

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIA EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tese de Doutorado

**Confinamento clássico e quântico de partículas induzido
pela geometria**

Jansen Brasileiro Formiga

JOÃO PESSOA

-2011-

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIA EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Confinamento clássico e quântico de partículas induzido
pela geometria**

Jansen Brasileiro Formiga

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr.
Carlos Augusto Romero Filho e defendida no
Departamento de Física da UFPb para
a obtenção do grau de Doutor em Física

JOÃO PESSOA

-2011-

Agradecimentos

Às pessoas que, direta ou indiretamente, interferiram positivamente na minha formação como físico, em especial, ao professor Carlos Augusto Romero Filho, meu orientador.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Levando em consideração o interesse visível que muitos modelos da física têm em manter a matéria usual confinada em uma certa região do espaço-tempo, como por exemplo o modelo de Rubakov e o de Randall-Sundrum, exibimos a possibilidade da utilização de campos com origem geométrica para realizar este confinamento. Antes, porém, preparamos o leitor com todo o aparato geométrico necessário para a compreensão do que é feito nos últimos capítulos desta tese. Tornou-se impossível fugir de questões polêmicas envolvendo geometrias mais gerais que a riemanniana, como por exemplo a polêmica sobre a equação de movimento da partícula, o uso do acoplamento mínimo e a aplicação do princípio variacional. Entretanto, tentamos adotar uma postura imparcial e fizemos a análise do confinamento seguindo duas vertentes distintas. Uma das vertentes, defendidas por Kleinert, consiste em postular que partículas seguem autoparalelas. A outra vertente, a mais comum na literatura, segue a linha de Hehl, Gasperini e outros. Nesta vertente, a equação de movimento de uma partícula não pode ser postulada, mas sim obtida a partir da lei de conservação associada ao tensor de energia-momento da partícula, pois este contém informação sobre o movimento da partícula. Há mais diferenças entre essas duas linhas do que citamos aqui, como será indicado no decorrer da tese. Para ser mais preciso, fomos capazes de exibir o confinamento apenas para a primeira vertente. No caso da segunda, dificuldades técnicas nos limitaram a somente descartar certos campos de origem geométrica como campos confinadores.

Palavras Chaves: *geometria; curvatura; torção; não-metricidade; campo de Weyl; equação de movimento; geodésicas; autoparalelas; acoplamento mínimo; spin; equação de Dirac; bulk; brana; confinamento.*

Abstract

Since many models in physics depend on the confinement of particles in certain regions of the space-time, like Rubakov and Randall-Sundrum models, we analyze the possibility of using geometrical fields to confine particles. In doing so, we exhibit some examples of the confinement of particles by using only geometrical fields such as torsion and Weyl 1-form. In order to prepare the reader to these examples, we give a brief introduction to the Riemannian and the non-Riemannian geometries. It turned out to be impossible to avoid controversial issues such as the equation of motion of a particle, the use of the minimal coupling procedure, and the application of the variational principle for non-Riemannian geometries. However, we avoided choosing what approach was right and decided to take two completely different approaches into account, namely, Kleinert's and Hehl's ones. Kleinert claims that particles must follow autoparallel, while Hehl and others state that the equation of motion of a particle must be derived from a conservation law related to the energy-momentum tensor of the particle. As a matter of fact, there are more differences between those approaches than we have mentioned here, but we expect this thesis to clarify those differences. To be more precise, we managed to exhibit examples of confinement only for Kleinert's approach. We had difficulty finding an example of confinement to Hehl's approach, however we were able to eliminate the possibility of confinement for many cases, like scale fields for example.

Key words: *geometry; curvature; torsion; non-metricity; Weyl field; equation of motion; geodesics; autoparallels; minimal coupling; spin; Dirac equation; bulk; brane; confinement.*

Sumário

1	Introdução	1
2	Geometria riemanniana	5
2.1	Métrica	5
2.2	Transporte paralelo	10
2.3	Derivada covariante	12
2.3.1	Conexão afim	16
2.4	Tensor de Riemann, Ricci e escalar de curvatura	19
2.4.1	Curvatura	19
2.4.2	Tensor de Ricci	24
2.5	Conexão riemanniana	24
2.6	Tensor de Riemann na geometria riemanniana	26
3	Relatividade Geral	28
3.1	Hipóteses da relatividade geral	29
3.2	Equação de movimento	31
3.2.1	Equação de movimento de uma partícula puntiforme	32
4	Geometria de Riemann-Cartan U_n	38
4.1	Torção	38
4.2	Determinando a conexão em termos da métrica e da torção	40
4.3	Geodésicas e Autoparalelas	42
4.4	Invariantes	43
4.4.1	Os tensores de Riemann e de Ricci	43
4.5	Equações de Estrutura de Cartan	45
4.6	Motivações para o uso da torção	47

4.7	Modelos com torção e seus efeitos	48
4.7.1	Electromagnetismo com Torção	49
4.7.2	Teleparalelismo	49
4.7.3	Einstein-Cartan	50
4.7.4	Modelos Quadráticos com spin	52
4.7.5	Modelos cosmológicos	53
4.7.6	MAG (Metric Affine Gravity)	53
4.7.7	Outros efeitos de modelos com torção	54
4.7.8	Geometria de Lyra	56
4.8	Soluções	57
4.9	Perspectivas experimentais	58
5	Espaço de Einstein-Weyl	60
5.1	Conexão com não-metricidade	61
5.2	Geodésicas e autoparalelas	63
5.3	Geometria de Weyl	64
5.3.1	Conexão de Weyl	65
5.4	Invariantes	65
5.4.1	Propriedades do tensor de Riemann com não-metricidade	66
5.5	A versão mais simples da ação na geometria de Weyl	67
5.6	Motivações para o uso da não-metricidade	68
5.7	Modelos com não-metricidade	69
5.7.1	Modelo de Weyl	70
5.8	Soluções	71
6	Confinamento de autoparalelas	72
6.1	Mergulho de uma variedade riemanniana em uma de Riemann-Cartan e vice-versa	72
6.2	Confinamento de autoparalelas numa brana	74
6.2.1	Analisando o confinamento	74
6.3	Casos particulares	78
6.4	O papel da contorção e dos demais campos no confinamento	81

7	Equação de Dirac	83
7.1	Introdução	83
7.2	Equação de Dirac em Minkowski	84
7.3	Tetradas	87
7.3.1	Notação	87
7.4	Espinor de Dirac em espaços curvos com não-metricidade e torção	90
7.4.1	Espinor de Dirac	90
7.4.2	Conexão espinorial	93
7.4.3	Leis de transformação da conexão espinorial	94
7.4.4	Conexão na base de tetrada	95
7.4.5	Matrizes de Dirac em espaços curvos	96
7.4.6	Geradores da Álgebra de Clifford	98
7.4.7	Condição de covariância sobre os $\gamma^\mu s$	99
7.4.8	Conexão espinorial em um espaço com torção e não-metricidade	101
7.4.9	Conexão espinorial dada em termos da contorção e do tensor de não metricidade	104
7.4.10	Obtendo a matriz S	105
7.4.11	Significados de ψ^a e ψ_a	108
7.5	Acoplamento mínimo	109
7.5.1	Acoplamento na lagrangiana	110
7.5.2	Acoplamento na equação	111
7.6	Equações de Dirac no espaço-tempo de Minkowski de dimensão n com conexão de Weyl e torção	112
7.6.1	Equação de Dirac com acoplamento na equação em Minkowski- Weyl-Cartan	113
7.6.2	Equação de Dirac com acoplamento na lagrangiana em Minkowski- Weyl-Cartan	113
7.7	Variações da ação de Dirac em termos da contorção e a da não-metricidade (acoplamento na lagrangiana)	114
7.7.1	Variação com relação a contorção	114
7.7.2	Variação com relação a não-metricidade	114
7.8	Considerações	114

8	Confinamento de partículas	116
8.1	Modelo de Rubakov	117
8.2	Confinamento	120
8.2.1	Confinamento via Weyl	120
8.2.2	Confinamento via torção	122
8.3	Considerações finais	125
9	Conclusões e Perspectivas	127
A	Notação	130
A.1	Notação	130
A.2	Notação do artigo [1]	132
A.3	Notação de [2]	133
A.4	Algumas relações entre a notação da tese e a de [2]	135
B	Formas Diferenciáveis	136
B.1	Variedades	136
B.2	Vetores	137
B.3	1-Formas	139
B.4	Tensores	141
B.5	Formas diferenciáveis	142
B.5.1	Produto exterior	142
B.5.2	Derivada exterior	144
B.5.3	Produto Interior	144
B.5.4	Derivada de Lie	145
B.5.5	A conexão 1-forma	145
B.5.6	Integração de Formas diferenciáveis	145
B.5.7	Elementos de volume invariantes	146
B.5.8	O símbolo de Levi-Civita ϵ	146
B.5.9	Transformações de Dualidade (Hodge Star)	147
B.5.10	Produto interno de r -formas	148
B.5.11	Adjunto da derivada exterior	148
B.5.12	O Laplaciano	148
B.5.13	Algumas propriedades importantes	149

C	Análise da estabilidade de sistemas não lineares	153
C.1	Sistemas lineares	153
C.1.1	Ponto de equilíbrio	154
C.1.2	Casos com λ real	154
C.1.3	Casos com λ imaginário	155
C.2	Sistemas autônomos não lineares de segunda ordem	155
D	Expressões e Identidades	157
D.1	Expressões tensoriais	157
D.1.1	Derivada ordinária da métrica em termos da conexão afim	157
D.1.2	Tensor de Riemann em uma certa base	158
D.1.3	Explicitando a contorção no tensor de Riemann	159
D.2	Demonstração da propriedade (5.17)	160
D.3	Cálculos do capítulo 7	160
D.3.1	Contraindo a contorção com $\gamma^A \gamma^B \gamma^C$	160
D.3.2	Demonstração de (7.14)	161
D.3.3	Demonstração de $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$	162
D.3.4	Demonstração de (7.19)	162
D.3.5	Comutador dos geradores da Álgebra de Clifford	163
D.3.6	Prova de $Tr(\Gamma_m^d) = 0$ para $m \neq 1$	164
D.3.7	Demonstração de que os 2^n geradores Γ_r^d são linearmente independente	165
D.3.8	Demonstração do lema de Schur	166
D.3.9	Demonstração de 7.30	168
D.3.10	Dedução das relações (7.45) e (7.46)	168
D.3.11	Dedução de (7.47)	169
D.3.12	Prova da anti-simetria de (7.53)	170
D.3.13	Simplificando o termo $\overset{n\lambda}{\Gamma}_{\alpha\nu} \gamma^\alpha [\gamma_\lambda, \gamma^\nu]$	170
D.3.14	Demonstração de $\gamma^{(0)} \sigma_{AB}^\dagger \gamma^{(0)} = \sigma_{AB}$	171
D.3.15	Variação da ação de dirac em função de $\bar{\psi}$	171
D.3.16	Demonstração da independência de S_D com relação a não-metricidade e aos símbolos de Christoffel	174
D.3.17	Variação da ação de Dirac com respeito a contorção	174
D.3.18	Variação de S_D com respeito a não-metricidade	176

E Einstein-Cartan	178
E.1 Equações de campo	178
E.2 Equação de movimento	186
E.3 Campos escalares	190
E.4 Equação de Dirac em termos da fonte de torção (spin)	191

Capítulo 1

Introdução

Durante séculos a física esteve limitada ao uso da geometria euclidiana para poder descrever matematicamente suas leis. Estas leis, baseadas em experimentos e intuição, eram capazes de descrever grande parte dos fenômenos do mundo que nos cerca. Todavia, a medida que os experimentos foram se tornando mais precisos e indo bem além de nossa intuição, surgiu a necessidade de generalizarmos a geometria euclidiana. Como é bem conhecido dos físicos, as duas teorias mais bem sucedidas da física são formuladas em geometrias não-euclidianas. A mecânica quântica relativística é formulada na geometria de Minkowski, geometria pseudo-riemanniana e plana, enquanto que a relatividade geral é formulada em uma geometria pseudo-riemanniana com curvatura. Essas duas teorias estão de acordo com todos os experimentos que as teorias anteriores explicavam, além de estar de acordo com um conjunto significativo de outros experimentos que não tinham explicação. Entretanto, como essas duas teorias têm um regime de validade limitado, elas não explicam tudo. Ainda não há uma teoria quântica da gravitação, além de haver várias questões em aberto, como energia escura, matéria escura etc. Não sabemos, por exemplo, como fica o spin na gravitação. Muitas dessas questões levam os físicos a buscar uma generalização da geometria que é usada na quântica e na relatividade. Daí surge necessidades como escrever a equação de Dirac, que é o alicerce da mecânica quântica relativística, em um espaço curvo. Escrever as equações de campo da gravitação em termos do spin é outra necessidade. Neste último caso, uma generalização da geometria riemanniana que permite uma inserção natural do spin na gravitação é a geometria de Riemann-Cartan, como exemplo mais simples dessa inserção temos a *teoria de Einstein-Cartan*. Outro exemplo de generalização da geometria que despertou muito interesse dos

físicos, foi a tentativa de Weyl de unificar gravitação e electromagnetismo em uma teoria puramente geométrica. Ele criou a geometria hoje conhecida como geometria de Weyl. Se continuarmos mencionando exemplos, chegaremos a geometrias de métricas assimétricas, geometria de Finsler, geometrias com dimensões extras etc. São tantas as possibilidades, que não temos a pretensão de abordar todas elas nesta tese. Entretanto, seguindo essa tendência de buscar novas geometrias para responder perguntas sem respostas, buscaremos nessa tese exemplificar o papel que a geometria pode exercer na realização do confinamento de partículas em hipersuperfícies do espaço-tempo. Para isto, nos limitaremos basicamente a duas generalizações da geometria riemanniana, a saber, geometrias com torção e não-metricidade.

Em um universo matemático cheio de possibilidades, uma idéia em especial tem despertado o interesse dos físicos desde, pelo menos, 1983. Esta idéia consiste em admitir que o espaço-tempo tem um certo número de dimensões, porém a matéria comum está confinada a uma superfície de dimensão inferior [3, 4, 5]. Esta superfície é denominada *brana*, enquanto que o espaço-tempo como um todo é conhecido por *bulk*. Em [4], o autor criou um modelo no qual a matéria comum só sairia da brana em processos de altas energias, o que explicaria o porquê não seríamos capazes de detectar efeitos de uma dimensão extra não-compacta. Todavia, uma vez que os aceleradores de partículas permitissem colisões a energias muito altas, os efeitos das dimensões extras tornariam-se significativos, pois as partículas poderiam escapar para outras dimensões. Neste caso, veríamos processos do tipo $e^+e^- \rightarrow \text{nada}$. Conseguir um modelo com dimensões extras que explique porque não vemos essas dimensões, sem duvida alguma é de interesse dos físicos, pois, muitas teorias importantes para a física, como a *teoria de cordas*, requerem dimensões extras. O confinamento também exerce um papel fundamental no modelo apresentado em [6]. Neste modelo, conhecido por *modelo de Randall-Sundrum*, os autores usam a idéia do confinamento para explicar o porquê a interação gravitacional é mais fraca que as outras interações da natureza. A idéia consiste basicamente em admitir que a gravitação é a única interação que escapa da brana e, por essa razão, seus efeitos no mundo em que vivemos (brana) é fraco.

Em muitos modelos que adotam o confinamento como um elemento importante, estão presentes entidades cuja origem não é explicada a partir de princípios fundamentais, como por exemplo o campo escalar que é responsável pelo confinamento das partículas leves em

[4]. O nosso objetivo nessa tese é o de exemplificar o papel que a geometria pode ter no confinamento, ou seja, tentaremos, a partir de campos de origem geométrica, realizar o confinamento de partículas. Nos limitaremos basicamente a dois campos, o campo de Weyl e a torção.

Com o objetivo de preparar o leitor, apresentamos alguns aspectos da geometria riemanniana que achamos relevantes para esta tese no capítulo 2. Partimos do pressuposto de que o leitor já esteja familiarizado com geometria diferencial. Caso não esteja, ele pode consultar o apêndice B para maiores detalhes. No capítulo 3, abordamos a teoria da relatividade geral basicamente para apresentarmos o problema da equação de movimento. Na seção 3.2, verificamos que, de fato, partículas puntiformes (sem estrutura) na presença de corpos massivos seguem geodésicas determinadas pelo corpo massivo. No capítulo 4, fazemos uma introdução detalhada sobre a geometria de Riemann-Cartan. Discutimos várias questões que surgem quando adotamos uma geometria com torção e tentamos fornecer ao leitor uma visão bem ampla sobre essa geometria e, sempre que possível, fornecendo várias citações importantes que o leitor interessado no assunto não pode deixar de ler. Entre essas citações estão artigos clássicos como [1, 7, 8]. Como um complemento do capítulo 4, apresentamos no capítulo E do apêndice a teoria de Einstein-Cartan, dando ênfase a obtenção da equação de movimento de uma partícula puntiforme (sem estrutura) com spin. Veremos que esta equação corresponde a equação da geodésica devido ao corpo massivo mais um termo de força devido ao acoplamento do spin com a torção. No capítulo 5, apresentamos o espaço de *Einstein-Weyl*, que é caracterizado por um tensor conhecido como *tensor de não-metricidade*. Também apresentamos o caso particular do espaço de Einstein-Weyl conhecido como geometria de Weyl. Começamos a apresentar os resultados de nossas pesquisas a partir do capítulo 6. Neste capítulo, exibimos o confinamento de curvas autoparalelas na brana por meio da torção. No capítulo 7, introduzimos a abordagem que criamos para obter a equação de Dirac de uma forma bem simples. Esta abordagem não substitui o formalismo espinorial desenvolvido em textos clássicos sobre o assunto, como por exemplo [9]. Entretanto, para o que queremos, ele acaba sendo mais conveniente. Exceto pela abordagem, não há nada de novo neste capítulo. Retornamos aos nossos resultados no capítulo 8 quando, finalmente, analisamos a possibilidade de confinarmos partículas no contexto quântico por meio da torção e do campo de Weyl. Finalizamos este trabalho apresentando um resumo dos resultados obtidos e das perspec-

tivas no capítulo 9. Acrescentamos ao apêndice alguns capítulos que achamos relevantes para o corpo da tese. Dedicamos o capítulo A a notação da tese, o capítulo C a análise da estabilidade de sistemas não lineares¹, o capítulo D a algumas expressões e identidade importantes, além dos já mencionados.

¹Importante para o capítulo 6.

Capítulo 2

Geometria riemanniana

Neste capítulo apresentamos a geometria pseudo-riemanniana e alguns conceitos de geometria que são fundamentais para a compreensão desta tese. Por questão de simplicidade, cometeremos o mesmo abuso de linguagem que é comum na literatura, usaremos a expressão geometria riemanniana para nos referirmos tanto a geometria riemanniana propriamente dita como para a pseudo-riemanniana. Estas duas geometrias diferem uma da outra pela definição de um objeto matemático chamado *métrica*. Todavia, para o que faremos nesta tese, este abuso não trará nenhum problema.

Durante o capítulo, serão utilizados termos como variedades, vetores, 1-formas etc. Também utilizaremos um formalismo independente de base. O leitor que não esteja muito familiarizado com o assunto pode consultar o apêndice B.

2.1 Métrica

O objeto que chamaremos de métrica está relacionado com a generalização do nosso conceito intuitivo de distância. A distância como um conceito intuitivo é algo invariante para nós. Por exemplo, se alguém diz que uma barra de ferro mede um metro, ninguém questionará que qualquer pessoa capaz de medir o comprimento desta barra nas mesmas condições térmicas medirá exatamente um metro, salvo margens de erros introduzidas pelas limitações técnicas (o aparato utilizado para fazer a medida, para garantir a estabilidade térmica do experimento etc). Em outras palavras, em nossa visão intuitiva, o tamanho da barra não dependerá de fatores cinéticos, como por exemplo a velocidade do indivíduo que faz a medida com relação a barra. Entretanto, a realidade física mostrou-se

muito mais complicada, pois de fato o comprimento da barra dependerá de fatores cinéticos. Como nossa mente, talvez por razões fisiológicas ou puramente filosóficas, está sempre a procura de “verdades absolutas”, seja na religião, no senso comum ou na ciência, é natural pensar que estejamos sempre a procura de “objetos” invariantes frente a mudança de referenciais, observadores etc. Assim, nada mais natural do que procurarmos por “objetos” matemáticos que sejam invariantes frente a mudança de observadores. Como uma consequência dessa busca, o matemático Hermann Minkowski descobriu que o intervalo entre dois eventos físicos era um invariante por mudanças de referencial. Daí surgiu o conceito de espaço-tempo. Entretanto a distância entre pontos desse espaço não é um comprimento no sentido usual, mas sim uma generalização da nossa concepção intuitiva de comprimento. Na linguagem matemática, faz-se a generalização de vários conceitos que adquirimos inicialmente com a nossa intuição, o conceito de superfície, curvatura e distância são só alguns exemplos desses. Para entendermos um pouco esse processo de generalização, vejamos o caso da barra citado anteriormente. Se a barra é descrita em um referencial qualquer com o sistema de coordenadas cartesianas, o elemento de comprimento da barra pode ser descrito infinitesimalmente pelo teorema de Pitágoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.1)$$

Assim, para obter o comprimento da barra, basta integrar ds de uma extremidade da barra a outra. Todavia, a expressão acima ainda não está numa forma satisfatória, pois, estamos limitados a transcrever a barra por coordenadas cartesianas. Disto surge a necessidade de generalizar a expressão de ds para qualquer sistema de coordenadas. É fácil ver que, como diante da transformação de coordenada $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$, dx^λ se transforma na forma $dx^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} d\bar{x}^\mu$, ds passa a ter a seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu. \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\nu} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\nu} + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\nu} \right) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$= g_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu, \quad (2.3)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é conhecido como métrica. A expressão acima nos dá ds expresso em um sistema de coordenadas mais geral, pois, a única hipótese feita sobre $\bar{x}^\mu$ foi a de ser possível escrever x, y, z em termos de $\bar{x}^\alpha$. Esta hipótese, a priori, não impõe nenhuma restrição

para a nossa noção intuitiva de distância, uma vez que, nela, sempre é possível encontrar uma transformação que leve (2.1) em (2.3) e vice-versa. Este fato é uma consequência da aparência plana do espaço, já que isto permite o uso do teorema de Pitágoras sempre que conveniente. O problema surgiu a partir do momento que descobrimos que ds definido como (2.1) não é um invariante¹ e que o espaço não é plano. Cada um destes dois fatos exigem, por si só, uma versão generalizada do conceito de distância. A primeira idéia que vem a mente quando falamos em generalizar o conceito de distância é abstrair este conceito, ou seja, esquecer, mesmo que temporariamente, o fato deste conceito estar interligado com algo real, e simplesmente desenvolver um formalismo matemático que permita a associação deste novo conceito de forma conveniente a qualquer idéia na qual o uso do termo distância pareça razoável. A palavra razoável, aqui, significa não ferir muito nossa noção intuitiva de distância física. De fato, a visão mais geral sobre métrica que se tem hoje pode perfeitamente ir contra nossa intuição. Todavia estas métricas estão fadadas a serem apenas objetos matemático sem qualquer conexão com algo real, exceto casos onde as características “exóticas” estejam associadas a propriedades físicas de difícil detecção. Como exemplo de tais métricas exóticas, temos as assimétricas [10]. De qualquer forma, faz-se necessário definirmos a métrica de forma mais geral. Antes, porém, permita-nos dar uma visão mais clara do significado de $g_{\mu\nu}$.

Considere as coordenadas polares como indicado na figura 2.1a. Existem duas maneiras de obtermos os valores de $g_{\mu\nu}$ no sistema de coordenadas polares $x = \rho \cos \phi$ e $y = \rho \sin \phi$. Uma delas é usar (2.2), já a outra é analisar como os versores $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ associados com as coordenadas ρ, ϕ variam infinitesimalmente. Como este último método nos fornece uma visão do significado geométrico de $g_{\mu\nu}$, faremos uso deste para obter ds .

Para medir o comprimento de uma curva neste sistema de coordenadas, temos que saber como o comprimento varia segundo as variações de $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$. Como estes versores são ortogonais, já sabemos de antemão que os termos cruzados da métrica são nulos. Da ortogonalidade, sabemos, também, que podemos calcular a variação do comprimento devido a variável ϕ mantendo ρ constante e vice-versa, como indicado nas figuras 2.1b e 2.1c. Da figura 2.1b, vemos que a variação infinitesimal no comprimento quando variamos ϕ é $\rho d\phi$. Fazendo o mesmo para ρ , chegamos a $d\rho$. Do teorema de Pitágoras, teremos que a variação infinitesimal no comprimento será $ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\phi)^2$. Comparando esta última

¹Experimentos provam que a distância entre dois pontos do espaço físico não é um invariante.

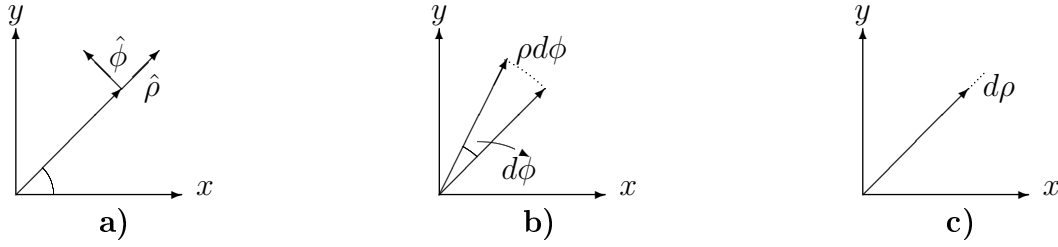


Figura 2.1: Para obter as componentes da métrica em coordenadas polares, basta variar ϕ com ρ constante (figura b), perceber que $ds = \rho d\phi$, e variar ρ com ϕ constante (figura c), percebendo, todavia, que neste caso $ds = d\rho$.

expressão com $ds^2 = g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2$, vemos que $g_{\rho\rho} = 1$ e $g_{\phi\phi} = \rho^2$. Este procedimento é mais simples do que usar (2.2), pelo menos quando os versores associados com as variáveis adotadas são ortogonais. Desse exemplo, vemos que a métrica fornece a informação de como os comprimentos variam em cada direção associada com as variáveis na qual a métrica está escrita. Se fizéssemos o mesmo para coordenadas esféricas, obteríamos a variação de comprimento 1 para dr , r para $d\theta$ e $r \sin \theta$ para $d\phi$, sendo ϕ o ângulo azimutal.

Devido ao que faremos a seguir, vale a pena lembrar que, caso o leitor não esteja acostumado com o formalismo independente de coordenadas, um resumo de alguns elementos importante para a compreensão deste capítulo pode ser encontrado no apêndice B. Abaixo segue a definição de *métrica riemanniana*, que generaliza² (2.1).

Definição 2.1.1 *Sejam uma variedade diferenciável M e os vetores V, W , onde $V, W \in T_p M$. Chamamos de métrica riemanniana g o objeto matemático que satisfaz as seguintes propriedades³:*

- a) $g(V, W) = g(W, V)$.
- b) $g(V, V) \geq 0$, onde a igualdade vale apenas quando $V = 0$.

A propriedade “a” é claramente compatível com a nossa intuição, afinal de contas, por que razão física aparente iríamos distinguir o produto interno de um vetor V com outro W do produto interno do vetor W com V ? Não diferentemente, a propriedade “b” também é intuitiva, uma vez que, se o módulo do vetor é nulo, então, o vetor também o é. Surge,

²Esta definição generaliza (2.1) porque a métrica riemanniana não necessariamente pode ser obtida ou transformada em (2.1) por uma transformação de coordenadas.

³Estas propriedades são avaliadas em um ponto genérico p . Estamos omitido este ponto apenas por conveniência.

então, a pergunta: em que sentido a definição acima é mais geral? A resposta é simples. Na definição acima não foi feita qualquer restrição a dimensão do espaço e, além disso, não há qualquer referência, implícita ou explícita, à possibilidade da existência de uma transformação de coordenadas que permita $g_{\mu\nu}$ ser escrito na forma $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, \dots, 1)$. Todavia, para o que faremos aqui, a definição acima ainda não é geral o suficiente. A definição mais geral que é de nosso interesse consiste do relaxamento da condição “b”. Neste caso, adotamos a condição $g(W, V) = 0$ para qualquer V se $W = 0$. À este tipo de métrica, dá-se o nome de *métrica pseudo-riemanniana*. Mas o que acontece com os casos $g(V, V) = 0$, $g(V, V) > 0$ e $g(V, V) < 0$?

O primeiro fato que temos que perceber a partir da pergunta acima é que a métrica, definida desta forma, não é mais positiva definida como na definição 2.1.1. Disto, concluímos que, na soma $V^\mu V_\mu$ alguns termos poderão ser negativos. Agora, escolheremos uma métrica pseudo-riemanniana particular por razões físicas. O interesse físico, pelo menos nesta tese, é associar a métrica a distância entre eventos físicos, pois, em muitas teorias físicas, as que serão trabalhadas aqui, este é um invariante⁴. Os eventos físicos, por sua vez, são caracterizados por dois tipos de coordenadas: coordenadas espaciais e temporal. Em resumo, precisamos dizer onde o evento ocorre e quando ele ocorre. A coordenada associada com o tempo será indicada sempre pelo número zero, x^0 . Admitimos que a diferença de sinal entre os termos da métrica que produz as possibilidades $g(V, V) = 0$, $g(V, V) > 0$ e $g(V, V) < 0$ está presente apenas na relação entre as coordenadas espaciais e a temporal, ou seja, $\pm(a^0)^2 \mp [(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2]$, onde $a^0 = \sqrt{|g_{00}|}V^0$ (estamos admitindo, por simplicidade, uma métrica diagonal⁵). Esta escolha está relacionada com o fato de que na relatividade especial o invariante frente as transformações de Lorentz é $ds^2 = \pm c^2 dt^2 \mp (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Quebraremos a arbitrariedade dos sinais na expressão anterior fazendo a escolha, $(a^0)^2 - [(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2]$. A quebra desta arbitrariedade é chamada de escolha da assinatura da métrica. Tendo escolhido a assinatura anterior, fazemos as seguintes definições:

Definição 2.1.2 *Chamamos os vetores que satisfazem as propriedades*

⁴A primeira teoria que associou a distância entre eventos físicos e o conceito de métrica foi a relatividade especial. O matemático Hermann Minkowski percebeu que se descrevêssemos dois eventos distintos pelas coordenadas (ct, x, y, z) e (ct', x', y', z') , onde c é a velocidade da luz, então, $c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2$ seria invariante frente as transformações de Lorentz.

⁵Isto não impõe nenhuma limitação a esta análise, pois, a métrica sempre pode ser diagonalizada.

a) $g(V, V) = 0$,

b) $g(V, V) > 0$,

c) $g(V, V) < 0$,

de tipo luz, tipo tempo e tipo espaço, respectivamente.

A denominação dada a um vetor que satisfaz “a” na definição 2.1.2 independe da assinatura escolhida, todavia, as duas últimas definições são invertidas quando escolhida a assinatura contrária. Isto acontece porque dizemos que um vetor é tipo espaço quando a parte espacial das componentes do vetor supera a parte temporal e, temporal quando o contrário ocorre. Assim sendo, a escolha da assinatura fixa a definição acima.

Poderíamos continuar falando sobre métricas mais gerais, porém para o que queremos a métrica que definimos será geral o suficiente para abordar as geometrias que trataremos aqui. O leitor interessado em estudar métricas não-simétricas é direcionado a [11, 10].

2.2 Transporte paralelo

Um fato muito importante durante a generalização do espaço euclidiano para o riemanniano é não admitir a priori que dois vetores definidos em pontos diferentes possam ser comparados. Uma idéia fundamental durante o processo de generalização de uma geometria é o de definir todas as propriedades localmente⁶. Para resolver esse problema, criou-se o conceito de transporte paralelo. Imagine, por exemplo, que nós temos um campo vetorial A definido no plano (x, y) , dois pontos p e q , onde $p = q + \epsilon$, e queremos comparar dois vetores deste campo, como indicado na figura 2.2. Para comparar A_p^μ com A_q^μ , transportamos A_q^μ até o ponto p . Como num espaço plano e em coordenadas cartesianas impor que os vetores não mudem implica impor que as componentes não mudem, então, A_q^μ transportado paralelamente até p , que denotaremos por $\bar{A}_q(q + \epsilon)^\mu$, é o próprio A_q^μ , ou seja, $\bar{A}_q(q + \epsilon)^\mu = A_q^\mu$. Disto, podemos ver que a definição da derivada

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\epsilon^\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{A^\mu(q + \epsilon^\alpha) - \bar{A}_q(q + \epsilon^\alpha)^\mu}{\epsilon^\nu} \right) \quad (2.4)$$

⁶Veja a opinião de Weyl sobre o assunto na seção 2.1, página 577 de [12].

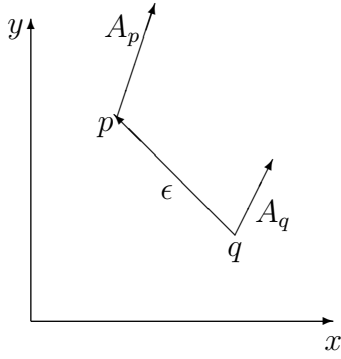


Figura 2.2: Analisando o transporte paralelo em coordenadas cartesianas.

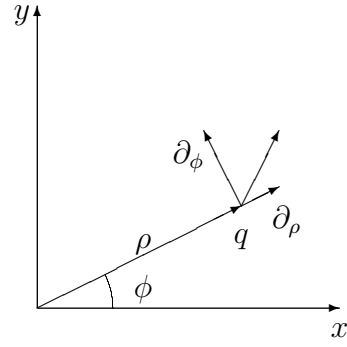


Figura 2.3: Analisando o transporte paralelo em coordenadas polares.

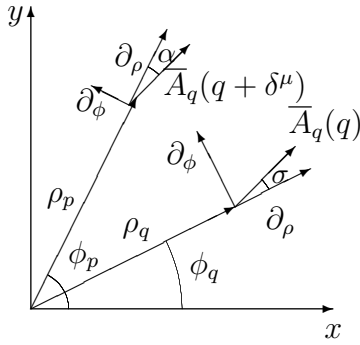


Figura 2.4: Fazendo um transporte paralelo de (ϕ_q, ρ_q) para (ϕ_p, ρ_p) , vemos que as componentes de $A_q(q)$ transportadas para p na base $\{\partial_\rho, \partial_\phi\}$ mudam, pois $A_q^\rho = \sqrt{g(A(q), A(q))} \cos \sigma$ e $A_q^\phi = \sqrt{g(A(q), A(q))} \frac{\sin \sigma}{\rho_q}$; enquanto que $\bar{A}_q^\rho(p) = \sqrt{g(A(q), A(q))} \cos \alpha$ e $\bar{A}_q^\phi(p) = \sqrt{g(A(q), A(q))} \frac{\sin \alpha}{\rho_p}$. Da figura, está claro que $\alpha \neq \sigma$.

é equivalente a

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\epsilon^\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{A^\mu(q + \epsilon^\alpha) - A^\mu(q)}{\epsilon^\nu} \right), \quad (2.5)$$

onde, na notação que usamos, $A_d^\mu = A_d^\mu(d) = A^\mu(d)$; todavia $\bar{A}_d^\mu(d + m)$ seriam as componentes do campo vetorial A avaliadas no ponto d e depois transportadas paralelamente até $d + m$. A expressão (2.5) deixa bem claro que, em um espaço plano e em coordenadas cartesianas, podemos comparar os vetores em pontos diferentes. Entretanto, o conceito de transporte paralelo não é tão obvio assim. Para exemplificar isto, considere o caso acima sendo que em coordenadas polares, figura 2.3. Da figura 2.4, vemos que o vetor transportado paralelamente de q para p muda os valores de suas componentes na base $\{\partial_\rho, \partial_\phi\}$. Por esta razão, precisamos de uma versão generalizada do transporte paralelo. Por conveniência, definiremos o transporte paralelo a partir do conceito de derivada covariante. Isto, contudo, não representa nenhuma restrição, pois, o conceito de transporte paralelo pode sempre ser obtido a partir do de derivada covariante e vice-versa [13].

2.3 Derivada covariante

Dada uma variedade M , uma curva $\alpha(t)$, o plano tangente $T_{\alpha(t)}M$ e o campo vetorial V tangente à curva $\alpha(t)$, o vetor definido por $\frac{dV}{dt}$ não necessariamente está contido no plano $T_{\alpha(t)}M$. Como fazemos as contas no plano tangente à variedade, precisamos definir um outro tipo de derivada que garanta que, uma vez aplicada em V , o vetor resultante esteja contido em $T_{\alpha(t)}M$. Esta derivada será representada pelo símbolo ∇ .

Vamos definir a derivada covariante de forma a ser independente da base que escolhermos. Para alcançar este objetivo, vamos derivar vetores e não componentes. Além disso, a derivada também será feita com respeito a vetores (na direção de vetores) e não suas componentes. Sendo assim, é natural representarmos esta derivada na forma $\nabla_W V$, onde V, W são campos vetoriais. Nesta definição, o V representa o vetor derivado, enquanto W indica a direção na qual está sendo feita a derivação. Obviamente, esta definição ainda é puramente simbólica, uma vez que ainda não sabemos o que significa a derivada de um vetor com relação a outro. Mais adiante, veremos que este conceito é similar ao de derivada direcional.

Para motivar a definição de $\nabla_W V$, vamos adotar uma análise passa a passo das generalizações que temos que fazer. Primeiro considere a derivada usual do vetor $V = V^\mu \partial_\mu$. Usando a regra de Leibniz para a derivada usual, teremos

$$\frac{\partial V^\mu \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu \frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.6)$$

Embora o termo $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}$ pareça estranho, ele não é. Na verdade, ele está bem definido. Podemos dar como exemplo a derivada do vetor ∂_ρ em coordenadas polares com relação a ϕ . Sabemos que $\partial_\rho = \cos \phi \partial_x + \sin \phi \partial_y$. Portanto, $\frac{\partial \partial_\rho}{\partial \phi} = -\sin \phi \partial_x + \cos \phi \partial_y = \rho \partial_\phi$. Este cálculo sugere algo simples: podemos expressar $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}$ em termos dos vetores ∂_μ . De fato, como ∂_ν constitui uma base, podemos realmente expandir $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}$ em termos desta base, ou seja,

$$\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda, \quad (2.7)$$

onde os coeficientes da expansão, $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, são conhecidos como conexão afim. Com isto, a expressão (2.6) fica

$$\frac{\partial V^\mu \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda. \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) ainda não é invariante frente a transformações de coordenadas. Analisemos o primeiro termo da direita de (2.8) contraído com as componentes W^μ de um vetor qualquer W diante de uma transformação de coordenadas,

$$\begin{aligned} W^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu &= \bar{W}^\beta \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} \left(\bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \right) \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\lambda \\ &= \bar{W}^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} \left(\bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \right) \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\lambda \\ &= \bar{W}^\alpha \frac{\partial \bar{V}^\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\lambda + \bar{W}^\alpha \bar{V}^\sigma \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\lambda \\ &= \bar{W}^\alpha \frac{\partial \bar{V}^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\partial}_\lambda + \bar{W}^\alpha \bar{V}^\sigma \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\lambda. \end{aligned}$$

Temos que $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial \delta_{\sigma}^{\lambda}}{\partial \bar{x}^\alpha} = 0$, o que leva naturalmente a $\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\sigma} \right) = -\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha \partial x^\mu}$.

Substituindo este termo na expressão acima, obtemos

$$W^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu = \bar{W}^\alpha \frac{\partial \bar{V}^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\partial}_\lambda - \bar{W}^\alpha \bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha \partial x^\mu} \bar{\partial}_\lambda. \quad (2.9)$$

Analisemos, agora, o segundo termo da direita de (2.8) contraído com W^ν diante uma transformação de coordenadas.

$$\begin{aligned} W^\nu V^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda &= W^\nu V^\mu \frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \bar{W}^\beta \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\alpha \right) \\ &= \bar{W}^\lambda \bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \bar{\partial}_\alpha \right) \\ &= \bar{W}^\lambda \bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda \partial x^\mu} \bar{\partial}_\alpha + \bar{W}^\lambda \bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{\partial}_\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \\ &= \bar{W}^\lambda \bar{V}^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda \partial x^\mu} \bar{\partial}_\alpha + \bar{W}^\lambda \bar{V}^\sigma \Gamma_{\lambda\alpha}^\beta \partial_\beta \end{aligned} \quad (2.10)$$

Contraindo (2.8) com W^ν e posteriormente substituindo (2.9) e (2.10), chegamos a

$$W^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu = \bar{W}^\alpha \frac{\partial \bar{V}^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\partial}_\lambda + \bar{W}^\lambda \bar{V}^\sigma \Gamma_{\lambda\alpha}^\beta \partial_\beta = \bar{W}^\nu \frac{\partial \bar{V}^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{\partial}_\mu \quad (2.11)$$

Chegamos, portanto, a seguinte conclusão: a derivada contraída com as componentes de outro vetor do jeito que definimos é independente do sistema de coordenadas.

Neste momento surge algo importante sobre a notação que pretendemos usar nesta tese. A partir de agora não usaremos mais a notação $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\mu}$, em seu lugar, usaremos ∇ .

Por esta razão, convencionamos que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}$ é o operador que atua sobre ∂_μ na forma de derivada. Desta forma, a maneira mais formal de escrever (2.8) é

$$\nabla_{\partial_\nu} (V^\mu \partial_\mu) = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu, \quad (2.12)$$

onde, obviamente, $\nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \equiv \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda$. Contraindo a expressão acima com W^ν , teremos

$$W^\nu \nabla_{\partial_\nu} (V^\mu \partial_\mu) = W^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu W^\nu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu. \quad (2.13)$$

Para deixar a expressão acima em uma forma mais compacta, usaremos a definição $\nabla_W V \equiv W^\nu \nabla_{\partial_\nu} V$.

A partir de (2.13), verifiquemos quais propriedades $\nabla_W V$ satisfaz. Sejam U e A dois vetores, f e g duas funções. Se fizermos $W = fU + gA$, então de (2.13),

$$\begin{aligned} \nabla_{fU+gA} V &= (fU^\nu + gA^\nu) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu (fU^\nu + gA^\nu) \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \\ &= fU^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + fV^\mu U^\nu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu + gA^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + gV^\mu A^\nu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \\ &= f\nabla_U V + g\nabla_A V \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por outro lado, se fizermos $V = U + A$ em (2.13), teremos

$$\begin{aligned} \nabla_W (U + A) &= W^\nu \frac{\partial (U^\mu + A^\mu)}{\partial x^\nu} \partial_\mu + (U^\mu + A^\mu) W^\nu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \\ &= \nabla_W U + \nabla_W A. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A última propriedade de $\nabla_W V$ que analisaremos é o seu comportamento quando trocamos V por fU . Fazendo isto em (2.13), teremos

$$\begin{aligned} \nabla_W fU &= W^\nu \frac{\partial fU^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + fU^\mu W^\nu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \\ &= W^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} U^\mu \partial_\mu + fW^\nu \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + fU^\mu W^\nu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \\ &= W[f]U + f\nabla_W U, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde usamos $w[f] = w^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$. Agora, temos um conceito de derivada que mantém o vetor no plano tangente à variedade. A derivada $\nabla_V U$ tem a seguinte interpretação: $\nabla_{\partial_\nu} U$ pode ser visto como um tipo de gradiente de U (lembre-se que, na nossa notação, vetores

são como escalares, eles não mudam frente a transformações de coordenadas). Quando contraímos $\nabla_{\partial_\nu} U$ com V^ν , estamos avaliando a projeção deste gradiente na direção de V . As propriedades (2.14), (2.15) e (2.16) que ∇ satisfaz servem de motivação para a definição de *conexão afim* que será feita na seção 2.3.1.

Podemos agora definir transporte paralelo através da definição de derivada covariante da seguinte maneira.

Definição 2.3.1 *Dizemos que um campo vetorial V ao longo de uma curva de tangente U é paralelo quando sua derivada com relação a U é nula, ou seja,*

$$\nabla_U V = 0. \quad (2.17)$$

Para o caso particular no qual um vetor é transportado paralelamente a si mesmo, $\nabla_V V = 0$, obtemos o que denominamos de equações de geodésicas afim (ou autoparalelas). Em coordenadas, elas assume a forma

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (2.18)$$

Um fato importante sobre o transporte paralelo é que dois vetores transportados paralelamente preservam o ângulo entre si, como indicado na figura 2.5. Este fato implica naturalmente que, como o vetor tangente a uma geodésica é transportado paralelamente ao longo da geodésica, um vetor transportado paralelamente ao longo de uma geodésica mantém o ângulo que tem com a tangente a geodésica constante. Um campo que é transportado paralelamente a ele mesmo é num certo sentido o campo que menos varia de orientação durante esse transporte, ou seja, as curvas que ele define podem ser vistas como as curvas mais retas da geometria, veja a seção 5 de [14]. Perceba que, em princípio, este fato nada tem a haver com a minimização da distância entre dois pontos. Entretanto, na geometria riemanniana um fato presente em nossa intuição acontece quase como um milagre. Se tomarmos a distância entre dois pontos, dada por $s = \int_p^q ds$, e a minimizarmos com o intuito de obtermos a menor⁷ distância entre p e q , obteremos exatamente (2.18) e, portanto, a curva mais reta também será a menor distância entre dois pontos. Esta coincidência não ocorre em geometrias mais gerais que a riemanniana, como por exemplos as que discutiremos nos capítulos 4 e 5.

⁷Na verdade, estamos extremizando, ou seja, calculando o mínimo ou máximo.

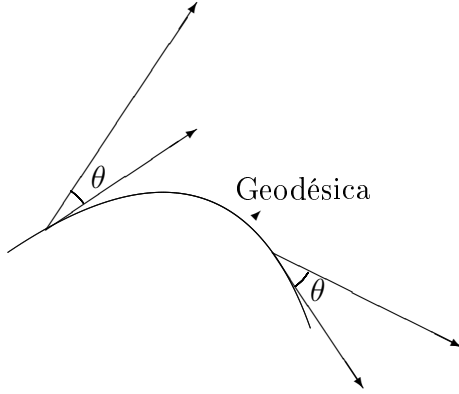


Figura 2.5: O ângulo entre os vetores transportados paralelamente não muda, mesmo que a curva não seja uma geodésica. No caso da curva ser uma geodésica, estes vetores manterão o ângulo que fazem com a tangente da geodésica constante, como sugere a figura.

2.3.1 Conexão afim

O que foi feito no início dessa seção motiva a seguinte definição.

Definição 2.3.2 *Seja M uma variedade diferenciável e os campos vetoriais V, U, W . Chamamos de conexão afim a aplicação $\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\nabla_{fV+gU}W = f\nabla_VW + g\nabla_UW, \quad (2.19)$$

$$\nabla_V(U + W) = \nabla_VU + \nabla_VW, \quad (2.20)$$

$$\nabla_V(fU) = V[f]U + f\nabla_VU, \quad (2.21)$$

onde $V, U, W \in T_pM$ e f, g são funções diferenciáveis.

Perceba que esta definição independe da variedade ser ou não riemanniana, ou seja, esta definição será válida para todas as geometrias aqui abordadas.

Como uma consequência natural da definição 2.3.2, podemos expressar a conexão afim em termos dos vetores da base coordenada do plano tangente à variedade. Definindo os coeficientes da expansão como $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, isto é,

$$\nabla_\mu \partial_\nu \equiv \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda. \quad (2.22)$$

A definição acima implica naturalmente $\nabla_{\partial_\mu} dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda$. Para chegar a este resultado, basta derivar a relação de dualidade entre ∂_μ e dx^ν , que é dada por $\langle dx^\nu, \partial_\mu \rangle = \delta_\mu^\nu$. A derivada desta expressão resulta em

$$\langle \nabla_{\partial_\lambda} dx^\nu, \partial_\mu \rangle = - \langle dx^\nu, \nabla_{\partial_\lambda} \partial_\mu \rangle. \quad (2.23)$$

Expandindo $\nabla_{\partial_\lambda} dx^\nu$ em termos da base coordenada de 1-formas $\{dx^\nu\}$, $\nabla_{\partial_\lambda} dx^\nu = Z^\nu_{\lambda\alpha} dx^\alpha$, e substituindo esta expansão mais (2.22) na expressão acima, teremos

$$\langle Z^\nu_{\lambda\alpha} dx^\alpha, \partial_\mu \rangle = - \langle dx^\nu, \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \partial_\alpha \rangle. \quad (2.24)$$

Usando a linearidade de $\langle \rangle$ e a condição de dx^μ e ∂_μ serem bases duais, chegamos a $Z^\nu_{\lambda\mu} = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Portanto, devemos ter

$$\nabla_{\partial_\mu} dx^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda} dx^\lambda. \quad (2.25)$$

Para vermos explicitamente a atuação de ∇ num vetor, apliquemos ∇_W em $V = V^\mu \partial_\mu$. Da definição 2.3.2, segue

$$\begin{aligned} \nabla_W V^\mu \partial_\mu &= W[V^\mu] \partial_\mu + V^\mu \nabla_W \partial_\mu = W^\nu \partial_\nu [V^\mu] \partial_\mu + V^\mu \nabla_{W^\nu \partial_\nu} \partial_\mu \\ &= W^\nu \left(\partial_\nu [V^\mu] \partial_\mu + V^\mu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \right) = W^\nu (V^\lambda_{;\nu} + V^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \partial_\lambda \\ &= W^\nu V^\lambda_{;\nu} \partial_\lambda, \end{aligned}$$

onde na primeira linha usamos (2.21), da primeira linha para a segunda usamos (2.19), na segunda linha utilizamos a definição (2.22), e na última linha fizemos a definição $V^\lambda_{;\nu} \equiv V^\lambda_{,\nu} + V^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$. Como era de se esperar, a expressão acima é exatamente igual a (2.12), pois (2.12) foi a motivação para a definição 2.3.2. Do que foi feito acima, é natural fazer a seguinte definição:

Definição 2.3.3 *Seja V um vetor pertencente a $T_p M$. As componentes da derivada covariante de V na base coordenada serão denotadas por:*

$$V^\lambda_{;\nu} \equiv V^\lambda_{,\nu} + V^\mu \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (2.26)$$

Suponha agora que tenhamos uma 1-forma ω . Um cálculo similar nos leva a

$$\nabla_W \omega = W^\nu (\omega_{\lambda,\nu} - \omega_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda}) dx^\lambda \quad (2.27)$$

Resultado este que nos leva a seguinte definição:

Definição 2.3.4 *Seja ω uma 1-forma definida sobre $T_p M^*$. As componentes da derivada covariante de ω na base coordenada serão denotadas por:*

$$\omega_{\lambda;\nu} = \omega_{\lambda,\nu} - \omega_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}. \quad (2.28)$$

Como tensores mais gerais são dados pelo produto direto de tensores⁸ de primeira ordem, é fácil generalizar a atuação da derivada covariante sobre um tensor do tipo $F = F^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_n} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}$.

Definição 2.3.5 *Sejam $\{\partial_{\mu}\}$ uma base de $T_p M$, $\{dx^{\mu}\}$ uma base de $T_p M^*$ e as aplicações $F^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde n e m são inteiros positivos. Chamamos de tensores do tipo (n, m) , a aplicação $F : TM^* \times \dots \times TM^* \times TM \times \dots \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F = F^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_n} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}$$

Aqui, faz-se necessário uma observação sobre a notação. A atuação de uma 1-forma ω sobre um vetor V está sendo denotada por $\langle \omega, V \rangle$. Todavia, por questão de simplicidade, sempre que tivermos o produto tensorial de várias 1-formas atuando sobre vetores, não usaremos $\langle dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}, \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_m} \rangle$, mas sim $dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}(\partial_{a_1}, \dots, \partial_{a_m})$. Nesta última expressão, o leitor pode ver o símbolo $\otimes$ como sendo um mero artifício para organizar em nossa mente a atuação das 1-formas sobre os vetores. Explicitamente, o que temos é a seguinte ordem $dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}(\partial_{a_1}, \dots, \partial_{a_m}) = \langle dx^{b_1}, \partial_{a_1} \rangle \langle dx^{b_2}, \partial_{a_2} \rangle \dots \langle dx^{b_m}, \partial_{a_m} \rangle$.

Definição 2.3.6 *Sejam F um tensor do tipo (n, m) e $e_A \in T_p M$. Chamamos de derivada covariante de F*

$$\begin{aligned} \nabla_{e_A} F &= e_A[F^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}] (\partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_n} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}) \\ &\quad + F^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} \nabla_{e_A} (\partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_n} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}), \end{aligned}$$

onde a atuação de ∇_{e_A} na base de $TM \times \dots \times TM \times TM^* \times \dots \times TM^*$ obedece a regra de Leibniz⁹.

⁸A definição de produto direto de tensores (*Tensor direct product*) pode ser encontrada em [15].

⁹Como exemplo, $\nabla_{e_A} \partial_{\mu} \otimes dx^{\nu} = (\nabla_{e_A} \partial_{\mu}) \otimes dx^{\nu} + \partial_{\mu} \otimes (\nabla_{e_A} dx^{\nu})$.

2.4 Tensor de Riemann, Ricci e escalar de curvatura

Nesta seção, vamos definir alguns objetos que são fundamentais para a caracterização de uma variedade. Destes, se destaca o *tensor de Riemann*, pois, ele mede a curvatura do espaço. Por esta razão ele também é conhecido como *tensor de curvatura*. O conceito de curvatura é sem dúvida alguma um dos mais importantes tanto para a matemática quanto para a física. Por essa razão, começaremos apresentando uma visão intuitiva do que seja curvatura para, então, definirmos o tensor de Riemann. Os outros objetos que definiremos aqui serão apenas uma consequência natural do tensor de Riemann.

2.4.1 Curvatura

Antes de introduzirmos o tensor de Riemann, permita-nos apresentar uma visão intuitiva do que seja curvatura. Todos sabemos ou temos alguma idéia do que seja uma superfície curva, todavia, nunca nos perguntamos o que realmente caracteriza estas superfícies de maneira formal. A resposta para esta pergunta talvez não seja tão simples quanto possa parecer. O conceito de curvatura para curvas é simples. Qualquer pessoa, leiga ou não, é capaz de distinguir uma curva de curvatura nula de outra cuja curvatura não se anula ou, até mesmo, saber se uma curva é mais curva que outra. Entretanto, no caso de superfícies, a idéia de curvatura já não é tão simples assim. Por exemplo, um leigo não seria capaz, em princípio, de dizer se um cilindro tem ou não curvatura. É obvio que neste caso teríamos que especificar de que tipo de curvatura estamos falando, uma vez que uma superfície é composta por várias curvas e, portanto, podemos definir mais de um tipo de curvatura por meio das curvaturas das curvas¹⁰. Ingenuamente, poderíamos dizer que o cilindro tem curvatura, pois, há várias direções nas quais a curvatura das curvas geodésicas não são nulas, em especial, o círculo da seção transversal do cilindro (geodésica com maior curvatura no cilindro). Porém, as geodésicas ao longo do comprimento do cilindro tem curvatura nula. Um conceito eficaz de curvatura de uma superfície (capaz de distinguir propriedades fundamentais das superfícies) foi desenvolvido por *Gauss* e, posteriormente, generalizado para um variedade de dimensão qualquer por *Riemann*. (daí o nome geometria riemanniana). Abaixo segue uma descrição qualitativa da curvatura gaussiana.

¹⁰Não faria o menor sentido caracterizarmos a curvatura de uma superfície olhando apenas a curvatura de uma curva contida nela.

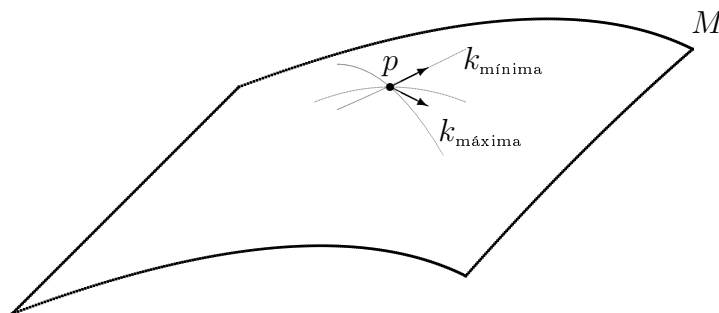


Figura 2.6: Na abordagem de Gauss, a superfície é caracterizada pelas curvaturas $k_{\text{máxima}}$ e $k_{\text{mínima}}$. Nesta abordagem, usa-se o produto $k_{\text{mínima}}k_{\text{máxima}}$ e a soma $\frac{k_{\text{mínima}}+k_{\text{máxima}}}{2}$.

A curvatura de gauss é obtida a partir do produto das curvaturas máximas e mínimas, também conhecida por curvaturas principais. Mas o que significa curvaturas máxima e mínimas? O conceito é simples: dado um ponto p em uma variedade M , existem várias geodésicas que passam por este ponto e que tem tangentes com direções diferentes, como indicado na figura 2.6. De todas estas curvas, existe uma que possui a maior curvatura naquele ponto e outra que possui a menor. Às tangentes destas curvas, dá-se o nome de direções principais (daí o nome curvaturas principais). O que Gauss fez foi perceber que o produto e a soma das curvaturas destas duas curvas permitia a caracterização das superfícies de forma a distingui-las por propriedades fundamentais¹¹.

Uma propriedade muito importante sobre bi-superfícies com curvatura gaussiana não nula, é fato do transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho geodésico fechado não levar o vetor nele mesmo, mas sim o rotacionar (veja a figura 2.7). A partir desta propriedade, generaliza-se o conceito de curvatura de uma bi-superfície para uma variedade de dimensão qualquer. Em outras palavras, a curvatura será a medida de quanto um vetor transportado paralelamente rotaciona. Para exemplificar melhor, considere a esfera da figura 2.7. Nesta figura o vetor é transportado paralelamente¹² ao longo das geodésicas α_1 , α_2 e α_3 . Perceba que, como estamos usando três geodésicas distintas, o ângulo do vetor transportado com relação a tangente das curvas α_1 , α_2 e α_3 é diferente para cada uma destas três geodésicas. Da figura, vemos que o vetor muda sua direção

¹¹Para maiores detalhes sobre a abordagem de Gauss, o leitor pode consultar [16].

¹²Lembre-se de que um vetor é transportado paralelamente a uma geodésica quando ele mantém seu ângulo constante com relação ao vetor tangente à geodésica.

quando transportado paralelamente. Esta propriedade distingue a esfera de várias outras superfícies tais como plano, cilindro etc. Obteremos, agora, o tensor de curvatura a partir da variação das componentes de um vetor V transportado paralelamente. Note que, quando nos referimos a variação, queremos dizer a diferença entre V^μ e $\bar{V}^\mu$ (transportado paralelamente).

Podemos construir um campo vetorial ao longo de uma curva a partir de um vetor definido em um certo ponto da curva transportando-o paralelamente deste ponto aos outros. Chamaremos esse campo de campo paralelo. Imagine, agora, que tenhamos um campo vetorial V e que o valor de suas componentes no ponto A é denotado por V_A^ν . Se denotarmos as componentes do vetor V_A^ν transportado paralelamente até um certo ponto B por $V_A^{\nu||}$, então $V_A^{\nu||}$ é igual ao valor das componentes do campo paralelo construído a partir do transporte paralelo de V_A^ν avaliado em B , ou seja, $V_A^{\nu||} = \bar{V}^\nu(B)$, onde $\bar{V}^\nu$ são as componentes do campo paralelo. Em outras palavras, $\bar{V}^\nu$ no ponto C coincide com V_A^ν transportado paralelamente a C , $\bar{V}^\nu$ no ponto D coincide com V_A^ν transportado paralelamente até D etc. Esclarecido este fato, considere agora o ponto A como sendo identificado pelas coordenadas x^α e o ponto B por $x^\alpha + dx^\alpha$, onde dx^α é um deslocamento infinitesimal. Desta forma, V_A^ν pode ser denotado por $V^\nu(x^\alpha)$ ou, equivalentemente $\bar{V}^\nu(x^\alpha)$ (o campo paralelo no ponto A coincide com o vetor que o originou). Por sua vez, as componentes do vetor V_A transportadas paralelamente até B ficam $V_A^{\nu||} = \bar{V}^\nu(B) = \bar{V}^\nu(x^\alpha + dx^\alpha)$. Da definição de campo paralelo 2.3.1, temos que $\bar{V}^\mu(x^\alpha)$ satisfaz

$$U^\nu(x^\alpha)\partial_\nu\bar{V}^\lambda(x^\alpha) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)U^\nu(x^\alpha) = 0. \quad (2.29)$$

Como U é arbitrário, podemos escolher suas componentes como sendo infinitesimais $U^\nu = dx^\nu$. Neste caso, a expressão acima fica

$$dx^\nu\partial_\nu\bar{V}^\lambda(x^\alpha) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu = 0. \quad (2.30)$$

Como dx^ν é um infinitésimo, podemos expandir as componentes do campo paralelo em torno de x^α , ou seja¹³, $\bar{V}^\lambda(x^\alpha + dx^\alpha) \simeq V^\lambda(x^\alpha) + dx^\alpha\partial_\alpha\bar{V}^\lambda$ ou, equivalentemente, $dx^\alpha\partial_\alpha\bar{V}^\mu \simeq \bar{V}^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) - V^\mu(x^\alpha)$. Portanto, a expressão (2.30) fica

¹³Lembre-se que o campo vetorial $\bar{V}$ é construído a partir do campo V avaliado no ponto x^α , logo $\bar{V}^\mu(x^\alpha) = V^\mu(x^\alpha)$.

$$\begin{aligned}\bar{V}^\lambda(x^\alpha + dx^\alpha) - V^\lambda(x^\alpha) &= -\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu, \\ \delta V^\lambda &= -\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu,\end{aligned}$$

onde δV^λ é a diferença infinitesimal entre o vetor transportado paralelamente e o próprio vetor. Para obtermos a diferença entre o vetor transportado paralelamente dentro de um circuito fechado $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ (como exemplo de circuito fechado, veja a figura 2.8), que denotaremos por ΔV^λ , integramos a expressão acima sobre este circuito

$$\Delta V^\lambda = - \oint \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu. \quad (2.31)$$

Usando o teorema de Stokes, a integral acima pode ser convertida em uma integral sobre a área interna ao circuito $\Delta A^{\alpha\beta}$. Desta forma, temos

$$\Delta V^\lambda = -\frac{1}{2} \int dA^{\beta\nu} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.32)$$

onde foi usada a anti-simetria de $dA^{\beta\nu}$. Considerando o circuito $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ como infinitesimal, a área de integração torna-se um infinitésimo, logo, podemos omitir a integração e ter

$$\begin{aligned}\Delta V^\lambda &= -\frac{1}{2}dA^{\beta\nu} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\mu}(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{2}dA^{\beta\nu} \left(\bar{V}^\mu \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\mu}}{\partial x^\beta} - \bar{V}^\mu \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \frac{\partial \bar{V}^\mu}{\partial x^\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \frac{\partial \bar{V}^\mu}{\partial x^\nu} \right).\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\partial_\nu \bar{V}^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \bar{V}^\mu$, veja (2.29), teremos

$$\Delta V^\lambda = -\frac{1}{2}dA^{\beta\nu} \left(\bar{V}^\mu \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\mu}}{\partial x^\beta} - \bar{V}^\mu \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\mu_{\beta\sigma} \bar{V}^\sigma + \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \bar{V}^\sigma \right).$$

Evidenciando $\bar{V}^\mu$ na expressão acima, podemos reescrevê-la na forma

$$\Delta V^\lambda = -\frac{1}{2}dA^{\beta\nu} V^\mu R^\lambda_{\mu\beta\nu}, \quad (2.33)$$

onde usamos o fato óbvio de $\bar{V}^\mu(x^\alpha) = V^\mu(x^\alpha)$, e definimos

$$R^\lambda_{\mu\beta\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\mu}. \quad (2.34)$$

Figura 2.7: O vetor tangente a α_1 na parte superior da esfera é transportado paralelamente ao longo do circuito $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$. Ao voltar para o ponto inicial, sua orientação não é mais a mesma. Esta rotação está diretamente relacionada com a curvatura da esfera.

Figura 2.8: Circuito infinitesimal $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$.

Em (2.33), $dA^{\beta\nu}$ é a área de um circuito escolhido arbitrariamente e V^μ são as componentes de um vetor, também arbitrário. O único termo que depende da geometria, não de nossa escolha, é $R^\lambda_{\mu\beta\nu}$. Disto, concluímos que ΔV^λ ser ou não zero está intimamente ligado a propriedade da geometria do espaço representada por $R^\lambda_{\mu\beta\nu}$. A este tensor, damos o nome de *tensor de Riemann* (também conhecido como *tensor de curvatura*). Somos capazes, agora, de dizer se uma variedade tem ou não curvatura. No caso discutido no início desta seção, o do cilindro, podemos afirmar que o cilindro não tem curvatura, pois, como o tensor de Riemann para o cilindro é nulo, $\Delta V^\lambda = 0$, independentemente do circuito e do vetor transportado paralelamente que tomamos.

