



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FABRICIO DOS SANTOS GAMA

POTENCIAL EFETIVO EM TEORIAS SUPERSIMÉTRICAS
COM ALTAS DERIVADAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOÃO PESSOA, PB
MAIO, 2011

FABRICIO DOS SANTOS GAMA

**POTENCIAL EFETIVO EM TEORIAS SUPERSIMÉTRICAS
COM ALTAS DERIVADAS**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Albert Petrov

JOÃO PESSOA, PB

MAIO, 2011

G184p Gama, Fabrício dos Santos.
Potencial efetivo em teorias supersimétricas com altas derivadas / Fabrício dos Santos Gama.- João Pessoa, 2011. 53f.
Orientador: Albert Petrov
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Teorias quânticas. 3. Teorias supersimétricas.
4. Teoria de calibre supersimétrica. 5. Altas derivadas.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno
Fabrcio dos Santos Gama, candidato
ao Título de Mestre em Física na Área
de Concentração Física das Partículas
Elementares e Campos.

1 Aos seis dias do mês de maio do ano de dois mil e onze, às 14:00, na sala de reuniões
2 do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
3 Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para
4 examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas
5 Elementares e Campos, **Fabrcio dos Santos Gama**. A comissão examinadora
6 composta pelos professores doutores: *Albert Petrov* (DF/UFPB), orientador e presidente
7 da banca examinadora, --- (---), co-orientador, *Cláudio Benedito da Silva Furtado*
8 (DF/UFPB) e *André Lehum* (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Albert Petrov*
9 comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao
10 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação
11 intitulado "*Potencial efetivo em teorias supersimetricas com altas derivadas*".
12 Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o
13 seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba
14 expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu,
15 Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai
16 assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **06 de**
17 **maio de 2011.**

Prof. Dr. Albert Petrov
Orientador -DF/ UFPB

Prof. Dr. ---
Co-orientador - ---

Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado
DF/UFPB

Prof. Dr. André Lehum
UFRN

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário



NÃO HÁ



*A todas as famílias de baixa renda que tiveram que pagar
inúmeros impostos para financiar este trabalho por meio
do CNPQ.*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus¹. Aos meus pais Pedro e Josefa pelo apoio à minha educação acadêmica e pela grande contribuição para minha educação moral (a mais importante). Eu gostaria de agradecer também ao Prof^o Albert Petrov pela orientação e por ter paciência com o meu conhecimento bastante limitado de teoria de campos. Agradecer aos meus vários irmãos, não vou citar nomes porque são muitos (são por volta de nove incluindo os por parte de pai e de mãe). Agradecer à meu "anjinho" Aliliane (Lilika) pela paciência, apoio e grande carinho durante meu mestrado. Aos meus colegas da pós-graduação, em particular as entidades da sala 15: os baianos e os naturalizados baianos (os que se encontravam lá na data em que eu fiz meu mestrado). À alguns professores da UEFS, em particular ao Prof^o Carlos Alberto que foi um dos que contribuíram para que eu chega-se até aqui.

¹Por Deus entenda um ser que é incorpóreo (não é espacialmente observável), eterno (existe fora do tempo), efetivo (causa mudanças no tempo), pessoal (têm desejos e faz escolhas), onisciente (envolve conhecer tudo que é logicamente possível), onipotente (envolve poder fazer tudo que é logicamente possível) e por natureza moralmente perfeito (é constituído com o que é perfeitamente bom e suas ações refletem sua natureza).

*"O maior prazer de um homem inteligente é bancar o idiota diante do
idiota que quer bancar o inteligente."*

—CONFÚCIO

Resumo

Teorias com altas derivadas foram introduzidas muito cedo numa tentativa de regularizar as divergências ultravioletas das teorias quânticas de campos. Infelizmente, teorias com altas derivadas têm uma energia que não é limitada por baixo e parecem levar aos fantasmas, estados com norma negativa, que violam a unitariedade. Apesar disso, teorias com altas derivadas têm melhores propriedades de renormalização do que as teorias convencionais e assim tem sido estudadas à fundo. Recentemente, no contexto de teorias supersimétricas o interesse neste assunto tem sido estimulado por estudos sobre, por exemplo, o método de regularização de altas derivadas, o modelo de supergravidade de altas derivadas, os aspectos clássicos de modelos de supercampo quirais com altas derivadas, etc. Em 2009, Gomes, Nascimento, Petrov e da Silva calcularam o superpotencial efetivo para duas versões de modelos de supercampo quiral com altas derivadas. Até o momento, nenhum cálculo foi realizado para determinar o superpotencial efetivo para algum tipo de versão de teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas. Preenchemos esta lacuna com a construção de uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas consistente e com o cálculo de contribuições kählerianas para o superpotencial efetivo de um laço. Usamos as técnicas de supergráficos de Feynman padrão para obter tais contribuições. No presente estudo, mostramos que o superpotencial efetivo kähleriano para a teoria de calibre abeliana supersimétrica com altas derivadas não exibe nenhuma divergência, diferente das teorias de calibre usuais.

Abstract

Higher derivative theories were introduced quite early in an attempt to regularize the ultraviolet divergencies of quantum field theories. Unfortunately, higher derivatives theories have an energy which is not bounded from below and seem to lead to ghosts, states with negative norm, that violate the unitarity. In spite of that, higher derivative theories have better renormalisation properties than the conventional theories and thus have been thoroughly studied. Recently, in the context of supersymmetric theories the interest in this subject has been stimulated by the studies about, for instance, the higher derivative regularization method, the higher derivative supergravity model, the classical aspects of the higher derivative chiral superfield models, and so on. In 2009, Gomes, Nascimento, Petrov and da Silva calculated the effective superpotential for two versions of higher derivative chiral superfield models. So far no calculation was performed to determine the effective superpotential for some kind of version of higher derivative supersymmetric gauge theory. We fill out this gap with the construction of a consistent higher derivative supersymmetric gauge theory coupled to a chiral matter and with the calculation of the Kählerian contributions to the one-loop effective superpotential. We use the standard Feynman supergraphs techniques in order to obtain such contributions. In the present study, we show that the one-loop Kählerian effective superpotential to the higher derivative supersymmetric abelian gauge theory does not display any divergences, unlike the usual gauge theories.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
INTRODUÇÃO	1
1 Teoria Clássica de Supercampos	3
1.1 ÁLGEBRA DE SUPERSIMETRIA	3
1.2 SUPERESPAÇO E SUPERCAMPOS	5
1.2.1 MOTIVAÇÃO	5
1.2.2 FORMALISMO	6
1.2.3 INTEGRAÇÃO NO SUPERESPAÇO	8
1.3 O SUPERCAMPO QUIRAL E O MODELO DE WESS-ZUMINO	10
1.4 PRÉ-POTENCIAL SUPER-YANG-MILLS	12
1.5 A AÇÃO DE YANG-MILLS SUPERSIMÉTRICO	14
2 Teoria Quântica de Supercampos	18
2.1 INTRODUÇÃO ÀS REGRAS DE FEYNMAN	18
2.2 DERIVADA (SUPER)FUNCIONAL	19
2.3 FORMALISMO GERAL	20
2.4 REGRAS DE FEYNMAN PARA SUPERCAMPOS	21
2.5 POTENCIAL EFETIVO DE SUPERCAMPO	25
3 Teoria de Calibre Supersimétrica com Altas Derivadas	28
3.1 ABORDAGEM GERAL	28
3.2 CÁLCULOS DAS CONTRIBUIÇÕES EM UM LAÇO	31
CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
A Notações e Convenções	39
Referências Bibliográficas	41

INTRODUÇÃO

Simetrias são extremamente importantes na descrição de uma enorme variedade de sistemas físicos. Em particular, a teoria quântica de campos (TQC) ordinária tem como ingrediente principal do seu sucesso as simetrias impostas sobre ação, por exemplo, a imposição de simetrias internas tornaram a TQC bem sucedida na descrição de três das quatro interações fundamentais além de terem sido importantes na descoberta de um grande número de partículas elementares [1]. Talvez a simetria mais importante encontrada na TQC seja a simetria de Poincaré, visto que ela além de levar à conservação da energia e dos momenta linear e angular, é a partir dela que podemos utilizar o grupo de Poincaré para classificar todas as grandezas de interesse físico de acordo com sua transformação sob tal grupo [2]. Nos últimos 40 anos, uma simetria tem sido muito estudada pelos físicos de altas-energias, tal simetria é conhecida como supersimetria (SUSY). A SUSY é uma extensão não-trivial da simetria de Poincaré. Os primeiros trabalhos em SUSY foram publicados no início da década de 70 [3]. A SUSY ainda é muito estudada atualmente porque ela pode resolver problemas fenomenológicos que o modelo padrão não pode resolver, podemos citar alguns: O problema da hierarquia, o fornecimento de uma partícula candidata à matéria escura, a unificação das constantes de acoplamento, etc. [4]. O LHC (*Large Hadron Collider*) está atualmente procurando evidências da existência de partículas supersimétricas, mas mesmo que tais partículas não sejam encontradas, o estudo de teorias supersimétricas aumentou nosso entendimento das TQC e permanece ainda como um laboratório teórico muito útil para compreender os limites da TQC [5].

Do ponto de vista teórico, teorias supersimétricas exibem muitas propriedades interessantes, por exemplo, tais teorias apresentam um caráter unificador pelo fato delas unificarem simetrias de espaço-tempo com simetrias internas além de tratarem bósons e férmions no mesmo pé de igualdade. Além disso, quando promovemos a SUSY para uma simetria local, a gravitação surge automaticamente e obtemos uma teoria da gravitação supersimétrica conhecida como supergravidade (SUGRA). Teoricamente, teorias supersimétricas apresentam um comportamento ultravioleta melhorado em relação às TQC ordinárias, em particular, a teoria $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills é ultravioleta finita [6]. No caso da $\mathcal{N} = 8$ SUGRA quântica, há trabalhos recentes que oferecem evidências muito fortes de que ela seja ultravioleta finita, levando assim a supergravidade a ser uma teoria quântica da gravidade perturbativamente consistente [7].

A SUSY não é a única maneira conhecida de se melhorar o comportamento ultravioleta de

uma TQC, a introdução de derivadas de ordem superior na lagrangiana também cumpre esse papel. Teorias com altas derivadas (TAD) foram introduzidas muito cedo na história da TQC, por exemplo, em 1940, Bopp estudou classicamente uma generalização com altas derivadas da eletrodinâmica [8]. Em 1950, Pais e Uhlenbeck mostraram que TAD são dotadas de algumas inconsistências, como a geração de energia de campo livre não-positiva definida e a geração de fantasmas (*ghosts*), estados com norma negativa, que violam a unitariedade e/ou a causalidade [9]. Apesar disso, TAD exibem melhores propriedades de renormalização que as teorias convencionais e têm sido estudadas à fundo, por exemplo, a introdução de altas derivadas em TQC resulta em trabalhos como os de Lee e Wick, que em 1970 construíram uma versão finita da QED e de Stelle, que em 1977 construiu uma versão renormalizável da gravitação quântica [10].

