Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós Graduação em Física

Anderson Pereira Pinheiro

Dinâmica quântica de um circuito RLC mesoscópico

Dissertação de Mestrado

João Pessoa, PB
Junho/2011

ANDERSON PEREIRA PINHEIRO

DINÂMICA QUÂNTICA DE UM CIRCUITO RLC MESOSCÓPICO

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho

JOÃO PESSOA, PB
JUNHO/2011

ANDERSON PEREIRA PINHEIRO

DINÂMICA QUÂNTICA DE UM CIRCUITO RLC MESOSCÓPICO

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Data de aprovação: __ /__ /____

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dr. ...

DFIS - UFPB

Prof. Dr. ...

DFIS - UFPB

Prof(a). Dr. ...

DFIS - UFPB

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a Deus por conseguir alcançar mais um objetivo. Também à toda minha família, pelo apoio e confiança durante esses dois anos que passei longe dela, como também ao meu padrinho Raimundo e à minha madrinha Anizete por sempre acreditarem no meu potencial.

Agradeço ao meu orientador, professor Inácio de Almeida Pedrosa Filho, pelo ótimo apoio dado na realização deste trabalho. Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante esses dois anos o qual me ajudou bastante no decorrer das pesquisas.

Agradecimentos também aos meus colegas de sala, como também aos meus dois amigos de convívio, Daniel e Lobão, com os quais compartilhei muitos momentos nesse tempo. Agradecimento especial à minha namorada Nicole, pelo companheirismo em todos os momentos.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma descrição quântica de um circuito RLC mesoscópico sem fonte. Com esta finalidade, modelamos este sistema para aquele de um oscilador harmônico amortecido, que é descrito pelo Hamiltoniano de Caldirola-Kanai. Então, com a ajuda do método de invariantes quânticos, resolvemos a equação de Schrödinger para este Hamiltoniano e escrevemos as funções de onda correspondentes em termos da solução particular da equação de Milne-Pinney. Também construímos estados coerentes para o circuito RLC quantizado, e calculamos as flutuações quânticas da carga e do fluxo magnético, bem como o produto de incerteza correspondente.

Palavras-chave: Circuito RLC. Sistemas mesoscópicos. Estados coerentes.

Abstract

In this work we present a quantum description of a mesoscopic RLC circuit without source. For this purpose, we model this system for that of a damped harmonic oscillator which is described by the Caldirola-Kanai Hamiltonian. Then, with the aid of the quantum invariant method we solve the Schrödinger equation associated with this Hamiltonian and write the corresponding wave functions in terms of a particular solution of the Milne-Pinney equation. We also construct coherent states for the RLC quantized, and evaluate the quantum fluctuations of the charge and the magnetic flux, as well as the corresponding product of uncertainty.

Keywords: RLC circuit. Mesoscopic systems. Coherent states .

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

O problema do oscilador harmônico dependente do tempo se mostra muito importante, pois sua solução exata apresenta uma extensa aplicação em vários sistemas físicos [1-7]. Isso se deve ao fato de que este problema se torna uma espécie de referência, ou digamos um modelo para a solução de problemas em diferentes ramos na física. Com isso, o oscilador harmônico é um dos problemas mais interessantes no estudo da natureza. Dentre alguns exemplos de aplicações podemos citar em óptica quântica com Colegrave e Abdalla [1], gravitação (expansão do universo) Lemos e Natividade [3] e Holstein [4], física molecular com Chumakov, Dodonov e Manko [5], teoria de campos com Gao, Fu, Xu e Zou [6], entre outros.

Os sistemas quânticos dependentes do tempo são estudados desde o início da mecânica quântica. Sua importância ganhou tantos adeptos, que atualmente o estudo desse tipo de sistemas perseveram em várias partes da física, onde a cada década as novas descobertas geram muitas outras aplicações em outros ramos da física. Dentre algumas descobertas temos: a descoberta do método integral de trajetória em 1940, estados coerentes e comprimidos em 1960-1970, a teoria dos invariantes quânticos dependentes do tempo na década de 1960, o efeito de descoerência Zeno na década de 1970, o conceito de fase geométrica nos anos 1980, dinâmica das partículas quânticas em armadilhas e cavidade QED (eletrodinâmica quântica) na década 1980, e os processos dependentes do tempo em dispositivos mesoscópicos quânticos na década de 1990.

Uma nova maneira de se explorar os sistemas quânticos de forma *não estacionária* vêm crescendo ultimamente, sendo útil em diversas áreas como por exemplo: teoria quântica de campos, cosmologia e física de partículas elementares. Houve bastante êxito em muitos trabalhos, tanto teórico quanto experimentais em problemas que envolviam dependência temporal, em óptica quântica e física da matéria condensada entre outros. Um aspecto bem interessante disso tudo é que a variedade de utilidades dos sistemas quânticos não estacionários faz com que pesquisadores de áreas distintas da física troquem experiências entre si.

Trabalharemos nesta dissertação com sistemas do tipo oscilador harmônico dependente do tempo, abordando situações com a ajuda dos métodos de invariantes dinâmicos e de transformações unitárias. Idealizado por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld [8-10] no fim dos anos 1960, o método de invariantes foi útil em [11-14], nos quais nesses trabalhos foram usados uma classe de operadores invariantes para encontrar os estados quânticos de problemas envolvendo osciladores harmônicos dependentes do tempo. Este método consiste em encontrar uma relação entre autoestados de um operador invariante e soluções da equação de Schrödinger correspondente. Entretanto, nosso objetivo de pesquisa está ligado a osciladores harmônicos que de alguma forma possuam dependência com o tempo. Embora este problema tenha atraído muita atenção, soluções da equação de Schrödinger com Hamiltoniano dependente explicitamente do tempo são possíveis apenas para situações particulares e, geralmente suas soluções são difíceis de se encontrar. Após a descoberta desse método, o mesmo foi utilizado para vários tipos de osciladores harmônicos [15-19]. Aqui observamos que Hartley e Ray [20-23], usaram a teoria de invariantes para obter as soluções exatas da equação de Schrödinger em problemas de osciladores não-lineares que dependiam do tempo.

O interesse e a rapidez com que esses sistemas têm sido estudados, colaboraram com grandes avanços em possíveis aplicações em nanociência, abrangindo áreas específicas como a nanofísica e a nanotecnologia (por exemplo: nanoeletrônica), visando a fabricação e miniaturização de dispositivos eletrônicos como circuitos, assunto que será abordado em dois capítulos desta dissertação.

Em 1926, Schrödinger descobriu o que veio a ser chamado de *estados coerentes*. Os estados coerentes são estados de incerteza mínima e que podem ser caracterizados como os estados que têm flutuações quânticas iguais em um par de variáveis conjugadas. Os estados coerentes para o oscilador harmônico foram utilizado por Glauber [24-26] para descrever o campo de radiação, assim como também serviu para construir estados coerentes para potencias gerais nos trabalhos de Nieto e Simmons [27, 28]. A generalização dos estados coerentes para potenciais arbitrários foi sugerido por Schrödinger [29]. Schrödinger construiu nesse trabalho pela primeira vez os estados coerentes para o oscilador harmônico, bem como foi investigado os valores esperados dos operadores momento e posição.

Os estados coerentes de um oscilador harmônico podem ser obtidos através de três métodos equivalentes:

(i) *Operador aniquilação* $\rightarrow$ os estados coerentes são autoestados do operador aniquilação a.

(ii) *Operador deslocamento D* $\rightarrow$ nesse método, os estados coerentes são construídos a partir da ação do operador deslocamento no estado fundamental.

(iii) *Incerteza mínima* $\rightarrow$ em mecânica quântica, representamos grandezas físicas através de operadores. Se temos os operadores posição q e momento p, estes definem uma relação de comutação e uma relação de incerteza. Isto será mostrado no capítulo 3.

1.1 Um olhar mesoscópico

Usualmente, a natureza é estudada em dois níveis de escalas diferentes, o nível macroscópico, onde podemos ver a olho nu e o nível microscópico, onde se estuda na escala atômica. Com o avanço de estudos de sistemas quânticos não estacionários, tanto problemas macroscópicos quanto microscópicos têm sido bastante estudados. No entanto, entre esses dois "mundos", existe um nível intermediário chamado de *mesoscópico*. Ainda não há um rigor em definir as "fronteiras"que um sistema mesoscópico pode ocupar, porém usualmente os sistemas têm entre 100 nm e 1000 nm.

Apesar de objetos mesoscópicos e macroscópicos apresentarem um grande número de átomos, eles possuem diferenças bastante importantes. Um objeto macroscópico é descrito com boa aproximação, classicamente, pela média das propriedades conhecidas do material do que ele é feito. Por outro lado, um objeto mesoscópico, é descrito pelas flutuações em torno da média, onde as leis clássicas falham, assim a descrição quântica é necessária para se estudar tal tipo de sistema. Portanto, sistemas mesoscópicos e microscópicos são descritos pela mecânica quântica.

No final do século XX, o interesse em estudar nanociência propiciou um avanço em pesquisas, fabricação e aplicações de objetos nanoestruturados. A ciência dos materiais modernos tem crescido bastante nos últimos anos, visando cada vez mais investigar sistemas estruturalmente muito pequenos. Exemplos como semicondutores, materiais magnéticos e circuitos integrados, mostram que esta área cresce cada vez mais. Livros recentes escritos por Yosephy Imry [30] e Supriyo Datta [31] são interessantes para quem se interessar saber mais sobre sistemas mesoscópicos e suas aplicações.

Quando se estuda um circuito mesoscópico, um circuito LC representa um caso fundamental, ideal (sem dissipação). A descrição quântica de tal circuito foi discutido pela primeira vez por Louisell [32] em 1970. Vale mencionar que, ao descrever o circuito, Louisell usou o comutador $[q, p] = i\hbar$, em que q e p são a carga e a corrente do circuito, respectivamente. Fazendo uma análise dimensional, verifica-se que este comutador foi utilizado de forma incorreta e deve ser modificado. Outros autores também têm utilizado esse comutador incorretamente [33-36].

Aqui vale ressaltar que a introdução de dissipação em mecânica quântica tem sido realizada, em geral, através de duas abordagens distintas: (i) uma abordagem fundamental na qual o sistema de interesse é acoplado a um reservatório com um grande número de graus de liberdade que leva o fluxo de energia do sistema ao reservatório [32, 37-39], (ii) uma abordagem fenomenológica em que a dissipação é introduzida, através do Hamiltoniano explicitamente dependente do tempo [40, 41, 62, 63, 79, 80]. Neste ponto observamos que a primeira abordagem utiliza métodos de aproximação e considera um grande número de graus de liberdade, o que muitas vezes leva a cálculos mais complexos. Por outro lado, uma vez que o principal interesse é geralmente focado apenas em alguns graus de liberdade, a segunda abordagem tem um formalismo mais simples, conduzindo em geral, as soluções exatas.

Quando se envolve dissipação, olhamos para outro tipo de circuito, este mais complicado, o circuito RLC mesoscópico. Dessa maneira, neste caso teremos que considerar o efeito da resistência R do circuito ou seja, a dissipação. O fenômeno de dissipação é um assunto intrinsecamente relacionado aos circuitos elétricos e requer atenção especial. Além disso, o estudo dos efeitos quânticos e da quantização de um circuito RLC mesoscópico dissipativo é certamente de grande interesse, tanto físico quanto em aplicações no setor de alta tecnologia.

1.2 Organização desta dissertação

No capítulo 2 desta dissertação, descreveremos o formalismo idealizado por Lewis e Riesenfeld, chamado *método dos invariantes quânticos*. Este método tem a finalidade de obter uma relação entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger correspondente para encontrar os estados quânticos de sistemas dependentes do tempo. No mesmo capítulo, para mostrar a importância da teoria descrita, aplicamos o método dos invariantes para um problema bastante importante, o oscilador harmônico unidimensional com freqência dependente do tempo.

O capítulo 3, consiste basicamente em construir os estados coerentes para o oscilador harmônico quântico unidimensional. Ao definirmos os operadores de criação e aniquilação, escreveremos o Hamiltoniano do sistema em função dos mesmos. Por fim, vamos analisar as flutuações quânticas da posição e do momento bem como o produto de incerteza correspondente.

No capítulo 4, iremos analisar o circuito LC (indutância-capacitância), que é um circuito ideal onde nele não há dissipação de energia. Iremos mostrar de uma maneira clara e sucinta, os aspectos clássico e quântico desse sistema. No mesmo capítulo, vamos explicitar o Hamiltoniano do sistema em função da carga armazenada pelo circuito e do fluxo magnético. Para isso consideraremos o Hamiltoniano Caldirola-Kanai em um caso particular (resistência, $R = 0$). Quando analisarmos o sistema quanticamente, as funções dependentes do tempo, carga e o fluxo magnético, irão se transformar em operadores quânticos e satisfarão a relação de comutação $[Q, \Phi] = i\hbar$.