O tensor de Riemann pode ser escrito em uma notação independente de base da seguinte forma:

$$R(V, U)W = \nabla_V \nabla_U W - \nabla_U \nabla_V W - \nabla_{[V, U]} W, \quad (2.35)$$

onde $[V, U] = (V^\mu U^\nu_{,\mu} - U^\mu V^\nu_{,\mu}) \partial_\nu$. Se escrevermos V , U e W em uma base qualquer $\{e_\mu\}$, não necessariamente coordenada, isto é, $V = V^\mu e_\mu$, $U = U^\mu e_\mu$ e $W = W^\mu e_\mu$, teremos (veja a demonstração no apêndice D.1.2)

$$R(V, U)W = V^\mu U^\nu W^\beta (\Gamma^\lambda_{\nu\beta, \mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta, \nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}) e_\lambda$$

Se e_μ for a base coordenada e $U^\mu = \delta^\mu_\nu$, $V^\mu = \delta^\mu_\nu$ e $W^\mu = \delta^\mu_\nu$, recuperamos (2.34)

$$R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho,\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \Gamma^\phi_{\sigma\rho}\Gamma^\mu_{\alpha\phi} - \Gamma^\phi_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\sigma\phi}. \quad (2.36)$$

2.4.2 Tensor de Ricci

Defini-se o *tensor de Ricci* pela contração do primeiro com o segundo índice, $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. No caso da geometria riemanniana, também pode-se definir o tensor de Ricci a partir da contração do segundo com o último índice, pois, neste caso, ambas as definições são equivalentes. A razão do porquê o tensor de Ricci é definido pela contração destes índices ficará clara mais adiante, quando falarmos das propriedades do tensor de Riemann na geometria riemanniana. Por sua vez, o escalar de curvatura é definido como $R = R^\mu_{\mu}$. O leitor deve estar atento ao fato de que na literatura há uma variação de sinal na definição tanto do tensor de Riemann quanto no de Ricci.

O que foi feito tanto nesta sub-seção quanto na anterior independe de estarmos na geometria de Riemann. Iremos abordar o tensor de Riemann nesta geometria na seção 2.6, antes, porém, vejamos a conexão riemanniana.

2.5 Conexão riemanniana

Na seção 2.3.1, definimos a conexão afim, porém, não mencionamos se a geometria era riemanniana ou não, pois, não era necessário tal hipótese. Agora, faremos esta hipótese. Há duas hipóteses que distinguem a geometria riemanniana das outras geometrias que serão tratadas nesta tese. Abaixo seguem as duas hipóteses na forma de definição.

Definição 2.5.1 *Chama-se de conexão afim riemanniana $\overset{c}{\nabla}$ a conexão que satisfaz as seguintes propriedades:*

a)

$$\overset{c}{\nabla}_V W = \overset{c}{\nabla}_W V + [V, W].$$

b)

$$V[g(U, W)] = g(\overset{c}{\nabla}_V U, W) + g(U, \overset{c}{\nabla}_V W)$$

onde V, U, W são campos vetoriais.

A hipótese “a” implica na simetria dos índices da conexão quando escrita em uma base cujos vetores comutam, por exemplo, a base coordenada. Neste último caso, teremos $\overset{c}{\nabla}_{\partial_\nu} \partial_\mu = \overset{c}{\nabla}_{\partial_\mu} \partial_\nu$. As hipóteses “a” e “b” permitem que escrevamos a conexão em termos apenas da métrica e de suas derivadas. Para provarmos isto, temos que isolar $\overset{c}{\nabla}_W V$ na expressão “b”. Este termo pode ser isolado se fizermos a soma $V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)]$, como indicado abaixo

$$\begin{aligned} V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] = \\ g(\overset{c}{\nabla}_V U - \overset{c}{\nabla}_U V, W) + g(\overset{c}{\nabla}_W V + \overset{c}{\nabla}_V W, U) \\ + g(\overset{c}{\nabla}_W U - \overset{c}{\nabla}_U W, V). \end{aligned}$$

Usando a propriedade “a” e a identidade $g(\overset{c}{\nabla}_W V + \overset{c}{\nabla}_V W, U) = 2g(\overset{c}{\nabla}_W V, U) + g([V, W], U)$, ficaremos com

$$\begin{aligned} V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] = \\ g([V, U], W) + 2g(\overset{c}{\nabla}_W V, U) + g([V, W], U) \\ + g([W, U], V). \end{aligned}$$

Isolando o termo que contém $\overset{c}{\nabla}_W V$ na expressão acima, teremos

$$\begin{aligned} g(\overset{c}{\nabla}_W V, U) = \frac{1}{2} (V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] - g([V, U], W) \\ - g([V, W], U) - g([W, U], V)). \end{aligned}$$

Em termos da base coordenada $W \rightarrow \partial_\nu$, $V \rightarrow \partial_\mu$ e $U \rightarrow \partial_\lambda$,

$$\begin{aligned} g(\overset{c}{\nabla}_{\partial_\nu} \partial_\mu, \partial_\lambda) &= \frac{1}{2} [\partial_\mu g(\partial_\lambda, \partial_\nu) + \partial_\nu g(\partial_\mu, \partial_\lambda) - \partial_\lambda g(\partial_\nu, \partial_\mu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\mu,\lambda}], \end{aligned}$$

onde usamos $[\partial_\lambda, \partial_\mu] = 0$. Denotando os coeficientes da expansão da conexão riemanniana na base coordenada por $\overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, ou seja, $\overset{c}{\nabla}_{\partial_\nu} \partial_\mu = \overset{c}{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda$, chegamos a expressão

$$\overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.37)$$

Ao símbolo $\overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, damos o nome de *Símbolo de Christoffel*. Para que não haja confusão entre os nomes *símbolo de Christoffel* e *conexão riemanniana*, vale salientar que “*símbolo de Christoffel*” é o nome que se dá a conexão riemanniana escrita na base coordenada.

2.6 Tensor de Riemann na geometria riemanniana

O tensor de Riemann na geometria riemanniana nada mais é do que o tensor (2.34) escrito em termos da conexão riemanniana, definida em 2.5.1. Em coordenadas cartesianas, o tensor de Riemann fica

$$\overset{c}{R}^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\sigma\rho,\alpha} - \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\sigma\rho} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\alpha\phi} - \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\alpha\rho} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\sigma\phi} . \quad (2.38)$$

Naturalmente, o tensor de Ricci na geometria riemanniana será dado por $\overset{c}{R}^\lambda_{\mu\lambda\nu}$, enquanto o escalar de curvatura será dado por $\overset{c}{R}^\lambda_\lambda$. É possível demonstrar que o tensor de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:

$$\overset{c}{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = - \overset{c}{R}_{\mu\lambda\sigma\nu}, \quad (2.39)$$

$$\overset{c}{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = - \overset{c}{R}_{\lambda\mu\nu\sigma}, \quad (2.40)$$

$$\overset{c}{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = \overset{c}{R}_{\sigma\nu\lambda\mu} . \quad (2.41)$$

As propriedades (2.39) e (2.40) implicam naturalmente¹⁴ $\overset{c}{R}^\lambda_{\lambda\sigma\nu} = \overset{c}{R}_{\sigma\lambda\nu}{}^\lambda = 0$. Já a propriedade (2.41) implica na simetria do tensor de Ricci; basta contrair λ com σ para verificar este fato. Outro fato importante a cerca das propriedades acima é que elas reduzem o número de componentes independentes, uma vez que estas simetrias vinculam várias componentes diferentes do tensor. No caso, o número de componentes independentes é 20, fato este que apresentamos sem demonstração¹⁵. A verificação da propriedade (2.40) é trivial, todavia, (2.39) e (2.41) já não são tão triviais assim¹⁶. Pode-se demonstrar também que, devido a simetria nos índices inferiores de $\overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, o tensor $\overset{c}{R}^\lambda_{\mu\nu\sigma}$ satisfaz a seguinte propriedade

¹⁴Esta é a razão do porquê define-se o tensor de Ricci como sendo a soma do primeiro com o terceiro índice ou do segundo com o quarto.

¹⁵O leitor pode verificar este resultado na página 142, seção 7 de [17].

¹⁶Para maiores detalhes, o leitor é direcionado a [18].

$$\overset{c}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \overset{c}{R}{}^{\alpha}{}_{\nu\beta\mu} + \overset{c}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = 0. \quad (2.42)$$

A identidade (2.42) é conhecida como *primeira identidade de Bianchi*. Desta identidade, pode-se obter uma outra conhecida como *segunda identidade de Bianchi*, que é de grande interesse para a física. Esta segunda identidade tem a seguinte forma:

$$\overset{c}{R}{}_{\beta\mu\nu\lambda;\alpha} + \overset{c}{R}{}_{\beta\mu\alpha\nu;\lambda} + \overset{c}{R}{}_{\beta\mu\lambda\alpha;\nu} = 0. \quad (2.43)$$

Na verdade, a forma da segunda identidade de Bianchi que mais desperta o interesse dos físicos é um caso mais simples da expressão acima. Tal forma é obtida a partir da contração de índices necessária para deixar a expressão em termos do tensor de Ricci e do escalar de curvatura. Para tal, é necessário fazer a contração de dois pares de índices. Façamos a contração de β com λ e α com μ em (2.43):

$$\begin{aligned} & \overset{c}{R}{}^{\beta\mu}{}_{\nu\beta;\mu} + \overset{c}{R}{}^{\beta\mu}{}_{\mu\nu;\beta} + \overset{c}{R}{}^{\beta\mu}{}_{\beta\mu;\nu} \\ &= -\overset{c}{R}{}^{\mu\beta}{}_{\nu\beta;\mu} - \overset{c}{R}{}^{\beta\mu}{}_{\nu\mu;\beta} + \overset{c}{R}{}_{;\nu}{}^{\mu\beta}{}_{\mu\beta} \\ &= -2\overset{c}{R}{}^{\mu\beta}{}_{\nu\beta;\mu} + \overset{c}{R}{}_{;\nu}{}^{\mu\beta}{}_{\mu\beta} \\ &= -2\overset{c}{R}{}^{\mu}{}_{\nu;\mu} + \overset{c}{R}{}_{;\nu}{}^{\mu}{}_{\mu} \\ &= \left(-2\overset{c}{R}{}^{\mu}{}_{\nu} + \delta^{\mu}_{\nu} \overset{c}{R} \right)_{;\mu} = 0. \end{aligned}$$

A identidade acima pode ser expressa em uma forma mais compacta por

$$\overset{c}{G}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.44)$$

onde

$$\overset{c}{G}{}^{\mu\nu} \equiv \overset{c}{R}{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \overset{c}{R}. \quad (2.45)$$

O tensor $G^{\mu\nu}$ é conhecido como *tensor de Einstein* e é de fundamental importância na *teoria da relatividade geral*. Discutiremos um pouco sobre esta teoria no capítulo 3.

Capítulo 3

Relatividade Geral

A relatividade geral é uma teoria da gravitação formulada em uma geometria riemanniana¹. Por ter sido formulada em uma geometria mais geral que a euclidiana, ela revolucionou a nossa maneira de ver a geometria do espaço e do tempo. Ela foi a primeira teoria a introduzir o conceito de um espaço físico com curvatura que, não só explicava muito dos dados observacionais já conhecidos, mas como também previu vários efeitos que acabaram sendo verificados experimentalmente. Como veremos mais adiante, algumas hipóteses foram feitas durante a construção dessa teoria. Entretanto, ao contrário do que acontece em muitas outras teorias, todas essas hipóteses são razoáveis. Assim sendo, a relatividade geral é um caso particular da geometria riemanniana. Neste capítulo não iremos tratar de todos os aspectos da relatividade geral, pois, não é nossa intenção fazer uma introdução a esta teoria. Trataremos apenas dos aspectos que são fundamentais para compreensão desta tese além, claro, daqueles que não podem ser deixados de lado. Também não nos preocuparemos em apresentar a teoria seguindo a sequência histórica. Na seção 3.1, apresentamos a teoria, enquanto que na seção 3.2 exibimos a equação de movimento para uma partícula puntiforme na presença de um corpo massivo. Neste último caso, apresentamos o método de Papapetrou para a obtenção da equação do movimento. Comentamos também um pouco sobre as dificuldades na obtenção desta equação em certas situações físicas.

¹Na verdade, pseudo-riemanniana.

3.1 Hipóteses da relatividade geral

Para construir uma teoria fazendo uso do princípio da ação mínima, precisamos conhecer os invariantes da geometria. Além disso, é necessário saber qual é a geometria que queremos e se há alguma hipótese adicional a ser feita. No caso da relatividade geral, são várias as hipóteses que estão presentes, estejam elas implícitas ou explícitas. Uma destas, é a idéia de que a matéria curva o espaço. Em princípio, este fato não implicaria na restrição a uma variedade riemanniana quadridimensional. Poderíamos ter geometrias mais gerais do que a riemanniana, como por exemplo, as geometrias que serão discutidas nos capítulos² 4 e 5. Portanto, a relatividade geral também tem a hipótese de que a geometria do espaço-tempo é riemanniana e quadridimensional. Em adição as hipóteses já mencionadas, supõe-se que as equações de campo da teoria, equações que descrevem como a geometria reage a presença da matéria, sejam de segunda ordem nas derivadas da métrica e que a parte da geometria que acopla com o tensor de energia e momento tenha 4-divergência nula. A junção dessas hipóteses determina as equações de campo de forma unívoca [19, 20]. Essa afirmação é conhecida com *teorema de Lovelock*, que pode ser enunciado da seguinte maneira³.

Teorema 3.1.1 *Sejam $A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}, g_{\mu\nu,\alpha\beta})$ as componentes de um tensor simétrico, ou seja, $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$. Admita também um espaço-tempo quadridimensional e riemanniano. Se $A^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, então*

$$A^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}.$$

Analisando este teorema em termos da ação, teremos o seguinte. De maneira bem geral, podemos escrever a ação de uma teoria da gravitação em um espaço-tempo riemanniano de dimensão 4 na forma

$$S = \int d^4x (\mathcal{L} + \chi \mathcal{L}_M), \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_M$ são as densidades lagrangianas da geometria e da matéria, respectivamente; χ é a constante de acoplamento da matéria com a geometria. Admitindo que essas lagrangianas sejam função da métrica e de suas derivadas, o princípio variacional levará

²Estas duas geometrias abarcam perfeitamente bem a idéia de que a matéria curva o espaço, pois, elas são generalizações da geometria riemanniana.

³A demonstração de 3.1.1 pode ser encontrada em [19].

as equações de campo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\chi \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (3.2)$$

Dividindo toda a expressão acima por $\sqrt{-g}$, teremos a equação tensorial

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\chi T^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}$ é denominado tensor de energia-momento. O termo do lado direito da expressão anterior é visivelmente simétrico em μ e ν . Devido as leis de conservação, é natural impor que a 4-divergência de $T^{\mu\nu}$ seja nula. Admitindo que as equações de campo dependam no máximo da derivada segunda da métrica, é inevitável deixar de fazer a identificação de $A^{\mu\nu}$, apresentado no teorema 3.1.1, com o termo $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}$ e, conseqüentemente, obtermos⁴

$$\overset{c}{G}{}^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \xi T^{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

onde $\overset{c}{G}{}^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein [veja (2.45)]. Essas equações são conhecidas por *equações de Einstein com termo cosmológico*. Surge, então, a seguinte pergunta: Qual é a ação mais simples que fornece (3.4)? A resposta a essa pergunta é

$$S_g = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\overset{c}{R} + 2\Lambda \right). \quad (3.5)$$

onde Λ é a constante cosmológica. Qualquer outra lagrangiana irá fornecer as mesmas equações de campo (3.4) ou violar pelo menos uma das hipóteses da relatividade geral citadas acima. Vale ressaltar que este resultado não é válido para dimensões maiores do que quatro e nem para outras geometrias, como por exemplo, geometrias com torção⁵. Assim sendo, sem perda de generalidade, a ação da relatividade geral pode ser escrita na forma

$$S_g = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\overset{c}{R} + 2\Lambda + \chi \mathcal{L}_M \right). \quad (3.6)$$

Fazendo variações com relação a métrica em (3.6) e tomando $\Lambda = 0$, reobtemos as equações de campo da relatividade geral sem a constante cosmológica

$$\overset{c}{G}{}_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

⁴Redefinimos as constantes na forma $\Lambda = b/a$ e $\xi = -\chi/a$.

⁵Neste caso, surge a possibilidade de termos quadráticos na torção [21].

3.2 Equação de movimento

Embora Einstein tenha postulado que as partículas seguem geodésicas e este postulado tenha se mostrado eficaz, pelo menos quando corpos testes podem ser considerados como pontos, verificou-se mais tarde dois fatos importantes: a visão inicial de Einstein de termos as equações de campo e separadamente as equações da geodésica era limitada para casos onde o corpo teste podia ser considerado como um ponto, não valendo, portanto, para casos onde o corpo teste produzia alterações significativas na geometria do background⁶ [22]. O outro fato importante é que de certa forma remove a limitação mencionada anteriormente é que as equações de movimento na relatividade geral não podem ser postuladas separadamente as equações de campo, na verdade, elas são uma consequência natural da segunda identidade de Bianchi ou, equivalentemente, uma consequência do fato de (2.44) implicar na conservação do tensor momento-energia [22, 23]. Perceba que, embora seja a conservação do tensor momento-energia que permita a dedução da equação de movimento da partícula, é fundamental que isto seja uma consequência natural da geometria, pois, como veremos no capítulo sobre torção, o tensor energia-momento não tem 4-divergência nula. Um fato curioso sobre tudo isso é que a relatividade geral é muito mais poderosa do que o próprio Einstein pensou que fosse quando formulou o postulado de que as partículas seguem geodésicas. De fato, a equação (3.7) já contém essa informação. A informação sobre o movimento da partícula está contida no tensor energia-momento da partícula teste que, em princípio, também deve ser lavado em consideração. Diante de tudo isso, a pergunta mais natural é: qual a equação de movimento para a relatividade geral? A resposta, infelizmente, não é simples, pois, devido a não linearidade das equações de Einstein, a equação da conservação do tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.8)$$

também não é linear e, conseqüentemente, a obtenção de uma única equação do movimento para qualquer situação física torna-se uma missão quase, se não, impossível. Todavia, podemos abordar casos particulares e, como veremos adiante, é possível obter a equação de movimento para uma partícula puntiforme na presença de um corpo massivo. Deste último fato resulta que esta equação é exatamente a equação da geodésica, como foi dito

⁶Geometria determinada pelo corpo de maior massa. Em alguns casos, tal geometria de background não pode se quer ser definida, como por exemplo o caso de estrelas binárias.

anteriormente.

O problema da equação de movimento para a relatividade geral tem sido abordado de várias formas diferentes [22, 24, 25]. Muitas destas abordagens distinguem-se umas das outras pelo foco de interesse. Por exemplo, em astronomia, existe o interesse no estudo do movimento de estrelas em sistemas binários que, em hipótese alguma, pode ser tratado como uma partícula de massa desprezível na presença de um corpo massivo, pois, os dois corpos possuem massas equiparáveis. Para este caso, Einstein e colaboradores desenvolveram um método para soluções fora dos corpos, conhecido como *Einstein-Infeld-Hoffman* [26, 27, 28]. Nesta abordagem, os corpos são aproximados por partículas puntiformes (singularidades do campo), porém nenhuma restrição é feita às massas. Outro foco de interesse diz respeito aos casos em que podemos considerar pequenos os efeitos gravitacionais de um certo corpo na presença de outro mais massivo. Neste caso, faz sentido falar em uma geometria efetiva (background). Exibiremos a seguir o método desenvolvido por *Fock* e posteriormente usado por *Papapetrou* [22, 29] para deduzir a equação da geodésica. Embora este não seja o procedimento mais simples para deduzir a equação de movimento da partícula puntiforme⁷, ele tem a vantagem de permitir a generalização para casos mais realísticos.

3.2.1 Equação de movimento de uma partícula puntiforme

Considere uma partícula teste na presença de um corpo massivo e que se encontra fora deste corpo, como indicado na figura 3.1. Representando o tensor energia-momento da partícula por $\delta T^{\mu\nu}$, é natural que o tensor momento-energia total possa ser visto como

$$T^{\mu\nu}_{\text{total}} = T^{\mu\nu}_{\text{corpo massivo}} + \delta T^{\mu\nu},$$

ou seja, a partícula introduz uma pequena variação no tensor momento-energia total. Este fato é uma consequência natural da hipótese de Einstein de que a matéria curva o espaço. Se o corpo massivo curva o espaço, por que a partícula também não curvaria? Obviamente, estamos admitindo que a partícula não possui energia suficiente para que sua perturbação seja significativa e, conseqüentemente, faz sentido falar em uma geometria de *background*. No caso, a geometria de background é determinada pela solução das equações

⁷O método mais prático de chegarmos às equações da geodésica é supor que o tensor momento-energia da partícula é uma delta de Dirac.

de Einstein, (3.7), na ausência da partícula, isto é,

$$\overset{c_0}{G}_{\mu\nu} = \chi \overset{o}{T}_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

onde $\overset{\text{corpo massivo}}{T}^{\mu\nu} = \overset{o}{T}_{\mu\nu}$. A partir da equação (3.9), determinamos a métrica de background $\overset{o}{g}_{\mu\nu}$. Para o caso onde a partícula está presente, temos que considerar o tensor de energia-momento total. Desta forma, (3.7) fica

$$\overset{c}{G}_{\mu\nu} = \chi \overset{o}{T}_{\mu\nu} + \chi \delta T^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

que, fora do corpo massivo e dentro da partícula, assume a forma

$$\overset{c}{G}_{\mu\nu} = \chi \delta T^{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Perceba que, inicialmente, estamos admitindo que a partícula tenha uma certa estrutura. Da segunda identidade de Bianchi (2.44), teremos

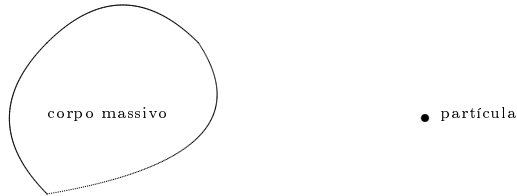


Figura 3.1: A geometria do espaço-tempo depende de como o corpo massivo e a partícula deformam o espaço.

$$\delta T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (3.12)$$

Usando a definição de conexão riemanniana 2.5.1, podemos reescrever (3.12) da seguinte forma

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (3.13)$$

onde⁸ $\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \delta T^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial de peso 1. Usando a definição de

⁸Fizemos isso apenas por conveniência.

derivada covariante de uma densidade tensorial⁹ de peso 1, a expressão (3.13) fica

$$\mathfrak{Z}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \overset{c}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.14)$$

Como a partícula perturba pouco a geometria do background, podemos ver $\overset{c}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}$ como sendo a conexão obtida com $\overset{0}{g}_{\mu\nu}$ mais uma pequena perturbação $\delta\Gamma$, ou seja, $\overset{c}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$. Todavia, a densidade tensorial $\mathfrak{Z}^{\alpha\beta}$ já é uma pequena perturbação. Desta forma, podemos fazer a aproximação $\overset{c}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} \simeq \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \mathfrak{Z}^{\alpha\beta}$. Portanto, a expressão (3.14) pode ser aproximada por

$$\mathfrak{Z}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.15)$$

Uma característica da relatividade geral é que, a medida que nos distanciamos do corpo que deforma a geometria, as variações da métrica vão diminuindo pouco a pouco até que a métrica assuma a forma da métrica de Minkowski. Este fato nos permite fazer a seguinte consideração: se as dimensões lineares da partícula (para entender melhor o que seja dimensões lineares da partícula, veja a figura 3.2) forem pequenas em comparação com a distância da partícula até o corpo massivo, então, $\overset{o}{g}_{\mu\nu}$ e suas derivadas variam pouco na região onde a partícula está contida. Disto, concluímos que $\overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}$ também varia pouco. Podemos, portanto, expandir $\overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(x^{\alpha})$ em torno de um ponto X^{α} dentro da partícula

$$\overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(x^{\alpha}) \simeq \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(X^{\alpha}) + \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta,\sigma}(X^{\alpha})(x^{\sigma} - X^{\sigma}) \dots \quad (3.16)$$

Como a partícula é puntiforme $x^{\alpha} - X^{\alpha} \simeq 0$, logo

$$\int dx^3 (x^{\mu} - X^{\mu}) \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} = \int dx^3 (x^{\sigma} - X^{\sigma}) (x^{\mu} - X^{\mu}) \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} = \dots = 0. \quad (3.17)$$

Esta é a condição que chamamos de monopolo. Como o nosso objetivo é integrar (3.15), a expressão (3.17) mostra que o termo da derivada na expansão (3.16) é irrelevante e, conseqüentemente, consideraremos apenas o primeiro termo da expansão, ou seja, $\overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(x^{\alpha}) = \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(X^{\alpha})$. Assim sendo, a expressão (3.15) toma a forma

$$\mathfrak{Z}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \overset{o}{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(X^{\alpha}) \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.18)$$

⁹O leitor pode consultar a expressão da derivada covariante de uma densidade tensorial em qualquer livro de relatividade geral como, por exemplo, capítulo 7 de [18].

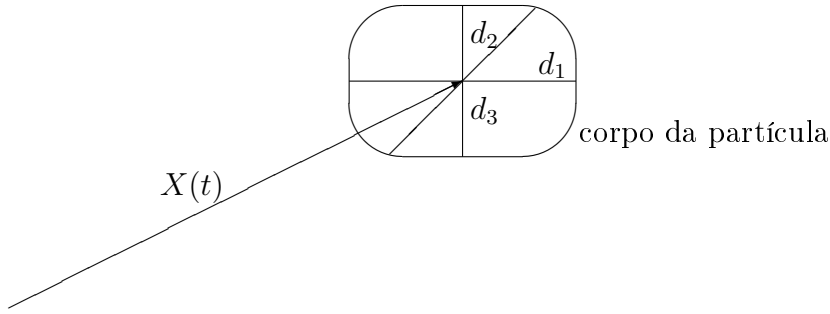


Figura 3.2: Admitimos que as dimensões lineares da partícula d_i são muito menores do que a distância da partícula até o corpo massivo, que se encontra na origem do nosso referencial, ou seja, $X(t) \gg d_i$. Este fato garante que a métrica do background $\overset{o}{g}_{\mu\nu}$ varia pouco dentro da partícula.

Para usar a informação de que o termo de dipolo é nulo, iremos expressar a segunda igualdade em (3.17) na forma

$$\int dx^3 x^\alpha \mathfrak{T}^{\mu\nu} = X^\alpha(t) \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Por sua vez, para podermos utilizar o resultado acima, iremos expressar (3.18) na seguinte forma

$$\mathfrak{T}^{\mu\sigma} = (x^\sigma \mathfrak{T}^{\mu\nu})_{,\nu} + x^\sigma \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \mathfrak{T}^{\alpha\beta}. \quad (3.20)$$

Perceba que (3.20) é totalmente equivalente a (3.18). Vamos agora integrar a expressão acima no volume na qual a partícula está contida em um dado instante t (3-volume). Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu\sigma} &= \int dx^3 (x^\sigma \mathfrak{T}^{\mu\nu})_{,\nu} + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \int dx^3 x^\sigma \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \\ &= \int dx^3 (x^\sigma \mathfrak{T}^{\mu 0})_{,0} + \int dx^3 (x^\sigma \mathfrak{T}^{\mu i})_{,i} + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \int dx^3 x^\sigma \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{d}{dt} \int dx^3 x^\sigma \mathfrak{T}^{\mu 0} + \int dS x^\sigma \overset{o}{\mathfrak{T}}^{\mu i} + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \int dx^3 x^\sigma \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{d}{dt} \int dx^3 x^\sigma \mathfrak{T}^{\mu 0} + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \int dx^3 x^\sigma \mathfrak{T}^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

onde usamos (3.20) na primeira linha, abrimos o somatório em uma parte temporal e outra espacial na segunda linha, da segunda para a terceira linha transformamos a integral do 3-volume (hipersuperfície) em uma superficial (bi-superfície), e no segundo termo da terceira linha usamos o fato de que $\mathfrak{T}^{\mu i}$ é diferente de zero apenas na região limitada pela superfície

S , não na superfície (condição de contorno). Usando na expressão anterior a condição de que o termo de dipolo é nulo, condição (3.19), ficamos com

$$\begin{aligned} \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu\sigma} &= \frac{d}{dt} \left(X^\sigma \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu 0} \right) + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) X^\sigma \int dx^3 \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{dX^\sigma}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu 0} + X^\sigma \frac{d}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu 0} + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) X^\sigma \int dx^3 \mathfrak{T}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Integrando a expressão (3.18) e usando o fato do tensor momento-energia ser nulo na superfície que limita o volume da partícula, teremos

$$\frac{d}{dt} \left(\int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu 0} \right) + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \int dx^3 \mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21), teremos

$$\int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu\sigma} = \frac{dX^\sigma}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu 0}, \quad (3.23)$$

que implica naturalmente

$$\int dx^3 \mathfrak{T}^{0\sigma} = \frac{dX^\sigma}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{00}. \quad (3.24)$$

Usando a simetria do tensor energia-momento e substituindo (3.24) em (3.23), teremos

$$\int dx^3 \mathfrak{T}^{\mu\sigma} = \frac{dX^\sigma}{dt} \frac{dX^\mu}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{00} \quad (3.25)$$

Substituindo (3.24) e (3.25) em (3.22), chegamos a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dX^\mu}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{00} \right) + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \frac{dX^\beta}{dt} \frac{dX^\alpha}{dt} \int dx^3 \mathfrak{T}^{00} = 0. \quad (3.26)$$

Usando o fato de que $P^\nu = \int dx^3 \mathfrak{T}^{0\nu}$, e conseqüentemente $u^0 m_0 = \int dx^3 \mathfrak{T}^{00}$, onde $u^\mu = \frac{dX^\mu}{ds}$ é a 4-velocidade da partícula, a expressão (3.26) fica

$$\frac{d^2 X^\mu}{ds^2} + \overset{o}{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} (X^\alpha) \frac{dX^\beta}{ds} \frac{dX^\alpha}{ds} = 0, \quad (3.27)$$

onde foi utilizado a regra da cadeia $\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds}$ e o fato de que $\frac{dm_0}{ds} = 0$. Para uma demonstração deste último resultado, o leitor é direcionado para a página 156 de [22].

Provamos, portanto, que uma partícula puntiforme na presença de um corpo massivo segue a geodésica da geometria gerada por esse corpo. Todavia, se quiséssemos fazer uma abordagem mais realística teríamos que considerar que a partícula tem estrutura (dipolo, por exemplo) e poderia rotacionar. Seguindo o método aqui apresentado (método de Papapetrou), é possível obter a equação de movimento para uma partícula com estrutura de dipolo. O procedimento é totalmente análogo ao que já fizemos, a única diferença está no fato de que, agora, teríamos que usar a condição de que o tripolo é nulo $\int dx^3 (x^\alpha - X^\alpha) (x^\sigma - X^\sigma) \mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0$ e, ao invés de multiplicar (3.18) por x^α para obter (3.20), teríamos que multiplicá-la por $x^\alpha x^\beta$. As contas para este caso e discussões sobre as dificuldades associadas com a equação de movimento de uma partícula com estrutura podem ser encontradas em [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Para o leitor que estiver interessado em um aprofundamento maior sobre o problema da equação de movimento tanto na relatividade geral quanto em teorias mais gerais, [36] contém uma tabela histórica muito interessante com referências fundamentais para quem deseja ter mais conhecimento sobre este assunto. Em [31] e citações dentro deste, o leitor pode encontrar um resultado muito importante para o movimento de corpos com estrutura na relatividade geral, a existência e unicidade do centro de massa para campos gravitacionais fracos. Em [37], os autores deduzem a equação de movimento clássica para uma partícula puntiforme com spin $\hbar/2$, a partir da equação de Dirac num espaço curvo riemanniano. O resultado é uma equação formalmente equivalente a de Papapetrou para um corpo com estrutura de dipolo que rotaciona.

Capítulo 4

Geometria de Riemann-Cartan U_n

Neste capítulo apresentamos a geometria de Riemann-Cartan com o intuito de preparar o leitor para o que faremos nos capítulos 6, 7 e 8. Não entraremos em todos os detalhes desta geometria, até mesmo porque isto seria impossível devido a riqueza presente nela. Começaremos, primeiro, com os aspectos geométricos. Definiremos um objeto matemático chamado torção, e veremos que este objeto é responsável pela distinção entre a geometria de Riemann-Cartan e a riemanniana. Depois apresentaremos as motivações para o uso da torção na física, os modelos que mais despertam o interesse dos físicos, comentários sobre algumas soluções exatas de certos modelos com várias referências para quem estiver interessado em analisar esta questão e, para finalizar, as perspectivas experimentais dos modelos com torção.

4.1 Torção

A torção está associada ao fato de que uma curva fechada em uma dada variedade com torção não é representada por uma curva fechada no plano tangente à variedade. Para ser mais preciso, a torção é proporcional ao não-fechamento de paralelogramos infinitesimais no plano tangente¹, ou seja, ela é uma medida desse não-fechamento e por isso está associada a translação de vetores. Geometrias com torção são, portanto, uma generalização natural da geometria riemanniana. Por esta razão, o estudo da torção é importante tanto para a física quanto para a matemática.

Para entendermos melhor a torção, considere o seguinte. Sejam dois campos vetoriais

¹Vale salientar que as contas são sempre feitas no plano tangente, nunca na própria variedade.

$V = \epsilon^\mu \partial_\mu$ e $U = \delta^\mu \partial_\mu$ definidos em $T_A M$, onde $\{\partial_\mu\}$ é a base coordenada, e as funções ϵ^μ e δ^μ são infinitesimais. Tomemos três pontos de M tais que $B = A + V$ e $C = A + U$. Transportando U de A até B e V de A até C , teremos a situação indicada na figura 4.1. Matematicamente, podemos representar as componentes dos vetores transportado paralelamente por $\delta^\parallel = \delta^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \epsilon^\mu \delta^\nu$ e $\epsilon^\parallel = \epsilon^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \epsilon^\nu \delta^\mu$. Da figura 4.1 está claro que o deslocamento $\overline{AD}^\lambda$ é dado por

$$\overline{AD}^\lambda = \epsilon^\lambda + \delta^\parallel{}^\lambda = \epsilon^\lambda + \delta^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \epsilon^\mu \delta^\nu. \quad (4.1)$$

Já o deslocamento $\overline{AE}$ é

$$\overline{AE}^\lambda = \delta^\lambda + \epsilon^\parallel{}^\lambda = \delta^\lambda + \epsilon^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \epsilon^\nu \delta^\mu. \quad (4.2)$$

Na geometria riemanniana, teríamos $\overline{AD} = \overline{AE}$. Entretanto, podemos generalizar a geometria removendo esta restrição. Tomando a diferença entre (4.1) e (4.2), teremos

$$\overline{AD}^\lambda - \overline{AE}^\lambda = (\Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \epsilon^\mu \delta^\nu. \quad (4.3)$$

Perceba que em termos da conexão em uma base coordenada, o fechamento do paralelogramo da figura 4.1 depende da simetria dos índices da conexão. Com o intuito de escrevermos (4.3) em uma forma independente da base que escolhemos, façamos a contração de (4.3) com ∂_λ definido em A . Neste caso, segue

$$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \epsilon^\mu \delta^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \epsilon^\nu \delta^\mu = \epsilon^\mu \nabla_U \partial_\mu - \delta^\nu \nabla_V \partial_\nu, \quad (4.4)$$

onde usamos o fato de que, como ϵ^μ e δ^ν estão definidos no ponto A , $V = \epsilon^\mu \partial_\mu$ e $U = \delta^\nu \partial_\nu$. Podemos continuar a simplificar (4.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu \nabla_U \partial_\mu - \delta^\nu \nabla_V \partial_\nu &= \nabla_U V - U[\epsilon^\mu] \partial_\mu - \nabla_V U + V[\delta^\mu] \partial_\mu \\ &= \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Do jeito que a expressão acima está escrita, ela é independente de coordenadas e da base que usamos. A expressão (4.5) motiva a seguinte definição.

Definição 4.1.1 *Sejam uma variedade U_n de dimensão n dotada de uma métrica g e U, V dois vetores de $T_P U$. Aplicação $\mathcal{T} : T_P U \times T_P U \rightarrow T_P U$, definida por*

$$\mathcal{T}(V, U) = \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U], \quad (4.6)$$

é denominada torção.

O papel de cada um dos elementos de (4.6) está exemplificado na figura 4.2.

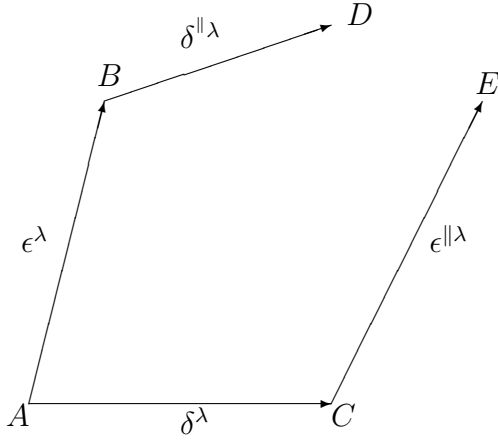


Figura 4.1: Em uma geometria mais geral que a riemanniana, o transporte paralelo de δ^λ ao longo de ϵ^λ combinado com o de ϵ^λ ao longo de δ^λ não necessariamente produz um paralelogramo.

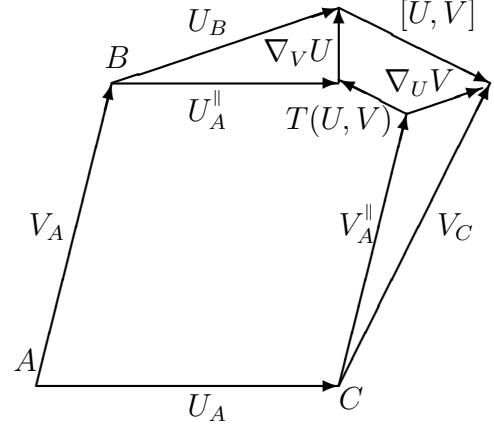


Figura 4.2: Nesta figura, temos os campos vetoriais V e U avaliados em três pontos distintos, A , B e C . Os vetores $U_A^\parallel$ e $V_A^\parallel$ são os campos U e V avaliados no ponto A e transportados paralelamente para B e C , respectivamente. Embora não tenhamos explicitado, os outros elementos estão avaliados em A , $[U, V] = [U, V]_A$ por exemplo.

4.2 Determinando a conexão em termos da métrica e da torção

Como U_n é dotada de uma métrica, podemos impor a seguinte condição de compatibilidade

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W). \quad (4.7)$$

Para obtermos a conexão em termos da métrica e da torção, é conveniente reescrevermos (4.7) nas seguintes equivalentes formas

$$W[g(V, U)] = g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U), \quad (4.8)$$

$$U[g(W, V)] = g(\nabla_U W, V) + g(W, \nabla_U V). \quad (4.9)$$

Somando (4.7) com (4.8) e subtraindo por (4.9), segue o cálculo

$$\begin{aligned} & V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] = \\ & g(\nabla_V U - \nabla_U V, W) + g(\nabla_W V + \nabla_V W, U) \\ & + g(\nabla_W U - \nabla_U W, V) = g(\mathcal{T}(V, U) + [V, U], W) \\ & + g(\mathcal{T}(W, U) + [W, U], V) + g(\nabla_W V + \nabla_V W, U), \end{aligned}$$

onde foi usado (4.6). Substituindo a identidade $g(\nabla_W V + \nabla_V W, U) = 2g(\nabla_W V, U) + g(\mathcal{T}(V, W) + [V, W], U)$ na expressão acima, chegaremos a

$$\begin{aligned} g(\nabla_W V, U) = \frac{1}{2} \Big\{ & V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] \\ & -g([V, U], W) - g([W, U], V) - g([V, W], U) - g(\mathcal{T}(V, U), W) \\ & -g(\mathcal{T}(W, U), V) - g(\mathcal{T}(V, W), U) \Big\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Em uma base coordenada, $V \rightarrow \partial_\mu$, $W \rightarrow \partial_\nu$ e $U \rightarrow \partial_\alpha$, segue o cálculo

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu, \partial_\alpha) = \frac{1}{2} \Big\{ & g_{\alpha\nu, \mu} + g_{\mu\alpha, \nu} - g_{\nu\mu, \alpha} - g(T_{\mu\alpha}^\beta \partial_\beta, \partial_\nu) \\ & -g(T_{\nu\alpha}^\beta \partial_\beta, \partial_\mu) - g(T_{\mu\nu}^\beta \partial_\beta, \partial_\alpha) \Big\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde fizemos as definições $T_{\mu\nu}^\alpha \equiv \langle dx^\alpha, \mathcal{T}(\partial_\mu, \partial_\nu) \rangle$, e $g_{\mu\nu} \equiv g(\partial_\mu, \partial_\nu)$. Dando continuidade ao cálculo de (4.11) com o auxílio da definição $\Gamma_{\nu\mu}^{t\beta} \equiv \langle dx^\beta, \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \rangle$,

$$g(\Gamma_{\nu\mu}^{t\beta} \partial_\beta, \partial_\alpha) = \frac{1}{2} \{g_{\alpha\nu, \mu} + g_{\mu\alpha, \nu} - g_{\nu\mu, \alpha}\} - \frac{1}{2} \{T_{\mu\alpha}^\beta g_{\beta\nu} + T_{\nu\alpha}^\beta g_{\beta\mu} + T_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha}\}.$$

Contraindo com $g^{\lambda\alpha}$, chegamos a

$$\Gamma_{\nu\mu}^{t\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{c\lambda} - \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^\lambda + T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\mu\nu}^\lambda), \quad (4.12)$$

onde $\Gamma_{\nu\mu}^{c\lambda}$ é o símbolo de Christoffel, dado por (2.37). Da definição de torção, vemos que $T_{\mu\nu}^\alpha = -T_{\nu\mu}^\alpha$. Usando este fato em (4.12), podemos reescrever $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{t\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{c\lambda} - \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\nu\mu}^\lambda - T_{\mu\nu}^\lambda). \quad (4.13)$$

O tensor dado por

$$K_{\mu\nu}^\lambda = -\frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\nu\mu}^\lambda - T_{\mu\nu}^\lambda) \quad (4.14)$$

é chamado de *contorção*. Em termos do tensor de contorção, a expressão acima fica

$$\Gamma_{\mu\nu}^{t\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{c\lambda} + K_{\mu\nu}^\lambda. \quad (4.15)$$

O leitor deve estar atento para o fato que também é comum definir o tensor de contorção com o sinal contrário ao que definimos aqui.

De (4.14), vemos que a contorção tem as seguintes propriedades

$$K^{\lambda(\mu\nu)} = -\frac{1}{2} (T^{\mu\nu\lambda} + T^{\nu\mu\lambda}), \quad (4.16)$$

$$K^{\lambda[\mu\nu]} = \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu}, \quad (4.17)$$

$$K^{\lambda\mu\nu} = -K^{\nu\mu\lambda}. \quad (4.18)$$

4.3 Geodésicas e Autoparalelas

Existem dois tipos de geodésicas², geodésicas afim (ou auto-paralelas) e geodésicas métricas. A primeira pode ser vista como a curva mais reta da geometria, enquanto que a segunda pode ser vista como a menor distância entre dois pontos [38]. Na geometria riemanniana é irrelevante fazer distinção entre estas duas geodésicas, ou seja, ambas são a menor³ distância entre dois pontos e a curva mais reta, porém este não é o caso de geometrias mais gerais como a de Riemann-Cartan. Assim sendo, é importante esclarecer qual a diferença entre as duas.

A equação de geodésica que obtemos no capítulo 2 é a de uma geodésica afim. Isto porque a geodésica afim (autoparalela) é aquela que deriva do conceito de transporte paralelo ou, equivalentemente, da derivada covariante. No entanto, existe um outro conceito de geodésica conhecido como geodésica métrica. Este, por sua vez, deriva do princípio de mínima ação. Dada uma métrica g , definimos o elemento de linha ds , e dizemos que a geodésica métrica é a curva que extremiza a distância entre dois pontos $\int_a^b ds$. Disto, é razoável concluir que nenhuma geometria que generalize a geometria riemanniana sem mudar o conceito de métrica⁴ ou do princípio variacional⁵ mudará a equação da geodésica métrica. O nome geodésica métrica possivelmente vem do fato dela depender apenas do conceito de métrica.

Usando o conceito de transporte paralelo, teremos a geodésica afim

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (4.19)$$

enquanto que a minimização da distância entre pontos leva a geodésica métrica

²Quando usarmos o termo geodésica sem distinguir o tipo, estaremos nos referindo a geodésica métrica.

³Na verdade, a geodésica métrica fornece extremos (máximo ou mínimo).

⁴Possivelmente, a geometria de Finsler seja capaz de tal feito, pois ela generaliza o conceito de métrica.

⁵Em [38], o autor altera o princípio variacional com o intuito de induzir a geodésica métrica a coincidir com a afim, em Riemann-Cartan.

$$\ddot{x}^\lambda + \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (4.20)$$

A diferença entre estas duas equações na geometria de Riemann-Cartan corresponde a um problema conceitual, pois, na obtenção da relatividade geral, Einstein propôs, inspirado na mecânica newtoniana, que a trajetória de uma partícula deveria ser a mais reta e a mais curta possível, veja os comentários da sub-seção 7.4.3 de [39]. Uma discussão interessante sobre as geodésicas, o princípio variacional e as equações de movimento podem ser encontradas em [40].

4.4 Invariantes

Em uma geometria com torção, os invariantes são definidos da mesma maneira que na geometria riemanniana. Nós definimos um tensor de curvatura, tensor de Riemann, e junto com o tensor de torção, construímos os invariantes a partir de contrações. Todavia, ao contrário das geometrias sem torção, nós estamos com um verdadeiro “arsenal” de invariantes, pois, agora, podemos definir dois tensores de curvatura, $R_{\mu\nu}^\lambda \left(\overset{c}{\Gamma} \right)$ e $R_{\mu\nu}^\lambda \left(\overset{t}{\Gamma} \right)$, onde $\overset{t}{\Gamma} = \overset{c}{\Gamma} + K$ (os índices estão omitidos). Einstein contornou este problema para o caso particular de sua teoria unificada admitindo o princípio *Hermitiano*⁶ [41]. Todavia, para casos mais gerais o problema persiste. De fato, isto representa um problema, pois, deste jeito, o número de lagrangianas possíveis torna-se muito alto. De qualquer forma, uma versão generalizada do teorema de Lovelock para U_4 é dada em [21], o que ajuda a reduzir bastante o número de invariantes na hora de construirmos um modelo em Riemann-Cartan. Para maiores detalhes sobre o teorema de Lovelock, veja [19].

4.4.1 Os tensores de Riemann e de Ricci

Pelo que fizemos na seção 2.4.1, sabemos que, dada uma conexão afim ∇ , o tensor de curvatura em termos dessa conexão é

$$R(V, U)W = \nabla_V \nabla_U W - \nabla_U \nabla_V W - \nabla_{[V, U]} W, \quad (4.21)$$

⁶Este princípio afirma que um campo tensorial V é Hermitiano se a condição $V(\overset{c}{\Gamma}, g) = V(\overset{t}{\Gamma}, \tilde{g})$ é satisfeita perante a transformação $g \longrightarrow \tilde{g}(U, W) = g(W, U)$ e $\nabla_W U(\overset{c}{\Gamma}, g) = \nabla_W U(\overset{t}{\Gamma}, \tilde{g})$, onde g é a métrica do espaço; U e W são campos vetoriais.

onde U , V , W são campos vetoriais e ∇ é conexão total (Christoffel mais contorção). Em termos de uma base coordenada, teremos

$$R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho,\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \Gamma^\phi_{\sigma\rho}\Gamma^\mu_{\alpha\phi} - \Gamma^\phi_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\sigma\phi}, \quad (4.22)$$

onde fizemos a definição $R^\mu_{\rho\alpha\sigma} \equiv \langle dx^\mu, R(\partial_\alpha, \partial_\sigma)\partial_\rho \rangle$. Veja a demonstração de (4.22) no apêndice D.1.2.

Substituindo (4.15) na expressão acima, teremos

$$\begin{aligned} R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = & \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\sigma\rho,\alpha} + K^\mu_{\sigma\rho,\alpha} - \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\alpha\rho,\sigma} - K^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \left(\overset{c}{\Gamma}^\phi_{\sigma\rho} + K^\phi_{\sigma\rho} \right) \left(\overset{c}{\Gamma}^\mu_{\alpha\phi} + K^\mu_{\alpha\phi} \right) \\ & - \left(\overset{c}{\Gamma}^\phi_{\alpha\rho} + K^\phi_{\alpha\rho} \right) \left(\overset{c}{\Gamma}^\mu_{\sigma\phi} + K^\mu_{\sigma\phi} \right). \end{aligned}$$

Fazendo um rearranjo dos termos da expressão acima para deixá-la em termos do tensor de Riemann com o símbolo de Christoffel $\overset{c}{R}$, chegamos a (veja o apêndice D.1.3)

$$R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \overset{c}{R}^\mu_{\rho\alpha\sigma} + K^\mu_{\sigma\rho;\alpha} - K^\mu_{\alpha\rho;\sigma} + K^\phi_{\sigma\rho}K^\mu_{\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho}K^\mu_{\sigma\phi}, \quad (4.23)$$

onde “:” indica a componente da derivada covariante riemanniana, que usa apenas o símbolo de Christoffel.

Pode-se verificar que o tensor de Riemann definido com a conexão total é anti-simétrico nos dois primeiros e nos dois segundos índices [2, 42]. Desta forma, teremos

$$R^\beta_{\beta\mu\nu} = R_{\mu\beta}{}^\nu{}_\nu = 0.$$

Todavia, $R_{\beta\alpha\mu\nu} \neq R_{\mu\nu\beta\alpha}$.

Para sabermos o número de componentes independentes no tensor de Riemann, basta seguirmos um raciocínio simples: Como as propriedades de anti-simetria aparecem em pares, podemos analisar o número de componentes independentes como sendo o produto do número de componentes independentes de cada par analisado separadamente. Exemplo, se um tensor em um espaço de dimensão n tem m (m sendo um número par) índices e ambos apresentando anti-simetria aos pares⁷, então o número de componentes independentes será igual ao número de componentes independentes em uma matriz quadrada anti-simétrica

⁷Anti-simetria aparecendo entre pares, aqui, está significando que todos os índices tem um, e só um, índice correlacionado. Um exemplo do contrário seria o tensor de Levi Civita ($\epsilon_{abc} = -\epsilon_{cba} = -\epsilon_{bac}$).

elevado à metade do número de índices. Sabemos que os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são nulos e que os elementos “acima” desta diagonal são iguais aos da parte de “baixo” multiplicados por menos um. Desta forma, o número de componentes independentes numa matriz quadrática anti-simétrica é igual ao número de elementos que há acima ou, equivalentemente abaixo, da diagonal. É fácil concluir que este número é (número total de elementos – número de elementos na diagonal)/2. Assim, teremos $\frac{n^2-n}{2}$ elementos independentes neste tipo de matriz. Para o caso do tensor com m índices nos quais a anti-simetria aparece aos pares e não há nenhuma outra simetria entres os índices, o número de componentes independentes é $\left[\frac{n^2-n}{2}\right]^{m/2} = \frac{n^{\frac{m}{2}}(n-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}}$. Para o caso, $m = 4$ (quatro índices), $n = 4$ (dimensão do espaço-tempo), teremos 36 componentes independentes.

A partir do tensor de Riemann (4.22), definimos o tensor de Ricci por $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$. Como, agora, temos a desigualdade $R_{\beta\alpha\mu\nu} \neq R_{\mu\nu\beta\alpha}$, o tensor de Ricci não é mais simétrico. Este fato, naturalmente, faz com que o tensor de Einstein também não seja simétrico. Outra propriedade que também muda é a segunda identidade de Bianchi. Para uma espaço com torção, esta identidade tem a seguinte forma⁸:

$$G^{\nu\mu}_{;\nu} + T^{\alpha}_{\nu\alpha} G^{\nu\mu} + T^{\nu}_{\alpha}{}^{\mu} G^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{2} (T_{\nu\alpha\beta} + g_{\nu\alpha} T^{\lambda}_{\beta\lambda} - g_{\nu\beta} T^{\lambda}_{\alpha\lambda}) R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0, \quad (4.24)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Este último fato muda a equação de movimento de uma partícula em uma geometria com torção, como pode ser verificado no apêndice E. Para uma discussão sobre a equação de movimento veja [23, 40], em especial os tópicos 3 (página 26) e 5 (página 27) de [23], e as citações feitas neles, como por exemplo [8].

4.5 Equações de Estrutura de Cartan

Antes de apresentarmos as equações de estrutura de Cartan, definamos a seguinte conexão:

Definição 4.5.1 *Sejam e^A uma 1-forma e e_A um elemento de $T_p M$ tal que $\langle e^A, e_B \rangle = \delta^A_B$. Denomina-se conexão 1-forma o objeto*

$$\omega^A{}_B \equiv \omega^A{}_{CB} e^C, \quad (4.25)$$

⁸O leitor pode consultar tanto a segunda identidade de Bianchi sem torção quanto a com torção em [2]. Todavia, o leitor deve estar atento as diferenças de notação.

onde $\omega^A_{BC} \equiv \langle e^A, \nabla_{e_B} e_C \rangle$ é a conexão afim na base $\{e_A\}$.

Pode-se demonstrar que ω^A_B satisfaz o seguinte conjunto de equações

$$de^A + \omega^A_B \wedge e^B = T^A, \quad (4.26)$$

$$d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = R^A_B, \quad (4.27)$$

onde T^A é a **torção 2-formas**, dada por

$$T^A = \frac{1}{2} T^A_{BC} e^B \wedge e^C \quad (4.28)$$

e R^A_B é a **curvatura 2-formas**, dada por

$$R^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} e^C \wedge e^D. \quad (4.29)$$

As equações (4.26) e (4.27) são conhecidas como **equações de estrutura de Cartan**.

As equações de estrutura de Cartan também podem ser escritas da seguinte forma:

$$T = \bar{d}e, \quad (4.30)$$

$$R^A_B e_A = \bar{d}^2 e_B, \quad (4.31)$$

onde $e \equiv e^A \otimes e_A$, $\bar{d}$ é a derivada exterior estendida (veja página 388 de [43] ou a seção 10.4.3 de [39]), e $T = T^A \otimes e_A$. A derivada estendida $\bar{d}$ é basicamente uma extensão da diferencial d . Para um elemento $\phi = \phi^A \otimes e_A$, onde ϕ^A é uma 1-forma e e_A um vetor, a aplicação $\bar{d} : \Omega_P^r \times T_P M \rightarrow \Omega_P^{r+1} \times T_P M$ atua como d na 1-forma e como ∇ no vetor, onde $\nabla \equiv e^A \nabla_{e_A} \in \Omega_P^1 \otimes T_P M$. Para ser mais preciso, esta derivada atua da seguinte forma. Dado $e = e^A \otimes e_A$, teremos $\bar{d}e = \bar{d}(e^A \otimes e_A) \equiv de^A \otimes e_A - e^A \otimes (\nabla e_A) = de^A \otimes e_A - e^A \wedge (e^C \otimes \nabla_{e_C} e_A) = de^A \otimes e_A - e^A \wedge e^C \omega^D_{CA} \otimes e_D = de^A \otimes e_A - e^A \wedge \omega^D_A \otimes e_D = (de^A - e^B \wedge \omega^A_B) \otimes e_A = (de^A + \omega^A_B \wedge e^B) \otimes e_A = T^A \otimes e_A$. A demonstração de (4.31) é igualmente trivial. Para maiores detalhes, veja o apêndice B de [43].

Aplicando a derivada exterior d em (4.26) e (4.27), obteremos a primeira e a segunda identidade de Bianchi

$$dT^A + \omega^A_B \wedge T^B = R^A_B \wedge e^B,$$

$$dR^A_B + \omega^A_C \wedge R^C_B - \omega^C_B \wedge R^A_C = 0.$$

4.6 Motivações para o uso da torção

Seguindo a idéia de Einstein de que a massa dos corpos curvam o espaço, é natural pensar que o spin⁹, entidade física ausente na relatividade geral, esteja associado à torção. Desta forma, uma teoria da gravitação com spin seria realizada em uma geometria de Riemann-Cartan. Embora esta visão não seja definitiva, hoje a idéia mais aceita é a de que, de fato, a torção tem como fonte o spin [41]. Uma vez que a maneira mais natural de se introduzir o spin na gravitação é via a torção, esta acaba sendo uma das grandes motivações para o estudo de teorias com torção. No apêndice E ficará claro o porquê esta é a maneira mais natural de se introduzir o spin na gravitação.

Em teorias de unificação, a torção pode exercer um papel fundamental. Como exemplo, temos a teoria de unificação da gravitação com o electromagnetismo proposta por Einstein, teleparallelismo, que tem como objeto matemático fundamental a torção.

Em termos de simetria, a torção tem como motivação o fato de que a exigência da invariância da teoria da relatividade especial da matéria sobre rotações e translações locais no espaço-tempo levam inevitavelmente¹⁰ a torção e a curvatura [1]. Além disso, neste contexto (teoria de gauge do grupo de Poincaré), verifica-se que a fonte da torção é o spin [42], como mencionado anteriormente.

Embora Einstein tivesse uma profunda admiração pelo princípio de Mach, verificou-se que a relatividade geral não obedece esse princípio [44, 45, 46]. Todavia, o objetivo de ter uma teoria que obedeça ao princípio de Mach pode ser alcançado com a introdução da torção. Um exemplo do caso, é a teoria desenvolvida em [47, 48] que, segundo o autor, satisfaz todos os quesitos do *Princípio Generalizado de Mach*.

Embora questionável, a torção pode ser usada como um campo compensador no lugar da não-metricidade [41, 49]. O objetivo é basicamente tornar as equações de Einstein invariantes frente transformações conformes. Isto eliminaria a necessidade do uso da geometria de Weyl, que apresenta vários problemas (veja o capítulo 5). Todavia, como já dito, este procedimento é questionável [41].

Outra motivação para o uso da torção reside na impossibilidade de se encontrar regras de comutação para a gravitação tradicional (sem torção) correspondendo as relações de

⁹Nesta tese, o termo spin se refere apenas ao fenômeno quântico, nada tem haver com rotações de corpos com estrutura, como alguns autores adotam [37].

¹⁰Esta afirmação refere-se as teorias de gauge.

desigualdade de Rosenfeld [50, 51, 52]

$$g_{\mu\nu}L_0^2 \geq \frac{\hbar G}{c^3},$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda L_0^3 \geq \frac{\hbar G}{c^3};$$

onde G é constante da gravitação universal, c a velocidade da luz, L_0 denota a dimensão da região do espaço sobre a qual os valores médios de $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são tomados. Esta limitação, todavia, pode não aparecer em uma teoria com torção [50]. Em [50], o autor propõe que a incerteza no momento está associada com a curvatura do espaço, enquanto a incerteza na posição estaria associada com a torção. Disto, ele obtém uma relação de comutação entre curvatura e torção. O significado físico destas associações é que os efeitos quânticos, e portanto, o princípio da incerteza, estariam relacionados a deformações no espaço-tempo.

Teorias com torção podem evitar singularidades. Embora muitas das teorias que evitam singularidades, se não todas, o fazem em situações fisicamente questionáveis [1], é possível que surjam¹¹ teorias que consigam este feito dentro de situações fisicamente razoáveis. Para o leitor interessado em investigar os casos, vale apenas ver [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 36]. A primeira citação da lista anterior mostra na verdade o favorecimento da formação de singularidades. Os demais evitam a singularidade. Em [1] é possível encontrar uma boa orientação de como proceder na análise de singularidades em U_4 , enquanto que em [67] o leitor encontrará uma generalização do teorema de singularidade para a teoria de Einstein-cartan. Já em [36], o leitor encontrará uma excelente revisão histórica do status da cosmologia não-riemanniana.

Embora os efeitos práticos da maioria dos modelos com torção sejam de difícil verificação experimental, alguns mostram que a torção pode exercer um papel fundamental na presença de um campo gravitacional forte, isto é, dentro de uma matéria colapsada e durante estágios iniciais do universo [50].

4.7 Modelos com torção e seus efeitos

São vários os modelos que usam torção e, por isso, falaremos apenas sobre os principais. Dentro destes, os que mais despertaram o interesse dos físicos foram o *Teleparalelismo*, teoria de Einstein-Cartan, modelos quadráticos e modelos cosmológicos baseados em uma

¹¹ Isso se já não existir.

generalização do fluido perfeito para a matéria com spin além, claro, da versão mais generalizada destes conhecida como MAG (Metric Affine Gravity). Porém antes de falarmos nestes modelos, permita-nos abordar primeiro como fica o electromagnetismo com torção.

4.7.1 Electromagnetismo com Torção

O uso do acoplamento mínimo, substituição de derivadas usuais por derivadas covariantes, no campo electromagnético quebra a simetria de gauge e resulta na não conservação da carga [68]. Devido a este problema, vários autores acreditam¹² que a torção não interage com o campo electromagnético [1, 71, 72]. Portanto, para garantir a invariância de gauge, admite-se que fótons não produzem e nem sentem torção. Este fato faz com que a estrutura causal continue sendo determinada pela estrutura métrica do espaço-tempo (depende só da métrica na forma conforme). Por sua vez, este fato permite a generalização dos teoremas de singularidades [1]. Matematicamente, isto significa que as equações de Maxwell em Riemann-Cartan são iguais às do acoplamento mínimo sendo que com a torção nula (entra apenas o símbolo de Christoffel). Todavia esta é a análise clássica, pois, aplicando a segunda quantização¹³, espera-se que o fóton interaja com a torção. Neste último caso, os fótons só não sentirão a torção em uma aproximação de primeira ordem na expansão perturbativa, pois, considerando ordens maiores esta interação aparecerá. Para maiores detalhes, veja a seção 3 de [50].

4.7.2 Teleparalelismo

Uma teoria é dita teleparalela quando a mudança de um certo objeto que é transportado paralelamente de um ponto a outro não depende da curva pela qual o objeto é transportado. Neste formalismo o campo de força gravitacional é descrito pela torção e, por isso, a torção exerce um papel fundamental no teleparalelismo. Este formalismo foi usado por Einstein na tentativa de unificar a gravitação com o electromagnetismo [73]. Uma visão mais moderna do teleparalelismo pode ser encontrada em [74]. Algumas equivalências do teleparalelismo com outras teorias foram analisadas na literatura. Por exemplo, em [75], verificou-se que o teleparalelismo é equivalente a um modelo com

¹²De fato, existe propostas que preservam a invariância de gauge, sendo que impondo restrições a torção [69] ou modificando a definição da transformação de gauge [70].

¹³Neste caso o capoelectromagnético não será mais clássico e sim quantizado.

lagrangiana espinorial quadrática. Outras equivalências são analisadas em [76, 77]. Em [78] é apresentada a versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein. A formulação hamiltoniana do teleparallelismo pode ser encontrada em [79]. Como nenhuma teoria está livre de problemas, mesmo que aparentes, o leito é incentivado a ver alguns pontos fracos do teleparallelismo em [80].

4.7.3 Einstein-Cartan

A teoria de Einstein-Cartan, também conhecida como ECSK (Einstein-Cartan-Sciama-Kibble), é um caso particular da geometria de Riemann-Cartan. Nesta teoria, o espaço-tempo é quadridimensional (muito embora possamos pensá-lo em dimensões maiores) e a fonte de torção é o spin da partícula. A teoria de Einstein-Cartan é de grande interesse da física por ser a extensão mais simples da relatividade geral que permite de forma natural a inclusão do spin. Assim como a energia da matéria curva o espaço, na teoria de Einstein-Cartan, a energia do spin torce o espaço. Esta é uma das razões do porquê pode-se dizer que o spin entra de forma natural nesta teoria. De qualquer forma, a associação do spin com a torção não é uma característica exclusiva da teoria de Einstein-Cartan, várias outras teorias também fazem esta associação e, de fato, há uma tendência a se acreditar que a torção realmente esteja associado com o spin¹⁴. Devido a importância desta teoria, falaremos de forma mais detalhada sobre ela no capítulo E. Por enquanto, falaremos apenas de suas principais características.

A ação da teoria de Einstein-Cartan é definida da seguinte forma

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} [R + \chi \mathcal{L}_D],$$

onde χ é a constante de acoplamento e a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ é uma função das variáveis $g_{\mu\nu}$, $\partial_\nu g_{\mu\nu}$, $K_{\lambda\mu\nu}$, $\partial_\lambda K_{\lambda\mu\nu}$, ψ , $\bar{\psi}$, $\partial_\mu \psi$ e $\partial_\mu \bar{\psi}$ ou, equivalentemente, $g_{\mu\nu}$, $\partial_\nu g_{\mu\nu}$, $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, $\partial_\lambda \Gamma_{\lambda\mu\nu}$, ψ , $\bar{\psi}$, $\partial_\mu \psi$ e $\partial_\mu \bar{\psi}$. Por sua vez, as variações independentes são $\delta g_{\mu\nu}$, $\delta K_{\lambda\mu\nu}$ (ou $\delta \Gamma_{\lambda\mu\nu}$), $\delta \psi$ e $\delta \bar{\psi}$. A variação de $\sqrt{-g} \mathcal{L}_D$ com respeito a métrica fornecerá o tensor métrico, não o tensor canônico,

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_D)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (4.32)$$

¹⁴Para maiores detalhes, veja [41].