Apesar de ser uma idéia muito antiga, TAD ainda despertam muito interesse atualmente. Recentemente, no contexto de teorias supersimétricas o interesse neste assunto tem sido estimulado por trabalhos como o de Buchbinder e Petrov que investigaram a estrutura da ação efetiva em um modelo de SUGRA com altas derivadas [11]. O trabalho de Stepanyantz que versou sobre um esquema de regularização de altas derivadas em teorias supersimétricas [12]. Antoniadis *et al.* analisaram classicamente modelos de supercampo quiral com altas derivadas que podem ter aplicações em fenomenologia [13]. Gomes *et al.* calcularam o superpotencial efetivo para duas versões de modelos de supercampo quiral com altas derivadas [14]. Esta dissertação é motivada pelo fato que, até o momento, nenhum cálculo foi realizado para determinar o superpotencial efetivo para algum tipo de versão de teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas. Nesta dissertação e na referência [15], preenchemos essa lacuna com a construção de uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas consistente e com o cálculo de contribuições kählerianas para o superpotencial efetivo no nível de um laço. Utilizamos as técnicas de superdiagramas(supergráficos) de Feynman padrão para a obtenção de tais contribuições. No presente estudo, mostramos que o superpotencial efetivo kähleriano em um laço para a teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas abeliana não exhibe nenhuma divergência, ao contrário das teorias de calibre usuais.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. Os capítulos 1 e 2 são destinados à revisão de alguns conceitos relacionados à teoria de supercampos que serviram de base para o último capítulo. Em particular, no cap. 1 revisamos os aspectos clássicos da teoria de supercampos, definimos o superespaço e os supercampos e concluímos com a construção de alguns modelos supersimétricos. No cap. 2 revisamos os aspectos quânticos, apresentamos o formalismo geral de quantização de supercampos por integrais funcionais e introduzimos as regras de Feynman. No cap. 3 calculamos as contribuições kählerianas para o superpotencial efetivo no nível de um laço para a teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas abeliana.

Teoria Clássica de Supercampos

1.1 ÁLGEBRA DE SUPERSIMETRIA

Sabemos da TQC ordinária que uma das simetrias mais importantes da natureza, senão a mais importante, é a simetria de Poincaré. Toda a TQC é construída de tal forma que esta simetria seja respeitada. Na década de 60, muitos físicos estavam interessados em saber se era possível estender a álgebra de Poincaré de maneira não-trivial. Quando dizemos trivial, queremos dizer que os novos geradores comutam com todos os geradores do grupo de Poincaré $ISO(3, 1)$ [16]. Por exemplo, em TQC estudamos o grupo de calibre $SU(N)$ pelo fato dele está associado às interações entre as partículas elementares, os geradores de $SU(N)$ comutam com todos os geradores do grupo de Poincaré [16]:

$$[T_a, T_b] = if_{ab}{}^c T_c, \quad (1.1)$$

$$[T_a, P_{\alpha\beta}] = 0, \quad (1.2)$$

$$[T_a, J_{\alpha\beta}] = [T_a, \bar{J}_{\alpha\beta}] = 0, \quad (1.3)$$

onde estamos utilizando o equivalente espinorial do gerador do grupo de Lorentz $J_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = C_{\alpha\dot{\beta}}\bar{J}_{\alpha\dot{\beta}} + C_{\dot{\alpha}\beta}J_{\alpha\beta}$ [17]. Neste caso a extensão é trivial. Isto significa que a álgebra resultante é igual à soma direta $su(N) \oplus iso(3, 1)$.

Em 1967, Coleman e Mandula provaram que (em termos simples) sob um número de considerações físicas razoáveis, as únicas simetrias da matriz-S (a matriz de espalhamento) são: a simetria de Poincaré, simetrias internas (tais como as simetrias de calibre e simetrias globais adicionais, por exemplo, o isospin) e simetrias discretas (C, P e T) [18, 4]. Logo, devido ao fato que os geradores dos grupos de simetria interna comutam com os do grupo de Poincaré, então não é possível estender a álgebra de Poincaré de maneira não-trivial.

Na prova do teorema de Coleman-Mandula há uma consideração implícita de que somente geradores bosônicos são envolvidos, geradores bosônicos são geradores que não mudam o spin do estado que eles atuam, então se enfraquecemos esta consideração é possível contornar o teorema de Coleman-Mandula [4].

Enfraquecendo a consideração acima, em 1975, Haag, Łopuszański e Sohnius generalizaram o teorema de Coleman-Mandula e provaram que a única maneira de estender não-trivialmente a álgebra de Poincaré, de tal forma que a matriz-S preserve-se seu caráter físico, é por meio da

SUSY [19]. SUSY pode ser definida como a simetria que é obtida com a introdução de geradores fermiônicos que transformam-se como espinores de Weyl sob transformações de Lorentz, segue que estes geradores fermiônicos não irão comutar com os geradores do grupo de Lorentz. Logo, podemos afirmar que a SUSY estende não-trivialmente a álgebra do grupo de Poincaré [20].

Haag, Łopuszański e Sohnius provaram que a mais geral álgebra de super-Poincaré contém, além dos geradores $\{J_{\alpha\beta}, \bar{J}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, P_{\alpha\beta}\}$, contém \mathcal{N} geradores fermiônicos Q_α que satisfazem a álgebra (para $\mathcal{N} = 1$)¹[6]:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = P_{\alpha\dot{\beta}}, \quad (1.4)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad (1.5)$$

$$[Q_\alpha, P_{\alpha\beta}] = [P_{\alpha\dot{\alpha}}, P_{\beta\dot{\beta}}] = [Q_\alpha, \bar{J}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}] = 0, \quad (1.6)$$

$$[J_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = \frac{1}{2}iC_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)}, \quad (1.7)$$

$$[J_{\alpha\beta}, P_{\gamma\dot{\gamma}}] = \frac{1}{2}iC_{\gamma(\alpha}P_{\beta)\dot{\gamma}}, \quad (1.8)$$

$$[J_{\alpha\beta}, J^{\gamma\dot{\delta}}] = -\frac{1}{2}i\delta_{(\alpha}^{\gamma}J_{\beta)}^{\dot{\delta}}, \quad (1.9)$$

$$[J_{\alpha\beta}, \bar{J}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}] = 0, \quad (1.10)$$

onde $Q_\alpha^\dagger = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Note na primeira e na segunda expressão que há um anti-comutador, álgebras que envolvem comutadores e anti-comutadores são chamadas superálgebras de Lie. Para uma superálgebra de Lie temos as generalizações [6]:

$$[\Omega_A, \Omega_B] = \Omega_A\Omega_B - (-)^{AB}\Omega_B\Omega_A, \quad (1.11)$$

$$(-)^{AC}[[\Omega_A, \Omega_B], \Omega_C] + (-)^{AB}[[\Omega_B, \Omega_C], \Omega_A] + (-)^{BC}[[\Omega_C, \Omega_A], \Omega_B] = 0, \quad (1.12)$$

onde $(-)^{AB} = -1$ se A e B são ambos fermiônicos e $(-)^{AB} = 1$ para os outros casos. Sabemos que exponenciando a álgebra de Lie $g = \exp(\lambda^A\Omega_A)$ obtemos elementos do grupo de Lie. Este fato é consequência da fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell (BHC) $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots)$ que respeita os axiomas da teoria de grupos. No caso das superálgebras de Lie, não há generalização da fórmula BHC, assim devemos utilizar um parâmetro de Grassmann associado ao gerador fermiônico para podermos utilizar comutadores. De fato, $[\varepsilon^\alpha Q_\alpha, \bar{\varepsilon}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}] = -\varepsilon^\alpha \bar{\varepsilon}^{\dot{\beta}} P_{\alpha\dot{\beta}}$ [21].

Dentre as muitas consequências que resultam da álgebra de SUSY acima, vale apenas destacar três delas. A primeira é que (1.6) implica que P^2 é um operador de Casimir, ou seja, ele comuta com todos os geradores do supergrupo, assim as partículas pertencentes ao mesmo multipletto possuem a mesma massa. A segunda é que a energia em teorias supersimétricas é sempre

¹Neste trabalho vamos considerar somente o caso mais simples $\mathcal{N} = 1$.

positiva. A terceira é que há um mapa um-a-um entre bósons e férmions, isso implica que o número de graus de liberdade bosônicos é igual ao número de graus de liberdade fermiônicos [22].

Enfraquecendo a consideração sobre a utilização de somente geradores bosônicos nos leva à SUSY, então é natural pensarmos que enfraquecendo outras considerações seríamos levados à uma nova simetria do espaço-tempo. Até hoje não se obteve nenhuma nova simetria que fosse fisicamente convincente. Portanto, podemos afirmar que a supersimetria é a única extensão possível das simetrias conhecidas de espaço-tempo da física de partículas [20].

1.2 SUPERESPAÇO E SUPERCAMPOS

1.2.1 MOTIVAÇÃO

Vamos estudar SUSY utilizando o formalismo de supercampos (que vivem no superespaço) ao invés de utilizar a TQC ordinária por vários motivos, dentre eles podemos citar [6]:

- A SUSY é manifesta em todos os passos do cálculo.
- Facilita a construção de modelos supersimétricos, principalmente quando queremos construir termos de interação que exibem esta simetria.
- Fornece uma descrição mais compacta. Veremos, por exemplo, que a ação de Yang-Mills supersimétrico no superespaço possui um supercampo escalar que contém como componentes três campos ordinários.
- Já possui naturalmente campos auxiliares que são essenciais para: o fechamento fora da camada de massa da álgebra de SUSY, a linearidade das transformações de SUSY, a quebra-espontânea de SUSY, etc. Na TQC ordinária precisamos colocá-los à mão.
- Menos índices. Por exemplo, o campo vetorial $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ está "escondido" no supercampo escalar V .
- Facilita cálculos quânticos. Introduzindo as regras de Feynman obtemos superdiagramas, um superdiagrama é equivalente aos diagramas de Feynman de todos os campos componentes contidos no supercampo. Além disso, quando se utiliza a TQC ordinária é preciso fazer cálculos para mostrar que há cancelamentos das divergências que surgem dos laços dos campos componentes bosônicos e fermiônicos, enquanto que superdiagramas incorporam esse cancelamentos automaticamente [23].

1.2.2 FORMALISMO

O espaço Euclidiano não é um espaço adequado para se formular uma TQC pelo fato que não conseguimos construir uma teoria que exiba a simetria de Poincaré manifesta. O espaço adequado para esta simetria é o espaço de Minkowski, onde as transformações do grupo de Poincaré têm a forma [6] (Confira o apêndice A):

$$x'^{\alpha\dot{\alpha}} = [e^{\omega}]_{\beta}^{\alpha} [e^{\bar{\omega}}]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}} + \xi^{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (1.13)$$

A simetria de Poincaré, dada por uma transformação de coordenadas no espaço de Minkowski, permite a formulação de uma TQC com esta simetria manifesta, as ações e equações de movimento são invariantes sob (1.13) e pelo fato de ser manifesta esta invariância é facilmente verificável [24].

A SUSY é uma extensão da simetria de Poincaré, então é tentador procurarmos por um espaço que seja uma extensão do espaço de Minkowski, o qual possamos formular uma TQC que tenha a SUSY manifesta, tal espaço existe e é conhecido como superespaço. O superespaço possui além das quatro coordenadas de espaço-tempo $x^{\alpha\dot{\alpha}}$, ele possui quatro coordenadas de Grassmann θ^{α} e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ que se transformam como espinores de Weyl de mão-direita e esquerda respectivamente. Assim, o espaço de Minkowski é "a fronteira do superespaço" e as consequências físicas do superespaço só podem ser detectadas na fronteira [17].

