada), mas aqui temos uma rápida variação em w_e na transição entre essas fases, com $|w_{e0} - w_e(z=1)|/|w_{e0} + 1| \gtrsim 1$ (onde $z = 1/a - 1$ é o redshift). De fato, a evolução da equação de estado calculada com a constante $w_e \neq -1$ para o potencial da quintessência na era dominada por energia escura, não é consistente com as observações, desde que o campo escalar dominaria completamente a densidade de energia do Universo em moderados redshifts, quando w_e torna-se muito próximo da unidade. Isso não é necessariamente verdadeiro para campos taquiônicos desde que, neste caso, a equação de estado não pode ser maior do que zero. Por outro lado, a evolução da equação de estado calculada com uma constante $w_e = -0.97$ para potenciais de campos padrão ou taquiônico, na era dominada por poeira, está em acordo com os dados observacionais (o parâmetro da equação de estado da energia escura é sempre menor do que -0.95).

A Cosmologia obtida considerando um modelo taquiônico para energia escura é equivalente a Cosmologia de um modelo de quintessência padrão até primeira ordem em Z/V (ou

²de outro modo, a equação de estado mudaria rapidamente em volta da época presente.

equivalentemente \mathcal{Z}). Portanto, para campos escalares em um regime de rolagem lenta, com $w_e \sim -1$, temos uma simples correspondência entre a evolução do Universo predita em ambos os modelos, mesmo se w_e não é uma constante, correspondendo a $V = U$ e $\phi = \psi\sqrt{U}$. Esta é a razão da similaridade entre os resultados apresentados na Fig. 4.2 para os modelos taquiônico (+ poeira) e de quintessência, com $w_e \gtrsim -1$ (veja o gráfico destacado na Fig. 4.2). De fato, um resultado similar é esperado, no regime de rolagem lenta, para o caso de uma Lagrangeana genérica, admitindo uma expansão da forma

$$\mathcal{L} = -V(\chi) + f(\chi)X + g(\chi)X^2 + \dots, \quad (4.44)$$

onde f e g são funções do campo escalar χ [98]. Diferenças significativas entre os modelos de energia escura para quintessência e para a dinâmica taquiônica somente aparecem para valores de w_e suficientemente maiores do que -1 . Em particular, a equação de estado para o campo taquiônico nunca pode ser maior do que zero, enquanto a equação de estado da quintessência seguindo uma dinâmica padrão pode variar no intervalo $[-1, 1]$.

4.3.2 Energia Escura Unificada

Os táquions são também propostos em modelos que consideram a matéria e a energia escura como um único fluido cósmico (o fluido escuro), cuja dinâmica pode ser associada a um único campo escalar; os assim chamados, modelos de energia escura unificada [57]. De fato, é possível mostrar que existe uma dualidade entre um modelo taquiônico, em que um campo escalar ψ é responsável pelo conteúdo do setor escuro, e modelos de quintessência, na presença de matéria escura, em que a energia escura é descrita pelo campo escalar ϕ . Nesse caso, a correspondência entre os campos escalares taquiônicos e de quintessência é obtida como

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \int \left(-\frac{H_\phi}{Z} \right)^{1/2} \frac{d\phi}{H}. \quad (4.45)$$

Em seguida omitimos o sinal \pm e vamos considerar apenas a solução com $\mathcal{Z} > 0$. O potencial taquiônico correspondente pode ser escrito como

$$U = \frac{3}{2}H^2 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{ZH_\phi}{H^2} \right)^{1/2}. \quad (4.46)$$

A evolução de ψ com o fator de escala é dado por

$$\psi(a) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{e0}}} \int \frac{(\Delta a^{3w_e} + (1 + w_e))^{1/2}}{\Delta a^{3w_e} + 1} a^{(1+3w_e)/2} da \quad (4.47)$$

e, nesse caso

$$U(a) = \frac{3}{2} \sqrt{-w_e \Omega_{e0}} \left(\Omega_{m0} a^{-3(2+w_e)} + \Omega_{e0} a^{-6(1+w_e)} \right)^{1/2}. \quad (4.48)$$

Se $w_e = -1$, então a Eq. (4.47) permite obter

$$\psi - \psi_* = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{e0}}} \arctan \left[\sqrt{\frac{a^3}{\Delta}} \right], \quad (4.49)$$

com $\psi_* = -2 \arctan(\Delta^{-1/2})/(3\sqrt{\Omega_{e0}})$. Isso implica em

$$U(\psi) = \frac{3\Omega_{e0}}{2|\sin \theta|}, \quad (4.50)$$

onde $\theta = 3(\psi - \psi_*)\sqrt{\Omega_{e0}}/2$. Como $\theta \rightarrow \pi/2$ (quando $a \rightarrow \infty$), o potencial taquiônico U tende a constante $3\Omega_{e0}/2$. Por outro lado, para $a \ll 1$ (para $\theta \sim 0$ e $\psi \sim \psi_*$) o potencial taquiônico, U , é rigorosamente proporcional a $(\psi - \psi_*)^{-1}$. Portanto, se o campo taquiônico representa tanto o conteúdo de matéria escura como o de energia escura, então a forma do potencial taquiônico, U , tem que sofrer um ajuste fino (mesmo assumindo que $w_e = -1$).