O quinto capítulo, contém o principal resultado deste trabalho. Nele, faremos uma descrição quântica de um circuito RLC sem fonte. Com a ajuda do método dos invariantes quânticos e da Hamiltoniana de Caldirola-Kanai, vamos resolver a equação de Schrödinger para este circuito bem como escrever as equações de onda correspondentes em forma de uma solução particular da equação de Milne-Pinney. Em seguida, construiremos estados coerentes para este circuito e calcularemos as flutuações da carga e do fluxo magnético, como também o produto de incerteza correspondente.

Após o capítulo 5, apresentamos nossas considerações finais. Devemos ressaltar que as publicações acerca de sistemas quânticos dependentes do tempo é bastante extensa. A bibliografia citada neste trabalho, por mais que tenhamos nos esforçado, certamente alguns artigos foram omitidos. No entanto, esperamos que nossa bibliografia represente uma amostra considerável para esta dissertação.

CAPÍTULO 2
Método dos invariantes quânticos dependentes do tempo

Neste capítulo fazemos uma revisão da teoria quântica de invariantes dependentes explicitamente do tempo. Vamos rever algumas definições como também as propriedades desta teoria, onde resolvemos o oscilador com frequência dependente do tempo. Este método foi idealizado por Lewis e Riesenfeld no fim dos anos 1960. O método consiste em assumirmos um operador invariante, onde buscamos uma relação entre autoestados deste operador invariante e soluções da equação de Schrödinger correspondente.

2.1 Breve histórico sobre o desenvolvimento dos métodos invariantes

A descoberta de invariantes exatos (constantes de movimento exatas ou integrais primeiras exatas) é de fundamental importância para um dado sistema físico (clássico ou quântico). Um número suficiente de invariantes exatos implica em um comportamento previsível da dinâmica do sistema físico em questão. Dinâmica de sistemas quânticos, governado por Hamiltonianos dependentes do tempo, tem chamado atenção por bastante tempo, principalmente nos estudos de osciladores harmônicos unidimensionais dependentes do tempo [10, 16, 42-48].

Em 1880, o matemático ucraniano Vasilii Petrovich Ermakov (1845-1922), demonstrou que algumas equações diferenciais não lineares de segunda ordem são relacionadas de maneira simples e definida com equações diferenciais lineares de segunda ordem. Essa demonstração ficou conhecida como o método de Ermakov [49].

Mais tarde, em 1930, W. E. Milne [50] desenvolveu um método análogo ao método de Ermakov para resolver a equação de Schrödinger unidimensional levando em conta a estrutura oscilatória básica da função de onda de Schrödinger $\psi(x)$. Desse modo, ele encontrou que a equação diferencial não linear satisfeita pela amplitude de $\psi(x)$ coincide com a equação obtida por Ermakov. Vinte anos depois, em 1950, E. Pinney [51] apresentou a solução da equação de Ermakov-Milne, depois conhecida como equação de Milne-Pinney, em termos das soluções linearmente independentes da equação linear associada a essa equação.

O sistema Ermakov-Milne-Pinney foi reecontrado, em 1967, por Lewis [8] ao estudar o movimento de um sistema caracterizado pela hamiltoniana dada por

$$H_L = \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)[p^2 + \Omega^2(t)q^2], \tag{2.1}$$

onde q e p são respectivamente, a posição e o momento canonicamente conjugados e $\Omega^2(t)$ é uma função arbitrária, a qual é chamada de frequência de um oscilador harmônico dependente do tempo, e ε é um parâmetro real positivo. Lewis e Riesenfeld, descreveram um conceito de invariante quântico, onde uma solução da equação de Schrödinger é determinada pelo produto de um autoestado do invariante I por um fator de fase dependente do tempo. Em relação ao operador I, Lewis e Riesenfeld descrevem que este operador admite um conjunto completo de autoestados $|\lambda, k; t\rangle$ com seus correspondentes autovalores $\lambda_n' s$, os quais são parâmetros reais e independentes do tempo como mostraremos na próxima seção. A evolução temporal do vetor de estado $\psi(q,t)$ é dada pela equação de Schrödinger

$$H(t)\psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t), \tag{2.2}$$

onde $H(t)$ é o operador Hamiltoniano explicitamente dependente do tempo. A seguir, vamos apresentar o formalismo desenvolvido por Lewis e Riesenfeld.

2.2 Formalismo da Teoria de Lewis e Riesenfeld

2.2.1 Preliminares

O método desenvolvido por Lewis e Riesenfeld tem uma importância fundamental na obtenção de estados quânticos de sistemas que dependem do tempo, no qual usa-se uma classe de operadores invariantes exatos. No período de desenvolvimento deste método, pouco se abordava o uso de métodos invariantes quânticos dependentes do tempo. Basicamente, o método tem a finalidade de obter uma solução exata da equação de Schrödinger tomando um operador invariante I, tendo esse operador as características descritas abaixo. Um invariante quântico, conforme descrito por Lewis e Riesenfeld, nos fornece uma solução da equação de Schrödinger através de um autoestado do operador $I_\alpha(t)$ multiplicado por um fator de fase dependente do tempo. A seguir, descreveremos este método.

Considere um sistema descrito pelo operador Hamiltoniano explicitamente dependente do tempo $H(t)$ e um operador invariante $I(t)$, que satisfaz a equação

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I,H] + \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \tag{2.3}$$

e a condição $I^\dagger = I$, ou seja, $I(t)$ é Hermitiano. A condição de Hermiticidade de um operador nos diz que:

(i) *Possui autovalores reais*,

(ii) *suas autofunções são ortogonais*, e

(iii) *suas funções formam um conjunto completo*.

A descrição de um estado quântico de um sistema é feita através da função de onda $|\Psi\rangle$, a qual deve satisfazer uma dada equação, esta chamada de equação de Schrödinger. Vimos que a evolução temporal do sistema pode ser descrita pela equação (2.2). Operando com o vetor estado $|\psi(t)\rangle$ em um dado instante t, na equação (2.3), obtemos

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\psi(t)\rangle + [I,H]|\psi(t)\rangle = 0. \tag{2.4}$$

Tomando o segundo termo da equação acima,

$$\begin{aligned}[I,H]|\psi(t)\rangle &= (IH - HI)|\psi(t)\rangle \\ &= IH|\psi(t)\rangle - HI|\psi(t)\rangle\end{aligned}$$

obtemos o seguinte resultado

$$[I,H]|\psi(t)\rangle = i\hbar\left(I\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\right) - H(I|\psi(t)\rangle). \tag{2.5}$$

Das equações (2.3) e (2.5), podemos reescrever a equação (2.4) como sendo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(I|\psi(t)\rangle) = H(I|\psi(t)\rangle). \tag{2.6}$$

Assim, se um operador invariante I atuar em um vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ que satisfaz a equação de Schrödinger dando $I|\psi(t)\rangle$, esta ação implicará em outra solução da equação de Schrödinger. O resultado acima é aceito para qualquer operador invariante. Caso contrário, ou seja, se o operador invariante não apresentar termos que envolvam derivadas em relação ao tempo, temos que buscar alternativas para que possamos satisfazer a equação de Schrödinger.

2.2.2 Autoestados e autovalores de um operador invariante quântico

Vamos representar os autovalores de $I(t)$, por λ e seus respectivos autoestados associados como sendo $|\lambda,k;t\rangle$, sendo o índice k a representação de todos os outros números quânticos que necessitamos para determinar os autoestados do sistema.

Considere que o operador invariante $I(t)$ faça parte de um conjunto completo de observáveis os quais comutam. Isto implica que há um conjunto completo de autoestados de $I(t)$, então podemos escrever a equação de autovalores para $I(t)$

$$I|\lambda,k;t\rangle = \lambda|\lambda,k;t\rangle, \tag{2.7}$$

e a relação de ortonormalidade

$$\langle\lambda',k';t|\lambda,k;t\rangle = \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{k'k}, \tag{2.8}$$

onde,

(i) $|\lambda,k;t\rangle$ são os autoestados do operador invariante $I(t)$,

(ii) λ são os autovalores do operador invariante $I(t)$, e

(iii) k são todos os números quânticos diferentes de λ.

Devido a condição de Hermiticidade, $I^\dagger = I$, temos que os autovalores λ são reais. Por outro lado, os autovalores são independentes do tempo como veremos a seguir. Efetuando a derivada temporal da equação (2.7), obtemos

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle. \tag{2.9}$$

Em seguida, utilizando a equação (2.3) sobre os autoestados $|\lambda,k;t\rangle$ resulta que

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)[I,H]|\lambda,k;t\rangle = 0. \tag{2.10}$$

Podemos reescrever a equação acima, na forma

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle + IH|\lambda,k;t\rangle - \lambda H|\lambda,k;t\rangle = 0. \tag{2.11}$$

Calculando o produto escalar da equação (2.11) com um estado $|\lambda',k';t\rangle$, obtemos

$$i\hbar\left\langle\lambda',k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle + \langle\lambda',k';t|IH|\lambda,k;t\rangle - \langle\lambda',k';t|\lambda H|\lambda,k;t\rangle = 0, \tag{2.12}$$

o que implica que

$$i\hbar\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle+\lambda'\langle\lambda',k';t|H|\lambda,k;t\rangle-\lambda\langle\lambda',k';t|H|\lambda,k;t\rangle=0. \tag{2.13}$$

Simplificando a equação acima obtemos

$$i\hbar\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle+(\lambda'-\lambda)\langle\lambda',k';t|H|\lambda,k;t\rangle=0. \tag{2.14}$$

O resultado acima deve ter validade para $\lambda=\lambda'$. Então, a equação acima se reduz em

$$\left\langle \lambda,k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle=0. \tag{2.15}$$

O passo final para mostrar que os autovalores λ_n são independentes do tempo, será fazer o produto escalar da equação (2.9) com $|\lambda,k;t\rangle$, então

$$\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle+\left\langle \lambda,k;t\left|I\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle=\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle+\lambda\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle$$

$$\Rightarrow\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle+\lambda\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle=\frac{\partial\lambda}{\partial t}\langle\lambda,k;t|\lambda,k;t\rangle+\lambda\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle,$$

onde, $\left\langle \lambda,k;t\left|I\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle$ é equivalente ao termo $\lambda\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle$. Dessa maneira podemos escrever que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\left\langle \lambda,k;t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle. \tag{2.16}$$

Assim, das equações (2.15) e (2.16) temos que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=0. \tag{2.17}$$

Portanto, os autovalores de um operador hermitiano invariante são independentes do tempo.

2.2.3 Relação entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger

Com todas as informações que obtemos anteriormente, podemos encontrar a conexão entre os autoestados do operador invariante $I(t)$ e as soluções da equação de Schrödinger. Para isso, vamos reescrever a equação (2.9), sabendo que os autovalores do operador invariante são independentes do tempo, ou seja, o termo $\frac{\partial\lambda}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle=0$. Então

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle = (\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle. \tag{2.18}$$

Agora tomamos o produto escalar pelo autovetor $|\lambda',k';t\rangle$ resultando

$$\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle = \langle\lambda',k';t|(\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle \tag{2.19}$$

ou ainda

$$\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle = (\lambda - \lambda')\langle\lambda',k';t|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,k;t\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle - \lambda'\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle = \left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle. \tag{2.20}$$

Utilizando a equação (2.14), podemos escrever a equação (2.20) da seguinte maneira

$$i\hbar(\lambda - \lambda')\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle = (\lambda - \lambda')\langle\lambda',k';t|H|\lambda,k;t\rangle. \tag{2.21}$$

Na equação acima, fazendo $\lambda \neq \lambda'$, concluímos que

$$i\hbar\left\langle \lambda',k';t\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\lambda,k;t\right\rangle = \langle\lambda',k';t|H|\lambda,k;t\rangle, \tag{2.22}$$

onde esta equação é válida somente para o caso $\lambda \neq \lambda'$. No entanto, se essa mesma condição fosse aplicada quando $\lambda = \lambda'$, claramente podemos dizer que $|\lambda,k;t\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger. Este resultado nos diz que $|\lambda,k;t\rangle$ é uma solução particular para a função de onda $|\psi(t)\rangle$.

Para eliminar essa restrição, fazendo com que o estado do sistema permaneça invariante, utilizaremos um fator de fase, o qual vai mudar a função de onda $\psi(t)$ para uma nova função,

$$\psi'(t) = e^{i\alpha(t)}\psi(t), \tag{2.23}$$

onde $\psi(t)$ e $\psi'(t)$ representam o mesmo estado quântico.