Como as novas coordenadas são espinores de Weyl, então elas transformam-se sob o grupo de Poincaré como:

$$\theta'^{\alpha} = [e^{\omega}]_{\beta}^{\alpha} \theta^{\beta}, \quad \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = [e^{\bar{\omega}}]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}. \quad (1.14)$$

Vamos ver como as coordenadas do superespaço se comportam sob supertranslações geradas pelos geradores Q_{α} e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, para isso vamos definir o elemento de grupo² [6]:

$$h(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp\{i(x^{\alpha\dot{\alpha}} P_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{\alpha} Q_{\alpha} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}})\}. \quad (1.15)$$

Então, utilizando a fórmula de BHC, obtemos,

$$h(x', \theta', \bar{\theta}') = h(0, \varepsilon, \bar{\varepsilon}) h(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp\left\{i\left[\left(x^{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}(\varepsilon^{\alpha} \bar{\theta}^{\dot{\theta}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \theta^{\alpha})\right) P_{\alpha\dot{\alpha}} + (\theta^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha}) Q_{\alpha} + (\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}) \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right]\right\}. \quad (1.16)$$

Em suma, as transformações de SUSY são realizadas no superespaço por meio das transformações de coordenadas [6]:

$$x'^{\alpha\dot{\alpha}} = [e^{\omega}]_{\beta}^{\alpha} [e^{\bar{\omega}}]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}} + \xi^{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}(\varepsilon^{\alpha} \bar{\theta}^{\dot{\theta}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \theta^{\alpha}), \quad (1.17)$$

$$\theta'^{\alpha} = [e^{\omega}]_{\beta}^{\alpha} \theta^{\beta} + \varepsilon^{\alpha}, \quad (1.18)$$

$$\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = [e^{\bar{\omega}}]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}. \quad (1.19)$$

²por simplicidade vamos desconsiderar os geradores de Lorentz

Podemos definir superfunções analíticas no superespaço $\Phi_{\alpha\beta\dots\dot{\alpha}\dot{\beta}\dots}^{ij\dots}(x, \theta, \bar{\theta})$ que são escalares sob supertranslações e carregam uma representação dos grupos $SL(2, \mathbb{C})$ e $SU(N)$, em outras palavras, carregam índices dos grupos $SL(2, \mathbb{C})$ e $SU(N)$. Tais funções são denominadas supercampos [24].

Podemos expandir, por exemplo, o supercampo real nas variáveis de Grassmann para obter

$$V = C + \theta^\alpha \chi_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} - \theta^2 M - \bar{\theta}^2 \bar{M} + \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}} - \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \lambda_\alpha - \theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \theta^2 \bar{\theta}^2 D'. \quad (1.20)$$

Note que devido ao caráter anti-comutante das novas coordenadas a série termina em $O(\theta^2, \bar{\theta}^2)$. Além disso, vemos que os "campos componentes" $C(x), \chi_\alpha(x), \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(x), \dots$ são os campos ordinários da TQC. Um supercampo possui campos componentes com o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos, em particular, o supercampo acima exibe oito graus de liberdade de cada e esta igualdade é um resultado direto da álgebra de SUSY [25].

Podemos utilizar a definição de supercampo e as transformações (1.17), (1.18) e (1.19) para obter a representação dos geradores de supertranslações em termos de operadores diferenciais [6]:

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (1.21)$$

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha - \frac{1}{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.22)$$

$$Q_{\dot{\alpha}} = i(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\theta^\alpha i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.23)$$

onde $\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \equiv \partial/\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}$, $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\theta^\alpha$ e $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \equiv \partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. A derivada $\partial_{\alpha\dot{\alpha}}$ é covariante pelo fato que $\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi$ é um supercampo. De fato, além de ser covariante sob rotações de Lorentz, ela é invariante sob supertranslações como está exibido abaixo:

$$\delta(\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi) \equiv \partial_{\alpha\dot{\alpha}}(\delta\Phi) = \quad (1.24)$$

$$i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}(aP + \varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q})\Phi = i(\xi P + \varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q})\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi. \quad (1.25)$$

O mesmo não pode ser dito à $\partial_\alpha\Phi$, porque ∂_α não anti-comuta com $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Assim, devemos definir derivadas covariantes espinoriais que comutem com os geradores P , Q , e \bar{Q} . As derivadas que apresentam a propriedade citada são dadas por [6]:

$$D_\alpha \equiv -iQ_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} P_{\alpha\dot{\alpha}} = (\partial_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.26)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha P_{\alpha\dot{\alpha}} = (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\theta^\alpha i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}). \quad (1.27)$$

Pode ser mostrado que tais derivadas comutam com os geradores P , Q , e \bar{Q} . E assim, $D_\alpha\Phi$ e $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi$ transformam-se como supercampos.

Devido ao fato dos campos componentes possuírem uma realidade física, ao contrário dos supercampos (apenas formalismo), é de muito interesse saber como as transformações de SUSY

afetam os campos físicos. Para isso, devemos aplicar a transformação $\delta V = (i\varepsilon Q + i\bar{\varepsilon}\bar{Q})V \equiv \delta C + \theta\delta\chi + \dots$ e ver o que acontece. Antes disso, é conveniente fazermos a introdução de um artifício matemático [6]:

$$X| = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\bar{\theta} \rightarrow 0} X. \quad (1.28)$$

A partir desta definição podemos escrever as componentes de (1.20) como o resultado das projeções de $V(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$C(x) = V(x, \theta, \bar{\theta})|, \quad \chi_\alpha(x) = D_\alpha V(x, \theta, \bar{\theta})|, \quad A_{\alpha\dot{\alpha}}(x) = \frac{1}{2}[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha]V(x, \theta, \bar{\theta})|, \dots \quad (1.29)$$

Não é difícil mostrar que $(Q_\alpha V(x, \theta, \bar{\theta}))| = (iD_\alpha V(x, \theta, \bar{\theta}))|$. Assim, utilizado este fato com a álgebra $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}$, podemos calcular as transformações de SUSY sobre os campos componentes:

$$\delta C(x) = i(\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}})V| = -(\varepsilon^\alpha D_\alpha + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}})V| = -(\varepsilon^\alpha \chi_\alpha + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}), \quad (1.30)$$

$$\delta \chi_\alpha(x) = \varepsilon_\alpha M - \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} (i\frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} C + A_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.31)$$

$$\delta M(x) = -\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + i\frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \chi^\alpha), \quad (1.32)$$

$$\delta A_{\alpha\dot{\alpha}}(x) = -\varepsilon^\beta (C_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + i\frac{1}{2}\partial_{\beta\dot{\alpha}} \chi_\alpha) + \bar{\varepsilon}^{\dot{\beta}} (C_{\dot{\beta}\alpha} \lambda_\alpha + i\frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}), \quad (1.33)$$

$$\delta \lambda_\alpha(x) = \varepsilon^\beta (C_{\beta\alpha} D' + i\frac{1}{2}\partial_{\beta\alpha} A_{\alpha\dot{\alpha}}) - i\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{M}, \quad (1.34)$$

$$\delta D'(x) = i\frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} (\varepsilon^\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \lambda_\alpha). \quad (1.35)$$

Note o efeito das transformações de SUSY sobre os campos componentes. Os campos bosônicos e fermiônicos não se transformam separadamente. É por isso que a SUSY é conhecida como a simetria que "mistura" férmions e bósons.

1.2.3 INTEGRAÇÃO NO SUPERESPAÇO

Na TQC a ação é um funcional dos campos e de suas derivadas, onde a integração é realizada utilizando as coordenadas de espaço-tempo $x^{\alpha\dot{\alpha}}$. A ação na TQC é invariante sob translações no espaço-tempo desde que os campos e suas derivadas sejam nulos no infinito e assim se possa desprezar termos de superfície. Estamos interessados em construir, de maneira análoga, uma ação que seja um funcional dos supercampos e de suas derivadas, para isso, devemos definir a integração por todas as coordenadas θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ no superespaço de tal forma que a ação seja invariante sob supertranslações [26].

Desejamos uma integração de tal forma que:

$$\begin{aligned} \int d(\theta + \alpha) f(\theta + \alpha) &= \int d\theta f(\theta) \Rightarrow \\ \int d\theta f(\theta + \alpha) &= \int d\theta f(\theta). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Visto que $d(\theta + \alpha) = d\theta$. Como $f(\theta) = A + B\theta$, podemos definir [26]:

$$\int d\theta \equiv 0, \quad \int d\theta \theta \equiv 1. \quad (1.37)$$

Afim de que haja invariância sob supertranslações:

$$\int d\theta f(\theta + \alpha) = \int d\theta (A + B\theta + B\alpha) = B = \int d\theta f(\theta). \quad (1.38)$$

Note que este tipo de integração é idêntica à diferenciação:

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) = B. \quad (1.39)$$

A definição acima leva ao cancelamento de termos de superfície na integração por partes devido à $\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = 0$:

$$\int d\theta f\left(\frac{\partial}{\partial \theta} g\right) = \pm \underbrace{\int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (fg)}_0 \mp \int d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f\right) g = \mp \int d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f\right) g. \quad (1.40)$$

O sinal de "-" para uma f bosônica e "+" para f fermiônica.

Tendo em vista a definição acima, podemos definir a integração por todas as coordenadas θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ como sendo:

$$\int d^4\theta \mathcal{L} \equiv \partial^2 \bar{\partial}^2 \mathcal{L}. \quad (1.41)$$

A definição acima é equivalente à definição (desprezando termos com divergência total) [17]:

$$\int d^4\theta \mathcal{L} \equiv D^2 \bar{D}^2 \mathcal{L}|. \quad (1.42)$$

Assim, podemos mostrar com o auxílio das identidades $\bar{D}^3 = D^3 = 0$ e $[\bar{D}^{\dot{\alpha}}, D^2] = i\partial^{\alpha\dot{\alpha}} D_\alpha$ que um funcional dos supercampos e suas derivadas é invariante sob supertranslações:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x d^4\theta \mathcal{L} = - \int d^4x (\epsilon^\alpha D_\alpha + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}) D^2 \bar{D}^2 \mathcal{L}| = \\ &= \int d^4x \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^2 \mathcal{L}| = \int d^4x \partial^{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{D}^2 \mathcal{L}|) = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Na próxima seção veremos que existem lagrangianas de interesse físico que satisfazem a restrição $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{L}_c = 0$ ou $D_\alpha \bar{\mathcal{L}}_c = 0$. Assim, se considerarmos a integração como definida acima para tais lagrangianas obteremos um resultado trivial (desprezando termos com divergência total):

$$\int d^4\theta \mathcal{L}_c = \int d^4\theta \bar{\mathcal{L}}_c = 0. \quad (1.44)$$

Para essas lagrangianas definimos a integração somente para parte das coordenadas θ , $\bar{\theta}$. Definimos [17]:

$$\int d^2\theta \mathcal{L}_c \equiv D^2 \mathcal{L}_c|, \quad \text{se } \bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{L}_c = 0, \quad (1.45)$$

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{L}}_c \equiv \bar{D}^2 \bar{\mathcal{L}}_c|, \quad \text{se } D_\alpha \bar{\mathcal{L}}_c = 0. \quad (1.46)$$

Não é difícil mostrar que essas novas integrações são invariantes sob supertranslações, basta seguir os mesmos passos que (1.43).

1.3 O SUPERCAMPO QUIRAL E O MODELO DE WESS-ZUMINO

Nesta seção vamos estudar um modelo de supercampo quiral, visto que no capítulo 3 tal modelo será útil no estudo da generalização com altas derivadas de teorias supersimétricas.

Um supercampo geral é altamente redutível, pelo fato que ele possui muitos campos componentes para descrever um número pequeno de partículas em cada múltiplo. Por exemplo, nesta seção vamos construir uma versão no superespaço do modelo supersimétrico mais simples: o modelo de Wess-Zumino, tal modelo trata da descrição de apenas duas partículas, uma de spin-0 e uma de spin-1/2, massivas. Devido a esse fato, devemos impor restrições aos supercampos de modo à reduzir o número excessivo de campos componentes [25]. Vamos então definir o supercampo quiral (ou supercampo quiral de mão-direita), que além de ser o mais simples, ele é muito útil para muitas aplicações. Tal supercampo é definido como [6]:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \quad (1.47)$$

Note que esta restrição é consistente, visto que ela é invariante sob transformações de SUSY.