A parte restante do tensor canônico virá da variação do termo $\sqrt{-g}R$ com relação a métrica mais a equação obtida a partir da variação da ação com relação a contorção, veremos isto no capítulo E. Neste último caso, teremos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}} = S^{\mu\sigma\beta}, \quad (4.33)$$

onde $S^{\mu\sigma\beta} = \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\sigma} \gamma^\mu \gamma^{\beta]} \psi$ é a densidade de spin. Finalmente, a variação com respeito a $\bar{\psi}$ fornecerá a equação de Dirac, para o caso Einstein-Cartan. Uma observação importante é que esta equação não será equivalente a àquela que se obteria usando o princípio do acoplamento mínimo aplicado diretamente na equação de Dirac. Discutiremos em detalhe esta questão no capítulo 7. Além disso, a equação de movimento da partícula, classicamente, não será uma geodésica, tão pouco uma auto-paralela (geodésica afim). Este último caso será abordado em detalhe no capítulo E.

A introdução da torção na física pode, em princípio, alterar várias propriedades fundamentais. Podemos, por exemplo, ter oscilação de neutrinos sem que isso signifique que eles tenham massa [50]. Assim sendo, é fundamental apresentar alguns efeitos bem conhecidos desta teoria. Como características e efeitos da teoria de Einstein-Cartan, podemos citar os seguintes [50, 1]:

1. A torção não se propaga, ela existe apenas dentro da matéria com spin. Portanto, fora da matéria com spin, os efeitos da torção (spin) só podem ser detectados via a influência que o spin tem sobre a métrica.
2. Observadores distantes que meçam apenas os efeitos da métrica não são capazes de distinguir entre um corpo que gira em uma geometria sem torção de um corpo com spin em Einstein-Cartan se em ambos os casos o momento angular total for o mesmo.
3. A pequenas distâncias, os efeitos do spin são significativos.
4. Conexão entre torção e magnetismo.
5. Rotação do plano de polarização e dispersão de ondas eletromagnéticas devido a interação fóton-torção (segunda quantização).
6. Oscilação de neutrinos sem massa.
7. Mudança na fase de feixes de nêutrons em experimentos de interferometria.

8. Na presença da torção, o spin se comporta como um dipolo na presença de um campo magnético.

A primeira propriedade acima, embora sugira uma certa limitação devido a não propagação da torção, não descarta o papel da torção, pois o efeito do spin sobre a métrica é de ordem mais alta do que o da massa [1]. As diferenças entre a relatividade geral e a teoria de Einstein-Cartan tornam-se significativos próximo da singularidade final do colapso gravitacional, próximo do *big bang*, em modelos cosmológicos e no estudo de processos quânticos gravitacionais [1].

4.7.4 Modelos Quadráticos com spin

Como já dissemos, na construção da relatividade geral temos argumentos satisfatórios para considerarmos apenas¹⁵ o escalar de curvatura na construção da parte geométrica da ação, veja o teorema de Lovelock [19, 20]. Entretanto, para geometrias com torção nada nos impede de incluir termos quadráticos na torção¹⁶ e, ainda assim, obter equação de campo de segunda ordem nas derivadas da métrica, veja por exemplo [82, 83]. Assim, nada nos impede de incluir termos quadráticos dos escalares construídos a partir do tensor de Riemann. Aos modelos que partem desta ação generalizada, da-se o nome de *Modelos quadráticos*. A lagrangiana destes modelos é dada por [42]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & -\frac{1}{2\chi}[R - 2\Lambda + b_1 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + b_2 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\mu\nu\alpha\beta} + b_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} \\ & + b_4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + b_5 R_{\alpha\beta} R^{\beta\alpha} + b_6 R^2 + b_7 R_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + b_8 R_{\alpha\beta} D^{\beta\alpha} + b_9 R D \\ & + a_1 T_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^{\mu\nu} + a_2 T_{\alpha\mu\nu} T^{\alpha\mu\nu} + a_3 T_\mu T^\mu + a_4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\nu\mu}^\alpha T_{\alpha\sigma\rho} + a_5 T^\mu \bar{T}_\mu], \end{aligned}$$

onde $D_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}{}_\mu R_{\alpha\beta\gamma\nu}$, $T_\lambda = T_{\lambda\alpha}^\alpha$ e $\bar{T}_\mu = \bar{T}_{\mu\lambda}^\lambda$ ($\bar{T}_{\mu\lambda}^\alpha$ é torção sem traço); $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor unitário totalmente anti-simétrico. A lagrangiana acima é simplificada quando se admite que a lagrangiana deva ter simetria de paridade. Neste caso, devemos ter $b_7 = b_8 = b_9 = a_4 = a_5 = 0$ [42].

Uma observação importante sobre os modelos quadráticos é que, contrariamente a teoria de Einstein-Cartan, a torção pode se propagar.

¹⁵Na verdade isto não é bem assim, pois, acredita-se que termos quadráticos estejam presentes em teoria de gauge da gravitação [41]. Além disto, teorias da gravitação com termos quadráticos são renormalizáveis [81].

¹⁶A versão do teorema de Lovelock generalizada para Riemann-Cartan pode ser encontrada em [21].

4.7.5 Modelos cosmológicos

Os principais modelos cosmológicos são basicamente os modelos citados anteriormente, Einstein-Cartan e Modelos Quadráticos, sendo que com uma hipótese adicional que permite a generalização do conceito de fluido perfeito para partículas com spin. A hipótese adicional consiste em postular o fluido [1]

$$\theta_\mu{}^\nu = P_\mu u^\nu + \mathcal{P}(u_\mu u^\nu + \delta_\mu^\nu)$$

$$S_{\mu\nu}^\alpha = S_{\mu\nu} u^\alpha,$$

onde $S_{\mu\nu}$ também é denominada densidade espinorial ($S_{\mu\nu} = S_{[\mu\nu]}$), u^μ é a 4-velocidade, P^μ o 4-momento, e $\mathcal{P}$ é a pressão hidrostática.

Os modelos cosmológicos com torção despertaram muito interesse dos físicos devido ao fato de muitos destes modelos evitarem as singularidades [54, 63]. Todavia há alguns questionamentos sobre quão fisicamente aceitáveis são as condições necessárias para o desaparecimento destas singularidades. Além disto, em [53] foi demonstrado um aumento no número de singularidades para alguns casos. O leitor interessado em um aprofundamento maior é direcionado a [1, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 36]. A última citação da lista anterior contém um resumo histórico bem didático sobre cosmologia não-riemanniana.

4.7.6 MAG (Metric Affine Gravity)

A MAG é uma teoria de gauge da gravitação formulada em uma geometria com métrica lorentziana e uma conexão afim sem restrições (contém tanto torção quanto não-metricidade) que se utiliza do princípio variacional tradicional¹⁷. Por esta generalidade, ela tem os modelos citados anteriormente como casos particulares. Enquanto o *teleparallelismo* é baseado no grupo das translações e *Einstein-Cartan* no grupo de Poincaré, a MAG é baseada no grupo geral afim local¹⁸. Nesta teoria os potenciais gravitacionais de gauge são a métrica, o dual dos vetores do plano tangente e a conexão, ou seja, η_{AB} , e^A , $\omega^A{}_B$.

¹⁷Alguns autores questionam veementemente a validade do princípio variacional tradicional para geometrias com não-metricidade e contorção [84, 38, 85].

¹⁸Este grupo é formado pelo produto semidireto das translações sobre o $GL(4, \mathbb{R})$ (grupo geral linear). O leitor pode encontrar a definição de produto semidireto em [15].

Já os campos de força são a não-metricidade, a torção e a curvatura, respectivamente (veja a tabela¹⁹ 4.1). Na MAG, as fontes dos potenciais são determinadas pelas derivadas variacionais da lagrangiana da matéria $\mathcal{L}_M(g_{AB}, dg_{AB}, e^A, de^A, \omega^A_B, d\omega^A_B, \psi, d\psi)$ com respeito a estes campos de gauge [86], onde ψ representa o campo de matéria (não necessariamente o campo de Dirac). Neste caso, define-se

$$\sigma^{AB} \equiv 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{AB}}, \quad \Sigma_A \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e^A}, \quad \Delta^B_A \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega^A_B}, \quad (4.34)$$

onde σ^{AB} , Σ^A e Δ^A_B são denominados tensor de *energia-momento*, *energia-momento canônico* e hipermomento canônico, respectivamente.

Corrente	Potencial	campo de força	identidade de Bianchi
σ^{AB}	g_{AB}	$N_{AB} = D\eta_{AB}$	$DN_{AB} = -2R_{(AB)}$
Σ_A	e^A	$T^A = De^A$	$DT^A = R^A_B \wedge e^B$
Δ^A_B	ω^A_B	$R^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B$	$DR^A_B = 0$

Tabela 4.1: A MAG é caracterizada por três potenciais, g_{AB} , e^A , ω^A_B , e os respectivos campos de força N_{AB} , T^A , R^A_B . Cada um destes potenciais tem como fontes as correntes σ^{AB} , Σ_A e Δ^A_B , respectivamente. Aqui, D é a derivada exterior covariante definida em [7], página 27.

É óbvio que obter resultados com um modelo tão geral é muito difícil e, por esta razão, exibimos várias versões simplificadas deste. Entretanto, há vários trabalhos nesta linha de generalidade [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101]. Os diagramas 4.3 e 4.4 mostram a conexão entre as geometrias e a conexão entre alguns dos modelos aqui citados, respectivamente.

4.7.7 Outros efeitos de modelos com torção

Além dos efeitos da teoria de Einstein-Cartan que foram mencionados na subseção 4.7.3, a literatura está repleta da análise de outros efeitos tais como: anomalias do modelo padrão em espaços curvos com torção [103], a anomalia da quiralidade na presença da torção [104] dentre outros efeitos quânticos [105, 106]. Um outro efeito que está presente nos modelos com torção consiste no fato de partículas, ainda que tratadas como pontos (sem estrutura), não necessariamente seguirem geodésicas [8, 107, 2, 41]. Este último fato será demonstrado no capítulo E do apêndice, onde veremos que a torção acopla com o spin.

¹⁹Esta tabela foi baseada na tabela da página 15 de [7], com as respectivas adaptações na notação.

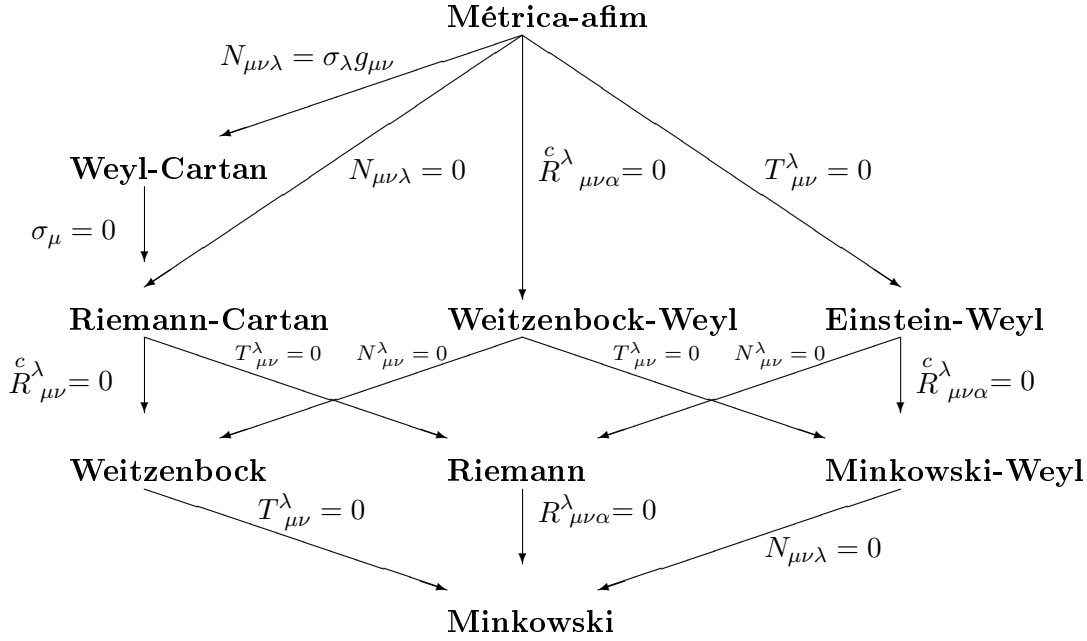


Figura 4.3: Este diagrama exhibe a relação que há entre certas geometrias não-riemannianas. No uso da nomenclatura geometria de "Weitzenbock-Weyl" (Weitzenbock $\simeq$ teleparalelismo) e "Minkowski-Weyl", estamos adotando a convenção de [102]; os outros nomes são padrões da física.

Por outro lado, a torção não acopla com o momento angular²⁰ [8]. Este resultado não será demonstrado, porém o leitor pode ver sua demonstração na citação anterior. Com relação ao não acoplamento do spin com a rotação de corpos, vale salientar que alguns autores [102] alegam que teorias alternativas poderiam e, mais do que isso, deveriam fornecer tal acoplamento. Com relação a esse ponto de vista, veja o comentário feito no tópico 5 da página 27 de [23].

Para finalizar esta sub-seção, vale apenas fazer a seguinte observação. Devido ao fato da torção não se propagar na teoria de Einstein-Cartan, criou-se a falsa impressão de que essa era uma característica da geometria de Riemann-Cartan, ou seja, uma propriedade da torção. Todavia, isto está longe de ser verdade, pois, na maioria dos modelos com torção, a torção se propaga²¹.

²⁰Neste caso, a partícula tem estrutura e rotacional. Em [8], o autor também discute o problema da indeterminação das equações de movimento para uma partícula com estrutura.

²¹Para mais detalhes, veja [41].

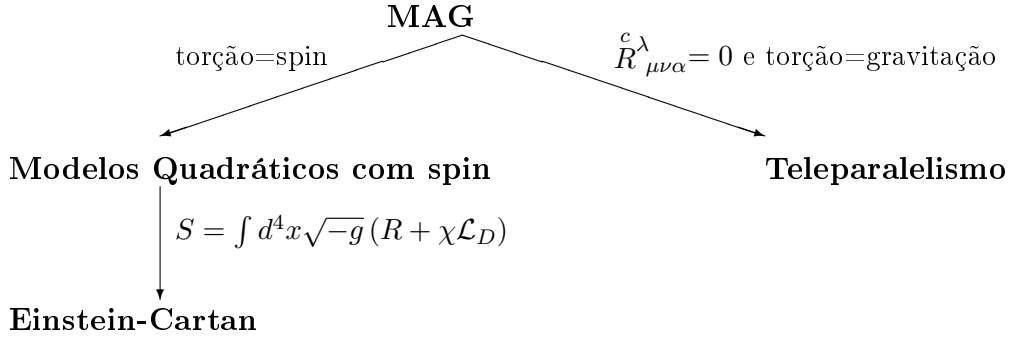


Figura 4.4: Este diagrama exibe a relação entre alguns dos modelos aqui comentados. $\mathcal{L}_D$ é a lagrangiana de Dirac.

4.7.8 Geometria de Lyra

Deixamos para apresentar esta geometria por último por se tratar de um caso bem peculiar de uma geometria com torção. Isto porque ela não é só uma teoria com torção, ela tem como princípio uma invariância conforme da métrica. Abaixo segue a definição desta geometria.

A variedade de Lyra é caracterizada por uma 1-forma β que induz uma torção dada por

$$T(V, U) = \frac{1}{2} \left(\langle \beta, U \rangle V - \langle \beta, V \rangle U \right). \quad (4.35)$$

Nessa geometria, a condição de metricidade $\nabla g = 0$ é preservada. A peculiaridade desta geometria consiste no fato de um sistema de referência local sobre uma variedade M ser definido por um tripleto (U_i, ψ_i, f_i) , onde U_i é uma vizinhança coordenada de M , ψ_i é a aplicação coordenada associada ($\{(U_i, \psi_i)\}$ forma um atlas sobre M), e $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ uma aplicação não nula e de classe C^∞ no aberto U_i . Neste caso, $\alpha_i = f_i \circ \psi_i^{-1}$ é a função de gauge, pois ela será responsável pela invariância conforme. Como consequência dessas definições, a conexão afim da geometria de Lyra em termos da base $\tilde{e}^\mu = \alpha dx^\mu$ e de sua dual $\tilde{e}_\mu = \alpha^{-1} \partial_\mu$ tem a forma²² [108]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{L\lambda} = \frac{1}{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^c + \frac{1}{2} (\delta_\mu^\lambda \beta_\nu - \delta_\nu^\lambda \beta_\mu), \quad (4.36)$$

onde

$$\beta_\mu \equiv \langle \beta, \tilde{e}_\mu \rangle = -2(\alpha^{-1})_{,\mu} = \tilde{\beta}_\mu - 2(\alpha^{-1})_{,\mu}. \quad (4.37)$$

Da definição de torção, teremos

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^\lambda = \langle \tilde{e}^\lambda, \mathcal{T}(\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu) \rangle = \langle \tilde{e}^\lambda, \nabla_{\tilde{e}_\mu} \tilde{e}_\nu \rangle - \langle \tilde{e}^\lambda, \nabla_{\tilde{e}_\nu} \tilde{e}_\mu \rangle - \langle \tilde{e}^\lambda, [\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu] \rangle$$

²²Esteja atento a diferença na definição da ordem dos índices inferiores da conexão em [108].

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda} (\alpha^{-1})_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda} (\alpha^{-1})_{,\mu} \\
&= \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\lambda} \beta_{\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda} \beta_{\mu}) + \delta_{\mu}^{\lambda} (\alpha^{-1})_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda} (\alpha^{-1})_{,\mu}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

De (4.14), vemos que a contorção fica

$$\tilde{K}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{\mu\lambda} \beta_{\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} \beta_{\lambda}) + \tilde{g}_{\lambda\mu} (\alpha^{-1})_{,\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} (\alpha^{-1})_{,\lambda}. \quad (4.39)$$

É importante destacar que, nesta geometria, a transformação das componentes dos vetores não se dar da maneira “natural”. Dado um vetor $\tilde{V} = \tilde{V}^{\mu} \tilde{e}_{\mu}$, teremos

$$\tilde{V}^{\nu} = \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \tilde{V}^{\mu}.$$

Por outro lado, segue

$$\tilde{V}'_{\nu} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \tilde{V}^{\mu}.$$

De (4.37), vemos que o campo de Lyra β_{μ} se transforma como

$$\beta'_{\mu} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \left\{ \beta_{\nu} + \alpha^{-1} \left[\ln \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \right]_{,\nu} \right\}. \quad (4.40)$$

O leitor interessado em maiores detalhes sobre a geometria de Lyra pode consultar [108].

4.8 Soluções

Embora os modelos com torção sejam complicados por terem mais graus de liberdade do que a relatividade geral, a literatura voltada para soluções destes modelos é muito rica [109, 97, 99, 98, 100, 101, 110, 111, 112, 42, 113, 114]. Na seção 2.4 de [42], o autor exhibe, na forma de um review, várias correspondências entre teorias com torção e a relatividade geral. Em [114] o autor obtém a solução para o caso de uma fonte estática na forma de uma bola e com densidade de spin constante²³. Em [97] os autores fazem um review das soluções da MAG (Metric Affine Gravity). Já em [99], os autores encontram uma solução estacionária exata com simetria axial no vácuo da MAG, enquanto que em [98], eles obtêm uma solução estática exata com simetria esférica no vácuo, também para MAG. Alguns métodos para encontrar soluções exatas para modelos com torção podem ser encontrados em [100, 101, 110]. Uma solução que inclui correções devido à torção para o caso de Schwarzschild pode ser encontrada em [111]. Uma classe de espaços-tempos tipo Gödel em Riemann-Cartan são examinados do ponto de vista do problema

²³O leitor também pode encontrar comentários sobre esta solução na seção 3.1 de [42].

de equivalência²⁴ em [115, 116]. Em [117], os autores defendem a idéia de que todas as soluções de Einstein-Maxwell ou Einstein-Proca podem ser usadas para construir uma vasta classe de soluções de teorias não riemannianas que incluam tanto torção quanto o campo de Weyl. Uma análise de ondas planas de torção para modelos quadráticos acompanhada de soluções pode ser encontrada em [118]. A aproximação pós-newtoniana para a teoria de gauge da gravitação sobre o grupo de Poincaré com lagrangiana quadrática pode ser encontrada em [119]. Esta última solução é de fundamental importância para impor limitações experimentais sobre as teorias de torção. Outra referência na mesma linha é [120]. Nela, os autores mostram que os dados experimentais não são capazes de descartar a torção.

4.9 Perspectivas experimentais

Ao contrário da relatividade geral, as teorias com torção não gozam de nenhuma verificação empírica até o momento. Ainda não há qualquer razão experimental específica para se acreditar na necessidade de uma gravitação com torção. De fato, as razões por trás do estudo da torção são essencialmente de caráter teórico, como vista na seção 4.6. Todavia, os experimentos são incapazes de excluir a possibilidade de uma teoria com torção devido, basicamente, à duas razões. A primeira razão é a enorme quantidade de modelos teóricos que incluem torção, já que o excesso de modelos torna os resultados experimentais menos conclusivos. A segunda razão consiste no fato do efeito da torção ser muito pequeno e de difícil detecção. Para lidar com tantos modelos e verificar os limites empíricos, alguns autores separam os experimentos por categorias. Por exemplo, em [41], o autor separa os efeitos em três tipos²⁵: efeitos quânticos, efeitos mensuráveis em laboratório e efeitos em larga escala (sistema solar, por exemplo). Outros autores já seguem uma separação mais específica, como por exemplo [121]. Neste último caso, o autor separa os experimentos nos seguintes três tipos: os que usam pêndulo de torção para medir as interações de corpos macroscópicos com spin polarizado²⁶, os que aplicam

²⁴Este problema consiste em verificar se duas métricas se diferenciam uma da outra apenas por uma transformação de coordenada.

²⁵É óbvio que estes efeitos se misturam, porém a separação ajuda a entender melhor como tornar um dado modelo testável.

²⁶Veja, por exemplo, a página 637 de [41].

magnetometria de precisão²⁷ de materiais ferromagnéticos, e os que examinam a interação de spin nucleares dentro do campo da terra. De qualquer forma, alguns modelos são tão gerais que abrangem vários outros modelos como caso particular e acabam tornando-se viáveis para uma análise experimental. A exemplo deste, temos a teoria de gauge do grupo de Poincaré com lagrangiana quadrática (Este modelo generaliza, por exemplo, Einstein-Cartan). Em [120], os autores mostram que para este modelo os dados experimentais²⁸ não são capazes de eliminar a torção. Na seção VII deste artigo, é feita uma análise bem direta de como devem ser os experimentos para detectar a torção. Seguindo uma linha bem diferente (não-ortodoxa), em [102] os autores sugerem que teorias não-padrões poderiam ser testadas com os dados do sistema solar já obtidos. Essas teorias se distinguiriam das padrões pela propriedade da torção acoplar com a rotação dos planetas, o que levaria a efeitos mensuráveis. Entretanto, vale apenas ver as críticas a essa idéia feita no tópico 5 da página 27 de [23].

Para maiores detalhes sobre as possibilidades experimentais da torção, além das citações dadas no parágrafo anterior, o leitor é direcionado a [122, 50, 123, 42, 124, 125].

²⁷Magnetometria de precisão é a medida da frequência da precessão do spin de um material ferromagnético quando submetido a um campo magnético constante.

²⁸O leitor deve estar atento ao fato de que os dados em questão estavam atualizados até 1994.

Capítulo 5

Espaço de Einstein-Weyl

Na tentativa de unificar gravitação e electromagnetismo, o matemático Hermann Weyl promoveu uma verdadeira revolução na física. Primeiro por ter introduzido o *princípio de gauge*, que se tornou a base de muitas teorias modernas, e segundo por ter construído uma geometria mais geral que a riemanniana. Embora haja muitas ressalvas acerca da utilidade desta generalização, foi graças a ela que Weyl introduziu o princípio de gauge.

Em princípio, o interesse de Weyl era puramente matemático [12]. Ele achava que a possibilidade de compararmos o comprimento de dois vetores obtidos em pontos diferentes da variedade representava uma herança limitadora da geometria euclideana e, por esta razão, era necessário construir uma geometria que não tivesse esta hipótese a priori. Entretanto, seria necessário dizer como transportar o comprimento de um vetor de um ponto a outro. Weyl procurou um princípio de transferência do comprimento de um vetor em um certo ponto para um outro ponto infinitesimalmente próximo para, então, generalizá-lo para um ponto arbitrário. Como resultado, Weyl introduziu a idéia da invariância conforme da métrica, ou seja, a invariância da unidade de comprimento. Para garantir esta invariância, Weyl teve que introduzir um novo campo, um campo compensador. Posteriormente, ele percebeu que poderia associar este novo campo ao campo electromagnético e, conseqüentemente, geometrizar o electromagnetismo. Nesta nova concepção, o princípio da relatividade é generalizado, pois, a física independe não só da escolha dos referenciais, mas como também dos comprimentos locais. Em resumo, Weyl fez as seguintes suposições:

- i) Só podemos comparar comprimentos no mesmo ponto da variedade.
- ii) Existe uma conexão afim (linear) sem torção que define uma derivada covariante ∇ e

que preserva a invariância conforme.

Estas hipóteses significam que a derivada covariante da métrica deve ser proporcional a métrica, ou seja, dada uma métrica g que pertença ao conjunto das métricas conformalmente equivalentes, teremos

$$\nabla g = \sigma \otimes g, \quad (5.1)$$

onde a 1-forma σ é o campo compensador. Para que σ seja de fato um campo compensador, é necessário impor que (5.1) não mude frente a transformação $g \rightarrow \bar{g} = e^\lambda g$. Desta imposição, teremos

$$\begin{aligned} \nabla \bar{g} &= \nabla e^\lambda g = (de^\lambda) \otimes g + e^\lambda \nabla g = e^\lambda d\lambda \otimes g + e^\lambda \sigma \otimes g \\ &= d\lambda \otimes \bar{g} + \sigma \otimes \bar{g} = (d\lambda + \sigma) \otimes \bar{g} \Rightarrow \\ \nabla \bar{g} &= \bar{\sigma} \otimes \bar{g} = (d\lambda + \sigma) \otimes \bar{g} \Rightarrow \\ \bar{\sigma} &= d\lambda + \sigma, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde usamos (5.1) na primeira e na terceira linha. A expressão (5.2) ficou conhecida como transformação de gauge, uma vez que ela é necessária para a preservação do gauge *invariância conforme*. A partir daí vários outros gauge surgiram, como os citados na seção 4.7.6.

Nas próximas seções trataremos não só de detalhar melhor a geometria de Weyl, mas como também apresentar a versão mais geral de uma geometria que quebre a integrabilidade dos comprimentos, uma geometria com um *tensor de não-metricidade* qualquer. Um espaço-tempo dotado de um tensor de não-metricidade diferente de zero e sem torção é conhecido por espaço de *Einstein-Weyl* [102].

5.1 Conexão com não-metricidade

A não-metricidade generaliza a variedade riemanniana para uma outra onde a condição “b” da definição 2.5.1 não é mais válida. Neste caso, representamos a derivada covariante da métrica pelo tensor de não-metricidade $N_{\lambda\mu\nu}$, ou seja,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = N_{\mu\nu\lambda}, \quad (5.3)$$

onde “,” é a componente da derivada covariante com relação a conexão “total”, Weyl mais Christoffel. Em uma representação independente de coordenadas, a expressão anterior fica

$$V[g(U, W)] = g(\overset{N}{\nabla}_V U, W) + g(U, \overset{N}{\nabla}_V W) + \mathcal{N}(U, W, V). \quad (5.4)$$

Adotando o mesmo procedimento que usamos na seção 2.5 para obter a conexão riemanniana, segue

$$\begin{aligned} V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] &= g(\overset{N}{\nabla}_V U, W) + g(U, \overset{N}{\nabla}_V W) \\ &+ \mathcal{N}(U, W, V) + g(\overset{N}{\nabla}_W V, U) + g(V, \overset{N}{\nabla}_W U) + \mathcal{N}(V, U, W) - g(\overset{N}{\nabla}_U W, V) \\ &- g(W, \overset{N}{\nabla}_U V) - \mathcal{N}(W, V, U) = g(\overset{N}{\nabla}_V U - \overset{N}{\nabla}_U V, W) \\ &+ g(U, \overset{N}{\nabla}_V W + \overset{N}{\nabla}_W V) + g(V, \overset{N}{\nabla}_W U - \overset{N}{\nabla}_U W) \\ &+ \mathcal{N}(U, W, V) + \mathcal{N}(V, U, W) - \mathcal{N}(W, V, U). \end{aligned}$$

Usando a propriedade¹ “a” da definição 2.5.1 e a identidade $\overset{N}{\nabla}_V W + \overset{N}{\nabla}_W V = [V, W] + 2\overset{N}{\nabla}_W V$ na expressão anterior, chegaremos a

$$\begin{aligned} g(U, \overset{N}{\nabla}_W V) &= \frac{1}{2} \{V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)]\} \\ &\frac{1}{2} \{-\mathcal{N}(U, W, V) - \mathcal{N}(V, U, W) + \mathcal{N}(W, V, U)\}. \end{aligned}$$

Em uma base coordenada $\{\partial_\mu\}$, a expressão acima fica

$$\overset{N\lambda}{\Gamma}_{\mu\nu} = \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda, \quad (5.5)$$

onde

$$\overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} (-N_{\sigma\mu\nu} - N_{\nu\sigma\mu} + N_{\mu\nu\sigma}). \quad (5.6)$$

Chamamos $\overset{N\lambda}{\Gamma}_{\mu\nu}$ de conexão de não-metricidade, enquanto que $\overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ é a parte que depende apenas do tensor de não-metricidade. De (5.3) e (5.6), vemos que a conexão com não-metricidade é simétrica nos dois índices covariantes, ou seja, $\overset{N\lambda}{\Gamma}_{\mu\nu} = \overset{N\lambda}{\Gamma}_{\nu\mu}$ (observe que $\overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \overset{n}{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda$).

¹Ao contrário da propriedade “b”, ela é válida também para a conexão com não-metricidade, porém sem torção.

5.2 Geodésicas e autoparalelas

Pelo que foi dito no capítulo 4, as equações da geodésica afim não necessariamente coincide com as da geodésicas métricas em uma geometria não-riemanniana. Assim como a generalização de Riemann para Riemann-Cartan mexe com a estrutura afim, a generalização de Riemann para um geometria com não-metricidade também mexe com a estrutura afim. Disto, é natural que a geodésica afim com não-metricidade seja diferente da geodésica métrica. De fato, ela é diferente. Usando o conceito de transporte paralelo (derivada covariante nula), teremos

$$\ddot{x}^\lambda + \overset{N}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (5.7)$$

enquanto que extremizando a distância entre pontos $\int_a^b ds$, teremos

$$\ddot{x}^\lambda + \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (5.8)$$

A diferença entre essas duas equações nos leva a seguinte pergunta. Qual das duas curvas a partícula segue? Responder esta pergunta requer um pouco de história. Quando Einstein formulou a teoria da relatividade, ele postulou que partículas deveriam seguir geodésicas. É muito provável que ele tinha em mente a idéia de que partículas livres deveriam seguir o caminho mais reto e mais curto entre dois pontos. O problema que surge com uma geometria de Riemann-Cartan ou com não-metricidade é que estes dois conceitos, curva mais reta e curva mais curta entre dois pontos, não são equivalentes. Como (5.8) vem da extremização da distância entre dois pontos, ela deve representar a menor/maior distância entre dois pontos. Já (5.7) vem do transporte paralelo, que fornece a menor variação da orientação do vetor sobre o caminho do transporte (o ângulo entre o vetor transportado e o tangente ao caminho permanece constante), veja a seção 5 de [14]. Por isso, faz sentido falar que (5.7) é a curva mais reta. De qualquer forma, as equações de movimento não devem ser postuladas. Elas devem ser compatíveis com as equações de campo. Por exemplo, na relatividade geral o movimento da partícula teste já está presente nas equações de campo, pois, como a matéria curva o espaço e a partícula teste é matéria, não só o tensor de momento e energia do corpo mais massivo deve entrar nas equações, mas como também o da partícula (veja o capítulo 3). Lembre-se que o tensor momento energia necessariamente contém a informação sobre o movimento da partícula,

ele é construído a partir dos momentos da partícula. Por sua vez, este tensor de energia e momento terá associado a ele uma lei de conservação que fornecerá o movimento da partícula. Portanto, postular uma equação de movimento é correr o risco de construir uma estrutura incoerente².

5.3 Geometria de Weyl

A geometria de Weyl é uma caso particular de uma geometria cujo tensor de não-metricidade assume a seguinte forma

$$\mathcal{N}(V, U, W) = \sigma(W)g(V, U). \quad (5.9)$$

O efeito de uma não-metricidade dada desta forma é o de aumentar ou diminuir o comprimento de um vetor quando transportado paralelamente ao longo de uma curva; a estrutura do cone de luz é preservada. Todavia, uma não-metricidade geral deforma o cone de luz [127]. As figuras 5.1 e 5.2 exemplificam³ o que o tensor de não-metricidade faz com vetores transportados paralelamente.

As razões pelas quais Weyl introduziu (5.9) foram dadas no começo desse capítulo, porém ainda não falamos dos prós e contras dessa abordagem. Deixaremos para discutir as motivações e os problemas de (5.9) na seção 5.6.

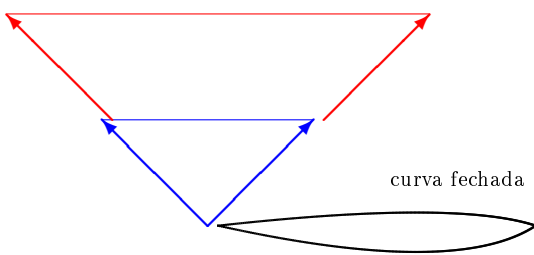


Figura 5.1: Dois vetores que definem um triângulo são transportados paralelamente ao longo de uma curva fechada na geometria de Weyl. Esta figura exemplifica o efeito do campo de Weyl, dilatação (ou contração). (veja comentário na nota de rodapé 3)

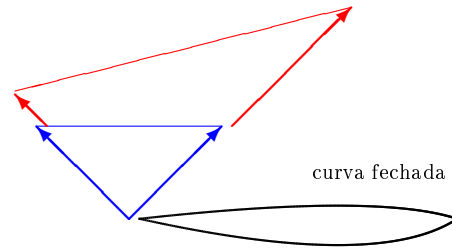


Figura 5.2: Dois vetores que definem um triângulo são transportados paralelamente ao longo de uma curva fechada em uma geometria com não-metricidade qualquer. Esta figura exemplifica o efeito da não-metricidade, dilatação e cisalhamento (*shear*). (veja comentário na nota de rodapé 3)

²Um exemplo clássico de uma teoria que tem essa inconsistência é a teoria de Fierz e Pauli de 1939 (veja, por exemplo, Ref. [126], p. 1066).

³Como a não-metricidade também tem um efeito na curvatura, em princípio, os vetores transportados paralelamente nas figuras 5.1 e 5.2 também deveriam estar rotacionados. Porém, estamos desprezando este efeito da curvatura.

5.3.1 Conexão de Weyl

Usando (5.9) em (5.6), obtemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} (-\sigma_{\nu}g_{\sigma\mu} - \sigma_{\mu}g_{\nu\sigma} + \sigma_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (5.10)$$

Esta é a parte da conexão devido ao campo de Weyl. Todavia, denominamos de conexão de Weyl na base coordenada a soma de (5.10) com o símbolo de Christoffel, pois é esta, e não (5.10), que representa as propriedades (5.3) e (5.9), ou seja, a conexão de Weyl na base coordenada toma a forma

$$\overset{W}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \overset{w}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}. \quad (5.11)$$

Note a distinção que estamos fazendo entre a conexão de Weyl (termo com “W” maiúsculo) e o termo que depende apenas do campo de Weyl (indicado pelo “w” minúsculo).

Com a conexão acima em mãos e usando (5.7), vemos que a geodésica afim (autoparalela) na geometria de Weyl é

$$\ddot{x}^{\lambda} + \overset{W}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0. \quad (5.12)$$

5.4 Invariantes

O mesmo problema do excesso de invariantes na geometria de Riemann-Cartan está presente em uma geometria com não-metricidade. Não diferentemente do que foi feito em Riemann-Cartan, quando consideramos que o tensor de não-metricidade $N_{\mu\nu\lambda}$ não é nulo, obtemos dois tensores de Riemann, a saber, $\overset{c}{R}_{\mu\nu\alpha}^{\lambda}$ (definido em termos do símbolo de Christoffel) e $\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha}^{\lambda}$ (definido em termos da conexão total, veja (5.5)). Seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 4.4, chegaremos a

$$\begin{aligned} \overset{N}{R}_{\rho\alpha\sigma}^{\mu} = & \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho,\alpha}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\rho,\alpha}^{\mu} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho,\sigma}^{\mu} - \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\rho,\sigma}^{\mu} + \left(\overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} \right) \left(\overset{c}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} \right) \\ & - \left(\overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} + \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} \right) \left(\overset{c}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu} \right). \end{aligned}$$

Escrevendo em termos de $\overset{c}{R}_{\mu\nu\alpha}^{\lambda}$, teremos

$$\begin{aligned}
R_{\rho\alpha\sigma}^N = & \overset{c}{R}_{\rho\alpha\sigma}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\rho,\alpha}^{\mu} - \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\rho,\sigma}^{\mu} + \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} \\
& - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu} - \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu} - \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu} = \overset{c}{R}_{\rho\alpha\sigma}^{\mu} + \overset{n}{R}_{\rho\alpha\sigma}^{\mu} + \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\phi} \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\phi}^{\mu} \\
& - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} \overset{n}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu} - \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\rho}^{\phi} \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\phi}^{\mu}, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

onde $\overset{n}{R}_{\rho\alpha\sigma}^{\mu}$ é o tensor de Riemann escrito somente em termos de $\overset{n}{\Gamma}$. Para o caso particular de Weyl integrável, podemos usar (5.13) para escrever (veja Ref. [128], p. 74)

$$\overset{N}{R}_{\mu\nu} = \overset{c}{R}_{\mu\nu} + \frac{n-2}{2} \sigma_{\mu;\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \overset{c}{\square} \sigma + \frac{n-2}{4} (\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} - g_{\mu\nu} \sigma^{\lambda} \sigma_{\lambda}), \quad (5.14)$$

$$R = \overset{c}{R} + (n-1) \overset{c}{\square} \sigma - \frac{(n-1)(n-2)}{4} \sigma^{\lambda} \sigma_{\lambda}, \quad (5.15)$$

onde $\overset{c}{\square}$ é o d'Alambertiano em termos dos símbolos de Christoffel e $\sigma_{\mu} = \sigma_{,\mu}$. Por definição, o símbolo “:” indica a componente da derivada covariante riemanniana, que usa apenas o símbolo de Christoffel.

5.4.1 Propriedades do tensor de Riemann com não-metricidade

O tensor de Riemann $\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ não satisfaz as mesmas propriedades de $\overset{c}{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$. Para ser mais preciso, o tensor $\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ satisfaz

$$\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = - \overset{N}{R}_{\mu\nu\beta\alpha} \quad (5.16)$$

$$\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + \overset{N}{R}_{\mu\beta\nu\alpha} + \overset{N}{R}_{\mu\alpha\beta\nu} = 0. \quad (5.17)$$

Neste caso, temos que⁴ $\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \neq - \overset{N}{R}_{\nu\mu\alpha\beta}$. Por sua vez, a partir dessa desigualdade e de (5.16) é possível demonstrar que $\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \neq \overset{N}{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$. Para demonstrarmos (5.16), basta analisarmos o tensor de Riemann

$$\overset{N}{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = \overset{N}{\Gamma}_{\mu\beta\nu,\alpha} - \overset{N}{\Gamma}_{\mu\alpha\nu,\beta} + \overset{N}{\Gamma}_{\beta\nu}^{\phi} \overset{N}{\Gamma}_{\mu\alpha\phi} - \overset{N}{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\phi} \overset{N}{\Gamma}_{\mu\beta\phi}. \quad (5.18)$$

e verificar de maneira trivial a validade da propriedade (5.16). Todavia, provar a outra propriedade já não é tão trivial assim. A demonstração de (5.17) encontra-se no apêndice D.2. Como a única simetria do tensor de Riemann em Einstein-Weyl é (5.16), concluímos que o número de componentes independentes desse tensor é $n^2(n^2 - n)/2$, onde n é a dimensão do espaço-tempo.

⁴Veja a página 90 de [43].

5.5 A versão mais simples da ação na geometria de Weyl

Como acontece na relatividade geral, consideremos a seguinte ação para a parte geométrica

$$S_g = \int dx^n \sqrt{-g} R. \quad (5.19)$$

No caso de Weyl integrável, podemos usar (5.15) para escrever S_g na seguinte forma

$$S_g = \int dx^n \sqrt{-g} \left(\overset{c}{R} + (n-1) \overset{c}{\square} \sigma - \frac{(n-1)(n-2)}{4} \sigma^\lambda \sigma_\lambda \right). \quad (5.20)$$

No princípio variacional, sempre admitimos que as variações dos campos em uma hipersuperfície que envolve a região de integração é nula. Este fato faz com que termos de derivadas totais na lagrangiana sejam irrelevantes, portanto, o termo com o d'Alambertiano na expressão acima pode ser excluído⁵. Fazendo isto, teremos

$$S_g = \int dx^n \sqrt{-g} \left(\overset{c}{R} - \frac{(n-1)(n-2)}{4} \sigma^\lambda \sigma_\lambda \right). \quad (5.21)$$

Variando esta ação com relação a métrica e o campo de Weyl, tratados como independentes, teremos

$$\overset{c}{G}_{\alpha\beta} - \frac{(n-1)(n-2)}{4} \left(\sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sigma^\lambda \sigma_\lambda \right) = 0, \quad (5.22)$$

$$\overset{c}{\square} \sigma = 0. \quad (5.23)$$

A equação (5.22) é formalmente idêntica a da relatividade geral com um campo escalar sem massa. Soluções exatas para esse caso são bem conhecidas na literatura [129, 130]. Além disso, é interessante destacar que este campo sem massa não interfere nos experimentos do sistema solar [131], o que sugere que o campo de Weyl também não interfira; pelo menos na abordagem padrão⁶. Das equações (5.22) e (5.23) é fácil ver que partículas seguem geodésica riemannianas, $\ddot{x}^\lambda + \overset{c}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, pois a derivada covariante em termos de $\overset{c}{\Gamma}$ do

⁵Temos que $\sqrt{-g} \overset{c}{\square} \sigma = \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \sigma)$.

⁶É provável que na abordagem de Kleinert, partículas seguindo autoparalelas, o campo de Weyl interfira em tais experimentos. Todavia, neste caso, as equações de campo teriam que ser outras.

lado esquerdo de (5.22) é identicamente nula, o que significa que quando acoplamos com a matéria temos $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$.

5.6 Motivações para o uso da não-metricidade

Existem basicamente duas motivações para a adoção desta geometria que ainda sobrevivem. A primeira, que foi o “princípio de tudo”, consiste em remover da geometria a hipótese de que os comprimentos podem ser comparados em pontos arbitrários. Neste caso, o comprimento de um vetor teria sempre que ser referido junto com o ponto no qual foi avaliado seu valor, pois, uma vez transportado paralelamente, este comprimento mudaria. Surge daí o conceito de não-integrabilidade do comprimento. A segunda motivação reside no fato de geometrias com não-metricidade propiciarem um ambiente natural para a invariância conforme [41], invariância esta que acredita-se ter sido importante no começo do Universo ou que ainda seja em pequenas escalas [41]. Resultados experimentais de espalhamentos com altas energias fortemente inelásticos de elétron com núcleons⁷ mostraram que as amplitudes de espalhamento comportavam-se como se todas as massas fossem negligenciáveis, o que levou os físicos teóricos a idéia da invariância da mudança de escala [43]. Isto se deve ao fato de que as constantes físicas dimensionais se tornam praticamente negligenciáveis nestes processos⁸ [43].

Embora as motivações acima sejam bastante satisfatória para motivar os físicos a trabalharem com uma geometria sem metricidade, pelo menos um problema grave da não-integrabilidade dos comprimentos foi indicada por Einstein [12]. Este problema consiste essencialmente no fato de que se vale a teoria de Weyl, ou qualquer outra com não-metricidade, então, pelo menos do ponto de vista clássico da geometria (vendo o tempo como clássico, não quântico), o comportamento dos relógios dependeria de suas histórias, fato este que traria problemas de natureza física. Por exemplo, isto implicaria que dois átomos do mesmo elemento teriam espectros diferentes, contradizendo o fato empírico de que átomos do mesmo elemento têm o mesmo espectro. Para maiores detalhes sobre este problema, o leitor pode consultar a referência [12] e as referências dentro desta às cartas

⁷Um núcleon é formado por um próton e um nêutron que são considerados como tendo a mesma massa. Para maiores detalhes sobre este espalhamento, veja **Bjorken Scaling** em [132].

⁸O mundo físico não é invariante frente a mudanças na escala de comprimento por causa das constantes físicas que não são adimensionais, veja a introdução do capítulo 2 de [43].

trocadas por Einstein e Weyl.

Em adição, vale salientar que alguns autores encontraram relações interessantes entre a mecânica quântica e a geometria de Weyl [133, 134]. Por exemplo, em [134] o autor adota uma abordagem na qual a equação de Schrödinger é obtida a partir da mecânica clássica em um espaço curvo com geometria de Weyl. Nesta abordagem, o autor prova que as forças da mecânica quântica estão associadas com a lei de transporte dos vetores. Entretanto, em [135] o autor usa argumentos associados com o limite clássico da mecânica quântica para concluir que a geometria do espaço-tempo não pode ser weylana.

5.7 Modelos com não-metricidade

O modelo com não-metricidade mais comum na literatura é a MAG, que generaliza a geometria tanto para torção quanto para não-metricidade, como já mencionado no capítulo sobre torção. Vale apenas enfatizar as seguintes propriedades da MAG [23, 91, 87, 90]

1. Campos escalares não sentem a presença da torção nem da não-metricidade.
2. A equação de movimento das partículas não correspondem a autoparalelas (geodésicas afins).
3. As correntes de dilatação e o cisalhamento⁹ são a fonte de não-metricidade.

A grosso modo, pode-se dizer que as afirmações acima são válidas para qualquer teoria formulada a partir de uma geometria com torção e não-metricidade (Métrica afim). Todavia, alguns autores questionam a validade do princípio variacional tradicional (como aplicado para geometrias riemannianas) para o caso de geometrias com torção e não-metricidade [38, 84, 85]. Uma outra proposta alternativa a MAG é *Transposed-Equi-Affine Theory* [137, 138, 139, 140, 141], porém em [142], os autores demonstram que esta teoria é inconsistente com os dados observacionais do sistema solar.

⁹Assim como o spin, correntes de dilatação e cisalhamento são as componentes do hipermomento e tem sua origem na matéria. Matematicamente falando, o hipermomento deriva da variação da densidade de lagrangiana da matéria com respeito a conexão afim, sendo que a corrente de spin vem da parte anti-simétrica, a corrente de dilatação (campo de Weyl) vem do traço e o cisalhamento vem da parte sem traço, veja [136] para maiores detalhes.

5.7.1 Modelo de Weyl

O modelo de Weyl foi criado com o intuito de unificar gravitação e electromagnetismo. Neste contexto, o campo σ foi inicialmente interpretado como sendo o potencial electromagnético e a ação do modelo dada por

$$S_W = \int d^4x \sqrt{-g} (-R^2 + \beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (5.24)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma_\mu$. O uso de R^2 é para garantir a invariância conforme.

Esta modelo mostrou-se problemático quando o gauge considerado era o da invariância local de escala, pois, neste caso o campo σ interage com partículas e antipartículas da mesma forma [43] (a antipartícula tem carga de sinal contrário ao da partícula). Por essa razão, substituiu-se este gauge pela invariância local de mudanças na fase dos campos de matéria [143]. Esta versão do princípio de gauge tornou-se a base das teorias de gauge de interações fundamentais [43]. Para compreender melhor, veja a tradução feita por N. Straumann em [12] da introdução do artigo [144]. Matematicamente, a mudança se deu da seguinte maneira. Seja ψ um campo de peso¹⁰ ω ($\omega \in \mathbb{R}$), ou seja, dada a transformação $g'_{\mu\nu} = e^{2\lambda(x)} g_{\mu\nu}$, temos $\psi' = e^{\omega\lambda} \psi$. Se ψ é o campo de Dirac, então a derivada covariante tem que ter a forma

$$\overset{w}{\nabla} \psi = (d + \omega\sigma)\psi \quad (5.25)$$

para preservar a invariância conforme de $\bar{\psi} \gamma^\mu \overset{w}{\nabla}_\mu \psi$, onde estamos tomando o espaço plano por simplicidade¹¹, e γ_μ são as matrizes de Dirac. Pois bem, se quisermos que $g'_{\mu\nu} = e^{2\lambda(x)} g_{\mu\nu}$ faça sentido, então λ e σ têm que ser reais. Todavia, esta exigência faz com que partícula e antipartícula tenham a mesma carga caso identifiquemos σ com o potencial do campo elétrico. Por esta razão, Weyl teve que abandonar a invariância de escala e adotar $\omega = ie$, que o levou a idéia da invariância na mudança de fase, uma vez que $\psi' = e^{\omega\lambda} \psi$ com $\omega\lambda$ sendo um imaginário puro é uma simples mudança de fase.

Embora a idéia de invariância de escala de Weyl tenha sido abandonada na eletrodinâmica, ela aparece naturalmente na gravitação. Em certos processos a altas energias, verificou-se que as massas das partículas podem praticamente ser negligenciadas, o que ressuscitou o interesse por teorias invariantes de escala¹².

¹⁰Diante de uma transformação $g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$ na métrica, o espinor de Dirac se transforma como $\psi' = \Omega^{-\frac{n-1}{2}} \psi$ [145], onde n é a dimensão do espaço-tempo.

¹¹A expressão para um espaço curvo será desenvolvida no capítulo 7.

¹²Veja a introdução de [43].

5.8 Soluções

Soluções para teorias com não-metricidade podem ser encontradas em todas as citações que fizemos para as soluções da MAG na seção 4.8.

Capítulo 6

Confinamento de autoparalelas

Embora na abordagem padrão [2, 7, 23] partículas não sigam autoparalelas, mas sim geodésicas métricas mais um termo de força que depende da fonte de torção a análise do confinamento de autoparalelas não deixa de ter sua relevância, pois, alguns autores acreditam que essas equações devam ser as equações de movimento para uma partícula [14]. Tendo em mente a possibilidade de que de fato o procedimento padrão possa estar errado, analisaremos o confinamento de autoparalelas de um espaço de dimensão¹ 5 (bulk) em uma hypersuperfície de dimensão 4 (brana) em uma geometria de métrica afim, dando ênfase a Riemann-Cartan. Nesta abordagem, evitaremos o uso do termo partícula para não passar a falsa idéia de que as idéias defendidas por Kleinert e outros em [14, 84, 38, 85, 146] estão bem estabelecidas. De fato há muitas controvérsias sobre o princípio variacional em uma geometria não-riemanniana, como discutimos no capítulo 4 e rediscutiremos em 7.

Detalhes adicionais aos que serão apresentados aqui podem ser encontrados em [147].

6.1 Mergulho de uma variedade riemanniana em uma de Riemann-Cartan e vice-versa

Sejam $\overline{M}$ uma variedade de dimensão n e M uma subvariedade de dimensão m , onde $n \geq m$. Em $\overline{M}$, a torção é definida por

$$\overline{\mathcal{T}}(\overline{V}, \overline{U}) = \overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{U} - \overline{\nabla}_{\overline{U}}\overline{V} - [\overline{V}, \overline{U}], \quad (6.1)$$

¹A generalização para um espaço-tempo de dimensão n é trivial.

onde $\bar{V}$ e $\bar{U}$ pertencem ao plano tangente de $\bar{M}$, que será denotado por $T_p\bar{M}$. Sendo M uma subvariedade de $\bar{M}$, podemos fazer a decomposição $T_p\bar{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$, onde $T_pM^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM . Isto significa que, para cada vetor $\bar{V} \in T_p\bar{M}$, com $p \in M$, podemos decompor $\bar{V}$ na forma $\bar{V} = V + V^\perp$, onde $V \in T_pM$ e $V^\perp \in T_pM^\perp$.

A torção induzida na subvariedade M é dado por [148]

$$\mathcal{T}(V, U) = \bar{\mathcal{T}}(\bar{V}, \bar{U})^T = (\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{U})^T - (\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V})^T - [V, U], \quad (6.2)$$

onde usamos o fato de que $[\bar{V}, \bar{U}]^T = [\bar{V}, \bar{U}] = [V, U]$.

Podemos decompor $\bar{\nabla}_V\bar{U}$ em duas partes como segue [148]

$$\bar{\nabla}_V\bar{U} = (\bar{\nabla}_V\bar{U})^T + (\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp, \quad (6.3)$$

onde $(\bar{\nabla}_V\bar{U})^T$ pertence ao plano tangente de M , enquanto que $(\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp$ é ortogonal a este plano. Além disto, faremos a seguinte identificação

$$(\bar{\nabla}_V\bar{U})^T = \nabla_V U \quad (6.4)$$

e, portanto, (6.3) fica

$$\bar{\nabla}_V\bar{U} = \nabla_V U + (\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp. \quad (6.5)$$

Substituindo (6.5) em (6.1), teremos

$$\bar{\mathcal{T}}(\bar{V}, \bar{U}) = (\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp - (\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V})^\perp + \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U]. \quad (6.6)$$

Os três últimos termos na expressão acima representam exatamente a torção induzida na subvariedade, veja (6.2) e a identificação (6.4). Portanto, (6.6) pode ser escrita na forma

$$\bar{\mathcal{T}}(\bar{V}, \bar{U}) = (\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp - (\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V})^\perp + \mathcal{T}(V, U). \quad (6.7)$$

De (6.7), vemos que para a subvariedade M não ter torção, mesmo que $\bar{M}$ tenha, basta que $\bar{\mathcal{T}}(\bar{V}, \bar{U}) = (\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp - (\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V})^\perp$. Além disto, podemos afirmar que se $\bar{\mathcal{T}}(V, U)$ for nulo, $\mathcal{T}(V, U)$ também será, pois, neste caso teremos

$$\mathcal{T}(V, U) = (\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{V})^\perp - (\bar{\nabla}_V\bar{U})^\perp, \quad (6.8)$$

mas como $\mathcal{T}(V, U)$ pertence ao plano tangente de M e $(\overline{\nabla_{\overline{U}}V})^\perp - (\overline{\nabla_{\overline{V}}U})^\perp$ é ortogonal a este,

$$\mathcal{T}(V, U) = 0. \quad (6.9)$$

Em resumo, os resultados que temos nessa seção são: podemos ter uma subvariedade riemanniana mergulhada em uma de Riemann-Cartan, mas não podemos ter uma variedade de Riemann-Cartan mergulhada em uma riemanniana.

6.2 Confinamento de autoparalelas numa brana

Seja M uma variedade de dimensão 4 imersa num bulk de dimensão 5. O elemento de linha do bulk é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.10)$$

onde $\mu, \nu = 0 \dots 4$. As autoparalelas deste espaço são dadas por

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (6.11)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão afim do bulk. Para o que vamos fazer, é conveniente separar o caso $\lambda = 4$ dos demais. Fazendo isto, teremos

$$\begin{aligned} \ddot{x}^4 &= -\Gamma_{44}^4 (\dot{x}^4)^2 - (\Gamma_{4\bar{\nu}}^4 + \Gamma_{\bar{\nu}4}^4) \dot{x}^4 \dot{x}^{\bar{\nu}} - \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^4 \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}}, \\ \ddot{x}^{\bar{\alpha}} &= -\Gamma_{44}^{\bar{\alpha}} (\dot{x}^4)^2 - (\Gamma_{4\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} + \Gamma_{\bar{\nu}4}^{\bar{\alpha}}) \dot{x}^4 \dot{x}^{\bar{\nu}} - \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $\bar{\mu} = 0, 1, 2, 3$ (a barra acima dos índices indica que eles assumem valores entre 0 e 3). Nosso interesse é apenas na equação (6.12), pois, será esta que permitirá a análise do confinamento.

6.2.1 Analisando o confinamento

Pontos críticos

Façamos, agora, uma consideração a respeito da equação (6.12). Para podermos utilizar o método que analisa a estabilidade de sistemas não lineares, veja o capítulo C do apêndice, é necessário nos livrarmos do termo de (6.12) que contém o produto $\dot{x}^4 \dot{x}^{\bar{\nu}}$. Isto

significa que o nosso resultado se limitará aos casos nos quais $(\Gamma^4_{4\bar{\nu}} + \Gamma^4_{\bar{\nu}4})\dot{x}^4\dot{x}^{\bar{\nu}} = 0$. Considerando apenas esses casos, a equação (6.12) fica

$$\ddot{x}^4 = -\Gamma^4_{44}(\dot{x}^4)^2 - \Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\dot{x}^{\bar{\mu}}\dot{x}^{\bar{\nu}}. \quad (6.13)$$

Para facilitar a comparação com o que é feito no apêndice C, façamos as seguintes modificações na notação $q \equiv \dot{x}^4$ e $y \equiv x^4$. Perceba que, com essas definições, $q = \dot{y}$. Assim sendo, a equação acima toma a forma

$$\dot{y} = q, \quad (6.14)$$

$$\dot{q} = -\Gamma^4_{44}q^2 - \Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\dot{x}^{\bar{\mu}}\dot{x}^{\bar{\nu}}, \quad (6.15)$$

Note que (6.15) e (6.14) podem ser visto como um sistema do tipo

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y, q), \\ \dot{q} = G(y, q), \end{cases} \quad (6.16)$$

onde $F(y, q) = q$ e $G(y, q) = -\Gamma^4_{44}q^2 - \Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\dot{x}^{\bar{\mu}}\dot{x}^{\bar{\nu}}$ se admitirmos que o termo $\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\dot{x}^{\bar{\mu}}\dot{x}^{\bar{\nu}}$ dependem no máximo de y e q . Vamos usar a análise feita no apêndice C com o intuito de saber quais as condições sobre a conexão necessárias para confinar as geodésicas afim na brana. Para começar, admita que existe um ponto y_0 tal que $\dot{y}(y_0) = \dot{q}(y_0) = 0$ (perceba que, de (6.14) $\dot{y}(y_0) = 0 \rightarrow q(y_0) = 0$). Neste caso, a equação (6.15) fica

$$\dot{q} = 0 = -\Gamma^4_{44}(y_0, 0) \times 0^2 - \Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(y_0, 0) \dot{x}^{\bar{\mu}}\dot{x}^{\bar{\nu}} \quad (6.17)$$

ou, simplesmente

$$\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(y_0, 0) \dot{x}^{\bar{\mu}}\dot{x}^{\bar{\nu}} = 0. \quad (6.18)$$

Perceba que estamos admitindo que $\Gamma^4_{44}(y_0, 0)$ não diverge quando $q \rightarrow 0$, pelo menos não mais rapidamente que q^2 , o que é bem razoável.

A igualdade (6.18) representa a condição necessária para que haja um ponto de equilíbrio em $y = y_0$. Condição essa que também é necessária, porém não suficiente, para que haja confinamento. Para analisarmos o confinamento, precisamos avaliar a estabilidade do ponto de equilíbrio y_0 .

Estabilidade de y_0

Para um sistema do tipo

$$\dot{y} = F(y, q), \dot{q} = G(y, q),$$

a estabilidade dos pontos de equilíbrio podem ser analisados via a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial q} \end{pmatrix}_{y=y_0, q=0}.$$

Como pode ser visto no apêndice² C.

Calculando esta matriz para o sistema formado pelas equações (6.14) e (6.15), teremos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial(\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial y} \Big|_{y_0,0} & -\frac{\partial(\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial q} \Big|_{y_0,0} \end{pmatrix},$$

onde admitimos que $\frac{\partial \Gamma^4_{44}}{\partial y} \Big|_{(y_0,0)} \times 0^2 = \frac{\partial \Gamma^4_{44}}{\partial q} \Big|_{(y_0,0)} \times 0^2 = 0$ e $\Gamma^4_{44}(y_0, 0) \times 0 = 0$. Por simplicidade, poderíamos simplesmente admitir que a conexão afim é uma função suave e diferenciável em $(y = y_0, q = 0)$.

Como a conexão não depende de $q = \dot{y}$ e, além disso, admitimos que $\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}}$ é função apenas de y e q , o termo $\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}}$ tem no máximo uma dependência de q do tipo q^2 . Desta forma, $-\frac{\partial(\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial q} \Big|_{y_0,0} = 0$. Assim, teremos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial(\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial y} \Big|_{y_0,0} & 0 \end{pmatrix}_{(y_0,0)}. \quad (6.19)$$

Calculando os autovalores da matriz acima, chegamos a

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{\partial(\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial y} \Big|_{y_0,0}}. \quad (6.20)$$

Façamos agora a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Todavia, é importante fazermos a seguinte ressalva. Os resultados qualitativos apresentado na seção

²Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [149].

C.1 do apêndice são válidos de forma exata para sistemas lineares. Entretanto, no caso de sistemas não-lineares, eles apontam o comportamento qualitativo de forma aproximada, como veremos mais adiante. Por exemplo, se o resultado da análise qualitativa for uma elipse para um sistema linear, não necessariamente será uma elipse para um sistema não-linear. Porém, as curvas tenderão a uma elipse. Na próxima seção, faremos uma comparação entre a análise qualitativa e a solução exata para um caso particular.

De (6.20) e da seção C.1, podemos concluir o seguinte. Para os casos em que o termo $-\frac{\partial(\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial y} \Big|_{y_0,0}$ for negativo, λ será um imaginário puro, logo, teremos um ponto estável caracterizado pelo fato das trajetórias no espaço de fase (y, q) serem³ “elipses” com centro no ponto crítico $(y_0, 0)$, veja a figura 6.1 e o apêndice C.1.3. Para λ nulo, teremos uma quantidade infinita de pontos de equilíbrio y_0 , o que significa que as autoparalelas estão⁴ “confinadas” na brana caracterizada por $y = y_0$. Já nos casos em que este termo for positivo, teremos um ponto de equilíbrio altamente instável (Ponto de Sela), pois, os autovalores serão reais e com sinais diferentes. Perceba que, na análise que estamos fazendo, o confinamento depende única e exclusivamente da conexão afim, ou seja, os efeitos do campo de Weyl, da contorção ou do próprio símbolo de Christoffel no confinamento são equivalentes. De (6.19), vemos que a parte anti-simétrica nos índices inferiores da contorção não contribuem para o confinamento das autoparalelas. No capítulo 8, veremos que considerar que partículas seguem autoparalelas é incompatível com a equação de Dirac em Riemann-Cartan obtida a partir do uso do acoplamento mínimo direto na lagrangiana, pois, neste caso, apenas a parti anti-simétrica da contorção contribuirá para qualquer efeito.

Na obtenção de (6.19), foi necessário fazermos algumas considerações. Abaixo apresentamos uma lista com essas imposições.

$$\Gamma^4_{(4\bar{\nu})} \dot{x}^4 \dot{x}^{\bar{\nu}} = 0, \quad (6.21)$$

$$\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}} = f(y, q), \quad (6.22)$$

$$\Gamma^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}} \Big|_{(y_0,0)} = 0, \quad (6.23)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial \Gamma^4_{44}}{\partial y} \Big|_{(y_0,q)} \times q^2 = 0, \quad (6.24)$$

³As aspas são devido ao fato de que, para sistemas não-lineares, o comportamento das curvas é similar ao de uma elipse.

⁴Novamente, se o sistema for não-linear, ele tenderá a isto.

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial \Gamma_{44}^4}{\partial q} \Big|_{(y_0, q)} \times q^2 = 0, \quad (6.25)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Gamma_{44}^4(y_0, q) \times q = 0, \quad (6.26)$$

onde f é uma função qualquer de y e q , a terceira condição é para garantir a existência de um ponto de equilíbrio, e as três últimas condições são pouco restritivas, uma vez que elas correspondem apenas a condições de suavidade da conexão e de suas derivadas. Na próxima seção, abordaremos alguns casos particulares.

6.3 Casos particulares

Considere uma variedade M de dimensão cinco com uma certa conexão afim, podendo ter ou não torção e campo de Weyl. Admita que o elemento de linha desta variedade seja dado por

$$ds^2 = e^{2f(y)} \bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} dx^\alpha dx^\beta - dy^2, \quad (6.27)$$

e a contorção por

$$K^4_{(\bar{\mu}\bar{\nu})} = \phi(y) g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad (6.28)$$

onde $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = e^{2f(y)} \bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ ($g_{\mu\nu}$ são as componentes da métrica na base coordenada).