Em relação ao autoestado $|\lambda,k;t\rangle$ não fixamos o fator de fase, então temos a liberdade de definir um novo conjunto de autovetores de $I(t)$. Assim, podemos multiplicar $|\lambda,k;t\rangle$ por um fator de fase arbitrário dependente do tempo, implicando em um novo conjunto de autovetores de $I(t)$ que estão associados ao nosso conjunto inicial de autovetores, através de uma transformação de gauge dependente do tempo como sendo

$$|\lambda,k;t\rangle_\alpha = e^{i\alpha_{\lambda k}(t)}|\lambda,k;t\rangle, \tag{2.24}$$

onde $\alpha_{\lambda k}(t)$ são funções reais arbitrárias dependentes do tempo. Vale lembrar que o operador invariante $I(t)$ não possui derivadas temporais e que também os autoestados $|\lambda,k;t\rangle$ são ortonormais [veja equação (2.8)]. Dessa forma, os autoestados $|\lambda,k;t\rangle_\alpha$ da equação (2.24) serão também ortonormais. Para $\lambda \neq \lambda'$, a equação (2.22) será verdadeira para elementos de matriz obtidos em relação aos novos autoestados. Escolhendo as fases $\alpha_{\lambda k}(t)$ satisfazendo a equação (2.22) para $\lambda = \lambda'$, cada um dos novos autoestados satisfará a equação de Schrödinger. Então, esta condição nos leva a escrever a expressão abaixo (ver apêndice A.1):

$$i\hbar\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{kk'}\frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \left\langle \lambda',k';t \left| \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right) \right| \lambda,k;t \right\rangle. \tag{2.25}$$

Para que a equação acima seja satisfeita, os estados $|\lambda,k;t\rangle$ devem ser escolhidos de tal forma que o lado direito da mesma seja igual a zero para $k \neq k'$. A diagonalização é sempre possível já que o operador $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H$ é Hermitiano, então as funções de fase $\alpha_{\lambda k}(t)$ satisfazem a seguinte equação

$$\hbar\frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \left\langle \lambda,k;t \left| \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right) \right| \lambda,k;t \right\rangle. \tag{2.26}$$

Dessa forma, o novo conjunto de autoestados do operador invariante $I(t)$, $|\lambda,k;t\rangle_\alpha$, satisfaz a equação de Schrödinger e podemos escrever a solução geral da seguinte maneira:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda k} c_{\lambda k} e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\lambda,k;t\rangle, \tag{2.27}$$

onde $|\psi(t)\rangle$ é o vetor de estado solução da equação de Schrödinger, $c_{\lambda k}$ são coeficientes independentes do tempo e $|\lambda,k;t\rangle$ são os autoestados do invariante $I(t)$. A equação (2.27) mostra que os autoestados do operador invariante $I(t)$ são soluções da equação de Schrödinger.

2.3 Aplicação do método de invariantes para o OHDT unidimensional

Nesta seção utilizamos o método de operadores invariantes desenvolvido por Lewis e Riesenfeld para sistemas físicos harmonicamente oscilantes. Nesse caso, considerando uma partícula que realiza pequenas oscilações em uma dimensão, com Hamiltoniano dado por

$$H(t) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2, \tag{2.28}$$

onde q representa a coordenada canônica, p é o momento canonicamente conjulgado a q, m é a massa da partícula e $\omega(t)$ é a frequência angular dependente do tempo. As variáveis p e q satisfazem a relação de comutação canônica

$$[q,p] = i\hbar. \tag{2.29}$$

As equações canônicas do movimento são dadas por

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \tag{2.30}$$

e

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2(t)q. \tag{2.31}$$

Assim, derivando a equação (2.30) em relação ao tempo temos que

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m}, \tag{2.32}$$

e substituindo a equação (2.31) na equação acima, obtemos a equação do movimento deste sistema como sendo

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0. \tag{2.33}$$

O invariante exato correspondente a Hamiltoniana (2.28) é dado por [15]

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (p\rho - m\dot{\rho}q)^2\right], \tag{2.34}$$

onde q é uma função do tempo que satisfaz a equação (2.33) e $\rho(t)$ é uma função real que satisfaz a equação auxiliar (ver apêndice A.2)

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}. \tag{2.35}$$

Podemos reescrever a equação de autovalores (2.7) na forma

$$I|\phi_n(q,t)\rangle = \lambda_n|\phi_n(q,t)\rangle, \tag{2.36}$$

onde $\phi_n(q,t)$ são autofunções de $I(t)$ que formam um conjunto ortonormal completo correspondente para os autovalores independentes do tempo λ_n. Tomando a equação de Schrödinger dependente do tempo (2.2),

$$H(t)|\psi(q,t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(q,t)\rangle,$$

e usando o operador, $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$, escrevemos a equação (2.28) na forma

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2. \tag{2.37}$$

De acordo com o formalismo de Lewis e Riesenfeld, a solução da equação de Schrödinger, $\psi_n(q,t)$, está relacionada com $\phi_n(q,t)$ pela expressão

$$\psi_n(q,t) = e^{i\alpha_n(t)}\phi_n(q,t), \tag{2.38}$$

onde $\alpha_n(t)$ é a função de fase que satisfaz a equação

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n \middle| \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right) \middle| \phi_n \right\rangle. \tag{2.39}$$

Portanto, cada $\psi_n(q,t)$ satisfaz a equação de Schrödinger, sendo a solução geral da mesma dada por

$$\psi(q,t) = \sum_n c_n e^{i\alpha_n}\phi_n(q,t), \tag{2.40}$$

onde c_n são constantes independentes do tempo.

Para obtermos a função de onda de Schrödinger exata para o Hamiltoniano do oscilador unidimensional dependente do tempo (2.28), vamos utilizar uma transformação unitária dada por

$$\phi_n'(q,t) = U\phi_n(q,t), \tag{2.41}$$

onde o operador unitário é dado por

$$U = e^{-\frac{im\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2}. \tag{2.42}$$

Aplicando a transformação unitária sob o operador I, ele se transforma em I', de acordo com a expressão abaixo (ver apêndice A.3):

$$I' = UIU^\dagger, \tag{2.43}$$

com

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}, \tag{2.44}$$

onde a variável independente $\sigma = q/\rho$. Então, com a transformação unitária, a equação de autovalores (2.36) fica

$$I'\phi_n'(q,t) = \lambda_n\phi_n'(q,t). \tag{2.45}$$

Com a definição da nova variável independente, σ, escremos a equação (2.45) na forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right]\varphi_n(\sigma) = \lambda_n\varphi_n(\sigma), \tag{2.46}$$

ou

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{1}{\hbar^2}(2\lambda_n - \sigma^2)\right]\varphi_n(\sigma) = 0, \tag{2.47}$$

ou ainda

$$I'\varphi_n(\sigma) = \lambda_n\varphi_n(\sigma), \tag{2.48}$$

com

$$\phi_n'(q,t) = \frac{1}{\rho^{1/2}}\varphi_n(\sigma) = \frac{1}{\rho^{1/2}}\varphi_n(q/\rho). \tag{2.49}$$

O fator $1/\rho^{1/2}$ foi introduzido na equação acima para satisfazer a condição de normalização

$$\int \phi_n^{*'}(q,t)\phi_n'(q,t)dq = \int \varphi_n^*(\sigma)\varphi_n(\sigma)d\sigma = 1. \tag{2.50}$$

A equação (2.47) representa uma equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo, com solução dada por

$$\varphi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n}\right]^{1/2} e^{-\sigma^2/2\hbar} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right], \tag{2.51}$$

onde os autovalores λ_n são dados por

$$\lambda_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{2.52}$$

Aqui, H_n é o polinômio de Hermite de ordem n. Agora substituimos o resultado encontrado na equação (2.51), φ_n, na equação (2.49), para encontrarmos $\phi_n'(q,t)$, como

$$\phi_n'(q,t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]^{1/2} e^{-q^2/2\hbar\rho^2} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{2.53}$$

Portanto, de acordo com as equações (2.41), (2.42) e (2.53), onde $\phi_n(q,t) = U^\dagger\phi_n'(q,t)$, obtemos

$$\phi_n(q,t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]^{1/2} e^{\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho}{\rho} + \frac{i}{m\rho^2}\right)q^2} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{2.54}$$

A equação (2.54) representa as funções de onda de um sistema dado pelo Hamiltoniano (2.28) e pela equação de Schrödinger (2.2). Estamos em busca da solução geral $\psi(q,t)$ dada pela equação (2.38), então nosso próximo passo será acharmos as funções de fase $\alpha_n(t)$.

Para calcular as funções de fase $\alpha_n(t)$ que satisfazem a equação (2.39), devemos realizar uma transformação unitária no lado direito da equação (2.39).

Para eliminarmos $\omega^2(t)$ na hamiltoniana $H(t)$, usamos a equação auxiliar (2.35), $\omega^2(t) = (1/m^2\rho^4) - (\ddot{\rho}/\rho)$. Sabendo que $\phi'_n(q,t) = (1/\rho^{1/2})\varphi_n(q/\rho)$ da equação (2.49), obtemos (ver apêndice A.4)

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t) = \left\langle \varphi_n \left| -\frac{I'}{m\rho^2} \right| \varphi_n \right\rangle. \tag{2.55}$$

De (2.39) e com a condição de normalização φ_n, teremos

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{m}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{\rho^2}dt'. \tag{2.56}$$

Portanto, das equações (2.38) e (2.54), podemos explicitar a solução exata da equação de Schrödinger (2.2) como sendo

$$\psi_n(q,t) = e^{i\alpha_n(t)}\left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]^{1/2} e^{\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}+\frac{i}{m\rho^2}\right)q^2} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{2.57}$$

Dessa maneira, escrevemos a solução geral da equação de Schrödinger da seguinte forma:

$$\psi(q,t) = \sum_n c_n\psi_n(q,t), \tag{2.58}$$

onde $\psi_n(q,t)$ é a representação do vetor de estado que é solução da equação de Schrödinger e c_n são coeficientes independentes do tempo.

CAPÍTULO 3
Estados coerentes

Neste capítulo, vamos construir os estados coerentes para o oscilador hamônico simples quântico unidimensional. Faremos uma revisão da teoria quântica de um oscilador harmônico em termos dos operadores a e $a^\dagger$, para reescrever o Hamiltoniano do sistema em função dos mesmos. Vamos também calcular as flutuações quânticas da posição e do momento bem como o produto de incerteza.

3.1 Origem dos estados coerentes

Schrödinger em 1926, interessou-se em encontrar uma determinada classe de estados da mecânica quântica que mostrasse, de alguma maneira, o comportamento clássico de um oscilador harmônico. Em outras palavras, a energia média de um oscilador em um dado estado é igual à energia correspondente clássica (menos a energia do ponto zero em mecânica quântica $\hbar\omega/2$) e as médias da posição, q, e do momento, p, tem a mesma forma oscilatória que no caso clássico. Nesse mesmo ano, Schrödinger apresentou trabalhos muito importantes [29], para resolver o átomo de hidrogênio.

Em seus estudos, Schrödinger percebeu que a distribuição gaussiana de uma função de onda pode ser obtida de uma determinada superposição das funções de onda correspondentes aos autovalores discretos do oscilador harmônico, onde esses novos estados seguiam o movimento clássico. Nessa época, não se conhecia a natureza da amplitude de probabilidade da função de onda, e por isso a natureza complexa da função de onda chamava a atenção de Schrödinger. Para ele, uma motivação bastante relevante era da possibilidade de descobrir estados quânticos que comportavam-se como no movimento de uma partícula clássica em um dado potencial. Dessa maneira, apesar do princípio de incerteza não ser conhecido até aquele momento, os estudos de Schrödinger resultaram na descoberta que se assemelha em uma espécie de método de incerteza mínima, chamado *estados coerentes*. Na literatura, os estados coerentes são também chamados de estados de incerteza mínima, estados coerentes de Schrödinger ou estados coerentes de Glauber.

Os estados coerentes tornaram-se bastante conhecidos na década de 60 devido aos trabalhos de Klauder [52], Sudarshan [53] e Glauber [26]. Este último por sua utilidade em descrever o comportamento do campo de radiação.

Glauber propôs estados coerentes para um oscilador harmônico, onde consequentemente viraram um modelo para uma grande parte dos estados coerentes nos seus trabalhos [24-26], como também serviram no trabalho de Malkin, Man'ko e Trifonov [54]. O estado coerente do oscilador harmônico simples considerado por Schrödinger [29], segue o movimento de uma partícula clássica. Estados coerentes de um oscilador harmônico com frequência dependente do tempo foi investigado em [23, 55].