Para resolver a restrição acima, basta notar que qualquer função $\Phi(x^{(+)}, \theta^{(+)})$ de $x^{(+)} = x + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}$ e $\theta^{(+)} = \theta$ satisfaz tal restrição pelo fato que [27]:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}x^{(+)} = 0, \quad (1.48)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^{(+)} = 0. \quad (1.49)$$

Vale apenas destacar que $\Phi^{(+)}(x^{(+)}, \theta^{(+)} = \theta)$ não é apenas uma solução particular de (1.47), mas é de fato a solução mais geral. Nota-se que depois da mudança de variáveis $x^{(+)} = x + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}$ e $\theta^{(+)} = \theta$, a restrição (1.47) toma a forma [27]:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(+)}\Phi^{(+)} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\Phi^{(+)} = 0. \quad (1.50)$$

Assim, a restrição diz que $\Phi^{(+)}$ não tem dependência de $\bar{\theta}$ nessas novas variáveis. A expansão em componentes de $\Phi^{(+)}(x^{(+)}, \theta)$ é dada por:

$$\Phi^{(+)}(x^{(+)}, \theta) = A(x^{(+)}) + \theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x^{(+)}) - \theta^2 F(x^{(+)}) . \quad (1.51)$$

A expansão acima é conhecida como representação quiral de Φ . Podemos obter a representação vetorial de Φ substituindo $x^{(+)} = x + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}$ em (1.51) e expandindo o resultado para obter [6]:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = A(x) + \theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) - \theta^2 F(x) + \frac{i}{2}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}A(x) + \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\psi^{\alpha}(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box A(x). \quad (1.52)$$

As transformações de SUSY dos campos componentes são dadas por:

$$\delta A = -\varepsilon^\alpha \psi_\alpha, \quad (1.53)$$

$$\delta \psi_\alpha = -\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} i \partial_{\alpha\dot{\alpha}} A + \varepsilon_\alpha F, \quad (1.54)$$

$$\delta F = -\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} i \partial_{\alpha\dot{\alpha}}^\alpha \psi_\alpha. \quad (1.55)$$

Podemos também definir o supercampo anti-quiral (ou supercampo quiral de mão-esquerda) $\bar{\Phi}$ como:

$$D_\alpha \bar{\Phi} = 0. \quad (1.56)$$

E seguindo os mesmos passos que foram dados para o supercampo quiral, obtemos sua expansão em campos componentes na representação anti-quiral e vetorial respectivamente:

$$\bar{\Phi}^{(-)}(x^{(-)}, \bar{\theta}) = \bar{A}(x^{(-)}) + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x^{(-)}) - \bar{\theta}^2 \bar{F}(x^{(-)}), \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \bar{A}(x) + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) - \bar{\theta}^2 \bar{F}(x) - \frac{i}{2} \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{A}(x) - \frac{i}{2} \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) + \\ &+ \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \square \bar{A}(x). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Como a lagrangiana é uma função de produtos e somas de (super)campos e suas derivadas, então devemos saber que tipo de supercampos obtemos com produtos e somas de supercampos quirais e anti-quirais. O produto e a soma de supercampos puramente (anti-)quirais é um supercampo (anti-)quiral. De fato [27]:

$$\bar{D}_\alpha (\Phi_i \Phi_j) = \bar{D}_\alpha (\Phi_i + \Phi_j) = 0, \quad (1.59)$$

$$D_\alpha (\bar{\Phi}_i \bar{\Phi}_j) = D_\alpha (\bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_j) = 0. \quad (1.60)$$

Vamos agora analisar qual é o resultado do produto e da soma de um supercampo quiral e um anti-quiral. Utilizando as expansões de Φ e $\bar{\Phi}$ na representação quiral e anti-quiral, temos [27]

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i \Phi_j &= \bar{A}_i A_j + \theta^\alpha \bar{A}_i \psi_{j\alpha} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} A_j - \theta^2 \bar{A}_i F_j - \bar{\theta}^2 \bar{F}_i A_j + \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} \psi_{j\alpha} - \theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} F_j - \\ &- \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \bar{F}_i \psi_{j\alpha} + \theta^2 \bar{\theta}^2 \bar{F}_i F_j. \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i + \Phi_j &= (\bar{A}_i + A_j) + \theta^\alpha \psi_{j\alpha} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} - \theta^2 F_j - \bar{\theta}^2 \bar{F}_i - \frac{i}{2} \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{A}_i + A_j) + \frac{i}{2} \theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \psi_j^\alpha - \\ &- \frac{i}{2} \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \square (\bar{A}_i + A_j). \end{aligned} \quad (1.62)$$

O resultado acima mostra que o produto e a soma de um supercampo quiral e um anti-quiral geram um supercampo escalar geral. Além disso, se impusermos $i = j$ o resultado é um supercampo escalar real (1.20) [27].

Agora estamos prontos para construir a ação correspondente ao multipletto quiral massivo utilizando análise dimensional. Da álgebra $\{Q, \bar{Q}\} = P$ deduzimos que $[Q] = [\bar{Q}] = 1/2$, assim

de (1.15) entendemos que $[\theta] = [\bar{\theta}] = -1/2$. Visto que a integração nas coordenadas θ e $\bar{\theta}$ é igual à diferenciação, então $[\int d^4\theta] = 2$ e $[\int d^2\theta] = [\int d^2\bar{\theta}] = 1$. Por sua vez, pelo fato de haver apenas um campo espinorial em (1.52) que tem dimensão $[\psi] = 3/2$ e queremos que este campo descreva o férmion massivo, segue que o supercampo quirial deve ter dimensão $[\Phi] = 1$ e os outros campos $[A] = 1$ e $[F] = 2$ (note que F é um campo escalar complexo que possui dimensão não-física). Finalmente, só há uma única escolha de termo quadrático sem nenhum parâmetro dimensional [6]:

$$S_{\text{cinético}} = \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi. \quad (1.63)$$

O termo acima corresponde ao termo cinético da ação. Logo, a ação mais geral renormalizável envolvendo somente supercampos quirais (e anti-quirais) é dada por [25]:

$$S = \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi + \left[\int d^4x d^2\theta \left(\frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{1}{3!} \lambda \Phi^3 \right) + h.c. \right] \quad (1.64)$$

Este modelo corresponde ao modelo de Wess-Zumino no superespaço.

Se integrarmos (1.64) em θ e utilizarmos as identidades $\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \Phi = i \partial^{\alpha}_{\dot{\alpha}} D_{\alpha} \Phi$ e $\bar{D}^2 D^2 \Phi = \square \Phi$ (válidas somente para supercampos quirais), obtemos depois de alguma álgebra a ação (1.64) em termos dos campos componentes:

$$S = \int d^4x [\bar{A} \square A + \bar{F} F + \bar{\psi}^{\alpha} i \partial^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \psi_{\alpha}] + \int d^4x \{ m[\psi^2 + AF] + \lambda[A\psi^2 + \frac{1}{2}FA^2] + h.c. \}. \quad (1.65)$$

Pode ser demonstrado que o termo cinético, de massa e de interação da ação acima é separadamente invariante sob transformações (1.53), (1.54) e (1.55).

1.4 PRÉ-POTENCIAL SUPER-YANG-MILLS

Depois de tudo que foi mostrado até o momento, nada mais natural do que nos perguntarmos como construir uma versão supersimétrica da teoria de Yang-Mills no superespaço, já que três das quatro interações fundamentais são descritas por tal teoria. Isso é o que pretendemos fazer a partir de agora. Além disso, queremos mostrar tal construção com o intuito de mais tarde discutirmos sua versão com altas derivadas.

A introdução de um campo de calibre em uma TQC pode ser efetivada utilizando um procedimento que consiste em utilizar uma ação que exhibe uma simetria global (parâmetro constante) e promover o parâmetro da transformação de uma constante para uma função das coordenadas do espaço-tempo (local). Vamos utilizar o mesmo procedimento no superespaço [24].

Vamos utilizar a parte cinética do multipletto quirial como ponto de partida. Tal ação (que já foi obtida anteriormente) é dada por:

$$\int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi. \quad (1.66)$$

A ação acima é invariante sob as transformações:

$$\Phi' = e^{i\lambda}\Phi, \quad \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}e^{-i\lambda}, \quad (1.67)$$

onde $\lambda = \lambda^A T_A$ é o parâmetro da transformação e $T_A = T_A^\dagger$ é o gerador do grupo $SU(N)^3$.

Queremos promover λ à um parâmetro local, mas devido ao fato que devemos preservar a quiralidade dos supercampos Φ e $\bar{\Phi}$, então λ deve ser promovido à supercampos quiral e anti-quiral, respectivamente. Assim, as transformações ficam [6]:

$$\Phi' = e^{i\Lambda}\Phi, \quad \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}e^{-i\bar{\Lambda}}, \quad \bar{D}_\alpha\Lambda = D_\alpha\bar{\Lambda} = 0, \quad (1.68)$$

onde $\Lambda = \Lambda^A T_A$ e $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}^A T_A$. É claro que (1.66) não é invariante sob as novas transformações, visto que $\Lambda \neq \bar{\Lambda}$. Para recuperar a invariância devemos introduzir um supercampo de calibre $V = V^A T_A$, tal supercampo de calibre é chamado de pré-potencial [17], de tal forma que

$$\int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} e^V \Phi \quad (1.69)$$

seja invariante sob a transformação de calibre [24]:

$$e^{V'} = e^{i\bar{\Lambda}} e^V e^{-i\Lambda}. \quad (1.70)$$

Antes de concluir esta seção é conveniente expressar (1.70) na forma infinitesimal. Para Λ infinitesimal, (1.70) implica depois de um certo trabalho algébrico [17]:

$$\delta V = -i \frac{L_V}{2} [(\Lambda + \bar{\Lambda}) + \coth\left(\frac{L_V}{2}\right)(\Lambda - \bar{\Lambda})], \quad (1.71)$$

onde $L_V X \equiv [V, X]$, sendo X uma matriz qualquer.

Nota-se que a transformação de calibre não-abeliana é altamente não-linear, visto que até mesmo sua forma infinitesimal é não-linear.

Podemos aproveitar esta transformação infinitesimal para verificar se ela é de fato a transformação de calibre que procuramos. Vamos considerar por simplicidade somente o caso abeliano. Assim, no caso abeliano (1.71) fica simplesmente,

$$\delta V = i(\bar{\Lambda} - \Lambda). \quad (1.72)$$

De (1.20) temos $A_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha]V$. Definindo $\Lambda| = \Lambda_1$ obtemos da última expressão:

$$\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}(\Lambda_1 + \bar{\Lambda}_1). \quad (1.73)$$

Que é justamente a transformação de calibre para a eletrodinâmica. Logo, (1.70) reproduz no nível de componentes as transformações de calibre usuais [6].

³Estamos deixando subentendido os índices das transformações.

1.5 A AÇÃO DE YANG-MILLS SUPERSIMÉTRICO

Na seção anterior introduzimos um supercampo de calibre V , tal supercampo possui um campo componente $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ que é um campo de calibre. O supercampo V foi introduzido de tal forma que o termo cinético da ação do supercampo quiral fosse invariante sob transformações (1.70), mas em (1.69) o supercampo V não possui dinâmica. Nesta seção estamos interessados em construir uma ação invariante sob (1.70) para o supercampo V de tal forma que este supercampo possua dinâmica. Depois disso verificaremos se tal ação corresponde à ação de Yang-Mills supersimétrico.

O primeiro passo para construir a ação desejada é encontrar um supercampo covariante dado em termos do supercampo de calibre irrestrito V que transforma-se covariantemente sob (1.70). Este procedimento é análogo ao caso da teoria de Yang-Mills ordinária, em tal teoria o campo $F_{\mu\nu}$ é covariante sob transformações de calibre e é dado em termos de A_μ , que é um campo irrestrito. A ação é escrita em termos de $F_{\mu\nu}$ [23].