Calculando os símbolos de Christoffel, é fácil demonstrar que os termos não nulos são

$$\overset{c}{\Gamma}^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = f' g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad (6.29)$$

onde $f' = \partial f / \partial y$. De (5.10), é possível demonstrar que a parte da conexão que dependa apenas do campo de Weyl fica

$$\overset{w}{\Gamma}^4_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = -\frac{1}{2} \sigma_4 g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad (6.30)$$

onde σ_4 é a componente da 1-forma de Weyl na quinta dimensão. De maneira geral, a autoparalela satisfaz

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \epsilon, \quad (6.31)$$

onde ϵ pode assumir os valores 0, -1 ou 1 , dependendo da curva ser tipo luz, espaço ou tipo tempo, respectivamente. Usando (6.27), a equação acima fica

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}} = \epsilon + q^2, \quad (6.32)$$

onde usamos $q \equiv \dot{x}^4$. Agora, somos capazes de calcular os autovalores (6.20) explicitamente. De (6.28), (6.29), (6.30) e (6.31), teremos

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pm}^2 &= -\frac{\partial (\Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^4 \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}})}{\partial y} \Big|_{y_0,0} = -\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y_0,0} \left(\Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^c + \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^w + K_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^4 \right) \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y_0,0} \left(f' - \frac{1}{2} \sigma_4 + \phi \right) g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y_0,0} \left(f' - \frac{1}{2} \sigma_4 + \phi \right) (\epsilon + q^2) \\
&= -\epsilon \left[f''(y_0) - \frac{1}{2} \sigma_4'(y_0) + \phi'(y_0) \right], \tag{6.33}
\end{aligned}$$

onde deve estar claro para o leitor que os valores acima são avaliados no ponto crítico y_0 , logo $q(y_0) = 0$. Antes de continuarmos, precisamos analisar a condição de existência do ponto de equilíbrio y_0 , dada por (6.18). De (6.18), segue

$$\Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^4 \dot{x}^{\bar{\mu}} \dot{x}^{\bar{\nu}} \Big|_{(y_0,0)} = \epsilon \left(f'(y_0) - \frac{1}{2} \sigma_4(y_0) + \phi(y_0) \right) = 0 \tag{6.34}$$

cujo cálculo é muito semelhante ao anterior. Se essa condição for satisfeita, então podemos analisar a estabilidade do sistema a partir dos autovalores $\lambda_{\pm}$. Admitindo que isto seja verdade e relembrando a análise feita no final da seção anterior, concluímos que para haver um ponto de equilíbrio estável, o lado direito de (6.33) deve ser negativo ou zero. Por sua vez, este lado ser ou não negativo dependerá da natureza da curva (tipo tempo, luz ou espaço) e das funções f , ϕ e σ_4 . No caso do lado direito de (6.33) ser negativo, o equilíbrio pode ser visto como um tipo de confinamento da curva, pois, neste caso, a mesma fica entrando e saindo da brana, como sugerido na última figura em 6.2. Já no caso deste termo ser nulo, $\dot{y}$ será nulo para infinitos valores de y , ou seja, haverá infinitas branas $y = 1, 2, 3, \dots$, tais que as curvas “nunca” serão encontradas em mais de uma brana. Uma vez em $y = 2$, a curva permanecerá nela. As aspas na palavra “nunca” é para lembrar o leitor de que isso só será absolutamente verdade no caso de sistemas lineares, os não lineares irão tender a este comportamento. Abaixo, exibimos um caso particular que enfatizará este fato.

Como um exemplo bem particular do tipo de confinamento indicado acima, tomemos⁵ $f = \sigma = 0$ e $\phi = -1/y + y$. Neste caso, a condição (6.34) leva a $y_0 = \pm 1$, ou seja, há dois pontos críticos. Por sua vez, os autovalores são $\lambda_{\pm}^2 = -\epsilon \left(\frac{1}{y_0^2} + 1 \right)$. Portanto, as curvas tipo tempo, $\epsilon = 1$, experimentam um confinamento similar ao indicado na figura 6.2.

⁵O caso $f = \phi = 0$ pode ser encontrado em [148], enquanto que o caso $\sigma = \phi = 0$ pode ser encontrado em [150].

Para $\epsilon = 0$, haverá vários pontos críticos e as curvas tenderão a ficar totalmente dentro de alguma brana caracterizada por um certo y . Na verdade, para esse caso particular, é possível obter as curvas do espaço de fase $(y, \dot{y})$ de forma exata. Para isto, basta usarmos $\Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^4 = K_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^4 = \phi(y)g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = (-1/y + y)g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ em (6.12). Neste caso, teremos

$$\ddot{y} = -\phi(y) (\epsilon + \dot{y}^2). \quad (6.35)$$

Usando a regra da cadeia $\ddot{y} = \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy}$ e integrando a equação acima, chegaremos a

$$\dot{y}^2 = Ae^{-2 \int \phi(y) dy} - \epsilon. \quad (6.36)$$

Para o caso particular que estamos adotando, $\phi(y) = -1/y + y$, ficaremos com

$$\dot{y}^2 = Ay^2 e^{-y^2} - \epsilon. \quad (6.37)$$

Substituindo (6.37) em (6.35), teremos

$$\ddot{y} = (1 - y^2)Aye^{-y^2}. \quad (6.38)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são os y_0 tais que $\dot{y}(y_0) = \ddot{y}(y_0) = 0$. Das equações (6.37) e (6.38), é fácil verificar que existe infinitos pontos críticos para $\epsilon = 0$, pois, neste caso, os pontos críticos são dados por $A = 0$ (y qualquer). Isto significa que há infinitas autoparalelas que estão contidas em hiperplanos caracterizados por um certo y , ou seja, uma vez dentro de um certo hiperplano, nele a curva permanece. Este resultado é coerente com o que tínhamos obtido. Entretanto, nem todas as soluções apresentam esse comportamento de forma exata. Os casos $A \neq 0$ apenas tendem a esse comportamento, veja a figura 6.4. Pela figura, vemos que as curvas próximas das branas ± 1 tendem a ter variações ($\dot{y} \neq 0$) e conseqüentemente tendem a não ficar confinadas em nenhuma brana, porém as curvas distantes de $y = \pm 1$ permanecerão totalmente dentro de alguma brana. Quanto ao caso $\epsilon = 1$, é fácil ver que há dois pontos críticos para o sistema formado por (6.37) e (6.38) dados por $A = e^1$, a saber, $y_0 = \pm 1$. Mesmo resultado que já tínhamos obtido. Tomando vários valores de A para analisarmos o comportamento das curvas no espaço de fase, confirmamos que de fato teremos curvas fechada em torno dos pontos de equilíbrio $y_0 = \pm 1$, veja a figura 6.3. Ou seja, para as curvas que $A = e$ (equivalentemente $\dot{y}(\pm 1) = 0$) o confinamento é absoluto, mas as curvas com $A > e$ (não há solução real para $A < e$) ficam entrando e saindo das branas $y = \pm 1$, como indicado na figura 6.2.

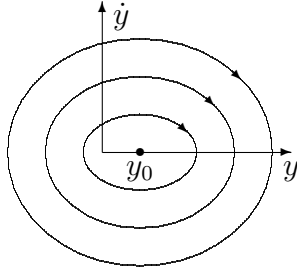


Figura 6.1: Quando os autovalores (6.20) são imaginários puros distintos, as curvas no espaço de fase $(y, \dot{y})$ são fechadas com centro em $(y_0, 0)$.

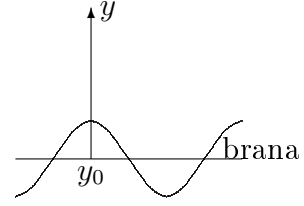


Figura 6.2: As curvas da figura 6.1 indicam que as autoparalelas descritas em termos de x^0, x^1, x^2, x^3, y entram e sai da hypersuperfície (brana) definida por $y = y_0$, como indicado nesta figura.

Em [148], o leitor encontrará um exemplo de confinamento⁶ com f e ϕ não-nulos.

6.4 O papel da contorção e dos demais campos no confinamento

É interessante perceber que, diante das restrições (6.21), (6.22), (6.23), (6.24), (6.25) e (6.26), as possibilidades de usar a métrica, a torção e o campo de Weyl para confinar as autoparalelas na brana são as mesmas, além do tipo de confinamento também ser o mesmo.

⁶Esteja atento as diferenças na notação, tanto na definição da contorção, quanto das funções equivalentes a f e ϕ .

Figura 6.3: Nesta figura, temos as curvas exatas no espaço de fase $(y, \dot{y})$ para o caso $\epsilon = 1$, $\sigma = f = 0$ e $\phi = -\frac{1}{y} + y$. Note a semelhança desta figura com a da análise qualitativa feita na figura 6.1. As únicas diferenças estão no fato de que, aqui, as curvas não são exatamente elipses, além de lá não termos desenhado o comportamento das curvas ao redor de todos os pontos de equilíbrio.

Figura 6.4: Nesta figura, exibimos seis curvas para o caso exato de $\epsilon = 0$, dado por $\dot{y} = \pm \sqrt{Ay^2 e^{-y^2}}$. Consideramos os valores $A = 10^2$, $A = 10^3$ e $A = 10^4$. Perceba que a curva só se desvia do resultado obtido na análise qualitativa, $\dot{y} = 0$ para qualquer y , nas regiões onde ϕ é singular, $y = \pm 1$. Quanto maior o valor de A , mais abrupto é o desvio. Entretanto, a região onde ocorre o desvio é sempre pequena. No caso de $A = 10^4$, $y \simeq 3$.

Capítulo 7

Equação de Dirac

7.1 Introdução

A mecânica quântica relativista no espaço-tempo de Minkowski tem como alicerce a equação de Dirac, que descreve partículas de spin $1/2$. Por sua vez, esta equação foi originalmente formulada para ser válida em um referencial inercial e, neste contexto, tem sido inquestionavelmente bem sucedida. Entretanto a passagem para um referencial não-inercial ou, de maneira mais geral, um espaço com gravitação, não é tão trivial quanto parece. No caso da equação de Klein-Gordon, que em Minkowski pode ser obtida a partir da equação de Dirac, pode-se verificar alguns resultados estranhos a nossa intuição física, como por exemplo a não unicidade do estado de vácuo [151]. O procedimento padrão para fazer essa passagem consiste em utilizar o princípio do acoplamento mínimo na equação de Dirac em Minkowski (substitui-se derivadas usuais por derivadas covariantes). Em termos experimentais, há indícios da validade destes procedimento [87]. O problema se torna muito mais complexo e intrigante quando tentamos fazer a passagem de uma geometria riemanniana, cenário da relatividade geral, para uma geometria mais geral. Podemos generalizar o conceito de produto interno, podemos tomar geometrias com métricas não simétricas, geometrias com não-metricidade, com torção etc. Devido a variedade de opções, nos limitaremos a tratar o caso das geometrias com não-metricidade e torção em um espaço-tempo de dimensão n . Alguns problemas e dificuldades sobre esta generalização serão apresentados aqui, incluindo a presença de uma dificuldade na aplicação do princípio da equivalência que não está presente na geometria riemanniana.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Sem entrar em detalhes, na seção

7.2, apresentamos a equação de Dirac no espaço-tempo de Minkowski, suas matrizes, e a motivação do uso da álgebra de Clifford na mecânica quântica relativística. Na seção 7.3, fazemos uma breve introdução ao formalismo das tetradas com o objetivo de preparar o leitor para as seções seguintes. Iniciamos o nosso objetivo de generalizar a equação de Dirac para geometrias com torção e não-metricidade na seção 7.4. Esta seção é subdividida em várias partes, todas fundamentais para a compreensão deste capítulo. Não podemos deixar de observar que, nesta seção, será apresentado um formalismo espinorial diferente do encontrado na literatura. Desenvolvemos o nosso próprio formalismo espinorial com o intuito de apresentarmos a equação de Dirac em uma forma simples e didática. O leitor interessado no formalismo espinorial padrão, pode consultar [9, 152, 153]. O nosso formalismo será suficiente para o que faremos aqui.

7.2 Equação de Dirac em Minkowski

No início do século XX surgiram duas teorias que revolucionaram a nossa maneira de ver o mundo, a relatividade especial e a mecânica quântica. Elas foram muito bem sucedidas na explicação de vários fenômenos físicos: o espectro de energia dos átomos, a dilatação do tempo etc. Entretanto, estas duas teorias foram inicialmente fundamentadas em perspectivas totalmente distintas. Enquanto a relatividade especial foi construída em uma perspectiva geométrica que partia do postulado de que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais e que todos os observadores inerciais são equivalentes, a mecânica quântica foi construída a partir do postulado de que a energia e o momento deveriam ser substituídos por operadores com o intuito de obter uma equação de onda para descrever o movimento de uma partícula. Surgiu, então, a necessidade de unir estas duas teorias em uma só. Nada mais natural, então, do que usarmos estes postulados juntos. Nesta seção exibiremos exatamente essa junção.

A energia relativística é diferente da energia da mecânica newtoniana. Enquanto a energia de uma partícula livre na mecânica newtoniana tem a forma $E = p^2/2m$, onde p e m são o módulo do momento da partícula e sua massa, respectivamente, na mecânica relativística $E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$. Neste último caso, m é a massa de repouso da partícula e c a velocidade da luz. Como a mecânica quântica parte das identificações $E \rightarrow i\hbar\partial_t$ e $p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$, onde $\vec{\nabla} = \hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z$, a diferença entre a energia da relatividade e a

newtoniana leva naturalmente a teorias quânticas completamente diferentes. Inicialmente, usou-se a energia newtoniana e obteve-se

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2 \varphi}{2m},$$

onde φ foi interpretado como sendo uma função associada com a probabilidade de encontrarmos a partícula. Pois bem, para obtermos uma versão relativística, usamos o mesmo procedimento, sendo que desta vez consideramos a energia $E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$.

Procedendo-se desta forma, chega-se a equação de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\partial}{\partial c^2 t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \square \phi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi,$$

onde ϕ , em princípio, estaria associada a probabilidade de encontrarmos a partícula. Posteriormente, descobriu-se que a associação de ϕ com a probabilidade de encontrarmos a partícula era problemática, pois permitia probabilidades negativas¹. Durante a resolução deste problema, Dirac percebeu a necessidade de se tirar a raiz quadrada da energia, ou seja, de expressá-la na forma $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$. Todavia, a substituição direta de $E \rightarrow i\hbar \partial_t$ e $p \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ nesta expressão torna-se totalmente inviável, pois o que seria $i\hbar \partial_t \phi = (\sqrt{m^2 c^4 - \hbar c^2 \nabla^2}) \phi$? Poderíamos até pensar em expandir a raiz, mas obteríamos uma série infinita. Este problema foi resolvido adotando-se o procedimento inverso. Ao invés de tirar a raiz e depois aplicar a substituição indicada acima, podemos escrever a energia na seguinte forma bem genérica $E = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta$, onde a natureza de $\vec{\alpha}$ e β são, em princípio, desconhecidas; $\vec{p}$ é o momento tridimensional da partícula. Sabemos apenas que $\vec{\alpha}$ tem pelo menos um caráter vetorial, embora possa ser mais do que isso. Quadrando esta energia, teremos

$$\begin{aligned} E^2 &= (c\alpha^i p_i + mc^2 \beta) * (c\alpha^j p_j + mc^2 \beta) = c^2 \alpha^i * \alpha^j p_i p_j + c^2 \alpha^i * (p_i \alpha^j) p_j \\ &\quad + mc^3 \alpha^i * \beta p_i + mc^3 \alpha^i * (p_i \beta) + mc^3 \beta \alpha^j p_j + m^2 c^4 \beta^2, \end{aligned}$$

onde a natureza do produto “*” é desconhecida, a priori. Comparando esta expressão com $E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$, vemos de imediato que

$$\beta^2 = \beta * \beta = \mathbb{I} \equiv \text{identidade}, \quad (7.1)$$

$$mc^3(\alpha^j * \beta + \beta * \alpha^j)p_j + c^2 \alpha^i * (p_i \alpha^j)p_j + mc^3 \alpha^i * (p_i \beta) = 0, \quad (7.2)$$

$$\alpha^i * \alpha^j p_i p_j = p^2 \Rightarrow \frac{1}{2} (\alpha^i * \alpha^j + \alpha^j * \alpha^i) = \delta^{ij}. \quad (\delta^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)) \quad (7.3)$$

¹A probabilidade deve ser sempre positiva.

Admiti-se que, em um referencial inercial e em coordenadas cartesianas, β e α são constantes, logo $p_i\beta = 0$ e $p_i\alpha^j = 0$. Desta forma, a condição (7.2) se simplifica para

$$\alpha^j * \beta + \beta * \alpha^j = 0. \quad (7.4)$$

Se tomarmos “ $*$ ” como uma simples multiplicação, as condições acima levarão a $\vec{\alpha} = 0$. Isto sugere que β e $\vec{\alpha}$ sejam matrizes e que o produto em questão seja um produto entre matrizes. Perceba que $\vec{\alpha}$ tem uma natureza matricial e vetorial ao mesmo tempo, ou seja, $\vec{\alpha} = \alpha^1\hat{i} + \alpha^2\hat{j} + \alpha^3\hat{k}$, onde $\{\alpha^j\}$ é um conjunto de matrizes.

Agora que já sabemos qual é a natureza de $\vec{\alpha}$ e β , façamos a identificação $E \rightarrow i\hbar\partial_0$ e $p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ na energia $E = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta$ (note que $E \equiv E \mathbb{I}$). Estas identificações levam a expressão da energia ao seguinte operador $i\hbar(\beta\partial_{ct} + \beta\alpha^i\partial_i) - mc$. Denotando as funções sobre as quais este operador atua por ψ , teremos

$$i\hbar(\beta\partial_{ct} + \beta\alpha^i\partial_i)\psi - mc\psi = 0.$$

Perceba que, em princípio, ψ é uma matriz. Com o intuito de expressar esta equação em uma forma mais compacta, faz-se as seguintes definições $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha^i$ ($i = 1, 2, 3$), onde as matrizes γ^μ são conhecidas como matrizes de Dirac. Desta forma, escrevemos $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$, que é conhecida como equação de Dirac. Em termos das matrizes de Dirac, as condições (7.1), (7.3) e (7.4) são expressa na forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (7.5)$$

onde as chaves indicam anticomutação e η é a métrica de Minkowski. A álgebra das matrizes que satisfazem (7.5) é conhecida como álgebra de Clifford. Dedicamos a subseção 7.4.6 aos geradores desta álgebra.

A partir de agora, adotaremos a seguinte convenção $\hbar \equiv c \equiv 1$. Nesta convenção, escrevemos

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0. \quad (7.6)$$

A equação de Dirac (7.6) é bem sucedida para explicar fenômenos que estejam no contexto da mecânica quântica e da relatividade especial, ou seja, ela está limitada a referenciais inerciais no espaço-tempo de Minkowski. Além desta limitação, da maneira que foi deduzida, ela também está limitada a um sistema de coordenadas cartesianas. Se tomarmos um sistema de coordenadas curvilíneo ou um referencial não inercial, as matrizes γ s não

serão mais constantes. Este fato pode, de início, sugerir que em coordenadas curvilíneas ou em um referencial não inercial a condição (7.2) não se simplifique para (7.4). Entretanto, adotando o procedimento usual de substituir derivadas parciais por covariantes e a métrica de Minkowski pela riemanniana, a condição (7.4) continua sendo válida. Neste caso, teríamos a substituição de $\partial_\mu \alpha = \partial_\mu \beta = 0$ por $\nabla_\mu \alpha = \nabla_\mu \beta = 0$. Esta substituição é equivalente a $\partial_\alpha \gamma^\mu = 0 \rightarrow \nabla_\alpha \gamma^\mu = 0$. Na sub-seção 7.4.8, veremos que esta substituição não pode ser feita quando consideramos uma geometria com não-metricidade.

7.3 Tetradas

Aqui, apresentamos as tetradas de forma superficial, porém suficiente para o que vamos fazer mais adiante. Embora o termo tetrada² faça referência ao conjunto de quatro objetos e esse termo tenha sido inicialmente dado para um certo tipo de base vetorial com quatro vetores linearmente independentes, nesta tese, usaremos este termo para nos referirmos a qualquer base vetorial que satisfaça as propriedades que serão exibidas a seguir sem nos preocuparmos com o número de vetores da base. Começemos primeiro pela notação.

7.3.1 Notação

Os vetores da base de tetradas serão representados, numa notação independente de coordenadas, por e_A , onde o índice A é explicitado na forma $e_{(0)}$, $e_{(1)}$ etc. De maneira geral, todos os índices representados por letras romanas maiúsculas serão indicados entre parênteses quando substituídos por números, como mostrado no exemplo anterior. Por sua vez, as componentes dos vetores serão representadas por índices gregos minúsculos e, quando enumeradas, nenhum parêntese será utilizado. Exemplo: e_A^μ , cujas componentes são lidas na forma e_A^0 , e_A^1 etc. As componentes da tetrada na base coordenada serão indicadas por e_A^μ , ou seja, $e_A = e_A^\mu \partial_\mu$, onde $\{\partial_\mu\}$ é a base coordenada. A base dual aos vetores e_A é uma base de 1-formas, que será denotada³ por e^A . Estas 1-formas podem ser escritas em termos da base dual de $\{\partial_\mu\}$, ou seja, em termos de dx^μ . Suas componentes serão indicadas por e^A_μ , isto é, $e^A = e^A_\mu dx^\mu$. Da definição de base dual, teremos a

²Gramaticalmente falando, o termo correto seria "tétrada". De qualquer forma, na física, é mais comum usar tetrada.

³Alguns autores preferem adotar outra letra, como por exemplo θ^A , para enfatizar que θ^A não é e_A com o índice levantado. Todavia, não nos preocuparemos em enfatizar esta diferença.

seguinte propriedade:

$$\langle e^A, e_B \rangle = e^A{}_\mu e_B{}^\nu \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = e^A{}_\mu e_B{}^\mu = \delta_B^A. \quad (7.7)$$

Por definição, levantamos e abaixamos os índices romanos maiúsculos com a métrica de Minkowski $\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Esta definição mais (7.7) implicam

$$\begin{aligned} e_{A\mu} e^{B\mu} &= \delta_A^B, \\ e_{A\mu} e_B{}^\mu &= \eta_{AB}, \end{aligned}$$

onde $e_{A\mu} \equiv \eta_{AC} e^C{}_\mu$ e $e^{B\mu} \equiv \eta^{BC} e_C{}^\mu$. Vincula-se a tetrada com a métrica da seguinte forma. Se desejarmos que η_{AB} seja a expressão da métrica na base de tetrada, então teremos a seguinte restrição na escolha da tetrada

$$\begin{aligned} \eta_{AB} e^A \otimes e^B &= e_{A\mu} e_B{}^\mu e^A \otimes e^B \\ &= e_{A\mu} e_B{}^\mu e^A{}_\alpha e^B{}_\beta dx^\alpha \otimes dx^\beta \\ &= g_{\nu\mu} e_A{}^\nu e_B{}^\mu e^A{}_\alpha e^B{}_\beta dx^\alpha \otimes dx^\beta \\ &= g_{\nu\mu} (e_A{}^\nu e^A{}_\alpha) (e_B{}^\mu e^B{}_\beta) dx^\alpha \otimes dx^\beta, \end{aligned}$$

onde $g_{\nu\mu} = g(\partial_\nu, \partial_\mu)$. Da última linha acima, vemos que para η_{AB} ser a expressão de g na base de tetrada, as componentes de e^A e e_A devem satisfazer a relação

$$e^A{}_\mu e_A{}^\nu \equiv \delta_\mu^\nu. \quad (7.8)$$

Desta forma, teremos

$$g = \eta_{AB} e^A \otimes e^B = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (7.9)$$

Como subimos e descemos os índices de coordenada (os índices gregos) com $g_{\mu\nu}$, a definição (7.8) é equivalente a $e^A{}_\mu e_A{}^\nu = g_{\mu\nu}$. Considere agora a seguinte definição:

Definição 7.3.1 *Sejam $L_+^\uparrow = \{\Lambda : \det[\Lambda] = 1, \Lambda^{(0)}_{(0)} \geq 1\}$ o grupo de Lorentz próprio e uma tetrada $\{e^A\}$, ambos definidos em um ponto q de uma variedade M . Chama-se de transformação de Lorentz local, a rotação nas tetradas definida por $e'^A = \Lambda^A{}_B e^B$, onde $\{e'^A\}$ é uma outra tetrada também definida em q .*

Aplicando uma transformação de Lorentz local nas tetradas, $\bar{e}^A = \Lambda^A{}_B e^B$, a expressão $\eta_{AB} e^A \otimes e^B$ permanece inalterada. Isto significa que há uma arbitrariedade na escolha

das tetradas, ou seja, quando formos resolver algum problema concreto, poderemos sempre mudarmos a tetrada escolhida inicialmente por outra via uma transformação local de Lorentz sem alterar a física do problema. Para entendermos esta arbitrariedade, basta termos em mente que em um dado ponto do espaço-tempo haverá sempre um número infinito de referenciais que podemos escolher para escrever as grandezas físicas e, por sua vez, estes referenciais estão relacionados por uma transformação de Lorentz local. A visualização deste fato torna-se trivial no plano Euclidiano. Neste caso, se e_1 e e_2 são dois vetores de uma base definidos no ponto (x, y) , podemos passar, via uma rotação pertencente ao grupo $SO(2)$ para outra $\{e'_1, e'_2\}$ sem alterarmos a física do problema (a física não pode depender da escolha das tetradas), veja a figura 7.1. Neste momento torna-se fundamental

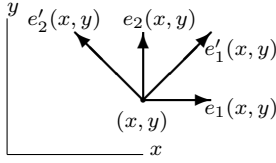


Figura 7.1: As bases $\{e_1, e_2\}$ e $\{e'_1, e'_2\}$ estão definidas no mesmo ponto do plano, (x, y) , e se relacionam um com a outra via uma rotação $R \in SO(2)$, ou seja, $e'_i = \sum_{j=1}^2 R_{ij} e_j$.

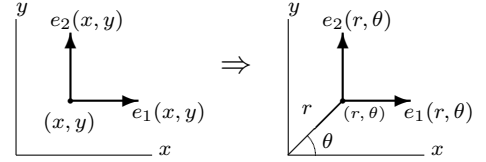


Figura 7.2: A base $\{e_1, e_2\}$ está definida no ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Fazemos uma transformação de coordenadas sem que os vetores mudem, apenas suas componentes mudam.

fazer a distinção entre dois tipos de transformações, rotação nas tetradas e transformação de coordenadas. É fundamental termos em mente que rotações nas tetradas e transformações de coordenadas são duas coisas diferentes, embora as componentes dos vetores da tetrada mudem diante de uma transformação de coordenada. Em resumo, mudança na tetrada não altera o sistema de coordenadas, e mudanças no sistema de coordenada não alteram o vetor (só as componentes). Para exemplificar esta diferença, considere as figuras 7.1 e 7.2. Na figura 7.1, fizemos uma rotação nas tetradas, porém o sistema de coordenadas continua sendo o mesmo, coordenadas cartesianas. Já na figura 7.2, fizemos o contrário. Preservamos a base, mas trocamos o sistema de coordenadas (cartesiano pelo polar). O mesmo acontecerá em uma variedade qualquer, rotações na tetrada não induzirão mudanças de coordenadas e, conseqüentemente, não induzirão mudanças na base coordenada. Em termos matemáticos, diante de $e'^A = \Lambda^A_B e^B$, teremos $\partial'_\mu = \partial_\mu$.

7.4 Espinor de Dirac em espaços curvos com não-metricidade e torção

O princípio da equivalência afirma que, localmente, o espaço-tempo curvo não pode ser distinguido do espaço-tempo de Minkowski. Um exemplo disto é a relatividade geral, onde, localmente, não é possível fazer distinção entre um referencial em queda livre (com gravitação) e um referencial em repouso sem gravitação. Seguindo este pensamento, nada mais natural do que admitirmos que a equação de Dirac mantém sua forma usual⁴ em cada ponto do espaço curvo⁵. Esta ideia é fortalecida pelo fato de experimentos de interferometria de nêutrons serem compatíveis com a equação de Dirac em referenciais acelerados [87]. Em princípio, isto significa que para cada ponto do espaço curvo, as propriedades dos elementos que compõe a equação de Dirac se preservam. Com este argumento, poderíamos, então, escrever a equação de Dirac na seguinte forma

$$i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad (7.10)$$

onde⁶ os objetos γ^A , ∇_A (derivada covariante) e ψ têm significados similares aos da equação usual de Dirac. Ao procedimento adotado acima, dá-se o nome de acoplamento mínimo. Na geometria riemanniana, este procedimento é bem definido. Entretanto, em geometrias com torção e não-metricidade surge uma ambigüidade. Ao aplicarmos o acoplamento mínimo na lagrangiana de Dirac, a equação que se obtém a partir do princípio variacional não é a equação (7.10). Por esta razão, obteremos duas equações que generalizarão a equação de Dirac. Uma delas será exatamente (7.10) e a outra virá de um princípio variacional.

7.4.1 Espinor de Dirac

O espinor de Dirac em um espaço-tempo curvo com torção e não-metricidade será definido de forma a apresentar as mesmas propriedades daquele em Minkowski, a saber: as componentes são invariantes frente transformação de coordenadas e mudam frente transformações de Lorentz por uma matriz S que seja uma representação do grupo de

⁴A forma bem conhecida da mecânica quântica no espaço-tempo de Minkowski.

⁵Obviamente, isto só é válido numa abordagem onde a geometria é indiferente aos efeitos quânticos, a chamada "Gravitação semiclássica".

⁶Estamos adotando a convenção $c = \hbar \equiv 1$.

Lorentz próprio em um espaço que chamaremos de *espaço espinorial*. Seguindo um linha um pouco diferente da adotada na literatura, trabalharemos com um formalismo independente da base espinorial, isto é, o espinor também será invariante frente a transformações de Lorentz. Isto motiva as seguintes definições:

Definição 7.4.1 *Sejam p um ponto em uma variedade M de dimensão n , $\xi_a : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ um conjunto de aplicações definidas em p , e S a representação do grupo de Lorentz próprio $L_+^\uparrow$ no espaço vetorial $\mathbb{S}$ gerado pelas funções ξ_a . Denominamos $\mathbb{S}$ de espaço espinorial, onde ξ_a é uma base deste espaço. Além disto, dada duas bases de $\mathbb{S}$, $\{\xi'_a\}$ e $\{\xi_a\}$, teremos*

$$\xi'_a = (S^{-1})^c_a \xi_c. \quad (7.11)$$

Definição 7.4.2 *Sejam ξ_a uma base de $\mathbb{S}$ e $\psi^a : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ um conjunto de funções, ambos definidos em $p \in M$. Chamamos de espinor a aplicação $\tilde{\psi} : M \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\tilde{\psi} \equiv \psi^a \xi_a$, onde, diante da mudança de base $\xi'_a = (S^{-1})^c_a \xi_c$,*

$$\psi'^a = S^a_b \psi^b. \quad (7.12)$$

Da definição 7.4.2, está claro que $\tilde{\psi}$ é um objeto intrínseco, ou seja, não depende da base na qual está escrito.

Definição 7.4.3 *Sejam $p \in M$ e $\xi^a : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação linear definida em p . A aplicação ξ^a é tal que*

$$\xi^b(\xi_a) \equiv \delta^b_a. \quad (7.13)$$

Chamamos o espaço gerado por ξ^a de co-espinorial e o denotamos por $\mathbb{S}^$.*

Uma consequência imediata da definição acima é que ξ^a se transforma como

$$\xi'^d = S^d_b \xi^b. \quad (7.14)$$

A demonstração de (7.14) pode ser encontrada no apêndice D.3.2.

A definição 7.4.3 nos leva naturalmente a seguinte definição:

Definição 7.4.4 *Sejam $p \in M$, $\xi^a \in \mathbb{S}^*$ e $\psi_a : M \rightarrow \mathbb{C}^n$. A aplicação $\hat{\psi} : M \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\hat{\psi} = \psi_a \xi^a$, é denominada co-espinor.*

Das definições 7.4.4 e 7.4.3, resulta $\hat{\psi}(\tilde{\psi}) = \psi_a \xi^a(\psi^b \xi_b) = \psi_a \psi^b \xi^a(\xi_b) = \psi_a \psi^b \delta^a_b = \psi_a \psi^a$. A conexão entre os elementos de $\mathbb{S}$ e TM , onde TM é o plano tangente, é feita através da seguinte definição:

Definição 7.4.5 *Sejam $p \in M$, $\xi_a \in \mathbb{S}_p$ e $e_A \in T_p M$. A aplicação $\zeta : T_p M \rightarrow \mathbb{S}_p$ é uma aplicação linear e injetiva.*

Como ζ é injetiva, ela leva dois elementos distintos de $T_p M$ em dois elementos distintos de $\mathbb{S}_p$, ou seja, se $e_A \neq e'_A$, então, $\zeta(e_A) = \xi_a \neq \zeta(e'_A) = \xi'_a$. Se dois elementos e'_A e e_B , pertencentes a $T_p M$, estão relacionados por $e'_A = \Lambda_A{}^B e_B$, onde Λ é a representação do grupo $L_+^\uparrow$ em $T_p M$, então, $\zeta(e'_A) = \xi'_a = (S^{-1})^b{}_a \xi_b = (S^{-1})^b{}_a \zeta(e_B) \rightarrow \zeta(\Lambda_A{}^B e_B) = (S^{-1})^b{}_a \zeta(e_B)$, onde S é a representação do grupo $L_+^\uparrow$ no espaço dos espinores. O que a expressão anterior diz é que, a rotação nas tetradas Λ induz uma mudança na base espinorial dada por um certo S . A razão da definição 7.4.5 é exatamente a de criar este vínculo, pois, estamos interessados em reproduzir os espinores de Dirac, que satisfazem esta condição. O significado de S , ψ e ξ ainda estão obscuros, porém será esclarecido mais adiante.

Apenas recapitulando, temos que frente a uma transformação de Lorentz local $\Lambda \in L_+^\uparrow$, as componentes de $\tilde{\psi}$ se transformam através de uma matriz $S(\Lambda) \in L_+^\uparrow$, ou seja, $S(\Lambda)$ é uma representação do grupo de Lorentz próprio. Para cada Λ , deve existir um $S(\Lambda)$ satisfazendo as seguinte propriedades: dadas três transformações de Lorentz em um dado ponto da variedade, Λ_1 , Λ_2 e Λ_3 , devemos ter $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$ (Veja a demonstração no apêndice D.3.3.). Além disso, a transformação identidade deve ser levada na matriz identidade no espaço dos espinores. Todas essas propriedades são asseguradas pela existência de ζ . Por sua vez, a existência de ζ é assegurada pelo fato da dimensão de $\mathbb{S}$ não ser menor que a de TM .

Continuando com as definições, podemos generalizar a definição de espinor e co-espinor para um objeto construído a partir do produto direto dos dois espaços da seguinte forma:

Definição 7.4.6 *Sejam $\xi_a \in \mathbb{S}$, $\xi^a \in \mathbb{S}^*$ e a aplicação $\chi^{a_1 \dots a_l}{}_{b_1 \dots b_m} : M \rightarrow \mathbb{C}^{n^{l+m}}$, onde l e m são números inteiros positivos; $a_l = b_m = 0 \dots (n-1)$, onde n é a dimensão da variedade M . A aplicação $\tilde{\chi} : \mathbb{S} \times \mathbb{S}^* \rightarrow \mathbb{C}$ é denominada espinor e é definida por*

$$\tilde{\chi} = \chi^{a_1 \dots a_l}{}_{b_1 \dots b_m} \xi_{a_1} \otimes \dots \otimes \xi_{a_l} \otimes \xi^{b_1} \otimes \dots \otimes \xi^{b_m} \quad (7.15)$$

Esta definição generaliza o conceito de espinor de um índice para um espinor de índice qualquer. Note que estamos cometendo um abuso de linguagem, pois estamos nos referindo a (7.15) por espinor, quando na verdade ele também contém elementos do espaço

co-espinorial. Usando as definições 7.4.1, 7.4.3 e o resultado (7.14), é possível demonstrar que as componentes de espinores de ordem mais alta se transformam como

$$\chi'^{c_1 \dots c_n}_{d_1 \dots d_m} = S^{c_1}_{a_1} \dots S^{c_n}_{a_n} \chi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} (S^{-1})^{b_1}_{d_1} \dots (S^{-1})^{b_m}_{d_m}. \quad (7.16)$$

Ainda podemos generalizar a definição acima para um objeto que tenha tanto um caráter espinorial quanto tensorial. Fazemos isto considerando um produto tensorial entre as bases de $T_P M$, $T_P M^*$, $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}^*$.

Definição 7.4.7 *Sejam $\partial_\mu \in T_P M$, $dx^\mu \in T_P M^*$, $\xi_a \in \mathbb{S}$, $\xi^a \in \mathbb{S}^*$ e a aplicação $(\Upsilon^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s})^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} : M \rightarrow \mathbb{C}^{n^{(l+m+r+s)}}$, onde l, m, r e s são números inteiros positivos; $a_l = b_m = \mu_r = \nu_s = 0 \dots (n-1)$ (n é a dimensão de M). A aplicação $\tilde{\Upsilon} : T_P M \times T_P M^* \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}^* \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por*

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon} = (\Upsilon^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s})^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \\ \otimes \xi_{a_1} \otimes \dots \otimes \xi_{a_l} \otimes \xi^{b_1} \otimes \dots \otimes \xi^{b_m}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

O objeto definido acima é visivelmente intrínseco, ou seja, invariante tanto por transformações de coordenadas quanto por rotação nas tetradas.

7.4.2 Conexão espinorial

O que fizemos até agora deixa claro que, para um dado ponto p da variedade M , temos uma estrutura espinorial definida, ou seja, além de $T_P M$ e $T_P M^*$, temos também $\mathbb{S}_p$ e $\mathbb{S}_p^*$. Mas se sairmos de um ponto $p \in M$ para $q \in M$ através de uma curva, como os elementos de $\mathbb{S}_p$ e $\mathbb{S}_p^*$ variam? Do capítulo 2, já sabemos como os elementos de $T_P M$ e $T_P M^*$ variam. Para sabermos como os elementos de $\mathbb{S}_p$ e $\mathbb{S}_p^*$ variam, seguiremos um procedimento similar ao adotado no capítulo 2. Considere a seguinte definição:

Definição 7.4.8 *Sejam dois espinores $\tilde{\chi}$ e $\tilde{\psi}$, duas funções f e $g \in C^\infty$, e dois vetores $V, U \in T_P M$. Chamamos de conexão espinorial a aplicação $\nabla : TM \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ cujas propriedades são:*

$$\begin{aligned} \nabla_{fV+gU} \tilde{\psi} &= f \nabla_V \tilde{\psi} + g \nabla_U \tilde{\psi}, \\ \nabla_V (\tilde{\psi} + \tilde{\chi}) &= \nabla_V \tilde{\psi} + \nabla_V \tilde{\chi}, \\ \nabla_V (f \tilde{\psi}) &= V[f] \tilde{\psi} + f \nabla_V \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

A expansão desta conexão na base espinorial será indicada⁷ por

$$\nabla_{e_A} \xi_a \equiv \Gamma_{Ab}^a \xi_b. \quad (7.18)$$

A definição (7.18) implica

$$\nabla_{e_A} \xi^a = -\Gamma_{Ab}^a \xi^b. \quad (7.19)$$

A demonstração de (7.19) é muito simples e pode ser encontrada no apêndice D.3.4.

Estamos, agora, em posição de definir a derivada covariante do objeto definido em 7.4.7. Definiremos a ação de ∇ na base $\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \xi_{a_1} \otimes \dots \otimes \xi_{a_l} \otimes \xi^{b_1} \otimes \dots \otimes \xi^{b_m}$ como um tipo de regra de Leibniz.

Definição 7.4.9 *Sejam $V \in TM$ e $\hat{\Upsilon} : TM \times \dots \times TM \times TM^* \times \dots \times TM^* \times \mathbb{S} \times \dots \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}^* \times \dots \times \mathbb{S}^* \rightarrow \mathbb{C}$. A derivada covariante de $\hat{\Upsilon}$ tem a forma*

$$\begin{aligned} \nabla_V \hat{\Upsilon} = & V \left[(\Upsilon^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s})^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} \right] \left(\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes \right. \\ & dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \xi_{a_1} \otimes \dots \otimes \xi_{a_l} \otimes \xi^{b_1} \otimes \dots \otimes \xi^{b_m} \Big) \\ & + (\Upsilon^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s})^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} \nabla_V \left(\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \right. \\ & \left. \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \xi_{a_1} \otimes \dots \otimes \xi_{a_l} \otimes \xi^{b_1} \otimes \dots \otimes \xi^{b_m} \right), \end{aligned}$$

onde $\nabla_V (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \xi_{a_1} \otimes \dots \otimes \xi_{a_l} \otimes \xi^{b_1} \otimes \dots \otimes \xi^{b_m})$ segue a regra de Leibniz. Além disto, a conexão ∇ é dita ser a conexão total e satisfaz todas as propriedades de uma conexão afim⁸.

7.4.3 Leis de transformação da conexão espinorial

Vejamos como a conexão espinorial se transforma frente uma rotação nas tetradas. Sabemos que, frente a transformação $e'^A = \Lambda^A_B e^B$, ξ^a se transforma como $\xi'^a = S^a_b \xi^b$, já ξ_a se transforma como $\xi'_a = \xi_b (S^{-1})^b_a$ e $\partial'_\mu = \partial_\mu$. Por sua vez, as componentes da conexão são dadas por

$$\Gamma_{\mu b}^a = \xi'^a \left(\nabla_\mu \xi'_b \right) = S^a_c \xi^c \left(\nabla_\mu \xi_d (S^{-1})^d_b \right)$$

⁷Alguns autores definem com o sinal negativo [154]. A diferença na definição implicará em um diferença de sinal nas conexões, no caso, uma será igual a menos a outra.

⁸Veja a definição 7.4.8.

$$\begin{aligned}
&= S^a_c \xi^c \left((S^{-1})^d_{b,\mu} \xi_d + (S^{-1})^d_b \Gamma^e_{\mu d} \xi_e \right) \\
&= S^a_c (S^{-1})^c_{b,\mu} + S^a_c (S^{-1})^d_b \Gamma^c_{\mu d} \\
&= S^a_c (S^{-1})^c_{b,\mu} + S^a_c \Gamma^c_{\mu d} (S^{-1})^d_b.
\end{aligned}$$

Em termos matriciais, teremos

$$\Gamma'_\mu = S \Gamma_\mu S^{-1} - S_{,\mu} S^{-1}, \quad (7.20)$$

onde usamos o fato de $SS^{-1}_{,\mu} = -S_{,\mu}S^{-1}$.

Se agora realizarmos uma transformação de coordenadas, teremos $\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu$. Portanto,

$$\Gamma'^a_{\mu b} = \xi^a \left(\nabla_{\mu'} \xi_b \right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \xi^a \left(\nabla_\nu \xi_b \right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \Gamma^a_{\nu b}. \quad (7.21)$$

Perceba que a conexão espinorial se transforma como um vetor frente a transformações de coordenadas. De fato, qualquer conexão afim se transforma como um vetor no índice de derivada. Este fato motiva a seguinte definição:

Definição 7.4.10 *Chamaremos de conexão espinorial 1-forma, a conexão definida por $\Gamma^a_b \equiv \Gamma^a_{\mu b} dx^\mu$, onde $\Gamma^a_{\mu b} = \xi^a(\nabla_\mu \xi_b)$.*

Essa terminologia, “conexão 1-forma”, não se restringe a conexão espinorial.

7.4.4 Conexão na base de tetrada

Neste momento, é importante destacar uma sutileza sobre a conexão afim em M . Como a conexão não é um tensor, as componentes da conexão na base de tetradas **não** são simplesmente $e^A_\lambda e_B{}^\mu e_C{}^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Vejamos como fica estas componentes. Partindo da definição de conexão, teremos

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_A} e_B &= \left(\nabla_{e_A} e_B{}^\mu \partial_\mu \right) = e_B{}^\mu{}_{,A} \partial_\mu + e_B{}^\mu \nabla_{e_A} \partial_\mu = \\
&= e_B{}^\mu{}_{,A} \partial_\mu + e_B{}^\mu \Gamma^\lambda_{A\mu} \partial_\lambda \\
&= (e_B{}^\lambda{}_{,A} + e_B{}^\mu \Gamma^\lambda_{A\mu}) \partial_\lambda \\
&= e_B{}^\lambda{}_{;A} \partial_\lambda
\end{aligned} \quad (7.22)$$

onde fizemos a definição $e_B{}^\lambda{}_{;A} \equiv \langle dx^\lambda, \nabla_{e_A} e_B{}^\mu \partial_\mu \rangle$. Na verdade, adotaremos a convenção de que o ponto-e-vírgula representa a componente da derivada que atua apenas na base

coordenada, $\{\partial_\mu\}$. Outra definição que também faremos e que é muito usado na literatura, é denotar a componente da conexão na base de tetradas por $\omega^C_{AB} \equiv \langle e^C, \nabla_{e_A} e_B \rangle$. Portanto, $\omega^C_{AB} = e^C_\lambda \langle dx^\lambda, \nabla_{e_A} e_B \rangle$ que, com o uso de (7.22), tem a forma

$$\omega^C_{AB} = e^C_\lambda e_B{}^\lambda{}_{;A}. \quad (7.23)$$

Um fato⁹ interessante sobre as tetradas consiste no resultado de que, definindo o objeto intrínseco $e \equiv e_A{}^\mu e^A \otimes \partial_\mu$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_{e_B} e &= (e_A{}^\mu{}_{;B} e^A \otimes \partial_\mu + e_A{}^\mu [-\omega^A_{BC} e^C \otimes \partial_\mu + e^A \otimes \Gamma^\lambda_{B\mu} \partial_\lambda]) \\ &= (e_C{}^\lambda{}_{;B} + \Gamma^\lambda_{B\nu} e_C{}^\nu - \omega^A_{BC} e_A{}^\lambda) e^C \otimes \partial_\lambda \\ &= (e_C{}^\lambda{}_{;B} - \omega^A_{BC} e_A{}^\lambda) e^C \otimes \partial_\lambda \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.24)$$

onde usamos (7.23) da penúltima para a última linha. Vejamos qual é a cara das componentes da derivada covariante do vetor V na base de tetrada $\{e_A\}$.

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{e_A} V^B e_B \right) &= V^B{}_{;A} e_B + \omega^C_{AB} V^B e_C \\ &= (V^C{}_{;A} + \omega^C_{AB} V^B) e_C \\ &\equiv V^C{}_{|A} e_C. \end{aligned}$$

Estamos adotando a seguinte notação. O ponto-e-vírgula “;” indica a componente da derivada covariante apenas com relação a ∂_μ , enquanto que a barra “|” indica a componente da derivada covariante com relação a todos os tipos de base. No formalismo de componentes, isto seria equivalente a dizer que o ponto-e-vírgula atua apenas nos índices coordenados, enquanto que a barra atua em todos os índices.

7.4.5 Matrizes de Dirac em espaços curvos

Na mecânica quântica relativística formulada no espaço tempo de Minkowski e em coordenadas cartesianas, é fundamental que as matrizes de Dirac, que a partir de agora serão denotadas por γ^A , satisfaçam (7.5). Por esta razão, admitiremos que existe um conjunto de matrizes $\gamma^\mu(x)$ *s* que satisfazem a condição

⁹Embora alguns autores erroneamente apresentem (7.24) como uma condição extra [155], (7.24) é apenas uma identidade, como destacado em [7], página 27.

$$\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x)\gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (7.25)$$

onde de agora em diante omitiremos a identidade $\mathbb{I}$ que aparece no lado direito de (7.25). Sabemos que as matrizes de Dirac γ^A também satisfazem uma relação similar, no caso,

$$\gamma^A\gamma^B + \gamma^B\gamma^A = 2n^{AB}. \quad (7.26)$$

Das equações (7.26) e (7.25), vemos que uma maneira muito natural de definirmos as matrizes de Dirac em espaços curvos é

$$\gamma^\mu \equiv e_A{}^\mu \gamma^A, \quad (7.27)$$

pois, esta definição satisfaz tanto (7.25) quanto (7.26), além de estarmos interessados em uma definição para $\gamma^\mu(x)$ que assegure a invariância de certos termos por mudanças de base. Exemplo: $\gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^A\partial_A \longrightarrow \gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^A e_A{}^\nu\partial_\nu$, o que implica naturalmente na definição (7.27). De maneira geral, podemos expressar esta idéia da seguinte forma: estamos interessados em construir invariantes a partir da contração do índice μ de γ^μ com a componente de tensores, F_μ por exemplo. Como a componente do tensor F_μ na base $e_A{}^\mu$ é F_A , um termo do tipo $\gamma^\mu F_\mu$ só será invariante por transformação de coordenadas se $\gamma^A = e_A{}^\mu \gamma^\mu$ for γ^μ nesta base.

Como as matrizes de Dirac γ^A são invariantes frente a transformações de coordenadas, elas são constantes, então, é fácil ver que frente a transformações de coordenadas, os γ^μ s se transformam como vetores. Siga o raciocínio: como e_A não muda, então $e'_A{}^\mu\partial'_\mu = e_A{}^\mu\partial_\mu$. Isto leva a $e'_A{}^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu = e_A{}^\mu\partial_\mu$ ou, equivalentemente, $e'_A{}^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = e_A{}^\nu \longrightarrow e'_A{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}e_A{}^\nu$. De (7.27), vemos que é inevitável concluir que os γ^μ s se transformam como vetores frente a transformações de coordenada, ou seja,

$$\gamma'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \gamma^\nu. \quad (7.28)$$

O leitor interessado em uma abordagem vetorial das matrizes γ^μ s pode consultar [156] e referências dentro deste, em especial as de *Hestenes*.

7.4.6 Geradores da Álgebra de Clifford

A álgebra de Clifford para uma variedade quadridimensional tem cinco geradores, a saber, $\{\mathbb{I}, \gamma^A, \frac{i}{2}[\gamma^A, \gamma^B], -\frac{1}{3!}\varepsilon^A_{BCD} \gamma^B \gamma^C \gamma^D, -\frac{i}{4!}\varepsilon_{ABCD} \gamma^A \gamma^B \gamma^C \gamma^D\}$; os dois últimos também são frequentemente indicados por $\gamma^{(5)}\gamma^A$ e $\gamma^{(5)} = i\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)}$, respectivamente. A generalização para um espaço de dimensão par n é trivial. Neste caso, teremos¹⁰

$$\begin{aligned} \Gamma_m^d \equiv \{ & \mathbb{I}, \gamma^A, \gamma^{A_1}\gamma^{A_2} (A_1 < A_2), \dots, \\ & \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_k} (A_1 < \dots < A_k), \dots, \\ & \gamma^{(0)} \dots \gamma^{(n-1)} \}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

onde os índices A_i vão de 0 até $n-1$, m indica os elementos separados por vírgulas e d os diferentes elementos entre cada vírgula; $\Gamma_2^1 = \gamma^{(0)}$, $\Gamma_3^1 = \gamma^{(0)}\gamma^{(1)}$ por exemplo. Por conveniência, iremos adotar mais adiante $\frac{i}{2}[\gamma^A, \gamma^B]$ para representar Γ_3^d . Além disto, estamos omitindo alguns fatores i nos coeficientes dos elementos em (7.29). Todavia, para o que queremos este fator não é relevante uma vez que isto só mudará o sinal de $\Gamma_m^d \Gamma_m^d$. Nosso interesse é basicamente o de sermos capazes de expandir certas matrizes em termos dos Γ_m^d .

Pode-se demonstrar que as matrizes Γ_m^d satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\Gamma_m^d \Gamma_m^d = \pm \mathbb{I}$.
2. Para $m \neq 1$, o traço dos geradores é nulo, isto é, $Tr[\Gamma_m^d] = 0$ (veja a demonstração no apêndice D.3.6).
3. A álgebra desses geradores é fechada, ou seja, $\Gamma_l^p \Gamma_m^d = \alpha \Gamma_r^s$, onde α é um múltiplo de $\pm i$ ou de ± 1 .
4. Os geradores Γ_r^s são linearmente independentes.

Para sabermos quantos elementos linearmente independentes temos em (7.29), basta contarmos a quantidade de elementos em Γ_r^s . Embora não pareça, fazer isto é fácil. Está claro em (7.29) que só há um elemento em Γ_1^s , n em Γ_2^s . De maneira geral, estamos distribuindo n números em k índices, sem distinguir a ordem¹¹ dos índices, logo o termo

¹⁰Para maiores detalhes, veja [39], seção 12.6.1; as notas de aula [157] ou [158].

¹¹Isto porque, como os elementos com os mesmos índices são linearmente dependentes, $\gamma^0\gamma^1\gamma^3$ e $\gamma^0\gamma^3\gamma^1$ por exemplo, impomos, para evitar redundância, a ordem $A_1 < A_2 \dots$.

Γ_{k+1}^d tem $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ elementos independentes ($d = 1, \dots, \frac{n!}{k!(n-k)!}$). Portanto, o número total de Γ_m^d é $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n$. Deste fato segue que qualquer matriz $A \in \mathbb{C}^{2^{n/2} \times 2^{n/2}}$ pode ser expandida em termos dos Γ_m^d . Perceba que para $n \geq 4$, vale a desigualdade $2^n \geq n^2$. Isto tem um significado muito forte, pois quando formos trabalhar com os espinores em um espaço-tempo de dimensão maior ou igual a quatro, poderemos expandir qualquer matriz $n \times n$ nessa base sem preocupação. A demonstração de que Γ_m^d são linearmente independentes encontra-se no apêndice D.3.7. Abaixo segue um produto entre as matrizes Γ_2^r e Γ_3^r que será de muita importância mais adiante.

$$[\gamma^A \gamma^B, \gamma^C] = 2(\delta_D^B \delta_F^A - \delta_D^A \delta_F^B) \eta^{DC} \gamma^F. \quad (7.30)$$

Para maiores detalhes sobre a álgebra de Clifford, o leitor é direcionado a [157, 156, 159, 158].

7.4.7 Condição de covariância sobre os $\gamma^\mu s$

Por razões óbvias, as condições de covariância que serão impostas aos $\gamma^\mu s$ serão válidas para qualquer teoria que envolva estas matrizes, ou seja, serão válidas para as duas abordagens que faremos ao final deste capítulo. Em termos práticos, seja para garantir a invariância de (7.10) ou da lagrangiana de Dirac, só falta garantir a invariância do termo $[(\gamma^\mu)^a_b (\nabla_\mu \psi)^b] \xi_a$.

Como a conexão foi definida de forma intrínseca, sua componente $(\nabla_V \tilde{\psi})^b$ se transforma como

$$(\nabla_V \tilde{\psi})'^b = S^b_c (\nabla_V \tilde{\psi})^c. \quad (7.31)$$

Além disto, sabemos como ξ_a se transforma (veja a definição 7.4.1) e que, frente a transformações de coordenadas, $\gamma'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \gamma^\nu$. Usando estas transformações, fica fácil determinar como γ^μ deve se transformar. Primeiramente, já está claro que frente a transformações de coordenadas, o termo $[(\gamma^\mu)^a_b (\nabla_\mu \psi)^b] \xi_a$ é covariante. Basta, então, verificarmos as condições de invariância frente a rotação nas tetradas. Neste caso, diante de $e'^A = \Lambda^A_B e^B$ queremos que¹² $[(\gamma'^\mu)^a_b (\nabla_\mu \psi)^b] \xi'_a = [(\gamma^\mu)^a_b (\nabla_\mu \psi)^b] \xi_a$. Impondo esta condição, teremos

¹²Perceba que frente a uma rotação nas tetradas, a base coordenada não muda, ou seja, $\partial'_\mu = \partial_\mu$ (veja os comentários ao final da seção 7.3)

$$\begin{aligned} \left[(\gamma'^\mu)^a_b (\nabla_\mu \psi)^b \right] \xi'_a &= \left[(\gamma'^\mu)^a_b S^b_c (\nabla_\mu \psi)^c \right] (S^{-1})^d_a \xi_d \\ &= \left[(S^{-1})^d_a (\gamma'^\mu)^a_b S^b_c (\nabla_\mu \psi)^c \right] \xi_d. \end{aligned}$$

Portanto, descobrimos que frente rotação nas tetradas, as matrizes γ'^μ devem satisfazer

$$(\gamma'^\mu)^a_b = (S^{-1})^d_a (\gamma'^\mu)^a_b S^b_c. \quad (7.32)$$

Em termos matriciais,

$$\gamma'^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S. \quad (7.33)$$

Invertendo, teremos

$$\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}. \quad (7.34)$$

Temos que $\gamma^\mu = e_A^\mu \gamma^A$ e $\gamma'^\mu = e_B'^\mu \gamma^B$. Substituindo estes elementos na expressão acima, teremos

$$e_B'^\mu \gamma^B = S e_B^\mu \gamma^B S^{-1}. \quad (7.35)$$

Sabemos que $e_B' = \Lambda_B^C e_C \rightarrow e_B'^\mu = \Lambda_B^C e_C^\mu$. Como $\Lambda^A_B \Lambda_A^C = \delta_C^B$ (isto advém de $e_A' e'^A = e_A e^A$), teremos $e_D^\mu = \Lambda^B_D e_B'^\mu$. Substituindo na expressão acima,

$$e_B'^\mu \gamma^B = \Lambda^C_B e_C'^\mu S \gamma^B S^{-1}. \quad (7.36)$$

Contraindo com e'^D_μ , obtemos

$$\gamma^D = \Lambda^D_B S \gamma^B S^{-1}. \quad (7.37)$$

Multiplicando a expressão acima por S^{-1} pela esquerda e S pela direita, chegamos a

$$S^{-1} \gamma^D S = \Lambda^D_B \gamma^B. \quad (7.38)$$

Contraindo esta expressão com e_D^μ segue também que

$$S^{-1} e_D^\mu \gamma^D S = e_D^\mu \Lambda^D_\nu \gamma^\nu \Rightarrow S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu.$$

As transformações (7.28) e (7.34) motivam a seguinte definição:

Definição 7.4.11 *Sejam as bases $\{\partial_\mu\} \in TM$, $\{\xi_a\} \in \mathbb{S}$, $\{\xi^a\} \in \mathbb{S}^*$ e as funções $(\gamma^\mu)^a_b : M \rightarrow \mathbb{C}^{n^3}$. A aplicação $\tilde{\gamma} : TM \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}^* \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por*

$$\tilde{\gamma} \equiv (\gamma^\nu)^a_b \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b. \quad (7.39)$$

Das definições 7.4.11, 7.4.9 e 7.4.8, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_{e_A} \tilde{\gamma} &= \nabla_{e_A} [(\gamma^\mu)^a_b \partial_\mu \otimes \xi_a \otimes \xi^b] = (\gamma^\mu)^a_{b,A} \partial_\mu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \\ &+ (\gamma^\mu)^a_b \nabla_{e_A} (\partial_\mu \otimes \xi_a \otimes \xi^b) = (\gamma^\mu)^a_{b,A} \partial_\mu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \\ &+ (\gamma^\mu)^a_b \left[\left(\nabla_{e_A} \partial_\mu \right) \otimes \xi_a \otimes \xi^b + \partial_\mu \otimes \left(\nabla_{e_A} \xi_a \right) \otimes \xi^b \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \otimes \xi_a \otimes \nabla_{e_A} \xi^b \right]. \end{aligned}$$

Em termos da base coordenada, a conexão afim da variedade M (espaço-tempo) é expressa na forma $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \langle dx^\lambda, \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \rangle$. Assim, teremos

$$\nabla_{e_A} \tilde{\gamma} = \left[(\gamma^\lambda)^a_{b,A} + (\gamma^\mu)^a_b \Gamma^\lambda_{A\mu} + (\gamma^\lambda)^c_b \Gamma^a_{Ac} - (\gamma^\lambda)^a_c \Gamma^c_{Ab} \right] \partial_\lambda \otimes \xi_a \otimes \xi^b. \quad (7.40)$$

Em termos das componentes, teremos

$$(\gamma^\lambda)^a_{b|A} = (\gamma^\lambda)^a_{b,A} + (\gamma^\mu)^a_b \Gamma^\lambda_{A\mu} + (\gamma^\lambda)^c_b \Gamma^a_{Ac} - (\gamma^\lambda)^a_c \Gamma^c_{Ab} \quad (7.41)$$

que, matricialmente, toma a forma

$$\gamma^\lambda_{|A} = \gamma^\lambda_{,A} + \gamma^\mu \Gamma^\lambda_{A\mu} + \Gamma_A \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \Gamma_A. \quad (7.42)$$

7.4.8 Conexão espinorial em um espaço com torção e não-metricidade

As condições que foram impostas até agora à conexão espinorial não são suficientes para defini-la. Nesta seção, porém, daremos as condições finais para determiná-la univocamente. Infelizmente, precisaremos fazer algumas considerações para alcançar esse objetivo.

Para um espaço de dimensão n , com torção e cuja conexão não é compatível com a métrica, teremos

$$\nabla_V g(W, U) = N(W, U, V), \quad (7.43)$$

onde N é o tensor de não-metricidade. Podemos reescrever (7.25) na forma

$$\begin{aligned} & [(\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b + (\gamma^\nu)^a_c (\gamma^\mu)^c_b] \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \\ & = 2g^{\mu\nu} \delta^a_b \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \Rightarrow \\ & \tilde{\chi} = 2\tilde{g}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

onde $\tilde{g} \equiv g^{\mu\nu} \delta^a_b \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b$ e $\tilde{\chi} \equiv [(\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b + (\gamma^\nu)^a_c (\gamma^\mu)^c_b] \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b$. A derivada de $\tilde{\chi}$ pode ser expressa como (veja a demonstração no apêndice D.3.10)

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \tilde{\chi} = & \left[(\gamma^\mu)^a_{c|\lambda} (\gamma^\nu)^c_b + (\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_{b|\lambda} \right. \\ & \left. + (\gamma^\nu)^a_{c|\lambda} (\gamma^\mu)^c_b + (\gamma^\nu)^a_c (\gamma^\mu)^c_{b|\lambda} \right] \eta_{\mu\nu a}^b, \end{aligned} \quad (7.45)$$

onde estamos usando a notação $\eta_{\mu\nu a}^b \equiv \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b$, e $(\gamma^\mu)^a_{c|\lambda}$ são as componentes da derivada covariante de $\tilde{\gamma}$ na base coordenada.