Os estados coerentes formam uma representação muito conveniente para os problemas da mecânica quântica, tomando por exemplo o oscilador harmônico. Podem ser abordados na literatura de três maneiras equivalentes: método do operador deslocamento, método do operador aniquilação e o método de incerteza mínima. A seguir descreveremos estes métodos.

(i) *Método do operador deslocamento*

Por definição, o operador deslocamento é dado da seguinte maneira:

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}, \tag{3.1}$$

onde $D(\alpha)$ é o operador deslocamento dependente de α, onde α é um número complexo, a e $a^\dagger$ são os operadores de aniquilação e de criação, respectivamente. Observamos que o operador deslocamento é um operador unitário, ou seja, $D^\dagger D = \mathbb{I}$.

Neste método, para o oscilador harmônico, os estados coerentes, $|\alpha\rangle$, são obtidos a partir da ação do operador deslocamento, D, no estado fundamental, $|0\rangle$. Para isso, vamos recorrer a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff dada por

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} e^{-1/2[\mathbf{A},\mathbf{B}]} \ldots e^{\mathbf{K}},$$

para escrever $D(\alpha)$, onde K é uma soma de produtos de comutadores de n-ésimo grau, e a equação acima é válida quando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutam ($[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$). Fazendo $\mathbf{A} = \alpha a^\dagger$ e $\mathbf{B} = -\alpha^* a$, temos que

$$D(\alpha) = e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}.$$

Assim,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}|0\rangle$$

$$= e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* a)^n}{n!}|0\rangle$$

$$= e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \right],$$

portanto os estados coerentes são dados por

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \equiv |\alpha\rangle. \tag{3.2}$$

São propriedades do operador deslocamento:

(a) $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$;

(b) $D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha$;

(c) $D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$;

(d) $D(\alpha + \beta) = D(\alpha) D(\beta) e^{-iIm(\alpha\beta^*)}$.

Mais detalhes sobre estas propriedades citadas acima, ver apêndice B.

(ii) *Método do operador aniquilação*

No oscilador harmônico, os estados coerentes, $|\alpha\rangle$, também são os autoestados do operador de aniquilação, a, como segue abaixo:

$$D(\alpha)D^\dagger(\alpha)a|\alpha\rangle = D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)|0\rangle = D(\alpha)(a|0\rangle + \alpha|0\rangle) = \alpha D(\alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

assim,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{3.3}$$

onde, $D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha$, $a|0\rangle = 0$ e $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$.

(iii) *Método de incerteza mínima*

Para o oscilador harmônico, as variáveis clássicas q e p variam conforme $sen(\omega t)$ e $cos(\omega t)$. Do ponto de vista da mecânica quântica, essas variáveis clássicas se transformam em operadores quânticos, onde estes operadores definem uma relação de comutação e uma relação de incerteza mínima dadas respectivamente por,

$$[q,p] = i\hbar, \tag{3.4}$$

e,

$$(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}. \tag{3.5}$$

3.2 Oscilador harmônico quântico

Nesta seção, vamos estudar as características de um oscilador harmônico com potencial unidimensional dado por

$$V(q) = \frac{kq^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}q^2, \tag{3.6}$$

onde $k = m\omega^2$.

Vamos agora, resolver o oscilador harmônico pelo método algébrico. Durante a resolução, inserimos algumas definições que serão de grande importância para se obter os estados coerentes de um oscilador harmônico.

Começamos então escrevendo a equação de Schrödinger independente do tempo com o Hamiltoniano contendo o potencial (3.6):

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)\psi = E\psi. \tag{3.7}$$

Na teoria quântica de um oscilador harmônico, é conveniente tratarmos este problema em termos dos dois operadores a e $a^\dagger$. Definindo os operadores aniquilação, a, e criação, $a^\dagger$, em função do operador momento, p, e do operador posição, q, teremos

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega q + ip), \tag{3.8}$$

e

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega q - ip). \tag{3.9}$$

Os operadores acima podem criar ou aniquilar um quantum de energia ($E = \hbar\omega$). Somando e depois subtraindo as equações (3.8) e (3.9), obtemos os operadores posição e momento em função de a e $a^\dagger$

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \tag{3.10}$$

e

$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger). \tag{3.11}$$

Podemos mostrar a relação de comutação $[a, a^\dagger]$, que vai ser útil quando quisermos expressar o Hamiltoniano em termos dos operadores criação e aniquilação, através das equações (3.8) e (3.9)

$$aa^\dagger = \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega q)^2 + im\omega[p,q] + p^2], \tag{3.12}$$

e

$$a^\dagger a = \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega q)^2 - im\omega[p,q] + p^2]. \tag{3.13}$$

Sabendo que $[p,q] = -i\hbar$, obtemos

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1. \tag{3.14}$$

Reescrevendo a equação de Schrödinger (3.7) na forma

$$H\psi = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq}\right)^2 + (m\omega q)^2\right]\psi = E\psi, \tag{3.15}$$

podemos escrever o Hamiltoniano como sendo

$$H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega q)^2] = \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger). \tag{3.16}$$

A equação acima é obtida facilmente isolando os termos p^2 da equação (3.12), e $(m\omega q)^2$ da equação (3.13), depois basta somar esses dois termos para se chegar na equação (3.16). O Hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \tag{3.17}$$

visto que de (3.14) obtemos $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$. Dessa maneira, podemos escrever a equação de autovalores

$$\hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle. \tag{3.18}$$

Definimos nosso conjunto $|E_n\rangle = |n\rangle$, então os diferentes níveis de energias possíveis de um oscilador harmônico é dado por

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.19}$$

assim, podemos escrever (3.18) de outra maneira de forma que

$$a^\dagger a|n\rangle = \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)|n\rangle. \tag{3.20}$$

Percebemos então que o termo que corresponde a um autovalor na equação acima, n, pode ser visto também isolando n na equação (3.19). Portanto podemos dizer que

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \tag{3.21}$$

onde comprovamos que o autoestado de energia é um autoestado de $a^\dagger a$ com autovalor n. O operador $a^\dagger a$ é conhecido como *operador número*, N, ou seja,

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{3.22}$$

onde $N = a^\dagger a$. Os níveis de energia do oscilador harmônico são igualmente espaçados, subimos e descemos os estados de energia utilizando os operadores a e $a^\dagger$. O operador N comuta com H, dessa maneira eles possuem autoestados simultâneos. Os autovalores de N são conhecidos como sendo $0, 1, 2, ...$, e denotamos os autoestados correspondentes para os autovalores n como sendo $|n\rangle$. Abaixo, seguem as propriedades de $|n\rangle$:

(a) $a|0\rangle = 0$;

(b) $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$;

(c) $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$;

(d) $|n\rangle = (a^{\dagger n}/\sqrt{n!})|0\rangle$;

(e) $\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}$;

(f) $\sum_n^\infty = 0|n\rangle\langle n| = \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ é um operador identidade.

Os estados coerentes do oscilador harmônico pelo método do operador aniquilação é dado por [28]

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n^\infty \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{3.23}$$

Vale dizer aqui que α pertence ao conjunto dos números complexos. As principais propriedades dos estados coerentes são:

(a) Dois distintos estados coerentes, $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, não são ortogonais:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\beta\alpha^*-\frac{1}{2}|\beta|^2}, \tag{3.24}$$

a sobreposição $\langle\alpha|\beta\rangle$ nunca é zero.

(b) O conjunto $|\alpha\rangle$ é linearmente independente.

(c) O conjunto $|\alpha\rangle$ é completo, onde temos uma relação de completeza dada na forma:

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \mathbb{I}, \tag{3.25}$$

sendo $\mathbb{I}$ um operador identidade.

Mais detalhes sobre essas propriedades veja Howard e Roy [56].

Agora, vamos calcular o valor esperado de q para os estados coerentes $|\alpha\rangle$. De (3.10), temos que

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}\langle\alpha|a^\dagger + a|\alpha\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}(\alpha^* e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t})$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}[\alpha^*(cos\omega t + isen\omega t) + \alpha(cos\omega t - isen\omega t)]. \tag{3.26}$$

Fazendo $\alpha = u + iv$, e substituindo na última equação, observamos que

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}[ucos\omega t + iusen\omega t - ivcos\omega t + vsen\omega t$$

$$+ucos\omega t - iusen\omega t + ivcos\omega t + vsen\omega t] = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}[2ucos\omega t + 2vsen\omega t]$$

$$= \left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}|\alpha|[cos\omega t cos\phi + sen\omega t sen\phi], \tag{3.27}$$

onde

$$|\alpha| = \sqrt{u^2+v^2}; \tag{3.28}$$

$$\phi = arg(\alpha); \tag{3.29}$$

$$cos\phi = u/\sqrt{u^2+v^2}; \tag{3.30}$$

$$sen\phi = v/\sqrt{u^2+v^2}. \tag{3.31}$$

Assim, sabendo que, $cos\omega t cos\phi + sen\omega t sen\phi = cos(\omega t - \phi)$, podemos escrever a equação (3.27) da seguinte maneira:

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle = \left(\frac{2\hbar\omega|\alpha|^2}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} cos(\omega t - \phi). \tag{3.32}$$

Do ponto de vista de Glauber, o limite clássico, é obtido quando $\hbar \to 0$, $|\alpha| \to \infty$, tal que $\hbar|\alpha|^2 \to$ finito. Então, podemos escrever a equação (3.32) de maneira que

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle = Acos(\omega t - \phi), \tag{3.33}$$

onde A é uma constante. Note, que esta solução mostrada acima, é exatamente a solução do oscilador harmônico simples. Analogamente, podemos mostrar que

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = -m\omega\left(\frac{2\hbar\omega|\alpha|^2}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} sen(\omega t - \phi), \tag{3.34}$$

onde novamente no limite de Glauber, para este caso teremos

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = -m\omega A sen(\omega t - \phi), \tag{3.35}$$

onde esta equação representa o momento clássico do oscilador.

Tomando a equação (3.17), podemos calcular o valor esperado da energia quântica H como sendo

$$\langle\alpha|H|\alpha\rangle = \left\langle\alpha\left|\hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\right|\alpha\right\rangle = \hbar\omega\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}\langle\alpha|\alpha\rangle.$$

Daí,

$$\langle\alpha|H|\alpha\rangle = \hbar\omega|\alpha|^2 + \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{3.36}$$

Da equação (3.36), podemos mostrar o Hamiltoniano clássico H_c, que é a energia:

$$E = H_c = \langle\alpha|H|\alpha\rangle - \langle 0|H|0\rangle = \hbar\omega|\alpha|^2. \tag{3.37}$$

Para se obter o valor esperado de p ($\langle p\rangle$), $\langle q^2\rangle$ e $\langle p^2\rangle$, procedemos da mesma maneira que vimos na equação (3.27). Obtendo $\langle p\rangle$, temos que

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = (2m\hbar\omega)^{1/2}(vcos\omega t - usen\omega t). \tag{3.38}$$

Calculando $\langle q^2\rangle$, temos

$$\langle\alpha|q^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}(2u^2cos^2\omega t + 2v^2sen^2\omega t + 4uvsen\omega tcos\omega t + 1/2)$$

$$= \frac{2\hbar}{m\omega}(u^2cos^2\omega t + v^2sen^2\omega t + uvsen\omega tcos\omega t + 1/4),$$

então,

$$\langle\alpha|q^2|\alpha\rangle = \left(\frac{2\hbar|\alpha|^2}{m\omega}\right)\left[cos^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{4|\alpha|^2}\right]. \tag{3.39}$$

Calculando $\langle p^2\rangle$, obtemos

$$\langle\alpha|p^2|\alpha\rangle = (m\omega\hbar)[2v^2cos^2\omega t + 2u^2sen^2\omega t - 4uvsen\omega tcos\omega t + 1/2]. \tag{3.40}$$

Sabendo que,

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2, \tag{3.41}$$

e também que

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2, \tag{3.42}$$

finalmente, podemos calcular as flutuações em q e p para os estados coerentes $|\alpha\rangle$, tal que

$$(\Delta q)^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right), \tag{3.43}$$

e

$$(\Delta p)^2 = \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right). \tag{3.44}$$

Dessa maneira, para finalizar, temos que o produto de incerteza é dado por

$$(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}. \tag{3.45}$$

De (3.45), observamos que os estados coerentes, são estados de incerteza mínima. Isto implica que a forma e a propriedade incerteza mínima do pacote de ondas são preservadas no decorrer do tempo.

CAPÍTULO 4

Quantização de um circuito LC

No presente capítulo, vamos resolver classicamente e quânticamente o problema de um circuito LC (indutância-capacitância). No caso clássico, encontraremos facilmente que a carga Q e o fluxo magnético Φ (por definição) são funções do tempo. Já no caso quântico, a carga e o fluxo magnético aparecerão como operadores quânticos, ambos em função de a e $a^{\dagger}$.