Capítulo 5

Soluções Inflacionárias e o Método de Deformação

O Universo primordial apresenta uma gama de problemas que continuam a preencher as mesas de muitos físicos teóricos. Alguns desses problemas podem ser analisados no contexto da teoria da inflação cósmica [25, 100, 101, 102, 103], onde um campo escalar, o ínflaton, pode ser assumido para responder pela evolução do Universo primitivo. Particularmente desafiadora é a escolha da dinâmica do ínflaton, desde que um grande número de parâmetros deve ser ajustado para assegurar o sucesso do modelo e levar o Universo à “saída graciosa” [104, 105, 106].

Neste capítulo introduzimos um mecanismo, baseado no método de deformação [107, 108], que permite implementar uma correlação direta entre duas soluções quaisquer para o ínflaton; considerando, em detalhe, um regime de rolagem lenta [109, 110, 111], onde os parâmetros da inflação cósmica podem ser determinados a partir do potencial que dirige a solução [112].

5.1 Método de Deformação

Como resultado do avanço nas pesquisas em física de altas energias, uma inumerável quantidade de modelos envolvendo campos escalares tem sido proposta. Muitos desses

modelos não admitem uma descrição analítica do sistema estudado, dificuldade essa que limita um completo entendimento do problema relacionado. É portanto necessário construir métodos que possam gerar potenciais com soluções analíticas e de interesse físico. Um método bastante efetivo nesse sentido é o assim chamado método de deformação, proposto por Bazeia et al. [107], que consiste em gerar novas soluções a partir de um potencial, ou solução, conhecidos, com a adição de uma função de deformação escolhida apropriadamente.

Inicialmente o método de deformação foi aplicado ao estudo de soluções estacionárias em modelos de defeitos topológicos e não-topológicos - para uma revisão mais detalhada vide [108]; algumas aplicações de interesse foram estudadas nas Refs. [113, 114, 115, 116]. Considerando soluções estacionárias de modelos de um único campo escalar, seguindo uma dinâmica padrão¹, a relação entre o potencial do modelo de origem, $V(\chi)$, e o potencial do modelo deformado, $V(\phi)$, é dada por [107, 108]

$$V(\phi) = \frac{V(\chi \rightarrow f(\phi))}{f_\phi^2(\phi)}, \quad (5.1)$$

onde $f(\phi)$ é a função de deformação. Nesse caso, se $\chi(x)$ é uma solução estática do modelo inicial, então

$$\phi(x) = f^{-1}(\chi(x)) \quad (5.2)$$

é uma solução do modelo deformado. Podemos ainda obter, para soluções topológicas, que um defeito deformado $\phi(x)$ conecta os mínimos correspondentes da solução $\chi(x)$ do modelo de origem, tal que $\tilde{v}_i = f^{-1}(v_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

5.2 Modelo de Origem

Novamente consideramos um modelo em que a dinâmica do Universo primordial é descrita pela ação de Einstein-Hilbert, sendo o campo escalar χ minimamente acoplado a gravidade,

¹admitindo um espaço-tempo bidimensional (1,1), sob uma métrica $(+, -)$, de modo que a Eq. de movimento é $d^2\chi/dx^2 = V_\chi$.

i.e.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\chi, X) \right); \quad (5.3)$$

aqui R é o escalar de curvatura, $\mathcal{L}(\chi, X)$ é a Lagrangeana do campo escalar, com $X = \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi / 2$, e desprezamos os demais campos de matéria. De agora em diante assumimos que χ desempenha o papel do inflaton.

A métrica espaço-temporal do Universo é do tipo Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.4)$$

onde t é o tempo físico, x , y e z são coordenadas espaciais comóveis e consideramos também que a geometria do Universo é plana; o que deve ser válido durante boa parte do regime inflacionário. O tensor energia-momento para o inflaton pode ser escrito como o de um fluido perfeito, de modo que podemos resolver a ação (5.3) para a métrica (5.4) e as equações de Einstein reduzem-se a

$$H^2 = \frac{2}{3} \rho$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p).$$

Vamos focar a nossa atenção ao caso em que o inflaton segue uma dinâmica padrão,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi), \quad (5.5)$$

sendo sua densidade de energia e pressão dados por

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + V, \quad p = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - V. \quad (5.6)$$

As soluções das equações de Einstein podem ser agora reescritas na forma

$$H^2 = \frac{1}{3} \dot{\chi}^2 + \frac{2}{3} V; \quad (5.7a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\chi}^2 \quad (5.7b)$$

e como antes a equação da continuidade para o ínflaton é dada por

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + V_{\chi} = 0, \quad (5.8)$$

onde o índice χ representa derivada com respeito ao campo.