Derivando (7.44) e usando (7.45) (veja D.3.10), chegamos a

$$\{\gamma^\mu_{|\lambda}, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu_{|\lambda}\} = 2g^{\mu\nu}_{|\lambda}. \quad (7.46)$$

Seguindo os cálculos em D.3.11, a expressão (7.46) pode ser escrita em termos da não-metricidade na seguinte forma

$$\{\gamma^\mu_{|\lambda}, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu_{|\lambda}\} = -2N^{\mu\nu}_\lambda. \quad (7.47)$$

Com o intuito de obtermos uma expressão para $\gamma^\mu_{|\lambda}$, poderíamos pensar em expandir $\gamma^\mu_{|\lambda}$ em termos dos geradores da álgebra de Clifford e então obtermos uma expressão geral que satisfaça (7.47). Entretanto, pode-se verificar que esta expansão seria tão geral que teria muitos termos arbitrários. Tomando, por exemplo, $\gamma^\mu_{|\lambda} = [V_\lambda, \gamma^\mu] - \frac{1}{2}N^\mu_{\nu\lambda}\gamma^\nu$, onde V_λ é uma matriz $n \times n$ qualquer, veríamos que (7.47) é satisfeita. Por simplicidade¹³, escolheremos $\gamma^\mu_{\nu|\lambda} = -\frac{1}{2}N^\mu_{\nu\lambda}\gamma^\nu$, que é uma condição suficiente, porém não necessária, para que a expressão (7.47) seja válida. Vamos fazer esta escolha e seguir em busca de uma fórmula que determine a conexão espinorial de forma unívoca, ou seja, a forma geral de Γ_λ para a escolha $\gamma^\mu_{\nu|\lambda} = -\frac{1}{2}N^\mu_{\nu\lambda}\gamma^\nu$. Vale apenas enfatizar que a equação (7.47) não fixa a conexão espinorial, porém a escolha $\gamma^\mu_{\nu|\lambda} = -\frac{1}{2}N^\mu_{\nu\lambda}\gamma^\nu$ fixa. De (7.42), vemos que esta escolha implica

¹³Relembrando os comentários ao final da seção 7.2, vemos que o princípio do acoplamento mínimo na geometria riemanniana leva a troca de $\partial_\alpha \gamma^\mu = 0$ por $\nabla_\alpha \gamma^\mu = 0$.

$$\gamma^\lambda_{;\alpha} + \gamma^\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} + \Gamma_\alpha \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \Gamma_\alpha = -\frac{1}{2} N^\lambda_{B\alpha} \gamma^B. \quad (7.48)$$

Temos que $\gamma^\lambda_{;\alpha} + \gamma^\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} = e_A^\lambda_{;\alpha} \gamma^A + \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} e_A^\mu \gamma^A = e_A^\lambda_{;\alpha} \gamma^A$, onde $e_A^\lambda_{;\alpha} \equiv e_A^\lambda_{;\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} e_A^\mu$. Podemos, então, reescrever (7.48) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_A^\lambda_{;\alpha} \gamma^A + [\Gamma_\alpha, \gamma^\lambda] &= -\frac{1}{2} N^\lambda_{B\alpha} \gamma^B \Rightarrow \\ \Rightarrow [\Gamma_\alpha, \gamma^\lambda] &= -\frac{1}{2} (N^\lambda_{A\alpha} + 2e_A^\lambda_{;\alpha}) \gamma^A \end{aligned} \quad (7.49)$$

Como as matrizes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ são matrizes $n \times n$ e em um espaço-tempo de dimensão n há 2^n geradores da álgebra de Clifford linearmente independentes, podemos expandir os Γ_μ s em termos destes geradores no caso $n \geq 4$ (para $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$). Na verdade, a única dimensão na qual esta expansão não seria admissível seria $n = 3$, pois $2^3 = 8 < 9$. Para resolvermos a equação (7.49) de forma geral, basta usarmos o lema de Schur (veja o apêndice D.3.8). Neste caso, tornar-se conveniente escrevermos

$$\Gamma_\alpha = \mathbb{B}_\alpha + b_{\alpha AB} [\gamma^A, \gamma^B], \quad (7.50)$$

onde $\mathbb{B}_\alpha$ é tão geral quanto queiramos, e $b_{\alpha AB}$ deve ser tal que o termo do lado direito de (7.49) seja cancelado. O comutador $[\gamma^A, \gamma^B]$ com A e B arbitrários representa o gerador $\gamma^A \gamma^B$, que escrito dessa forma requer a restrição $A < B$. Abaixo segue o cálculo para determinar $b_{\alpha AB}$. Para que $b_{\alpha AB}$ cancele o termo do lado direito de (7.49), precisamos que

$$b_{\alpha AB} [\gamma^A \gamma^B - \gamma^B \gamma^A, \gamma^\lambda] = -\frac{1}{2} (N^\lambda_{A\alpha} + 2e_A^\lambda_{;\alpha}) \gamma^A \quad (7.51)$$

Contraindo com e^C_λ , a expressão acima fica

$$b_{\alpha AB} ([\gamma^A \gamma^B, \gamma^C] - [\gamma^B \gamma^A, \gamma^C]) = -\frac{1}{2} (N^C_{A\alpha} + 2e^C_\lambda e_A^\lambda_{;\alpha}) \gamma^A \quad (7.52)$$

Fazendo uso de 7.30, podemos obter $b_{\alpha AB}$ da seguinte forma.

$$\begin{aligned} b_{\alpha AB} ([\gamma^A \gamma^B, \gamma^C] - [\gamma^B \gamma^A, \gamma^C]) &= 2b_{\alpha AB} [\gamma^A \gamma^B, \gamma^C] \\ &= 4b_{\alpha AB} (\delta_D^B \delta_F^A - \delta_D^A \delta_F^B) \eta^{DC} \gamma^F \\ &= 4(b_{\alpha FD} - b_{\alpha DF}) \eta^{DC} \gamma^F \\ &= 8b_{\alpha FD} \eta^{DC} \gamma^F \\ &= 8b_{\alpha F}{}^C \gamma^F, \end{aligned}$$

onde fizemos uso da anti-simetria dos índices A e B de $b_{\alpha AB}$ da terceira para a quarta linha. Comparando a igualdade acima com (7.52), segue

$$b_{\alpha AC} = -\frac{1}{16} (N_{CA\alpha} + 2e_{C\lambda}e_A^\lambda{}_{;\alpha}) \quad (7.53)$$

Pode não parecer, mas o termo do lado direito na expressão acima é anti-simétrico. A demonstração desse resultado encontra-se no apêndice D.3.12. Portanto, com $b_{\alpha AC}$ dado dessa forma, a equação (7.49) fica

$$[\mathbb{B}_\alpha, \gamma^\lambda] = 0. \quad (7.54)$$

Do lema de Schur, concluímos que $\mathbb{B}_\alpha = A_\alpha \mathbb{I}$. Assim, (7.50) fica

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= A_\alpha \mathbb{I} - \frac{1}{16} (N_{BA\alpha} + 2e_{B\lambda}e_A^\lambda{}_{;\alpha}) [\gamma^A, \gamma^B] \\ &= A_\alpha \mathbb{I} - \frac{1}{8} e_{B\lambda}e_A^\lambda{}_{;\alpha} [\gamma^A, \gamma^B] \\ &= A_\alpha \mathbb{I} + \frac{1}{8} e_{A\lambda}e_B^\lambda{}_{;\alpha} [\gamma^A, \gamma^B] \\ &= A_\alpha \mathbb{I} + \frac{1}{8} \omega_{A\alpha B} [\gamma^A, \gamma^B] \\ &= A_\alpha \mathbb{I} - \frac{i}{4} \omega_{A\alpha B} \sigma^{AB} \end{aligned} \quad (7.55)$$

onde $\sigma^{AB} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^A, \gamma^B]$, e $\omega_{A\alpha B}$ é a conexão afim do espaço-tempo na base de tetradas, ou seja, $\omega_{A\alpha B} = \eta_{AC} \langle e^C, \nabla_\alpha e_B \rangle$ (veja a sub-seção 7.4.4). O termo A_α é geralmente associado com o 4-potencial vetor do campo eletromagnético e, portanto, sua parte imaginária pode ser omitida sempre que o problema tratado não contiver campos eletromagnéticos. Na verdade, este termo é problemático, pois ele não distingue as diferentes cargas [159] e, portanto, não permite uma descrição correta do electromagnetismo. Aqui, vale lembrar que ";" indica a parte da componente da derivada covariante que contém apenas a derivada usual e a conexão afim $\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda$, ou seja, $e_A^\lambda{}_{;\alpha} = e_A^\lambda{}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda e_A^\nu{}_{,\alpha}$. No caso, a componente da derivada covariante como um todo é representada pela barra "|".

7.4.9 Conexão espinorial dada em termos da contorção e do tensor de não metricidade

Para escrever (7.55) em termos do tensor de contorção e de não-metricidade, basta lembrar que $e_{B\nu;\alpha} = e_{B\nu,\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda e_{B\lambda}$, onde a conexão afim $\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda = \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda + \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda + K_{\alpha\nu}^\lambda$, sendo

$\overset{c}{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}$ o símbolo de Christoffel, $\overset{n}{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}$ a parte da conexão associada com a não-metricidade e $K^{\lambda}_{\alpha\nu}$ a contorção. Assim, (7.55) pode ser reescrita como

$$\Gamma_{\alpha} = A_{\alpha}\mathbb{I} + \frac{1}{8} \left(e_B^{\lambda}_{,\alpha} + \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda} e_B^{\mu} + \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda} e_B^{\mu} + K^{\lambda}_{\alpha\mu} e_B^{\mu} \right) [\gamma_{\lambda}, \gamma^B] \quad (7.56)$$

O termo $\overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda} [\gamma_{\lambda}, \gamma^{\mu}]$ em (7.56) quando contraindo com γ^{α} pela esquerda é equivalente a (veja a sub-seção D.3.13 do apêndice)

$$\overset{n}{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda} \gamma^{\alpha} [\gamma_{\lambda}, \gamma^{\nu}] = -2 (N^{\alpha}_{\alpha\nu} - N_{\nu}^{\alpha}) \gamma^{\nu}. \quad (7.57)$$

Assim, é conveniente escrevermos

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha} \Gamma_{\alpha} &= A_{\alpha} \gamma^{\alpha} + \frac{1}{8} \left(e_B^{\lambda}_{,\alpha} + \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda} e_B^{\mu} \right) \gamma^{\alpha} [\gamma_{\lambda}, \gamma^B] \\ &\quad + \frac{1}{8} K_{\lambda\alpha\mu} \gamma^{\alpha} [\gamma^{\lambda}, \gamma^{\mu}] - \frac{1}{4} (N^{\alpha}_{\alpha\nu} - N_{\nu}^{\alpha}) \gamma^{\nu}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Para o caso particular da geometria de Weyl, $N_{\mu\nu\alpha} = \sigma_{\alpha} g_{\mu\nu}$, teremos

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha} \Gamma_{\alpha} &= A_{\alpha} \gamma^{\alpha} + \frac{1}{8} \left(e_B^{\lambda}_{,\alpha} + \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda} e_B^{\mu} \right) \gamma^{\alpha} [\gamma_{\lambda}, \gamma^B] \\ &\quad + \frac{1}{8} K_{\lambda\alpha\mu} \gamma^{\alpha} [\gamma^{\lambda}, \gamma^{\mu}] - \frac{1}{4} (n-1) \sigma_{\nu} \gamma^{\nu}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

A conexão espinorial expressa desta forma será importante para o que faremos nas seções 7.5, 7.6 e 7.7.

7.4.10 Obtendo a matriz S

Sabemos que uma rotação nas tetradas dada por $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ leva a uma transformação nos espinores $S \in L_+^{\uparrow}$. Para obtermos a forma explícita de S , usamos o fato de que as transformações finitas de $L_+^{\uparrow}$ podem ser obtidas por iteração de transformações infinitesimais, sub-seção D.3.3. Desta forma, começamos com a seguinte transformação infinitesimal.

$$\Lambda^A_B = \delta^A_B + \epsilon^A_B, \quad (7.60)$$

$$(\Lambda^{-1})^A_B = \delta^A_B - \epsilon^A_B. \quad (7.61)$$

Como $e'_A e'^A = e_A e^A$, temos $\Lambda^A_B \Lambda_{AC} = \eta_{BC}$. Este resultado junto com (7.60) leva a $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$. Associado as transformações (7.60) e (7.61), teremos

$$S = \mathbb{I} - i\epsilon_{AB} \epsilon^{AB}, \quad (7.62)$$

$$S^{-1} = \mathbb{I} + i\epsilon_{AB} \epsilon^{AB}, \quad (7.63)$$

onde ε_{AB} é obviamente uma matriz, isto é, $(\varepsilon_{AB})^a_b$. Perceba que (7.62) e (7.63) são expressões bem gerais para as transformações infinitesimais e que, devido a anti-simetria de ϵ_{AB} , ε_{AB} é tomado como anti-simétrico. Substituindo (7.62), (7.63) e (7.60) em (7.38), segue

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + i\varepsilon_{AB}\epsilon^{AB}) \gamma^D (\mathbb{I} - i\varepsilon_{AB}\epsilon^{AB}) &= (\delta^D_A + \epsilon^D_A) \gamma^A \Rightarrow \\ \cancel{\gamma^D} - i\gamma^D \varepsilon_{AB} \epsilon^{AB} + i\varepsilon_{AB} \gamma^D \epsilon^{AB} &= \cancel{\gamma^D} + \epsilon^D_A \gamma^A \Rightarrow \\ i\epsilon^{AB}[\varepsilon_{AB}, \gamma^D] &= \epsilon^D_A \gamma^A, \end{aligned} \quad (7.64)$$

onde estamos desprezando os termos não lineares em ϵ^{AB} . Sem perda de generalidade, podemos escrever $\epsilon^{AB}\varepsilon_{AB}$ na forma

$$\epsilon^{AB}\varepsilon_{AB} = \mathbb{B} + a_{AB}[\gamma^A, \gamma^B], \quad (7.65)$$

onde $\mathbb{B}$ é uma matriz $n \times n$. Podemos escolher a_{AB} de tal forma que ele cancele o lado direito de (7.64), como feito anteriormente. Neste caso, segue

$$ia_{AB}[\gamma^A \gamma^B, \gamma^D] = \epsilon^D_A \gamma^A.$$

Usando (7.30),

$$\begin{aligned} 2ia_{AB}(\delta^B_E \delta^A_F - \delta^A_E \delta^B_F) \eta^{ED} \gamma^F &= \epsilon^D_A \gamma^A \Rightarrow \\ 4ia_{FE} \eta^{ED} &= \epsilon^D_F \Rightarrow \\ 4ia_{FD} &= \epsilon_{DF} \Rightarrow \\ a_{FD} &= -\frac{i}{4} \epsilon_{DF} \Rightarrow \\ a_{FD} &= \frac{i}{4} \epsilon_{FD}, \end{aligned}$$

onde usamos a anti-simetria de a_{AB} da primeira para a segunda linha, e a anti-simetria de ϵ_{FD} na última linha. Usando o lema de Schur mais uma vez, vemos que $\epsilon^{AB}\varepsilon_{AB}$ ficará

$$\epsilon^{AB}\varepsilon_{AB} = a\mathbb{I} + \frac{i}{8}\epsilon_{AB}[\gamma^A, \gamma^B].$$

Sem perda de generalidade, podemos definir $a \equiv \epsilon^{AB}\lambda_{AB}$, onde $\lambda_{AB} = -\lambda_{BA}$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} \epsilon^{AB}\varepsilon_{AB} &= \epsilon^{AB}\lambda_{AB}\mathbb{I} + \frac{i}{8}\epsilon_{AB}[\gamma^A, \gamma^B] \Rightarrow \\ \varepsilon_{AB} &= \lambda_{AB}\mathbb{I} + \frac{i}{8}[\gamma_A, \gamma_B]. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Substituindo (7.66) em (7.62),

$$S = \mathbb{I} - i \left(\lambda_{AB} \mathbb{I} + \frac{i}{8} [\gamma_A, \gamma_B] \right) \epsilon^{AB} \quad (7.67)$$

A matriz S deve ser tal que $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$. Assim, para obtermos uma transformação finita, basta aplicarmos as transformações infinitesimais infinitas vezes. Supõe-se que $\epsilon^{AB} = \bar{\epsilon}^{AB}/N$, onde $\bar{\epsilon}^{AB}$ é finito, e então toma-se o limite

$$\begin{aligned} S &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathbb{I} - i \left(\lambda_{AB} \mathbb{I} + \frac{i}{8} [\gamma_A, \gamma_B] \right) \frac{\bar{\epsilon}^{AB}}{N} \right]^N = e^{-i(\lambda_{AB} \mathbb{I} + \frac{i}{8} [\gamma_A, \gamma_B]) \bar{\epsilon}^{AB}} \\ &= e^{-i\lambda_{AB} \bar{\epsilon}^{AB} \mathbb{I}} e^{-\frac{i}{4} \sigma_{AB} \bar{\epsilon}^{AB}} \end{aligned} \quad (7.68)$$

fazendo o mesmo para a inversa,

$$S^{-1} = e^{i\lambda_{AB} \bar{\epsilon}^{AB} \mathbb{I}} e^{\frac{i}{4} \sigma_{AB} \bar{\epsilon}^{AB}}, \quad (7.69)$$

onde usamos o fato da identidade comutar¹⁴ com $\sigma_{AB} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_A, \gamma_B]$. É interessante destacar que na literatura, por alguma razão, o termo λ_{AB} é simplesmente tomado como nulo. Não faremos essa hipótese aqui. De fato, mais adiante exigiremos que ele seja um número real.

As exponenciais em (7.68) e (7.69) são simbólicas, afinal, o que seria $2,718281828$ elevado a uma matriz? O que estas exponenciais representam é uma expansão igual àquela da exponencial, ou seja, se $\mathbb{A}$ é uma matriz, então

$$e^{\mathbb{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}. \quad (7.70)$$

De forma explícita, as expressões (7.68) e (7.69), ficam

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda_{AB} \bar{\epsilon}^{AB})^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{i}{4} \sigma_{AB} \bar{\epsilon}^{AB})^m}{m!}, \quad (7.71)$$

$$S^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\lambda_{AB} \bar{\epsilon}^{AB})^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{i}{4} \sigma_{AB} \bar{\epsilon}^{AB})^m}{m!}. \quad (7.72)$$

Aplicando “ $\dagger$ ” na expressão (7.71) e usando o fato de $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$, teremos

$$S^\dagger = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\lambda_{AB} \bar{\epsilon}^{AB})^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{4} \sigma_{AB}^\dagger \bar{\epsilon}^{AB}\right)^m}{m!}, \quad (7.73)$$

onde admitimos que $\lambda_{AB} \in \mathbb{R}$. Usando a propriedade $\gamma^{(0)} \gamma_A^\dagger \gamma^{(0)} = \gamma_A$, segue que (veja a demonstração em D.3.14)

$$\gamma^{(0)} \sigma_{AB}^\dagger \gamma^{(0)} = \sigma_{AB}. \quad (7.74)$$

¹⁴Se A comuta com B , então $e^{A+B} = e^A e^B$ (veja, por exemplo Ref. [160], p. 21).

Multiplicando a expressão (7.73) por $\gamma^{(0)}$ pela esquerda e pela direita, usando (7.74) e comparando com (7.72), chegamos a seguinte propriedade¹⁵

$$\gamma^{(0)} S^\dagger \gamma^{(0)} = S^{-1}.$$

A notação matricial adotada até agora não apresentou qualquer dificuldade, mas para podermos representar as componentes de $\tilde{\psi}$ e $\hat{\psi}$ em uma forma consistente com o que faremos mais adiante, é necessário entendermos os significados de ψ^a e ψ_a .

7.4.11 Significados de ψ^a e ψ_a

Para podermos adotar as abordagens mencionadas anteriormente, acoplamento mínimo na lagrangiana de Dirac e na equação, é conveniente fazermos um paralelo entre o que conhecemos sobre os espinores de Dirac em uma geometria de Minkowski com o que estamos fazendo aqui. O primeiro passo é, sem dúvida alguma, identificar ψ^a com o espinor de Dirac, pois ambos se transformam como $\psi'^a = S^a_b \psi^b$. Todavia a identificação de ψ_a não é com o complexo conjugado transposto de ψ , pois este se transforma como $\psi'^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger$, enquanto que $\psi'_a = (S^a_b)^{-1} \psi_a$. Esta última equivalência só seria verdadeira para rotações espaciais, onde $S^\dagger = S^{-1}$. A equivalência geral, válida tanto para rotações espaciais quanto para transformações puras de Lorentz, é feita associando ψ_a com $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^{(0)}$, pois ambos tem a mesma lei de transformação. Estas relações motivam a seguinte convenção matricial:

Os ψ^a são as componentes de $\tilde{\psi}$ na base ξ_a e, em termos matriciais, o representamos por $\psi = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix}$. Já os ψ_a são as componentes de $\hat{\psi}$ na base ξ^a e, em termos matriciais, o representamos por $\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi^{*0}, & \dots, & \psi^{*n} \end{pmatrix} \gamma^{(0)}$. As bases têm representações análogas, ou seja, ξ^a é representado por $\xi = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$, e ξ_a é representado por $\bar{\xi} = \xi^\dagger \gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} \xi^{*0}, & \dots, & \xi^{*n} \end{pmatrix} \gamma^{(0)}$. Vale apenas destacar que, sempre que for conveniente, passaremos da notação matricial para notação por componentes e vice versa. Destas de-

¹⁵No somatório, usamos o recurso $\gamma^{(0)}(\bar{\epsilon}^{AB}\sigma_{AB}^\dagger)^m\gamma^{(0)} = \bar{\epsilon}^{AB}\dots\bar{\epsilon}^{CD}\gamma^{(0)}\sigma_{AB}^\dagger\dots\sigma_{CD}^\dagger\gamma^{(0)} = \bar{\epsilon}^{AB}\dots\bar{\epsilon}^{CD}\gamma^{(0)}\sigma_{AB}^\dagger\gamma^{(0)}\gamma^{(0)}\dots\gamma^{(0)}\gamma^{(0)}\sigma_{CD}^\dagger\gamma^{(0)} = (\bar{\epsilon}^{AB}\sigma_{AB})^m$

finições, segue que $\psi_a \psi^a = \bar{\psi} \psi$, $\psi_a (\gamma^\mu)^a_b \psi^b_{|\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi_{|\mu}$, $\psi_{a|\mu} (\gamma^\mu)^a_b \psi^b = \bar{\psi}_{|\mu} \gamma^\mu \psi$ etc. A vantagem da notação matricial está clara. Sua poluição visual é bem menor.

Assim, fechamos a nossa representação matricial. Em resumo, temos

$$\begin{aligned}
 \psi' &= S\psi, \xi' = S\xi, \\
 \bar{\psi}' &= \bar{\psi}S^{-1}, \bar{\xi}' = \bar{\xi}S^{-1} \\
 \tilde{\psi} &= \bar{\xi}\psi, \\
 \hat{\psi} &= \bar{\psi}\xi, \\
 \xi(\bar{\xi}) &= \mathbb{I}.
 \end{aligned} \tag{7.75}$$

Vale apenas destacar que, em termos matriciais, o produto tensorial $\otimes$ é definido por

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \begin{pmatrix} A_{11}\mathbb{B} & \cdots & A_{1m}\mathbb{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}\mathbb{B} & \cdots & A_{mm}\mathbb{B} \end{pmatrix}, \tag{7.76}$$

onde $\mathbb{A}$ é uma matriz $m \times m$.

Agora que já sabemos construir invariantes tanto frente transformações de coordenadas quanto rotação nas tetradas e que identificamos o significado de cada um dos elementos que definimos, estamos aptos a formular teorias espinoriais. Todavia, nos limitaremos a duas abordagens, ambas baseadas no princípio do acoplamento mínimo.

7.5 Acoplamento mínimo

Na hora de construirmos uma teoria com espinores, precisamos lidar com grandezas invariantes, ou seja, grandezas que não mudem frente a transformações de coordenadas e nem de tetradas. De qualquer forma, um tratamento muito geral acaba sendo inviável devido a enorme variedade de possibilidades. Devido a este fato, em geral reduz-se a dois tipos de abordagem: princípio do acoplamento mínimo aplicado direto na lagrangiana de Dirac e a utilização deste mesmo princípio aplicado diretamente na equação de Dirac. Na geometria riemanniana, esta distinção é desnecessária. Como foi dito no início do capítulo, em uma geometria com torção e não-metricidade, o princípio do acoplamento mínimo

aplicado direto na equação de Dirac resulta em uma equação diferente da que obtemos via um princípio variacional quando o acoplamento mínimo é utilizado na lagrangiana de Dirac [41, 2]. Por esta razão, trataremos estes dois procedimentos de forma diferente. Sempre que falarmos “acoplamento na equação”, estaremos nos referindo ao princípio do acoplamento mínimo aplicado diretamente na equação de Dirac.

7.5.1 Acoplamento na lagrangiana

Aplicando o acoplamento mínimo na lagrangiana de Dirac em Minkowski, teremos que a ação de Dirac fica

$$S_D = \int d^n x \sqrt{-g} \mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \int d^n x \sqrt{-g} [\bar{\psi}_{|\mu} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi_{|\mu} - 2im\bar{\psi}\psi], \quad (7.77)$$

onde

$$\psi_{|\mu} = \psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi, \quad (7.78)$$

e

$$\bar{\psi}_{|\mu} = \bar{\psi}_{,\mu} - \bar{\psi} \Gamma_\mu. \quad (7.79)$$

Perceba que neste último caso a ordem das matrizes Γ e $\bar{\psi}$ são diferentes (note que a ordem das matrizes é determinada pela definição: soma do índice de coluna da primeira com o índice de linha da segunda $A^a{}_b B^c{}_a \rightarrow BA$). Tomando a variação da ação S_D em termos de $\bar{\psi}$ com as variações $\delta\bar{\psi}$, $\delta\psi$, $\delta g_{\mu\nu}$, δe^A , $\delta\omega^A{}_{\alpha B}$ sendo consideradas independentes¹⁶, teremos (veja a seção D.3.15)

$$i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \Gamma_\mu + \frac{1}{4} (N^\lambda{}_{\lambda\mu} - N^\lambda{}_{\mu\lambda}) + \frac{1}{2} T^\lambda{}_{\mu\lambda} \right] \psi - m\psi = 0. \quad (7.80)$$

A equação (7.80) é uma generalização da equação de Dirac em uma geometria com torção e não-metricidade. Como já havíamos alertado, a equação de Dirac em uma geometria não-riemanniana não necessariamente é obtida a partir do acoplamento mínimo aplicado diretamente na equação de Dirac em Minkowski, como faremos na sub-seção 7.5.2 .

Neste momento é fundamental destacar que a equação (7.80) e a lagrangiana (7.77), escritas como estão, são enganosas. Isso porque elas não dependem da não-metricidade,

¹⁶Para maiores detalhes sobre o princípio variacional que estamos usando aqui, veja a sub-seção 4.7.6 e as citações lá feitas.

como observado em [43] para o caso de Weyl, página 82. Para verificarmos que (7.80) não depende da não-metricidade, basta usar (7.57) ou (7.58) em (7.80) que chegaremos a

$$i \left[\gamma^\mu \partial_\mu + A_\alpha \gamma^\alpha + \frac{1}{8} \left(e_B{}^\lambda{}_{,\alpha} \gamma^\alpha [\gamma_\lambda, \gamma^B] + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} \gamma^\alpha [\gamma_\lambda, \gamma^\mu] \right) - \frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \right] \psi - m\psi = 0. \quad (7.81)$$

A demonstração de que (7.77) não depende da não-metricidade é feita na sub-seção D.3.16. Nesta seção, também demonstramos que S_D não depende dos símbolos de Christoffel, embora (7.81) dependa. Para maiores detalhes, veja a sub-seção D.3.16. Embora pareça contraditório a ação não depender de $\tilde{\Gamma}$, mas uma equação de campo sim, não há contradição nisto, pois $\tilde{\Gamma}$ não é uma variável independente. Como já dito, as variáveis cujas variações são independentes são g , ψ , $\bar{\psi}$, e^A e $\omega^A{}_{BC}$ ou, equivalentemente, g , ψ , $\bar{\psi}$, e^A , N_{ABC} e K_{ABC} .

Para o caso que a não-metricidade é nula, (7.80) fica

$$i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \Gamma_\mu + \frac{1}{2} T^\lambda{}_{\mu\lambda} \right] \psi - m\psi = 0, \quad (7.82)$$

onde a conexão espinorial depende apenas da métrica e da torção. A equação (7.82) é a equação de Dirac na geometria de Riemann-Cartan¹⁷. O leitor interessado na expressão para a equação de Dirac obtida a parti do acoplamento mínimo na lagrangiana em um formalismo diferente pode consultar [161].

7.5.2 Acoplamento na equação

De (7.55), o princípio do acoplamento aplicado na equação (7.6) leva a

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + A_\mu \mathbb{I} + \frac{1}{8} \omega_{A\mu B} [\gamma^A, \gamma^B] \right) \psi - m\psi = 0 \quad (7.83)$$

Em uma forma compacta,

$$i\gamma^\mu \psi_{|\mu} - m\psi = 0. \quad (7.84)$$

Perceba que, agora, a equação de Dirac generalizada para geometria com não-metricidade depende da não-metricidade. Além disso, esta equação é incompatível com (7.80). As

¹⁷Para maiores detalhes, veja a seção 1.6 de [41].

equações (7.83) e (7.80) só serão compatíveis se $T^\lambda_{\mu\lambda} = 0$, que é equivalente a dizer que a torção é totalmente anti-simétrica [41], e se a não-metricidade for totalmente simétrica.

Uma ação que reproduziria a equação (7.83) seria

$$\begin{aligned} S_{D'} = \frac{i}{2} \int d^n x \sqrt{-g} & \left[\bar{\psi}_{|\mu} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi_{|\mu} - 2im \bar{\psi} \psi \right. \\ & \left. + (N^\lambda_{[\lambda\mu]} + T^\lambda_{\mu\lambda}) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] = S_D \\ & + \frac{i}{2} \int d^n x \sqrt{-g} (N^\lambda_{[\lambda\mu]} + T^\lambda_{\mu\lambda}) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \end{aligned} \quad (7.85)$$

todavia $S_{D'}$ não é real ($S_{D'}^* \neq S_{D'}$).

Alguns autores argumentam que o acoplamento mínimo direto na equação de Dirac é errado para alguns casos [2, 41, 162]. Segundo [2], como o spin é totalmente anti-simétrico e por isso não acopla totalmente com a parte não-riemanniana (veja o comentário no final da página 262 de [2]), a expressão (7.83) não corresponde a equação de Dirac com torção.

7.6 Equações de Dirac no espaço-tempo de Minkowski de dimensão n com conexão de Weyl e torção

Nesta seção expressaremos as duas versões generalizadas da equação de Dirac obtidas na seção anterior no espaço-tempo de Minkowski com conexão de Weyl e torção. Começaremos primeiro simplificando a conexão espinorial.

O elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski de dimensão n tem a seguinte forma:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2. \quad (7.86)$$

Para este caso, podemos escolher a tetrada trivial, $e^A = e^A_\mu dx^\mu$, onde $e^A_\mu = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. É fácil verificar a partir de $e_A^\mu = g^{\mu\nu} e^B_\nu$ que $e_A^\mu = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. De forma igualmente trivial, verificamos que $e_{A\mu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Por sua vez, estes resultados implicam a equivalência entre os $\gamma^\mu s$ e os $\gamma^A s$, $\gamma^0 = \gamma^{(0)}$, $\gamma^1 = \gamma^{(1)}$ etc; os parênteses estão indicando as componentes dos $\gamma^A s$. Estes resultados também implicam $e_{B\nu,\alpha} = \overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu} = 0$ (base coordenada cartesiana). Assim, a expressão (7.59) fica

$$\gamma^\alpha \Gamma_\alpha = \left[A_B - \frac{(n-1)}{4} \sigma_B \right] \gamma^B + \frac{1}{8} K_{ABC} \gamma^B [\gamma^A, \gamma^C]. \quad (7.87)$$

Perceba a semelhança entre o campo de Weyl e A_α , que em geral é identificado com o 4-potencial do campo eletromagnético. Todavia, há uma diferença crucial entre A_B e σ_B . O campo de Weyl σ não pode, de forma alguma, ser complexo. Já A_B pode ser complexo e mais, deverá ser-lo para poder representar o 4-potencial do campo eletromagnético ($A_B = ie\bar{A}_B$, onde $\bar{A}_B$ é o 4-potencial do campo eletromagnético). Este foi o fato que forçou Weyl a trocar o gauge da invariância conforme na métrica pelo gauge da invariância de fase de ψ [12].

7.6.1 Equação de Dirac com acoplamento na equação em Minkowski-Weyl-Cartan

Substituindo (7.87) em (7.84), obtemos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \left\{ \left[A_B - \frac{(n-1)}{4} \sigma_B \right] \gamma^B + \frac{1}{8} K_{ABC} \gamma^B [\gamma^A, \gamma^C] \right\} \psi - m\psi = 0. \quad (7.88)$$

7.6.2 Equação de Dirac com acoplamento na lagrangiana em Minkowski-Weyl-Cartan

Substituindo (7.87) em (7.80), obtemos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \left(A_B \gamma^B - \frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \right) \psi - m\psi = 0, \quad (7.89)$$

onde foi utilizado $\frac{1}{4} K_{BAC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C = -\frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - T^A_{CA} \gamma^C$ (veja a seção D.3.1, equação D.13). Da expressão acima, vemos que a única parte da contorção que contribui para qualquer efeito sobre a partícula é a parte anti-simétrica, fato este que se opõe à equação autoparalela na abordagem clássica (4.19), pois, lá é justamente a parte simétrica que exerce um papel fundamental na equação de movimento da partícula (caso admita-se que a partícula segue uma autoparalela). Disto, podemos concluir que nunca será possível deduzir a equação autoparalela (4.19) a partir da equação de Dirac. Entretanto, sabemos que em uma geometria com torção a partícula com spin não segue uma geodésica, e nem uma autoparalela. No caso de Einstein-Cartan, ela segue E.29.

7.7 Variações da ação de Dirac em termos da contorção e a da não-metricidade (acoplamento na lagrangiana)

7.7.1 Variação com relação a contorção

Se tomarmos a variação de (7.77) em termos da contorção $K_{\alpha\beta\mu}$, obteremos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}} = \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\sigma} \gamma^\mu \gamma^{\beta]} \psi \quad (7.90)$$

que, comparando com a densidade de spin, chegamos a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}} = S^{\mu\sigma\beta}. \quad (7.91)$$

A demonstração destes resultados encontra-se na seção D.3.17 do apêndice. Voltaremos a analisar a relação entre torção e spin no capítulo E.

7.7.2 Variação com relação a não-metricidade

Na seção D.3.18 do apêndice demonstramos que a variação da ação de Dirac (7.80) com respeito a não-metricidade é identicamente nula, ou seja,

$$\frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_D}{\delta N_{\mu\nu\alpha}} \delta N_{\mu\nu\alpha} = 0. \quad (7.92)$$

7.8 Considerações

Finalizamos este capítulo ressaltando que o formalismo espinorial adotado no começo deste capítulo não é padrão na literatura e tão pouco está completo. Nós o criamos com o intuito de trabalharmos apenas com o que precisávamos, da forma mais simples possível. Entretanto, os resultados obtidos com ele estão de acordo com a literatura. A equação (7.80) pode ser verificada em [163] (equação 43), a versão sem não-metricidade em [41] (equação 78) ou em [164] [página 1338, equação (C)], já a versão sem torção pode ser verificada¹⁸ em [165, 166], equação 3.5, página 46. A conexão (7.55) pode ser verificada

¹⁸Esteja atento as diferenças na notação. Os autores usam o formalismo de fibrados. A derivada D corresponde a derivada exterior covariante, não necessariamente coincide com a nossa. Além disso, para

em qualquer texto sobre o assunto que exiba a conexão espinorial explicitamente. De qualquer forma, o leitor interessado em espinores não pode deixar de ler textos clássicos sobre o assunto [9, 152, 167].

comparar 3.5 com (7.80), é necessário lembrar que, para o campo de Dirac, o peso em 3.3 é $\omega(\psi) = -3/2$ ($n = 4$), e o campo de Weyl é denotado por ϕ ; sendo este menos duas vezes o nosso $\phi = -2\sigma$, veja a expressão antes de 2.10.

Capítulo 8

Confinamento de partículas

Nesta tese, a expressão “*confinamento de partículas*” significa manter as partículas retidas em uma certa região do espaço-tempo. Mais precisamente, estaremos interessados em reter as partículas em uma hipersuperfície do espaço-tempo. Por exemplo, se o espaço-tempo tiver dimensão n , estaremos interessados em confinar as partículas em uma superfície de dimensão $n - 1$. De fato, o que será feito aqui também será válido para superfícies de dimensão $n - k$, onde $k < n$. Utilizaremos o termo *bulk* para nos referirmos ao espaço-tempo como um todo, e *brana* para a hipersuperfície. Para sermos ainda mais precisos, não estamos interessados no confinamento de partículas a qualquer custo. Temos um objetivo mais simples. Queremos apenas exemplificar a importância que a geometria pode exercer no problema do confinamento de partículas, apresentando neste capítulo confinamentos obtidos a partir do campo de Weyl e da torção, ambos com o acoplamento mínimo aplicado direto na equação de Dirac. Por questão de completeza, procuramos descartar a possibilidade da utilização do campo de Weyl e da torção para alguns casos específicos. Os resultados apresentados neste capítulo também podem ser encontrados em [168].

Organizamos este capítulo da seguinte forma. Na seção 8.1, apresentamos um modelo de confinamento que nos serviu como fonte de inspiração, que chamaremos de *modelo de Rubakov* [4, 5]. Dedicamos a seção 8.2 aos nossos resultados sobre a possibilidade de confinamento com a torção e o campo de Weyl e, finalmente, encerramos o capítulo com algumas considerações finais.

$$V(\phi)$$

$$-v \qquad \qquad \qquad v \qquad \qquad \phi$$

Figura 8.1: O potencial escalar do modelo de Rubakov tem dois vácuos, $\pm v$, como pode ser visto nesta figura.

$$v$$

$$\phi(l)$$

$$l$$

$$-v$$

Figura 8.2: Solução do tipo *parede de domínio*.

8.1 Modelo de Rubakov

O modelo de Rubakov é baseado em férmions localizados em uma parede de domínio com o espaço-tempo tendo apenas uma dimensão extra [4]. Neste modelo, admite-se a existência de um campo escalar cuja a ação é dada por

$$S_\phi = \int d^4x dl \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (8.1)$$

onde l é a coordenada da dimensão extra e $V(\phi)$ é dado como indicado na figura 8.1. Tomando uma variação da ação acima em termos de ϕ , teremos

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} + \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0. \quad (8.2)$$

Considerando que ϕ dependa apenas da dimensão extra, a equação acima fica

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} - \frac{d^2\phi}{dl^2} = 0. \quad (8.3)$$

Usando a regra da cadeia no termo que contém o potencial, podemos realizar a seguinte simplificação

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{d\phi} \frac{dV(\phi)}{dl} - \frac{d^2\phi}{dl^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{dV(\phi)}{dl} - \frac{d\phi}{dl} \frac{d^2\phi}{dl^2} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{dV(\phi)}{dl} - \phi' \frac{d\phi'}{dl} &= 0 \Rightarrow \\
dV(\phi) - \phi' d\phi' &= 0 \Rightarrow \\
V(\phi) - \frac{1}{2} \phi'^2 &= C,
\end{aligned}$$

onde a partir da terceira linha começamos a utilizar a notação $\phi' \equiv \frac{d\phi}{dl}$. O potencial dado pela figura 8.1 pode ser representado por $V(\phi) = \lambda(v^2 - \phi^2)^2$. Substituindo esta expressão na equação acima e escolhendo $C = 0$, teremos

$$\begin{aligned}
\lambda(v^2 - \phi^2)^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 &= C = 0 \text{ (escolhido zero)} \Rightarrow \\
\phi' &= 2\lambda(v^2 - \phi^2) \Rightarrow \int \frac{d\phi}{v^2 - \phi^2} = 2\lambda l \Rightarrow \\
\frac{1}{v} \tanh^{-1}\left(\frac{\phi}{v}\right) &= 2\lambda l \Rightarrow \phi(l) = v \tanh(2\lambda vl).
\end{aligned}$$

Vemos, portanto, que existe uma solução clássica $\phi(l)$ (conhecida como *Kink*) que depende apenas da coordenada extra e é dada por $\phi(l) = v \tanh(2\lambda vl)$. O gráfico desta solução está esboçado em 8.2. Esta solução tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\phi(l \rightarrow \pm\infty) = \pm v, \quad (8.4)$$

onde v é uma constante positiva. Ela descreve uma parede de domínio que separa dois vácuos clássicos do modelo. Ela quebra a invariância translacional ao longo da dimensão extra, todavia deixa a invariância de Poincaré em quatro dimensões intacta.

Para introduzir férmions neste modelo, admite-se que os férmions em cinco dimensões são descritos por funções de onda com quatro componentes (mesma representação que em quatro dimensões), e que a matriz de Dirac associada a quinta dimensão é dada por $\gamma^4 = -i\Gamma_5^1$, onde¹ $\Gamma_5^1 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ é um dos geradores da álgebra de Clifford e

¹A presença ou ausência do fator “ i ” em $\Gamma_5^1 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ é pura conveniência. Todavia, para a assinatura que estamos adotando $\gamma^4\gamma^4 = -1$.

$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ são as matrizes de Dirac em quatro dimensões. Lembre-se que os geradores Γ_2^d são linearmente independentes de Γ_5^1 (veja a seção 7.4.6). Introduz-se a interação de Yukawa de férmions com o campo escalar ϕ , e a ação de Dirac em cinco dimensões toma a forma

$$S_D = \int d^4x dl \left(i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - h\phi\bar{\Psi}\Psi \right). \quad (8.5)$$

Em cada vácuo do campo ϕ , $\phi = \pm v$, os férmions em cinco dimensões adquirem uma massa $m_5 = hv$. A variação da ação acima em termos de $\bar{\Psi}$ leva a

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - h\phi(l)\Psi = 0, \quad (8.6)$$

que tem como solução para o modo zero de energia²

$$\Psi_0 = \psi_w(p)e^{-\int_0^l dl' h\phi(l')}, \quad (8.7)$$

onde $\psi_w(p)$ é solução da equação de Weyl em quatro dimensões ($i\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\psi_w = 0$, onde $\bar{\mu} = 0, 1, 2, 3$), e p é o 4-momento da partícula. O modo zero acima está claramente confinado à hypersuperfície (brana) definida por $l = 0$, pois a medida que l cresce, ϕ tende a v e, conseqüentemente

$$\Psi_0 = \psi_w(p)e^{-hv|l|}. \quad (8.8)$$

Perceba que o módulo é uma conseqüência do fato de $\phi(l)l > 0$ (para l grande, $\phi(l)l \simeq \pm v(\pm|l|) = v|l|$). Calculando a probabilidade de acharmos a partícula com modo zero de energia dada por (8.8), vemos que a probabilidade de encontrarmos a partícula fora da brana $l = 0$ cai exponencialmente. Disto, conclui-se que as partículas com modo zero estão confinadas. Este resultado é geral para o caso de partículas sem massa (neutrinos que satisfazem a condição de Weyl $i\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\psi_w = 0$). Estes neutrinos se propagam com a velocidade da luz dentro da brana e em nenhum momento sai para fora dela. A seguir analisamos a possibilidade de produzir o mesmo tipo de confinamento dado por (8.8) com o uso apenas do campo de Weyl e da torção.

²A existência do modo zero para este caso é garantida pelo teorema do índice [5], veja também [169]. Para detalhes sobre o teorema do índice, veja, por exemplo, [39].

8.2 Confinamento

Nesta seção, analisamos os possíveis confinamento de partículas em uma abordagem semi-clássica por meio de dois elementos da geometria, o campo de Weyl e a torção. Não nos preocuparemos em quantizar os campos, tomaremos apenas a solução da equação de Dirac e analisaremos seu comportamento fora da brana. Começaremos primeiro analisando o caso do campo de Weyl, sub-seção 8.2.1, e depois o da torção, sub-seção 8.2.2.

8.2.1 Confinamento via Weyl

Por questão de simplicidade, começaremos em Minkowski-Weyl, ou seja, em um espaço com métrica de Minkowski, com campo de Weyl e sem torção. Depois generalizamos a abordagem removendo esta restrição na métrica.

Como a equação de Dirac generalizada para a geometria de Weyl através do acoplamento mínimo na lagrangiana não depende do campo de Weyl³, concluímos que, nessa abordagem, o campo de Weyl não serve para confinar partículas. Porém, podemos analisar o confinamento via Weyl usando acoplamento na equação, ou seja a equação obtida na sub-seção 7.5.2.

Modelo inspirado no modelo de Rubakov

Considere uma variedade de Minkowski de dimensão 5 e uma subvariedade de dimensão 4. Admita que nesta variedade a contorção é nula, o campo de Weyl depende só da dimensão extra, ou seja, $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e $\sigma_4 = \sigma_4(x^4) = \sigma_4(l)$ (usaremos l ao invés de x^4); além disso σ é integrável, isto é, $\sigma = d\phi$. Admita, também, que possamos definir uma quinta matriz de Dirac por⁴ $-i\bar{\gamma}^{(4)}$, onde $\bar{\gamma}^{(4)} = -i\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)}$ (lembre-se, os parenteses representam as componentes na base de tetradas). Naturalmente, teremos o equivalente na base de coordenadas, $\gamma^4 = -i\bar{\gamma}^4$, onde $\bar{\gamma}^4 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Todavia, como pretendemos trabalhar em Minkowski-Weyl, a tetrada será trivial, o que implica que podemos usar base de tetradas e de coordenadas indiscriminadamente. Além disto, no modelo de Rubakov não há campos eletromagnéticos, logo $A_\mu = 0$. Usando estes fatos em 7.88, ficaremos com a seguinte equação

³Veja a sub-seção 7.5.1.

⁴É fácil verificar que esta matriz satisfaz a álgebra de Clifford.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - i\sigma_4(l)\gamma^4 \Psi - m\Psi = 0. \quad (8.9)$$

Sem nenhuma perda de generalidade, podemos escrever Ψ como

$$\Psi = e^{\phi(l)}\psi. \quad (8.10)$$

Substituindo (8.10) em (8.9), ficaremos com

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu [\sigma_4 \delta^4_\mu \psi e^\phi + e^\phi \partial_\mu \psi] - i\sigma_4 \gamma^4 \psi e^\phi - m\psi e^\phi &\Rightarrow \\ i\sigma_4 \gamma^4 \psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - i\sigma_4 \gamma^4 \psi - m\psi &= 0 \Rightarrow \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Admitindo que as soluções de 8.11 são normalizáveis, onda plana por exemplo, podemos escolher ϕ em 8.10 de forma conveniente para assegurar que $\bar{\Psi}\Psi$ vá a zero quando l se desvia de zero. Isto porque $\bar{\psi}\psi$, sendo normalizável, não diverge para o infinito quando $l \rightarrow \pm\infty$. Como exemplos, poderíamos tomar $\phi = -l^2$, $\phi = -l^4$ etc. Na verdade qualquer função par tal que sua exponencial fosse para zero quando l se desvia de zero confinaria.

Modelo mais geral com Weyl

Com o objetivo de ser mais geral, procuramos agora analisar a possibilidade do confinamento sem a necessidade de impor nenhuma restrição a métrica. Para alcançar esse objetivo, iremos admitir apenas que a equação

$$i\gamma^\alpha \left(\partial_\alpha + \overset{c}{\Gamma}_\alpha \right) \psi - m\psi = 0, \quad (8.12)$$

onde $\overset{c}{\Gamma}_\alpha \equiv \frac{1}{8} \left(e_B^\lambda{}_{,\alpha} [\gamma_\lambda, \gamma^B] + \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, \gamma^\mu] \right)$, tem soluções que não divergem com termos do tipo $e^{(x^\mu)^2}$. A equação acima é exatamente a equação de Dirac em um espaço curvo sem torção e não-metricidade. Portanto, esta imposição acaba sendo natural. Entretanto, estamos interessados na análise do confinamento via Weyl e, conseqüentemente, temos que lidar com a equação de Dirac na geometria de Weyl. Neste caso, a equação de Dirac com campo de Weyl e sem torção obtida com o acoplamento na equação tem a seguinte forma

$$i\gamma^\alpha \left(\partial_\alpha + \overset{c}{\Gamma}_\alpha - \frac{n-1}{4} \sigma_\alpha \right) \Psi - m\Psi = 0, \quad (8.13)$$

onde n é a dimensão do espaço. Repetindo o mesmo procedimento anterior, podemos definir

$$\Psi = \psi e^{(n-1)\phi/4}. \quad (8.14)$$

Substituindo (8.14) em (8.13), obtemos (8.12). Como admitimos que ψ não diverge mais rapidamente do que $e^{(x^\mu)^2}$, podemos escolher um ϕ conveniente para induzir o confinamento. O fato das soluções da equação (8.13) não divergirem para $n = 4$ [170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182] torna a hipótese da convergência de ψ bem razoável, mesmo que $n > 4$. Como um exemplo particular, considere um bulk em 5 dimensões e

$$\phi = -l^2, \quad (8.15)$$

onde l é a coordenada da quinta dimensão, como no caso abordado anteriormente. Com esta escolha, teríamos $\bar{\Psi}\Psi = e^{-l^2}\bar{\psi}\psi$. Uma vez que $\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \psi < e^{l^2}$, a probabilidade de encontrarmos a partícula fora da hipersuperfície definida por $l = 0$ é zero. Perceba que este procedimento generaliza o adotado no início desta sub-seção.

8.2.2 Confinamento via torção

Analisaremos agora a possibilidade de confinamento usando a torção. Primeiro analisamos a possibilidade de confinamento com o acoplamento mínimo direto na equação de Dirac, depois analisamos o caso do acoplamento na lagrangiana.

Acoplamento na equação

Diferentemente do exemplo de confinamento com Weyl, já iremos tratar do caso da torção de forma mais geral, ou seja, adotaremos desde do início um espaço-tempo n -dimensional com uma torção dada em uma forma particular, porém sem não-metricidade. Por esta razão, torna-se desnecessário qualquer referência ao modelo de Rubakov.

Da equação (7.83) e da definição de conexão afim, podemos escrever

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \overset{c}{\Gamma}_\mu \right) \Psi + \frac{i}{8} K_{\alpha\mu\beta} \gamma^\mu [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \Psi - m\Psi = 0, \quad (8.16)$$

onde fizemos $N_{\alpha\beta\lambda}$ e A_μ iguais a zero.

Se tomarmos a torção na forma

$$T^\alpha_{\beta\mu} = f_\nu (\delta^\alpha_\beta \delta^\nu_\mu - \delta^\alpha_\mu \delta^\nu_\beta), \quad (8.17)$$

onde $f_\nu = \partial f(x)/\partial x^\nu$, a contorção ficará (veja (4.14))

$$K_{\alpha\mu\beta} = f_\nu (g_{\alpha\mu}\delta_\beta^\nu - g_{\mu\beta}\delta_\alpha^\nu). \quad (8.18)$$

Podemos simplificar o termo de (8.16) que contém a contorção da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}K_{\alpha\mu\beta}\gamma^\mu[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] &= \frac{1}{8}f_\nu (g_{\alpha\mu}\delta_\beta^\nu - g_{\mu\beta}\delta_\alpha^\nu) \gamma^\mu[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \\ &= \frac{1}{8}f_\nu (\gamma_\alpha[\gamma^\alpha, \gamma^\nu] - \gamma_\beta[\gamma^\nu, \gamma^\beta]) \\ &= \frac{1}{4}f_\nu \gamma_\alpha[\gamma^\alpha, \gamma^\nu] \\ &= \frac{n-1}{2}f_\nu \gamma^\nu, \end{aligned}$$

onde usamos $\gamma_\alpha\gamma^\nu\gamma^\alpha = (2-n)\gamma^\nu$ da penúltima para a última linha. Substituindo esta simplificação em 8.16, ficaremos com

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \overset{c}{\Gamma}_\mu \right) \Psi + i\frac{(n-1)}{2}f_\nu \gamma^\nu \Psi - m\Psi = 0. \quad (8.19)$$

Adotando um procedimento semelhante ao anterior, ou seja, definindo $\Psi = \psi(x)e^{-(n-1)f(x)/2}$ e substituindo em 8.19, chegaremos a

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \overset{c}{\Gamma}_\mu \right) \psi - m\psi = 0 \quad (8.20)$$

e, portanto,

$$\overline{\Psi}\Psi = e^{-(n-1)f(x)}\overline{\psi}\psi,$$

com $\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \overline{\psi}\psi < e^{l^2}$; neste caso $l = \{x^4, x^5, \dots, x^{n-1}\}$. Uma escolha conveniente para $f(x)$ permitirá o confinamento das partículas na brana $l = 0$.

Ao ver o método aqui utilizado, o leitor pode estar sentindo-se tentado a usar este método para resolver a equação de Dirac com o campo eletromagnético, aqui representando por A_μ . Infelizmente este método não funciona para A_μ , pois este tensor não pode ser integrável, uma vez que a condição de integrabilidade implicaria em $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \text{tensor do campo eletromagnético} = 0$. A seguir, analisamos o caso da geometria de Lyra.

É possível obter um confinamento semelhante ao obtido acima através da geometria de Lyra. No caso do acoplamento na equação, consideramos a equação (8.16). De (4.39), teremos

$$\tilde{K}_{\nu\mu\lambda}\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\lambda = -\tilde{K}_{\lambda\mu\nu}\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\lambda = -\left\{\frac{1}{2}(\tilde{g}_{\mu\lambda}\beta_\nu - \tilde{g}_{\mu\nu}\beta_\lambda) + \tilde{g}_{\lambda\mu}(\alpha^{-1})_{,\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}(\alpha^{-1})_{,\lambda}\right\}\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\lambda =$$

$$\begin{aligned}
& -\left\{\frac{1}{2}(\beta_\nu \tilde{\gamma}_\lambda \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\lambda - n\beta_\lambda \tilde{\gamma}^\lambda) + (\alpha^{-1})_{,\nu} \tilde{\gamma}_\lambda \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\lambda - (\alpha^{-1})_{,\lambda} n\tilde{\gamma}^\lambda\right\} = \\
& -\left\{\frac{1}{2}[\beta_\nu(2-n)\tilde{\gamma}^\nu - n\beta_\nu \tilde{\gamma}^\nu] + (2-n)(\alpha^{-1})_{,\nu} \tilde{\gamma}^\nu - n(\alpha^{-1})_{,\nu} \tilde{\gamma}^\nu\right\} = \\
& (n-1)\beta_\nu \tilde{\gamma}^\nu + 2(n-1)(\alpha^{-1})_{,\nu} \tilde{\gamma}^\nu, \quad (8.21)
\end{aligned}$$

onde usamos $\tilde{\gamma}_\lambda \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\lambda = (2-n)\tilde{\gamma}^\nu$ e $\tilde{K}_{\nu\mu\lambda} = -\tilde{K}_{\lambda\mu\nu}$. Com a não-metricidade nula, a equação de Dirac pode ser escrita na seguinte forma

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \overset{c}{\Gamma}_\mu)\Psi + \frac{i}{4}\tilde{K}_{\alpha\mu\beta}\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\alpha}^\beta\Psi - m\Psi = 0. \quad (8.22)$$

Usando (8.21) e $\tilde{\gamma}^\mu\tilde{e}_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu \rightarrow \tilde{\gamma}^\mu\alpha^{-1}\partial_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu$, ficaremos com

$$i\tilde{\gamma}^\mu\alpha^{-1}\partial_\mu\Psi + i\gamma^\mu\overset{c}{\Gamma}_\mu\Psi + \left[\frac{(n-1)i}{4}\beta_\nu\tilde{\gamma}^\nu + \frac{(n-1)i}{2}(\alpha^{-1})_{,\nu}\tilde{\gamma}^\nu\right]\Psi - m\Psi = 0. \quad (8.23)$$

Se admitirmos que β_ν seja integrável, podemos derivá-lo a partir de um gradiente e, conseqüentemente, poderemos proceder como no exemplo anterior. Neste caso, se tomarmos $\beta_\nu = \alpha^{-1}\partial B/\partial x^\nu$ e fizermos a substituição

$$\Psi = \psi e^{-\frac{n-1}{4}(B-2\ln\alpha)} \quad (8.24)$$

reduziremos a equação (8.23) para

$$i\tilde{\gamma}^\mu\alpha^{-1}\partial_\mu\psi + i\gamma^\mu\overset{c}{\Gamma}_\mu\psi - m\psi = 0. \quad (8.25)$$

Novamente uma escolha conveniente da torção permitirá o confinamento.

Acoplamento na lagrangiana

Neste caso, é impossível usarmos o método que usamos com o acoplamento na equação, pois, contrariamente a $\gamma^A[\gamma^B, \gamma^C]$ (A, B e C quaisquer), as matrizes $\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^C]}$ são os geradores Γ_4^d da álgebra de Clifford, logo são linearmente independentes dos $\Gamma_2^d \sim \gamma^A$. Isto significa que não conseguiremos encontrar uma contorção K_{ABC} que reduza $\gamma^{[A}\gamma^B, \gamma^C]}$ a γ^A , como fizemos anteriormente. Por esta razão, nos limitaremos aqui a descartar possibilidades de confinamento.

Campos escalares

Usando o acoplamento na lagrangiana, podemos afirmar que a torção e a não-metricidade (Weyl é um caso particular de não-metricidade) não são capazes de confinar partículas escalares, pois elas não sentem nem a torção e nem a não-metricidade [23, 8, 91, 183]. Estas partículas se comportam como se estivessem na geometria riemanniana, mesmo que o espaço-tempo não seja riemanniano. Como foi mencionado em [23], página 26, tópico 3, campos escalares não acoplam com a torção.

Campos não-escalares

Para o caso de campos espinoriais sem massa que satisfazem a condição de Weyl, $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \psi$, (neutrinos tidos como sem massa, por exemplo) o termo na equação de Dirac devido a torção é nulo [2], logo, não há possibilidade de confinamento via torção neste caso. Além disto, não há a menor possibilidade de usarmos a não-metricidade para confinarmos partículas, pois a equação de Dirac com o acoplamento na lagrangiana não depende deste tensor (a lagrangiana também é independente da não-metricidade). Também podemos verificar que a 1-forma β da geometria de Lyra⁵ não altera a equação de Dirac e, conseqüentemente, não fornece a possibilidade de um confinamento. Para verificarmos esta última afirmação, considere a contorção dada por (4.39). Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\lambda\mu\nu}\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]} &= \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{g}_{\mu\lambda}\beta_\nu - \tilde{g}_{\mu\nu}\beta_\lambda) + \right. \\ &\left. \tilde{g}_{\lambda\mu}(\alpha^{-1})_{,\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}(\alpha^{-1})_{,\lambda} \right\} \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]} = 0, \end{aligned}$$

onde o zero é uma conseqüência imediata de que qualquer termo com contração dos índices de $\gamma^{[\lambda}\gamma^\mu\gamma^{\nu]}$ será nulo. Da equação (7.88), vemos que o termo acima computa todas as contribuições da torção para a equação de Dirac com o acoplamento na lagrangiana.

8.3 Considerações finais

Para finalizar este capítulo, vamos fazer as seguintes perguntas sem a pretensão de respondê-las. Qual das duas equações de Dirac, (7.80) ou (7.84), é a correta? É possível construir um modelo com um campo de Weyl dado por (8.15), ou similar, e com a equação generalizada de Dirac dada pelo acoplamento na equação? É possível construir um modelo com uma contorção dada por (8.18), ou similar, e com a equação generalizada de Dirac

⁵Veja detalhes sobre essa geometria na seção 4.7.8.

dada pelo acoplamento na equação? Em termos do acoplamento na lagrangiana, seria possível encontrar uma densidade de spin que, através da relação (7.91), desse origem a uma torção que confinasse os férmions na brana?

Um problema que a primeira pergunta feita acima traz estar relacionado com o fato do princípio variacional mais aceito na literatura, e de certa forma o mais convincente, ser incapaz de reproduzir a equação (7.83), a não ser que tomemos uma lagrangiana não auto-adjunta como (7.85). Este princípio parte de um fato óbvio, a conexão afim $\omega_{A\mu B}$ não tem nada haver com a métrica $g_{\mu\nu}$, que possui vez nada tem haver com ψ , com a 1-forma e^A , nem com $\bar{\psi}$ etc. Portanto, as variações dessas variáveis são independentes. Os modelos obtidos a partir deste princípio, como dito no capítulo 4, são denominados **MAG** (Metric Affine Gravity). Entretanto, há outras propostas na literatura, como por exemplo⁶ a **TEATG** (Transposed-Equi-Affine Theory of Gravity) [40].

As outras perguntas feitas acima trazem tantos problemas a tona que, só para discutirmos uma delas, seria necessário escrever outra tese sobre o assunto. Entretanto, podemos ver todas essas dificuldades como problemas para ser abordados no futuro como uma continuidade natural desta tese.

⁶Em [142], os autores provam que a TEATG é incompatível com os experimentos gravitacionais realizados no sistema solar.

Capítulo 9

Conclusões e Perspectivas

A riqueza que as geometrias não-riemannianas trazem para a física é indiscutivelmente benéfica. Mesmo que não haja nenhuma evidência experimental para considerarmos geometrias com torção, não-metricidade etc, vimos nos capítulos 4 e 5 o quanto tais geometrias despertam o interesse dos físicos. Influenciados por esse interesse, abordamos o problema do confinamento de partículas em hipersuperfícies de um espaço de dimensão maior do que quatro através de mecanismos geométricos: métrica, campo de Weyl, e torção. Dividimos essa abordagem em duas: o confinamento clássico, através de autoparalelas, e o confinamento quântico, através da equação de Dirac. Os confinamentos clássicos com a métrica e o campo de Weyl já tinham sido realizados em [150] e [148], respectivamente. Portanto, o que há de novo nesta tese é o confinamento clássico com torção, apresentado no capítulo 6, e os quânticos, apresentados no capítulo 8. Além destes, o teorema sobre imersão de uma variedade riemanniana em outra de Riemann-Cartan apresentado na seção 6.1 também é um resultado novo. Abaixo discriminamos em detalhe os resultados obtidos.

i Na seção 6.1 demonstramos que dada uma variedade de Riemann-Cartan $\overline{M}$ de dimensão $\overline{m}$, é possível termos uma subvariedade M de dimensão m , onde $\overline{m} > m$, tal que a torção de $\overline{M}$ induzida em M seja nula. Também demonstramos que não é possível o contrário, ou seja, uma variedade de Riemann-Cartan mergulhada em uma riemanniana.

ii No capítulo 6, fizemos a análise sobre a possibilidade de confinarmos as curvas auto-

paralelas utilizando apenas a contorção. Chegamos ao resultado de que, não só é possível confinarmos essas curvas, mas com também concluimos que o tipo de confinamento é essencialmente o mesmo dos obtidos em [150] e [148] com a métrica e Weyl, respectivamente. Para ser mais preciso, demos exemplos do confinamento de autoparalelas tipo tempo e tipo luz via torção. A importância deste resultado para o confinamento de partículas está relacionada a crença que alguns autores tem na idéia de que as autoparalelas devam ser as equações de movimento de uma partícula [14, 84, 38, 85].

- iii Adotando o princípio do acoplamento mínimo direto na equação de Dirac em Minkowski, tomando um espaço-tempo de dimensão cinco, e adotando um modelo similar ao de [5, 4] para contornar o problema da dimensão ímpar¹, demonstramos que o campo de Weyl pode ser usado para manter férmions confinados em uma brana de dimensão quatro. Chegamos a conclusão de que várias escolhas simples para σ podem ser feitas com o intuito de realizar o confinamento. Podemos, por exemplo, tomar $\sigma = -l^2$. Pelo procedimento que adotamos, ficou claro que a generalização para outras dimensões é trivial, o que elimina a necessidade de usarmos a idéia contida em [5, 4] para definir as matrizes de Dirac em espaços com dimensão ímpar².
- iv Também usando o acoplamento mínimo direto na equação de Dirac, mostramos que para uma torção dada por $T^\alpha_{\beta\mu} = f_\nu (\delta^\alpha_\beta \delta^\nu_\mu - \delta^\alpha_\mu \delta^\nu_\beta)$, os férmions serão confinados na brana quadridimensional caso tomemos um f conveniente. Ficou claro, por sua vez, que são várias as possibilidades de um f que confina. Essa riqueza de opções é boa, pois ela aumenta a possibilidade de encontrarmos um modelo físico que reproduza tal escolha de maneira natural.
- v Ainda com o acoplamento mínimo direto na equação de Dirac, demonstramos que o campo de Lyra, quando integrável, permite o mesmo tipo de confinamento obtido com a escolha que tínhamos tomado para a torção.
- vi Embora não tenhamos conseguido nenhum exemplo de confinamento com a equação de Dirac obtida a partir do acoplamento na lagrangiana, assim como não conse-

¹Definir as matrizes de Dirac em um espaço-tempo de dimensão ímpar.

²Neste caso, poderíamos tomarmos um bulk de dimensão par.

guimos nenhum exemplo de confinamento com a equação de movimento clássica na teoria de Einstein-Cartan (E.29), fomos capazes de excluir a possibilidade de confinamento via certos campos. Nesta abordagem, campos escalares não acoplam nem com a torção nem com o tensor de não-metricidade, logo, não é possível confinar partículas sem spin usando torção ou a não-metricidade. Também verificamos a impossibilidade de confinar campos espinoriais sem massa que obedeçam a condição de Weyl $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \psi$, neutrinos por exemplo. Provamos que a equação de Dirac em questão não depende da torção de Lyra, logo o campo de Lyra não pode ser usado para confinar férmions.

Durante o desenvolvimento desta tese, várias linhas de pesquisa puderam ser vislumbradas. Elas são tantas que faz-se necessário separá-las em pelo menos dois grupos: as ligadas diretamente com esta tese e as ligadas indiretamente. Como perspectivas diretamente relacionadas ao objetivo desta tese, podemos citar a possibilidade de analisar o confinamento de partículas no contexto clássico usando a abordagem mais comum na literatura [2, 41, 23, 7, 1], ou seja, não postulando que partículas seguem autoparalelas. Neste caso, poderíamos analisar a possibilidade de soluções para a equação (E.29) que mantivessem as partículas com spin confinadas. Poderíamos também analisar a versão quântica dessa abordagem, equação (7.80). Além disso, seria interessante procurar um modelo físico que fornecesse uma torção e um campo de Weyl com as características indicadas em **iii** e **iv**. Com relação ao outro grupo, poderíamos analisar o problema da equação de movimento tanto na geometria riemanniana quanto em uma geometria mais geral, ver com mais rigor a questão do princípio variacional em geometrias não-riemannianas, analisar a correlação entre o acoplamento mínimo e o princípio da equivalência em geometrias como a de Weyl e de Riemann-Cartan etc.

