

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Dinâmica de Partículas Auto - Propelidas

Dorilson Silva Cambuí

João Pessoa, fevereiro de 2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Dinâmica de Partículas Auto - Propelidas

Dorilson Silva Cambuí

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Alexandre da Silva Rosas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, fevereiro de 2011

C178d Cambuí, Dorílson Silva.
Dinâmica de partículas auto-propelidas / Dorílson Silva
Cambuí.-- João Pessoa, 2011.
85f.
Orientador: Alexandre da Silva Rosas
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Partículas auto-propelidas. 3. Comportamento
coletivo. 4. Zonas de interação. 5. Transição de fases. 6. Ruído.
7. Parâmetros de ordem. 8. Alinhamento direcional.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Com carinho eterno:

À Eni, Ray, Rô, Gi e Tetê.

Não poderia esquecer jamais:

*Carloshsh, Lilipe, Jefther, Bia, Samuel,
Dhiego, Talessh, Joab, Tiago e Leonardo.*

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas;

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Física;

A todos os colegas de pós-graduação em particular Breno e Alesandro;

A minha família;

Ao Governo do Estado de Mato Grosso através da Secretaria Estadual de Educação pela licença concedida para qualificação profissional;

A Capes-Reuni pelo suporte financeiro;

Ao secretário da Pós-Graduação em Física Danilo Wilson Lemos Menezes.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Lista de Figuras	vi
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Modelos de partículas auto-propelidas	7
2.1 Introdução	7
2.2 O Modelo de Vicsek	9
2.2.1 Descrição do modelo	9
2.2.2 Resultados	11
2.3 Modelo de Gregoire	14
2.3.1 Descrição do modelo	14
2.3.2 Resultados	15
2.4 Uma conclusão sobre os dois modelos: Vicsek e Gregoire	18
2.4.1 Descrição do modelo	18
2.4.2 Resultados	19
2.5 Modelo com Velocidade Adaptativa	21
2.5.1 Descrição do modelo	21
2.5.2 Resultados	23

2.6	O modelo de Aoki	24
2.6.1	Descrição do modelo	24
2.7	Modelo de Couzin	27
2.7.1	Descrição do modelo de Couzin	27
2.7.2	Resultados	31
3	Comportamento coletivo de um cardume de peixes	33
3.1	Introdução	33
3.2	Descrição do modelo	35
3.3	Resultados	38
3.3.1	Distâncias mínimas entre vizinhos	39
3.3.2	Diferença de orientação entre as velocidades	42
3.3.3	Padrões de comportamento coletivo	44
4	Um estudo sobre o ruído em dois modelos de partículas auto-propelidas	48
4.1	Introdução	48
4.2	A Polarização	51
4.2.1	Polarização versus o raio de interação	52
4.2.2	Polarização versus a densidade de partículas	52
4.2.3	Polarização versus o ruído	53
4.3	Distância Mínima Média	55
4.3.1	Distância mínima média em função da densidade	55
4.3.2	Polarização versus a distância mínima média	56
4.3.3	Distribuição das menores distâncias entre vizinhos	58
4.3.4	Trajetórias das partículas	59
4.3.5	Distribuição da diferença de orientação entre partículas vizinhas	63
5	Conclusões	66

Referências bibliográficas

69

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de padrões biológicos observados na natureza. ¹	2
2.1	Velocidade média versus o ruído para: $N = 40, L = 3.1; N = 100,$ $L = 5; N = 400, L = 10; N = 1000, L = 15.8$	11
2.2	Direção das velocidades das partículas no modelo de Vicsek para diferentes valores de densidade ρ e ruído, com $N = 300$ e $\nu_0 = 0.03$	13
2.3	Velocidade média e Cumulante de Binder versus o ruído, para $L =$ 32 e $N = 2048$	16
2.4	Direção das velocidades das partículas no modelo de Gregoire para diferentes valores de L e ruído, com $N = 300$ e $\nu_0 = 0.5$	17
2.5	Diagrama de fase do modelo de Vicsek e do modelo de rede quando o ruído é adicionado como na equação (2.8) para o modelo de Vicsek: $\nu_0 = 0.1; \nu_0 = 0.5; \nu_0 = 1.0; \nu_0 = 5.0; \nu_0 = 0.1$; para o modelo de rede $k = 5.0$. Referência [36]	20
2.6	Diagrama de fase do modelo de rede para o caso em que o ruído é adicionado como na equação (2.8). Referência [36].	20
2.7	Ilustração do modelo de velocidade adaptativa onde R_0 representa o raio de interação, d_i representa a distância do agente i em relação a seus vizinhos, ν_{max} a velocidade máxima possível, a o tamanho de um agente e $2a$ a menor distância.	22
2.8	Comparação do parâmetro de ordem no modelo de Vicsek e no modelo de velocidade adaptativa com $L = 5$ e $N = 300$	23

2.9	Figura ilustrativa para o cálculo do ângulo de giro do i -ésimo indivíduo determinado pelo j -ésimo indivíduo na zona de repulsão de raio r_r	25
2.10	Figura ilustrativa para o cálculo do ângulo de giro do i -ésimo indivíduo determinado pelo j -ésimo indivíduo na zona de orientação de raio r_o	26
2.11	Figura ilustrativa para o cálculo do ângulo de giro do i -ésimo indivíduo determinado pelo j -ésimo indivíduo na zona de atração de raio r_a	26
2.12	Zonas de interação e o volume β associado ao indivíduo i : $zor =$ zona de repulsão, $zoo =$ zona de orientação e $zoa =$ zona de atração.	28
2.13	Ilustração dos padrões de comportamento tal como encontrados por Couzin e colaboradores [23].	32
3.1	Alcance dos padrões de comportamento do peixe i em relação a seus vizinhos j . ZA, ZO e ZR representam as zonas de atração, orientação e repulsão respectivamente.	36
3.2	Distribuição das menores distâncias entre vizinhos para: $N = 40$ e $N = 109$. Em ambos os casos $\eta = 0.1$ e $L = 35$	40
3.3	Interdistância \bar{s}_{int} , para vários valores de densidade ρ com $L = 35$ e ruído $\eta = 0.1$	41
3.4	Distribuição da diferença de orientação θ entre as velocidades de peixes vizinhos para $N = 40$ e $N = 109$, como indicado na figura, com $L = 35$ e $\eta = 0.1$	43
3.5	Cooperatividade \bar{C} , para vários valores de densidade ρ usando os mesmos parâmetros: $L = 10$, $r_r = 1CP$, $r_o = 3CP$, $r_a = 4CP$ e ruído $\eta = 0.1$	44
3.6	Direções das velocidades dos peixes para $L = 35$, ruído $\eta = 0.1$, $r_r = 1CP$, $r_o = 3CP$ e $r_a = 4CP$	45

3.7	Padrão de comportamento: <i>torus</i> . Obtido através dos parâmetros: $N = 500, r_r = 1CP, r_o = 3CP, r_a = L$	47
4.1	Cálculo do Cumulante de Binder para vários valores de N ; 4.1(a): modelo de Vicsek; 4.1(b): modelo de Gregoire.	49
4.2	Cálculo da velocidade média para os dois modelos: Vicsek e Gregoire para $N = 1000, L = 10$ e $\nu_0 = 0.03$	50
4.3	Polarização média versus o raio de interação para $N = 1000$ com diferentes valores de ruído 4.3(a): modelo de Vicsek 4.3(b): modelo de Gregoire.	53
4.4	Polarização versus a densidade de partículas com diferentes valores de ruído. 4.4(a): modelo de Vicsek, a seta A indica o comportamento do sistema para os seguintes valores de ruído: $\eta = 0.3, \eta = 0.2$ e $\eta = 0.1$. 4.4(b): modelo de Gregoire, as setas B, C e D indicam o comportamento do sistema para $\eta = 0.3, \eta = 0.2$ e $\eta = 0.1$ respectivamente. Usou-se $R_0 = 1$ em todos os casos.	54
4.5	Polarização versus o ruído com diferentes valores de N . 4.5(a): modelo de Vicsek, 4.5(b): modelo de Gregoire.	54
4.6	Distância mínima média em função da densidade de partículas para (a) $\eta = 0.01$ e (b) $\eta = 0.3$	56
4.7	Polarização em função da distância mínima média para vários valores de densidade com $\eta = 0.3$; (a) modelo de Vicsek e (b) modelo de Gregoire. As setas A e C indicam a maior densidade ρ enquanto as setas B e D indicam a menor densidade respectivamente.	57
4.8	Sobreposição da polarização em função da distância mínima média para vários valores de densidade com $\eta = 0.3$ nos dois modelos: modelo de Vicsek e modelo de Gregoire. A seta A indica a maior densidade enquanto a seta B indica a menor.	58
4.9	Distribuição das distâncias mínimas com $\eta = 0.1, \eta = 0.2, \eta = 0.3$ para 4.9(a)) $N = 400$ e 4.9(a)) $N = 6000$	59