Soluções inflacionárias em que a densidade de energia do Universo é dominada pelo termo potencial $V(\chi)$ são analisadas segundo a aproximação de rolagem lenta, onde o ínflaton não varia tão rapidamente e podemos negligenciar o termo cinético na equação de Friedmann e o termo de aceleração na equação de movimento do campo escalar. Essas condições nos levam naturalmente ao conjunto de equações de primeira ordem

$$H^2 \simeq \frac{2}{3}V(\chi); \quad (5.9)$$

$$3H\dot{\chi} + V_{\chi} \simeq 0. \quad (5.10)$$

Para esse regime a escolha do potencial nos permite aplicar limites aos parâmetros inflacionários. O número N de e-foldings, que mede a duração da inflação cósmica, definido por $N \equiv \ln(a_f/a)$, onde a_f é o fator de escala no fim da inflação, pode ser determinado, uma vez que

$$a = a_0 \exp \left(\int_{t_i}^{t_e} \left(\frac{2}{3} V(\chi) \right)^{1/2} dt \right), \quad (5.11)$$

i.e. $N = \int_t^{t_f} H dt$, sendo a evolução do ínflaton determinada por (5.11). A fase de inflação cósmica deve resolver os problemas das condições iniciais do Universo; em especial a condição de planura é alcançada quando os parâmetros de rolagem lenta ϵ e η , definidos por [23, 30]

$$\epsilon = \frac{1}{4} \left(\frac{V_{\chi}}{V} \right)^2, \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{V_{\chi\chi}}{V} \quad (5.12)$$

são muito pequenos, ou melhor, no limite $|\epsilon| \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$; alternativamente, a inflação cósmica termina quando esse limite é violado, ou melhor, no limite $\epsilon \approx 1$, $\eta \approx 1$.

Perceba que todos esses parâmetros inflacionários são sensíveis a escolha do potencial para o ínflaton, e desde que o procedimento de deformação permite explorar a relação entre

uma classe de potenciais analiticamente, este pode ser um caminho eficiente de análise desses parâmetros, ou mesmo, de todos os parâmetros inflacionários que são funções do potencial. Vejamos na próxima seção como este procedimento pode ser aplicado ao cenário inflacionário sob um regime de rolagem lenta.

5.3 Deformando Modelos Inflacionários

Inicialmente consideramos que o ínfaton tem sua dinâmica descrita pela Lagrangeana padrão

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi) \quad (5.13)$$

e podemos escrever a equação da continuidade, nesse caso, na forma

$$\rho_\chi + 3H\dot{\chi} = 0. \quad (5.14)$$

Desde que sabemos ser $H^2 = 2\rho/3$, quadrando (5.14) obtemos a relação

$$6\rho\dot{\chi}^2 = \rho_\chi^2. \quad (5.15)$$

Agora consideramos a dinâmica do ínfaton descrita em um segundo modelo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (5.16)$$

Similarmente aos resultados do modelo anterior, obtemos

$$6\tilde{\rho}\dot{\phi}^2 = \tilde{\rho}_\phi^2. \quad (5.17)$$

Para construir o método de deformação em modelos inflacionários definimos uma correspondência entre as soluções, de modo que

$$\chi = f(\phi), \quad (5.18)$$

onde $f(\phi)$ é a função de deformação, que deve ser apropriadamente escolhida afim de que a solução deformada também responda às condições inflacionárias. Como uma consequência direta desta definição podemos escrever

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\chi}}{f_{\phi}}, \quad (5.19)$$

em que $f_{\phi} = df/d\phi$. Usando (5.15) e (5.17) chegamos a

$$\frac{\tilde{\rho}_{\phi}^2}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{f_{\phi}^2} \left(\frac{\rho_{\chi}^2}{\rho} \right)_{\chi=f(\phi)}, \quad (5.20)$$

que representa uma correspondência genérica entre as densidades de energia do modelo de origem e do modelo deformado para o inflaton. De um modo menos restritivo, esta é uma alternativa natural para implementar o método de deformação entre soluções de um único campo escalar dominante em Cosmologia, sendo satisfeita uma equação da continuidade para o fluido cósmico.

Nosso interesse é voltado para modelos inflacionários sob um regime de rolagem lenta, que aplicada à equação de movimento do campo escalar nos leva a

$$3H\dot{\chi} = -V_{\chi}. \quad (5.21)$$

Nesse caso

$$6V\dot{\chi}^2 = V_{\chi}^2 \quad (5.22)$$

e similarmente

$$6\tilde{V}\dot{\phi}^2 = \tilde{V}_{\phi}^2. \quad (5.23)$$

Usando agora as relações (5.22) e (5.23) chegamos a

$$\frac{\tilde{V}_{\phi}^2}{\tilde{V}} = \frac{1}{f_{\phi}^2} \left(\frac{V_{\chi}^2}{V} \right)_{\chi=f(\phi)}, \quad (5.24)$$

que representa uma correspondência genérica entre os potenciais do modelo de origem e do modelo deformado para o inflaton, sob uma aproximação de rolagem lenta.