Apêndice A

Notação

A.1 Notação

Nesta tese são usadas as seguintes convenções:

- i** Os índices holonômicos (índices de coordenada) são indicados por letras gregas minúsculas, μ, ν por exemplo. Estes índices variam de 0 até $n - 1$, sendo n a dimensão da variedade, porém quando com barra, $\bar{\mu}$, variam de 0 até $n - 2$.
- ii** Os índices não-holonômicos (índices de tetrada) são indicados por letras romanas maiúsculas, A, B por exemplo. Estes índices variam de (0) até $(n - 1)$, sendo n a dimensão da variedade, porém quando com barra, $\bar{A}$, variam de (0) até $(n - 2)$. Perceba os parentes, pois eles distinguem A^0 (na base coordenada) de $A^{(0)}$ (escrito na base de tetradas).
- iii** Os índices espinoriais são indicados por letras romanas minúsculas, a, b, c por exemplo.
- iv** As partes simétrica e anti-simétrica das componentes de um tensor são indicadas por $()$ e $[\]$, respectivamente. Exemplo: $A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$.
- v** O símbolo de Levi-Civita é definido como $\epsilon_{0123} = \epsilon^{0123} = 1$. O tensor totalmente anti-simétrico é definido por $\varepsilon_{0123} = 1$. Para maiores detalhes, veja a seção B.5.8.
- vi** A métrica em coordenadas é indicada por g , já na base de tetradas ela é indicada por η .
- vii** As tetradas são representadas por $e_A = e_A^\mu \partial_\mu$, já a base dual $e^A = e^A_\mu dx^\mu$.

- viii** A convenção das componentes da conexão é $\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda$. Usamos o “:” para indicar as componentes da derivada covariante riemanniana, que usa apenas $\overset{c}{\Gamma}$, já o “;” é usado para indicar as componentes da derivada covariante que usa a conexão afim e que “atua apenas em índices gregos”, enquanto que “|” é usado para indicar as componentes da derivada covariante total, que usa a conexão afim e “atua em todos os índices”.
- ix** A torção é denotada pela letra T e definida por $T(V, U) \equiv \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U]$. Por sua vez, as componentes são definidas como $T_{\mu\nu}^\lambda \equiv \langle dx^\lambda, T(\partial_\mu, \partial_\nu) \rangle = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.
- x** O símbolo de Christoffel é denotado por $\overset{c}{\Gamma}$. De maneira geral, grandezas que dependem apenas dos símbolos de Christoffel são denotados com um “c” sobre a letra. Por exemplo o tensor de Einstein em termos de $\overset{c}{\Gamma}$ é denotado por $\overset{c}{G}$. No caso da conexão que contenha tanto o símbolo de Christoffel quanto não-metricidade, os elementos são indicados com a letra “N” em cima, $\overset{N}{\Gamma}$, $\overset{N}{G}$ etc. A parte que depende apenas da não-metricidade é indicada com “n”, $\overset{n}{\Gamma}$, $\overset{n}{G}$ etc. No caso da conexão que contenha o símbolo de Christoffel e a contorção, usamos “t”, $\overset{t}{\Gamma}$, $\overset{t}{G}$ etc. A conexão total é indicada apenas por ∇ .
- xi** O tensor de contorção é definido como $K^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\nu\mu}^\lambda - T^\lambda_{\mu\nu})$. Como consequência, teremos $\overset{t}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\mu\nu}$.
- xii** O tensor de Riemann é definido como $R(V, U)W \equiv \nabla_V \nabla_U W - \nabla_U \nabla_V W - \nabla_{[V, U]} W$. Na base de coordenadas, $R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho, \alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho, \sigma} + \Gamma^\phi_{\sigma\rho} \Gamma^\mu_{\alpha\phi} - \Gamma^\phi_{\alpha\rho} \Gamma^\mu_{\sigma\phi}$, onde $R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \langle dx^\mu, R(\partial_\alpha, \partial_\sigma) \partial_\rho \rangle$.
- xiii** O tensor de não-metricidade é definido como $N(U, W, V) = \nabla_V g(U, W)$ ($N_{\mu\nu\lambda} = g_{\mu\nu; \lambda}$).
- xiv** De maneira geral, as componentes da conexão têm a forma $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \overset{n}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma, \nu} + g_{\nu\sigma, \mu} - g_{\mu\nu, \sigma}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (-N_{\sigma\mu\nu} - N_{\nu\sigma\mu} + N_{\mu\nu\sigma}) - \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\nu\mu}^\lambda - T^\lambda_{\mu\nu})$, onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \langle dx^\lambda, \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \rangle$.
- xv** O tensor de Einstein é definido como $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$.
- xvi** Define-se por conveniência a seguinte derivada $\overset{\star}{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + T^\lambda_{\mu\lambda}$.

- xvii** A conexão 1-forma é definida como $\omega^A_B \equiv \omega^A_{CB} e^C$, onde ω^A_B satisfaz as equações de estrutura de Cartan.
- xviii** O tensor de energia momento métrico $T^{\mu\nu}$ é definido por $T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_m / \delta g_{\mu\nu}$.
- ixx** O tensor do momento angular de spin (tensor de densidade de spin dinâmico) $S^{\mu\beta\alpha}$ é definido por $S^{\mu\beta\alpha} \equiv -\frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\sigma} \gamma^\mu \gamma^{\beta]} \psi$ e $U^{\beta\theta\nu} \equiv \frac{\chi}{2} \delta(\mathcal{L}_m) / \delta K_{\theta\beta\nu}$.

A.2 Notação do artigo [1]

No artigo [1], os autores adotam a seguinte notação:

- a1** Os índices holonômicos (índices de coordenada) são indicados por letras romanas minúsculas, i, j, k , por exemplo. Estes índices variam de 0 até 3.
- a2** Os índices não-holonômicos (índices de tetrada) são indicados por letras gregas minúsculas, α, β, γ , por exemplo. Estes índices variam de 0 até 3.
- a3** As partes simétrica e anti-simétrica das componentes de um tensor são indicadas por $()$ e $[\]$, respectivamente. Exemplo: $A_{[ab]} = \frac{1}{2} (A_{ab} - A_{ba})$.
- a4** O símbolo de Levi-Civita é definido como $\epsilon_{0123} = \epsilon^{0123} = -1$.
- a5** Usa-se a letra g tanto para a métrica em coordenadas quanto para a métrica na base de tetrada, ou seja, $g_{ij} = g_{ij}(x)$ e $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Neste caso, $ds^2 = -g_{ij}(x) dx^i dx^j$.
- a6** As tetradas são representadas por $\mathbf{e}_\alpha = e^i_\alpha \partial_i$, já a base dual $\theta^\alpha = e_i^\alpha dx^i$.
- a7** A convenção das componentes da conexão é $\Gamma^k_{ij} \equiv \langle dx^k, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle$.
- a8** A torção é denotada pela letra S e definida por $S_{ij}{}^k \equiv \frac{1}{2} (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) = \Gamma^k_{[ij]}$. Também é utilizado um tensor de torção modificado $T_{ij}{}^k \equiv \Gamma^k_{ij} + 2\delta^k_{[i} S_{j]l}{}^l$.
- a9** O símbolo de Christoffel é denotado por $\{^k_{ij}\}$.
- a10** O tensor de Contorção é definido como $K_{ij}{}^k \equiv -S_{ij}{}^k + S_j{}^k{}_i - S_i{}^k{}_j$. Como consequência, teremos $\Gamma^k_{ij} = \{^k_{ij}\} - K_{ij}{}^k$ (sem considerar o tensor de não-metricidade).
- a11** O tensor de Riemann é definido como $R_{ijk}{}^l \equiv 2\partial_{[i} \Gamma^l_{j]k} + 2\Gamma^l_{[i|m} \Gamma^m_{j]k}$.

a12 O tensor de não-metricidade é definido como $Q_{ijk} = -\nabla_i g_{jk}$.

a13 De maneira geral, as componentes da conexão têm a forma

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl} \Delta_{jil}^{abc} \left(\frac{1}{2} \partial_a g_{bc} - g_{cd} S_{ab}{}^d + \frac{1}{2} Q_{abc} \right), \text{ onde } \Delta_{jil}^{abc} \equiv \delta_j^a \delta_i^b \delta_l^c + \delta_i^a \delta_l^b \delta_j^c - \delta_l^a \delta_j^b \delta_i^c.$$

a14 O tensor de Einstein é definido como $G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R_k{}^k$, onde $R_{ij} \equiv R_{kij}{}^k$.

a15 Define-se por conveniência a seguinte derivada $\nabla_k^* = \nabla_k + 2S_{kl}{}^l$.

a16 A conexão 1-forma é definida como $\omega^\gamma_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \theta^\alpha$, onde $d\mathbf{e}_\beta = -\Gamma^\gamma_{i\beta} dx^i \mathbf{e}_\gamma$.

a17 O tensor de energia momento métrico σ^{ij} é definido por $e\sigma^{ij} = 2\delta\mathfrak{L}/\delta g_{ij}$, onde $\mathfrak{L}$ é a lagrangiana e $e = \sqrt{-g}$.

a18 Define-se a energia potencial de spin μ_k^{ij} por $e\mu_k^{ij} \equiv \delta\mathfrak{L}/\delta S_{ij}{}^k$.

a19 O tensor do momento angular de spin τ_k^{ji} é definido por $e\tau_k^{ji} \equiv \delta\mathfrak{L}/\delta K_{ij}{}^k$.

a20 O tensor de energia momento total Σ^{ij} é definido por $\Sigma^{ij} \equiv \sigma^{ij} - \nabla_k^* \mu^{ijk}$. A razão do porquê usar este tensor é dada na seção C página 399 de [1].

A.3 Notação de [2]

No livro [2], os autores adotam a seguinte notação:

b1 Os índices coordenados são indicado por letras gregas minúsculas, os de tetradas são indicados por letras romanas minúsculas, e os índices espinoriais são omitidos. Os índices coordenados e de tetrada variam de 1 até 4, sendo 4 a coordenada temporal.

b2 As partes simétrica e anti-simétrica das componentes de um tensor são indicadas por $()$ e $[\]$, respectivamente. Exemplo: $A_{[ab]} = \frac{1}{2} (A_{ab} - A_{ba})$.

b3 O tensor totalmente anti-simétrico é denotado por $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ e definido com $\varepsilon^{1234} = +1$.
Observação: o tenso totalmente anti-simétrico não é o símbolo de Levi-Civita, $\varepsilon \neq \epsilon$.

b4 A convenção das componentes da conexão é $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \partial_\lambda$.

b5 A torção é representada pela letra Q e é definida como $Q_{\alpha\beta}{}^\mu \equiv \Gamma_{[\alpha\beta]}{}^\mu$. Os autores também fazem as definições $Q_\mu \equiv Q_{\mu\nu}{}^\nu$ e $T_{\mu\nu}^\alpha = Q_{\mu\nu}{}^\alpha + \delta_\mu^\alpha Q_\nu - \delta_\nu^\alpha Q_\mu$, onde $T_{\mu\nu}{}^\alpha$ é conhecido como o tensor de torção modificado.

b6 O tensor de densidade de spin para um campo de Dirac escrito na base de tetradas é

$$\text{dado por } S^{abc} = -\frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]}\psi.$$

b7 A ação de Einstein-Cartan é escrita na forma $S = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_m(\psi, \nabla\psi, g) - \frac{1}{2\chi} R(g, \partial g, Q)]$, onde $\mathcal{L}_m(\psi, \nabla\psi, g)$ é a lagrangiana da matéria.

b8 Define-se por conveniência a seguinte derivada $\nabla_\alpha^* = \nabla_\alpha + 2Q_\alpha$.

b9 O símbolo de Christoffel é representado por $\{\lambda_{\mu\nu}\}$.

b10 O tensor de Contorção é definido como $K_{\alpha\beta\mu} \equiv -Q_{\alpha\beta\mu} - Q_{\mu\alpha\beta} + Q_{\beta\mu\alpha} = K_{\alpha[\beta\mu]}$. Como uma consequência, teremos $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \{\lambda_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}^\lambda$ (sem considerar o tensor de não-metricidade).

b11 O tensor de Riemann é definido como $R_{\alpha\nu\mu}^\beta \equiv \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + \Gamma_{\alpha\rho}^\beta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho$.

b12 O tensor de não-metricidade é definido como $N_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\nu;\alpha}$.

b13 De maneira geral, as componentes da conexão têm a forma $\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \{\beta_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}^\beta - V_{\mu\nu}^\beta$, onde $V_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} (N_{\mu\nu}^\beta - N_{\mu\nu}^\beta - N_{\nu\mu}^\beta)$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\beta \equiv \langle dx^\beta, \nabla_\mu \partial_\nu \rangle$.

b14 O tensor de Einstein é definido como $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, onde $R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}^\alpha$.

b15 Define-se por conveniência a seguinte derivada $\nabla_\alpha^* = \nabla_\alpha + 2Q_\alpha$, onde $Q_\alpha \equiv Q_{\alpha\nu}^\nu$.

b16 A conexão 1-forma é definida como $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$, onde ω_μ^{ab} é conexão não-holonômica de Lorentz, $\omega_\mu^{ik} = e_\alpha^i e^{\nu k} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - e^{\nu k} \partial_\mu e_\nu^i$.

b17 O tensor de energia momento métrico $T_{\mu\nu}$ é definido por $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$.

b19 O tensor do momento angular de spin (tensor de densidade de spin dinâmico) $S^{\mu\beta\alpha}$ é definido por

$$S^{\mu\beta\alpha} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) / \delta K_{\alpha\beta\mu}, \text{ página 241.}$$

b20 O tensor de energia momento total (canônico) $\theta^{\mu\nu}$ é definido por $\theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \nabla_\alpha^* (S^{\mu\nu\alpha} - S^{\nu\alpha\mu} + S^{\alpha\mu\nu})$, página 242 do livro.

A.4 Algumas relações entre a notação da tese e a de [2]

Nesta seção apresentamos a relação entre a notação adotada nesta tese e a do livro [2].

Notação de [2]	Notação da tese
$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \langle dx^\lambda, \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \rangle$	$= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \langle dx^\lambda, \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \rangle$
$R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu \equiv \Gamma_{\beta\mu}{}^\nu{}_{,\alpha} \dots$	$= R^\nu_{\mu\alpha\beta} \equiv \Gamma^\nu_{\beta\mu,\alpha} \dots$
$R_{\beta\mu} \equiv R_{\alpha\beta\mu}{}^\alpha$	$= R_{\mu\beta} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\beta}$
$G_{\beta\mu} = R_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g_{\beta\mu}R$	$= G_{\mu\beta} = R_{\mu\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\beta}R$
$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \mathcal{L}_m - \frac{1}{2\chi} R \right\}$	$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ R + \chi \mathcal{L}_m \}$
$\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\beta\mu}} = \sqrt{-g} G_{\beta\mu}$	$= -\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\beta}} = \sqrt{-g} G_{\mu\beta}$
$Q_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv \Gamma_{[\mu\nu]}{}^\lambda$	$= \frac{1}{2}T^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$
$K_{\alpha\beta\mu}$	$= -K_{\mu\alpha\beta}$
$T^{\mu\beta\alpha}$	$= U^{\alpha\mu\beta}$
$\theta_{\mu\nu}$	$= \theta_{\nu\mu}$
$S^{\sigma\mu\beta} = -\frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma^{[\sigma}\gamma^\mu\gamma^{\beta]}\psi$	$= S^{\sigma\mu\beta}$

Apêndice B

Formas Diferenciáveis

Neste apêndice, nos limitaremos apenas as ferramentas matemáticas que são importantes para a compreensão desta tese. Seguindo esta linha e com o objetivo de não deixar o texto denso, cheio de definições matemáticas, que o leitor provavelmente já viu ou pode consultar em qualquer livro de matemática, usaremos apenas a terminologia essencial para a compreensão do que está sendo feito e, sempre que possível, redirecionando o leitor à literatura adequada para um maior aprofundamento.

B.1 Variedades

Variedades são generalizações da concepção intuitiva que temos sobre curvas e superfícies. Nesta generalização, o grau de liberdade torna-se arbitrário, ou seja, podemos ter variedades de qualquer dimensão; uma variedade de dimensão 1 é uma linha, de dimensão 2 uma superfície no sentido usual (uma esfera, por exemplo), variedades de dimensão 3 já representam volumes (o espaço euclidiano, por exemplo), todavia dimensões maiores já não permitem tais visualizações. Além disto, as variedades podem manifestar outras propriedades estranhas à nossa intuição como, por exemplo, curvatura e torção. Por sua vez, estes fatos não impedem o mundo no qual vivemos de ser descrito por uma variedade de dimensão maior que 3 e com características desconhecidas da intuição que adquirimos com os nossos sentidos. Para se convencer disto, basta ter em mente que só seríamos capazes de ter alguma intuição sobre o fato do tempo não ser absoluto se os nossos sentidos fossem precisos o suficiente para detectar as dilatações do tempo na escala de velocidade que experimentamos ou, se vivêssemos em uma escala de velocidade próxima à da luz.

Assim sendo, não podemos deixar que as limitações de nossos sentidos e, conseqüentemente nossa intuição, limite a nossa descrição matemática do mundo que vivemos. O leitor interessado na definição formal de variedades pode consultar a seção 5.1.2 de [39].

Para entendermos bem como funciona todo o aparato matemático envolta de uma variedade, precisamos ter em mente que, por mais astutos que sejamos, em geral não seremos capazes de realizar cálculos sobre a variedade em si. De fato, o que fazemos é identificar a vizinhança de um ponto da variedade ao que chamamos de plano tangente, que nada mais é do que um espaço vetorial¹ de $\mathbb{R}^n$ (n sendo a dimensão do plano tangente, menor ou igual à da variedade). Portanto, as contas são feitas sobre o plano tangente à variedade em um dado ponto, não sobre a variedade. Está claro que, se a variedade coincide com o plano tangente, então, podemos dizer que estamos fazendo as contas sobre a variedade (exemplos disto são: plano tangente à uma superfície bi-dimensional plana, plano tangente ao espaço euclidiano etc). Tendo isto em mente, é fácil entender o significado geométrico tanto da curvatura quanto da torção apresentados nos capítulos 2 e 4.

O plano tangente à uma variedade M no ponto p é o conjunto de vetores tangentes à curvas contidas em M e que passam pelo ponto p . Este conjunto é denotado por $T_p M$ (veja figura B.1).

Na figura B.2, esboçamos o fato de que estamos sempre associando as contas feitas no plano tangente com a variedade por meio de uma função através de um processo chamado *imersão*. Obviamente, para que esta associação seja considerada uma imersão, é necessário que certas condições sejam satisfeitas².

B.2 Vetores

Aqui, vamos definir o conceito de vetores independentes de base. Para tal, definiremos os vetores como sendo escalar, ou seja, eles não mudarão frente transformações de coordenadas. Além disso, os vetores serão definidos a partir do conceito de curva que, para nós, já está entendido.

Considere uma curva $\alpha(t)$ contida em uma variedade M e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$,

¹Espaço dotado de vetores que obedecem a 8 propriedades. O leitor interessado pode verificar estas propriedades em [15]

²Para maiores detalhes, veja página 11 de [16] e/ou seção 5.2.7 de [39].

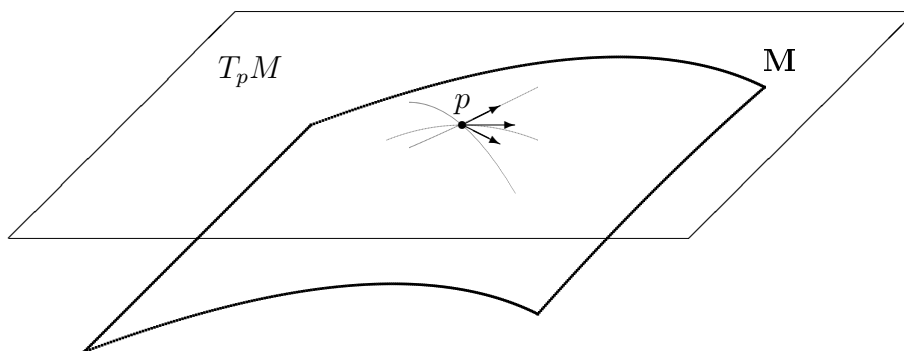


Figura B.1: Os vetores tangentes às curvas que passam pelo ponto p definem o que chamamos de *plano tangente*, denotado por $T_p M$.

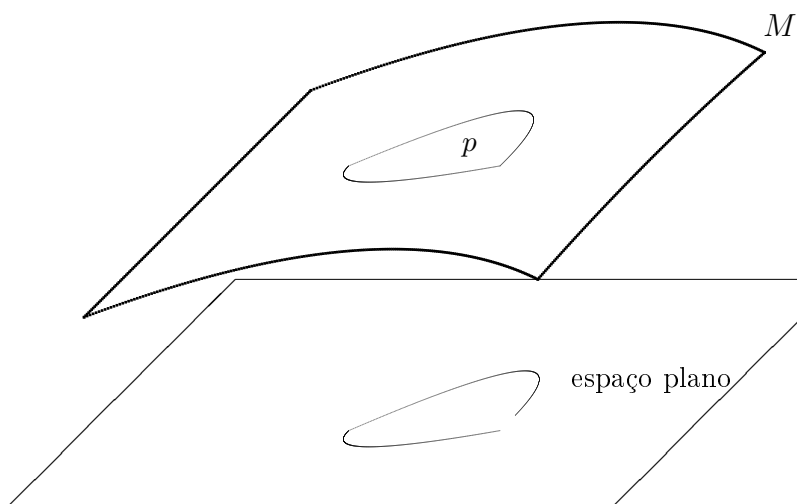


Figura B.2: Nesta figura, um contorno infinitesimal nas vizinhanças de um ponto p da variedade M é expresso no espaço plano tangente a M em p . Note que a curva no espaço plano não necessariamente se fecha.

onde $t \in \mathbb{R}$. A medida da variação de f ao longo da curva α no ponto p é

$$\left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t_p}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\alpha(t_p) = p$. Com α escrita na forma paramétrica, $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$, onde n é a dimensão de M , podemos usar a regra da cadeia e escrever a expressão acima na forma

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\alpha(t))}{dt} \right|_{t_p}. \quad (\text{B.2})$$

A partir da expressão acima, fazemos a definição de vetores independente de base por

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad (\text{B.3})$$

onde $X^\alpha = \frac{dx^\alpha(\alpha(t))}{dt}$. Estamos omitindo o fato deste vetor ser avaliado no ponto p . Todavia, como o ponto p é arbitrário, podemos generalizar a definição para qualquer ponto da variedade M e, conseqüentemente, tratar X como um campo vetorial. Perceba que, com a definição acima, podemos ver o vetor X como sendo um operador que atua sobre o conjunto de funções diferenciáveis de M . Desta forma, adotaremos a seguinte notação

$$X[f] = X^\mu \partial_\mu f, \quad (\text{B.4})$$

onde em $X[f]$ lê-se X aplicado em f . É fácil verificar que estes vetores são independentes da base na qual são escritos. Para tal, basta notar que, frente uma transformação de coordenadas $x^\alpha \longrightarrow x'^\alpha$, $X'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} X^\mu$, enquanto que $\partial'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \partial_\mu$. Fato este que, pela regra da cadeia, leva a $X' = X$.

B.3 1-Formas

O fato de $T_p M$ ser um espaço vetorial garante que existe um conjunto de funcionais lineares³ cujos elementos levam valores de $T_p M$ nos reais. Este conjunto é denominado *espaço cotangente*, ele será denotado por $T_p M^*$ e, sempre que possível, seus elementos serão indicados por letras gregas, $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Dar-se vários nomes aos elementos do

³Um funcional linear F é uma função que satisfaz as propriedades $F(V + W) = F(V) + F(W)$ e $F(\lambda V) = \lambda F(V)$, onde V, W são vetores e λ é um escalar.

espaço cotangente: vetor dual, vetor cotangente e 1-forma. Aqui, nos referiremos a estes elementos por 1-formas. Como exemplo de uma 1-forma, considere a diferencial de uma função f , df . Como a ação de V sobre f é $V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, é natural definir a ação de df sobre V por

$$\langle df, V \rangle = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = V[f]. \quad (\text{B.5})$$

Base dual

Um fato importante sobre as 1-formas é que, dado uma base $\{e_A\}$ de $T_p M$, existe uma base $\{e^A\}$ em $T_p M^*$ tal que

$$\langle e^B, e_A \rangle = \delta^B_A. \quad (\text{B.6})$$

Neste caso, $\{e^B\}$ é dita ser a base dual de $\{e_A\}$. Para o caso particular da diferencial dx^μ e da derivada parcial $\partial/\partial x^\nu$, teremos

$$\langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu. \quad (\text{B.7})$$

Disto, percebemos que dx^μ é a base dual da base coordenada ∂_μ . Uma outra observação importante é que o espaço dual, necessariamente, tem a mesma dimensão do plano tangente. Além disto, dado uma das bases a outra fica determinada univocamente via a expressão acima.

Através da definição da aplicação de um vetor em uma 1-forma e de uma 1-forma em um vetor, é fácil concluir que para obtermos as componentes de destes objetos em uma dada base basta aplicar um objeto no seu dual. Exemplo: seja a 1-forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Para obter a componente de ω na base coordenada dx^μ , basta usarmos a base dual de dx^μ , ou seja, ∂_ν . Neste caso, teremos $\langle \omega, \partial_\nu \rangle = \langle \omega_\mu dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \omega_\mu \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \omega_\nu$. O contrário também é trivial. Se $V = V^\nu \partial_\nu$ é um vetor, então $\langle dx^\mu, V \rangle = V^\mu$ (veja (B.5)).

Produto exterior

Definição B.3.1 *Sejam duas 1-formas ω e σ definidas em $T_p M^*$. A aplicação $\omega \wedge \sigma : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\times$ significa produto direto⁴, definida por*

$$\omega \wedge \sigma(V, W) = \langle \omega, V \rangle \langle \sigma, W \rangle - \langle \sigma, V \rangle \langle \omega, W \rangle, \quad (\text{B.8})$$

onde V, W são vetores quaisquer de $T_p M$, é chamada de produto exterior.

B.4 Tensores

Nesta seção, definimos o objeto matemático conhecido como tensor. Este objeto tem sido de grande importância para física, pois, permite que expressões matemáticas e equações físicas sejam escritas de forma a serem independentes do sistema de coordenadas que é adotado. Em adição a isso, temos o fato dele ser de fácil manuseio e ser uma ferramenta de aplicação em praticamente, se não totalmente, todas as áreas da física. Embora seja muito comum na física o uso dos tensores de forma a eles dependerem da base na qual estão escritos. Aqui, adotaremos o formalismo independente de base. Portanto, tensores não terão índices, mas suas componentes em uma certa base sim.

Definição B.4.1 *Um tensor do tipo (q, r) é um objeto multilinear que leva q elementos de $T_p M^*$ e r elementos de $T_p M$ em um número real. O conjunto dos tensores do tipo (q, r) será denotado por $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$, e seus elementos podem ser escritos em termos das bases descritas anteriormente como*

$$T = T^{b_1 \dots b_q}_{a_1 \dots a_r} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_q}} \otimes dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_r}. \quad (\text{B.9})$$

O símbolo $\otimes$ representa o produto tensorial, veja definição em [15]. O leitor não deve ficar preocupado com o símbolo $\otimes$, pois ele serve apenas para organizar a atuação do tensor nos elementos de $T_p M$ e $T_p M^*$. Por exemplo, ao dizermos que um certo tensor é do tipo $A : T_p M^* \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, estamos dizendo que ele atuará em uma 1-forma ω e um vetor V , onde V será escrito ao lado direito de ω . Em termos matemáticos, A é escrito em uma base $\{e_\mu\}$ e sua dual $\{e^\mu\}$ como $A = A^\mu_\nu e_\mu \otimes e^\nu$ e sua atuação em V e ω é escrita na forma

⁴O leitor pode encontrar a definição de produto direto em qualquer enciclopédia de matemática, como por exemplo [15].

$A(\omega, V) = A^\mu_\nu e_\mu \otimes e^\nu(\omega, V) = A^\mu_\nu \langle \omega, e_\mu \rangle \langle e^\nu, V \rangle$. Nesta última expressão, observe a ordem entre os termos entre parêntese (ω, V) e a ordem da base $e_\mu \otimes e^\nu$. O primeiro de um atua no primeiro do outro etc. De maneira geral, se tivermos um tensor do tipo $T : T_p M^* \times \dots \times T_p M^* \times T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escrevê-lo em uma base $\{e_A\}$ e sua dual $\{e^A\}$ como

$$T = T^{A_1 \dots A_q}_{B_1 \dots B_r} e_{A_1} \otimes \dots \otimes e_{A_q} \otimes e^{B_1} \otimes \dots \otimes e^{B_r}.$$

Organiza-se a atuação de T nos elementos de $T_p M^*$ e $T_p M$ na forma

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \dots, \omega_q, V_1, \dots, V_r) &= T^{A_1 \dots A_q}_{B_1 \dots B_r} \langle \omega_1, e_{A_1} \rangle \dots \\ &\quad \langle \omega_q, e_{A_q} \rangle \langle e^{B_1}, V_1 \rangle \dots \langle e^{B_r}, V_r \rangle \end{aligned}$$

Note que, após identificarmos quais elementos da base atuam nos elementos que estão entre parêntese, eliminamos o símbolo $\otimes$, pois essa é a única função dele, ordenar a atuação da base. Escrevendo os ω s e os V s em termos das bases $\{e^A\}$ e $\{e_A\}$, respectivamente, a expressão acima fica

$$T(\omega_1 \dots \omega_q, V_1 \dots V_r) = T^{A_1 \dots A_q}_{B_1 \dots B_r} \omega_{1A_1} \dots \omega_{qA_q} V_1^{B_1} \dots V_r^{B_r}. \quad (\text{B.10})$$

B.5 Formas diferenciáveis

Nesta seção apresentamos o formalismo de formas diferenciáveis e assim generalizaremos o formalismo apresentado na seção B.3.

Definição B.5.1 *Denomina-se de forma diferenciável de ordem r todo tensor totalmente anti-simétrico do tipo $(0, r)$. É de costume nos referirmos a este tensor como uma r -forma e usaremos $\Omega_p^r(M)$ para representar o conjunto das r -formas definidas em um ponto p de uma variedade M .*

B.5.1 Produto exterior

Antes de definirmos o produto exterior, considere a seguinte definição: Dada a 1-forma dx^μ , definimos o *wedge product* (que representaremos por $\wedge$) por

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \quad (\text{B.11})$$

onde S_r é o grupo simétrico de ordem r e P um elemento de S_r ; $\text{sgn}(P) = 1$ para permutações pares e $\text{sgn}(P) = -1$ para permutações ímpares. Em termos práticos, a expressão acima significa que devemos somar todas as permutações possíveis, tendo como ponto de partida $dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}$, colocando “+” sempre que a troca for par e “−” quando a troca for ímpar. Exemplo:

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu, \\ dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu \\ &\quad + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda - dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu \\ &\quad - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda. \end{aligned}$$

Da definição acima, é fácil verificar as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} &= 0, \text{ se algum índice for repetido.} \\ dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} &= \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}. \\ dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} &\text{ é linear em cada } dx^\mu. \end{aligned}$$

Denotaremos o espaço vetorial das r -formas em p pertencentes a uma variedade M por $\Omega_p^r(M)$. No caso, se $\omega \in \Omega_p^r(M)$, podemos expandi-la em termos de (B.11), ou seja,

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (\text{B.12})$$

onde consideramos $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$ como anti-simétrico por razões óbvias, e $r!$ é o fator de normalização, uma vez que $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = r! \omega_{12 \dots r} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$.

Definição B.5.2 *Sejam ω e ξ uma q -forma e uma r -forma, respectivamente. Define-se o produto exterior de ω com ξ por*

$$\begin{aligned} &(\omega \wedge \xi)(V_1, \dots, V_{q+r}) = \\ &\frac{1}{q!r!} \sum_{P \in S_{q+r}} \text{sgn}(P) \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(q)}) \xi(V_{P(q+1)}, \dots, V_{P(q+r)}) \end{aligned}$$

Da definição acima, vemos que o produto exterior de uma q -forma com uma r -forma leva a uma $(q+r)$ -forma, ou seja, $\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M)$. Esta definição é basicamente uma generalização de (B.11).

B.5.2 Derivada exterior

Definição B.5.3 Define-se a derivada exterior como sendo uma aplicação que leva uma r -forma ω em uma $(r+1)$ -forma $d\omega$ da seguinte maneira:

$$d\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (\text{B.13})$$

Como exemplos de casos particulares, é relevante destacar:

1. Se $f = f(x, y, z)$ é uma 0 -forma, uma função, então

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad \textbf{Gradiente} \quad (1\text{-forma})$$

2. Se $\omega = \omega_x(x, y, z)dx + \omega_y(x, y, z)dy + \omega_z(x, y, z)dz$ (1 -forma), então

$$\begin{aligned} d\omega = & \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \quad \textbf{Rotacional} \quad (2\text{-forma}) \end{aligned}$$

3. Se $\omega = \omega_{xy}(x, y, z)dx \wedge dy + \omega_{yz}(x, y, z)dy \wedge dz + \omega_{zx}(x, y, z)dz \wedge dx$, então

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \quad \textbf{Divergente} \quad (3\text{-forma})$$

4. Se ω for uma 3 -forma,

$$d\omega = 0. \quad (\text{B.14})$$

Perceba que nestes exemplos, consideramos uma variedade M de dimensão 3. Além disso, note que o gradiente, o rotacional e o divergente assim definidos, são independente de coordenadas e de base.

B.5.3 Produto Interior

Definição B.5.4 Seja V um vetor de TM e $\omega \in \Omega^r(M)$. Define-se como **produto interior** a aplicação $i_V : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$, tal que

$$i_V \omega(V_1, \dots, V_{r-1}) = \omega(V, V_1, \dots, V_{r-1}). \quad (\text{B.15})$$

Se tomarmos $V = V^\mu \partial_\mu$ e $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$, a definição acima implica

$$i_V \omega = \frac{1}{(r-1)!} V^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (\text{B.16})$$

B.5.4 Derivada de Lie

No formalismo de formas diferenciáveis, a derivada de Lie é escrita em termo do produto interior e da derivada exterior da seguinte maneira:

Definição B.5.5 *Sejam V um vetor de TM e $\omega \in \Omega^r(M)$. Define-se por derivada de Lie*

$$\mathcal{L}_V \omega = (di_V + i_V d)\omega \quad (\text{B.17})$$

B.5.5 A conexão 1-forma

Definição B.5.6 *Sejam e^A uma 1-forma e ω^A_{BC} a conexão linear definida sobre uma variedade M . Denomina-se de conexão 1-forma ω^A_B , a conexão dada por*

$$\omega^A_B = \omega^A_{CB} e^C. \quad (\text{B.18})$$

Apenas para relembrar, a conexão linear é definida por $\nabla_{e_A} e_B = \omega^C_{AB} e_C$, onde ω^C_{AB} são os coeficientes da expansão da conexão na base e_C .

É possível demonstrar que a conexão 1-forma satisfaz as equações de estrutura de Cartan, ou seja,

$$\begin{aligned} de^A + \omega^A_B \wedge e^B &= T^A, \\ d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B &= R^A_B, \end{aligned}$$

onde $T^A = \frac{1}{2} T^A_{bc} e^b \wedge e^c$ e $R^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} e^C \wedge e^D$ são a *torção 2-forma* e a *curvatura 2-forma*, respectivamente.

Também pode-se verificar que as identidades de Bianchi podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} dT^A + \omega^A_B \wedge T^B &= R^A_B \wedge e^B \\ dR^A_B + \omega^A_C \wedge R^C_B - R^A_C \wedge \omega^C_B &= 0. \end{aligned}$$

B.5.6 Integração de Formas diferenciáveis

É possível definir a integração de formas diferenciáveis em uma variedade M quando M é orientável. Abaixo segue a definição de variedade orientável:

Definição B.5.7 *Uma variedade M é orientável se, dado duas cartas U_i e U_j tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe coordenadas locais $\{x^\mu\}$ para U_i e $\{y^\nu\}$ para U_j tais que $\det(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}) > 0$.*

Se uma variedade de dimensão m é orientável, então existe uma m -forma ω que não se anula em nenhuma região. Esta m -forma é denominada de elemento de volume. Com isto, podemos definir a integração de formas diferenciáveis da seguinte maneira:

Definição B.5.8 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida sobre uma variedade orientável M , e uma vizinhança coordenada U_i com coordenada x . Define-se a integração de uma m -forma $f\omega = fhdx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ por*

$$\int_{U_i} f\omega = \int_{\phi(U_i)} f(\phi^{-1}(x))h(\phi^{-1}(x))dx^1 \dots dx^m, \quad (\text{B.19})$$

A integração acima é sobre $\phi(U_i)$, todavia ela pode ser facilmente generalizada para toda a variedade⁵.

B.5.7 Elementos de volume invariantes

Para variedades dotadas de uma métrica g , existe um elemento de volume invariante frente a transformações de coordenada. Define-se este elemento por

$$\Omega = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (\text{B.20})$$

onde g é o determinante da métrica e n é a dimensão da variedade.

Podemos reescrever o elemento de volume em termos da base de tetradas $e^A = e^A_\mu dx^\mu$. Neste caso, Ω toma a forma

$$\Omega = |\det(e^A_\mu)|dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n. \quad (\text{B.21})$$

Com o elemento de volume definido, podemos reescrever a definição de integração de uma função f sobre uma variedade M por

$$\int_M f\Omega_M = \int_M f\sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (\text{B.22})$$

B.5.8 O símbolo de Levi-Civita ϵ

Em nossa notação, usaremos a seguinte definição

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} \equiv \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} \equiv \epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$$

⁵Veja a subseção 5.5.2 de [39].

$$\equiv \begin{cases} +1 & \text{para permutação par de índices a partir de } 12 \dots m \\ -1 & \text{para permutação ímpar de índices a partir de } 12 \dots m \\ 0 & \text{para os outros casos.} \end{cases}$$

Perceba a sutileza na definição acima. A densidade tensorial $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ coincide com o símbolo $\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$, todavia nada foi dito sobre $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$. O leitor deve estar atento para o fato de que muitos autores adotam $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ com sendo o levantamento dos índices de $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ [39], porém outros adotam $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ como o inverso de $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ [184]. Para evitar ambigüidades, adotaremos a definição de que $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ seja a densidade tensorial obtida a partir do levantamento dos índices de $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\nu_1\dots\nu_m} &= g^{\nu_1\mu_1} \dots g^{\nu_m\mu_m} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = g^{-1} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} \\ &= g^{-1} \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = g^{-1} \epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}. \end{aligned}$$

Já o símbolo $\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$, conhecido como *símbolo de Levi-Civita alternado*, definimos como sendo o inverso de $\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$. Pode-se demonstrar que os símbolos de Levi-Civita, assim definidos, satisfazem a seguinte relação:

$$\epsilon_{\mu_1\dots\mu_m} \epsilon^{\nu_1\dots\nu_m} = \begin{vmatrix} \delta^{\nu_1}_{\mu_1} & \dots & \delta^{\nu_m}_{\mu_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta^{\nu_1}_{\mu_m} & \dots & \delta^{\nu_m}_{\mu_m} \end{vmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

onde as barras $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ indicam o determinante.

Outra maneira de evitar a ambigüidade acima destacada, é vendo $\epsilon_{\mu_1\dots\mu_m}$ e $\epsilon^{\mu_1\dots\mu_m}$ como componentes de tensores, porém tendo em mente que $\epsilon^{\mu_1\dots\mu_m}$ não é a versão contravariante de $\epsilon_{\mu_1\dots\mu_m}$, ou seja, $\epsilon^{\mu_1\dots\mu_m} \neq g^{\mu_1\nu_1} \dots g^{\mu_m\nu_m} \epsilon_{\nu_1\dots\nu_m}$.

B.5.9 Transformações de Dualidade (Hodge Star)

Como $\Omega^r(M)$ é isomórfico a $\Omega^{m-r}(M)$, onde m é a dimensão de M , e sendo M dotada de uma métrica g , podemos definir um isomorfismo entre $\Omega^r(M)$ e $\Omega^{m-r}(M)$. À este isomorfismo, dá-se o nome de operação de Hodge (*Hodge operation*) e usa-se o símbolo $\star$ para representar a operação.

Definição B.5.9 A operação de dualidade $\star : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M)$ é definida como

$$\begin{aligned} \star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \\ \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_{r+1}\dots\nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \end{aligned}$$

A definição acima implica naturalmente

$$\star\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (\text{B.24})$$

B.5.10 Produto interno de r -formas

Definição B.5.10 *Sejam ω e σ duas r -formas. Define-se o **produto interno** de ω com σ por*

$$(\omega, \sigma) = \int \omega \wedge \star\sigma. \quad (\text{B.25})$$

Pode-se demonstrar que

$$(\omega, \sigma) = \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \omega^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^m. \quad (\text{B.26})$$

Temos que $\omega \wedge \star\sigma = \sigma \wedge \star\omega$ e, portanto, $(\omega, \sigma) = (\sigma, \omega)$.

B.5.11 Adjunto da derivada exterior

Definição B.5.11 *Seja $d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ o operador derivada exterior, e $m = \dim M$. Define-se o operador adjunto de d para uma geometria riemanniana por*

$$d^\dagger = (-1)^{mr+m+1} \star d \star, \quad (\text{B.27})$$

já para uma geometria Lorentziana

$$d^\dagger = (-1)^{mr+m} \star d \star. \quad (\text{B.28})$$

B.5.12 O Laplaciano

Na linguagem de formas diferenciais, o Laplaciano é definido da seguinte forma:

Definição B.5.12 *Define-se o Laplaciano como sendo aplicação $\Delta : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ dada por*

$$\Delta = (d + d^\dagger)^2 = dd^\dagger + d^\dagger d. \quad (\text{B.29})$$

Para fazermos um paralelo com a notação tensorial de componentes, tomemos o Laplaciano de uma função f . Como f é uma função, 0-forma, então $\star f = \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = \sqrt{|g|} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. Perceba que na expressão anterior foi usado o fato

trivial $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = m! dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, que é consequência de $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_m}$ e $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m}$ serem totalmente anti-simétricos e $\varepsilon_{12 \dots m} = +1$. Voltando a expressão para $\star f$, percebemos que $d\star f = (f\sqrt{|g|})_{,\nu} dx^\nu \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = 0$, onde o zero vem do fato de que necessariamente teremos sempre um índice repetido, pois $\nu = 1, 2, 3 \dots m$. Disto, concluimos que $d^\dagger f = 0$. Portanto, a aplicação do Laplaciano na geometria riemanniana (não-Lorentziana) em f resume-se a forma

$$\begin{aligned}
\Delta f &= d^\dagger df = d^\dagger f_{,\mu} dx^\mu = (-1)^{m+1} \star d \star f_{,\mu} dx^\mu \\
&= (-1)^{m+1} \star d \frac{\sqrt{g}}{(m-1)!} f_{,\mu} g^{\mu\nu_1} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= \star \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} (\sqrt{g} f_{,\mu} g^{\mu\nu_1})_{,\alpha} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} dx^\alpha \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{g}}{(m-1)!} (\sqrt{g} f_{,\mu} g^{\mu\nu_1})_{,\alpha} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \varepsilon^{\alpha \nu_2 \dots \nu_m} \\
&= (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{g}}{(m-1)!} (\sqrt{g} f_{,\mu} g^{\mu\nu_1})_{,\alpha} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} g^{-1} \epsilon^{\alpha \nu_2 \dots \nu_m} \\
&= (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{g}}{(m-1)!} (\sqrt{g} f_{,\mu} g^{\mu\nu_1})_{,\alpha} g^{-1} (m-1)! \delta^\alpha_{\nu_1} \\
&= (-1)^{m+1} \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} f_{,\mu} g^{\mu\alpha})_{,\alpha},
\end{aligned}$$

onde foi utilizado $\varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} = \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m}$, também $\varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_m} = g^{-1} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_m}$ e $\epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \epsilon^{\alpha \nu_2 \dots \nu_m} = (m-1)! \delta^\alpha_{\nu_1}$ (veja a seção B.5.8).

B.5.13 Algumas propriedades importantes

O uso do formalismo de formas diferenciais pode se tornar muito desgastante se toda vez que iniciarmos uma conta precisarmos demonstrar certas propriedades que quase sempre serão utilizadas. Por esta razão, apresentaremos algumas propriedades importantes para quem estiver interessado no uso desse formalismo. Algumas das propriedades que serão apresentadas aqui são redundantes, ou seja, podem ser obtidas a partir de outras; todavia, apresentá-las facilita os cálculos neste formalismo. Uma observação importante a ser feita é a de que o leitor deve sempre estar atento para diferenças na notação que usa com a notação aqui estabelecida⁶.

⁶A notação que adotamos para formas diferenciais é basicamente a de [39].

Produto exterior

Sejam $\xi \in \Omega^q(M)$, $\eta \in \Omega^r(M)$ e $\omega \in \Omega^s(M)$. As seguintes propriedades são válidas:

$$\xi \wedge \xi = 0 \quad \text{se } q \text{ for ímpar} \quad (\text{B.30})$$

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \xi \quad (\text{B.31})$$

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \omega = \xi \wedge (\eta \wedge \omega). \quad (\text{B.32})$$

Derivada exterior

Sejam $\xi \in \Omega^q(M)$, $\omega \in \Omega^r$ e V_j vetores de TM . Pode-se verificar que:

$$\begin{aligned} d(\xi \wedge \omega) &= d\xi \wedge \omega + (-1)^q \xi \wedge d\omega, \\ d\omega(V_1 \dots V_{r+1}) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} V_i \omega(V_1, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([V_j, V_i], V_1, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_{r+1}) d^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

onde o circunflexo sobre os vetores indica a ausência do mesmo.

Produto interior e derivada de Lie

Sejam V e W vetores de TM e $\omega \in \Omega^r(M)$. As seguintes propriedades são válidas⁷:

$$i_{[V,W]}\omega = V(i_W\omega) - W(i_V\omega), \quad (\text{B.34})$$

$$i_V(\omega \wedge \eta) = i_V\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_V\eta, \quad (\text{B.35})$$

$$i_V^2 = 0, \quad (\text{B.36})$$

$$\mathcal{L}_V i_V \omega = i_V \mathcal{L}_V \omega. \quad (\text{B.37})$$

Hodge star

Para uma variedade M de dimensão m , temos:

$$\star 1 = \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \quad (\text{B.38})$$

⁷O leitor pode confirmar estas expressões em [39], equações (5.83-6).

Considerando a base não-coordenada $\{e^A\} = \{e^A_{\mu} dx^{\mu}\}$ em uma variedade de dimensão m , teremos⁸

$$\star(e^{A_1} \wedge \dots \wedge e^{A_r}) = \frac{1}{(m-r)!} \varepsilon^{A_1 \dots A_r}_{B_{r+1} \dots B_m} e^{B_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{B_m}. \quad (\text{B.39})$$

Se a variedade M , de dimensão m , é riemanniana e $\omega \in \Omega^r(M)$, então:

$$\star \star \omega = (-1)^{r(m-r)} \omega, \quad (\text{B.40})$$

$$\star^{-1} = (-1)^{r(m-r)} \star \quad (\text{B.41})$$

Porém, se M for lorentziana, teremos:

$$\star \star \omega = (-1)^{1+r(m-r)} \omega, \quad (\text{B.42})$$

$$\star^{-1} = (-1)^{1+r(m-r)} \star. \quad (\text{B.43})$$

Outras propriedades

Dadas duas r -formas ω e η , temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \star \eta &= \eta \wedge \star \omega \\ &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Em termos da base de tetradas $\{e^A\}$, temos:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \star \eta &= \eta \wedge \star \omega \\ &= \frac{1}{r!} \omega_{A_1 \dots A_r} \eta^{A_1 \dots A_r} e^1 \wedge \dots \wedge e^m. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Seja (M, g) uma variedade compacta, orientável, sem fronteira, e $\alpha \in \Omega^r(M)$, $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, então:

$$(d\beta, \alpha) = (\beta, d^\dagger \alpha), \quad (\text{B.46})$$

onde os parênteses indicam o produto interno (B.26). O leitor interessado em maiores detalhes, pode consultar [39, 184]. O leitor também pode verificar as expressões (B.30), (B.31), (B.32), (B.33), (B.34), (B.34), (B.35), (B.36), (B.37), (B.38), (B.39), (B.40), (B.41), (B.42), (B.43), (B.44), (B.45) e (B.46) em [39], expressões 5.67a-c, 5.69, 5.71-2,

⁸O leitor pode verificar as propriedades aqui indicadas em [39], expressões 7.174, 7.176a, 7.176b, 7.177a e 7.177b.

5.83-86, 7.174, 7.176a-b, 7.177a-b, 7.178, 7.179, 7.180, 7.186 presentes nos capítulos 5 e 7. Abaixo segue outras propriedades fáceis de serem verificadas.

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_j \mu_{j+1} \dots \mu_m} dx^{\mu_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \\ &= (m-j)! \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_j \dot{\mu}_{j+1} \dots \dot{\mu}_m} dx^{\dot{\mu}_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\dot{\mu}_m}, \end{aligned}$$

onde o ponto sobre os índices está sendo usado para representa índices que não estão somados. Além disto, admite-se que os índices com estes pontos sejam todos diferentes uns dos outros (não há repetições).

Apêndice C

Análise da estabilidade de sistemas não lineares

Para analisar a estabilidade de sistemas não lineares, é necessário fazermos uma análise da estabilidade de sistemas lineares. Por esta razão, começaremos com a análise de sistemas lineares.

C.1 Sistemas lineares

Os sistemas lineares são um conjunto de equações que apresentam apenas dependência linear de suas variáveis. Usa-se o termo “ordem” para distinguir estes sistemas pelo número de variáveis independentes que eles possuem. Aqui, entretanto, estaremos interessado apenas em sistemas de segunda ordem, ou seja, sistemas com apenas duas variáveis independentes.

De maneira geral, sistemas lineares de segunda ordem podem ser escritos da seguinte forma [149]

$$\dot{X} = \mathbb{A}X, \tag{C.1}$$

onde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

e

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

onde a , b , c e d são constantes.

As análises que faremos aqui terão como ponto de partida o espaço de fase, ou seja, o plano formado por X e $\dot{X}$.

C.1.1 Ponto de equilíbrio

Pontos de equilíbrio, também conhecido como pontos fixos, são os pontos onde todas as derivadas se anulam, ou sejam, são os pontos críticos do sistema. Matematicamente, em um dado ponto crítico X_0 teremos

$$\mathbb{A}X_0 = 0. \quad (\text{C.4})$$

Para os casos nos quais o determinante da matriz $\mathbb{A}$ é diferente de zero, teremos apenas um ponto de equilíbrio, enquanto que no caso do determinante de $\mathbb{A}$ ser nulo, teremos uma quantidade infinita de pontos de equilíbrio [149]. Para saber qualitativamente como a solução do sistema (C.1) se comporta próximo ao ponto de equilíbrio, temos que analisar os autovalores da matriz $\mathbb{A}$. Neste caso, teremos que analisar a equação

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

A solução desta equação pode fornecer tanto um λ real quanto imaginário e, além disto, poderemos ter dois autovalores com sinais iguais ou diferentes. A análise do comportamento da solução de (C.1) dependerá exatamente destas características, como indicado abaixo.

C.1.2 Casos com λ real

1. Se os dois autovalores tiverem o mesmo sinal e forem positivos, então, o ponto de equilíbrio é um *nó repulsivo*, que é instável.
2. Se os dois autovalores tiverem o mesmo sinal e forem negativos, então o ponto de equilíbrio é um *nó atrativo*, que é estável.

3. Se os dois autovalores tiverem sinais diferentes, as trajetórias no espaço de fase serão hipérboles com centro na origem, que é instável.

O termo estável significa que as trajetórias tendem a convergir para o ponto de equilíbrio.

C.1.3 Casos com λ imaginário

No caso de λ complexo, poderemos expressá-lo como $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$, onde α e β são reais. Neste caso, é possível demonstrar que a matriz $\mathbb{A}$ pode ser reescrita na forma [149]

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Da definição de α e β segue os seguintes resultados

1. Se α for negativo, as trajetórias serão espirais que se aproximam da origem (*foco atrativo*).
2. Se α for positivo, então as trajetórias saem da origem (*foco repulsivo*).
3. Se α for nulo, equivalente a λ ser um imaginário puro, então, as trajetórias serão elipses com centro na origem (*centro*).

C.2 Sistemas autônomos não lineares de segunda ordem

Os sistemas autônomos não lineares e de segunda ordem são caracterizados pelas seguintes equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

onde ponto acima das letras significa $d/d\lambda$, e as funções F, G não dependem explicitamente de λ .

Fazendo uma expansão de Taylor para F e G em torno dos pontos críticos e deslocando a origem das coordenadas para esses pontos, percebemos que o sistema (C.7) pode

ser tratado como um sistema linear nas proximidades dos pontos críticos [149]. Assim, teremos

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

onde $u \equiv x - x_0$ e $v \equiv y - y_0$. Podemos, portanto, analisar o comportamento da solução de (C.7) próximo ao ponto de equilíbrio analisando os autovalores da matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}, \quad (\text{C.9})$$

como fizemos no caso linear. A única diferença é que, devido a mudança na origem das coordenadas, o termo “centro” usado nas análises feitas nas subseções C.1.2 e C.1.3 deve ser substituído pelo ponto crítico, ou seja, por (x_0, y_0) .

O método aqui apresentado é utilizado no capítulo 6 para analisar o confinamento de autoparalelas.

Apêndice D

Expressões e Identidades

Exibiremos aqui expressões e identidades que são importantes para esta tese. Sempre que conveniente, as demonstraremos. Em especial, dedicamos a seção D.3 a demonstração de algumas das expressões e identidades apresentadas no capítulo 7.

D.1 Expressões tensoriais

D.1.1 Derivada ordinária da métrica em termos da conexão afim

Embora a derivada covariante da métrica num espaço com não-metricidade mude, a derivada ordinária do determinante da métrica continuará tendo a seguinte forma

$$\partial_\mu g = g g^{\lambda\nu} g_{\lambda\nu,\mu}, \quad (\text{D.1})$$

pois, do jeito que ela está escrita acima, ela depende apenas da definição de métrica. Na verdade, (D.1) é válido para qualquer matriz $n \times n$, veja a demonstração na página 93 de [18]. A expressão (D.1) também mantém a forma quando expressa em termos dos símbolos de Christoffel, porém mudam quando expressa em termos da conexão afim. De (5.3), temos que

$$\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\lambda\alpha} = N_{\lambda\nu\mu} \quad (\text{D.2})$$

ou, equivalentemente,

$$\partial_\mu g_{\lambda\nu} = N_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\lambda\alpha}. \quad (\text{D.3})$$

Substituindo (D.3) em (D.1), teremos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu g &= gg^{\lambda\nu} (N_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\lambda\alpha}) \\
&= g (N_{\nu\mu}^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \delta_\alpha^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_\alpha^\nu) \\
&= g (N_{\nu\mu}^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\nu) \\
&= g N_{\nu\mu}^\nu + 2g \Gamma_{\mu\nu}^\nu \\
&= 2g \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\nu,
\end{aligned} \tag{D.4}$$

onde da penúltima para última linha usamos $\overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\nu = -\frac{1}{2}N_{\nu\mu}^\nu$ e $K_{\mu\nu}^\nu = 0$. Calculemos $\partial_\mu \sqrt{-g}$.

$$\partial_\mu \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{-\partial_\mu g}{\sqrt{-g}}. \tag{D.5}$$

Usando (D.4) na expressão acima,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \frac{-g N_{\nu\mu}^\nu - 2g \Gamma_{\mu\nu}^\nu}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \frac{-g N_{\nu\mu}^\nu}{\sqrt{-g}} + \frac{1}{2} \frac{-2g \Gamma_{\mu\nu}^\nu}{\sqrt{-g}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} N_{\nu\mu}^\nu + \sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^\nu
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} N_{\nu\mu}^\nu + \sqrt{-g} \overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\nu \\
&= \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\nu,
\end{aligned} \tag{D.7}$$

onde usamos $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \overset{c}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + K_{\mu\nu}^\lambda$, o fato de $\overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^\nu = -\frac{1}{2}N_{\nu\mu}^\nu$ (veja (5.6)), e $K_{\mu\nu}^\nu = 0$ (veja 4.18). É visível que (D.7) não depende nem da torção e nem do tensor de não-metricidade. Vale apenas destacar que a identidade (D.7) é muito útil durante a aplicação do cálculo variacional, porém a forma (D.6) tem a vantagem de já estar escrita em termos da conexão afim.

D.1.2 Tensor de Riemann em uma certa base

Para escrevermos o tensor de Riemann $R(V, U)W$ em termos de uma base qualquer, tomemos os vetores $V = V^\mu e_\mu$, $U = U^\nu e_\nu$ e $W = W^\alpha e_\alpha$. Desta forma, podemos simplificar (4.21) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
R(V, U)W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (U^\nu \nabla_{e_\nu} W^\beta e_\beta) - U^\nu \nabla_{e_\nu} (V^\mu \nabla_{e_\mu} W^\beta e_\beta) - \nabla_{[V, U]} W \\
&= V^\mu U^\nu \cancel{\nabla_{e_\nu} W^\beta e_\beta}^a + V^\mu U^\nu \nabla_{e_\mu} (W^\beta_{,\nu} e_\beta + W^\beta \nabla_{e_\nu} e_\beta) - U^\nu V^\mu \cancel{\nabla_{e_\mu} W^\beta e_\beta}^a \\
&\quad - U^\nu V^\mu \nabla_{e_\nu} (W^\beta_{,\mu} e_\beta + W^\beta \nabla_{e_\mu} e_\beta) - \nabla_{V^\mu U^\nu_{,\mu} e_\nu - U^\nu V^\mu_{,\nu} e_\mu} W = V^\mu U^\nu (W^\beta_{,\nu\mu} \cancel{e_\beta}^b \\
&\quad + W^\beta_{,\nu} \cancel{\nabla_{e_\mu} e_\beta}^d + V^\mu U^\nu W^\beta_{,\mu} \cancel{\nabla_{e_\nu} e_\beta}^c + V^\mu U^\nu W^\beta \nabla_{e_\mu} \nabla_{e_\nu} e_\beta - U^\nu V^\mu (W^\beta_{,\mu\nu} \cancel{e_\beta}^b \\
&\quad + W^\beta_{,\mu} \cancel{\nabla_{e_\nu} e_\beta}^c) - U^\nu V^\mu W^\beta_{,\nu} \cancel{\nabla_{e_\mu} e_\beta}^d - U^\nu V^\mu W^\beta \nabla_{e_\nu} \nabla_{e_\mu} e_\beta \\
&= V^\mu U^\nu W^\beta (\nabla_{e_\mu} \nabla_{e_\nu} e_\beta - \nabla_{e_\nu} \nabla_{e_\mu} e_\beta) \\
&= V^\mu U^\nu W^\beta [\nabla_{e_\mu} (\Gamma^\alpha_{\nu\beta} e_\alpha) - \nabla_{e_\nu} (\Gamma^\alpha_{\mu\beta} e_\alpha)] \\
&= V^\mu U^\nu W^\beta ((\Gamma^\alpha_{\nu\beta,\mu} e_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \nabla_{e_\mu} e_\alpha) - (\Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} e_\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \nabla_{e_\nu} e_\alpha)) \\
&= V^\mu U^\nu W^\beta ((\Gamma^\alpha_{\nu\beta,\mu} e_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} e_\lambda) - (\Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} e_\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} e_\lambda)) \\
&= V^\mu U^\nu W^\beta (\Gamma^\lambda_{\nu\beta,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}) e_\lambda, \tag{D.8}
\end{aligned}$$

onde foram usadas as propriedades da derivada covariante; os termos indicados pelos riscos com a mesma letra se cancelam. Tomando $\{e_\mu\}$ como sendo uma base coordenada e $V^\mu = \delta^\mu_\alpha$, $U^\nu = \delta^\nu_\sigma$, $W^\beta = \delta^\beta_\rho$, a expressão (D.8) fica

$$R_{\rho\alpha\sigma} = (\Gamma^\lambda_{\sigma\rho,\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho,\sigma} + \Gamma^\phi_{\sigma\rho} \Gamma^\lambda_{\alpha\phi} - \Gamma^\phi_{\alpha\rho} \Gamma^\lambda_{\sigma\phi}) \partial_\lambda \tag{D.9}$$

que, aplicando dx^μ e definido $R^\mu_{\rho\alpha\sigma} \equiv \langle dx^\mu, R(\partial_\alpha, \partial_\sigma) \partial_\rho \rangle$, fornece

$$R^\mu_{\rho\alpha\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho,\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \Gamma^\phi_{\sigma\rho} \Gamma^\mu_{\alpha\phi} - \Gamma^\phi_{\alpha\rho} \Gamma^\mu_{\sigma\phi}. \tag{D.10}$$

D.1.3 Explicitando a contorção no tensor de Riemann

Podemos explicitar a contorção no tensor de Riemann usando (4.15) da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
R^\mu_{\rho\alpha\sigma} &= \overset{c}{R}^\mu_{\rho\alpha\sigma} + K^\mu_{\sigma\rho,\alpha} - K^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + K^\phi_{\sigma\rho} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\alpha\phi} + \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\sigma\rho} K^\mu_{\alpha\phi} \\
&\quad + K^\phi_{\sigma\rho} K^\mu_{\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\sigma\phi} - \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\alpha\rho} K^\mu_{\sigma\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} K^\mu_{\sigma\phi} = \overset{c}{R}^\mu_{\rho\alpha\sigma} \\
&\quad + K^\mu_{\sigma\rho,\alpha} + K^\phi_{\sigma\rho} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\alpha\phi} - \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\alpha\rho} K^\mu_{\sigma\phi} + \overbrace{\overset{c}{\Gamma}^\phi_{\alpha\sigma} K^\mu_{\phi\rho} - \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\alpha\sigma} K^\mu_{\phi\rho}}^0 \\
&\quad - K^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\sigma\rho} K^\mu_{\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\sigma\phi} + \overbrace{\overset{c}{\Gamma}^\phi_{\sigma\alpha} K^\mu_{\phi\rho} - \overset{c}{\Gamma}^\phi_{\sigma\alpha} K^\mu_{\phi\rho}}^0 \\
&\quad + K^\phi_{\sigma\rho} K^\mu_{\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} K^\mu_{\sigma\phi} = \overset{c}{R}^\mu_{\rho\alpha\sigma} + K^\mu_{\sigma\rho:\alpha} - K^\mu_{\alpha\rho:\sigma} \\
&\quad + K^\phi_{\sigma\rho} K^\mu_{\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} K^\mu_{\sigma\phi}.
\end{aligned}$$

D.2 Demonstração da propriedade (5.17)

Usando (5.18) em (5.17), podemos realizar o seguinte cálculo.

$$\begin{aligned}
 & \cancel{R}_{\mu\nu\alpha\beta}^N + \cancel{R}_{\mu\beta\nu\alpha}^N + \cancel{R}_{\mu\alpha\beta\nu}^N = \cancel{\Gamma}_{\mu\beta\nu,\alpha}^N - \cancel{\Gamma}_{\mu\alpha\nu,\beta}^N + \cancel{\Gamma}_{\mu\alpha\beta,\nu}^N - \cancel{\Gamma}_{\mu\nu\beta,\alpha}^N + \\
 & \quad \cancel{\Gamma}_{\mu\nu\alpha,\beta}^N - \cancel{\Gamma}_{\mu\beta\alpha,\nu}^N + \cancel{\Gamma}_{\beta\nu}^{N\phi} \cancel{P}_{\mu\alpha\phi}^N - \cancel{\Gamma}_{\alpha\nu}^{N\phi} \cancel{P}_{\mu\beta\phi}^N + \cancel{\Gamma}_{\alpha\beta}^{N\phi} \cancel{P}_{\mu\nu\phi}^N \\
 & \quad - \cancel{\Gamma}_{\nu\beta}^{N\phi} \cancel{P}_{\mu\alpha\phi}^N + \cancel{\Gamma}_{\nu\alpha}^{N\phi} \cancel{P}_{\mu\beta\phi}^N - \cancel{\Gamma}_{\beta\alpha}^{N\phi} \cancel{P}_{\mu\nu\phi}^N = 0,
 \end{aligned}$$

onde os índices indicados com a mesma letra se cancelam; usamos a simetria nos índices de baixo da conexão para podermos cancelar os termos indicados com as letras “d”, “e” e “f”.

D.3 Cálculos do capítulo 7

Nesta seção fazemos várias demonstrações, todas associadas com o capítulo 7.