Existe uma maneira sistemática de obtenção do supercampo covariante que é válida para qualquer teoria de calibre supersimétrica e também para a supergravidade. Tal método é um método geométrico que consiste em: Primeiro, postular derivadas que se transformam covariantemente sob um grupo de calibre. Segundo, definir a partir delas supercampos tensoriais de curvatura F_{AB} (que em inglês são conhecidos como *field strengths*). Terceiro, impor restrições covariantes sobre os F_{AB} 's. Por último, encontramos soluções para tais restrições que expressam os F_{AB} 's em termos de um único supercampo W_α (no caso de super-Yang-Mills). Não iremos discutir este método aqui, só vamos exibir o resultado. O supercampo covariante sob (1.70) W_α que é uma função do supercampo de calibre V é dado por [6, 24]:

$$W_\alpha = i\bar{D}^2(e^{-V}D_\alpha e^V). \quad (1.74)$$

Não é difícil mostrar que ele é covariante:

$$\begin{aligned} W_\alpha &\rightarrow e^{i\Lambda}W_\alpha e^{-i\Lambda} + ie^{i\Lambda}\bar{D}^2 D_\alpha e^{-i\Lambda} = e^{i\Lambda}W_\alpha e^{-i\Lambda} + \underbrace{\frac{i}{2}e^{i\Lambda}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\}}_0 e^{-i\Lambda} \\ W_\alpha &\rightarrow e^{i\Lambda}W_\alpha e^{-i\Lambda}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Além disso, (1.74) é um supercampo espinorial quiral $\bar{D}_{\dot{\alpha}}W_\alpha = 0$.

Agora, estamos em posição de construir a ação de super-Yang-Mills. A expansão em componentes de V é dada por (1.20), visto que queremos que $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ seja o campo de calibre da nossa teoria, então $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ deve ter dimensão 1, segue então que V deve ser adimensional, a partir disto e de (1.74), podemos afirmar que W_α tem dimensão 3/2. Logo, a ação (adimensional) que procuramos é dada por [6]:

$$S = \int d^4x d^2\theta \text{tr}(W^2). \quad (1.76)$$

Se levarmos em conta a interação com o supercampo quiral, a ação total invariante de calibre interagindo com somente um supercampo quiral é dada por (confira (1.69)):

$$S_{YM} = \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} e^V \Phi + \int d^4x d^2\theta \text{tr}(W^2). \quad (1.77)$$

Se quiséssemos considerar férmions massivos teríamos que incluir mais um supercampo (anti)quiral para que a invariância de calibre fosse preservada, mas para a proposta deste trabalho (1.77) é suficiente [22].

Para ter certeza se a ação (1.76) é a ação que procuramos, devemos analisar os campos componentes de W_α e integrar por todas as coordenadas de Grassmann. Para isso, devemos calcular (1.74) utilizando (1.20). Visto que o multiplete de super-Yang-Mills é composto por um bóson de spin-1 e um férmion de spin-1/2, em (1.20) há um número excessivo de campos componentes, então vamos fixar um calibre para eliminar os campos C , χ_α e M para que reste apenas os campos físicos $A_{\alpha\dot{\alpha}}$, λ_α e um auxiliar D' em (1.20). Além disso, fixar o calibre será conveniente porque irá facilitar nossos cálculos. O calibre no qual $C = \chi_\alpha = M = 0$ é conhecido como calibre de Wess-Zumino [25].

O supercampo $V(x, \theta, \bar{\theta})$ no calibre de Wess-Zumino é dado por:

$$V_{WZ} = \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}} + i\bar{\theta}^2 \theta^\alpha \lambda_\alpha - i\theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \theta^2 \bar{\theta}^2 D'. \quad (1.78)$$

Neste calibre, potências de ordem maior ou igual à três de V são nulas [25]:

$$V_{WZ}^3 = 0. \quad (1.79)$$

Isto simplifica muito o cálculo das componentes de W_α . Neste calibre (1.74) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= i\bar{D}^2 (e^{-V} D_\alpha e^V) = i\bar{D}^2 (D_\alpha V - \frac{1}{2}[V, D_\alpha V] + \dots) \Rightarrow \\ W_\alpha &= i\bar{D}^2 D_\alpha V_{WZ} - \frac{i}{2}\bar{D}^2 [V_{WZ}, D_\alpha V_{WZ}]. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Podemos simplificar mais ainda nossa tarefa de calcular as componentes de W_α . Vamos utilizar as novas variáveis como já foi feito na seção 1.3:

$$y^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad \theta'^\alpha = \theta^\alpha, \quad \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \quad (1.81)$$

Com essas novas variáveis, as derivadas covariantes ficam:

$$D_\alpha^{(+)} = \partial_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\dot{\alpha}}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(+)} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}. \quad (1.82)$$

E (1.78) fica:

$$V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) = \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}}(y) + i\bar{\theta}^2 \theta^\alpha \lambda_\alpha(y) - i\theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y) + \theta^2 \bar{\theta}^2 (D'(y) + \frac{i}{2}\partial^{\alpha\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}}(y)). \quad (1.83)$$

Assim, podemos utilizar as duas últimas expressões para obter depois de um longo trabalho algébrico:

$$i\bar{D}^{2(+)}D_{\alpha}^{(+)}V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) = \lambda_{\alpha} + \theta^{\beta}(-iC_{\beta\alpha}D' + \frac{1}{2}\partial_{(\alpha\dot{\alpha}}A_{\beta)}^{\dot{\alpha}}) - i\theta^2\partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad (1.84)$$

$$-\frac{i}{2}\bar{D}^{2(+)}[V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}), D_{\alpha}^{(+)}V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta})] = -\frac{i}{2}\theta^{\beta}[A_{\alpha\dot{\alpha}}, A_{\beta}^{\dot{\alpha}}] + \theta^2[A_{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]. \quad (1.85)$$

E assim, a expansão em campos componentes de W_{α} é dada por:

$$W_{\alpha} = \lambda_{\alpha} + \theta^{\beta}(-iC_{\beta\alpha}D' + f_{\alpha\beta}) - i\theta^2\nabla_{\alpha}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad (1.86)$$

onde

$$f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_{(\alpha\dot{\alpha}}A_{\beta)}^{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}[A_{\alpha\dot{\alpha}}, A_{\beta}^{\dot{\alpha}}], \quad (1.87)$$

$$\nabla_{\alpha}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - i[A_{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}]. \quad (1.88)$$

O bispinor $f_{\alpha\beta}$ está relacionado ao usual tensor anti-simétrico de Yang-Mills $f_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}}$ pela relação [23]:

$$f_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}f_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}\bar{f}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \quad (1.89)$$

De (1.86) podemos extrair os projetores de W_{α} . Temos,

$$W_{\alpha}| = \lambda_{\alpha}, \quad (1.90)$$

$$D_{\beta}W_{\alpha}| = iC_{\alpha\beta}D' + f_{\beta\alpha}, \quad (1.91)$$

$$D^2W_{\alpha}| = i\nabla_{\alpha}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}. \quad (1.92)$$

Com estes projetores, podemos integrar (1.76) para obter a extensão supersimétrica da teoria de Yang-Mills em termo de campos componentes. Integrando,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x d^2\theta \text{tr}(W^2) = \frac{1}{2} \int d^4x \text{tr}(2W^{\alpha}D^2W_{\alpha}| - D^{\beta}W^{\alpha}D_{\beta}W_{\alpha}|) \Rightarrow \\ S &= \frac{1}{2} \int d^4x \text{tr}[2i\lambda^{\alpha}\nabla_{\alpha}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - (iC^{\alpha\beta}D' + f^{\beta\alpha})(iC_{\alpha\beta}D' + f_{\beta\alpha})] \Rightarrow \\ S &= \int d^4x \text{tr}[-\frac{1}{2}f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} - i\lambda^{\alpha}\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D'^2]. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Utilizando as identidades abaixo [21],

$$\frac{1}{2}\text{tr}(f^{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}}f_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}}) = \text{tr}(f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}) + \text{tr}(\bar{f}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{f}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}), \quad (1.94)$$

$$\int d^4x \text{tr}(f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}) = \int d^4x \text{tr}(\bar{f}^{\alpha\beta}\bar{f}_{\alpha\beta}). \quad (1.95)$$

Obtemos o resultado final que é dado por [6]:

$$S = \int d^4x \text{tr}[-\frac{1}{8}f^{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}}f_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} - i\lambda^{\alpha}\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D'^2], \quad (1.96)$$

onde

$$\nabla_{\alpha\dot{\alpha}} = \partial_{\alpha\dot{\alpha}} - i[A_{\alpha\dot{\alpha}}, \] \quad (1.97)$$

é a derivada covariante ordinária.

A partir do resultado acima, notamos que a ação (1.76) corresponde à ação de super-Yang-Mills. Notamos também que o primeiro termo reproduz a ação de Yang-Mills ordinária (o fator $-\frac{1}{8}$ é consequência das convenções adotadas aqui). O campo fermiônico λ_α é o campo associado ao *gaugino*, que é o par supersimétrico da partícula de *gauge*. O campo D' é um campo auxiliar.

Teoria Quântica de Supercampos

2.1 INTRODUÇÃO ÀS REGRAS DE FEYNMAN

No capítulo anterior vimos que a teoria de supercampos é uma formulação bastante útil para a construção de modelos que exibem a SUSY manifesta e em uma forma compacta. Ademais, vimos que os campos físicos estão contidos nos supercampos escalares $\Phi(\bar{\Phi})$ e V , com isso, trabalhamos com menos índices e assim facilitamos o cálculo tensorial. Supercampos exibem a SUSY manifesta, compactação das expressões e menos índices não somente em cálculos clássicos, mas também em cada etapa dos cálculos quânticos. Neste capítulo estamos interessados em estudar, muito brevemente, os aspectos quânticos da teoria de supercampos por meio de métodos funcionais, com o objetivo principal de introduzir as regras de Feynman para supercampos que levam à noção de superdiagramas (ou supergráficos) de Feynman, tais superdiagramas serão a principal ferramenta de cálculo que utilizaremos no próximo capítulo dedicado ao estudo de teorias de calibre supersimétricas com altas derivadas [17, 21].

As regras de Feynman para supercampos foram primeiramente introduzidas para o modelo de Wess-Zumino por Salam e Strathdee em 1975 e no mesmo ano para a teoria de Yang-Mills por Ferrara e Piguet, quatro anos depois (1979) Grisaru *et al.* aprimoraram tais regras [28, 29, 30]. A grande vantagem das regras de Feynman para supercampos é que com elas desenhamos superdiagramas, um superdiagrama é equivalente aos diagramas de Feynman de todos os campos componentes contidos no supercampo, isto faz com que o número de diagramas que devemos calcular seja reduzido. Além disso, quando se utiliza a TQC ordinária é preciso fazer cálculos para mostrar que há cancelamentos das divergências que surgem dos *loops* dos campos componentes bosônicos e fermiônicos, enquanto que os superdiagramas incorporam esse cancelamento automaticamente. Apesar de não tratarmos deste tema aqui, vale apenas destacar que cálculos quânticos utilizando as regras de Feynman para supercampos fornecem regras de contagem de potências que são úteis para fazer a predição de comportamento finito em modelos supersimétricos (modelos que não precisam ser renormalizados) [6, 23].

Vamos utilizar a notação da referência [6], ou seja, vamos trabalhar utilizando a rotação de Wick: a assinatura da métrica fica $(-+++)$ \rightarrow $(++++)$, $d^4x \rightarrow id^4x$, $e^{-iS} \rightarrow e^S$, etc. A constante de acoplamento g é dada por $\sqrt{2}$ vezes a constante g usual.

2.2 DERIVADA (SUPER)FUNCIONAL

Visto que vamos estudar a quantização por meio de métodos funcionais, então devemos antes disso definir a diferenciação de um funcional de supercampos no superespaço. Para isso, vamos primeiramente definir a função delta no superespaço de tal forma que ela satisfaça a relação usual:

$$\int d\theta f(\theta') \delta(\theta - \theta') = f(\theta). \quad (2.1)$$

Então, podemos definir [22]:

$$\delta(\theta - \theta') \equiv \theta - \theta'. \quad (2.2)$$

Assim, levando em conta todas as coordenadas de Grassmann, temos:

$$\delta^4(\theta - \theta') \equiv (\theta - \theta')^2 (\bar{\theta} - \bar{\theta}')^2. \quad (2.3)$$

Logo, definindo $\delta^8(z - z') \equiv \delta^4(x - x') \delta^4(\theta - \theta')$, temos:

$$\int d^8 z f(z') \delta^8(z - z') = f(z). \quad (2.4)$$

Agora, podemos definir a diferenciação de um funcional de um supercampo irrestrito [6]:

$$\frac{\delta F[V(z)]}{\delta V(z')} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[V(z) + \varepsilon \delta^8(z - z')] - F[V(z)]}{\varepsilon}. \quad (2.5)$$

Note que esta definição é completamente análoga à definição de diferenciação de um funcional de um campo ordinário.