4.1 Considerações iniciais

Nos anos 70, Louisell [32] foi o pioneiro em discutir a evolução temporal e os efeitos quânticos de um circuito LC (indutor, L e capacitor, C). Aqui, vale mencionar que ele usou o comutador $[q,p] = i\hbar$, em que q e p são a carga e a corrente do circuito, respectivamente, e $\hbar$ é a constante de Planck (h) dividida pelo fator 2π. A partir de uma análise dimensional, se verifica que este comutador é incorreto e deve ser modificado. Como já citamos na introdução desta dissertação, outros autores também usaram este comutador incorretamente.

O circuito LC não-dissipativo representa um caso ideal. Para um circuito mesoscópico mais realista, é preciso considerar o efeito de R (resistência) no circuito, ou seja, a dissipação. Faremos a consideração da resistência no próximo capítulo.

Recentemente, os efeitos quânticos de circuitos mesoscópicos trouxeram interesses de muitos físicos devido ao avanço dos estudos de sistemas nanoestruturados. O trabalho de Louisell tornou-se bastante popular devido os circuitos LC mesoscópicos apresentarem várias aplicações em computadores quânticos. Muitos trabalhos sobre a quantização de circuitos elétricos mais complexos têm sido publicados recentemente [57-61].

4.2 Quantização de um circuito LC

4.2.1 Circuito LC clássico

Nessa abordagem, consideremos um circuito LC ideal, ou seja, desprezaremos aqui a dissipação de energia que seria causada pela resistência. O circuito será composto apenas de um capacitor de capacitânia C e de um indutor de indutância L. Como não há dissipação de energia nesse sistema, a energia armazenada inicialmente no circuito permanecerá constante.

Vamos supor que, a energia armazenada no circuito seja responsável pela carga inicial do capacitor. Então, pela primeira lei de Kirchhoff podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{Q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0, \tag{4.1}$$

onde Q é a carga armazenada pelo capacitor e i a corrente elétrica que percorre o circuito. Se derivarmos a equação acima em relação ao tempo, obtemos que

$$\frac{i}{C} + L\frac{d^2i}{dt^2} = 0, \tag{4.2}$$

ou ainda,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0, \tag{4.3}$$

onde $dQ/dt = i$ e a frequência angular do circuito é dada por $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. A solução geral da equação diferencial (4.3) é dada por

$$i(t) = Acos(\omega_0 t + \theta), \tag{4.4}$$

onde A é a amplitude e θ é a fase inicial.

Se integrarmos a equação acima em relação ao tempo, obteremos a carga como sendo

$$Q(t) = \frac{A}{\omega_0} sen(\omega_0 t + \theta). \tag{4.5}$$

A equação do movimento para a carga, pode ser obtida pelo Hamiltoniano [62, 63]

$$H(t) = \frac{1}{2L}\Phi^2 + \frac{1}{2C}Q^2, \tag{4.6}$$

com $\Phi(t) = L(dQ/dt)$.

4.2.2 Circuito LC quântico

Aqui vamos quantizar o circuito LC. Para isso, é preciso resolver a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2L}\frac{d^2\psi}{dQ^2}+\frac{1}{2}L\omega^2Q^2\psi=E\psi, \tag{4.7}$$

associado ao Hamiltoniano (4.6)

$$H(t)\psi(Q,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(Q,t), \tag{4.8}$$

onde Q e Φ são operadores que satisfaz o comutador $[Q,\Phi]=i\hbar$, com $\Phi=-i\hbar\partial/\partial Q$. Sabemos que a solução geral analítica da equação de Schrödinger (4.7) é dada por

$$\psi_n(Q)=\left(\frac{L\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \tag{4.9}$$

onde $\xi\equiv(\sqrt{L\omega/\hbar})Q$ e H_n são os polinômios de Hermite.

Sabendo que Louisell usou uma relação de comutação incorreta, vamos apresentar a relação de comutação correta, com base em uma análise dimensional, que será dada por

$$[Q,\Phi]=i\hbar, \tag{4.10}$$

onde Φ é o fluxo magnético, Q continua sendo a carga do circuito e, estes dois operadores são canonicamente conjugados.

Agora vamos escrever os operadores a e $a^\dagger$ em termos da carga Q e do fluxo magnético Φ,

$$a=\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}(\omega_0 LQ+i\Phi), \tag{4.11}$$

e

$$a^\dagger=\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}(\omega_0 LQ-i\Phi), \tag{4.12}$$

como também podemos calcular Φ e Q em função dos operadores de criação e aniquilação bastando subtrair (4.11) e (4.12)

$$a-a^\dagger=\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}(2i\Phi), \tag{4.13}$$

para se obter Φ

$$\Phi=i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 L}{2}}[a^\dagger-a], \tag{4.14}$$

e somando (4.11) e (4.12)

$$a + a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}(2\omega_0 L Q), \tag{4.15}$$

para se obter Q

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_0 L}}[a + a^\dagger]. \tag{4.16}$$

Para expressar o Hamiltoniano em termos de a e $a^\dagger$, podemos seguir os passos da seção 3.2, onde calculamos os termos $aa^\dagger$ e $a^\dagger a$, com diferença em apenas trocar algumas variáveis. Portanto o Hamiltoniano fica o mesmo da seção (3.2),

$$H(t) = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \tag{4.17}$$

CAPÍTULO 5

Dinâmica quântica de um circuito RLC mesoscópico

Neste capítulo, apresentaremos uma descrição quântica de um circuito RLC mesoscópico. Vamos nos basear no Hamiltoniano de Caldirola-Kanai e no método dos invariantes quânticos para resolvermos a equação de Schrödinger para este circuito e escrever as funções de onda correspondentes em termos de uma solução particular da equação de Milne-Pinney. Em seguida, construiremos os estados coerentes para o circuito RLC quantizado, e calcularemos as flutuações quânticas da carga e do fluxo magnético bem como o produto de incerteza.

5.1 Considerações iniciais

O estudo de sistemas mesoscópicos tem atraído bastante atenção na literatura nos últimos anos [8, 10, 16-18, 21, 23, 28, 32-36, 62-78]. O grande interesse nesses sistemas é motivado em parte por causa do rápido desenvolvimento da nanofísica e nanoelectrônica e em parte devido a fabricação de dispositivos eletrônicos, a miniaturização dos circuitos integrados e componentes que estão indo para a escala nanométrica. Na verdade, as modernas técnicas em material elétrico têm proporcionado meios para o desenvolvimento de estruturas pequenas com a resolução que já se aproxima da escala atômica. No entanto, quando os dispositivos ou circuitos são tão pequenos que a coerência inelástica do portador de carga se aproxima do comprimento de onda de Fermi, a aplicação da mecânica clássica falha, e efeitos quânticos dos dispositivos e circuitos devem ser considerados. Por conseguinte, uma descrição quântica destes sistemas torna-se necessária a fim de investigar as propriedades quânticas dos dispositivos e circuitos.

O fenômeno de dissipação é um assunto intrinsecamente relacionado aos circuitos elétricos e requer atenção especial. Neste contexto, o estudo da quantização e dos efeitos quânticos de um circuito RLC mesoscópico dissipativo é certamente de grande interesse físico. De fato, nos últimos anos, este circuito mais realista tem sido estudado por vários autores com diferentes abordagens [2-6, 9, 10, 17-19].

5.2 Quantização de um circuito RLC

5.2.1 Circuito RLC clássico

Como é bem conhecido, a equação do movimento clássica para a carga $q(t)$ de um circuito RLC sem fonte é

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0, \tag{5.1}$$

onde os elementos de circuito R, L e C representam resistência, impedância e capacitância respectivamente, e $\omega^2 = 1/LC$ é a frequência do circuito na ausência de resistência. A equação (5.1) trata-se de um oscilador harmônico amortecido, onde sua solução é conhecida por ser

$$q(t) = Ae^{-Rt/2L} sen(\Omega t + \delta), \tag{5.2}$$

onde A e δ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e $\Omega^2 = \omega^2 - (R/2L)^2$ é a frequência de modificação do circuito. Aqui, consideramos apenas as soluções oscilatórias, isto é, no caso onde $\Omega^2 > 0$. Além disso, a equação do movimento para a carga, dada pela equação (5.1) pode ser obtida diretamente a partir do Hamiltoniano clássico

$$H(t) = e^{-(R/L)t}\frac{\Phi^2}{2L} + \frac{1}{2}e^{(R/L)t}L\omega^2 q^2, \tag{5.3}$$

onde Φ é o fluxo magnético definido por $\Phi(t) = L(dq/dt)$. Este Hamiltoniano é conhecido na literatura como Hamiltoniano de Caldirola-Kanai e tem sido frequentemente utilizado para estudar sistemas quânticos dependentes do tempo em vários problemas físicos, como em Hasse [79] e em Um, Yeon e George [80].

5.2.2 Circuito RLC quântico

Para obtermos uma descrição quântica do circuito RLC precisamos quantizá-lo. Para este efeito, é preciso resolver a equação de Schrödinger associado ao Hamiltoniano (5.3)

$$H(t)\Psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t), \tag{5.4}$$

onde q e Φ são operadores que satisfaz o comutador $[q,\Phi] = i\hbar$, (em vez de $[q,p] = i\hbar$) com $\Phi = -i\hbar\partial/\partial q$. Podemos obter as soluções da equação (5.4) com a ajuda do método de invariantes quânticos dinâmicos desenvolvido por Lewis e Riesenfeld. Segundo este método, se um sistema admite uma invariante $I(t)$ (constante do movimento), é possível encontrar um estado quântico completo, cuja evolução é dada pela equação Schrödinger, em termos de autoestados ortonormalizados $\phi_n(q,t)$ do operador invariante não trivial Hermitiano $I(t)$, com autovalores λ_n independentes do tempo e um fator de fase $\beta_n(t)$. A solução dessa equação pode ser escrita na forma

$$\psi_n(q,t) = e^{i\beta_n(t)}\phi_n(q,t), \tag{5.5}$$

onde as funções de fase $\beta_n(t)$ são determinadas pela equação

$$\hbar\frac{d\beta_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \phi_n \right\rangle. \tag{5.6}$$

Além disso, o operador invariante $I(t)$, deve satisfazer a condição

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I,H] + \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \tag{5.7}$$

Vários operadores invariantes lineares satisfazem a equação (5.7) como em [17, 81], mas neste trabalho estamos interessados em lidar com operadores invariantes Hermitianos quadráticos.

Agora, sabe-se que um invariante quadrático dependente do tempo que satisfaz a equação (5.7) é dado por [16, 18]

$$I(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (\rho\Phi - Le^{Rt/L}\dot{\rho}q)^2\right], \tag{5.8}$$

onde $\rho(t)$ é uma função real dependente do tempo que satisfaz a equação Milne-Pinney [82, 83]

$$\ddot{\rho}(t) + \frac{R}{L}\dot{\rho}(t) + \omega^2\rho = \frac{e^{-2Rt/L}}{L^2\rho^3}. \tag{5.9}$$

Em seguida, nós obtemos os autoestados $\phi_n(q,t)$ de $I(t)$. Então, consideramos a equação de autovalor

$$I(t)\phi_n(q,t) = \lambda_n\phi_n(q,t), \tag{5.10}$$

e o operador unitário [16]

$$U = exp\left(-\frac{iLe^{Rt/L}\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right). \tag{5.11}$$

Ao utilizar este operador, podemos transformar o invariante (5.8) para a forma mais simples

$$I' = UIU^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}. \tag{5.12}$$

Então, a equação de autovalor para $I(t)$ pode ser escrita como

$$I'\phi'_n(q,t) = \lambda_n \phi'_n(q,t), \tag{5.13}$$

com

$$\phi'_n(q,t) = U\phi_n(q,t). \tag{5.14}$$

Assim, fazendo $\sigma = q/\rho$, podemos expressar a equação (5.13) como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right]\varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma), \tag{5.15}$$

onde φ_n está relacionado com ϕ'_n por

$$\varphi_n(\sigma) = \varphi_n(q/\rho) = \rho^{1/2}\phi'_n(q,t). \tag{5.16}$$

O fator $\rho^{1/2}$ foi introduzido para satisfazer a condição de normalização. Portanto, as soluções φ_n da equação (5.15) são as autofunções

$$\varphi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n}\right]^{1/2} e^{-\sigma^2/2\hbar} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right], \tag{5.17}$$

com os respectivos autovalores

$$\lambda_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{5.18}$$

onde H_n é o polinômio de Hermite de ordem n. Assim, usando as equações (5.11), (5.14), (5.16) e (5.17) obtemos

$$\phi_n(q,t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]^{1/2} exp\left[\frac{iLe^{Rt/L}}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{iLe^{-Rt/L}}{L\rho_l^2}\right)q^2\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{5.19}$$

O próximo passo é encontrar a função de fase dada pela equação (5.6). Depois de um pouco de álgebra obtemos que

$$\beta_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{e^{-Rt'/L}}{L\rho^2(t')}dt'. \tag{5.20}$$

Vamos agora considerar uma solução particular da equação Milne-Pinney (5.9) dada por [18]

$$\rho(t) = \frac{e^{-Rt/2L}}{(L\Omega)^{1/2}}. \tag{5.21}$$

Ao utilizar esta solução particular na equação (5.20) obtemos a função de fase como

$$\beta_n(t) = -\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right)t. \tag{5.22}$$

Portanto, fazendo uso das equações (5.21) e (5.22), podemos escrever as soluções $\psi_n(q,t)$ da equação de Schrödinger (5.4), como

$$\psi_n(q,t) = \left[\frac{(L\Omega)^{1/2}}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n}\right]^{1/2} exp\left\{\left[\frac{R}{4L} - i\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]t\right\}$$
$$\times exp\left[-\frac{Le^{Rt/L}}{2\hbar}\left(\Omega+\frac{iR}{2L}\right)q^2\right] H_n\left[\left(\frac{L\Omega}{\hbar}\right)^{1/2} e^{Rt/L}q\right]. \tag{5.23}$$

Esta expressão representa a função de onda exata para o circuito RLC mesoscópico. Finalizamos esta seção observando que a evolução de um estado geral de Schrödinger pode ser escrito como $\Psi(q,t) = \sum_n c_n\psi_n(q,t)$ onde os coeficientes c_n são independentes do tempo.