D.3.1 Contraíndo a contorção com $\gamma^A\gamma^B\gamma^C$

Considere a seguinte definição

$$\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]} \equiv \frac{1}{6} (\gamma^A\gamma^B\gamma^C + \gamma^C\gamma^A\gamma^B + \gamma^B\gamma^C\gamma^A - \gamma^A\gamma^C\gamma^B - \gamma^B\gamma^A\gamma^C - \gamma^C\gamma^B\gamma^A), \quad (D.11)$$

onde os gamas são as matrizes de Dirac. Da definição acima, vemos que $\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}$ é totalmente anti-simétrico. Além disso, usando as propriedades das matrizes de Dirac, é possível demonstrar¹ que

$$\gamma^A\gamma^B\gamma^C = \gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]} + \eta^{CB}\gamma^A + \eta^{BA}\gamma^C - \eta^{CA}\gamma^B. \quad (D.12)$$

Calculemos o termo $\frac{1}{4}K_{BAC}\gamma^A\gamma^B\gamma^C$ em termos de $\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}$. Usando D.12,

$$\frac{1}{4}K_{BAC}\gamma^A\gamma^B\gamma^C = \frac{1}{4} \left(K_{BAC}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]} + \cancel{K_{AC}^C\gamma^A}^0 + K_{AC}^A\gamma^C - K_C^A\gamma^C \right)$$

¹Essa demonstração é muito simples e pode ser encontrada na página 259 de [2], equação 10.155.

$$= \frac{1}{4} (K_{BAC} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} + K_{AC}^A \gamma^C - K_C^A \gamma^C),$$

onde usamos o fato de $K_{ABC} = -K_{CBA}$. De (4.14), vemos que $K_{AC}^A \gamma^C - K_C^A \gamma^C = -2T_{CA}^A \gamma^C$. Substituindo na expressão acima,

$$\frac{1}{4} K_{BAC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C = \frac{1}{4} (K_{BAC} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - 2T_{CA}^A \gamma^C).$$

Para deixarmos a expressão anterior em uma forma mais conveniente, somemos e subtraímos o lado direito da expressão acima por $\frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]}$. Fazendo isto, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} K_{BAC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C &= \frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} + \frac{1}{4} \left(-K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \right. \\ &\quad \left. + K_{BAC} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - 2T_{CA}^A \gamma^C \right) = \frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(-2K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - 2T_{CA}^A \gamma^C \right) = \frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \\ &\quad - \frac{1}{2} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - \frac{1}{2} T_{CA}^A \gamma^C = -\frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - \frac{1}{2} T_{CA}^A \gamma^C. \end{aligned}$$

Assim, chegamos a

$$\frac{1}{4} K_{BAC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C = -\frac{1}{4} K_{CAB} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} - \frac{1}{2} T_{CA}^A \gamma^C. \quad (\text{D.13})$$

Note que, devido a anti-simetria no primeiro e no último índice da contorção, temos a igualdade $\frac{1}{4} K_{BAC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C = \frac{1}{8} K_{BAC} \gamma^A [\gamma^B, \gamma^C]$.

D.3.2 Demonstração de (7.14)

Para demonstrar (7.14), basta seguir o raciocínio:

$$\begin{aligned} \xi'^d (\xi'_a) &= \delta_a^d \Rightarrow \\ \xi'^d ((S^{-1})^c{}_a \xi_c) &= \delta_a^d \Rightarrow \\ (S^{-1})^c{}_a \xi'^d (\xi_c) &= \delta_a^d \Rightarrow \\ (S^{-1})^c{}_a A^d{}_b \xi^b (\xi_c) &= \delta_a^d \Rightarrow \\ (S^{-1})^c{}_a A^d{}_b \delta_c^b &= \delta_a^d \Rightarrow \\ (S^{-1})^c{}_a A^d{}_c &= \delta_a^d \Rightarrow \\ A^d{}_b &= S^d{}_b, \end{aligned}$$

onde na terceira linha usamos a linearidade de ξ^a , na quarta supomos que $\xi'^d = A^d_b \xi^b$ e na penúltima linha multiplicamos toda a expressão por S^a_b .

D.3.3 Demonstração de $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$

A demonstração da propriedade $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$ é feita da seguinte maneira. Sabemos que

$$\Lambda_{1A}{}^B \Lambda_{2B}{}^C = \Lambda_{3A}{}^C.$$

Contraindo com e_C , podemos escrever

$$\Lambda_{1A}{}^B e_{2B} = e_{3A},$$

onde $e_{jB} = \Lambda_{jB}{}^C e_C$. Aplicando ζ e usando $\zeta(\Lambda_A{}^B e_B) = (S^{-1})^b{}_a \zeta(e_B)$, teremos

$$(S^{-1})^b{}_a (\Lambda_1) \zeta(e_{2B}) = \zeta(e_{3A}).$$

Por definição, para cada elemento e_A há pelo menos um ξ_a associado via ζ e $\zeta(e_{2B}) \neq \zeta(e_{3A})$. Portanto,

$$\begin{aligned} (S^{-1})^b{}_a (\Lambda_1) \zeta(e_{2B}) &= \zeta(e_{3A}) \Rightarrow \\ (S^{-1})^b{}_a (\Lambda_1) \xi_{2b} &= \xi_{3a} \Rightarrow \\ (S^{-1})^b{}_a (\Lambda_1) (S^{-1})^c{}_b (\Lambda_2) \xi_c &= (S^{-1})^c{}_a (\Lambda_3) \xi_c. \end{aligned}$$

Removendo ξ_c e observando os índices que estão sendo somados, chegamos a

$$S^{-1}(\Lambda_2) S^{-1}(\Lambda_1) = S^{-1}(\Lambda_3).$$

Para finalizar a demonstração, basta multiplicarmos esta última expressão por $S(\Lambda_3)$ pela direita, depois multiplicarmos $S(\Lambda_2)$ pela esquerda e por último multiplicarmos $S(\Lambda_1)$ pela esquerda.

D.3.4 Demonstração de (7.19)

Da definição 7.4.3, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_A} \xi^b(\xi_a) &= (\nabla_{e_A} \xi^b) \xi_a + \xi^b(\nabla_{e_A} \xi_a) = 0 \Rightarrow \\ (\nabla_{e_A} \xi^b) \xi_a &= -\xi^b(\nabla_{e_A} \xi_a). \end{aligned}$$

Usando a definição (7.18), ficamos com $(\nabla_{e_A} \xi^b) \xi_a = -\xi^b (\Gamma^c_{Aa} \xi_c) = -\Gamma^c_{Aa} \xi^b (\xi_c) = -\Gamma^b_{Aa}$, ou equivalentemente

$$Z^b_{Ad} \xi^d(\xi_a) = Z^b_{Aa} = -\Gamma^b_{Aa},$$

onde Z^b_{Ad} são os coeficientes da conexão espinorial na base ξ^d , $\nabla_{e_A} \xi^b \equiv Z^b_{Ad} \xi^d$. Disto, concluímos que $\nabla_{e_A} \xi^b = -\Gamma^b_{Aa} \xi^a$.

D.3.5 Comutador dos geradores da Álgebra de Clifford

Por simplicidade, considere as seguintes definições: $\mathbb{A} \equiv \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_k}$ com $A_1 < \dots < A_k$, e $\mathbb{B} \equiv \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_l}$ com $B_1 < \dots < B_l$. Devido as restrições nos índices, está claro que os índices As são todos distintos; o mesmo vale para os Bs . Entretanto, vários índices As podem coincidir com os Bs . É fácil verificar que, caso um certo índice B_i coincida com um² dos As , o sinal do cálculo $\gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_k} \gamma^{B_i} = \pm \gamma^{B_i} \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_k}$ independará da posição do índice A que coincide com B_i . Este resultado dependerá apenas de B_i coincidir ou não com um dos As e, obviamente, de k .

Para obtermos uma expressão geral para $[\mathbb{A}, \mathbb{B}]$, podemos admitir que haja m índices Bs que coincidem com os As e ordená-los em seqüência. Neste caso, denotaremos esses índices por $A_{j_1} = B_{i_1}, \dots, A_{j_m} = B_{i_m}$. Segue então que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B} &= \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_{j_1}} \dots \gamma^{A_{j_m}} \dots \gamma^{A_k} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i_1}} \dots \gamma^{B_{i_m}} \dots \gamma^{B_l} \\ &= (-1)^{k(i_1-1)} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i_1-1}} \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_{j_1}} \dots \gamma^{A_{j_m}} \dots \gamma^{A_k} \gamma^{B_{i_1}} \dots \gamma^{B_{i_m}} \dots \gamma^{B_l} \\ &= (-1)^{k(i_1-1)+m(k-1)} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i_m}} \gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_k} \gamma^{B_{i_m+1}} \dots \gamma^{B_l} \\ &= (-1)^{k(i_1-1)+m(k-1)+k(l-i_m)} \mathbb{B}\mathbb{A} \\ &= (-1)^{lk-m} \mathbb{B}\mathbb{A}, \end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda linha permutamos $\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i_1-1}}$, da segunda para a terceira permutamos $\gamma^{B_{i_1}} \dots \gamma^{B_{i_m}}$, da terceira para a quarta permutamos $\gamma^{B_{i_m+1}} \dots \gamma^{B_l}$; também utilizamos o fato de $i_m = (\text{número de matrizes com o índice } i) + (\text{número de matrizes } \gamma^B \text{ que precedem as com o índice } i \text{ na definição de } \mathbb{B}) = m + (i_1 - 1)$. Da igualdade acima, chegamos finalmente a

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} [1 - (-1)^{lk-m}]. \quad (\text{D.14})$$

²Perceba que, como os As são todos distintos, não é possível ter um certo B_i coincidindo com mais de um A .

D.3.6 Prova de $Tr(\Gamma_m^d) = 0$ para $m \neq 1$

Tomando o traço “Tr” da identidade (D.14) e usando as propriedades $Tr([\mathbb{A}, \mathbb{B}]) = 0$, $Tr(\lambda \mathbb{A}) = \lambda Tr(\mathbb{A})$, teremos

$$Tr(\gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_k} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_l}) [1 - (-1)^{lk-m}] = 0. \quad (D.15)$$

Para demonstrarmos que o traço dos geradores (7.29) (menos a identidade) é nulo, basta escolhermos $lk - m$ sempre ímpar. Embora não pareça, para certos geradores, essa é uma tarefa um pouco difícil, porém possível, como veremos. Para facilitar a compreensão da demonstração geral, apresentaremos dois casos particulares antes.

Gerador Γ_2^d

Tomando $k = 1$, $l = 2$ e $A_1 = B_1$ ($m=1$), a identidade (D.15) fornece $Tr(\gamma^{B_2}) = 0$. Como a escolha de A_1 é arbitrária ($A_1 = (0)$ ou $A_1 = (1)$ etc), B_2 acaba podendo assumir qualquer valor. Exemplo: se tomarmos $A_1 = (0)$, então $B_2 = (1), \dots, (n-1)$. Depois, tomamos $A_1 = (1)$ e, então, $B_2 = (0), (2), \dots, (n-1)$. Assim, vemos que o resultado tem que ser válido para todos os $\gamma^{(0)}, \dots, \gamma^{(n-1)}$.

Gerador Γ_3^d

Tomando $k = 1$, $l = 1$ e $A_1 \neq B_1$ ($m = 0$), teremos $Tr(\gamma^{A_1} \gamma^{B_1}) = 0$.

Geradores Γ_{2p+3}^d

Seja p um número inteiro. Podemos representar todos os geradores com quantidades pares de matrizes γ^A s fazendo $k = 1$ e $l = 2p + 1$ com $p = 0, \dots, (n-2)/2$ e considerando todos os índices como distintos ($m = 0$). Assim, a identidade (D.15) fica $Tr(\underbrace{\gamma^{A_1}}_1 \underbrace{\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2p+1}}}_{2p+1}) = 0$. É trivial ver que todos os termos de ordem par nos gamas estão compreendidos por esta expressão. Para nos convenceremos que todos esses geradores devem ter traços nulos, basta tomarmos valores particulares para os índices e demonstrarmos um a um. Por exemplo, no caso de $p = (n-2)/2$ (último gerador) só há uma combinação possível para $A_1 = (0)$, que é $Tr(\underbrace{\gamma^{(0)}}_1 \underbrace{\gamma^{(1)} \dots \gamma^{(n-1)}}_{n-1}) = 0$.

Geradores Γ_{2p+2}^d

Podemos escolher $k = p + 1$, $l = p + 2$ e fazermos um certo A_j igual a um certo B_i ($m = 1$). Neste caso, teremos $Tr(\underbrace{\gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_j} \dots \gamma^{A_{p+1}}}_{p+1} \underbrace{\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_i} \dots \gamma^{B_{p+2}}}_{p+2}) = 0$. O leitor pode em princípio achar trivial concluir desta última expressão que os geradores com ordem ímpar no número de gamas têm traços nulos, mas essa expressão é mais complicada do que parece. A razão disso está nas restrições $A_1 < \dots A_{p+1}$ e $B_1 < \dots B_{p+2}$. Todavia, é possível nos convenceremos que de fato esses traços são nulos. Para isso, basta termos em mente que podemos trocar a ordem das matrizes sem nos preocuparmos com o fato de elas comutarem ou anti-comutarem ($\gamma^{(0)}$ comuta com $\gamma^{(0)}$ e anti-comuta com $\gamma^{(1)}$, por exemplo). Mudando a ordem das matrizes de tal forma que possamos usar $\gamma^{A_j} \gamma^{B_i} = \pm \mathbb{I}$, teremos $Tr(\underbrace{\gamma^{A_1} \dots \gamma^{A_{j-1}} \gamma^{A_{j+1}} \dots \gamma^{A_{p+1}}}_p \underbrace{\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i-1}} \gamma^{B_{i+1}} \dots \gamma^{B_{p+2}}}_{p+1}) = 0$. Como as posições de A_j e de B_j são arbitrárias, podemos sair escolhendo os valores de i , j , A_j e B_i de forma a verificar que a expressão anterior compreende todos os geradores de ordem ímpar em γ^C . Como exemplo, tomemos $A_1 = B_1 = (0)$ e $A_2 < \dots A_{p+1} < B_2 < \dots B_{p+2}$ com $p = (n - 2)/2$ (um dos Γ_n^d). Neste caso, só há a possibilidade $Tr(\underbrace{\gamma^{(1)} \dots \gamma^{(n-1)}}_{n-1}) = 0$. Outro exemplo seria tomarmos $A_2 = B_1 = (1)$ e $A_1 < \dots A_{p+1} < B_2 < \dots B_{p+2}$ com $p = (n-2)/2$, o que levaria a $Tr(\underbrace{\gamma^{(0)} \gamma^{(2)} \dots \gamma^{(n-1)}}_{n-1}) = 0$. Assim concluímos a demonstração que todos os geradores da álgebra de Clifford, exceto a identidade, têm traço nulo. Este resultado torna trivial a demonstração de que os geradores da álgebra de Clifford são linearmente independentes, como mostraremos na seção D.3.7.

D.3.7 Demonstração de que os 2^n geradores Γ_r^d são linearmente independente

Sejam $a^j \in \mathbb{C}$, onde $j = 1 \dots 2^n$, e o somatório

$$\sum_{j=1}^{2^n} a^j \Gamma_{m(j)}^{d(j)} = 0. \quad (\text{D.16})$$

Tomando o traço e usando o fato de $Tr[\Gamma_m^d] = 0$ para $m \neq 1$, teremos $a^1 Tr[\mathbb{I}] = 0 \rightarrow a^1 = 0$ (lembre-se que $Tr[A + B] = Tr[A] + Tr[B]$). Multiplicando o somatório por Γ_2^1 , tomando novamente o traço, usando o fato de $Tr[\Gamma_2^1 \Gamma_m^d] = 0$ ($\Gamma_2^1 \Gamma_m^d = \alpha \Gamma_s^r \neq \mathbb{I}$ para d e/ou m diferente de 1 e 2, respectivamente) para $m \neq 1$, e usando o resultado $\Gamma_2^1 \Gamma_2^1 = \pm \mathbb{I}$, teremos

$\pm a^2 \text{Tr}[\mathbb{I}] = 0$. Continuando com este procedimento maçante, chegaremos inevitavelmente a $a^j = 0$. Na próxima sub-seção, demostramos um lema que será útil para esta tese.

D.3.8 Demonstração do lema de Schur

O lema de Schur pode ser demonstrado para qualquer grupo de dimensão arbitrária (veja, por exemplo, Ref. [152], p. 151), entretanto, aqui, demonstramos esse lema para o caso dos geradores da álgebra de Clifford usando uma abordagem menos abstrata do que aquela feita em [152]. A grosso modo, o lema da Schur pode ser enunciado da seguinte maneira

Teorema D.3.1 *Seja $\mathbb{A}_C$ um conjunto de matrizes pertencentes a álgebra de Clifford em um espaço-tempo n -dimensional. Se $[\mathbb{A}_C, \gamma^A] = 0$ para $A = (0), \dots, (n-1)$, então $\mathbb{A}_C = A_C \mathbb{I}$, onde A_C é um potencial vetor.*

Demonstração: como $\mathbb{A}_C$ pertence a álgebra de Clifford, podemos expandi-la em termos dos seus geradores, isto é,

$$\mathbb{A}_C = A_C \mathbb{I} + \sum_{l=1}^n a_{CB_1 \dots B_l} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_l}, \quad (B_1 < B_2 < \dots < B_l) \quad (\text{D.17})$$

onde $a_{CB_1 \dots B_l} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_l}$ são os coeficientes da expansão. Calculemos o comutador de $\mathbb{A}_C$ com γ^A .

$$[\mathbb{A}_C, \gamma^A] = \left[\sum_{l=1}^n a_{CB_1 \dots B_l} \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_l}, \gamma^A \right] = \sum_{l=1}^n a_{CB_1 \dots B_l} \gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_l} [1 - (-1)^{l-m(A, B_i)}] = 0,$$

onde usamos (D.14), e $m(A, B_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ diferente de todos os } B_i \\ 1 & \text{se } A \text{ for igual a um certo } B_i \end{cases}$. Note que, como os B_i s são todos distintos, então A só pode ser igual a um B_i em cada termo da soma. Para verificarmos que os coeficientes $a_{CB_1 \dots B_l}$ devem ser nulos para que a igualdade acima seja satisfeita, é conveniente separarmos os termos com quantidade ímpar de matrizes gamas dos com quantidade par. Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{n/2} \{ a_{CB_1 \dots B_{2l-1}} \gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l-1}} [1 + (-1)^{m(A, B_i)}] \\ & + a_{CB_1 \dots B_{2l}} \gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l}} [1 - (-1)^{m(A, B_i)}] \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Como o primeiro termo do somatório acima só é diferente de zero para $m = 0$, ou seja, se $A \neq B_1, B_2, \dots, B_{2l-1}$, então este termo é uma combinação linearmente independente (L.I) dos geradores $\Gamma_{2l+1}^d \sim \underbrace{\gamma^A}_{1} \underbrace{\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l-1}}}_{2l-1}$. Por outro lado, o segundo termo do somatório só é diferente de zero quando $m = 1$, isto é, quando $A = B_i$. Isto reduzirá a “ordem” dos geradores para um número ímpar., i.e., $\gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l}} \sim \pm \underbrace{\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i-1}} \gamma^{B_{i+1}} \dots \gamma^{B_{2l}}}_{2l-1} \sim \Gamma_{2l}^d$. O segundo termo é, portanto, uma combinação L.I dos geradores Γ_{2l}^d . Em resumo, os coeficientes dos dois termos acima mencionados não podem se cancelarem (não podem ser comparados nessa soma). Como consequência, podemos quebrar (D.18) nas seguintes equações:

$$\sum_{l=1}^{n/2} a_{CB_1 \dots B_{2l-1}} \gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l-1}} [1 + (-1)^{m(A, B_i)}] = 0, \quad (\text{D.19})$$

$$\sum_{l=1}^{n/2} a_{CB_1 \dots B_{2l}} \gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l}} [1 - (-1)^{m(A, B_i)}] = 0. \quad (\text{D.20})$$

Da equação (D.19) segue que, como o maior número de γ^A s que podemos ter é $n - 1$, haverá sempre um A tal que $m = 0$ ($A \neq B_1, \dots, B_{2l-1}$) para cada termo da soma. Por exemplo, se tomarmos a $A = (0)$, teremos

$$\sum_{l=1}^{n/2} a_{CB_1 \dots B_{2l-1}} \gamma^A \gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{2l-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{CB_1 \dots B_{2l-1}} = 0$$

para todas as combinações possíveis de $B_1, \dots, B_{2l-1}$ que excluem o (0) . Para levarmos em consideração aquelas combinações que consideram (0) , basta tomarmos $A = (1)$, e então $A = (2)$ etc até $A = (n - 1)$. Deste jeito, nós generalizamos e concluimos que $a_{CB_1 \dots B_{2l-1}} = 0$ deve ser satisfeita para todas as combinações possíveis com a restrição $B_1 < \dots < B_l$ (restrição natural da base).

A equação (D.20) só não será identicamente satisfeita se $m = 1$, isto é, A igual a um certo B_i . A igual a um certo B_i faz o somatório em (D.20) ser uma combinação L.I dos geradores $\gamma^{B_1} \dots \gamma^{B_{i-1}} \gamma^{B_{i+1}} \dots \gamma^{B_{2l}}$ com os coeficientes $a_{CB_1 \dots B_{2l}}$, onde é bom sempre lembrar que $B_1 < \dots < B_{i-1} < A < B_{i+1} < \dots < B_{2l}$. Portanto, (D.20) será satisfeita apenas se $a_{CB_1 \dots B_{i-1} A B_{i+1} \dots B_{2l}} = 0$. Como A é qualquer, a restrição anterior zera os coeficientes do geradores com quantidade par de matrizes gamas. O resultado deste parágrafo e o do anterior nos permite concluir que $\mathbb{A}_C = A_C \mathbb{I}$.

D.3.9 Demonstração de 7.30

Para demonstramos (7.30), considere o seguinte raciocínio.

$$\begin{aligned}
[\gamma^A \gamma^B, \gamma^C] &= \gamma^A [\gamma^B, \gamma^C] + [\gamma^A, \gamma^C] \gamma^B = \gamma^A (\{\gamma^B, \gamma^C\} - 2\gamma^C \gamma^B) \\
&+ (\{\gamma^A, \gamma^C\} - 2\gamma^C \gamma^A) \gamma^B = \gamma^A (2\eta^{BC} - 2\gamma^C \gamma^B) \\
&+ (2\eta^{AC} - 2\gamma^C \gamma^A) \gamma^B = 2\eta^{BC} \gamma^A + 2\eta^{AC} \gamma^B \\
&- 2\gamma^A \gamma^C \gamma^B - 2\gamma^C \gamma^A \gamma^B = 2\eta^{BC} \gamma^A + 2\eta^{AC} \gamma^B \\
&- 2\gamma^A \gamma^C \gamma^B - 2(2\eta^{CA} - \gamma^A \gamma^C) \gamma^B \\
&= 2\eta^{BC} \gamma^A - 2\eta^{AC} \gamma^B \\
&= 2(\delta_D^B \delta_F^A - \delta_D^A \delta_F^B) \eta^{DC} \gamma^F,
\end{aligned}$$

onde foi utilizado $\{A, B\} = [A, B] - 2BA$ na primeira linha e $\{\gamma^A, \gamma^B\} = 2\eta^{AB}$ na segunda e na anti-penúltima linha.

D.3.10 Dedução das relações (7.45) e (7.46)

Para obtermos a derivada de $\tilde{\chi}$ em uma certa base, derivemos o termo $(\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b$. Para facilitar os cálculos considere a seguinte definição $\eta_{\mu\nu a}^b \equiv \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b$. Neste caso, segue

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_\lambda (\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \right) = [(\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b]_{,\lambda} \eta_{\mu\nu a}^b \\
&+ (\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b \left(\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \eta_{\alpha\nu a}^b + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \eta_{\mu\alpha a}^b + \Gamma_{\lambda a}^c \eta_{\mu\nu c}^b - \Gamma_{\lambda d}^b \eta_{\mu\nu a}^d \right) \\
&= (\cancel{\gamma^\mu}^a_{c,\lambda} (\gamma^\nu)^c_b \eta_{\mu\nu a}^b + (\gamma^\mu)^a_{c,\lambda} \cancel{(\gamma^\nu)^c}_b \eta_{\mu\nu a}^b + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \cancel{(\gamma^\mu)^a}_c (\gamma^\nu)^c_b \eta_{\alpha\nu a}^b \\
&\quad + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \cancel{(\gamma^\mu)^a}_c (\gamma^\nu)^c_b \eta_{\mu\alpha a}^b + \Gamma_{\lambda a}^c \cancel{(\gamma^\mu)^a}_c (\gamma^\nu)^c_b \eta_{\mu\nu c}^b \\
&\quad - \Gamma_{\lambda d}^b \cancel{(\gamma^\mu)^a}_c (\gamma^\nu)^c_b \eta_{\mu\nu a}^d).
\end{aligned}$$

Comparando os termos indicados com a mesma letra, teremos

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_\lambda (\gamma^\mu)^a_c (\gamma^\nu)^c_b \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \right) = \left[(\gamma^\mu)^a_{c,\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu (\gamma^\alpha)^a_c \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{\lambda d}^a (\gamma^\mu)^d_c \right] (\gamma^\nu)^c_b \eta_{\mu\nu a}^b + (\gamma^\mu)^a_c \left[(\gamma^\nu)^c_{b,\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\nu (\gamma^\alpha)^c_b \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\lambda b}^d (\gamma^\nu)^c_d \right] \eta_{\mu\nu a}^b.
\end{aligned}$$

Acrescentando o termo $-\Gamma_{\lambda c}^d(\gamma^\mu)^a{}_d(\gamma^\nu)^c{}_b\eta_{\mu\nu a}{}^b + \Gamma_{\lambda d}^c(\gamma^\nu)^d{}_b(\gamma^\mu)^a{}_c\eta_{\mu\nu a}{}^b = 0$, ficaremos com

$$\begin{aligned} \left(\nabla_\lambda (\gamma^\mu)^a{}_c (\gamma^\nu)^c{}_b \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \xi_a \otimes \xi^b \right) &= \left[(\gamma^\mu)^a{}_{c,\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu (\gamma^\alpha)^a{}_c \right. \\ &+ \Gamma_{\lambda d}^a (\gamma^\mu)^d{}_c - \Gamma_{\lambda c}^d (\gamma^\mu)^a{}_d \left. \right] (\gamma^\nu)^c{}_b \eta_{\mu\nu a}{}^b + (\gamma^\mu)^a{}_c \left[(\gamma^\nu)^c{}_{b,\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\nu (\gamma^\alpha)^c{}_b \right. \\ &\left. - \Gamma_{\lambda b}^d (\gamma^\nu)^c{}_d + \Gamma_{\lambda d}^c (\gamma^\nu)^d{}_b \right] \eta_{\mu\nu a}{}^b = [(\gamma^\mu)^a{}_{c|\lambda} (\gamma^\nu)^c{}_b + (\gamma^\mu)^a{}_c (\gamma^\nu)^c{}_{b|\lambda}] \eta_{\mu\nu a}{}^b, \end{aligned} \quad (D.21)$$

onde $|$ indica a componente da derivada covariante, $\nabla_\lambda \tilde{\gamma} = (\gamma^\mu)^a{}_{c|\lambda} \eta_{\mu a}{}^c$. Assim, a derivada de $\tilde{\chi}$ fica

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \tilde{\chi} &= \left[(\gamma^\mu)^a{}_{c|\lambda} (\gamma^\nu)^c{}_b + (\gamma^\mu)^a{}_c (\gamma^\nu)^c{}_{b|\lambda} \right. \\ &\left. + (\gamma^\nu)^a{}_{c|\lambda} (\gamma^\mu)^c{}_b + (\gamma^\nu)^a{}_c (\gamma^\mu)^c{}_{b|\lambda} \right] \eta_{\mu\nu a}{}^b \end{aligned} \quad (D.22)$$

Por outro lado, se derivarmos (7.44) e usarmos (D.22), teremos

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \tilde{\chi} = 2 \nabla_\lambda \tilde{g} \quad \Rightarrow \quad &(\gamma^\mu)^a{}_{c|\lambda} (\gamma^\nu)^c{}_b + (\gamma^\mu)^a{}_c (\gamma^\nu)^c{}_{b|\lambda} \\ &+ (\gamma^\nu)^a{}_{c|\lambda} (\gamma^\mu)^c{}_b + (\gamma^\nu)^a{}_c (\gamma^\mu)^c{}_{b|\lambda} = 2g^{\mu\nu}{}_{|\lambda} \delta_a^b, \end{aligned}$$

que, matricialmente, podemos expressar na forma

$$\{\gamma^\mu{}_{|\lambda}, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu{}_{|\lambda}\} = 2g^{\mu\nu}{}_{|\lambda}. \quad (D.23)$$

D.3.11 Dedução de (7.47)

Escrevamos $g^{\mu\nu}{}_{|\lambda}$ em termos do tensor de não-metricidade. Na base coordenada, (7.43) fica

$$g_{\mu\nu|\lambda} = N_{\mu\nu\lambda}, \quad (D.24)$$

onde $N_{\mu\nu\lambda}$ é o tensor de não-metricidade nesta base. Contraindo (D.24) com $g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}$, teremos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} (g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma}) &= N^{\alpha\beta}{}_\lambda \Rightarrow \\ g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g^{\beta\mu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\beta g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} &= N^{\alpha\beta}{}_\lambda \Rightarrow \\ -g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}{}_{,\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g^{\beta\mu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\beta g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} &= N^{\alpha\beta}{}_\lambda \Rightarrow \\ -g^{\beta\alpha}{}_{,\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g^{\beta\mu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\beta g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} &= N^{\alpha\beta}{}_\lambda \Rightarrow \\ g^{\alpha\beta}{}_{|\lambda} &= -N^{\alpha\beta}{}_\lambda, \end{aligned} \quad (D.25)$$

onde da segunda para a terceira linha usamos $g^{\beta\mu}g_{\mu\nu,\lambda} = -g^{\beta\mu}{}_{,\lambda}g_{\mu\nu}$, e $g^{\alpha\beta}{}_{|\lambda} = g^{\beta\alpha}{}_{,\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g^{\beta\mu} + \Gamma^\beta_{\lambda\nu}g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}$ é a componente de $(\nabla_\lambda g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu)$. Substituindo (D.25) em (7.46), chegamos a

$$\{\gamma^\mu{}_{|\lambda}, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu{}_{|\lambda}\} = -2N^{\mu\nu}{}_\lambda. \quad (\text{D.26})$$

D.3.12 Prova da anti-simetria de (7.53)

Para provar que o lado direito de (7.53) é anti-simétrico, basta seguir o raciocínio:

$$\begin{aligned} N_{AC\alpha} + 2e_{A\lambda}e_C{}^\lambda{}_{;\alpha} &= N_{AC\alpha} + 2e_{A\lambda}(e_C{}^\lambda{}_{,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}e_C{}^\nu) \\ &= N_{AC\alpha} + 2(e_A{}^\mu g_{\mu\lambda}e_C{}^\lambda{}_{,\alpha} + e_{A\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}e_C{}^\nu) \\ &= N_{AC\alpha} + 2[-(e_A{}^\mu g_{\mu\lambda})_{,\alpha}e_C{}^\lambda + e_{A\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}e_C{}^\nu] \\ &= N_{AC\alpha} + 2[-e_A{}^\mu{}_{,\alpha}e_{C\mu} - e_A{}^\mu e_C{}^\lambda g_{\mu\lambda,\alpha} + e_{A\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}e_C{}^\nu] \\ &= N_{AC\alpha} + 2\left[-e_A{}^\mu{}_{,\alpha}e_{C\mu} - e_A{}^\mu e_C{}^\lambda \left(N_{\mu\lambda\alpha} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}\right) + e_{A\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}e_C{}^\nu\right] \\ &= N_{AC\alpha} + 2[-e_A{}^\mu{}_{,\alpha}e_{C\mu} - N_{AC\lambda\alpha} \\ &\quad - e_A{}^\mu e_{C\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} - e_{A\nu}e_C{}^\lambda\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} + e_{A\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}e_C{}^\nu] \\ &= -N_{CA\alpha} + 2[-e_A{}^\mu{}_{,\alpha}e_{C\mu} - e_A{}^\mu e_{C\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\mu}] \\ &= -N_{CA\alpha} - 2e_{C\lambda}[e_A{}^\lambda{}_{,\alpha} - e_A{}^\mu\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}] \\ &= -N_{CA\alpha} - 2e_{C\lambda}e_A{}^\lambda{}_{;\alpha}, \end{aligned}$$

onde usamos $(e_{A\lambda}e_C{}^\lambda)_{,\alpha} = 0$ da segunda para a terceira linha e $g_{\mu\lambda;\alpha} = N_{\mu\lambda\alpha}$ na quinta linha.

D.3.13 Simplificando o termo $\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \gamma^\alpha[\gamma_\lambda, \gamma^\nu]$

Para simplificarmos o termo $\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \gamma^\alpha[\gamma_\lambda, \gamma^\nu]$, considere primeiro a simplificação do seguinte termo

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \gamma^\alpha \gamma_\lambda \gamma^\nu &= -\frac{1}{2} (N^\lambda_{\alpha\nu} + N_\nu{}^\lambda{}_\alpha - N_{\alpha\nu}{}^\lambda) \gamma^\alpha \gamma_\lambda \gamma^\nu \\ &= -\frac{1}{2} (N_{\lambda\alpha\nu} \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\nu + N_{\nu\lambda\alpha} \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\nu - N_{\alpha\nu\lambda} \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} N_{\lambda\alpha\nu} \{\gamma^\alpha, \gamma^\lambda\} \gamma^\nu + \frac{1}{2} N_{\nu\lambda\alpha} \gamma^\alpha \{\gamma^\lambda, \gamma^\nu\} \right. \\ &\quad \left. - N_{\alpha\nu\lambda} \gamma^\alpha (2g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu \gamma^\lambda) \right] = -\frac{1}{2} [N^\alpha_{\alpha\nu} \gamma^\nu + N^\lambda_{\lambda\alpha} \gamma^\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2N_{\alpha}^{\lambda}\gamma^{\alpha} + N_{\alpha\nu\lambda}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda} &= -\frac{1}{2}\left[2N_{\alpha\nu}^{\alpha}\gamma^{\nu} - 2N_{\alpha}^{\lambda}\gamma^{\alpha}\right. \\
&+ \left.\frac{1}{2}N_{\alpha\nu\lambda}\{\gamma^{\alpha}, \gamma^{\nu}\}\gamma^{\lambda}\right] = -\frac{1}{2}\left[2N_{\alpha\nu}^{\alpha}\gamma^{\nu} - 2N_{\alpha}^{\lambda}\gamma^{\alpha} + N_{\nu\lambda}^{\nu}\gamma^{\lambda}\right] \\
&= -\frac{1}{2}(3N_{\alpha\nu}^{\alpha} - 2N_{\nu}^{\alpha})\gamma^{\nu}, \tag{D.27}
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $N_{\mu\nu\lambda} = N_{\nu\mu\lambda}$ e $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$. Substituindo $\gamma_{\lambda}\gamma^{\nu} = 2\delta_{\lambda}^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma_{\lambda}$ em (D.27), teremos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}\gamma^{\alpha}(2\delta_{\lambda}^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma_{\lambda}) &= 2\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\nu}\gamma^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma_{\lambda} = -\frac{1}{2}(3N_{\alpha\nu}^{\alpha} - 2N_{\nu}^{\alpha})\gamma^{\nu}, \\
\text{mas } \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\nu} &= -\frac{1}{2}\left(\cancel{N_{\alpha\nu}^{\nu}} + N_{\nu}^{\nu} - \cancel{N_{\alpha\nu}^{\nu}}\right) = -\frac{1}{2}N_{\nu}^{\nu}. \text{ Substituindo na expressão anterior,} \\
-\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma_{\lambda} &= -\frac{1}{2}(N_{\alpha\nu}^{\alpha} - 2N_{\nu}^{\alpha})\gamma^{\nu} \tag{D.28}
\end{aligned}$$

Comparando (D.27) e (D.28), vemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}\gamma^{\alpha}[\gamma_{\lambda}, \gamma^{\nu}] &= -\frac{1}{2}(3N_{\alpha\nu}^{\alpha} - 2N_{\nu}^{\alpha})\gamma^{\nu} - \frac{1}{2}(N_{\alpha\nu}^{\alpha} - 2N_{\nu}^{\alpha})\gamma^{\nu} \\
&= -2(N_{\alpha\nu}^{\alpha} - N_{\nu}^{\alpha})\gamma^{\nu}.
\end{aligned}$$

Para o caso no qual $N_{\mu\nu\lambda} = \sigma_{\lambda}g_{\mu\nu}$, a expressão acima fica

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda}\gamma^{\alpha}[\gamma_{\lambda}, \gamma^{\nu}] = -2(n-1)\sigma_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{D.29}$$

D.3.14 Demonstração de $\gamma^{(0)}\sigma_{AB}^{\dagger}\gamma^{(0)} = \sigma_{AB}$

Fazendo uso das propriedades $\gamma^{(0)}\gamma_A^{\dagger}\gamma^{(0)} = \gamma_A$ e $\gamma^{(0)}\gamma^{(0)} = \mathbb{I}$, seguimos o raciocínio

$$\begin{aligned}
\gamma^{(0)}\sigma_{AB}^{\dagger}\gamma^{(0)} &= -\frac{i}{2}\gamma^{(0)}[\gamma_A, \gamma_B]^{\dagger}\gamma^{(0)} \\
&= -\frac{i}{2}\left(\gamma^{(0)}\gamma_B^{\dagger}\gamma_A^{\dagger}\gamma^{(0)} - \gamma^{(0)}\gamma_A^{\dagger}\gamma_B^{\dagger}\gamma^{(0)}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\left(\gamma^{(0)}\gamma_B^{\dagger}\gamma^{(0)}\gamma^{(0)}\gamma_A^{\dagger}\gamma^{(0)} - \gamma^{(0)}\gamma_A^{\dagger}\gamma^{(0)}\gamma^{(0)}\gamma_B^{\dagger}\gamma^{(0)}\right) \\
&= -\frac{i}{2}(\gamma_B\gamma_A - \gamma_A\gamma_B) = \frac{i}{2}[\gamma_A, \gamma_B] = \sigma_{AB}.
\end{aligned}$$

D.3.15 Variação da ação de dirac em função de $\bar{\psi}$

Substituindo (7.78) e (7.79) em (7.77), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_D &= \frac{i}{2} [(\bar{\psi}_{,\mu} - \bar{\psi}\Gamma_\mu) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu (\psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi) - 2im\bar{\psi}\psi] \\
&= \frac{i}{2} [\bar{\psi}_{,\mu} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi_{,\mu} - \bar{\psi}\Gamma_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \Gamma_\mu \psi - 2im\bar{\psi}\psi] \\
&= \frac{i}{2} [\bar{\psi}_{,\mu} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi_{,\mu} - \bar{\psi}(\Gamma_\mu \gamma^\mu + \gamma^\mu \Gamma_\mu) \psi - 2im\bar{\psi}\psi] \\
&= \frac{i}{2} [\bar{\psi}_{,\mu} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi_{,\mu} - \bar{\psi}\{\Gamma_\mu, \gamma^\mu\} \psi - 2im\bar{\psi}\psi]. \tag{D.30}
\end{aligned}$$

Na MAG, a equação de Dirac em um espaço com torção e não-metricidade é obtida a partir de variações da ação (D.30) em relação a $\bar{\psi}$ tratando $\bar{\psi}$, ψ , $g_{\mu\nu}$, Γ_μ como independentes, ou seja, se a dependência funcional de $\bar{\psi}$ da lagrangiana da matéria se resumir a (D.30), teremos

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_D)}{\delta\bar{\psi}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_D)}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_D}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} \right) = 0. \tag{D.31}$$

Calculando o primeiro termo da direita na expressão acima, teremos

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_D)}{\partial\bar{\psi}} = \sqrt{-g} \frac{i}{2} (-\gamma^\mu \psi_{,\mu} - \{\Gamma_\mu, \gamma^\mu\} \psi - 2im\psi). \tag{D.32}$$

Já o outro termo da variação dá um pouco mais de trabalho.

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_D}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} \right) &= \frac{i}{2} \partial_\mu (\sqrt{-g} \gamma^\mu \psi) = \frac{i}{2} \left[(\partial_\mu \sqrt{-g}) \gamma^\mu \psi \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-g} \partial_\mu (\gamma^\mu \psi) \right] = \frac{i}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{-g}}{2} N^\lambda_{\lambda\mu} + \sqrt{-g} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right) \gamma^\mu \psi \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-g} \gamma^\mu_{,\mu} \psi + \sqrt{-g} \gamma^\mu \psi_{,\mu} \right], \tag{D.33}
\end{aligned}$$

onde usamos (D.6). Substituindo (D.32) e (D.33) em (D.31), teremos

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g} \frac{i}{2} (-\gamma^\mu \psi_{,\mu} - \{\Gamma_\mu, \gamma^\mu\} \psi - 2im\psi) \\
&- \frac{i}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{-g}}{2} N^\lambda_{\lambda\mu} + \sqrt{-g} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right) \gamma^\mu \psi + \sqrt{-g} \gamma^\mu_{,\mu} \psi + \sqrt{-g} \gamma^\mu \psi_{,\mu} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Eliminando $\sqrt{-g} \frac{i}{2}$ e usando $\{\Gamma_\mu, \gamma^\mu\} = 2\gamma^\mu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \gamma^\mu]$,

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu \psi_{,\mu} + 2\gamma^\mu \Gamma_\mu \psi + [\Gamma_\mu, \gamma^\mu] \psi + 2im\psi + \left(\frac{1}{2} N^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right) \gamma^\mu \psi \\
&\quad + \gamma^\mu_{,\mu} \psi + \gamma^\mu \psi_{,\mu} = 0.
\end{aligned}$$

Somando o primeiro com o último termo, teremos

$$2\gamma^\mu\psi_{,\mu} + 2\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi + 2im\psi + [\Gamma_\mu, \gamma^\mu]\psi + \left(\frac{1}{2}N^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\gamma^\mu\psi + \gamma^\mu_{,\mu}\psi = 0.$$

De (7.48), vemos que $[\Gamma_\mu, \gamma^\mu] = -\frac{1}{2}N^\lambda_{B\lambda}\gamma^B - \gamma^\lambda_{,\lambda} - \gamma^\mu\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}$. Substituindo o comutado na expressão acima, ficaremos com

$$2\gamma^\mu\psi_{,\mu} + 2\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi + 2im\psi - \frac{1}{2}N^\lambda_{\mu\lambda}\gamma^\mu\psi - \gamma^\lambda_{,\lambda}\psi - \gamma^\mu\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\psi + \frac{1}{2}N^\lambda_{\lambda\mu}\gamma^\mu\psi + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\gamma^\mu\psi + \gamma^\mu_{,\mu}\psi = 0.$$

Simplificando o quinto termo com o último e rearranjando os outros termos,

$$2\gamma^\mu\psi_{,\mu} + 2\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi + 2im\psi + \left(-\frac{1}{2}N^\lambda_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}N^\lambda_{\lambda\mu}\right)\gamma^\mu\psi + (-\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\gamma^\mu\psi = 0,$$

onde usamos o fato de γ^μ comutar com $\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}$ (lembre-se que $\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} = \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\mathbb{I}$). Como a única parte não simétrica de $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$ é a contorção, $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} = K^\lambda_{\mu\lambda} - K^\lambda_{\lambda\mu} = T^\lambda_{\mu\lambda}$, onde usamos a propriedade (4.17). Substituindo este último resultado na expressão acima, teremos

$$2\gamma^\mu\psi_{,\mu} + 2\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi + 2im\psi + \left(-\frac{1}{2}N^\lambda_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}N^\lambda_{\lambda\mu}\right)\gamma^\mu\psi + T^\lambda_{\mu\lambda}\gamma^\mu\psi = 0.$$

Dividindo toda a expressão acima por dois e rearranjando os termos,

$$\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \Gamma_\mu + \frac{1}{4} (N^\lambda_{\lambda\mu} - N^\lambda_{\mu\lambda}) + \frac{1}{2} T^\lambda_{\mu\lambda} \right] \psi + im\psi = 0.$$

Multiplicando a expressão acima por i , chegamos a

$$i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + \Gamma_\mu + \frac{1}{4} (N^\lambda_{\lambda\mu} - N^\lambda_{\mu\lambda}) + \frac{1}{2} T^\lambda_{\mu\lambda} \right] \psi - m\psi = 0.$$

D.3.16 Demonstração da independência de S_D com relação a não-metricidade e aos símbolos de Christoffel

De (D.30), fica claro que para demonstrarmos que a lagrangiana de Dirac obtida a parti do acoplamento mínimo em uma geometria com não-metricidade não contém termos dependentes da não-metricidade, basta calcularmos o termo $\{\Gamma_\alpha, \gamma^\alpha\}$. Mais do que isso, só precisamos considerar

$$\{\Gamma_\alpha, \gamma^\alpha\} \sim \frac{1}{8} \left(\overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda \gamma^\alpha [\gamma_\lambda, \gamma^\mu] + \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, \gamma^\mu] \gamma^\alpha \right).$$

Como $\overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda$ é simétrico nos índices de baixo,

$$\begin{aligned} \{\Gamma_\alpha, \gamma^\alpha\} &\sim \frac{1}{8} \left(\overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda \gamma^\alpha [\gamma_\lambda, \gamma^\mu] + \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, \gamma^\alpha] \gamma^\mu \right) \\ &= \frac{1}{8} \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, \gamma^\alpha \gamma^\mu] = \frac{1}{16} \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, \gamma^\alpha \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\alpha] \\ &= \frac{1}{16} \overset{n}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, 2g^{\alpha\mu}] = 0. \end{aligned} \quad (D.34)$$

Na verdade, como está claro na expressão acima, a ação de Dirac (D.30) não depende se quer dos símbolos de Christoffel, pois, da dedução acima fica claro que apenas a parte anti-simétrica da conexão acopla. Para se convencer disso, veja 7.59 e compare com os cálculos acima. Feito isto, percebe-se que basta trocar a conexão $\overset{n}{\Gamma}$ por $\overset{c}{\Gamma}$ nos cálculos acima que obteremos o mesmo resultado. Entretanto há uma sutileza crucial. Antes de dizermos que as equações de campo não dependem destes objetos, temos que estar atentos ao seguinte fato. Como a conexão $\omega_{A\mu B}$ é um dos potenciais dos quais consideramos sua variação $\delta\omega_{A\mu B}$ independente de $\delta g_{\mu\nu}$, $\delta\bar{\psi}$, $\delta\psi$ e e^A , não podemos fazer a simplificação (D.34) antes de tomarmos as variações primeiro. No caso da variação em função de $\bar{\psi}$, a equação (7.81) deixa bem claro que há sim dependência dos símbolos de Christoffel, pois o termo $\overset{c}{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda \gamma^\alpha [\gamma_\lambda, \gamma^\mu]$ não necessariamente se anula. Entretanto, a equação (7.81) mostra que esta mesma variação fornece uma equação que independe da não-metricidade. Como será demonstrado na seção D.3.18, a variação de S_D com relação a não-metricidade será identicamente nula.

D.3.17 Variação da ação de Dirac com respeito a contorção

Verificaremos agora que a variação da lagrangiana de Dirac (D.30) com relação à contorção fornece exatamente a densidade de spin $S^{\mu\nu\lambda}$, também conhecida como potencial

de energia do spin³. Para tal, permita-nos reescrever (D.30) da seguinte forma

$$\mathcal{L}_D = -\frac{i}{8}\bar{\psi} K_{\lambda\alpha\nu} (\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\nu + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\alpha) \psi + \text{termos que não dependem}$$

da contorção,

onde estamos explicitando apenas o termo que depende da contorção. Para tal, usamos (7.59). Como queremos calcular a variação da ação $S_D = \int d^n x \sqrt{-g} \mathcal{L}_D$, teremos que calcular apenas $\frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}}$, já que não há dependência das derivadas da contorção e a variação da contorção é independente da variação da métrica ($\sqrt{-g}$ sai da variação). Por sua vez, é fácil notar que

$$\delta K_{\lambda\alpha\nu} = \frac{\partial K_{\lambda\alpha\nu}}{\partial K_{\beta\sigma\mu}} \delta K_{\beta\sigma\mu} = \delta_\lambda^\beta \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\mu \delta K_{\beta\sigma\mu} = \frac{1}{2} \left(\delta_\lambda^\beta \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\mu - \delta_\lambda^\mu \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\beta \right) \delta K_{\beta\sigma\mu}. \quad (\text{D.35})$$

Logo

$$\frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}} = -\frac{i}{16} \bar{\psi} \left(\delta_\lambda^\beta \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\mu - \delta_\lambda^\mu \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\beta \right) (\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\nu + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\alpha) \psi. \quad (\text{D.36})$$

Usando (D.12) na expressão acima, ficaremos com

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}} &= -\frac{i}{16} \bar{\psi} \left(\delta_\lambda^\beta \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\mu - \delta_\lambda^\mu \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\beta \right) (\gamma^{[\alpha}\gamma^\lambda\gamma^{\nu]} + \gamma^{[\lambda}\gamma^\nu\gamma^{\alpha]} + 2g^{\lambda\nu}\gamma^\alpha) \psi \\ &= -\frac{i}{16} \bar{\psi} \left(\delta_\lambda^\beta \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\mu - \delta_\lambda^\mu \delta_\alpha^\sigma \delta_\nu^\beta \right) 2\gamma^{[\alpha}\gamma^\lambda\gamma^{\nu]} \psi \\ &= -\frac{i}{8} \bar{\psi} (\gamma^{[\sigma}\gamma^\beta\gamma^{\mu]} - \gamma^{[\sigma}\gamma^\mu\gamma^{\beta]}) \psi \\ &= \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\sigma}\gamma^\mu\gamma^{\beta]} \psi, \end{aligned}$$

onde da primeira para segunda linha utilizamos o fato de que o termo com os deltas é anti-simétrico em λ e ν . Como a densidade de spin é dada por $S^{\sigma\mu\beta} = -\frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^{[\sigma}\gamma^\mu\gamma^{\beta]} \psi$ [2],

$$\frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta K_{\beta\sigma\mu}} = -S^{\sigma\mu\beta} = S^{\mu\sigma\beta}. \quad (\text{D.37})$$

³Para maiores detalhes sobre a densidade de spin, veja o apêndice B de [2], página 61.

D.3.18 Variação de S_D com respeito a não-metricidade

Tomando a variação de (D.30) em função de $N_{\beta\theta\psi}$ a partir das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_D}{\delta N_{\beta\theta\psi}}\delta N_{\beta\theta\psi} = \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_D}{\partial N_{\beta\theta\psi}}\delta N_{\beta\theta\psi}.$$

Perceba que D.30 não depende das derivadas da não-metricidade. Além disso, a única parte relevante de $\sqrt{-g}\mathcal{L}_D$ será $-\frac{i\sqrt{-g}}{2}\bar{\psi}\{\Gamma_\mu, \gamma^\mu\}\psi$. Assim, segue

$$\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_D = -\frac{i\sqrt{-g}}{2}\frac{\partial\bar{\psi}\{\Gamma_\mu, \gamma^\mu\}\psi}{\partial N_{\beta\theta\psi}}\delta N_{\beta\theta\psi} \quad (\text{D.38})$$

A parte da conexão espinorial que nos interessa é

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &\sim \frac{1}{8}\bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda [\gamma_\lambda, \gamma^\mu] = \frac{1}{16}g^{\lambda\sigma}(-N_{\sigma\alpha\mu} - N_{\mu\sigma\alpha} + N_{\alpha\mu\sigma})[\gamma_\lambda, \gamma^\mu] \\ &= \frac{1}{16}(-N_{\sigma\alpha\mu} - N_{\mu\sigma\alpha} + N_{\alpha\mu\sigma})[\gamma^\sigma, \gamma^\mu] \\ &= \frac{1}{16}(-N_{\sigma\alpha\mu} + N_{\alpha\mu\sigma})[\gamma^\sigma, \gamma^\mu] \\ &= \frac{1}{8}(N_{\alpha[\mu\sigma]})[\gamma^\sigma, \gamma^\mu], \end{aligned}$$

onde da segunda para a terceira linha usamos a simetria dos dois primeiros índices da não-metricidade. Derivando com respeito a $N_{\beta\theta\psi}$, teremos

$$\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial N_{\beta\theta\psi}}\delta N_{\beta\theta\psi} = \frac{1}{16}(\delta_\alpha^\beta\delta_\mu^\theta\delta_\sigma^\psi - \delta_\alpha^\beta\delta_\sigma^\theta\delta_\mu^\psi)[\gamma^\sigma, \gamma^\mu]\delta N_{\beta\theta\psi}$$

Como $N_{\beta\theta\psi}$ é simétrico nos dois primeiros índices,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial N_{\beta\theta\psi}}\delta N_{\beta\theta\psi} &= \frac{1}{32}\left(\delta_\alpha^\beta\delta_\mu^\theta\delta_\sigma^\psi - \delta_\alpha^\beta\delta_\sigma^\theta\delta_\mu^\psi\right. \\ &\quad \left.+ \delta_\alpha^\theta\delta_\mu^\beta\delta_\sigma^\psi - \delta_\alpha^\theta\delta_\sigma^\beta\delta_\mu^\psi\right)[\gamma^\sigma, \gamma^\mu]\delta N_{\beta\theta\psi} \\ &= \frac{1}{32}\left(\delta_\alpha^\beta[\gamma^\psi, \gamma^\theta] - \delta_\alpha^\beta[\gamma^\theta, \gamma^\psi]\right. \\ &\quad \left.+ \delta_\alpha^\theta[\gamma^\psi, \gamma^\beta] - \delta_\alpha^\theta[\gamma^\beta, \gamma^\psi]\right)\delta N_{\beta\theta\psi} \\ &= \frac{1}{16}\left(\delta_\alpha^\beta[\gamma^\psi, \gamma^\theta] + \delta_\alpha^\theta[\gamma^\psi, \gamma^\beta]\right)\delta N_{\beta\theta\psi} \\ &= \frac{1}{16}\left([\gamma^\psi, \gamma^\theta]\delta N_{\alpha\theta\psi} + [\gamma^\psi, \gamma^\beta]\delta N_{\beta\alpha\psi}\right) \\ &= \frac{1}{8}[\gamma^\psi, \gamma^\beta]\delta N_{\alpha\beta\psi}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\left(\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial N_{\alpha\beta\psi}}\gamma^\alpha + \gamma^\alpha\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial N_{\alpha\beta\psi}}\right)\delta N_{\alpha\beta\psi} = \frac{1}{8}([\gamma^\psi, \gamma^\beta]\gamma^\alpha\delta N_{\alpha\beta\psi}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma^\alpha[\gamma^\psi, \gamma^\beta]\delta N_{\alpha\beta\psi} \Big) = \frac{1}{8} \Big([\gamma^\psi, \gamma^\alpha]\gamma^\beta\delta N_{\beta\alpha\psi} + \gamma^\alpha[\gamma^\psi, \gamma^\beta]\delta N_{\alpha\beta\psi} \Big) \\
& = \frac{1}{8} \Big([\gamma^\psi, \gamma^\alpha]\gamma^\beta + \gamma^\alpha[\gamma^\psi, \gamma^\beta] \Big) \delta N_{\alpha\beta\psi} = \frac{1}{8} [\gamma^\psi, \gamma^\alpha\gamma^\beta]\delta N_{\alpha\beta\psi} \\
& = \frac{1}{16} [\gamma^\psi, \gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha]\delta N_{\alpha\beta\psi} \\
& = \frac{1}{8} [\gamma^\psi, g^{\alpha\beta}\mathbb{I}]\delta N_{\alpha\beta\psi} = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos por várias vezes a simetria dos dois primeiros índices da não-metricidade.

Comparando este resultado com (D.38), chegamos a

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_D}{\delta N_{\beta\theta\psi}}\delta N_{\beta\theta\psi} = 0.$$

Apêndice E

Einstein-Cartan

Neste apêndice, veremos alguns aspectos sobre a teoria de Einstein-Cartan. Na seção E.1, obtemos algumas das equações de campo (a equação de campo para ψ será obtida no capítulo 7). Já na seção E.2, obteremos a equação de movimento para uma partícula puntiforme com spin. Como veremos, a partícula segue uma equação que é a soma da geodésica mais um termo de força. Na seção E.4, comentaremos um pouco sobre campos escalares em Einstein-Cartan e, na última seção, apresentaremos a equação de Dirac em Einstein-Cartan. Faremos isto para apresentá-la com a cara particular da teoria de Einstein-Cartan.

E.1 Equações de campo

Considere a seguinte lagrangiana

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x [R + \chi \mathcal{L}_m] (g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}, K_{\lambda\mu\nu}, K_{\lambda\mu\nu,\lambda}, \psi_m, \psi_{m,\lambda}), \quad (\text{E.1})$$

onde ψ_m é um campo de matéria qualquer, $\mathcal{L}_m$ é a lagrangiana da matéria. De início, evitaremos pensar em ψ_m como estando associado com o spin. Perceba que, em Einstein-Cartan o acoplamento *massa-curvatura* é o mesmo da *fonte de spin-curvatura* (*spin-curvatura*), pois χ é o mesmo para todo o conteúdo de matéria. Segundo [2], alguns autores tratam o caso mais geral $\chi \mathcal{L}_{\text{matéria usual}} + \xi \mathcal{L}_{\text{fonte de spin}}$.

Usando o princípio variacional com as variações $\delta g_{\mu\nu}$, $\delta K_{\lambda\mu\nu}$ e $\delta \psi$ tomadas como independentes, teremos as seguintes equações:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta g^{\mu\nu}} + \chi \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta K_{\theta\beta\nu}} = \frac{\chi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\delta K_{\theta\beta\nu}}, \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta\psi} = 0.$$

É possível demonstrar que, tomando $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, usando a definição $R^\mu_{\rho\alpha\sigma} \equiv \Gamma^\mu_{\alpha\rho,\sigma} + \dots$ (esteja atento ao sinal e a ordem dos índices nesta definição) e definindo o tensor de momento energia métrico por $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}$, a equação (E.2) fica

$$G_{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\alpha (U^\alpha_{\nu\mu} - U_{\nu\mu}{}^\alpha + U_\mu{}^\alpha{}_\nu) = \frac{\chi}{2} \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (\text{E.4})$$

onde

$$U^{\alpha\mu\beta} \equiv \frac{1}{2} \left(T^{\alpha\mu\beta} + g^{\alpha\mu} T^{\lambda\beta}{}_\lambda - g^{\alpha\beta} T^{\lambda\mu}{}_\lambda \right), \quad (\text{E.5})$$

$$\overset{\star}{\nabla}_\mu \equiv \nabla_\mu + T^\lambda_{\mu\lambda}. \quad (\text{E.6})$$

Note que neste capítulo estamos tratando derivadas covariantes como operadores que atuam em índices.

Para demonstrar (E.4), é aconselhável usar coordenadas geodésicas para cancelar os símbolos de Christoffel. Neste caso, a conexão dependerá apenas da contorção.