No caso do supercampo quiral devemos definir de forma diferente a diferenciação funcional, devido ao fato que o supercampo quiral possui uma restrição diferencial: $\bar{D}_\alpha \Phi = 0$. Logo, vamos definir neste caso [6]:

$$\frac{\delta F[\Phi(z)]}{\delta \Phi(z')} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\Phi(z) + \varepsilon \bar{D}^2 \delta^8(z - z')] - F[\Phi(z)]}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Destas definições seguem os resultados usuais, como por exemplo:

$$\frac{\delta}{\delta V(z)} \int d^8 z' f(z') V(z') = f(z), \quad (2.7)$$

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(z)} \int d^6 z' \phi(z') \Phi(z') = \int d^6 z' \phi(z') \bar{D}^2 \delta^8(z - z') = \phi(z). \quad (2.8)$$

Antes de concluir esta seção, vamos exibir algumas identidades úteis entre as derivadas covariantes e as funções delta [22]:

$$\delta_{12} \bar{D}^2 D^2 \delta_{12} = \delta_{12}, \quad (2.9)$$

$$\delta_{12} D^2 \bar{D}^2 \delta_{12} = \delta_{12}, \quad (2.10)$$

$$\delta_{12} \frac{1}{2} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \delta_{12} = \delta_{12}, \quad (2.11)$$

onde $\delta_{12} \equiv \delta^4(\theta_1 - \theta_2)$. Se houver um número menor que quatro D 's entre os deltas, então o resultado será nulo, mas se acaso houver mais que quatro, podemos utilizar a álgebra dos D 's para reduzir a um número menor ou igual à quatro.

2.3 FORMALISMO GERAL

Vamos agora definir algumas grandezas fundamentais no estudo dos aspectos quânticos da teoria de supercampos, o principal motivo é que a partir delas podemos derivar a regras de Feynman. Dada uma ação $S(\Psi)$ como sendo um funcional do supercampo Ψ , definimos o funcional gerador das funções de Green de n -pontos, ou amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa J do supercampo Ψ , como sendo dada por [22]:

$$Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J \equiv \int \mathcal{D}\Psi \exp [S(\Psi) + \int d^8z J\Psi], \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{D}\Psi = \prod_i \mathcal{D}\Psi^i$, sendo Ψ^i os campos componentes de Ψ . Note que a definição acima é completamente análoga à definição do funcional gerador encontrada na TQC. Além disso, é importante frisar que a fonte J deve possuir as mesmas características que o supercampo Ψ , por exemplo, se Ψ é quiral J também será e por sua vez o elemento de volume será alterado na definição acima de $d^4\theta$ para $d^2\theta$ [6].

A partir de (2.12) obtemos as funções de Green de n -pontos [31]:

$$G(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(z_1) \delta J(z_2) \dots \delta J(z_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.13)$$

Após a definição (2.12), o que nos resta é calcular a integral funcional, para isso, vamos escrever a ação em uma forma conveniente:

$$S = \int d^8z \left[\frac{1}{2} \Psi \widehat{O} \Psi + \mathcal{L}_{int}(\Psi) \right], \quad (2.14)$$

onde \widehat{O} é um operador diferencial. Isso nos permite reescrever (2.12) como:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[\int d^8z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] \int \mathcal{D}\Psi \exp \int d^8z \left[\frac{1}{2} \Psi \widehat{O} \Psi + J\Psi \right], \\ &= \exp \left[\int d^8z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] Z_0[J]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Integrais funcionais como $Z_0[J]$ são em geral Gaussianas e possuem a forma geral:

$$I[y] = \int dx \exp \left\{ \frac{1}{2} x^T \widehat{O} x + x^T y \right\}, \quad (2.16)$$

cuja a solução é dada por [22]:

$$I[y] = \text{const.} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^T \widehat{O}^{-1} y \right\}. \quad (2.17)$$

A generalização para mais de um supercampo é direta.

A partir da definição (2.12), podemos definir o funcional gerador das funções de Green conexas como sendo:

$$W[J] \equiv \ln Z[J]. \quad (2.18)$$

O supercampo médio Ψ_c é definido como:

$$\Psi_c[J] \equiv \frac{\langle 0|\Psi|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle_J} = \frac{\delta W}{\delta J}. \quad (2.19)$$

A ação efetiva, ou o funcional gerador de vértices próprios, é definida como a transformada de Legendre funcional de $W[J]$ [32]:

$$\Gamma[\Psi_c] = W[J] - \int d^8z J \Psi_c. \quad (2.20)$$

A ação efetiva pode ser expandida em séries de potência em \hbar (expansão em laços) [32]:

$$\Gamma[\Psi_c] = S[\Psi_c] + \frac{\hbar}{2} \text{sTr} \left(\frac{\delta^2 S[\Psi_c]}{\delta \Psi_c(z_1) \delta \Psi_c(z_2)} \right) + O(\hbar^2), \quad (2.21)$$

onde sTr é o supertraço que está definido, por exemplo, nas referências [6, 21].

Com estas ferramentas vamos derivar as regras de Feynman para a expansão perturbativa da ação efetiva na próxima seção.

2.4 REGRAS DE FEYNMAN PARA SUPERCAMPOS

Vamos derivar as regras de Feynman para a ação efetiva do modelo de Wess-Zumino e para a teoria de calibre $U(1)$ supersimétrica acoplada à matéria não-massiva¹, a última é um caso particular da teoria de calibre $SU(N)$ supersimétrica que obtivemos no final da seção 1.5. As partes quadráticas dos modelos com fontes quirais, anti-quirais e escalares são dadas por [6]:

$$S_{\text{WZ}} = \int d^8z \bar{\Phi} \Phi - \frac{1}{2} \int d^6z m \Phi^2 - \frac{1}{2} \int d^6\bar{z} m \bar{\Phi}^2 + \int d^6z j \Phi + \int d^6\bar{z} \bar{j} \bar{\Phi}, \quad (2.22)$$

$$S_{\text{abeliano}} = \frac{1}{2g^2} \int d^8z V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V + \int d^8z J V. \quad (2.23)$$

Antes de começarmos o cálculo dos funcionais geradores que vamos utilizar para a derivação dos propagadores, temos que introduzir em (2.23) um termo para fixar o calibre. Devemos proceder desta forma porque, assim como a QED ordinária, a integral funcional para a ação

¹Vamos considerar somente o caso abeliano porque os cálculos do próximo capítulo só vão envolver este tipo de teoria.

(2.23) é invariante de calibre, segue deste fato que a invariância de calibre faz com que a integração seja redundante, essa redundância faz com que a integração exceda a contagem de configurações de supercampo, ocorrendo assim a divergência do funcional. Para evitar tal divergência, adicionaremos em (2.23) o termo de fixação de calibre [22]:

$$S_{\text{GF}} = -\frac{1}{\alpha g^2} \int d^8z (D^2 V)(\bar{D}^2 V). \quad (2.24)$$

A partir das expressões (2.22), (2.23) e (2.24) podemos obter os funcionais geradores das teorias desejadas por meio de (2.12) e (2.17). Assim, depois de certo trabalho algébrico obtemos²:

$$Z_{\text{WZ}}[j, \bar{j}] = \exp \left\{ \int d^8z \left[-\bar{j} \frac{1}{\square - m^2} j - \frac{1}{2} j \frac{m D^2}{\square(\square - m^2)} j - \frac{1}{2} \bar{j} \frac{m \bar{D}^2}{\square(\square - m^2)} \bar{j} \right] \right\}, \quad (2.25)$$

$$Z_{\text{abeliano}}[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^8z J \frac{1}{\square} \left[-\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{\square} + \alpha \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{\square} \right] J \right\}. \quad (2.26)$$

A partir destes resultados podemos obter os propagadores da teoria de Wess-Zumino por meio de (2.13) e de $\frac{\delta j(x, \theta)}{\delta j(x', \theta')} = \bar{D}^2 \delta^4(x - x') \delta^4(\theta - \theta')$ (confira (2.6)), então [22]:

$$\langle \bar{\Phi}(z_1) \Phi(z_2) \rangle \equiv \langle 0 | T \{ \bar{\Phi}(z_1) \Phi(z_2) \} | 0 \rangle = -\frac{D^2 \bar{D}^2 \delta^8(z_1 - z_2)}{\square - m^2}, \quad (2.27)$$

$$\langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \rangle \equiv \langle 0 | T \{ \Phi(z_1) \Phi(z_2) \} | 0 \rangle = -\frac{m \bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 \delta^8(z_1 - z_2)}{\square(\square - m^2)}, \quad (2.28)$$

$$\langle \bar{\Phi}(z_1) \bar{\Phi}(z_2) \rangle \equiv \langle 0 | T \{ \bar{\Phi}(z_1) \bar{\Phi}(z_2) \} | 0 \rangle = -\frac{m D^2 \bar{D}^2 D^2 \delta^8(z_1 - z_2)}{\square(\square - m^2)}. \quad (2.29)$$

Já no caso da QED supersimétrica, sabemos que $\frac{\delta J(z)}{\delta J(z')} = \delta^8(z - z')$ (confira (2.5)), então [22]:

$$\langle V(z_1) V(z_2) \rangle \equiv \langle 0 | T \{ V(z_1) V(z_2) \} | 0 \rangle = \frac{1}{\square} \left[-\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{\square} + \alpha \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{\square} \right] \delta^8(z_1 - z_2). \quad (2.30)$$

Nota-se que os propagadores carregam derivadas covariantes. Notamos também que quando $\alpha = 1$ ("calibre de Fermi-Feynman") obtemos um propagador análogo ao propagador da TQC ordinária, isto segue da identidade $(-D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha + \{D^2, \bar{D}^2\})/\square = 1$.

A partir dos resultados acima podemos derivar as regras de Feynman para obter a ação efetiva das duas teorias, mas vamos derivar primeiramente para a teoria de Wess-Zumino.

Os termos de interação do modelo de Wess-Zumino são dados por:

$$S_I = \frac{\lambda}{3!} \int d^6z \Phi^3 + \frac{\lambda}{3!} \int d^6\bar{z} \bar{\Phi}^3. \quad (2.31)$$

Os vértices podem ser lidos diretamente a partir dos termos de interação, para cada vértice quiral associamos um fator $\lambda \int d^6z$ e para um antiquiral $\lambda \int d^6\bar{z}$, cada linha interna no diagrama

²Os detalhes deste cálculo podem ser encontrados nas referências: [6, 17, 22, 21, 26, 23, 32].

conectará dois vértices por meio dos propagadores obtidos acima. Entretanto, essas regras não são as mais convenientes devido ao fato que a medida de integração do vértice quirais é diferente do anti-quirais, pode ser provado que laços envolvendo somente vértices quirais ou anti-quirais geram contribuição nula para a ação efetiva, isso significa que os superdiagramas relevantes para a ação efetiva envolvem tanto vértices quirais quanto anti-quirais, segue disso que algumas dificuldades surgem quando tratamos de superdiagramas contendo estes dois tipos de vértices [21].