5.2.3 Estados coerentes

Nesta subseção, vamos construir estados coerentes para o circuito RLC mesoscópico quantizado. Para este fim, definimos os operadores de aniquilação e criação definidos como

$$b' = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q}{\rho} + i\rho\Phi\right], \tag{5.24}$$

e

$$b'^{\dagger} = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q}{\rho} - i\rho\Phi\right], \tag{5.25}$$

com ρ dada pela equação (5.21) e $[b', b'^{\dagger}] = 1$. Em termos desses operadores, o invariante I dado pela equação (5.12) pode ser reescrito como

$$I' = \hbar\left(b'^{\dagger}b' + \frac{1}{2}\right), \tag{5.26}$$

cujos estados coerentes tem a forma [16, 21, 23]

$$\varphi_\alpha(\sigma,t) = exp\left(-\frac{|\alpha^2|}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} exp[i\beta_n(t)]\varphi_n(\sigma) \tag{5.27}$$

onde α é um número arbitrário complexo. Em seguida, usando equações (5.1), (5.14), (5.16) e (5.27) temos que os estados coerentes para o circuito RLC descrito pelo hamiltoniano (5.3) são dadas por

$$\phi_\alpha(q,t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} exp\left[\frac{iLe^{Rt/L}}{2\hbar\rho}q^2\right]\varphi_n(\alpha,t). \tag{5.28}$$

Esses estados satisfazem a equação de autovalor

$$b\phi_n(q,t) = \alpha(t)\phi_\alpha(q,t), \tag{5.29}$$

com b e b' relacionados por

$$b = U^\dagger b' U = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\frac{q}{\rho} + i(\rho\Phi - Le^{Rt/L}\dot{\rho}q)\right], \tag{5.30}$$

e

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\Omega t}, \tag{5.31}$$

onde usamos a equação (5.22) para $n = 0$. Aqui, observa-se que, em termos do operador b, o invariante na equação (5.8) pode ser expressado como $I = \hbar(b^\dagger b + 1/2)$.

Vamos agora calcular o valor esperado da carga q no estado $\phi_\alpha(q,t)$. Após um cálculo simples, encontramos

$$\langle q\rangle = \left(\frac{2\hbar|\alpha|^2}{L\Omega}\right)^{1/2} e^{-Rt/2L} sen(\Omega t + \gamma), \tag{5.32}$$

onde γ é o argumento do número complexo α. Comparando este resultado com o da equação (5.2), podemos ver que o centro do estado coerente do pacote de onda segue o movimento de uma partícula clássica. Assim, o resultado acima concorda com a idéia original de Schrödinger sobre os estados coerentes, que estava interessado em encontrar estados da mecânica quântica que seguia o movimento de uma partícula clássica em um dado potencial [28]. Em seguida, nós calculamos as flutuações quânticas de q e Φ no estado $\phi_\alpha(q,t)$. Após alguma álgebra nós achamos que

$$\langle\Delta q\rangle^2 = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\rho^2, \tag{5.33}$$

e

$$\langle\Delta\Phi\rangle^2 = \langle\Phi^2\rangle - \langle\Phi\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{\rho^2} + (Le^{Rt/L}\dot{\rho})^2\right]. \tag{5.34}$$

Assim, o produto de incerteza é expressado como

$$(\Delta q)(\Delta\Phi) = \frac{\hbar\omega}{2\Omega}, \tag{5.35}$$

onde temos usado a solução particular (5.21). Aqui, é importante notar que, como consequência da presença da resistência R no circuito, a relação de incerteza (5.35) não atinge seu valor mínimo. Os estados coerentes $\phi_\alpha(q,t)$ na verdade correspondem aos estados conhecidos como *comprimidos*. Além disso, na ausência da resistência R no circuito, a solução particular da equação Milne-Pinney [ver (5.21)] torna-se $\rho = (1/L\omega)^{1/2}$. Para este caso, o hamiltoniano (5.3), os estados coerentes $\phi_\alpha(q,t)$, o valor esperado de q visto em (5.32), as flutuações quânticas Δq e $\Delta\Phi$ dadas pelas equações (5.33) e (5.34), respectivamente, e o produto de incerteza (5.35) são reduzidas às do modelo do oscilador harmônico simples.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, apresentamos uma descrição quântica simples e direta de um circuito RLC mesoscópico. Com base no Hamiltoniano de Caldirola-Kanai e no método de invariantes quânticos resolvemos a equação de Schrödinger para este sistema, como também escrevemos as funções de onda correspondentes em termos de uma solução particular da equação de Milne-Pinney. Construímos também os estados coerentes e investigamos algumas propriedades quânticas do circuito RLC quantizado. Em particular, vimos que, em virtude da presença da resistência R no circuito, a relação de incerteza de carga e de fluxo magnético não atinge o seu valor mínimo. Além disso, demonstramos que os estados coerentes do circuito quantizado são na verdade equivalentes aos estados conhecidos como estados comprimidos. Vimos que, na ausência da resistência R, todos os resultados são reduzidos aos do modelo usual do oscilador harmônico independente do tempo.

Em conclusão, gostaríamos de salientar que o tratamento alternativo desenvolvido neste trabalho oferece algumas vantagens em comparação com outros métodos encontrados na literatura, a saber: (i) permite uma derivação simples e direta das funções de onda do circuito RLC mesoscópico, (ii) as funções de onda são completamente determinadas pelo conhecimento de uma solução particular da equação de Milne-Pinney, (iii) permite a construção dos estados coerentes mais facilmente do que outros métodos e (iv) permite uma forma mais direta e menos obscura para analisar as propriedades físicas do sistema, já que os estados coerentes são estados bem conhecidos e os valores esperados de grandezas físicas nesses estados são, em princípio, facilmente avaliados. Estes estados também permitem que se analise com mais facilidade a correspondência clássica e quântica.

Esperamos adiante, fazer o estudo do comportamento de um sistema onde a resistência, a impedância e a capacitância dependam do tempo, dessa maneira dando continuidade à linha de pesquisa que desenvolvemos neste trabalho. Por fim, esperamos que a abordagem alternativa desenvolvida no presente trabalho possa ser empregada no estudo de circuitos mesoscópicos semelhantes.

APÊNDICE A
Apêndice do capítulo 2

A.1 Dedução da equação (2.25)

Para obtermos a equação (2.25), vamos ter que utilizar a equação (2.24) na equação (2.18), onde segue que:

$$(\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\alpha_{\lambda k}}|\lambda, k\rangle) = \frac{\partial I}{\partial t}e^{i\alpha_{\lambda k}}|\lambda, k\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - I)\left[i\frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t}e^{i\alpha_{\lambda k}}|\lambda, k\rangle + e^{i\alpha_{\lambda k}}\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k\rangle\right] = \frac{\partial I}{\partial t}e^{i\alpha_{\lambda k}}|\lambda, k\rangle. \tag{A.1}$$

Agora fazemos o produto escalar da equação (A.1) com o estado $e^{-i\alpha_{\lambda' k'}}|\lambda', k'\rangle$ abaixo:

$$i\lambda\left\langle \lambda', k' \left| \frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t} \right| \lambda, k \right\rangle - i\lambda'\left\langle \lambda', k' \left| \frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t} \right| \lambda, k \right\rangle + \lambda\left\langle \lambda', k' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \lambda, k \right\rangle - \lambda'\left\langle \lambda', k' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \lambda, k \right\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle \lambda', k'|H|\lambda, k\rangle(\lambda - \lambda'),$$

onde o segundo membro é obtido de (2.14). Dando continuação aos nossos cálculos, trazendo o termo $1/i\hbar$ para o primeiro membro, encontramos que

$$\hbar(\lambda' - \lambda)\left\langle \lambda', k' \left| \frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t} \right| \lambda, k \right\rangle + i\hbar(\lambda - \lambda')\left\langle \lambda', k' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \lambda, k \right\rangle = \langle \lambda', k'|H|\lambda, k\rangle(\lambda - \lambda')$$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda')\left\langle \lambda', k' \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \lambda, k \right\rangle = (\lambda - \lambda')\hbar\delta_{kk'}\frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t}\langle \lambda', k'|\lambda, k\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda')\left\langle \lambda', k' \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \lambda, k \right\rangle = (\lambda - \lambda')\hbar\delta_{kk'}\frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t}.$$

Para $\lambda = \lambda'$, teremos que

$$\hbar\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{kk'}\frac{\partial \alpha_{\lambda k}}{\partial t} = \left\langle \lambda, k' \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \lambda, k \right\rangle. \tag{A.2}$$

A.2 Dedução da equação (2.35)

Vamos assumir um operador invariante Hermitiano $I(t)$ que tenha a forma quadrática

$$I(t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q,p\}_+\right], \tag{A.3}$$

onde α, β e γ são funções reais do tempo, o fator numérico multiplicativo foi escolhido por conveniência, e $q, p_+ = qp + pq$ representa a notação usual de anticomutação.

Estamos em busca de construir um novo invariante na forma quadrática. Vamos derivar em relação ao tempo o operador $I(t)$ na equação (A.3), de maneira que obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}[2\alpha q\dot{q} + \dot{\alpha}q^2 + 2\beta p\dot{p} + \dot{\beta}p^2 + \dot{\gamma}\{q,p\}_+ + \gamma(q\dot{p} + \dot{q}p + p\dot{q} + \dot{p}q)]. \tag{A.4}$$

Substituindo em (A.4), $\dot{q}$ e $\dot{p}$ dados pelas equações (2.30) e (2.31) respectivamente, após algumas álgebras, chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}\left\{[\dot{\alpha} - 2m\omega^2\gamma]q^2 + \left[\dot{\beta} + \frac{2\gamma}{m}\right]p^2 + \left[\dot{\gamma} + \frac{\alpha}{m} - m\omega^2\beta\right]\{q,p\}_+\right\} = 0. \tag{A.5}$$

Mas, para satisfazer a equação (2.3), tiramos de (A.5), as relações abaixo:

$$\dot{\alpha} = 2m\omega^2\gamma, \tag{A.6}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2\gamma}{m} \tag{A.7}$$

e

$$\dot{\gamma} = -\frac{\alpha}{m} + m\omega^2\beta. \tag{A.8}$$

Por conveniência, apresentamos outra função, $\sigma(t)$, como sendo

$$\sigma^2(t) = \beta(t), \tag{A.9}$$

onde $\sigma(t)$ é uma função real dependente do tempo. Podemos então, reescrever a equação (A.7) como

$$\gamma = -m\sigma\dot{\sigma}. \tag{A.10}$$

Da mesma maneira, podemos escrever a equação (A.8) de outra forma

$$-m(\sigma\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}^2) = -\frac{\alpha}{m} + m\omega^2\beta \Rightarrow m^2(\sigma\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}^2) = \alpha - m^2\omega^2\sigma^2,$$

ou ainda,

$$\alpha = m^2[(\sigma\ddot{\sigma}+\dot{\sigma}^2)+\omega^2\sigma^2]. \tag{A.11}$$