4.10	Trajectoria das partículas no modelo de Vicsek para diferentes valores de densidade e ruído.	61
4.11	Trajectoria das partículas no modelo de Gregoire para diferentes valores de densidade e ruído.	62
4.12	Trajectoria das partículas no modelo de Gregoire para $N = 800$	63
4.13	Distribuição dos ângulos θ para diferentes valores de N ; (a): modelo de Vicsek com $\eta = 0.01$; (b): modelo de Gregoire com $\eta = 0.01$	64
4.14	Distribuição dos ângulos θ para $N = 1000$; (a): com $\eta = 0.1$; (b): com $\eta = 0.01$	64
4.15	Distribuição dos ângulos θ para diferentes valores de N ; (a): modelo de Vicsek com $\eta = 0.1$; (b): modelo de Gregoire com $\eta = 0.1$;	65
4.16	Distribuição dos ângulos θ para $N = 1000$ com diferentes valores de ruído η ; (a): modelo de Vicsek; (b): modelo de Gregoire.	65

Resumo

Neste trabalho, estudamos o comportamento coletivo de sistemas vivos cujos agregados formam grupos organizados tais como bandos de pássaros, rebanhos de mamíferos e cardumes de peixes. Através de simulações numéricas, modelamos o movimento coletivo de um cardume de peixes usando regras comportamentais similares àquelas propostas por Couzin *et al.* [23], que investigam a dinâmica espacial de grupos de animais. O modelo apresenta três zonas de interação: repulsão, orientação e atração. Nossos resultados para as distribuições das distâncias entre vizinhos mais próximos, a diferença de orientação entre as velocidades de peixes vizinhos e a cooperatividade do cardume estão de bom acordo com medidas experimentais. Uma maneira mais simples para descrever o movimento coletivo de vários grupos de organismos foi introduzido por Vicsek *et al.* [10]. Este modelo apresenta somente uma região de interação, chamada zona de orientação e considera partículas pontuais movendo na rede com uma velocidade constante ajustando sua direção de movimento à velocidade média de seus vizinhos, estando sujeita a algum termo ruidoso. Uma transição de segunda ordem entre um estado ordenado e um regime desordenado foi encontrada. Porém, Gregoire e Chaté [12] contestam a natureza da transição de fase como sendo de primeira ordem. Na verdade, esta transição está relacionada à forma de introduzir o ruído no sistema. Neste sentido, apresentamos um estudo comparativo sobre o ruído em dois sistemas de partículas auto-propelidas (modelo de Vicsek e modelo de Gregoire) com o objetivo de compreender o papel do ruído em alguns observáveis tais como a polarização, distribuições das distâncias entre vizinhos mais próximos, diferença de orientação entre partículas vizinhas, o parâmetro de ordem e o cumulante de Binder.

PALAVRAS CHAVES: partículas auto-propelidas, comportamento coletivo, agregados biológicos, zonas de interação, transição de fases, ruído, parâmetro de ordem, alinhamento direcional.

Abstract

In this work, we study the collective behaviour of living systems whose aggregates form organized groups such as flocks of birds, herds of mammals and schools of fishes. Through numerical simulations, we model the collective movement of a school of fishes using behavioural rules similar to the ones proposed by Couzin *et al.* [23], that investigates the spatial dynamics of animals groups. The model presents three interaction zones: repulsion, orientation and attraction. Our results for the distributions of nearest neighbour distance, the difference of orientation between the velocities of neighbour fishes and the cooperativeness of the school are in good agreement with experimental measurements. A simpler way to describe the collective motion of several groups of organisms was introduced by Vicsek *et al.* [10]. This model presents only one interaction region, called orientation zone and considers point particles moving off lattice at constant speed adjusting their direction of motion to that of the average velocity of their neighbors, being subject to some noisy term. A second-order transition between an ordered state and a disordered regime was found. However, Gregoire and Chate [12] contest the nature of such phase transition as being of first order. Indeed, this transition is related to the way of introducing the noise into the system. In this sense, we present a comparative study on noise in two systems of self-propelled particles (Vicsek model and Gregoire model) with the aim of understanding the role of the noise on some observables such as polarization, distributions of the nearest neighbour distances, difference of orientations between neighbour particles, the order parameter and the Binder cumulant.

KEY WORDS: Self-propelled particles, collective behavior, biological aggregates, interaction zones, phase transition, noise, order parameter, directional alignment.

Capítulo 1

Introdução

Em vários sistemas biológicos os agentes pertencentes a tais sistemas formam grupos caracterizados por movimentos cooperativos e fundamentalmente coerentes. Tal comportamento é tido como cooperativo pois apresenta algumas vantagens – para seus agentes – tais como evitar predadores e aumentar as chances de encontrar fontes de alimentação. Muitos organismos biológicos formam grupos que podemos considerar como sistemas cooperativos e cujos elementos podem ser modelados por agentes tidos como auto-propelidos, isto é, cada elemento se move sem a necessidade de estímulos externos, embora tais estímulos possam influenciar seu movimento. Em tais sistemas biológicos, o movimento coletivo de seus elementos mostra uma rica diversidade de padrões. Por rica diversidade de padrões entenda-se características intrínsecas na dinâmica de movimento coletivo, como a formação espontânea de padrões espaço-temporais, quando sujeitos a diferentes valores de ruído.

Essencialmente, podemos definir um padrão como sendo um arranjo particularmente organizado de partículas no espaço e/ou no tempo. Observamos um padrão num cardume de peixes, num bando de pássaros, numa colônia de bactérias, como ilustrado pela figura (1.1).



Figura 1.1: Exemplos de padrões biológicos observados na natureza.¹

Diversos tipos de padrões de comportamento coletivo têm sido estudados nos mais variados campos da ciência, como por exemplo, os padrões observados em sistemas vivos cujos agregados tendem a executar comportamento de *swarming*, ou seja, agregações de organismos em grupos [1, 2]. Como exemplo desses agregamentos que têm sido observados e investigados podemos incluir bandos de pássaros [3], cardumes de peixes [4], rebanhos de animais quadrúpedes [5] e colônias de bactérias [6, 7]. Estes agregados podem ser formados basicamente de duas maneiras, ou através de um estímulo externo ou eles se auto-organizam [8]. No caso em que os agregados se auto-organizam, sabe-se que não necessitam de líderes ou qualquer estímulo externo, como fonte de alimento ou até mesmo risco de predadores, para que seja verificado o início do movimento coletivo e posterior coesão. Cada indivíduo no grupo baseia seu comportamento sobre a percepção que tem das posições e velocidades de seus vizinhos e como resultado destas interações, presumivelmente de curto alcance, surge movimento coletivo global tal que mantém a coesão do agregado.

¹Figuras extraídas dos seguintes endereços eletrônicos:

1.1(a) <http://blog.educacional.com.br/blogbio/page/2/>

1.1(b), <http://expressodalinha.blogspot.com/2009/11/>

1.1(c) <http://www.astrobio.net/interview/678/skepticism-with-wonder>

A questão fundamental da vantagem de se viver e se locomover em grupos, tem sido um tema favorito entre os biólogos evolucionistas [9]. Muitos biólogos tendem a descrever fenômenos relacionados a movimentos coletivos baseados em descrições detalhadas de casos particulares, porém, sob uma perspectiva mais abrangente, os físicos estão mais preocupados com os mecanismos relacionados à origem do movimento coletivo, especialmente quando este se manifesta na ausência de um estímulo externo ou mesmo na inexistência de um líder. De um modo geral, a abordagem que os físicos fazem é modelar cada indivíduo como uma partícula e estudar o comportamento coletivo através das muitas interações resultantes.

Por mais de duas décadas tem havido um interesse contínuo em encontrar modelos simples que possam descrever o movimento coletivo de grupos de animais [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Uma característica típica de tais modelos é que eles partem da suposição que os organismos (partículas) são auto-propelidos. Modelos de partículas auto-propelidas têm se tornado uma importante ferramenta nos mais variados estudos envolvendo movimento coletivo de grupos de organismos.

A expressão “partículas auto-propelidas”, tem origem no trabalho de Vicsek *et al.* [10] e é utilizada para descrever, através de simulações numéricas, o movimento coletivo de um grupo de partículas – cujos movimentos são autônomos – na presença de perturbações. Nesse modelo, as partículas se movem com uma velocidade constante em uma superfície bi-dimensional com condições periódicas de contorno e a cada passo de tempo cada partícula se aproxima, com alguma incerteza (ruído), da direção média de movimento das demais partículas presentes em uma vizinhança local, que é a região onde ocorre as interações e cujo alcance se dá para um raio $R_0 = 1$ definido como raio de interação. Devido a sua simplicidade e analogia com sistemas biológicos, o modelo de partículas auto-propelidas, proposto por Vicsek e colaboradores [10], tem sido amplamente usado em estudos para análise das interações que propiciem a formação de padrões de comportamento coletivo em grupos de seres vivos. Dizemos que este modelo é simples devido ao fato que só é considerado nas interações entre as partículas o alinhamento direcional, ou seja, não apresenta alguns comportamentos típicos de seres

vivos, como evitar colidir uns com os outros, ou mesmo o comportamento definido como atração que é a tendência de se associar a grupos evitando ficar isolados. O modelo de Vicsek representa, na verdade, uma versão particular do modelo introduzido previamente por Reynolds [3], que criou um modelo computacional para analisar o comportamento de um bando de pássaros, introduzindo neste sistema regras comportamentais como coesão, separação e alinhamento.