A solução do novo modelo pode ser obtida considerando a inversa da função de deformação $\phi = f^{-1}(\chi)$, calculada a partir da solução do modelo original. Uma importante implicação deste método é a possibilidade de obter uma descrição analítica para uma nova solução inflacionária, o que permite analisar os parâmetros inflacionários para esta solução, desde que sejam conhecidos os parâmetros inflacionários para o modelo original, minimizando a necessidade de recorrer à técnicas numéricas.

Note também que o limite em que a condição de rolagem lenta deixa de ser válida $\dot{\chi}^2/2 = V(\chi)$ depende do potencial escolhido. Nesse caso

$$t_f - t_i = \int_{\chi_i}^{\chi_f} \frac{d\chi}{\sqrt{2V}} \quad (5.25)$$

e temos $t_f - t_i \neq \tilde{t}_f - \tilde{t}_i$, desde que (5.24) é uma relação válida entre o potencial do modelo de origem e o potencial do modelo deformado. Desse modo, o método de deformação, aplicado ao cenário inflacionário, não apresenta uma correlação entre dois setores do regime de rolagem lenta, mas entre dois potenciais que seguem um regime de rolagem lenta, por construção; isso pode ser verificado analisando a deformação dos parâmetros inflacionários, como mostramos a seguir em alguns casos particulares.

5.4 Aplicando o Método de Deformação em Modelos Inflacionários sob o Regime de Rolagem Lenta

Inflação caótica * inflação eterna

Para ilustrar o método, inicialmente consideramos um modelo baseado na inflação caótica [117, 118, 119], em que a dinâmica do ínflaton é dirigida pelo potencial quadrático $V(\chi) = V_0\chi^2$. Aplicando o método de deformação a esse modelo podemos obter diretamente um modelo de inflação eterna [120, 121, 122], que é descrito pelo potencial $\tilde{V}(\phi) = \tilde{V}_0\phi^p$, onde

escolhemos $p > 2$, assumindo a função de deformação

$$f(\phi) = \chi = -4\sqrt{\frac{V_0}{\tilde{V}_0}} \frac{\phi^{-\frac{1}{2}(p-4)}}{p(p-4)}, \quad (5.26)$$

aplicada ao potencial da inflação caótica e usando (5.24).

Uma vez que o potencial de origem e o potencial deformado são conhecidos, podemos obter os parâmetros de rolagem lenta. Para o potencial original temos $\epsilon = \eta = \chi^{-2}$. Aplicando o método de deformação esses parâmetros são obtidos para o novo potencial (nesse caso a inflação eterna) e escrevemos

$$\tilde{\epsilon} = \frac{p^2}{4\phi^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{p(p-1)}{2\phi^2}. \quad (5.27)$$

O fim do período inflacionário é determinado agora com a escolha adicional do parâmetro p para o modelo deformado, enquanto apenas condições sobre o comportamento do ínflaton são necessárias para o modelo original. Neste sentido, o método de deformação não conecta uma fase de rolagem lenta, para o potencial original, a uma fase de rolagem lenta para o potencial deformado, uma vez que precisamos ajustar apropriadamente o modelo deformado afim de determinar a duração do regime inflacionário. De fato, o número de e-foldings, que estima essa duração, calculado para o modelo de inflação caótica é dado por

$$N = \frac{1}{2}(\chi_f^2 - \chi_i^2) \quad (5.28)$$

por outro lado, para o modelo de inflação eterna temos

$$\tilde{N} = \frac{1}{p}(\phi_f^2 - \phi_i^2). \quad (5.29)$$

Note que o caso $p = 4$ deve ser analisado separadamente. Para esta escolha, temos $\tilde{V}(\phi) = \lambda\phi^4$ e seguindo os resultados anteriores, a função de deformação é

$$f(\phi) = \chi = \sqrt{\frac{V_0}{\lambda}} \frac{\ln \phi}{2}. \quad (5.30)$$

Agora os parâmetros de rolagem lenta são

$$\tilde{\epsilon} = \frac{4}{\phi^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{6}{\phi^2} \quad (5.31)$$

e para este caso o número de e-foldings é o mesmo dado por (5.29), substituindo a escolha $p = 4$.

Na Fig. 5.4 apresentamos o comportamento dos potenciais da inflação caótica e da inflação eterna, o que permite analisar a dinâmica do ínflaton nessas soluções. Para tanto, vamos recorrer a uma analogia simplificada, em que imaginamos o ínflaton como uma partícula clássica, rolando em um diagrama de energia; seguindo essa analogia podemos reafirmar a discussão anterior, uma vez que para a condição $p > 2$, o ínflaton deve rolar mais rapidamente sob o potencial da inflação eterna, o que altera a duração do regime inflacionário, como analisado anteriormente.