Agora, para expressarmos o nosso invariante quadrático, em vez de três, temos somente uma função, $\sigma(t)$ para se determinar. Então, dando prosseguimento ao nosso raciocínio, devemos agora derivar a expressão (A.11) com relação ao tempo,

$$\dot{\alpha} = m^2[(\sigma\dddot{\sigma}+\ddot{\sigma}\dot{\sigma}+2\dot{\sigma}\ddot{\sigma})+(\omega^2 2\sigma\dot{\sigma}+\sigma^2 2\omega\dot{\omega})],$$

obtendo assim

$$\dot{\alpha} = m^2(\sigma\dddot{\sigma}+3\ddot{\sigma}\dot{\sigma})+2m^2\omega\sigma(\omega\dot{\sigma}+\sigma\dot{\omega}). \tag{A.12}$$

Podemos igualar a equação acima com a expressão (A.6), já que são equivalentes. Dessa maneira, teremos

$$m^2(\sigma\dddot{\sigma}+3\ddot{\sigma}\dot{\sigma})+2m^2\omega\sigma(\omega\dot{\sigma}+\sigma\dot{\omega})+2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma}=0. \tag{A.13}$$

Podemos arrumar a última equação da seguinte forma

$$\sigma\frac{d}{dt}[m^2\ddot{\sigma}+m^2\omega^2\sigma]+3\dot{\sigma}(m^2\ddot{\sigma}+m^2\omega^2\sigma)=0. \tag{A.14}$$

Vamos adotar uma função auxiliar, z, dada por

$$z = m^2(\ddot{\sigma}+\omega^2\sigma), \tag{A.15}$$

e substituir a mesma para resolver a expressão (A.14). Então teremos

$$\sigma\frac{dz}{dt}+3\dot{\sigma}z=0, \tag{A.16}$$

ou,

$$\sigma\dot{z}=-3\dot{\sigma}z. \tag{A.17}$$

Integrando em relação ao tempo a expressão (A.17), obtemos a seguinte solução

$$z = c\sigma^{-3} \Rightarrow m^2(\ddot{\sigma}+\omega^2\sigma)=\frac{c}{\sigma^3}, \tag{A.18}$$

onde c é uma constante de integração. Isolando o termo $\ddot{\sigma}$ na equação (A.18), e depois substituindo em (A.11), teremos que

$$\alpha = m^2\dot{\sigma}^2+\frac{c}{\sigma^2}. \tag{A.19}$$

De acordo com as equações (A.9), (A.10) e (A.19), podemos expressar o invariante dado por (A.3) na forma

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{\sigma^2}\right)q^2 + (\sigma p - m\dot{\sigma}q)^2\right]. \tag{A.20}$$

Por conveniência, faremos uma transformação de escala

$$\sigma(t) = c^{1/4}\rho(t), \tag{A.21}$$

onde $\rho(t)$ é uma nova função auxiliar dependente do tempo. Assim sendo, podemos reescrever o invariante na forma

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2\right], \tag{A.22}$$

com vínculo dado por

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}. \tag{A.23}$$

A.3 Dedução da equação (2.43)

Consideremos o invariante (2.34) escrito na forma

$$I(t) = \frac{1}{2}\frac{\rho^2 p^2}{2} + \frac{\rho^2 p^2}{2} - \frac{m\rho\dot{\rho}}{2}pq - \frac{m\rho\dot{\rho}}{2}qp + \frac{m^2\dot{\rho}^2 q^2}{2}. \tag{A.24}$$

Das equações (2.43) e (2.45), temos

$$I'\phi'_n = (UIU^\dagger)\phi'_n, \tag{A.25}$$

onde U é dado por (2.42). Se substituirmos (A.24) em (A.25), encontraremos que

$$\begin{aligned}
(UIU^\dagger)\phi'_n = {} & U\left(-\frac{\rho^2}{2}\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)U^\dagger\phi'_n + U\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}U^\dagger\phi'_n\right) \\
& + U\left[\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)q\right]U^\dagger\phi'_n \\
& + U\left[\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}q\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\right]U^\dagger\phi'_n \\
& + U\left(\frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\right)U^\dagger\phi'_n,
\end{aligned} \tag{A.26}$$

onde usamos $p = -i\hbar\partial/\partial q$. Da equação acima, obtemos que

$$(UIU^\dagger)\phi'_n = U\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q^2}\right)\phi'_n - \frac{\hbar^2\rho^2}{2}\frac{\partial U^\dagger}{\partial q}\frac{\partial\phi'_n}{\partial q} - \frac{\hbar}{2}\rho^2\frac{\partial U^\dagger}{\partial q}\frac{\partial\phi'_n}{\partial q} - \frac{\hbar^2\rho^2}{2}U^\dagger\frac{\partial^2\phi'_n}{\partial q^2}\right]$$
$$+\frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}\phi'_n - \frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n$$
$$+\frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}q\frac{\partial\phi'_n}{\partial q} - \frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n$$
$$+\frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}q\frac{\partial\phi}{\partial q} + \frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}\phi'_n. \tag{A.27}$$

Portanto, utilizando as expressões (2.42) e (A.27), e depois de alguns cálculos, teremos

$$(UIU^\dagger)\phi'_n = \left(-\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}2\right)\phi'_n - \frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}\phi'_n + \frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n$$
$$-i\hbar m\rho\dot{\rho}q\frac{\partial\phi'_n}{\partial q} + \frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}\phi'_n - \frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n$$
$$+\frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}q\frac{\partial\phi'_n}{\partial q} - \frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n + \frac{i\hbar m\rho\dot{\rho}}{2}q\frac{\partial\phi'_n}{\partial q}$$
$$+\frac{m^2\dot{\rho}^2}{2}q^2\phi'_n. \tag{A.28}$$

Da equação (A.28), obsermos que

$$(UIU^\dagger)\phi'_n = \left(-\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}2\right)\phi'_n. \tag{A.29}$$

Dessa maneira, temos que

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}, \tag{A.30}$$

com

$$I' = UIU^\dagger. \tag{A.31}$$

A.4 Dedução da equação (2.55)

Para calcularmos as fases $\alpha_n(t)$ no capítulo 2, que satisfazem a equação (2.39), vamos deduzir a equação (2.55). Inserindo (2.37) e (2.41) na equação (2.39), resulta-se em

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n' \middle| U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle$$
$$= \left\langle \phi_n' \middle| U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle + \left\langle \phi_n' \middle| U\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle$$
$$+ \left\langle \phi_n' \middle| U\left(-\frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle, \tag{A.32}$$

com U dado por (2.42). Usando a equação (2.42), teremos que

$$\left\langle \phi_n' \middle| U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle = \left\langle \phi_n' \middle| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{m\dot\rho^2}{2\rho^2}q^2 - \frac{m\ddot\rho}{2\rho}q^2 \middle| \phi_n' \right\rangle, \tag{A.33}$$

$$\left\langle \phi_n' \middle| U\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle = \left\langle \phi_n' \middle| \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{im}{\hbar}\frac{\dot\rho}{\rho} - \frac{m^2\dot\rho^2}{\hbar^2\rho^2}q^2 + \frac{2im\dot\rho}{\hbar\rho}q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) \middle| \phi_n' \right\rangle, \tag{A.34}$$

e

$$\left\langle \phi_n' \middle| U\left(-\frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right)U^\dagger \middle| \phi_n' \right\rangle = \left\langle \phi_n' \middle| \frac{m}{2}\left(\frac{\ddot\rho}{\rho} - \frac{1}{m^2\rho^4}\right)q^2 \middle| \phi_n' \right\rangle. \tag{A.35}$$

Vamos usar a equação auxiliar (2.35) para eliminar a frequência $\omega^2(t)$ em (A.34). Então, susbstituindo as expressões (A.33), (A.34) e (A.35) em (A.32), obtemos

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n' \middle| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot\rho}{\rho} + i\hbar\frac{\dot\rho}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{q^2}{2m\rho^4} \middle| \phi_n' \right\rangle. \tag{A.36}$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n' \middle| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot\rho}{\rho} + i\hbar\frac{\dot\rho}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{m\rho^2}\left(-\frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}\right) \middle| \phi_n' \right\rangle. \tag{A.37}$$

Assim, usando a equação (2.44), podemos expressar (A.37) na forma

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n' \middle| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot\rho}{\rho} + i\hbar\frac{\dot\rho}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{I'}{m\rho^2} \middle| \phi_n' \right\rangle. \tag{A.38}$$

Dessa maneira, substituimos a equação (2.49) na equação (A.38), obtendo que

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \varphi_n \left| \frac{1}{\rho^{1/2}} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\rho}}{\rho} + i\hbar\frac{\dot{\rho}}{\rho}q\frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{1}{\rho^{1/2}} \right| \varphi_n \right\rangle + \left\langle \phi_n' \left| \left(-\frac{I'}{m\rho^2} \right) \right| \phi_n' \right\rangle . \tag{A.39}$$

Depois de alguns cálculos, vemos que

$$\hbar\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \varphi_n \left| -\frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{i\hbar\dot{\rho}}{\rho^3}q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i\hbar\dot{\rho}}{\rho^3}q\frac{\partial}{\partial 1} \right| \varphi_n \right\rangle + \left\langle \varphi_n \left| \left(-\frac{I'}{m\rho^2} \right) \right| \varphi_n \right\rangle . \tag{A.40}$$

Enfim, usando a equação de autovalores (2.45) e a condição de normalização (2.50) na equação (A.40), mostramos a expressão dada por (2.55)

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t) = \left\langle \varphi_n \left| -\frac{I'}{m\rho^2} \right| \varphi_n \right\rangle . \tag{A.41}$$

APÊNDICE B

Apêndice do capítulo 3

B.1 Propriedades do operados deslocamento D

B.1.1 Dedução da propriedade $D^{\dagger}(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$

Se aplicarmos o operador deslocamento com α negativo, teremos

$$aD(-\alpha)|\alpha\rangle = D(-\alpha)D^{\dagger}(-\alpha)aD(-\alpha)|\alpha\rangle,$$

onde $D^{\dagger}(-\alpha)aD(-\alpha) = a-\alpha$. Portanto, podemos escrever

$$aD(-\alpha)|\alpha\rangle = D(-\alpha)(a-\alpha)|\alpha\rangle = 0. \tag{B.1}$$

ou ainda,

$$aD(-\alpha)|\alpha\rangle = 0. \tag{B.2}$$

O termo $(a-\alpha)$ desaparece, pois $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Então podemos dizer que $D(-\alpha)|\alpha\rangle$ é o estado de vácuo $|0\rangle$

$$D(-\alpha)|\alpha\rangle = |0\rangle \Rightarrow |\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{B.3}$$

B.1.2 Deduções das propriedades $D^{\dagger}(\alpha)aD(\alpha) = a+\alpha$ e $D^{\dagger}(\alpha)a^{\dagger}D(\alpha) = a^{\dagger}+\alpha^{*}$

Com a ajuda da definição do operador deslocamento, $D(\alpha) = e^{\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}a}$, provamos esta propriedade como sendo:

$$D^{\dagger}(\alpha)aD(\alpha) = e^{\alpha^{*}a-\alpha a^{\dagger}}ae^{\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}a} = a+[\alpha^{*}a-\alpha a^{\dagger},a]$$

$$= a+\alpha^{*}[a,a]-\alpha[a^{\dagger},a] = a+\alpha, \tag{B.4}$$

onde $[a,a] = 0$ e $[a^{\dagger},a] = -1$. Para se provar a outra propriedade, procedemos de maneira análoga como visto acima.

B.1.3 Dedução da propriedade $D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-iIm(\alpha\beta^*)}$

Sabendo pela definição (3.1), que $D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$, temos que

$$D(\alpha+\beta) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a + \beta a^\dagger - \beta^* a} = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} e^{\beta a^\dagger - \beta^* a} e^{-\frac{1}{2}[\alpha a^\dagger - \alpha^* a, \beta a^\dagger - \beta^* a]} = D(\alpha)D(\beta)e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)},$$

portanto,

$$D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-iIm(\alpha\beta^*)}. \tag{B.5}$$

Referências Bibliográficas

[1] COLEGRAVE, R. K. e ABDALLA, M. S. *Opt. Act.*, **v. 28**, p. 495-501 (1981).

[2] BROWN, N. A. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 66**, p. 495-501 (1991).

[3] LEMOS, N. A. e NATIVIDADE, C. P. *Nuovo cimento*, **v. 99**, p. 211-225 (1987).

[4] HOLSTEIN, B. R. *Am. J. Phys.*, **v. 57**, p. 714 (1989).

[5] CHUMAKOV, S. M.; DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. **Correlation functions of the nonstationary quantum singular oscillator**. *J. Phys. A*, **v. 19**, p. 3229-3239 (1986).