Há na literatura, muitos trabalhos que estudam grupos de animais em movimento e que frequentemente utilizam o modelo de Vicsek para investigar, por exemplo: modelos de *swarm* [16, 17], efeitos de ruído e comportamento de escala [18], dinâmica intermitente e *cluster* [19], início do movimento coletivo [12], agentes auto-orientados com prevenção de colisões [20], novos métodos com liderança efetiva [21], modelo com velocidade adaptativa [22], memória coletiva e classificação espacial em grupos de animais [23]. Além destes, outros modelos de partículas auto-propelidas têm sido usados para explorar a estabilidade e transição de fase de padrões de *swarming* em resposta a diferentes níveis de ruído [24, 25].

Uma indagação que pode surgir naturalmente neste momento é: “há transição de fase em tais sistemas”? Antes de tudo, como estamos tratando de sistemas dinâmicos, ao nos referirmos à transição de fase, o correto seria enunciá-la como transição de fase cinética. Vicsek e colaboradores [10] estabeleceram, através de suas simulações, que há uma transição de fase dinâmica de um estado desordenado (direções aleatórias) para um estado completamente ordenado onde todas as partículas possuem a mesma direção de movimento. A natureza da transição em um sistema de partículas auto-propelidas foi encontrada como sendo de 2^a ordem, ou seja, a transição de movimentos aleatórios para aqueles completamente ordenados é contínua. É imprescindível entendermos, que, no modelo de partículas auto-propelidas, a transição se dá a partir das interações entre uma partícula i e seus vizinhos j que por sua vez ocorrem em uma região de raio R_o . Para Vicsek, uma vez efetuada essas interações adiciona-se um termo perturbativo denominado de ruído η (ruído angular) que representa a incerteza que cada partícula tem em avaliar a real posição de seu vizinho. Um meio, na verdade, de tornar o sistema

mais realístico.

Contudo, esta transição de fase encontrada por Vicsek e colaboradores [10], foi contestada por Gregoire e Chaté [12] em trabalho publicado em 2004. Nesse trabalho, Gregoire e Chaté [12] fazem uma sutil modificação na maneira de como se introduzir o ruído no sistema (ruído vetorial). Para esses autores, a incerteza inerente a cada partícula ocorre durante as interações, e para tanto, o termo perturbativo deve ser adicionado exatamente nas interações da partícula i com cada vizinho j . Na verdade esta sutil modificação altera a natureza da transição de fase que passa a ser agora, não mais contínua e sim, descontínua. No capítulo 2, abordaremos detalhadamente, o modelo de Vicsek e colaboradores, Gregoire e Chaté, alguns outros modelos de partículas auto-propelidas bem como modelos que, a partir da dinâmica proposta por Vicsek, acrescentaram zonas de interação.

Devido ao seu caráter minimalista, embora eficiente, o modelo de Vicsek não é o mais apropriado para se estudar o comportamento de, por exemplo, cardumes de peixes. Isto porque, conforme descreveu Aoki [26], devido a sua alta complexidade, tais agregados apresentam regras de comportamento como atração, repulsão e alinhamento de modo que cada peixe pode assumir estes comportamentos dependendo da possível posição de seus vizinhos. Outros estudos teóricos têm investigado o comportamento coletivo de peixes e, através de simulações computacionais têm validado seus modelos [23, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34]. O que caracteriza tais modelos e os diferencia do modelo de Vicsek é o fato de considerar além da componente direcional regras de repulsão/atração entre as partículas. No capítulo 3, apresentaremos um estudo sobre o movimento coletivo de um cardume de peixes. Usando simulações computacionais e baseados no modelo de Couzin e colaboradores [23], simulamos um sistema que representa o trabalho experimental desenvolvido por Becco e colaboradores [4], que estudaram a dinâmica e comportamento de um cardume de peixes. A fim de reproduzir os resultados obtidos, através de nossas simulações obtivemos resultados aproximados para as distribuições das distâncias mínimas entre vizinhos bem como as diferenças de orientação entre as velocidades de peixes vizinhos.

No capítulo 4, desenvolvemos um estudo sobre o ruído em dois modelos para partículas auto-propelidas, ou seja, modelos com ruído angular e vetorial. A fim de compreender o comportamento do sistema, analisamos as diferenças de resultados obtidos para os dois casos através de cálculos simulacionais de observáveis úteis como a polarização, a distribuição das distâncias mínimas entre duas partículas vizinhas bem como a diferença de orientação entre elas. Realizamos, também, o cálculo do parâmetro de ordem e do cumulante de Binder.

Capítulo 2

Modelos de partículas auto-propelidas

2.1 Introdução

Um dos fenômenos mais interessantes em sistemas biológicos é o movimento coletivo que pode ser observado desde cardumes de peixes e bando de pássaros até aqueles pertencentes a escalas microscópicas como colônia de bactérias. Tais agregados biológicos exibem uma ordem estrutural, com o comportamento de cada agente integrado de tal maneira com os demais que, mesmo que o grupo se mova em várias direções, parece mover-se sincronicamente como uma única entidade coerente [23]. Investigações feitas têm demonstrado que quando a densidade de animais aumenta, uma transição ocorre de um movimento desordenado de indivíduos no grupo para um movimento coletivo altamente alinhado. Padrões de comportamento coletivo surgem, então, em respostas às interações.

Para entender o comportamento coletivo de um grupo de seres vivos, o conceito de partículas auto-propelidas foi utilizado [10, 12, 20, 22, 30, 36, 40] com o objetivo de compreender a formação e a dinâmica dos padrões estruturais do grupo e explorar a estabilidade e transição de fase.

Como o movimento de organismos em um grupo é regido através das muitas interações entre seus vizinhos, modelos de partículas auto-propelidas consistem de partículas interagindo numa vizinhança local e cujo módulo da velocidade de cada partícula é mantido constante. O termo vizinhança pode se referir a uma, duas

ou mesmo três dimensões com a vizinhança estando definida em um segmento de linha reta, um círculo ou uma esfera. Nesta tese, consideramos partículas auto-propelidas que se movem em duas dimensões e, neste capítulo em particular, descreveremos alguns modelos de partículas auto-propelidas.

Vimos no capítulo 1 que vários modelos foram introduzidos com o objetivo de descrever o fenômeno da formação de movimento coletivo de grupos de entidades biológicas. Comumente, todos esses modelos procuram descrever grupos de agentes movendo-se com uma velocidade ν_0 , fixa, e que se alinham com seus vizinhos em um espaço de curto alcance, estabelecendo um parâmetro de ordem (a velocidade média normalizada), para medir o grau de alinhamento entre seus agentes. Todos esses modelos mostram uma transição de um estado desordenado para aquele completamente ordenado quando um ruído é introduzido. O ruído representa o erro ou a incerteza que determinada partícula faz ao medir a real posição de seu vizinho.

Nas seções 2.2 e 2.3, analisaremos os modelos para partículas auto-propelidas de Vicsek e colaboradores [10] e Gregoire e Chaté [12] respectivamente, em que a componente velocidade é considerada constante e, apesar da similaridade entre os dois modelos, veremos que os resultados são contrastantes no que tange à natureza da transição de fase cinética. Enquanto no primeiro a transição é contínua, no segundo se manifesta descontínua.

Na seção 2.4, apresentaremos um estudo desenvolvido por Aldana e colaboradores [36], que foca sobre a maneira como o ruído é introduzido no sistema. É demonstrando, nesse trabalho, que a natureza da transição de fase está relacionada à maneira como se introduz ruído no sistema. Apresentaremos, também, na seção 2.5, o modelo descrito por Li e Wang [22] onde a velocidade não é mais constante mas varia com a distância entre as partículas.

Uma importante metodologia que constantemente tem sido usada para investigar a dinâmica de um grupo de animais como cardumes de peixes, bandos de aves, enxames de insetos e rebanhos de mamíferos é a simulação computacional, que trata, por exemplo, da modelagem simplificada do comportamento individual,

permitindo que surjam estruturas a partir de regras baseadas na interação entre os indivíduos. Regras baseadas no indivíduo são tipicamente usadas para simular a dinâmica de grupos de animais que apresentam comportamentos como repulsão, alinhamento e atração, através do emprego de zonas sensoriais ou zonas de comportamento ao redor de cada indivíduo para determinar sua reação em relação aos indivíduos em sua vizinhança. Cada indivíduo seleciona um desses comportamentos baseados na distância entre si e os vizinhos. O primeiro estudo, usando regras baseadas no indivíduo, foi realizado por Reynolds [3] para simular a dinâmica de um bando de aves. Outros trabalhos se seguiram para simular a dinâmica de um cardume de peixes [26, 29, 37, 38, 39] e rebanhos de quadrúpedes [5].

Nas seções 2.6 e 2.7 descreveremos dois modelos que utilizam o conceito de zonas de interação para representar um sistema dinâmico de partículas interagentes.