Inflação hilltop * inflação natural

Consideramos agora como modelo de origem a inflação hilltop [123, 124, 125], em que a dinâmica do ínflaton é guiada pelo potencial

$$V(\chi) = \left(V_0 - \frac{\lambda}{p} \chi^{p/2} \right)^2. \quad (5.32)$$

Aplicando o método de deformação podemos obter diretamente o potencial da assim chamada inflação natural [126, 127, 128], dado por $\tilde{V}(\phi) = \tilde{V}_0 \cos^2(r\phi)$, desde que escolhamos a seguinte função de deformação

$$f(\phi) = \chi = \left(\frac{4\sqrt{\tilde{V}_0}r^2}{(p-4)\lambda \operatorname{arctanh}(\cos(r\phi))} \right)^{2/(p-4)}, \quad (5.33)$$

em que a constante de integração foi escolhida de modo que $f(\phi = \pi/(2r)) = 0$.

Nesse caso, os parâmetros de rolagem lenta para o potencial original são

$$\epsilon = \frac{1}{4} \frac{\chi^{p-2}}{\left(\frac{\chi^{p/2}}{p} - \frac{V_0}{\lambda}\right)^2}, \quad (5.34)$$

$$\eta = \frac{\frac{p-1}{2p} \chi^{p-2} - \frac{1}{4} \frac{V_0}{\lambda} (p-2) \chi^{(p-4)/2}}{\left(\frac{\chi^{p/2}}{p} - \frac{V_0}{\lambda}\right)^2}. \quad (5.35)$$

Por outro lado, para o potencial deformado obtemos

$$\tilde{\epsilon} = r^2 \tan^2(r\phi), \quad \tilde{\eta} = r^2 (\tan^2(r\phi) - 1). \quad (5.36)$$

O número de e-foldings pode ser calculado como

$$N = \left[\chi^2 \left(\frac{1}{p} + 4 \frac{V_0}{\lambda} \frac{\chi^{-p/2}}{p-4} \right) \right]_{\chi_i}^{\chi_f} \quad (5.37)$$

e para o modelo deformado temos

$$\tilde{N} = \frac{1}{r^2} \ln \left(\frac{\sin(r\phi_i)}{\sin(r\phi_f)} \right). \quad (5.38)$$

Para a escolha $p = 4$, que deve ser analisada separadamente, chegamos a

$$f(\phi) = \chi = \left(\frac{\sin(r\phi)}{1 + \cos(r\phi)} \right)^{\pm \lambda / (2\sqrt{V_0} r^2)} \quad (5.39)$$

e a constante de integração foi escolhida de modo que $f(\phi = \pi/(2r)) = 1$. Os parâmetros de rolagem lenta ϵ e η são os mesmos obtidos em (5.34), substituindo $p = 4$ em suas respectivas expressões e o número de e-foldings é agora dado por

$$N = \left[\frac{\chi^2}{4} - 2 \frac{V_0}{\lambda} \ln \chi \right]_{\chi_i}^{\chi_f}. \quad (5.40)$$

A Fig. 5.1 ilustra o comportamento do potencial de origem e do potencial deformado e permite avaliar a dinâmica do ínflaton em ambos os modelos; em especial podemos perceber que a configuração de vácuo do modelo de inflação natural pode ser mapeada a partir do potencial hilltop, porém exigindo um regime inflacionário cada vez maior a medida que consideramos valores esperados no vácuo cada vez maiores para o ínflaton, em acordo com a análise dos parâmetros inflacionários nesse caso.

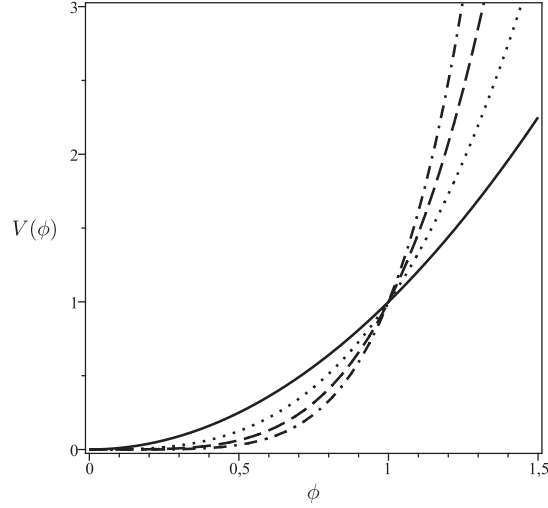


Figura 5.1: Comportamento do potencial de inflação caótica (linha sólida) e do potencial de inflação eterna para $p = 3$ (linha pontilhada), $p = 4$ (linha tracejada), e $p = 5$ (linha pontilhado-tracejada).

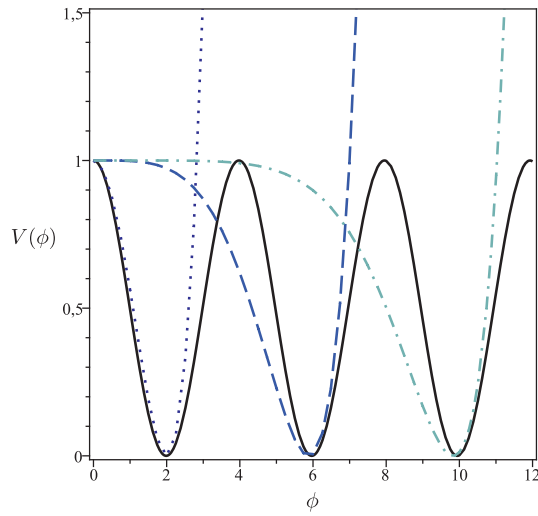


Figura 5.2: Comportamento do potencial da inflação natural (linha sólida) e do potencial da inflação hilltop para $p = 4$ (linha pontilhada), $p = 8$ (linha tracejada), e $p = 12$ (linha pontilhado-tracejada). O parâmetro λ foi apropriadamente escolhido de modo que os zeros do potencial da inflação natural fossem coincidentes com os zeros do potencial da inflação hilltop.