[6] GAO, X. C.; FU, J.; XU, J. e ZOU, X. *Phys. Rev. A*, **v. 57**, p. 753-761 (1998): *Phys. Rev. A*, **v. 85**, p. 55-63 (1999).

[7] BERTONI, C.; FINELLI, F. e VENTURI, G. *Phys. Lett. A*, **v. 237**, p. 331-336 (1998).

[8] LEWIS Jr., H. R. **Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians**. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 18**, p. 510-512 (1967).

[9] LEWIS Jr. H. R. **Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators**. *J. Math. Phys.*, **v. 9**, p. 1976-1986 (1968).

[10] LEWIS Jr., H. R. e RIESENFELD, W. B. **An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field**. *J. Math. Phys.*, **v. 10**, p. 1458-1473 (1969).

[11] PEDROSA, I. A. **Coherent states for certain time-dependent systems**. *Rev. Bras. Fís.*, **v. 19**, p. 502-515 (1989).

[12] CARVALHO, A. M. M.; FURTADO, C. e PEDROSA, I. A. **Scalar fields and exact invariants in a Friedmann-Robertson-Walker spacetime**. *Phys. Rev. D*, **v. 70**, p. 123523 (2004).

[13] PEDROSA, I. A.; FURTADO, C. e ROSAS, A. **Exact linear invariants and quantum effects in the early universe**. *Phys. Lett. B*, **v. 651**, p. 384-387 (2007).

[14] PEDROSA, I. A. **Complete exact quantum states of the generalized time-dependent harmonic oscillator**. *Mod. Phys. Lett. B*, **v. 18**, p. 1267-1274 (2004).

[15] PEDROSA, I. A. **Canonical transformations and exact invariants for dissipative systems**. *J. Math. Phys.*, **v. 28**, p. 2662 (1987).

[16] PEDROSA, I. A. **Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency**. *Phys. Rev. A*, **v. 55**, p. 3219-3221 (1997).

[17] PEDROSA, I. A.; ROSAS, A. e GUEDES, I. **Exact quantum motion of a particle trapped by oscillating fields**. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **v. 38**, p. 7757-7763 (2005).

[18] PEDROSA, I. A.; SERRA, G. P. e GUEDES, I. **Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation**. *Phys. Rev. A*, **v. 56**, p. 4300-4303 (1997).

[19] UM, I. C.; YEON, K. H. e GEORGE, T. F. *Phys. Rep.*, **v. 362**, p. 2297 (1984).

[20] HARTLEY, J. G. e RAY, J. R. **Ermakov systems and quantum-mechanical superposition laws**. *Phys. Rev. A*, **v. 24**, p. 2873-2876 (1981).

[21] HARTLEY, J. G. e RAY, J. R. **Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator**. *Phys. Rev. D*, **v. 25**, p. 382-386 (1982).

[22] HARTLEY, J. G. e RAY, J. R. **Solutions to the time-dependent Schrödinger equation**. *Phys. Rev. A*, **v. 25**, p. 2388-2390 (1982).

[23] RAY, J. R. **Minimum-uncertainty coherent states for certain time-dependent systems**. *Phys. Rev. D*, **v. 25**, p. 3417-3419 (1982).

[24] GLAUBER, R. J. **Photon correlations**. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 10**, p. 84-86 (1963).

[25] GLAUBER, R. J. **The quantum theory of optical coherence**. *Phys. Rev.*, **v. 130**, p. 2529-2539 (1963).

[26] GLAUBER, R. J. **Coherent and incoherent states of the radiation field**. *Phys. Rev.*, **v. 131**, p. 2766-2788 (1963).

[27] NIETO, M. M. e SIMMONS Jr, L. M. **Coherent states for general potentials**. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 41**, p. 207-210 (1978).

[28] NIETO, M. M. e SIMMONS, L. M. **Coherent states for general potentials. I. Formalism**. *Phys. Rev. D*, **v. 20**, p. 1321-1331 (1979).

[29] SCHRÖDINGER, E. **Collected papers on wave mechanics (Chelsea, New York, 1978), p. 41**. *Naturwissenschaften*, **v. 14**, p. 664 (1926).

[30] IMRY, Y. **Introduction to mesoscopic physics**. *Oxford University Press*, New York (1997).

[31] DATTA, S. **Electronic transport in mesoscopic systems**. *Cambridge University Press*, Cambridge (1995).

[32] LOUISELL, H. W. **Quantum statistical properties of radiation**. *Wiley*, New York (1993).

[33] CHEN, B. *e*t al. **Quantum effects in a mesoscopic circuit**. *Phys. Lett. A*, **v. 205**, p. 121 (1995).

[34] WANG, J. S. e SUN, C. Y. *Int. J. Theo. Phys.*, **v. 37**, p. 1213 (1998).

[35] CHOI, J. R. *Int. J. Theo. Phys.*, **v. 41**, p. 1931 (2002).

[36] YAN, Z. X.; SUO, W. J. e YI, F. H. **Fluctuation of mesoscopic RLC circuit at finite temperature**. *Chin. Phys. Lett.*, **v. 25**, p. 3126-3128 (2008).

[37] SENITZKY, I. R. **Dissipation in quantum mechanics. The harmonic oscillator**. *Phys. Rev.*, **v. 119**, p. 670-679 (1960).

[38] CALDEIRA, A. O. e LEGGET, A. J. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **v. 149**, p. 374 (1983); *Physica A*, **v. 121**, p. 587 (1983).

[39] PEDROSA, I. A. e BASEIA, B. **Coherent states and dissipative systems**. *Phys. Rev. B*, **v. 30**, p. 765-769 (1984).

[40] CALDIROLA, P. **Quantum theory of nonconservative systems**. *Nuovo Cimento*, **v. 77B**, p. 241-261 (1983).

[41] SCHUCH, D. **Nonunitary connection between explicitly time-dependent and nonlinear approaches for the description of dissipative quantum systems**. *Phys. Rev. A*, **v. 55**, p. 935-940 (1997).

[42] BROWN, L.S. **Quantum motion in a Paul trap**. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 66**, 527-529 (1991).

[43] DANTAS, C.M.A.; PEDROSA, I.A. e BASEIA, B. **Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential**. *Phys. Rev. A.*, **v. 45**, 1320-1324 (1992).

[44] YEON, K.H.; KIM, J.H.; UM, C.J.; GEORGE, T.F. e PANDEY, L.N. **Wave function in the invariant representation and squeezed-state function of the time-dependent harmonic oscillator**. *Phys. Rev. A*, **v. 50**, 1035-1039 (1994).

[45] JI, J.Y.; KIM, J.H. e KIM, S.P. **Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillator**. *Phys. Rev. A*, **v. 51**, 4268-4271 (1995).

[46] LEE, M.H.; KIM, H.C. e JI, J.Y. **Exact wave functions and geometric phases of a generalized driven oscillator**. *J. Korean Phys. Soc.*, **v. 31**, 560-567 (1997).

[47] XU, X.W. **Exactly solving a two-dimensional time-dependent coupled quantum oscillator**. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **v. 33**, 2447-2452 (2000).

[48] LEE, M.H. **Exact Schrödinger wavefunctions of N-coupled time-dependent harmonic oscillators**. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **v. 34**, 9475-9484 (2001).

[49] ERMAKOV, V. Univ. Izv. Kiev, Series III 9, 1 (1880).

[50] MILNE, W. E. **The numerical determination of characteristic numbers**. *Phys. Rev.*, **v. 35**, 863-867 (1930).

[51] PINNEY, E. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **v. 1**, p. 681 (1950).

[52] KLAUDER, J. R. **Coherent states for the hydrogen atom**. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **v. 29**, p. L293-L298 (1996).

[53] SUDARSHAN, E. C. G. **Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams**. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 10** , p. 277-279 (1963).

[54] MALKIN, I. A.; MAN'KO, V. I. e TRIFONOV, D. A. **Linear adiabatic invariants and coherent states**. *J . Math. Phys.*, **v. 14** , p. 576-582 (1973).

[55] YEON, K. -H. e UM, C. -I. *J. Korean Phys. Soc.*, **v. 25** , 567 (1992).

[56] HOWARD, S. e ROY, S. K., *Am. J. Phys.*, **v. 55** , p. 1109-1117 (1987).

[57] FAN, H. -Y. e PAN, X.-Y. *Chin. Phys. Lett.*, **v. 15** , p. 625 (1998).

[58] FAN, H. -Y. e LIANG, X. -T. *Chin. Phys. Lett.*, **v. 17** , p. 174 (2000) .

[59] JI, Y.H., *e*t al. *Commun. Theor. Phys.*, **v. 37** , p. 346 (2002) .

[60] WANG, J. -S.; LIU, T. -K. and ZHAN, M. -S. *Phys. Lett. A*, **v. 276** , p. 155 (2000).

[61] SHAO, B.; ZOU J. e LI, Q. S. *Phys. Lett. A*, **v. 277** , p. 339 (2000).

[62] CALDIROLA, P. **Forza non conservative nella meccanica quantistica** *Nuovo Cimento*, **v. 18**, p. 393 (1941).

[63] KANAI, E. **On the quantization of the dissipative systems**. *Prog. Theo. Phys.*, **v. 3**, p. 440-442 (1948).

[64] KASTNER, M. A. **The single-electron transistor**. *Rev. Mod. Phys.*, **v. 64**, p. 849-858 (1992).

[65] ZHANG, Z. M.; HE, L. S. e ZHOU, S. K. **A quantum theory of an RLC circuit with a source**. *Phys. Lett. A*, **v. 244**, p. 196-200 (1998).

[66] WEI, L. F. e LEI, X. L. **Dynamics for a mesoscopic RLC circuit with a source**. *Phys. Scr.*, **v. 62**, p. 7-11 (2000).

[67] -SUO, W. J.; -KUN, L.T. e -SHENG, Z. M. **Quantum wavefunctions and fluctuations of mesoscopic RLC circuit**. *Chin. Phys. Lett.*, **v. 17**, p. 528-529 (2000).

[68] FLORES, J. C. **Mesoscopic circuits with charge discreteness: Quantum transmission lines**. *Phys. Rev. B*, **v. 64**, p. 235309 (2001).

[69] HOU, J. G. *e*t al. **Nonclassical behavior in the capacitance of a nanojunction**. *Phys. Rev. Lett.*, **v. 86**, p. 5321-5324 (2001).

[70] XU, D. **Hannay angle in an LCR circuit with time-dependent inductance, capacity and resistance**. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **v. 35**, p. L455-L457 (2002).

[71] ZHANG, S. *e*t al. **Quantum squeezing effect of mesoscopic capacitance-inductance-resistance coupled circuit**. *Phys. Lett. A*, **v. 294**, p. 319-326 (2002).

[72] ALLAHVERDYAN, A. E. e NIEUWENHUIZEN, Th. M. **Testing the violation of the Clausius inequality in nanoscale electric circuits**. *Phys. Rev. B*, **v. 66**, p. 115309 (2002).

[73] JI, Y. H.; LUO, H. M. e WU, Y. Y. **Behaviors of mesoscopic LC circuit in the external magnetic field**. *Phys. Lett. A*, **v. 318**, p. 141-145 (2003).

[74] GABELLI, J. *e*t al. *Science*, **v. 313**, p. 499 (2006).

[75] JI, Y. H.; LUO, H. M. e GUO, Q. **The time evolution of charge and current in mesoscopic LC circuit with charge discreteness**. *Phys. Lett. A*, **v. 349**, p. 104-108 (2006).

[76] CHOI, J. R. **Exact solution of a quantized LC circuit coupled to a power source**. *Phys. Scr.*, **v. 73**, p. 587-595 (2006).

[77] XU, X. L.; LI, H. Q. e WANG, J. S. **Quantum fluctuations of mesoscopic RLC circuit involving complicated coupling in thermal squeezed state**. *Phisica B*, **v. 396**, p. 199-206 (2007).

[78] -HONG, Y. Y. *Commum. Theo. Phys.*, **v. 49**, p. 1052 (2008).

[79] HASSE, R. W. **On the quantum mechanical treatment of dissipative systems**. *J. Math. Phys.*, **v. 16**, p. 2005-2011 (1975).

[80] UM, C. -I.; YEON, K. -H. e GEORGE, T. F. *Phys. Rep.*, **v. 362**, p. 63-192 (2002).

[81] LIMA, A. L.; ROSAS, A. e PEDROSA, I. A. **On the quantum motion of a generalized time-dependent forced harmonic oscillator**. *Ann. Phys.*, **v. 323**, p. 2253-2264 (2008).

[82] MILNE, W. E. **The numerical determination of characteritic numbers**. *Phys. Rev.*, **v. 35**, p. 863-867 (1930).

[83] SCHIEF, W. K. **A discrete pinney equation**. *Appl. Math. Lett.*, **v. 10**, p. 13-15 (1997).