2.2 O Modelo de Vicsek

2.2.1 Descrição do modelo

A fim de compreender o mecanismo que conduz a formação de movimento coletivo, Vicsek e colaboradores [10] propuseram um modelo de partículas auto-propelidas para imitar movimentos biológicos. Doravante nos referiremos a esse modelo por modelo de Vicsek. A única regra desse modelo é que *a cada passo de tempo uma dada partícula deslocando-se com uma velocidade absoluta constante assume direção média de movimento das partículas em sua vizinhança de raio R_0 com alguma perturbação aleatória (ruído) adicionada* [10]. Uma transição de fase cinética, de segunda ordem, foi encontrada entre um estado de regime de movimento desordenado sem transporte (ruído alto), para um estado de deslocamento coletivo com direções de movimentos alinhadas (ruído baixo), isto é, com quebra de simetria rotacional. A descrição desse mecanismo é descrita a seguir.

Considere N partículas, classificadas por $i = 1$ a N , todas movendo-se sincronicamente em passos de tempo discretos $\Delta t = 1$, em uma rede quadrada de tamanho

linear L , com condições periódicas de contorno, inicialmente distribuídas de forma aleatória com direções variando de 0 a 2π . As partículas são caracterizadas por seus vetores posição \mathbf{x}_i e velocidade \mathbf{v}_i . A magnitude da velocidade foi mantida fixa com $\nu_0 = 0.03$. Quanto à direção de seus movimentos, a partícula i adquire a direção média de movimento dos indivíduos (incluindo ela mesma) localizados dentro de uma vizinhança circular de raio $R_0 = 1$ centrado em i . A cada passo de tempo a posição da i -ésima partícula é atualizada, ou seja:

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t, \quad (2.1)$$

e a direção da velocidade é atualizada como:

$$\theta_i(t + \Delta t) = \langle \theta(t) \rangle_{R_0} + \xi(t)\eta, \quad (2.2)$$

onde o segundo termo da equação (2.2) representa o ruído. ξ é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $[-\pi, \pi]$ e η é a intensidade do ruído. Podemos dizer então que o ruído é introduzido como uma variável aleatória uniformemente distribuída num intervalo $[-\eta\pi, \eta\pi]$. Uma vez que o primeiro termo da equação (2.2) nos dá a direção média das velocidades de todas as partículas dentro de uma região circular de raio $R_0 = 1$, podemos reescrevê-la da forma:

$$\theta_i(t + \Delta t) = \arctang \left[\frac{\langle \text{sen } \theta_j(t) \rangle}{\langle \text{cos } \theta_j(t) \rangle} \right] + \xi(t)\eta. \quad (2.3)$$

Os dois principais parâmetros do modelo de Vicsek são a densidade de partículas $\rho = N/L^2$ e a intensidade η do ruído. Na ausência de ruído ($\eta = 0$) as partículas se alinham perfeitamente levando a uma completa ordem orientacional. Para um ruído máximo as partículas se mostram completamente desorientadas. O parâmetro de ordem é definido pela equação (2.4), que representa a velocidade média

normalizada,

$$\psi = \frac{1}{N\nu_o} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \right|. \quad (2.4)$$

2.2.2 Resultados

Vicsek concluiu que a transição de fase cinética, caracterizada pelo parâmetro de ordem ψ , foi encontrada como sendo de segunda ordem, como podemos observar através da figura 2.1, onde temos utilizado para o cálculo da média, 5000 passos de tempo. Para uma mesma densidade $\rho = N/L^2$, foi diminuído gradualmente o

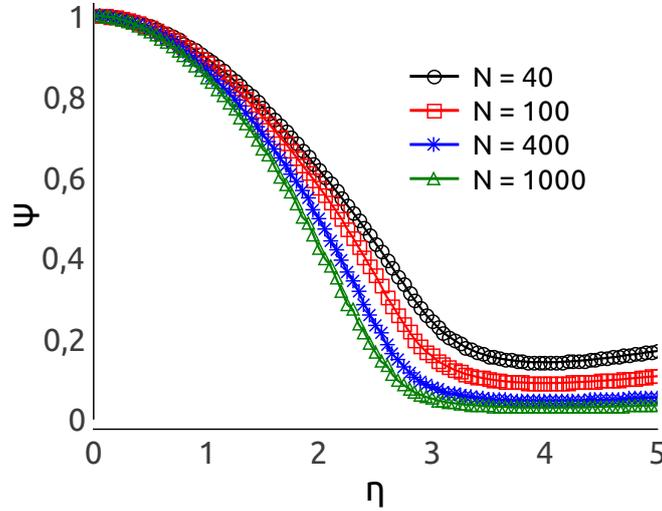


Figura 2.1: Velocidade média versus o ruído para: $N = 40$, $L = 3.1$; $N = 100$, $L = 5$; $N = 400$, $L = 10$; $N = 1000$, $L = 15.8$

ruído η em redes de tamanhos variados, e o resultado, é a transição que ocorre de uma fase com movimentos cujas direções são desordenadas para aquela com movimentos que apresentam direções ordenadas, na média.

A seguir, apresentamos alguns tipos de padrões de comportamento coletivos realizados sob intensa investigação observacional. Temos utilizado na simulação os mesmos parâmetros do modelo de Vicsek, ou seja, $N = 300$ e variamos o tamanho L da rede e o ruído η conforme indicado nas legendas da figura (2.2). Executamos 10000 passos de tempo e, para atingir o estado estacionário descartamos os

primeiros 5000. Tais padrões de comportamentos são fortemente dependentes da densidade ρ e do ruído η . Nossos resultados mostram que padrões espaciais de partículas auto-organizadas ocorrem de maneira tal que, para altas densidades e baixo ruído, as partículas se alinham na mesma direção, enquanto para baixas densidades são menos interativas. O gráfico a seguir, veja figura (2.2), exibe as direção das velocidades (onde $N = 300$ e $\nu_0 = 0.03$) para diferentes valores de densidade e ruído. Nossos resultados estão de acordo com aqueles obtidos por Vicsek e colaboradores [10]. Na figura (2.2), mostramos em 2.2(a) que para alta densidade e ruído as partículas movem-se aleatoriamente com pouca correlação. Em 2.2(b) para alta densidade e baixo ruído as partículas apresentam tendência de alinhamento e em 2.2(c) ao diminuir o valor do ruído η as partículas estão com suas direções de movimentos completamente alinhadas. Para 2.2(d) e 2.2(e), temos, para baixa densidade e ruído que as partículas tendem a formar grupos movendo-se coerentemente.