Podemos reformular as regras de Feynman para que as medidas de integração dos vértices quirais e anti-quirais sejam iguais, para isso utilizamos um $\bar{D}^2(D^2)$ para converter a medida de integração de $d^6z(d^6\bar{z})$ para d^8z , isto significa que podemos descartar algumas derivadas covariantes dos propagadores (2.27), (2.28) e (2.29). Logo, as novas regras de Feynman para a obtenção da ação efetiva do modelo de Wess-Zumino são dadas por [6, 22]:

1. Propagadores (espaço dos momenta):

$$\langle \bar{\Phi}(1)\Phi(2) \rangle = \frac{1}{p^2 + m^2} \delta_{12}, \quad (2.32)$$

$$\langle \Phi(1)\Phi(2) \rangle = -\frac{mD^2}{p^2(p^2 + m^2)} \delta_{12}, \quad (2.33)$$

$$\langle \bar{\Phi}(1)\bar{\Phi}(2) \rangle = -\frac{m\bar{D}^2}{p^2(p^2 + m^2)} \delta_{12}. \quad (2.34)$$

2. Vértices: Há um fator λ para cada vértice (anti)quirais e cada linha deixando o vértice há um fator $(D^2)\bar{D}^2$ atuando no respectivo propagador, sendo que omitimos um dos fatores $(D^2)\bar{D}^2$ atuando em um dos propagadores. Além disso, não há fatores $(D^2)\bar{D}^2$ atuando em linhas externas do superdiagrama.

3. Há um fator

- $\int d^4p(2\pi)^{-4}$ para cada laço.
- $[\prod_i \int d^4k_i(2\pi)^{-4}\Psi_c(k_i)](2\pi)^4\delta(\sum_i k_i)$ para cada linha externa com momentum k_i deixando o vértice. Onde Ψ_c representa o supercampo médio na ação efetiva.
- $\int d^4\theta$ para cada vértice.

4. Fatores de simetria usuais.

As regras de Feynman para a teoria de calibre abeliana são as mesmas utilizadas para o modelo de Wess-Zumino com a adição do propagador do supercampo escalar:

$$\langle V(1)V(2) \rangle = -\frac{1}{p^2} \left[\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{p^2} - \alpha \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{p^2} \right] \delta_{12}. \quad (2.35)$$

Os vértices que vamos considerar neste trabalho são:

$$\int d^8z (\bar{\Phi} e^{gV} \Phi - \bar{\Phi} \Phi). \quad (2.36)$$

O vértice é interpretado como no modelo de Wess-Zumino: cada linha (anti)quiral deixando o vértice há um fator $(D^2)\bar{D}^2$ atuando no respectivo propagador, a diferença é que não omitimos nenhum $(D^2)\bar{D}^2$ porque a integral acima já esta sendo calculada por todo o superspaço (d^8z) [6].

A partir das regras acima, podemos ser levados a pensar que a ação efetiva é um funcional não-local nas coordenadas de Grassmann porque associamos uma integração $\int d^4\theta$ em cada vértice, mas este pensamento é equivocado de acordo com o teorema de não-renormalização que enunciaremos sem prova [6, 22, 21].

Teorema 1. (Teorema de Não-Renormalização) *Qualquer contribuição quântica para a ação efetiva deve ser expressa como uma única integral $\int d^4\theta$ no superspaço.*

O teorema acima significa que a estrutura geral da ação efetiva é dada por:

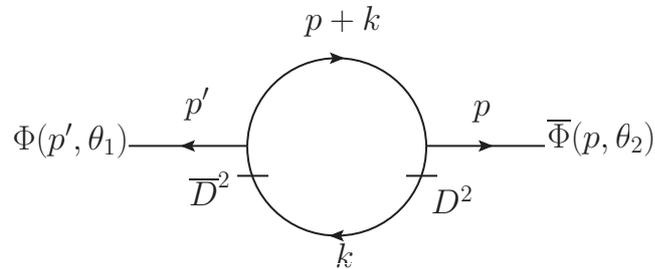
$$\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}, V] = \sum_n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int d^4\theta \mathcal{T}(x_1, \dots, x_n) F_1(x_1, \theta) \dots F_n(x_n, \theta), \quad (2.37)$$

onde

$$F_i = F_i(\Phi, \bar{\Phi}, V, D_A \Phi, D_A \bar{\Phi}, D_A V, \dots). \quad (2.38)$$

Deste teorema vemos que correções radiativas contribuem para a ação efetiva com uma integração do tipo $d^4\theta$, isto implica que no modelo de Wess-Zumino a massa e a constante de acoplamento não recebem modificações devido à correções radiativas visto que na ação clássica os termos de massa e de interação são integrados em $d^2\theta$ [21].

Vamos utilizar as regras de Feynman que obtivemos nesta seção para o cálculo de um superdiagrama de Feynman. Vamos calcular um superdiagrama de um laço no modelo de Wess-Zumino. O superdiagrama que vamos considerar é dado por:



A contribuição deste superdiagrama para a ação efetiva é dada por:

$$I_1 = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p' d^4p d^4k}{(2\pi)^8 (2\pi)^4} d^4\theta_1 d^4\theta_2 (2\pi)^4 \delta(p' + p) \Phi(p', \theta_1) \bar{\Phi}(p, \theta_2) \times \left[\frac{\delta_{21}}{[(p+k)^2 + m^2]} \right] \left[\frac{\overleftarrow{D}_1^2 \delta_{12} \overleftarrow{D}_2^2}{k^2 + m^2} \right], \quad (2.39)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ é um fator de simetria. Uma identidade que é bastante utilizada em cálculos com superdiagramas é a "regra de transferência" [6, 21]:

$$D_1^2(p)\delta_{12} = D_2^2(-p)\delta_{12} = \delta_{12}\overleftarrow{D}_2^2(-p). \quad (2.40)$$

Esta identidade pode ser utilizada diretamente nos superdiagramas como é mostrado abaixo:

$$\begin{array}{c} D_1^2(p) \\ \text{---} \xrightarrow{\quad} \text{---} \\ \theta_1 \quad p \quad \theta_2 \end{array} = \begin{array}{c} D_2^2(-p) \\ \text{---} \xrightarrow{\quad} \text{---} \\ \theta_1 \quad p \quad \theta_2 \end{array}$$

Assim, utilizando a regra de transferência e a identidade (2.9) podemos simplificar a contribuição acima para [32]:

$$I_1 = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \int d^4\theta \Phi(-p, \theta) \overline{\Phi}(p, \theta). \quad (2.41)$$

Integrando em θ , obtemos:

$$I_1 = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \times [\overline{F}(p)F(-p) - ip^\alpha_{\dot{\alpha}} \overline{\Psi}^{\dot{\alpha}}(p)\Psi_\alpha(-p) - p^2 \overline{A}(p)A(-p)], \quad (2.42)$$

que é o resultado expresso em termos dos campos componentes de Φ e $\overline{\Phi}$.

2.5 POTENCIAL EFETIVO DE SUPERCAMPO

Na TQC a ação efetiva é calculada por meio da expansão em laços (confira (2.21)), mas mesmo que utilizemos este método perturbativo o cálculo da correção de um laço, por exemplo, é uma tarefa bastante complexa. Um método aproximativo que se pode utilizar para contornar o problema é expandir a ação efetiva em séries de potência de derivadas do campo médio e considerar que o campo médio seja constante. O termo de mais baixa ordem da expansão citada é o potencial efetivo³ que é um objeto importante para o estudo da quebra-espontânea de simetria e estabilidade de vácuo [33]. Nesta seção vamos definir o potencial efetivo de supercampo pelo fato que ele será nosso objeto de estudo no próximo capítulo.

No caso da teoria de supercampos também é conveniente utilizar um método aproximativo e definir um potencial efetivo, para isso vamos expandir a ação efetiva em termos das derivadas

³ $\Gamma[\phi] = \int d^4x [-V_{eff}(\phi) + \frac{1}{2}Z(\phi)\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \dots]$

covariantes dos supercampos quirais e anti-quirais [21, 32]:

$$\begin{aligned} \Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] &= \int d^8z \mathcal{L}_{eff}(\Phi, D_A \Phi, D_A D_B \Phi, \dots, \bar{\Phi}, D_A \bar{\Phi}, D_A D_B \bar{\Phi}, \dots) + \\ &+ \left\{ \int d^6z \mathcal{L}_{eff}^{(c)}(\Phi, \partial_a \Phi, \partial_a \partial_b \Phi, \dots) + h.c. \right\}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde \mathcal{L}_{eff} é chamada lagrangiana efetiva geral, $\mathcal{L}_{eff}^{(c)}$ é chamada lagrangiana efetiva quiral e $\partial_a \equiv \partial_{\alpha\dot{\alpha}}$. Levando em conta a expansão acima é tentador pensarmos que a ação efetiva não recebe contribuições do segundo termo devido ao teorema de não-renormalização, mas este pensamento é equivocado. O tipo de contribuição para a ação efetiva que compõe $\mathcal{L}_{eff}^{(c)}$ é dada por [21, 32]:

$$\int d^8z \frac{D^2}{\square} G = \int d^6z G, \quad (2.44)$$

onde G é uma função de supercampos quirais não-constantes. Deste modo não há nenhuma contradição entre (2.43) e o teorema de não-renormalização.

Poderíamos analogamente à TQC utilizar (2.43) para definir o potencial efetivo de supercampo supondo os supercampos quiral e anti-quiral constantes, mas devido ao fato que a integração realizada por todas as coordenadas de Grassmann é igual à diferenciação o resultado seria nulo. Logo, devemos preservar a dependência em θ e $\bar{\theta}$ nos supercampos para que a anulação não ocorra. A condição adequada para o nosso problema é [32]:

$$\partial_a \Phi = \partial_a \bar{\Phi} = 0. \quad (2.45)$$

Note que a condição (2.45) é uma condição vantajosa por dois motivos: Primeiro, ela é invariante sob transformações de SUSY visto que ∂_a comuta com todos os geradores de SUSY. Segundo, no nível de campos componentes os campos escalares pertencentes à $\Phi(\bar{\Phi})$ são constantes no espaço-tempo, o que concorda com a definição da TQC. Assim, podemos definir o potencial efetivo de supercampo como sendo [32]:

$$-\mathcal{V}_{eff} = \left\{ \int d^4\theta \mathcal{L}_{eff} + \left(\int d^2\theta \mathcal{L}_{eff}^{(c)} + h.c. \right) \right\} \Big|_{\partial_a \Phi = \partial_a \bar{\Phi} = 0}. \quad (2.46)$$

O potencial efetivo geral $\mathcal{L}_{eff}|_{\partial_a \Phi = \partial_a \bar{\Phi} = 0}$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_{eff}|_{\partial_a \Phi = \partial_a \bar{\Phi} = 0} = K(\Phi, \bar{\Phi}) + F(D_\alpha \Phi, \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\Phi}, D^2 \Phi, \bar{D}^2 \bar{\Phi}; \Phi, \bar{\Phi}) \quad (2.47)$$

Com $F|_{D_\alpha \Phi = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\Phi} = D^2 \Phi = \bar{D}^2 \bar{\Phi} = 0} = 0$. O potencial K é chamado potencial efetivo kähleriano e F é o potencial efetivo de campo auxiliar, sendo que F é no mínimo de terceira ordem nos campos componentes auxiliares de Φ e $\bar{\Phi}$ [32]. Podemos expandir esses potenciais em laços:

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = K_0(\Phi, \bar{\Phi}) + \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L K_L(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.48)$$

$$F = \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L F_L, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{(c)}(\Phi)|_{\partial_a \Phi = 0} = \mathcal{L}^{(c)}(\Phi) + \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L \mathcal{L}_L^{(c)}(\Phi), \quad (2.50)$$

onde $K_L, F_L, \mathcal{L}_L^{(c)}$ são as correções quânticas. Na maioria das teorias de interesse não há derivadas covariantes atuando nos supercampos na ação clássica, por isso o potencial F não possui parte clássica ao contrário de K e $\mathcal{L}_{eff}^{(c)}$ que no modelo de Wess-Zumino, por exemplo, são dadas por $K_0(\Phi, \bar{\Phi}) = \bar{\Phi}\Phi$ e $\mathcal{L}^{(c)}(\Phi) = m\frac{\Phi^2}{2} + \lambda\frac{\Phi^3}{3!}$.