Comentários Finais

Exploramos algumas aplicações do formalismo de primeira ordem em situações de corrente interesse na Cosmologia com campos escalares. Em particular, utilizamos essa ferramenta teórica no estudo de um modelo de Universo em que além do conteúdo de energia escura é considerada a presença de matéria (bariônica + escura), de modo que foi possível obter soluções em bom acordo com os dados observacionais. Embora tenhamos nos limitado à modelos no âmbito da Cosmologia padrão, a aplicabilidade do método é geral e abre espaço para uma série de investigações; como, por exemplo, no estudo de modelos cosmológicos dentro do contexto da teoria de Hořava, ou ainda, no estudo de gravidade massiva em $2+1$ dimensões; ambas em fase de desenvolvimento.

Considerando um regime de violação da simetria local de Lorentz em teorias de inflação cósmica, a aplicação do formalismo de primeira ordem permitiu verificar que novas considerações precisam ser implementadas, afim de garantir o sucesso do regime inflacionário. Uma possível extensão dessa linha de pesquisa está relacionada à modelos de energia escura vetorial; nesses modelos, uma configuração de campos vetoriais reproduz as inhomogeneidades no CMB e permitem a inclusão de uma fase de expansão cósmica acelerada, um tema bastante atual e que será foco de nossa atenção.

Futuros dados observacionais podem descartar uma constante cosmológica como candidato a energia escura e ainda assim parecerem ser consistentes com uma equação de estado constante e diferente de -1 . Investigamos essa possibilidade e identificamos que uma grande

quantidade de ajuste fino desse ser adicionada ao modelo, o que torna a solução bastante não natural e deve ser interpretado como uma forte indicação em favor de um modelo dinâmico de energia escura; no caso de modelos de energia escura unificada, verificamos também que esse ajuste fino ocorre mesmo no caso em que a equação de estado é igual a -1 . Esses resultados foram demonstrados para o caso de modelos de quintessência ou de energia escura taquiônica, mas esperamos que resultados similares sejam obtidos em qualquer modelo de energia escura dinâmica, que seja descrita por um campo escalar, vetorial ou tensorial.

Outra linha de investigação que iniciamos nesse trabalho de tese é relacionada a introdução do método de deformação em modelos inflacionários sob um regime de rolagem lenta; mostramos que, no caso em que o inflaton é associado a um único campo escalar, é possível encontrar uma relação de deformação direta entre os potenciais de dois modelos inflacionários. A partir desse resultado foi possível investigar as características do modelo deformado, uma vez conhecidas as características do modelo de origem. Uma extensão natural dessa aplicação é a inclusão de um segundo campo escalar, o que permitiria o estudo de modelos de inflação híbrida, abrindo possibilidades para diversas investigações nessa linha de atuação.

Bibliografia

- [1] A.D. Linde, Lect. Notes Phys. **738**, 1 (2008).
- [2] T. Padmanabhan, Gen. Rel. Grav. **40**, 529 (2008).
- [3] V. Sahni e A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 2105 (2006).
- [4] T. Padmanabhan, Phys. Rept. **380**, 235 (2003).
- [5] Sean M. Carroll, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001).
- [6] S. Weinberg, *The Cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [7] E.J. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006).
- [8] D. Bazeia, L. Losano, J.J. Rodrigues e R. Rosenfeld, Eur. Phys. J. C **55**, 113 (2008).
- [9] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano e R. Menezes, Phys. Lett. B **633**, 415 (2006).
- [10] D. Hilbert, Gott. Nachr. **27**, 395 (1915).
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, Canada, 1976).
- [12] S. Carroll, *Spacetime and geometry - An introduction to General Relativity* (Addison Wesley, 2004).
- [13] Robert M. Wald, *General Relativity* (University Of Chicago Press, 1984).
- [14] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Elsevier, 1975).

-
- [15] J. Plebański e A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press, 2006).
- [16] A. Friedmann, Z. Phys., **10**, 337 (1922); **21**, 326 (1924);
- [17] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe* (Cambridge University Press, 1999).
- [18] A. A. Penzias e R. W. Wilson, Astrophysical Journal **142**, 419 (1965).
- [19] T. Padmanabhan, *Cosmology and Astrophysics through problems* (Cambridge University Press, 2000).
- [20] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Addison Wesley, 2006).
- [21] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, 2003).
- [22] A.R. Liddle e D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).
- [23] M. Lemoine, J. Martin e P. Peter (Eds.), *Inflationary Cosmology*, Lec. Notes in Phys. **738** (Springer, 2008).
- [24] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, 2008).
- [25] A.H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [26] A. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [27] A. Albrecht e P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [28] N. Jarosik et al., Astrophys. J. Suppl. **192**, 14 (2011).
- [29] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, 2005).