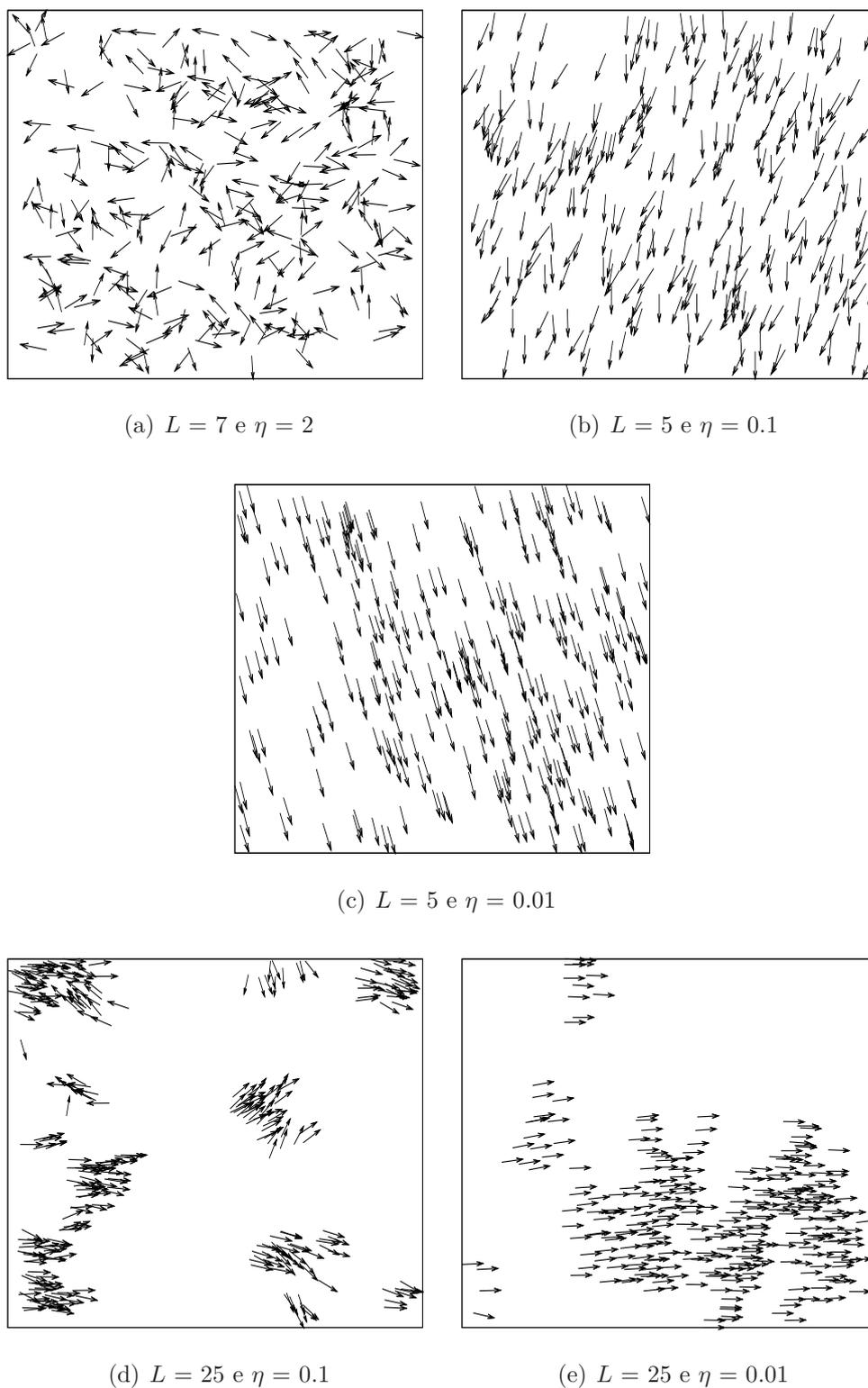


Figura 2.2: Direção das velocidades das partículas no modelo de Vicsek para diferentes valores de densidade ρ e ruído, com $N = 300$ e $\nu_0 = 0.03$.

2.3 Modelo de Gregoire

2.3.1 Descrição do modelo

Baseado no modelo de Vicsek, Gregoire e Chaté [12] propuseram um modelo similar para o tratamento de partículas auto-propelidas, porém, com uma pequena alteração na maneira como o ruído foi adicionado. Doravante esse modelo será referido por modelo de Gregoire. A forma como o ruído foi introduzido no modelo de Vicsek é comumente definida na literatura como ruído *angular* e pode ser considerado como decorrente dos erros cometidos quando partículas tentam seguir localmente a direção média de movimento de seus vizinhos. Sob essa ótica, o ruído é introduzido após as interações terem ocorrido. Se considerarmos, por outro lado, que muito da aleatoriedade decorre da avaliação de cada interação entre a partícula i e seus vizinhos j , chega-se a conclusão que erros são produzidos durante o processo de interação, neste caso, segundo Gregoire e Chaté [12], o termo que causa perturbação deve ser introduzido diretamente nas interações. Definido como ruído *vetorial*, a modificação proposta por Gregoire e Chaté [12] ao modelo de Vicsek (ver equação 2.3) é dada pela equação abaixo:

$$\theta_j(t + \Delta t) = \hat{\text{ângulo}} \left[\sum_j e^{i\theta_j} + \eta n_j e^{i\xi_j} \right], \quad (2.5)$$

que é equivalente à forma reescrita em (2.6). η representa a intensidade do ruído, ξ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo compreendido entre $[-\pi, \pi]$ e n_j é o número atual de vizinhos da partícula i em cada passo de tempo.

$$\theta_j(t + \Delta t) = \arctang \left[\frac{\langle \text{sen}\theta_j \rangle + \eta n_j \text{sen}\xi_j}{\langle \text{cos}\theta_j \rangle + \eta n_j \text{cos}\xi_j} \right]. \quad (2.6)$$

Na equação (2.6), que representa a atualização da direção da velocidade da partícula i no modelo desenvolvido por Gregoire e Chaté [12], o ruído foi adicionado diretamente na interação entre as partículas, diferentemente do que ocorre no

modelo de Vicsek onde o ruído foi adicionado após a partícula i ter assumido a direção média da velocidade de seus vizinhos j .

2.3.2 Resultados

A transição de fase cinética, nesse modelo, também é caracterizada pelo mesmo parâmetro de ordem, ou seja a velocidade média ψ definido por Vicsek (equação (2.4)). Apresentamos, através da figura (2.3), o cálculo para a velocidade média normalizada e o cumulante de Binder em função do ruído η . Para o cálculo dessas médias foram utilizadas, em nossas simulações, os últimos 5000 passos de tempo de um total de 10000.

O cumulante de quarta ordem, conhecido como cumulante de Binder [41, 42], é importante para determinar a temperatura crítica de sistemas magnéticos ou o ruído crítico em sistemas biológicos, mede as flutuações do parâmetro de ordem e pode ser usado para distinguir transições de primeira ou segunda ordem. É especialmente útil no caso de transição de fase contínua, dado que, no ponto crítico, todas as curvas obtidas em função do parâmetro de ordem (em nosso caso a velocidade média normalizada ψ) versus o ruído η se cruzam, para vários tamanhos de rede L , e nesta intersecção das curvas se observa o ponto crítico do sistema. Para uma transição de primeira ordem, por outro lado, o cumulante de Binder exibe uma queda acentuada. O cumulante de Binder de quarta ordem é definido através da equação (2.7),

$$C = \left[1 - \frac{\langle \psi^4 \rangle_t}{3 \langle \psi^2 \rangle_t^2} \right]. \quad (2.7)$$

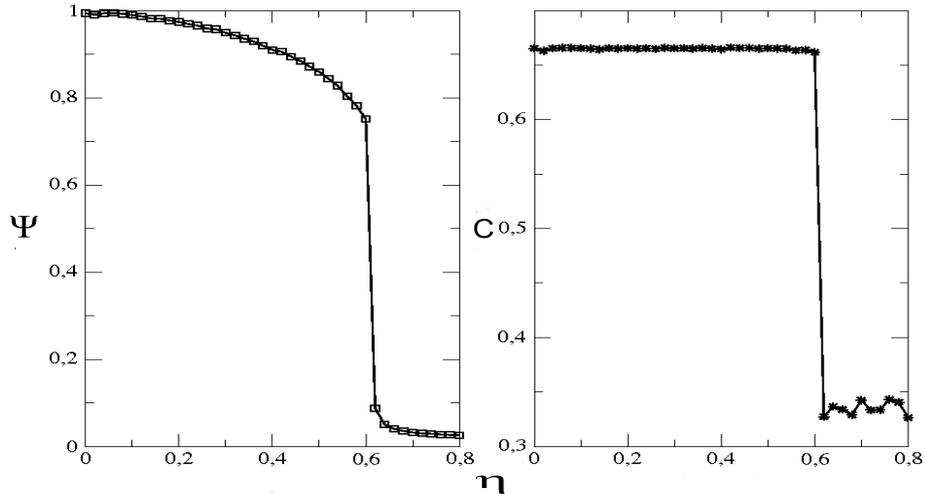


Figura 2.3: Velocidade média e Cumulante de Binder versus o ruído, para $L = 32$ e $N = 2048$.

Vimos na seção 2.1 que trata do modelo de Vicsek, que variando ou a intensidade η do ruído ou a densidade ρ de partículas, o parâmetro ψ varia continuamente indicando uma transição de segunda ordem. Diferentemente do que ocorre no modelo de Gregoire, como pode ser observado através da figura (2.3), em que tanto ψ quanto o cumulante de Binder apresentam uma descontinuidade.

Apresentamos abaixo alguns padrões de comportamento coletivo a exemplo do que fizemos na seção 2.2, com os mesmos parâmetros de densidades e ruído mantendo, porém, o módulo da velocidade $\nu_0 = 0.5$ que é o mesmo utilizado no modelo Gregoire. Em 2.4(a), para alta densidade e ruído, o sistema permanece desordenado; em 2.4(b), para alta densidade e baixo ruído o sistema exibe tendência de alinhamento direcional entre as partículas e ao diminuir o valor do ruído, veja figura (2.4(c)), esta tendência é confirmada. Em 2.4(d) para baixa densidade e ruído as partículas apresentam a tendência de formação de grupos e, diminuindo ainda mais o valor do ruído em 2.4(e), verificamos esta tendência, onde as partículas já se movem coerentemente em grupos;

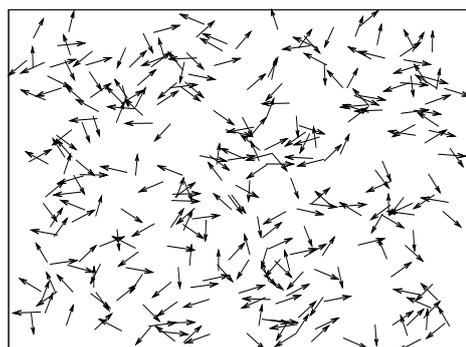
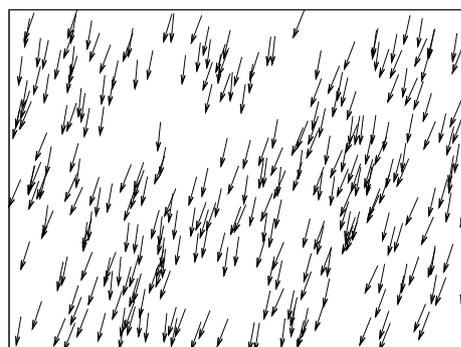
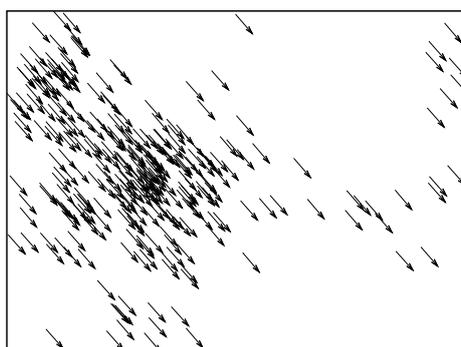
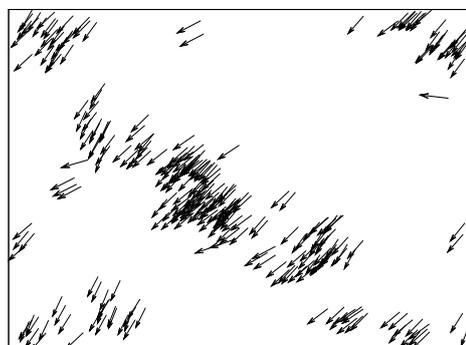
(a) $L = 7$ e $\eta = 2.0$ (b) $L = 5$ e $\eta = 0.1$ (c) $L = 5$ e $\eta = 0.01$ (d) $L = 25$ e $\eta = 0.1$ (e) $L = 25$ e $\eta = 0.01$