Da definição (E.5), vemos que

$$U^{\alpha\mu\nu} = -U^{\alpha\nu\mu}. \quad (\text{E.7})$$

Agora, vamos calcular a variação da ação em termos da contorção. De (E.1), vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta K_{\theta\beta\nu}} = \frac{\chi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\delta K_{\theta\beta\nu}}. \quad (\text{E.8})$$

Na hora de calcular a variação de um tensor com vários índices é preciso tomar cuidado com o uso das propriedades de simetria. De maneira geral, não devemos usar as simetrias dos índices enquanto calculamos as derivadas, usamos apenas na hora de remover as variações. Como exemplo, considere a variação da contorção em termos dela mesma

$$\delta K_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial K_{\mu\nu\lambda}}{\partial K_{\alpha\beta\sigma}} \delta K_{\alpha\beta\sigma} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\sigma_\lambda \delta K_{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\lambda) \delta K_{\alpha\beta\sigma}. \quad (\text{E.9})$$

Perceba que no cálculo acima só consideramos a anti-simetria do primeiro com o último índice da contorção após derivarmos. Se tivéssemos usado a simetria durante o cálculo da deriva, teríamos obtido $\frac{\partial K_{\mu\nu\lambda}}{\partial K_{\alpha\beta\sigma}} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\lambda \neq \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\lambda)$ ($\frac{\partial K_{123}}{\partial K_{123}} = 1 \neq \frac{1}{2}$, por exemplo), o que levaria a um erro de um fator de 2. Todavia, este erro seria irrelevante no cálculo total da variação da ação, pois todos os termos conteriam este fator de 2 e, como a variação total é nula, poderíamos nos livrar dele. No que vem a seguir, será usado a equação de Euler-Lagrange, que já considera o fato de δS ser nula e de δK , $\delta\psi$ e δg serem independentes. Por esta razão, adotaremos, simbolicamente e sem risco de erro, a “igualdade”:

$$\frac{\partial K_{\mu\nu\lambda}}{\partial K_{\alpha\beta\sigma}} \doteq \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\lambda). \quad (\text{E.10})$$

Para calcular a variação do termo da esquerda na expressão (E.8), é conveniente reescrever a expressão (4.23) da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho\alpha\sigma} = & \overset{c}{R}_{\mu\alpha\sigma\rho} + g_{\chi\mu} (g^{\psi\chi} K_{\psi\sigma\rho})_{,\alpha} - g_{\chi\mu} (g^{\psi\chi} K_{\psi\alpha\rho})_{,\sigma} + K^\phi_{\sigma\rho} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\alpha\phi} \\ & + \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho} K_{\mu\alpha\phi} + K^\phi_{\sigma\rho} K_{\mu\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\sigma\phi} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho} K_{\mu\sigma\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} K_{\mu\sigma\phi}, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho\alpha\sigma} = & \overset{c}{R}_{\mu\alpha\sigma\rho} + K_{\mu\sigma\rho,\alpha} - K_{\mu\alpha\rho,\sigma} + g_{\chi\mu} g^{\psi\chi}_{,\alpha} K_{\psi\sigma\rho} - g_{\chi\mu} g^{\psi\chi}_{,\sigma} K_{\psi\alpha\rho} \\ & + K^\phi_{\sigma\rho} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\alpha\phi} + \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho} K_{\mu\alpha\phi} + K^\phi_{\sigma\rho} K_{\mu\alpha\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\sigma\phi} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho} K_{\mu\sigma\phi} - K^\phi_{\alpha\rho} K_{\mu\sigma\phi}. \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

A expressão acima depende tanto da contorção quanto de sua derivada, logo teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} R}{\delta K_{\theta\beta\nu}} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\delta K_{\theta\beta\nu}} \\ &= g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Calculemos primeiramente $g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}}$. Usando (E.11), teremos

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} = & g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \left[g_{\chi\mu} g^{\psi\chi}_{,\alpha} \frac{\partial K_{\psi\sigma\rho}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} - g_{\chi\mu} g^{\psi\chi}_{,\sigma} \frac{\partial K_{\psi\alpha\rho}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} \right. \\ & + \frac{\partial K_{\phi\sigma\rho}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\alpha}^\phi + \overset{c}{\Gamma}_{\sigma\rho}^\phi \frac{\partial K_{\mu\alpha\phi}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} + \frac{\partial K_{\phi\sigma\rho}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} K_{\mu\alpha}^\phi + K^\phi_{\sigma\rho} \frac{\partial K_{\mu\alpha\phi}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} \\ & \left. - \frac{\partial K_{\phi\alpha\rho}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} \overset{c}{\Gamma}_{\mu\sigma}^\phi - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha\rho}^\phi \frac{\partial K_{\mu\sigma\phi}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} - \frac{\partial K_{\phi\alpha\rho}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} K_{\mu\sigma}^\phi - K^\phi_{\alpha\rho} \frac{\partial K_{\mu\sigma\phi}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} \right]. \end{aligned}$$

Usando (E.10), teremos

$$\begin{aligned}
g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \left[g_{\chi\mu} g^{\psi\chi}{}_{,\alpha} (\delta^\theta{}_\psi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\psi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\rho) \right. \\
&- g_{\chi\mu} g^{\psi\chi}{}_{,\sigma} (\delta^\theta{}_\psi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\psi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\rho) + (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\rho) \overset{c}{\Gamma}{}^\phi{}_{\mu\alpha} \\
&+ \overset{c}{\Gamma}{}^\phi{}_{\sigma\rho} (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\phi) + (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\rho) K_{\mu\alpha}{}^\phi \\
&+ K_{\sigma\rho}{}^\phi (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\phi) - (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\rho) \overset{c}{\Gamma}{}^\phi{}_{\mu\sigma} \\
&- \overset{c}{\Gamma}{}^\phi{}_{\alpha\rho} (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\phi) - (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\rho) K_{\mu\sigma}{}^\phi \\
&\left. - K_{\alpha\rho}{}^\phi (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\phi) \right].
\end{aligned}$$

Entrando com $g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha}$ dentro dos colchetes, segue que

$$\begin{aligned}
g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} &= \frac{1}{2} \left[g^{\rho\sigma} g^{\psi\chi}{}_{,\chi} (\delta^\theta{}_\psi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\psi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\rho) \right. \\
&- g^{\rho\sigma} g^{\psi\chi}{}_{,\sigma} (\delta^\theta{}_\psi \delta^\beta{}_\chi \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\psi \delta^\beta{}_\chi \delta^\theta{}_\rho) + (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\rho) g^{\rho\sigma} \overset{c}{\Gamma}{}^\lambda{}_\lambda{}^\phi \\
&+ g^{\mu\alpha} \overset{c}{\Gamma}{}^{\phi\lambda}{}_\lambda (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\phi) + (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\rho) g^{\rho\sigma} K_{\lambda}{}^\phi \\
&+ g^{\mu\alpha} K^{\phi\lambda}{}_\lambda (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\phi) - (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\rho) \overset{c}{\Gamma}{}^{\alpha\rho\phi} \\
&- \overset{c}{\Gamma}{}^{\phi\mu\sigma} (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\phi) - (\delta^\theta{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\nu{}_\rho - \delta^\nu{}_\phi \delta^\beta{}_\alpha \delta^\theta{}_\rho) K^{\alpha\rho\phi} \\
&\left. - K^{\phi\mu\sigma} (\delta^\theta{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\nu{}_\phi - \delta^\nu{}_\mu \delta^\beta{}_\sigma \delta^\theta{}_\phi) \right].
\end{aligned}$$

Continuando com os cálculos, teremos

$$\begin{aligned}
g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} &= \frac{1}{2} \left[g^{\nu\beta} g^{\theta\lambda}{}_{,\lambda} - g^{\theta\beta} g^{\nu\lambda}{}_{,\lambda} \right. \\
&- g^{\nu\sigma} g^{\theta\beta}{}_{,\sigma} + g^{\theta\sigma} g^{\nu\beta}{}_{,\sigma} + g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda\theta}{}_\lambda - g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda\nu}{}_\lambda \\
&+ g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\lambda}{}_\lambda - g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\lambda}{}_\lambda + g^{\nu\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\theta}{}^c - g^{\theta\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\nu}{}^b \\
&+ g^{\theta\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\nu}{}^b - g^{\nu\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\theta}{}^c - \overset{c}{\Gamma}{}^{\beta\nu\theta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\beta\theta\nu} \\
&- \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} - K_{\lambda}^{\nearrow\theta}{}^a + K_{\lambda}^{\nearrow\nu}{}^a \\
&\left. - K_{\lambda}^{\nearrow\theta}{}^a + K_{\lambda}^{\nearrow\nu}{}^a \right],
\end{aligned}$$

onde os termos indicados com a letra “a” simplificam-se da seguinte forma $-K^{\beta\nu\theta} + K^{\beta\theta\nu} - K^{\nu\theta\beta} + K^{\theta\nu\beta} = 2K^{\beta[\theta\nu]} + K^{\beta\theta\nu} - K^{\beta\nu\theta} = 4K^{\beta[\theta\nu]}$ (lembre-se de (4.18)); já os termos indicados por “b” e “c” satisfazem $g^{\theta\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\nu}{}^b - g^{\theta\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\lambda}{}^\nu = 2g^{\theta\beta} K^{\nu\lambda}{}_\lambda$ e $g^{\nu\beta} K_{\lambda}^{\nearrow\theta}{}^c -$

$g^{\nu\beta} K^{\theta\lambda}{}_{\lambda} = 2g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda}$, respectivamente. Reescrevendo a expressão acima em termos destas simplificações, ficaremos com

$$g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} = \left[g^{\nu\beta} g^{\theta\lambda}{}_{,\lambda} - g^{\theta\beta} g^{\nu\lambda}{}_{,\lambda} - g^{\nu\sigma} g^{\theta\beta}{}_{,\sigma} + g^{\theta\sigma} g^{\nu\beta}{}_{,\sigma} \right. \\ \left. + g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\theta} - g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} + g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\lambda}{}_{\lambda} - g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\lambda}{}_{\lambda} - \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} \right. \\ \left. + 2g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda} + 2g^{\theta\beta} K^{\nu\lambda}{}_{\lambda} + 4K^{\beta[\theta\nu]} \right]. \quad (E.12)$$

Como $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda}{}^{\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\mu}$, a expressão acima fica

$$g^{\rho\sigma} g^{\mu\alpha} \frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} = \frac{1}{2} \left[g^{\nu\beta} \left(-\overset{c}{\cancel{\Gamma}}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\theta} - \overset{a}{\cancel{\Gamma}}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\theta} \right) - g^{\theta\beta} \left(-\overset{d}{\cancel{\Gamma}}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} - \overset{b}{\cancel{\Gamma}}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} \right) \right. \\ \left. - g^{\nu\sigma} \left(-\Gamma^{\theta}{}_{\sigma}{}^{\beta} - \Gamma^{\beta}{}_{\sigma}{}^{\theta} \right) + g^{\theta\sigma} \left(-\Gamma^{\nu}{}_{\sigma}{}^{\beta} - \Gamma^{\beta}{}_{\sigma}{}^{\nu} \right) + g^{\nu\beta} \overset{c}{\cancel{\Gamma}}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\theta} - g^{\theta\beta} \overset{c}{\cancel{\Gamma}}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} \right. \\ \left. + g^{\theta\beta} \overset{c}{\cancel{\Gamma}}{}^{\nu\lambda}{}_{\lambda} - g^{\nu\beta} \overset{c}{\cancel{\Gamma}}{}^{\theta\lambda}{}_{\lambda} - \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} + 2g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda} + 2g^{\theta\beta} K^{\nu\lambda}{}_{\lambda} \right. \\ \left. + 4K^{\beta[\theta\nu]} \right] = \frac{1}{2} \left[-2g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + 2g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + \Gamma^{\theta\nu\beta} + \Gamma^{\beta\nu\theta} - \Gamma^{\nu\theta\beta} - \Gamma^{\beta\theta\nu} \right. \\ \left. - \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} + 2g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda} + 2g^{\theta\beta} K^{\nu\lambda}{}_{\lambda} + 4K^{\beta[\theta\nu]} \right] = \frac{1}{2} \left[-2g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} \right. \\ \left. + 2g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\beta\nu\theta} - \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} - \overset{c}{\Gamma}{}^{\beta\theta\nu} - \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} + \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} + 2g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda} \right. \\ \left. + 2g^{\theta\beta} K^{\nu\lambda}{}_{\lambda} + 4K^{\beta[\theta\nu]} \right] = \frac{1}{2} \left[-2g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + 2g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + 2\overset{c}{\Gamma}{}^{\theta\nu\beta} - 2\overset{c}{\Gamma}{}^{\nu\theta\beta} \right. \\ \left. + 2g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda} + 2g^{\theta\beta} K^{\nu\lambda}{}_{\lambda} + 4K^{\beta[\theta\nu]} \right], \quad (E.13)$$

onde a soma dos termos indicados pelas letras “a,b,c,d” foram simplificados da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \text{termo a} &= -g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\theta} + g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\theta} = -g^{\nu\beta} K^{\lambda}{}^{\theta}{}_{\lambda} = g^{\nu\beta} K^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda}, \\ \text{termo b} &= g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} - g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} = g^{\theta\beta} K^{\lambda}{}^{\nu}{}_{\lambda} = -g^{\theta\beta} K^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda}, \\ \text{termo c} &= -g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} - g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} = -2g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} - g^{\nu\beta} K^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda}, \\ \text{termo d} &= g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} = 2g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + g^{\theta\beta} K^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Somando estes termos, teremos

$$\begin{aligned} \text{termo a+b+c+d} &= g^{\nu\beta} K^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} - g^{\theta\beta} K^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} - 2g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} - g^{\nu\beta} K^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + 2g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + g^{\theta\beta} K^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda} \\ &= -2g^{\nu\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\lambda} + 2g^{\theta\beta} \overset{c}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Além disto, usamos em (E.13) o fato de $\Gamma^{\theta\nu\beta} + \Gamma^{\beta\nu\theta} - \Gamma^{\nu\theta\beta} - \Gamma^{\beta\theta\nu} = \overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta} + \overset{c}{\Gamma}^{\beta\nu\theta} + \overbrace{K^{\theta\nu\beta} + K^{\beta\nu\theta}}^0 - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta} - \overset{c}{\Gamma}^{\beta\theta\nu} - \overbrace{K^{\nu\theta\beta} + K^{\beta\theta\nu}}^0 = \overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta} + \overset{c}{\Gamma}^{\beta\nu\theta} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta} - \overset{c}{\Gamma}^{\beta\theta\nu}$.

Agora, calculemos $\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \right)$. De (E.11), segue que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial K_{\mu\rho,\alpha}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} - \frac{\partial K_{\mu\alpha\rho,\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \right) . \quad (\text{E.14})$$

Pelas mesmas razões mencionadas anteriormente, tomaremos

$$\frac{\partial K_{\mu\rho,\alpha}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \doteq \frac{1}{2} \left(\delta^\theta_\mu \delta^\beta_\sigma \delta^\nu_\rho \delta^\lambda_\alpha - \delta^\nu_\mu \delta^\beta_\sigma \delta^\theta_\rho \delta^\lambda_\alpha \right) . \quad (\text{E.15})$$

Substituindo (E.15) em (E.14), teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_\lambda \sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha} \left(\delta^\theta_\mu \delta^\beta_\sigma \delta^\nu_\rho \delta^\lambda_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \delta^\nu_\mu \delta^\beta_\sigma \delta^\theta_\rho \delta^\lambda_\alpha - \delta^\theta_\mu \delta^\beta_\alpha \delta^\nu_\rho \delta^\lambda_\sigma + \delta^\nu_\mu \delta^\beta_\alpha \delta^\theta_\rho \delta^\lambda_\sigma \right) = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_\lambda \sqrt{-g} \left(2g^{\nu\beta}g^{\theta\lambda} \right. \\ &\quad \left. - 2g^{\theta\beta}g^{\nu\lambda} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\partial_\lambda \sqrt{-g}) (g^{\nu\beta}g^{\theta\lambda} - g^{\theta\beta}g^{\nu\lambda}) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g}\partial_\lambda (g^{\nu\beta}g^{\theta\lambda} - g^{\theta\beta}g^{\nu\lambda}) \right] = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g}\overset{c}{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha (g^{\nu\beta}g^{\theta\lambda} - g^{\theta\beta}g^{\nu\lambda}) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g} \left(g^{\nu\beta}_{,\lambda}g^{\theta\lambda} + g^{\nu\beta}g^{\theta\lambda}_{,\lambda} - g^{\theta\beta}_{,\lambda}g^{\nu\lambda} - g^{\theta\beta}g^{\nu\lambda}_{,\lambda} \right) \right] = \\ &\quad \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\theta}g^{\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\nu}g^{\theta\beta} + \left(g^{\nu\beta}_{,\lambda}g^{\theta\lambda} + g^{\nu\beta}g^{\theta\lambda}_{,\lambda} - g^{\theta\beta}_{,\lambda}g^{\nu\lambda} - g^{\theta\beta}g^{\nu\lambda}_{,\lambda} \right) \end{aligned}$$

onde usamos (D.6) com $N = 0$ da terceira para a quarta linha. Usando o fato da derivada covariante da métrica ser zero, $g^{\mu\nu}_{,\lambda} = -\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}g^{\sigma\nu} - \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}g^{\mu\sigma}$, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}} \right) &= \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\theta}g^{\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\nu}g^{\theta\beta} \\ &\quad + \left[\left(-\Gamma^\nu_{\lambda\sigma}g^{\sigma\beta} - \Gamma^\beta_{\lambda\sigma}g^{\nu\sigma} \right) g^{\theta\lambda} + g^{\nu\beta} \left(-\Gamma^\theta_{\lambda\sigma}g^{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}g^{\theta\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\Gamma^\theta_{\lambda\sigma}g^{\sigma\beta} - \Gamma^\beta_{\lambda\sigma}g^{\theta\sigma} \right) g^{\nu\lambda} - g^{\theta\beta} \left(-\Gamma^\nu_{\lambda\sigma}g^{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}g^{\nu\sigma} \right) \right] \\ &= \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\theta}g^{\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\nu}g^{\theta\beta} + \left[-\Gamma^{\nu\theta\beta} - \Gamma^{\beta\theta\nu} - g^{\nu\beta}\Gamma^{\theta\lambda}_{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda}\theta g^{\nu\beta} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma^{\theta\nu\beta} + \Gamma^{\beta\nu\theta} + g^{\theta\beta}\Gamma^{\nu\lambda}_{\lambda} + g^{\theta\beta}\Gamma^{\lambda}_{\lambda}\nu \right] = \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\theta}g^{\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha\nu}g^{\theta\beta} \\ &\quad + \left[\Gamma^{\theta\nu\beta} - \Gamma^{\nu\theta\beta} + 2K^{\beta[\nu\theta]} - g^{\nu\beta}\Gamma^{\theta\lambda}_{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda}\theta g^{\nu\beta} + g^{\theta\beta}\Gamma^{\nu\lambda}_{\lambda} + g^{\theta\beta}\Gamma^{\lambda}_{\lambda}\nu \right], \end{aligned}$$

onde $\Gamma^{\beta\nu\theta} - \Gamma^{\beta\theta\nu} = 2K^{\beta\nu\theta}$. Usando o fato de que $\Gamma^{\theta\nu\beta} - \Gamma^{\nu\theta\beta} = \overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta} + K^{\theta\nu\beta} - K^{\nu\theta\beta} = \overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta} + 2K^{\beta[\theta\nu]}$, e o fato de que $-g^{\nu\beta}\Gamma^{\theta\lambda}_{\lambda} - \Gamma^{\lambda\theta}_{\lambda}g^{\nu\beta} = -g^{\nu\beta}(\overset{c}{\Gamma}^{\theta\lambda}_{\lambda} + \overset{c}{\Gamma}^{\lambda\theta}_{\lambda} + \underbrace{K^{\theta\lambda}_{\lambda} + K^{\lambda\theta}_{\lambda}}_0) = -g^{\nu\beta}(\overset{c}{\Gamma}^{\theta\lambda}_{\lambda} + \overset{c}{\Gamma}^{\lambda\theta}_{\lambda})$ na expressão acima, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}}\right) &= \overset{c}{\Gamma}^{\alpha\theta}_{\alpha}\overset{a}{g^{\nu\beta}} - \overset{c}{\Gamma}^{\alpha\nu}_{\alpha}\overset{b}{g^{\theta\beta}} + \left[\overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta} + 2K^{\beta[\theta\nu]} + 2K^{\beta[\nu\theta]} - g^{\nu\beta}\left(\overset{c}{\Gamma}^{\theta\lambda}_{\lambda} + \overset{c}{\Gamma}^{\lambda\theta}_{\lambda}\overset{a}{g^{\nu\beta}}\right) + g^{\theta\beta}\left(\overset{c}{\Gamma}^{\nu\lambda}_{\lambda} + \overset{c}{\Gamma}^{\lambda\nu}_{\lambda}\overset{b}{g^{\theta\beta}}\right)\right] \\ &= \left[\overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta} - g^{\nu\beta}\overset{c}{\Gamma}^{\theta\lambda}_{\lambda} + g^{\theta\beta}\overset{c}{\Gamma}^{\nu\lambda}_{\lambda}\right]. \end{aligned} \quad (E.16)$$

De (E.16) e (E.13), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta K_{\theta\beta\nu}} &= g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu}} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}\frac{\partial R_{\mu\rho\alpha\sigma}}{\partial K_{\theta\beta\nu,\lambda}}\right) \\ &= \left[-g^{\nu\beta}\overset{c}{\Gamma}^{\theta\lambda}_{\lambda}\overset{a}{g^{\nu\beta}} + g^{\theta\beta}\overset{c}{\Gamma}^{\nu\lambda}_{\lambda}\overset{b}{g^{\theta\beta}} + \overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta}\overset{c}{g^{\nu\beta}} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta}\overset{d}{g^{\theta\beta}} + g^{\nu\beta}K^{\lambda\theta}_{\lambda} + g^{\theta\beta}K^{\nu\lambda}_{\lambda} + 2K^{\beta[\theta\nu]}\right] \\ &\quad - \left[\overset{c}{\Gamma}^{\theta\nu\beta}\overset{c}{g^{\nu\beta}} - \overset{c}{\Gamma}^{\nu\theta\beta}\overset{d}{g^{\theta\beta}} - g^{\nu\beta}\overset{c}{\Gamma}^{\theta\lambda}_{\lambda}\overset{a}{g^{\nu\beta}} + g^{\theta\beta}\overset{c}{\Gamma}^{\nu\lambda}_{\lambda}\overset{b}{g^{\theta\beta}}\right] \\ &= g^{\nu\beta}K^{\lambda\theta}_{\lambda} + g^{\theta\beta}K^{\nu\lambda}_{\lambda} + 2K^{\beta[\theta\nu]} \end{aligned}$$

Usando (4.16), (4.17) e (4.18), chegamos finalmente a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta K_{\theta\beta\nu}} &= -g^{\nu\beta}T^{\lambda\theta}_{\lambda} + g^{\theta\beta}T^{\lambda\nu}_{\lambda} + T^{\beta\theta\nu} \\ &= -2\frac{1}{2}(g^{\nu\beta}T^{\lambda\theta}_{\lambda} - g^{\theta\beta}T^{\lambda\nu}_{\lambda} - T^{\beta\theta\nu}) \\ &= -2\frac{1}{2}(g^{\nu\beta}T^{\lambda\theta}_{\lambda} - g^{\theta\beta}T^{\lambda\nu}_{\lambda} + T^{\beta\nu\theta}). \end{aligned}$$

Comparando com a definição de U , teremos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta K_{\theta\beta\nu}} = -2U^{\beta\nu\theta}. \quad (E.17)$$

Substituindo a expressão acima em (E.8), chegamos a

$$-2U^{\beta\nu\theta} = \frac{\chi}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\delta K_{\theta\beta\nu}}. \quad (E.18)$$

Se admitirmos que a lagrangiana da matéria é dada pela lagrangiana de Dirac, então, de (D.37), teremos

$$U^{\beta\nu\theta} = \frac{\chi}{2} S^{\beta\nu\theta}. \quad (\text{E.19})$$

Agora está claro porque estamos usando $U_{\alpha\beta\gamma}$. A expressão acima mostra que $U_{\alpha\beta\gamma}$ está relacionado com o conteúdo de matéria, todavia, $U_{\alpha\beta\gamma}$ é uma entidade que depende apenas da geometria (ele é função da torção), o que significa que a expressão (E.18) indica como o conteúdo de matéria acopla com a parte da geometria associada com a torção. A priori, não precisaríamos associar o potencial vetor $S^{\alpha\mu\beta}$ ao spin¹, porém, vemos de (D.37) e (E.18) que se a lagrangiana da matéria é a lagrangiana de Dirac, então o spin acopla com a torção via (E.18). Para escrevermos o tensor de energia e momento canônico², devemos levar o segundo termo da esquerda de (E.4) para a direita e definir um novo tensor de energia momento $\theta^{\mu\nu}$. Fazendo isto, teremos

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\chi}{2} \theta_{\alpha\beta}, \quad (\text{E.20})$$

onde

$$\theta_{\beta\alpha} = \mathcal{T}_{\alpha\beta} + \overset{\star}{\nabla}_{\nu} (S^{\alpha\beta\nu} - S^{\beta\nu\alpha} + S^{\nu\alpha\beta}). \quad (\text{E.21})$$

Note que para obter o resultado acima, usamos $U^{\alpha\mu\nu} = \frac{\chi}{2} S^{\alpha\mu\nu}$ em (E.4). Perceba que o novo tensor energia momento não é simétrico, já que o tensor de Einstein, em Riemann-Cartan, não possui esta simetria. É trivial verificar que

$$\theta^{[\mu\nu]} = \frac{2}{\chi} \overset{\star}{\nabla}_{\alpha} U^{\alpha\nu\mu}, \quad (\text{E.22})$$

onde utilizamos (E.7). Comparando (E.21) com o tensor energia momento canônico³ em Minkowski⁴, $\theta_{\beta\alpha} = \bar{\theta}_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\alpha\beta} + \partial_{\nu} (S^{\alpha\beta\nu} - S^{\beta\nu\alpha} + S^{\nu\alpha\beta})$, vemos que ∂_{ν} é substituída por $\overset{\star}{\nabla}_{\nu} = \nabla_{\nu} + T^{\lambda}_{\nu\lambda}$. Disto, vemos mais uma vez que o acoplamento mínimo aplicado direto nas

¹O ψ não precisaria ser o spinor de Dirac, mas sim um campo qualquer associado ao potencial vetor $S^{\alpha\mu\nu}$.

²Veja página 242 de [2] e a página 399 de [1], seção C.

³Veja a página 66, equação (B.32), de [2]

⁴Na notação desta tese $G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\nu\mu}$, onde $\bar{G}_{\nu\mu}$ é o tensor de Einstein como definido em [2]. Como $\bar{G}_{\mu\nu} = \bar{\theta}_{\mu\nu}$, $\theta_{\mu\nu} = \bar{\theta}_{\nu\mu}$.

equações de campo só fornecerá as mesmas equações de campo que as obtidas através do acoplamento mínimo na ação se a torção for totalmente anti-simétrica, ou seja, $T^\lambda_{\nu\lambda} = 0$.

E.2 Equação de movimento

Embora, de início, Einstein tenha postulado que partículas seguem uma geodésica e este postulado tenha sido bem sucedido, em relatividade geral, não se deve postular as equações de movimento separadamente das equações de campo [41, 22, 23]. De fato, elas devem vir de alguma lei de conservação associada ao tensor momento-energia da partícula. É natural, então, que uma versão generalizada da relatividade geral, caso de Einstein-Cartan, também siga esta mesma linha⁵ [41, 186]. Para obter tal equação, usaremos o mesmo procedimento adotado em [2]. Este procedimento será válido para qualquer teoria onde (E.20) represente as equações de campo, mesmo que $S_\mu^\alpha{}_\nu$ não seja o potencial de energia do spin, ou seja, o resultado aqui obtido é independente do spin ser ou não a fonte de torção. Por sua vez, o resultado aqui obtido dependerá apenas das seguintes hipóteses:

1. Geometria de Riemann-Cartan.
2. As equações de campo (E.20) são válidas.
3. A lagrangiana é uma função das variáveis independentes $g_{\mu\nu}$ (ou e_A^μ), $K_{\mu\nu\lambda}$ (ou $T_{\mu\nu\lambda}$) e de suas derivadas.
4. O princípio variacional “tradicional” é válido⁶.

Em um espaço com torção, a derivada do tensor de Einstein não é mais nula, mas sim⁷,

$$\nabla_\nu G^{\nu\mu} + T^\alpha_{\nu\alpha} G^{\nu\mu} + T^\nu_\alpha{}^\mu G^\alpha_\nu - U_{\nu\alpha\beta} R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0. \quad (\text{E.23})$$

⁵Entretanto, em uma versão generalizada de Brans-Dicke [185], os autores postulam que a equação auto-paralela governa o movimento do planeta Mercúrio.

⁶Como já mencionado em outras partes desta tese, há autores que questionam a validade do princípio variacional usado para variedades riemannianas quando aplicado em variedades não-riemannianas [38, 84, 85].

⁷Veja página 238, equação 10.36 de [2]. Para comparar a expressão exibida aqui com a de [2] é necessário levar em conta as diferenças que há na notação. Se necessário, consulte a seção A.3.

Usando (E.20) em (E.23), teremos

$$\nabla_\nu \theta^{\nu\mu} + T^\alpha_{\nu\alpha} \theta^{\nu\mu} + T^\nu_{\alpha}{}^\mu \theta^\alpha_\nu - \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0. \quad (\text{E.24})$$

Agora, usaremos (E.24) para obter uma expressão que seja a equação da geodésica mais um termo extra devido ao spin da partícula. Por esta razão, torna-se conveniente escrever o tensor energia-momento modificado em termos das suas partes simétricas e anti-simétricas, pois, assim, poderemos utilizar o resultado obtido no capítulo sobre relatividade geral. Considere a substituição de $\theta^{\mu\nu} = \theta^{(\mu\nu)} + \theta^{[\mu\nu]}$ em (E.24) e uma respectiva multiplicação por $\sqrt{-g}$. Usando o fato de $\nabla_\mu \sqrt{-g} = 0$, teremos

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu \sqrt{-g} (\theta^{(\nu\mu)} + \theta^{[\nu\mu]}) + \sqrt{-g} T^\alpha_{\nu\alpha} (\theta^{(\nu\mu)} + \theta^{[\nu\mu]}) \\ & + \sqrt{-g} T^\nu_{\alpha}{}^\mu (\theta^{(\alpha\nu)} + \theta^{[\alpha\nu]}) - \sqrt{-g} \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Trabalhemos agora esta expressão termo a termo. Primeiramente, calculemos o termo $\nabla_\nu \sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)}$.

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)} &= (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \Gamma^\nu_{\nu\lambda} \theta^{(\lambda\mu)} + \sqrt{-g} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} \\ &- \sqrt{-g} \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\mu)} = (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \theta^{(\lambda\mu)} + \sqrt{-g} K^\nu_{\nu\lambda} \theta^{(\lambda\mu)} \\ &+ \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} + \sqrt{-g} K^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} - \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\mu)} - \sqrt{-g} K^\lambda_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\mu)} \\ &= (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} + \sqrt{-g} K^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} \\ &\quad + \sqrt{-g} (K^\nu_{\nu\beta} - K^\lambda_{\beta\lambda}) \theta^{(\beta\mu)}, \end{aligned}$$

onde os termos indicados pela letra “a” se cancelam (lembre-se da simetria da conexão riemanniana). De (4.14), vemos que $K^\lambda_{\mu\nu} - K^\lambda_{\nu\mu} = T^\lambda_{\mu\nu}$. Portanto, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)} &= (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} + \sqrt{-g} K^\mu_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} \\ &\quad + \sqrt{-g} T^\nu_{\nu\lambda} \theta^{(\lambda\mu)}. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Considere, agora, o seguinte termo.

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]} &= (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \overset{a}{\theta^{[\nu\lambda]}} + \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\nu \theta^{[\lambda\mu]} \\
&+ \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \overset{0}{\theta^{[\nu\lambda]}} + \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \theta^{[\nu\lambda]} - \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\lambda \overset{a}{\theta^{[\nu\lambda]}} - \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\lambda \theta^{[\nu\mu]} \\
&= (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} + \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \theta^{[\nu\lambda]} + \sqrt{-g} (K_{\nu\beta}^\nu - K_{\beta\lambda}^\lambda) \theta^{[\beta\mu]} \\
&= (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} + \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \theta^{[\nu\lambda]} + \sqrt{-g} T_{\nu\beta}^\nu \theta^{[\beta\mu]}, \tag{E.27}
\end{aligned}$$

onde, pelas mesmas razões anteriores, os termos indicados com a letra “a” se cancelam e o termo indicado com o “0” se anula por temos índices simétricos sendo contraído com anti-simétricos. Somando (E.26) com (E.27), teremos

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)} + \nabla_\nu \sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]} &= (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \theta^{(\nu\lambda)} \\
&+ \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \overset{a}{\theta^{(\nu\lambda)}} + \sqrt{-g} T_{\nu\lambda}^\nu \overset{b}{\theta^{(\lambda\mu)}} + (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} + \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \overset{a}{\theta^{[\nu\lambda]}} \\
&+ \sqrt{-g} T_{\nu\beta}^\nu \overset{b}{\theta^{[\beta\mu]}} = (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \theta^{(\nu\lambda)} + (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} \\
&+ \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \theta^{\nu\lambda} + \sqrt{-g} T_{\nu\lambda}^\nu \theta^{\lambda\mu},
\end{aligned}$$

onde os termos indicados pelas mesmas letras puderam ser escritos em termos de $\theta^{\mu\nu}$. Os dois primeiros termos após a igualdade da penúltima linha da expressão acima já estão do jeito que queremos, eles representam exatamente o que tínhamos no caso da relatividade geral, abordado no capítulo 3. Precisamos trabalhar os outros termos. Para tal, substituamos a expressão acima em (E.25).

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \theta^{(\nu\lambda)} + (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} \\
&+ \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \theta^{\nu\lambda} + \sqrt{-g} T_{\nu\lambda}^\nu \overset{a}{\theta^{\lambda\mu}} + \sqrt{-g} T_{\nu\alpha}^\alpha \overset{a}{\theta^{\nu\mu}} \\
&+ \sqrt{-g} T_{\nu\alpha}^\mu \theta^{\alpha\nu} - \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} \\
&= (\sqrt{-g} \theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \theta^{(\nu\lambda)} + (\sqrt{-g} \theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} \\
&+ \sqrt{-g} K_{\nu\lambda}^\mu \theta^{\nu\lambda} + \sqrt{-g} T_{\nu\alpha}^\mu \theta^{\alpha\nu} - \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0, \tag{E.28}
\end{aligned}$$

onde os termos indicados com a letra “a” se cancelam (lembre-se que $T_{\mu\nu}^\lambda = -T_{\nu\mu}^\lambda$). Os dois primeiros termos da última linha ainda podem ser simplificados, como indicado a seguir.

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu\lambda}\theta_{\nu\lambda} + T^{\nu\alpha\mu}\theta_{\alpha\nu} &= \overset{1}{K^{\mu\nu\lambda}}\theta_{\nu\lambda} + \overset{2}{T^{\nu\alpha\mu}}\theta_{\alpha\nu} + \overset{3}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} - \overset{4}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} \\
&= -\overset{4}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} + \overset{2}{T^{\nu\alpha\mu}}\theta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \overbrace{(T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\nu\mu} - T^{\mu\nu\lambda})}^1 [\theta_{(\nu\lambda)} + \theta_{[\nu\lambda]}] \\
&\quad - \frac{1}{2} \overbrace{(T^{\mu\nu\alpha} + T^{\nu\mu\alpha} - T^{\alpha\mu\nu})}^3 \theta_{[\nu\alpha]} = -\overset{3}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} + \overset{2}{T^{\nu\alpha\mu}}\theta_{\alpha\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} \{ (T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\nu\mu}) \theta_{(\nu\lambda)} - T^{\mu\nu\lambda}\theta_{[\nu\lambda]} + T^{\mu\nu\alpha}\theta_{[\nu\alpha]} + T^{\nu\mu\alpha}\theta_{[\nu\alpha]} - T^{\alpha\mu\nu}\theta_{[\nu\alpha]} \} \\
&= -\overset{3}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} + \overset{2}{T^{\nu\alpha\mu}}\theta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \{ \overset{c}{T^{\nu\lambda\mu}}\cancel{\theta_{(\nu\lambda)}} + \overset{b}{T^{\lambda\nu\mu}}\cancel{\theta_{(\nu\lambda)}} - \overset{a}{T^{\mu\nu\lambda}}\cancel{\theta_{[\nu\lambda]}} \\
&\quad + \overset{a}{T^{\mu\nu\alpha}}\cancel{\theta_{[\nu\alpha]}} - \overset{b}{T^{\nu\mu\alpha}}\cancel{\theta_{[\nu\alpha]}} + \overset{c}{T^{\alpha\mu\nu}}\cancel{\theta_{[\nu\alpha]}} \} = -\overset{3}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} + \overset{2}{T^{\nu\alpha\mu}}\theta_{\alpha\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} (T^{\nu\lambda\mu}\theta_{\lambda\nu} + T^{\lambda\nu\mu}\theta_{\nu\lambda}) = -\overset{3}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]} + \overset{2}{T^{\nu\alpha\mu}}\theta_{\alpha\nu} \\
&\quad - \frac{2T^{\nu\lambda\mu}\theta_{\lambda\nu}}{2} = -\overset{3}{K^{\alpha\mu\nu}}\theta_{[\nu\alpha]},
\end{aligned}$$

onde os números acima dos termos no início estão rotulando estes termos para facilitar a identificação deles na igualdade, enquanto que as lestras ao final indicam os termos que estão sendo comparados; os termos indicados pela letra “a” se cancelam, enquanto que os indicados pelas outras letras foram escritos em termos de $\theta_{\mu\nu}$. Substituindo o resultado acima em (E.28),

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-g}\theta^{(\nu\mu)})_{,\nu} + \sqrt{-g} \overset{c}{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} \theta^{(\nu\lambda)} + (\sqrt{-g}\theta^{[\nu\mu]})_{,\nu} \\
- \sqrt{-g} K^{\alpha\mu\nu} \theta_{[\nu\alpha]} - \sqrt{-g} \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0.
\end{aligned}$$

Definindo $\mathbf{u}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\theta_{\mu\nu}$, a expressão acima fica

$$\mathbf{u}^{(\nu\mu)}_{,\nu} + \overset{c}{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} \mathbf{u}^{(\nu\lambda)} + \mathbf{u}^{[\nu\mu]}_{,\nu} - K^{\alpha\mu\nu} \mathbf{u}_{[\nu\alpha]} - \sqrt{-g} \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} = 0.$$

Como demonstramos no capítulo 3, integrando a expressão acima na região onde a partícula se encontra e tratando-a como puntiforme (sem estrutura), os dois primeiros termos fornecerão a equação da geodésica, veja a seção 3.2 para maiores detalhes. Portanto, a expressão acima integrada na região do espaço onde a partícula se encontra a um dado t fornece

$$\frac{dP^\lambda}{ds^2} + \overset{c}{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} u^\mu P^\nu + F^\lambda = 0, \tag{E.29}$$

onde expressamos a geodésica em termos do 4-momento da partícula $P^\nu = \int dx^3 \mathbf{u}^{(0\nu)}$, pois, m_0 não é uma constante de movimento neste caso; além disto, definimos

$$F^\mu \equiv \int dx^3 \left(\mathbf{u}^{[\nu\mu]}_{,\nu} - K^{\alpha\mu\nu} \mathbf{u}_{[\nu\alpha]} - \sqrt{-g} \frac{U_{\nu\alpha\beta}}{\chi} R^{\beta\alpha\mu\nu} \right)$$

Usando (E.22) e lembrando que $\mathbf{u}_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \theta_{\mu\nu}$, a expressão acima pode ser escrita na forma final⁸ por

$$F^\mu = \frac{1}{\chi} \int dx^3 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \overset{\star}{\nabla}_\alpha U^{\alpha\mu\nu} \right)_{,\nu} - K^{\alpha\mu\nu} \overset{\star}{\nabla}_\lambda U^\lambda_{\alpha\nu} - U_{\nu\alpha\beta} R^{\beta\alpha\mu\nu} \right]. \quad (\text{E.30})$$

Da expressão (E.30), concluímos que se $U^{\lambda\mu\nu}$ for nulo, então a partícula segue uma geodésica métrica. Tomando a lagrangiana da matéria como a lagrangiana de Dirac, o spin acoplará com a torção via (E.19) e, disto, chegamos a conclusão de que uma partícula com spin na geometria de Riemann-Cartan não necessariamente segue uma geodésica. Para maiores detalhes sobre a equação de movimento em uma geometria não-riemanniana, veja [8]. Para o caso da fonte de $U^{\mu\nu\lambda}$ ser $S^{\mu\nu\lambda}$, a expressão (E.30) fica

$$F^\mu = \frac{1}{2} \int dx^3 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \overset{\star}{\nabla}_\alpha S^{\alpha\mu\nu} \right)_{,\nu} - K^{\alpha\mu\nu} \overset{\star}{\nabla}_\lambda S^\lambda_{\alpha\nu} - S_{\nu\alpha\beta} R^{\beta\alpha\mu\nu} \right]. \quad (\text{E.31})$$

E.3 Campos escalares

Na geometria de Riemann-Cartan, campos escalares não acoplam com a torção [23, 8, 91, 183], portanto, eles se comportam do mesmo jeito que em uma geometria puramente riemanniana. É fácil ver isto da expressão (E.29) e (E.30), pois, se $S^{\mu\nu\lambda}$ for nulo, F^μ também será e, conseqüentemente, as partículas se moverão segundo a equação da geodésica métrica

$$\frac{dP^\lambda}{ds^2} + \overset{c}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} u^\mu P^\nu = 0. \quad (\text{E.32})$$

Do ponto de vista da mecânica quântica, teríamos

$$\overset{c}{\square} \phi(x) + m^2 \phi(x) = 0, \quad (\text{E.33})$$

⁸Entendemos esta como a forma final porque ela contém $U^{\mu\nu\lambda}$ explícito em todos os termos possíveis de explicitá-lo. No caso, $U^{\mu\nu\lambda}$ está associado com o conteúdo de matéria.

onde $\overset{c}{\square}$ é o d'Alambertiano em termos dos símbolos de Christoffel.

E.4 Equação de Dirac em termos da fonte de torção (spin)

Usando a relação $\frac{1}{4}K_{BAC}\gamma^A\gamma^B\gamma^C = -\frac{1}{4}K_{CAB}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]} - T^A{}_{CA}\gamma^C$ (veja D.13), podemos reescrever (7.80) para o caso $N^{\mu\lambda\nu} = A^\mu = 0$ da seguinte forma

$$i\gamma^\mu \overset{c}{\nabla}_\mu \psi + \frac{1}{4}K_{ABC}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}\psi - m\psi = 0, \quad (\text{E.34})$$

onde $\overset{c}{\nabla}_\mu$ é a derivada covariante em termos apenas do símbolo de Christoffel. Considere agora o seguinte. Somando e subtraindo o lado direito da expressão (4.14) com $\frac{1}{2}(-2g^{\lambda\mu}T^\nu + g^{\lambda\nu}T^\mu - g^{\lambda\nu}T^\mu + 2g^{\mu\nu}T^\lambda)$, onde $T^\mu = T^{\lambda\mu}{}_\lambda$, e expressando-a em termos de $U^{\mu\nu\lambda}$, teremos

$$K^{\lambda\mu\nu} = U^{\lambda\mu\nu} - U^{\mu\nu\lambda} - U^{\nu\mu\lambda} - g^{\lambda\mu}T^\nu + g^{\mu\nu}T^\lambda. \quad (\text{E.35})$$

Usando (E.19) na expressão acima e lembrando que $S^{\mu\nu\lambda}$ é totalmente anti-simétrico, ficaremos com

$$K^{\lambda\mu\nu} = \frac{\chi}{2}S^{\lambda\mu\nu} - g^{\lambda\mu}T^\nu + g^{\mu\nu}T^\lambda. \quad (\text{E.36})$$

Desta expressão, temos que $K_{\lambda\mu\nu}\gamma^{[\lambda}\gamma^\mu\gamma^{\nu]} = K_{ABC}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]} = \frac{\chi}{2}S_{ABC}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}$. Usando a definição de densidade de spin⁹, $S^{ABC} = -\frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}\psi$, teremos $K_{ABC}\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]} = -\frac{i\chi}{8}\bar{\psi}\gamma_{[A}\gamma_B\gamma_{C]}\psi\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}$. Substituindo esta última expressão em (E.34), ficaremos com

$$i\gamma^\mu \overset{c}{\nabla}_\mu \psi - \frac{i}{32}\chi\bar{\psi}\gamma_A\gamma_B\gamma_C\psi\gamma^{[A}\gamma^B\gamma^{C]}\psi - m\psi = 0, \quad (\text{E.37})$$

onde por conveniência usamos (D.12). É possível demonstrar que a expressão acima ainda pode ser escrita na forma¹⁰ [2]

$$i\gamma^\mu \overset{c}{\nabla}_\mu \psi - \frac{3}{16}\chi J_A^{(5)}\gamma^{(5)}\gamma^A\psi - m\psi = 0, \quad (\text{E.38})$$

⁹Veja a página 66 de [2]

¹⁰Perceba que em [2] o autor usa uma constante de acoplamento diferente, $\chi_{\text{nossa}} = 2\chi_{\text{Gasperini}}$.

onde $J_A^{(5)} = \bar{\psi}\gamma^{(5)}\gamma_A\psi$ é a corrente espinorial do vetor axial. Se fôssemos expressar a lagrangiana (E.1) em termos da fonte da torção, chegaríamos a [2]

$$S = \int \sqrt{-g}d^4x \left(R + \chi \overset{c}{\mathcal{L}}_D + \frac{1}{4}\chi S_{ABC}S^{ABC} \right), \quad (\text{E.39})$$

onde $\overset{c}{\mathcal{L}}_D$ é a lagrangiana de Dirac em termos do símbolo de Christoffel. Da expressão acima, vemos que a única diferença de sua versão para a um espaço curvo sem torção é o termo de contato spin-spin.

Para finalizar este capítulo, vale apenas fazer o seguinte comentário. Embora o capítulo tenha o nome de Einstein-Cartan, muitas das afirmações aqui feitas, como mencionado explicitamente, transcendem a teoria de Einstein-Cartan no sentido de que elas são válidas para teorias mais gerais.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Hehl et al. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48:393, 1976.
- [2] V. de Sabbata and M. Gasperini. *Introduction to gravitation*. World Scientific Publishing, Singapore, 1985.
- [3] S. Seahra. Classical confinement of test particles in higher-dimensional models: Stability criteria and a new energy condition. *Phys. Rev. D*, 68:104027, 2003.
- [4] V. Rubakov. Do we live inside a domain wall? *Phys. Lett. B*, Vol. 125:p. 136, 1983.
- [5] V. Rubakov. Large and infinite extra dimensions. arXiv:hep-ph/0104152 v2 5 Sep 2001.
- [6] L. Randall and R. Sundrum. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370, 1999.
- [7] F. Hehl et al. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Phys. Rep.*, 258:1, 1995.
- [8] P. Yasskin and W. Stoeger. Propagation equations for test bodies with spin and rotation in theories of gravity with torsion. *Phys. Rev. D*, 21:2081, 1980.
- [9] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time*, volume I. Cambridge University Press, 1987.
- [10] J. Moffat. New theory of gravitation. *Phys. Rev. D*, 19:3554, 1979.
- [11] T. Damour et al. Nonsymmetric gravity theories: Inconsistencies and a cure. *Phys. Rev. D*, 47:1541, 1993.

- [12] N. Straumann. Gauge principle and QED. *Acta Phys. Polon. B*, 37:575, 2006. arXiv:hep-ph/0509116 v1 12 Sep 2005.
- [13] M. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, second edition, 1988.
- [14] H. Kleinert. Spaces with torsion from embedding, and the special role of autoparallel trajectories. *Phys. Lett. B*, 428:315, 1998.
- [15] E. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press LLC.
- [16] M. do Carmo. *Differential geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [17] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general Theory of Relativity*. John Wiley & Sons Inc, New york, 1972.
- [18] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Oxford University Press Inc, New york, 1992.
- [19] D. Lovelock. The four–dimensionality of space and the Einstein tensor. *J. Math. Phys.*, 13:874, 1972.
- [20] D. Lovelock. The uniqueness of the Einstein field equations in a four–dimensional space. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 33:54, 1969.
- [21] P. von der Heyde. A generalized lovelock theorem for the gravitational field with torsion. *Phys. Lett. A*, 51:381, 1975.
- [22] A. Papapetrou. *Lectures on General Relativity*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974.
- [23] F. Hehl and Y. Obukhov. Élie Cartan’s torsion in geometry and in field theory, an essay. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*. Manuscript; arXiv:0711.1535v1 [gr-qc] 9 Nov 2007.
- [24] M. Carmeli. *Group Theory and General Relativity: representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field*. McGraw-Hill Inc., 1977. Seção 7.7.

- [25] L. Witten. *Gravitation: an introduction to current research*. John Wiley & Sons, 1962. Capítulo 3.
- [26] A. Einstein and L. Infeld. The gravitational equations and the problem of motion II. *Ann. Math.*, 41:455, 1940.
- [27] A. Einstein et al. The gravitational equations and the problem of motion. *Ann. Math.*, 39:65, 1938.
- [28] H. Robertson. The two body problem in general relativity. *Ann. Math.*, 39:101, 1938.
- [29] A. Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity I. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 209:248, 1951.
- [30] A Papapetrou. Equations of Motion in General Relativity: II The Coordinate Condition . *Proc. Phys. Soc. A*, 64:302, 1951.
- [31] W. Beiglböck. The center-of-mass in einstein's theory of gravitation. *Commun. Math. Phys.*, 5:106, 1967.
- [32] P. Havas and J. Goldberg. Lorentz-invariant equations of motion of point masses in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 128:398, 1962.
- [33] W. G. Dixon. Dynamics of extended bodies in general relativity. I. Momentum and angular momentum. *Proc. R. Soc. London A*, 314:499, 1970.
- [34] W. G. Dixon. Dynamics of extended bodies in general relativity. II. Moments of the charge-current vector. *Proc. R. Soc. London A*, 319:509, 1970.
- [35] W. G. Dixon. The definition of multipole moments for extended bodies. *Gen. Rel. Grav.*, 4:199, 1973.
- [36] D. Puetzfeld. Status of non-Riemannian cosmology. *New Astron. Rev.*, 49:59, 2005. arXiv:gr-qc/0404119v2 26 May 2004.
- [37] F. Cianfrani and G. Montani. Curvature-spin coupling from the semi-classical limit of the Dirac equation. *Int. J. M. Phys. A*, 23:1274, 2008.

- [38] H. Kleinert and A. Pelster. Autoparallels from a new action principle. *Gen. Rel. Grav.*, 31:1439, 1999.
- [39] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing, second edition, 2003.
- [40] P. Fiziev. Spinless matter in Transposed–Equi–Affine Theory of Gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 30:1341, 1998.
- [41] R. Hammond. Torsion gravity. *Rep. Prog. Phys.*, 65:599, 2002.
- [42] P. Pronin. Physical effects and measurability of spin–torsion interaction. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 173, 1997.
- [43] M. Blagojević. *Gravitation and Gauge Symmetries*. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 2002.
- [44] J. Woodward and W. Yourgrau. The incompatibility of Mach’s principle and the principle of equivalence in current gravitation theory. *British J. for Phil. of Sci.*, 23:111, 1972.
- [45] W. Rindler. *Essential Relativity*. Springer–Verlag, Berlin, 1979.
- [46] R. Torretti. *Relativity and Geometry*. Pergannon, Oxford, 1983.
- [47] Y. Xin. General relativity on spinor–tensor manifold. In *International School of Cosmology and Gravitation XIV course*, page 382, 1996.
- [48] Y. Xin. Mach’s principle and torsion in general relativity. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 239, 1997.
- [49] R. Hammond. Second-order equations and quadratic lagrangians. *J. Math. Phys.*, 31:2221, 1990.
- [50] V. de Sabbata. Evidence for torsion in gravity. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 51, 1997.
- [51] H. Borzeszkowski and H. Treder. On quantum general relativity. *Annalen Phys.*, 501:315, 1989.

- [52] H. Borzeszkowski and H. Treder. *The meanin of quantum gravity*. Reidel Publ.comp., Dordrecht, 1988.
- [53] G. Kerlick. Cosmology and particle pair production via gravitational spin-spin interaction in the Einstein–Cartan–Sciama–Kibble theory of gravity. *Phys. Rev. D*, 12:3004, 1975.
- [54] W. Kopczyński. A non-singular universe with torsion. *Phys. Lett. A*, 39:219, 1972.
- [55] A. Raychaudhuri. Einstein–cartan cosmologies with a magnetic field. *Phys. Rev. D*, 12:952, 1975.
- [56] A. Minkevich. Generalised cosmological Friedmann equations without gravitational singularity. *Phys. Lett. A*, 80:232.
- [57] M. Demianski et al. Inflationary models in ECKS theory. *Phys. Lett. A*, 116:13.
- [58] Y. Obukhov and V. Korotky. The Weyssenhoff fluid in Einstein-Cartan theory. *Class. Quantum. Grav.*, 4:1633, 1987.
- [59] de Ritis et all. A non-minimally coupled theory of gravitation with torsion. *Phys. Lett. A*, 126:389, 1988.
- [60] M. Gasperini. Spin-dominated inflation in the Eintein-Cartan theory. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2873, 1986.
- [61] M. Gasperini. Repulsive gravity in the very early universe. *Gen. Rel. Grav.*, 30:1703, 1998.
- [62] H. Oliveria et al. Non-singular inflationary cosmologies in Weyl integrable space-time. *Class. Quantum Grav.*, 14:2833, 1997.
- [63] J. Stewart and P. Hajicek. Can spin avert singularities? *Nature Phys. Sci.*, 244:96, 1973.
- [64] A. Trautman. Spin and torsion may avert gravitational singularities. *Nature Phys. Sci.*, 242:7, 1973.
- [65] R. Jha. A cosmology without big bang. *Gen. Rel. Grav.*, 26:1067, 1994.

- [66] C. Wolf. The effect of spin generated torsion on the early universe's evolution. *Gen. Rel. Grav.*, 27:1031, 1995.
- [67] F. Hehl et al. General relativity with spin and torsion and its deviations from Einstein's theory. *Phys. Rev. D*, 10:1066, 1974.
- [68] S.J. Aldersley. Charge conservation in metric-torsion gravitation theories. *J.Math.Phys.*, 19:700, 1978.
- [69] M. Novello. Scalar and massless vector fields in Cartan space. *Phys. Lett. A*, 59:105, 1976.
- [70] S. Hojman et al. Gauge invariance, minimal coupling, and torsion. *Phys. Rev. D*, 17:3141, 1978.
- [71] A. Trautman. *Symposia Mathematica*, 12:139, 1973.
- [72] M. Kasuya. On the gauge theory in the Einstein-Cartan-Weyl space-time. *Nuovo Cimento B*, 28:127, 1975.
- [73] Hlavaty. *Geometry of Einstein's Unified Field Theory*. Noordhoff, Grinlinger, 1957.
- [74] K. Hayashi and T. Shirafuji. New general relativity. *Phys. Rev. D*, 19:3524, 1979.
- [75] R. Tung and J. Nester. The quadratic spinor lagrangian is equivalent to the teleparallel theory. *Phys. Rev. D*, 60:021501, 1999.
- [76] E. Mielke. Ashtekar's complex variables in general relativity and its teleparallelism equivalent. *Ann. Phys.*, 219:78, 1992.
- [77] U. Muench et al. A brief guide to variations in teleparallel gauge theories of gravity and the Kaniell-Itin model. *Gen. Rel. Grav.*, 30:933, 1998.
- [78] V. de Andrade et al. Teleparallel equivalent of the Kaluza-Klein theory. *Phys. Rev. D*, 61:084031, 2000.
- [79] J. Maluf and J. da Rocha-Neto. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, 64:084014, 2001.
- [80] W. Kopczynski. Problems with metric-teleparallel theories of gravitation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15:493, 1982.

- [81] K. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953, 1977.
- [82] R. Hammond. Second-order equations and quadratic lagrangians. *J. Math. Phys.*, 31:2221, 1990.
- [83] R. Hammond. Second-order equations from a second-order formalism. *J. Math. Phys.*, 30:1115, 1988.
- [84] P. Fiziev and H. Kleinert. New action principle for classical particle trajectories in spaces with torsion. *Europhys. Lett.*, 35:241, 1996.
- [85] Kleinert. Anholonomic transformations of mechanical action principle. arXiv:gr-qc/9605046v1 21 May 1996.
- [86] Y. Obukhov. Equations of motion in the gauge gravity models. *Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement*, 1:161, 2008.
- [87] F. Gronwald and F. Hehl. On the gauge aspects of gravity. In *International School of Cosmology and Gravitation XIV course*, page 148, 1995. arXiv:gr-qc/9602013v1 8 Feb 1996.
- [88] E. Poberii. Metric-affine scale-covariant gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 26:1011, 1994.
- [89] J. McCrea. Irreducible decompositions of non-metricity, torsion, curvature and bianchi identities in metric-affine spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 9:553, 1992.
- [90] Y. Obukhov et al. Effective Einstein theory from metric-affine gravity models via irreducible decompositions. *Phys. Rev. D*, 56:7769, 1997.
- [91] Y. Ne'eman and F. Hehl. Test matter in a spacetime with nonmetricity. *Class. Quantum Grav.*, 14:251, 1997.
- [92] R. Tucker and C. Wang. Dark matter gravitational interactions. *Class. Quantum Grav.*, 15:933, 1998.
- [93] A. García et al. Plebanski-Demianski-like solutions in metric-affine gravity. *Class. Quantum Grav.*, 15:1793, 1998.

- [94] A. Garcia et al. Plane-fronted waves in metric-affine gravity. *Phys. Rev. D*, 62:044021, 2000.
- [95] A. Macias. Solitonic monopole solution in metric-affine gauge theory carrying Weyl charges. *Class. Quantum Grav.*, 15:445, 1998.
- [96] L. Smalley. On the implications of perfect fluids in metric-affine spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 17:1447, 2000.
- [97] F. Hehl and A. Macias. Metric-affine gauge theory of gravity II. Exact solutions. *Int.J.Mod.Phys. D*, 8:399, 1999. arXiv:gr-qc/9902076v2 15 Apr 1999.
- [98] Y. Obukhov et al. An exact solution of the metric-affine gauge theory with dilation, shear, and spin charges. *Phys. Lett. A*, 220:1, 1996.
- [99] E. Vlachynsky. An axially symmetric solution of metric-affine gravity. *Class. Quantum Grav.*, 13:3253, 1996.
- [100] F. Hehl. Spin and torsion in general relativity: I. Foundations. *Gen. Rel. Grav.*, 4:333, 1973.
- [101] F. Hehl. Spin and torsion in general relativity: II. Geometry and field equations. *Gen. Rel. Grav.*, 5:491, 1974.
- [102] Y. Mao et al. Constraining torsion with Gravity Probe B. *Phys. rev. D*, 76:104029, 2007.
- [103] A. Dobado and A. Maroto. Standard model anomalies in curved space-time with torsion. *Phys. Rev. D*, 54:5185, 1996.
- [104] E. Mielke and D. Kreiner. Chiral anomaly in Ashtekar's approach to canonical gravity. *Int. J. Mod. Phys. D.*, 7:553, 1998.
- [105] V. Bagrov. The complex WKB-Maslov method for the Dirac equation in a torsion field: I. Construction of trajectory-coherent states and the equation for spin. *Class. Quantum Grav.*, 8:1349, 1991.
- [106] A. Belyaev and I. Shapiro. Torsion action and its possible observables. *Nucl. Phys. B*, 543:20, 1999.

- [107] F. Hehl and J. McCrea. *Found. Phys.*, 16:267, 1986.
- [108] D. Sen and J. Vanstone. On Weyl and Lyra manifolds. *J. Math. Phys.*, 13:990, 1972.
- [109] G. Kerlick. Bouncing of simple cosmological models with torsion. *Ann. Phys.*, 99:127, 1976.
- [110] M. Tsamparlis. Methods for deriving solutions in generalized theories of gravitation: The Einstein-Cartan theory. *Phys. Rev. D*, 24:1451, 1981.
- [111] M. Weichuan et al. An exact solution of gauge field equations of poincaré gravity with torsion and spin current. *Gen. Rel. Grav.*, 27:143, 1995.
- [112] R. Tresguerres. Exact static vacuum soution of four-dimensional metric-affine gravity with nontrivial torsion. *Phys. Lett. A*, 200:405, 1995.
- [113] S. Ramaswamy and P. Yasskin. Birkhoff theorem for an $r + r^2$ theory of gravity with torsion. *Phys. Rev., D*, 19:2264, 1979.
- [114] W. Arkuzsewski et al. On the linearized Einstein-Cartan theory. *Ann. Inst H.Poincaré A*, 21:89, 1974.
- [115] J. Aman et al. Riemann-Cartan spacetimes of Gödel type. *Class. Quantum Grav.*, 15:1089, 1998.
- [116] J. Fonseca-Neto and J. Rebouças. On a class of Riemann-Cartan space-times of Gödel type. *Gen. Rel. Grav.*, 30:1301, 1998.
- [117] T. Dereli et al. Non-Riemannian gravity and the Einstein-Proca system. *Class. Quantum Grav.*, 13:L103, 1996.
- [118] O. Babourave. Plane torsion waves in quadratic gravitation theories in Riemann-Cartan space. *Class. Quantum Phys.*, 16:1149, 1999.
- [119] M. Gladchenko et al. PPN metric and PPN torsion in the quadratic poincaré gauge theory of gravity. *Phys.Lett.B*, 241:67, 1990.
- [120] M. Gladchenko and V. Zhytnikov. Post-Newtonian effects in the quadratic Poincaré gauge theory of gravitation. *Phys.Rev.D*, 50:5060, 1994.

- [121] G. Gillies. Modern Perspectives on Newtonian Gravity. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 86, 1997.
- [122] A. Sanders and G Gillies. Space-based measurements of spin in gravity. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 235, 1997.
- [123] C. Lämmerzahl. Quantum test of space-time structures. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 91, 1997.
- [124] R. Ritter et al. Anomalous spin I: experiments with a polarized-mass torsion pendulum. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 199, 1997.
- [125] R. Ritter et al. Anomalous spin II: experiments with a polarized-mass torsion pendulum. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 213, 1997.
- [126] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [127] F. Hehl et al. Violation of Lorentz invariance, nonmetricity, and metric-affine gravity (MAG), 2005. http://www.thp.uni-koeln.de/gravitation/seminars/abst_hehl.pdf.
- [128] V. Melnikov. Integrable weyl geometry in multidimensional cosmology. numerical investigation. In *Multidimensional Cosmology and Gravitation*, page 74. CBPF, 1995. http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/M000295.2011_02_10_15_46_50.pdf.
- [129] A. G. Agnese and M. La Camera. Gravitation without black holes. *Phys. Rev. D*, 31(6):1280–1286, Mar 1985.
- [130] Shohreh Abdolrahimi and Andrey A. Shoom. Analysis of the Fisher solution. *Phys. Rev.*, D81:024035, 2010.
- [131] J. B. Formiga. Massless scalar field and solar-system experiments. *Phys. Rev. D*, 83:087502, 2011.
- [132] M. Sundaresan. *Handbook of Particle Physics*. CRC Press, Boca Raton, 2000.

- [133] J. Wheeler. Quantum measurement and geometry. *Phys. Rev. D*, 41:431, 1990.
- [134] E. Santamato. Geometric derivation of the Schrödinger equation from classical mechanics in curved Weyl spaces. *Phys. Rev. D*, 29:216, 1984.
- [135] J. Audretsch. Riemannian structure of space-time as a consequence of quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, 27:2872, 1983.
- [136] F. Hehl. Is a “hadronic” shear current one of the sources in metric-affine gravity? arXiv:gr-qc/9712089v1 23 Dec 1997.
- [137] A. Saa. Propagating torsion from first principles. *Gen. Rel. Grav.*, 29:205, 1997.
- [138] A. Saa. Pseudoclassical model of spinning particle with anomalous magnetic momentum. *Mod. Phys. Lett. A*, 8:463, 1993.
- [139] A. Saa. Gauge fields on Riemann-Cartan space-times. *Mod. Phys. Lett. A*, 9:971, 1994.
- [140] A. Saa. Strings in background fields and Einstein-Cartan theory of gravity. *Class. Quantum Grav.*, 12:L85, 1993.
- [141] Alberto Saa. Volume forms and minimal action principles in affine manifolds. *J. Geom. Phys.*, 15:102–108, 1995.
- [142] P. Fiziev and S. Yazadjiev. The transposed–equi–affine theory of gravity and solar–system experiments. *Class. Quantum Grav.*, 16:3133, 1999.
- [143] H. Weyl. Geometrie und physik. *Naturwissenschaften*, 19:49, 1931.
- [144] H. Weyl. Elektron und gravitation. *I. Z. Phys.*, 56:330, 1929.
- [145] A. Fariborz and D. Mackeon. Spinors in Weyl geometry. *Class. Quantum Grav.*, 14:2517, 1997.
- [146] Riccardo March, Giovanni Bellettini, Roberto Tauraso, and Simone Dell’Agnello. Constraining spacetime torsion with the Moon and Mercury. *Phys. Rev.*, D83:104008, 2011.

- [147] C. Romero, J. B. Formiga, L. F. P. da Silva, and F. Dahia. The embedding of the spacetime in higher-dimensional Riemann-Cartan manifolds and classical confinement of test particles. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 8:133–148, 2011.
- [148] F. Dahia et al. On the embedding of space–time in five–dimensional Weyl spaces. *J. Math. Phys.*, 49:102501, 2008.
- [149] J. E. Villate. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: uma abordagem prática com maxima*. Creative Commons, 2006.
- [150] F. Dahia et al. Warped product spaces and geodesic motion in the neighborhood of branes. *J. Math. Phys.*, 48:072501, 2007.
- [151] W. G. Unruh. Notes on black–hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870, 1976.
- [152] G. Naber. *The Geometry of Minkowski Spacetime: An introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*. Springer-Verlag, New york, 1992.
- [153] J. B. Fonseca-Neto. *A Equivalência de Espaços-tempos nas Teorias da Gravitação com Torção utilizando Computação Algébrica*. PhD thesis, CBPF, 1997.
- [154] I. D. Soares. O cálculo de formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços-curvos. In *II Escola de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Física*, page 479, 1980.
- [155] Oleg Lebedev. Torsion Constraints in the Randall–Sundrum Scenario. *Phys. Rev.*, D65:124008, 2002.
- [156] V. de Sabbata Bidyut. Hestenes’s geometric algebra and real spinor fields. In *International School of Cosmology and Gravitation XV course*, page 32, 1997.
- [157] M. A. de Andrade. Espinores e álgebra de Clifford em qualquer espaço-tempo. Notas de aula, 1999.
- [158] H. Murayama. Notes on clifford algebra and Spin(n) representations. Notas de aula, 2007. Curso 230A. O leitor pode encontrá-las com o nome Clifford Algebra em página <http://hitoshi.berkeley.edu/230A/index.html>.

- [159] J. Crawford. Spinor metrics, spin connection compatibility and spacetime geometry from spin geometry. *Class. Quantum Grav.*, 20:2945, 2003.
- [160] Jean Gallier. Notes on differential geometry and Lie groups. <http://www.cis.upenn.edu/~jean/home.html>, 2011.
- [161] E. Poberii. Spinor-type objects in metric-affine space-time. *JHEP*, 7:1, 1998.
- [162] F. Reifler and R. Morris. Hestenes' tetrad and spin connections. *Int. J. Theor. Phys.*, 44:1307, 2005.
- [163] N. Poplawski. geometrization of electromagnetims in tetrad-spin-connection gravity. *Modern Phys. Lett. A*, 24:431, 2009.
- [164] F. Hehl and B. Datta. Nonlinear spinor equation and asymmetric connection in general relativity. *J. Math. Phys.*, 12:1334, 1971.
- [165] J. Audretsch et al. Wave fields in Weyl spaces and conditions for the existence of a preferred pseudo-Riemannian structure. *Commun. Math. Phys.*, 95:41, 1984.
- [166] M. Novello. Dirac's equation in a Weyl space. *Nuovo Cimento*, LXIV A(4):954, 1969.
- [167] P. O'Donnell. *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*. World Scientific, 2003.
- [168] C. Romero, J. B. Formiga, and C Dariescu. Fermion Confinement Induced by Geometry. *Gravitation and Cosmology*, 17:252–258, 2011.
- [169] R. Jackiw and C. Rebbi. Solitons with fermion number $1/2$. *Phys. Rev. D*, 13:3398, 1976.
- [170] V. M. Villalba. Exact solution to the Dirac equation in thre presence of an exact gravitational plane wave. *Phys. Lett.*, A136:197–199, 1989.
- [171] V. M. Villalba and U. Percoco. Separation of variables and exact solution to Dirac and Weyl equations in Robertson-Walker space-times. *J. Math. Phys.*, 31:715, 1990.

- [172] Victor M. Villalba. Separation of variables and exact solution to Dirac equation in curvilinear orthogonal coordinates with cylindrical symmetry. *J. Math. Phys.*, 31:2702–2707, 1990.
- [173] Victor M. Villalba. Separation of variables and exact solution to the Dirac equation in nonstatic Minkowski space-times. *J. Phys.*, A24:3781–3796, 1991.
- [174] G. V. Shishkin and V. M. Villalba. Neutrino in the presence of gravitational fields: Exact solutions. *J. Math. Phys.*, 33:4037–4045, 1992.
- [175] German V. Shishkin and Victor M. Villalba. Electrically neutral Dirac particles in the presence of external fields: Exact solutions. *J. Math. Phys.*, 34:5037–5049, 1993.
- [176] Victor M. Villalba. Exact solution of the Dirac equation for a Coulomb and a scalar potential in the presence of an Aharonov-Bohm and a magnetic monopole fields. *J. Math. Phys.*, 36:3332–3344, 1995.
- [177] Victor M. Villalba and Estenban Isasi Catala. Separation of variables and exact solution of the Klein- Gordon and Dirac equations in an open universe. *J. Math. Phys.*, 43:4909–4920, 2002.
- [178] A. O. Barut and I. H. Duru. Exact solutions of the Dirac equation in spatially flat Robertson-Walker space-times. *Phys. Rev.*, D36:3705, 1987.
- [179] M. A. Castagnino, C. D. El Hasi, F. D. Mazzitelli, and J. P. Paz. On the Dirac equation in anisotropic backgrounds. *Phys. Lett.*, A128:25–28, 1988.
- [180] G. V. Shishkin and I. E. Andrushkevich. Some exact solutions of the Dirac equation in the Kasner space-time. *Phys. Lett.*, A110:84–86, 1985.
- [181] S. K. Srivastava. Solution of the Dirac equation in Kasner’s space-time. *J. Math. Phys.*, 30:2838–2844, 1989.
- [182] Renato Portugal. Exact solutions of the Dirac equations in an anisotropic cosmological background. *J. Math. Phys.*, 36:4296–4300, 1995.
- [183] D. Puetzfeld and Y. N. Obukhov. Propagation equations for deformable bodies with microstructure in extended theories of gravity. *Phys. Review. D*, 76:084025, 2007.

- [184] B. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1982.
- [185] T. Dereli and R. Tucker. On the detection of scalar field induced spacetime torsion. arXiv:gr-qc/0104050v1 17 Apr 2001.
- [186] R. Hammond. Spin gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 31:233, 1999.