-
- [30] D.H. Lyth e A.R. Liddle, *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure* (Cambridge, 2009)
- [31] J. Glanz, *Science* **282**, 2156 (1998).
- [32] S. Perlmutter et al., *Nature* **391**, 51 (1998).
- [33] A. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [34] S.J. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [35] J.A. Frieman, M.S. Turner e D. Huterer, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **46**, 385 (2008).
- [36] D.N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [37] D.N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [38] E. Komatsu et al., *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009).
- [39] E. Komatsu et al., *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011).
- [40] G. Bertone, D. Hooper e J. Silk, *Phys. Rept.* **405**, 279 (2005).
- [41] R.R. Caldwell, *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002).
- [42] G.W. Gibbons, *Phys. Lett. B* **537**, 1 (2002).
- [43] E.B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [44] M.K. Prasad e C.M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).
- [45] D.S. Salopek e J.R. Bond, *Phys. Rev. D* **42**, 3936 (1990).
- [46] A.R. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology* (Wiley, 2003).
- [47] S. Mukohyama, *JCAP* **0906**, 001 (2009).

-
- [48] D. Bazeia, L. Losano e J.J. Rodrigues, em preparação.
- [49] V. Sahni e L. Wang, Phys. Rev. D **62**, 103517 (2000).
- [50] V. Sahni, Lect. Notes Phys. **653**, 141 (2004).
- [51] Z.-K. Guo, Y.-S. Piao, X.-M. Zhang e Y.-Z. Zhang, Phys. Lett. B **608**, 177 (2005).
- [52] R.A. Daly e S.G. Djorgovski, Astrophys. J. **597**, 9 (2003);
- [53] U. Alam, V. Sahni, T.D. Saini e A. Starobinsky, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **354**, 275 (2004);
- [54] Y. Gong, A. Wang, Q. Wu e Y.Z. Zhang, JCAP **0708**, 018 (2007).
- [55] M.R. Garousi, Nucl. Phys. B **584**, 284 (2000).
- [56] A. Sen, JHEP **04**, 48 (2002).
- [57] M.C. Bento, O. Bertolami e A.A. Sen, Phys. Rev. D **66**, 043507 (2002).
- [58] A. Feinstein, Phys. Rev. D **66**, 063511 (2002).
- [59] A.R. Liddle e D.H. Lyth, Phys. Rept. **231**, 1 (1993).
- [60] K. Skenderis e P.K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **96**, 191301 (2006).
- [61] U. Seljak, A. Slosar e P. McDonald, JCAP **0610**, 014 (2006).
- [62] P.J. Steinhardt e M. S. Turner, Phys. Rev. D **29**, 2162 (1984).
- [63] T. Padmanabhan, Phys.Rev. D **66**, 021301(R) (2002).
- [64] J.A. Minaham e B. Zwiebach, JHEP **0103**, 038 (2001).
- [65] D. Bazeia, F.A. Brito e J.R. Nascimento, Phys. Rev. D **68**, 085007 (2003).

-
- [66] M. Kaku, *Quantum Field Theory - A Modern Introduction* (Oxford University Press, 1993).
- [67] C.M. Will e K. Nordtvedt, *Astrophys. J.* **177**, 757 (1972).
- [68] K. Nordtvedt e C.M. Will, *Astrophys. J.* **177**, 775 (1972).
- [69] V.A. Kostelecký, *CPT and Lorentz Symmetry - Proceedings of the Third Meeting* (World Scientific, 2005).
- [70] M. Gasperini e G. Veneziano, *Mod. Phys. Lett. A* **8**, 3701 (1993).
- [71] C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press, 1993).
- [72] T. Jacobson e D. Mattingly, *Phys. Rev. D* **64**, 024028 (2001).
- [73] Arianto et al., *JHEP* **0709**, 048 (2007).
- [74] V.A. Kostelecky e S. Samuel, *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989).
- [75] B.Z. Foster e T. Jacobson, *Phys. Rev. D* **73**, 064015 (2006).
- [76] B.Z. Foster, *Phys. Rev. D* **73**, 104012 (2006); Erratum-ibid. *D* **75**, 129904 (2007).
- [77] S.M. Carroll e E.A. Lim, *Phys. Rev. D* **70**, 123525 (2004).
- [78] E.A. Lim, *Phys. Rev. D* **71**, 063504 (2005).
- [79] B. Li, D. F. Mota e J. Barrow, *Phys. Rev. D* **77**, 024032 (2008).
- [80] J. A. Juntz, P. G. Ferreira e T.G. Zlosnik, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 261102 (2008).
- [81] Arianto, F. P. Zen, Triyanta e B. E. Gunara, *Phys. Rev. D* **77**, 123517 (2008).
- [82] F.P. Zen, Arianto, B.E. Gunara, Triyanta e A. Purwanto, hep-th/08093847.