Figura 2.4: Direção das velocidades das partículas no modelo de Gregoire para diferentes valores de L e ruído, com $N = 300$ e $\nu_0 = 0.5$.

2.4 Uma conclusão sobre os dois modelos: Vicsek e Gregoire

2.4.1 Descrição do modelo

Em um artigo publicado em 2007 Aldana e colaboradores [36], condicionaram a natureza da transição de fase, de um modelo de partículas auto-propelidas, à maneira como o ruído é introduzido no sistema. Para Aldana, a maneira como o ruído foi adicionado por Vicsek e colaboradores [10] e que pode ser observado na regra que determina as interações (para conferir veja equação (2.3)), produz uma transição contínua diferente daquela observada no modelo de Gregoire em que o ruído, adicionado vetorialmente, produz uma transição de fase descontínua.

Para efeito de comprovação, Aldana apresentou um modelo de rede que consiste de um conjunto de vetores $\sigma_1 = \mathbf{v}_1(t), \sigma_2 = \mathbf{v}_2(t), \dots, \sigma_n = \mathbf{v}_N(t)$ todos de mesmo módulo $|\sigma| = \nu_0$ fixos aos nós de uma rede e cujos ângulos $\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)$ podem variar no tempo. A diferença entre um modelo de partículas auto-propelidas e o modelo de rede é que no modelo de partículas auto-propelidas as partículas não estão fixas, mas em constante movimento, e interagem com aquelas vizinhas em uma região de raio R_0 . Como estas interações dinâmicas são representadas no modelo de rede é o que veremos a seguir.

Cada vetor σ_n , neste modelo, interage ou se conecta a um conjunto fixo de $k_i(t)$ elementos escolhidos aleatoriamente. Desde que cada elemento σ_n possui K conexões o estado do sistema é completamente determinado pelos ângulos $\{\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)\}$. A dinâmica da rede é dada por uma das seguintes regras de interação:

$$\theta_n(t+1) = \hat{\text{ângulo}} \left[\frac{1}{\nu_0 K} \sum_{j=1}^K \sigma_{n_j}(t) \right] + \eta \xi(t), \quad (2.8)$$

$$\theta_n(t+1) = \hat{\text{ângulo}} \left[\frac{1}{\nu_0 K} \sum_{j=1}^K \sigma_{n_j}(t) + \eta e^{i\xi(t)} \right], \quad (2.9)$$

onde $\xi(t)$ é uma variável aleatória uniformemente distribuída num intervalo $[-\pi, \pi]$. A dinâmica da rede é completamente determinística para $\eta = 0$ e torna-se mais aleatória à medida que η aumenta. Para quantificar a ordem no sistema, Aldana e colaboradores definiram o parâmetro de ordem instantâneo como:

$$\psi(t) = \frac{1}{\nu_0 N} \left| \sum_{n=1}^N \sigma_{n_j}(t) \right|. \quad (2.10)$$

As regras de interação dadas pelas equações (2.8) e (2.9) são aquelas propostas por Vicsek e colaboradores [10] e Gregoire e Chaté [12] respectivamente. Como já vimos, a diferença entre essas duas regras consiste na maneira como o ruído é introduzido. Na equação (2.8) o ruído é adicionado fora da função ângulo, ou seja, depois que a função ângulo foi aplicado à contribuição média das conexões, enquanto na equação (2.9) podemos perceber que o ruído foi adicionado diretamente na contribuição média das conexões, neste caso, dentro da função ângulo.

2.4.2 Resultados

Aldana mostrou que as regras de atualização da direção da velocidade das partículas dadas pelas equações (2.8) e (2.9) produzem diferentes tipos de transição de fase, quando utilizadas em um sistema de rede e concluiu que esse mesmo resultado é válido para um sistema de partículas auto-propelidas. As figuras¹ (2.5) e (2.6), que mostram o comportamento da velocidade média em função do ruído η , nos mostram a natureza da transição de fase do modelo de rede quando utilizadas as regras de interação dadas pelas equações (2.8) e (2.9), que por sua vez equivalem aos modelos de Gregoire e Vicsek, respectivamente. Podemos observar na figura (2.5), para o caso em que o ruído é adicionado com a regra dada pela equação (2.8), uma transição de fase semelhante aquela que foi obtida por Vicsek,

¹Obtidas através da referência [36].

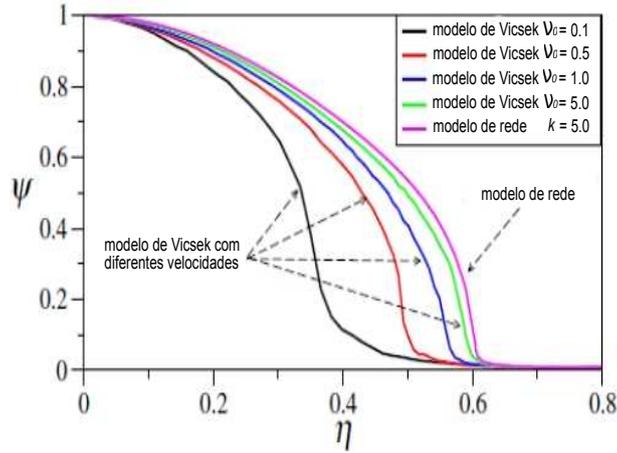


Figura 2.5: Diagrama de fase do modelo de Vicsek e do modelo de rede quando o ruído é adicionado como na equação (2.8) para o modelo de Vicsek: $\nu_0 = 0.1$; $\nu_0 = 0.5$; $\nu_0 = 1.0$; $\nu_0 = 5.0$; $\nu_0 = 0.1$; para o modelo de rede $k = 5.0$. Referência [36]

ou seja, contínua. Quanto a equivalência entre estes dois modelos (modelo de Vicsek e modelo de Rede), podemos perceber que, quando a magnitude da velocidade no modelo de Vicsek aumenta, a transição de fase converge para aquela do modelo de rede. Agora, se no modelo de rede o ruído for introduzido segundo os mesmos

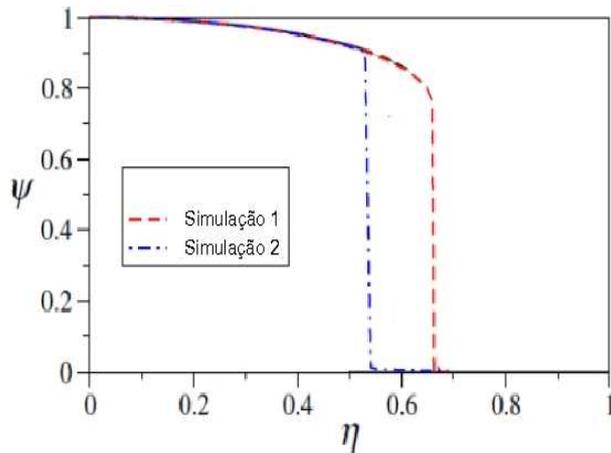


Figura 2.6: Diagrama de fase do modelo de rede para o caso em que o ruído é adicionado como na equação (2.8). Referência [36].

critérios de Gregoire e Chaté [12], conforme a regra de interação dada pela equação (2.9), o sistema exibe uma transição de fase descontínua. É o que mostra a figura (2.6) em que as linhas pontilhadas são resultados de simulações numéricas para diferentes condições iniciais. Nessa figura as linhas tracejadas (simulação 1)

se refere para o caso em que os vetores foram inicialmente alinhados na mesma direção e para as linhas pontilhada-tracejada (simulação 2) quando os vetores foram inicialmente orientados em direções aleatórias.

2.5 Modelo com velocidade adaptativa

2.5.1 Descrição do modelo

No modelo de Vicsek não há uma regra que previna a ocorrência de colisões entre as partículas, nesse sentido, muitos esforços têm surgido com o objetivo de criar mecanismos que possibilitem movimentos coletivos de indivíduos interagentes de modo a garantir que não haja colisões. Entre estes, citamos Peng *et al.* [20] que propuseram um modelo de partículas auto-propelidas com mecanismos que satisfaçam a prevenção de colisões e ao mesmo tempo apresentando modificações na componente velocidade. É este modelo que será descrito nesta seção.

Inicialmente, cada agente está aleatoriamente distribuído na rede com direção de movimento aleatória distribuída em um intervalo entre $[-\pi, \pi]$. Como no modelo de Vicsek, a cada passo de tempo a posição de cada agente é atualizada e definida pela regra cinemática $\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t$ e sua direção através da equação (2.11),

$$\theta_i(t + \Delta t) = \langle \theta_i(t) \rangle_{R_0} + \xi(t)\eta, \quad (2.11)$$

onde $\langle \theta_i(t) \rangle_{R_0}$ representa a direção média dos indivíduos vizinhos presentes em um raio de interação R_0 e $\xi(t)\eta$ denotam o termo ruidoso.

Nesse modelo, cada agente ajusta sua direção de acordo com uma distância mínima entre seus vizinhos e, quanto mais longe estiver em relação ao seu vizinho mais próximo, maior velocidade ele terá. Foi definido uma velocidade máxima ν_{max} , que para efeito de comparação com o modelo de Vicsek (veja figura (2.8)), foi configurada como sendo $\nu_{max} = \nu_0^{Vicsek} = 0.03$. Para alta densidade implica que a distância entre os agentes diminui acarretando um agregado com baixa velocidade

que em média se move muito lentamente e, devido a esse fato, foi introduzido uma repulsão que pode quebrar o agregado de partículas acelerando e ampliando a distância média entre os agentes.

Sintetizando, cada agente ajusta não somente a sua direção como também o módulo de sua velocidade. Para o caso em que dois indivíduos se aproximam mutuamente, a velocidade de cada agente foi determinada para não ser maior que

$$v_i = \frac{1}{2}(d_i - 2a), \quad (2.12)$$

onde d_i é a distância entre vizinhos, a indica o tamanho de cada agente e $2a$ representa a distância mínima entre eles, [veja figura ilustrativa ² (2.7)]. O tamanho dos indivíduos foi configurado com $a = 0.01$, logo a distância mínima para evitar colisões dever ser da ordem de $2a = 0.02$. A direção de movimento é obtida a cada passo de tempo sendo determinada pela direção média dos demais agentes que estejam dentro de seu raio de interação R_0 . Não importa como o agente i e seus

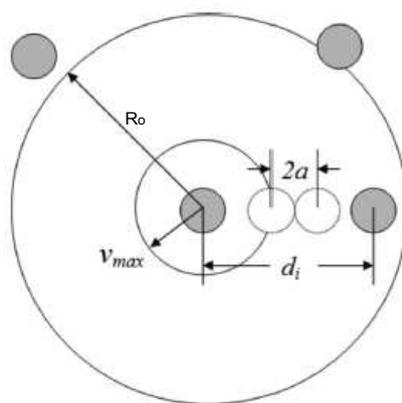


Figura 2.7: Ilustração do modelo de velocidade adaptativa onde R_0 representa o raio de interação, d_i representa a distância do agente i em relação a seus vizinhos, v_{max} a velocidade máxima possível, a o tamanho de um agente e $2a$ a menor distância.

²Obtida através da referência [20].

vizinhos mais próximos escolhem suas direções de movimento, a restrição imposta em relação a menor distância possível entre indivíduos vizinhos, $2a$, é para evitar colisões, assim como mantendo um valor máximo para a velocidade. Portanto, a velocidade de cada agente é atualizada de acordo com,

$$v_{t+1} = \min \left[v_{max}, \frac{d_i - 2a}{2} \right]. \quad (2.13)$$

2.5.2 Resultados

Resultados de simulação numérica para o parâmetro de ordem ψ coincidem com o resultados obtidos por Vicsek – para um regime de alta densidade – exibindo a mesma tendência, conforme nos mostra a figura³ (2.8), onde foi feito o gráfico da velocidade média em função do ruído. A transição de fase que surge neste

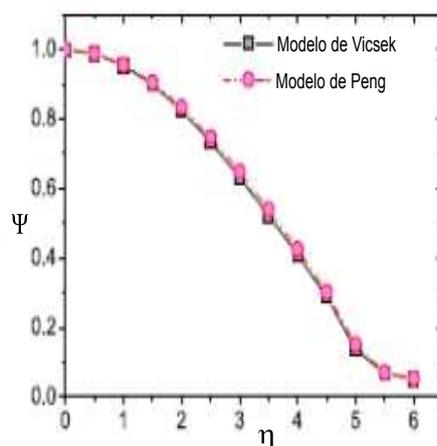


Figura 2.8: Comparação do parâmetro de ordem no modelo de Vicsek e no modelo de velocidade adaptativa com $L = 5$ e $N = 300$.

modelo de partículas auto-propelidas com velocidade adaptativa foi encontrada como sendo contínua e o ruído aqui, veja equação (2.11), foi adicionado de modo similar ao observado no modelo de Vicsek.

³Obtida através da referência [20].

2.6 O modelo de Aoki

Aoki [26] estabeleceu em seu artigo publicado em 1982, em que analisa através de simulação computacional os mecanismos de formação de um cardume de peixes que, para que possa ocorrer a formação de um cardume são necessários três comportamentos: o movimento de aproximação que permite a agregação ou atração, movimentos de repulsão e o movimento de orientação. É bom frisar que no comportamento de repulsão os peixes evitam colidir uns com os outros. O comportamento de atração se refere a tendência em se associar ao grupo e o comportamento de orientação ocorre quando se alinha na mesma direção de seu vizinho ou, mais especificamente *quando nada na mesma direção de um peixe vizinho*.

2.6.1 Descrição do modelo

Mutuamente independentes, no modelo de Aoki [26] a velocidade e a direção de movimento são variáveis estocásticas. A velocidade de um indivíduo em qualquer tempo é determinada independentemente dos outros indivíduos sendo dada pela seguinte distribuição Gama:

$$f(\nu) = \frac{A^k}{\Gamma(k)} \exp(-A\nu) \nu^{k-1}. \quad (2.14)$$

Na equação (2.14) A e K são parâmetros constantes biologicamente baseados por Aoki [43] em seu trabalho publicado em 1980, onde $A = 3.3$ e $K = 4$. A posição do i -ésimo indivíduo e sua direção são definidos respectivamente através das equações (2.15) e (2.16):

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t) \Delta t, \quad (2.15)$$

$$\theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + \phi_i(t), \quad (2.16)$$

onde $\phi(t)$ é distribuído de acordo com a distribuição normal de probabilidade:

$$p(\phi_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\phi-\omega_{i,j})^2/2\sigma^2}, \quad (2.17)$$

sendo $\omega_{i,j}$ o ângulo de giro que o indivíduo i faz em relação ao seu vizinho j e assumindo valores distintos para cada zona de interação. Baseado nas possíveis posições de seu vizinho num cardume, o indivíduo pode se comportar de 3 maneiras diferentes: repulsão, orientação paralela e atração. Podemos definir os raios de interação em cada uma dessas zonas comportamentais: r_r representa raio de repulsão, r_o o raio de orientação entre os peixes e r_a é o raio de atração. Podemos definir ainda \mathbf{r}_{ij} como a distância entre o peixe i e o seu vizinho j .

Se o vizinho estiver localizado em uma região menor que r_r , ou seja, ($\mathbf{r}_{ij} < r_r$), o peixe i adotará comportamento de repulsão no qual passará a nadar em sentido perpendicular ao vizinho, conforme demonstra a figura (2.9). Nesta região o ângulo

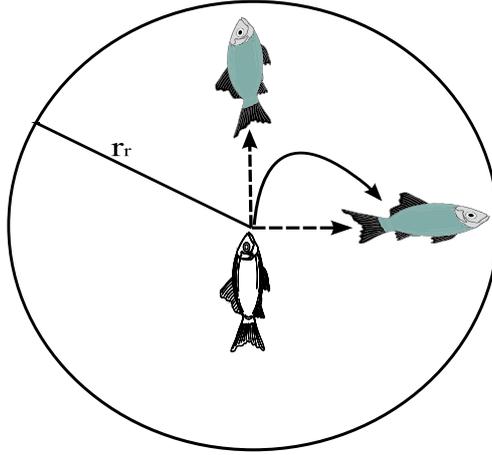


Figura 2.9: Figura ilustrativa para o cálculo do ângulo de giro do i -ésimo indivíduo determinado pelo j -ésimo indivíduo na zona de repulsão de raio r_r .

de giro é calculado como segue:

$$\omega_{i,j} = \min(\varrho + 90, \varrho - 90), \quad (2.18)$$

onde ϱ representa a direção do j -ésimo indivíduo. A função $\min(a, b)$ representa o valores mínimos entre $|a|$ e $|b|$.