-
- [83] S. Kanno e J. Soda, Phys. Rev. D **74**, 063505 (2006).
- [84] P.P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes e J.J. Rodrigues, Phys. Rev. D **79**, 123503 (2009).
- [85] J.W. Elliott, G.D. Moore e H. Stoica, JHEP **08**, 066 (2005).
- [86] C. Armendáriz-Picón, JCAP **07**, 007 (2004).
- [87] F. Ahmadi, S. Jalalzadeh e H.R. Sepangi, Class. Quantum Grav. **23**, 4069 (2006).
- [88] S.M. Carroll e J. Shu, Phys. Rev. D **73**, 103515 (2006).
- [89] E. Komatsu et al. (WMAP), Astrophys. J. Suppl. **18**, 192 (2011).
- [90] P.P. Avelino, L. Losano e J.J. Rodrigues, Phys. Lett. B **699**, 10 (2011).
- [91] P.P. Avelino, A.M.M. Trindade e P.T.P. Viana, Phys. Rev. D **80**, 067302 (2009).
- [92] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier, Phys. Rev. D **69**, 123512 (2004).
- [93] D. A. Steer e F. Vernizzi, Phys. Rev. D **70**, 043527 (2004).
- [94] I. Quiros, T. Gonzalez, D. Gonzalez e Y. Napoles, Class. Quant. Grav. **27**, 215021 (2010).
- [95] P.P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, J.C.R.E. Oliveira e A.B. Pavan, Phys. Rev. D **82**, 063534 (2010).
- [96] L.M.G. Beca e P.P. Avelino, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **376**, 1169 (2007).
- [97] P.P. Avelino, L.M.G. Beca e C.J.A.P. Martins, Phys. Rev. D **77**, 101302 (2008).
- [98] C. Armendariz-Picon, T. Damour e V.F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458** 209 (1999).
- [99] E. Di Pietro e J. Demaret, Int. J. Mod. Phys. D **10**, 231 (2001).
- [100] A.A. Starobinsky, Phys. Lett. B **117**, 175 (1982).

-
- [101] D. La e P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **62**, 376 (1989), Erratum-ibid. **62**, 1066 (1989).
- [102] A.D. Linde, Phys. Rev. D **49**, 748 (1994).
- [103] J.E. Lidsey et al., Rev. Mod. Phys. **69**, 373 (1997).
- [104] R. Crittenden e P.J. Steinhardt, Phys. Lett. B **293**, 32 (1992).
- [105] R. Brustein e G. Veneziano, Phys. Lett. B **329**, 429 (1994).
- [106] G. Risi, R. Maartens e P. Singh, Phys. Rev. D **76**, 103531 (2007).
- [107] D. Bazeia, L. Losano e J.M.C. Malbouisson, Phys. Rev. D **66**, 101701(R) (2002).
- [108] C.A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano e J.M.C. Malbouisson, Phys. Rev. D **69**, 067702 (2004).
- [109] A.R. Liddle, P. Parsons e J.D. Barrow, Phys. Rev. D **50**, 7222 (1994).
- [110] S.M. Leach e A.R. Liddle, Phys. Rev. D **68**, 123508 (2003).
- [111] J. Martin e C. Ringeval, JCAP **08**, 009 (2006).
- [112] P.P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, M.A.M. Santos e J.J. Rodrigues, em preparação.
- [113] D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes, Physica D **208**, 236 (2005).
- [114] D. Bazeia e L. Losano, Phys. Rev. D **73**, 025016 (2006).
- [115] D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano e J. Mateos Guilarte, Phys. Rev. D **73**, 105008 (2006).
- [116] V.I. Afonso et al., Phys. Rev. D **76**, 025010 (2007), Phys. Lett. B **662**, 75 (2008), Nucl. Phys. B **810**, 427 (2009).
- [117] A.D. Linde, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983);

-
- [118] A.S. Goncharov, A.D. Linde e V.F. Mukhanov, *Int. J. Mod. Phys. A* **2**, 561 (1987).
- [119] R. Maartens, D. Wands, B.A. Bassett e I. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301 (2000).
- [120] A.D. Linde, *Mod. Phys. Lett. A* **1**, 81 (1986).
- [121] A. Borde e A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3305 (1994).
- [122] A. Guth, *Phys. Rept.* **333**, 555 (2000).
- [123] L. Boubekur e D.H. Lyth, *JCAP* **07**, 010 (2005).
- [124] K. Kohri, C.M. Lin e D.H. Lyth, *JCAP* **12**, 004 (2007).
- [125] B.K. Pal, S. Pal e B. Basu, *JCAP* **01**, 029 (2010).
- [126] K. Freese, J.A. Frieman e A.V. Olinto, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3233 (1990).
- [127] F.C. Adams, et al., *Phys. Rev. D* **47**, 426 (1993).
- [128] L. Randall, M. Soljacic e A. Guth, *Nucl. Phys. B* **472**, 377 (1996).