Quando o j -ésimo indivíduo de um cardume estiver na zona de orientação ($r_r < \mathbf{r}_{ij} < r_a$) do peixe i , este se moverá na mesma direção do vizinho, (veja figura 2.10), o cálculo do ângulo de giro será:

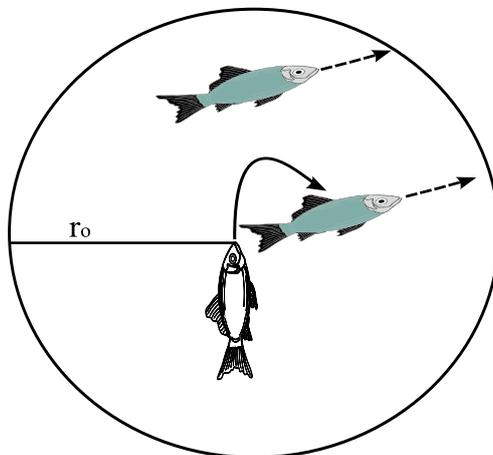


Figura 2.10: Figura ilustrativa para o cálculo do ângulo de giro do i -ésimo indivíduo determinado pelo j -ésimo indivíduo na zona de orientação de raio r_o .

$$\omega_{i,j} = \theta_j - \theta_i. \quad (2.19)$$

Agora se o vizinho j estiver localizado na zona de atração, ($\mathbf{r}_{ij} > r_a$), o i -ésimo indivíduo moverá em sua direção, conforme demonstra a figura (2.11): O ângulo

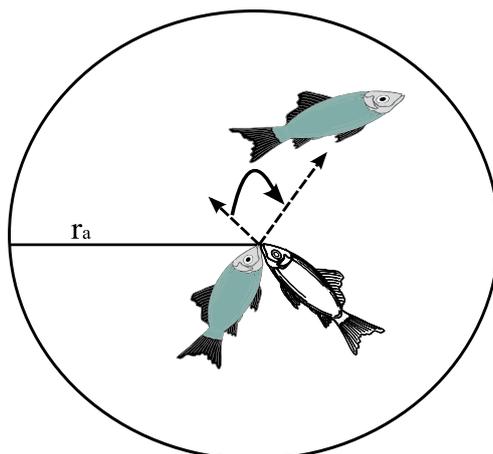


Figura 2.11: Figura ilustrativa para o cálculo do ângulo de giro do i -ésimo indivíduo determinado pelo j -ésimo indivíduo na zona de atração de raio r_a .

de giro neste caso será dado pela equação (2.20):

$$\omega_{i,j} = \varrho. \quad (2.20)$$

2.7 Modelo de Couzin

Em seu trabalho publicado em 2002, Couzin e colaboradores [23] apresentaram um modelo de partículas auto-propelidas em um espaço tridimensional a fim de investigar a dinâmica espacial de grupos de animais como cardume de peixes e bando de aves. Para este fim foi considerado, na análise da dinâmica de movimentos, regras de comportamento coletivo com a introdução de zonas de interação, ou zonas comportamentais, a exemplo do que foi feito nos modelos de Aoki [27, 43], Huth e Wissel [29, 37]. A diferença está nas regras de interação para a atualização da direção de movimento da partícula. Já vimos que o modelo de movimento coletivo de Vicsek e colaboradores [10] prediz que os indivíduos se movem a uma velocidade constante e assume a direção média de movimento de seus vizinhos dentro de uma vizinhança local com alguma perturbação adicionada. Neste modelo, as partículas nem evitam colisões nem se atraem umas às outras que são características inerentes a várias espécies de animais. Partindo do modelo minimalista de Vicsek que considera apenas a região de alinhamento e, buscando um realismo biológico, Couzin e colaboradores [23] construíram um modelo que foca comportamentos de agregação vistos em sistemas biológicos. Simula o comportamento dos indivíduos como resultados das tendências de repulsão, alinhamento e atração, baseados nas posições relativas de uns em relação aos outros. Doravante, nos referiremos a esse modelo como modelo de couzin.

2.7.1 Descrição do modelo de Couzin

Zonas de interação se configuram, a rigor, em uma zona comportamental modelada como uma esfera subdividida em três zonas distintas e concêntricas que não se sobrepõem: zona de repulsão, zona de orientação e zona de atração conforme

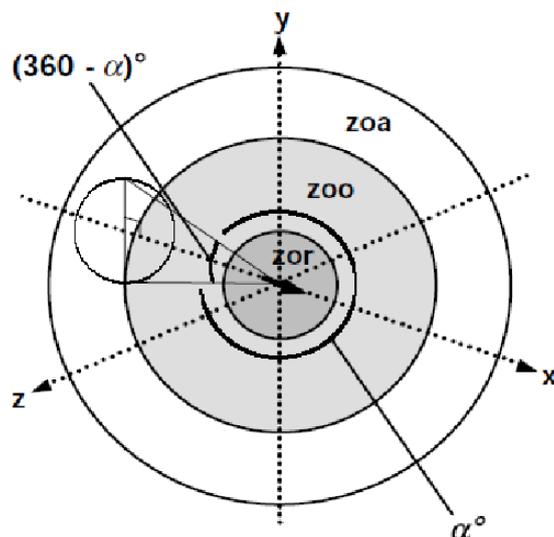


Figura 2.12: Zonas de interação e o volume β associado ao indivíduo i : zor = zona de repulsão, zoo = zona de orientação e zoa = zona de atração.

ilustrado pela figura⁴ (2.12). Estas zonas são esféricas, exceto para a região β , modelada como um cone com ângulo interior de $(360 - \alpha)^\circ$. No modelo o indivíduo não interage com todos, somente com aqueles que acessam seu campo de visão α . Desse modo, na região $\beta = (360 - \alpha)^\circ$, que fica atrás do indivíduo i , nenhum vizinho é capaz de ser detectável e portanto qualquer contribuição é ignorada. Porém, para $\alpha = 360^\circ$ um indivíduo pode responder a todos os outros em qualquer direção nas zonas comportamentais.

Ao acessar as posições e orientações dos outros indivíduos nestas zonas, a direção da velocidade da partícula i é determinada através das seguintes regras de interação:

1 - Zona de repulsão

Possui a mais alta prioridade no modelo. De raio r_r , reflete a tendência de indivíduos de procurar manter uma distância mínima entre si e os demais, evitando colisões. Se há N_r indivíduos presentes na zona de repulsão, a direção da velocidade

⁴Obtida através da referência [23].

da partícula i é determinada por:

$$\mathbf{d}_i^{rr}(t + \Delta t) = - \frac{\sum_{j \neq i}^{N_r} \mathbf{r}_{ij}}{\left| \sum_{j \neq i}^{N_r} \mathbf{r}_{ij} \right|}, \quad (2.21)$$

onde

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\left| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \right|}, \quad (2.22)$$

\mathbf{r}_{ij} é o vetor unitário que aponta do indivíduo i na direção do vizinho j e a condição para a atualização da velocidade nesta região é que:

$$\left| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \right| \leq r_r. \quad (2.23)$$

Se não há vizinho presente na zona de repulsão, o indivíduo i responde então aos vizinhos que estão presentes nas zonas de orientação e atração.

2 - Zona de orientação

De raio r_o dá o alinhamento entre as partículas. Ou, mais especificamente, dá o alinhamento entre a partícula i e todas aquelas que acessam esta região. A direção da velocidade da partícula i passa a ser, aqui, a direção média das velocidades \mathbf{v}_j dos N_o indivíduos presentes nesta zona,

$$\mathbf{d}_i^{ro}(t + \Delta t) = \frac{\sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{v}_j}{\left| \sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{v}_j \right|}, \quad (2.24)$$

com a condição,

$$r_r < \left| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \right| \leq r_o, \quad (2.25)$$

que deve, para tanto, ser satisfeita.

3 - Zona de atração

De raio r_a reproduz a tendência de indivíduos de se associar a grupos, ou seja, evitar ficar isolados,

$$\mathbf{d}_i^{r_a}(t + \Delta t) = \frac{\sum_{j \neq i}^{N_r} \mathbf{r}_{ij}}{\left| \sum_{j \neq i}^{N_r} \mathbf{r}_{ij} \right|}, \quad (2.26)$$

novamente, a condição aqui deve ser,

$$r_o < |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \leq r_a. \quad (2.27)$$

4 - Zona Neutra

Se não houver nenhum vizinho nas três zonas de interação descritas acima, a regra de atualização da direção é dada através da equação (2.28), ou seja, o indivíduo i segue seu percurso original

$$\mathbf{d}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t). \quad (2.28)$$

Para o caso em que os vizinhos estejam presentes tanto na zona de orientação quanto na zona de atração, a direção de movimento da partícula i passa a ser:

$$\mathbf{d}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{d}_i^{r_a} + \mathbf{d}_i^{r_o} \right], \quad (2.29)$$

desde que não haja indivíduos na zona de repulsão.

Tomada de decisão por indivíduos dentro de um grupo de animais está sujeita a erros, já que o indivíduo i não sabe determinar com precisão a posição real de seu vizinho j , neste sentido, segundo Couzin e colaboradores [23], o erro pode ser simulado ao perturbar o vetor direção $\mathbf{d}_i(t + \Delta t)$ adicionando um termo aleatório obtido de uma distribuição Gaussiana.