Teoria de Calibre Supersimétrica com Altas Derivadas

Nos dois capítulos anteriores estudamos aspectos clássicos e quânticos da teoria de supercampos, parte desses estudos serão utilizados nas próximas seções. Por exemplo, a parte do capítulo 1 que trata da construção da ação para a teoria de Yang-Mills supersimétrica na linguagem de supercampos será utilizada na seção 3.1 para a construção da ação para teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas. A parte do capítulo 2 que trata da quantização de supercampos e do potencial efetivo de supercampo será utilizada tanto para calcular os propagadores da teoria com altas derivadas quanto para calcular a correção de um laço para o potencial efetivo kähleriano na seção 3.2. Neste capítulo, estudaremos a ação efetiva de baixas-energias em um laço para a teoria de calibre de supercampo com altas derivadas acoplada à matéria quiral. Os resultados expostos nas seções 3.1 e 3.2 encontram-se no trabalho do nosso grupo [15].

3.1 ABORDAGEM GERAL

Vamos tentar implementar altas derivadas na teoria de calibre não-abeliana, para isso, recordamos que a transformação de calibre para o supercampo de calibre V é dada por¹:

$$e^V \rightarrow e^{i\bar{\Lambda}} e^V e^{-i\Lambda}, \quad (3.1)$$

onde Λ é um parâmetro quiral e $\bar{\Lambda}$ é o anti-quiral. O supercampo quiral definido por:

$$W_\alpha = i\bar{D}^2(e^{-V} D_\alpha e^V) \quad (3.2)$$

é covariante sob as transformações de calibre acima:

$$W_\alpha \rightarrow e^{i\Lambda} W_\alpha e^{-i\Lambda}. \quad (3.3)$$

No caso abeliano W_α é invariante.

Vamos tentar implementar altas derivadas na teoria de super-Yang-Mills com matéria não-massiva, cuja ação é dada por:

$$S = \int d^8z \bar{\phi} e^V \phi + \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^6z W^\alpha W_\alpha. \quad (3.4)$$

¹Neste capítulo vamos utilizar as mesmas convenções adotadas nos capítulos anteriores, mas tais convenções são diferentes das que utilizamos em [15].

No caso não-abeliano ϕ é um vetor coluna e V é uma matriz². Para implementar altas-derivadas, primeiramente vamos inserir um operador que depende somente de derivadas covariantes $\widehat{O}(D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}, \partial_{\alpha\dot{\alpha}})$ no segundo termo da ação acima e reescrevê-la como:

$$S_W = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^6z W^\alpha \widehat{O} W_\alpha. \quad (3.5)$$

Tendo em vista (3.3), a ação acima no caso não-abeliano só é invariante de calibre se e somente se o operador \widehat{O} satisfizer:

$$e^{-i\Lambda} \widehat{O} e^{i\Lambda} = \widehat{O}. \quad (3.6)$$

Se expandirmos o termo à esquerda descobrimos que a condição acima só é satisfeita se $[\Lambda, \widehat{O}] = 0$, isto significa que o operador \widehat{O} deve ser igual ao operador identidade, ou seja, não podemos utilizar nenhuma derivada espinorial ou derivada de espaço-tempo. Isso implica que utilizando esta construção, altas derivadas não podem ser introduzidas na ação de tal forma que a invariância de calibre não-abeliana seja preservada. Todavia, se considerarmos que \widehat{O} possa depender também do supercampo de calibre V , então altas derivadas podem ser implementadas em uma teoria de calibre não-abeliana por meio da derivada covariante sob transformações de calibre Λ (confira as referências [6, 17, 21]). Assim, podemos inserir o operador:

$$\widehat{O} \equiv \frac{1}{2} \nabla^{0\alpha} \nabla_{0\alpha} = e^{-V} D^2 e^V \quad (3.7)$$

em (3.5) que obteremos uma ação invariante sob (3.1), devido ao fato que \widehat{O} transforma-se covariantemente

$$\widehat{O} \rightarrow e^{i\Lambda} \widehat{O} e^{-i\Lambda}. \quad (3.8)$$

Apesar disso vamos, por simplicidade, considerar aqui somente o caso abeliano.

No caso abeliano, as transformações (3.1) reduzem-se à:

$$V \rightarrow V + i(\bar{\Lambda} - \Lambda), \quad (3.9)$$

enquanto que (3.2) reduz-se para:

$$W_\alpha = i\bar{D}^2 D_\alpha V. \quad (3.10)$$

Não é difícil mostrar que no caso abeliano W_α é invariante sob transformações de calibre.

Neste caso, temos muitas possibilidades de inserir altas derivadas na ação (3.5). A maneira mais simples de fazer isso é escrever a ação (3.5) como:

$$S_W = -\frac{1}{2g^2} \int d^6z W^\alpha (\square - m^2) W_\alpha = -\frac{1}{2g^2} \int d^8z V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha (\square - m^2) V. \quad (3.11)$$

²Estamos sendo um pouco mais rigorosos na notação deste capítulo, por exemplo, o supercampo ϕ é o supercampo quiral quântico e Φ é o supercampo quiral médio definido por $\Phi \equiv \langle 0|\phi|0\rangle_J / \langle 0|0\rangle_J$.

Notamos que a ação acima foi utilizada (no caso $m = 0$) como uma ferramenta auxiliar no estudo do modelo de Wess-Zumino generalizado com altas derivadas em [14].

Vamos agora tentar implementar altas-derivadas no primeiro termo da ação (3.4) inserindo um operador $\widehat{\mathcal{R}}(D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}, \partial_{\alpha\dot{\alpha}})$ nele. Para isso, temos que primeiramente saber como os ϕ 's se transformam sob uma transformação de calibre, sabemos que:

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda}\phi, \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}e^{-i\Lambda}. \quad (3.12)$$

Uma generalização natural da ação do supercampo quirial é dada por:

$$S_\Phi = \int d^8z \bar{\phi} e^V \widehat{\mathcal{R}} \phi. \quad (3.13)$$

Esta ação só vai ser invariante sob as transformações (3.1) e (3.12) se $\widehat{\mathcal{R}}$ for igual ao operador identidade, isto é válido não importa se a transformação é abeliana ou não-abeliana. Entretanto, novamente, se $\widehat{\mathcal{R}} \equiv e^{-V} D^2 e^V$ obteremos a invariância da ação acima no caso não-abeliano, mas por simplicidade, vamos considerar $\widehat{\mathcal{R}} \equiv \widehat{I}$.

Vamos estudar a mais ação simples para uma teoria de calibre (abeliana) supersimétrica com altas derivadas, ela é dada por:

$$S = \int d^8z \bar{\phi} e^V \phi - \frac{1}{2g^2} \int d^8z V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha (\square - m^2) V. \quad (3.14)$$

Quando se toma o limite de baixas-energias da teoria de supercordas obtêm-se como resultado uma ação efetiva de baixas-energias dada em termos do potencial efetivo kähleriano e do potencial efetivo quirial, sendo tais potencias funções de supercampos quirais e antiquiras [34]. Esta afirmação nos motiva a considerar o potencial efetivo kähleriano e o quirial como nossos objetos de estudo nas próximas seções³. A técnica que utilizaremos para calcular tais objetos será a técnica de superdiagramas que foi explorada nas referências [35]. Assim, é conveniente obtermos os propagadores e os vértices da teoria (3.14). Para isso, devemos fixar o calibre adicionando à (3.14) o termo (confira a seção 2.4):

$$S_{gf} = \frac{1}{\alpha g^2} \int d^8z V D^2 \bar{D}^2 (\square - m^2) V. \quad (3.15)$$

Logo, podemos obter como resultado da adição de (3.15) à (3.14) e do cálculo da inversa do operador diferencial resultante da adição os propagadores desejados:

$$\begin{aligned} \langle \phi(1) \bar{\phi}(2) \rangle &= \frac{\bar{D}^2 D^2}{k^2} \delta_{12}; \quad \langle \bar{\phi}(1) \phi(2) \rangle = \frac{D^2 \bar{D}^2}{k^2} \delta_{12}; \\ \langle V(1) V(2) \rangle &= -\frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} \left(\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{k^2} - \alpha \frac{\{\bar{D}^2, D^2\}}{k^2} \right) \delta_{12}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

³Na verdade, o potencial efetivo quirial é nulo para o modelo acima, isso será justificado na próxima seção.

Devido ao fato da teoria acima ser abeliana, os fantasmas de Faddeev e Popov não irão se acoplar com o supercampo de calibre V , então não precisaremos considerá-los nos nossos cálculos.

É conveniente expressarmos os propagadores acima em termos dos operadores de projeção

$$\Pi_0 = -\frac{\{\bar{D}^2, D^2\}}{k^2} = \Pi_- + \Pi_+, \quad \Pi_{1/2} = \frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{k^2}.$$

Não é difícil mostrar que eles satisfazem as identidades $\Pi^n = \Pi$ (para qualquer inteiro $n \geq 1$), $\Pi_0 \Pi_{1/2} = \Pi_{1/2} \Pi_0 = 0$ e $\Pi_+ \Pi_- = \Pi_- \Pi_+ = 0$. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle \phi(1) \bar{\phi}(2) \rangle &= -\Pi_- \delta_{12}; \quad \langle \bar{\phi}(1) \phi(2) \rangle = -\Pi_+ \delta_{12}; \\ \langle V(1) V(2) \rangle &= -\frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} \left(\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0 \right) \delta_{12}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

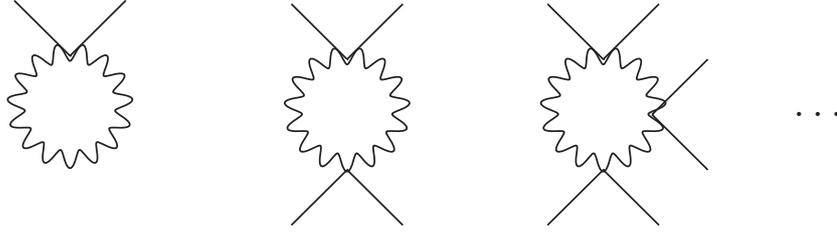
Escrevemos as expressões nesta forma porque elas irão surgir várias vezes em contribuições para o potencial efetivo de Kähler na seção a seguir. Os vértices são os mesmos que discutimos no final da seção 2.4.

3.2 CÁLCULOS DAS CONTRIBUIÇÕES EM UM LAÇO

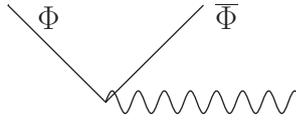
Para calcular o potencial efetivo kähleriano devemos proceder de maneira análoga como é feito na TQC: Primeiro, devemos desenhar todos os vértices próprios de um laço possíveis. Segundo, calcular as contribuições para a ação efetiva de cada vértice próprio com os momenta externos iguais à zero. Terceiro, somar todas as contribuições. A densidade de energia resultante independente de x será o potencial efetivo [36]. No caso do potencial efetivo de Kähler devemos acrescentar mais uma condição: não devemos permitir que derivadas covariantes atuem nas pernas externas do superdiagrama (confira (2.46) e (2.47)). A densidade que aparece integrada em $\int d^8z$ será o potencial efetivo kähleriano [35].

Os vértices próprios de um laço possíveis na teoria (3.14) são, em princípio, aqueles em que as linhas internas são constituídos por propagadores $\langle \phi(1) \bar{\phi}(2) \rangle$ ou por propagadores $\langle V(1) V(2) \rangle$ ou ainda constituídos por ambos. Visto que só vamos considerar aqueles em que as pernas externas envolvem os supercampos médio Φ e $\bar{\Phi}$, então não haverá contribuições, neste caso, para a ação efetiva das quais envolvam somente propagadores $\langle \phi(1) \bar{\phi}(2) \rangle$ por causa que o termo de interação em (3.14) possui somente um supercampo quiral e um anti-quiral, deste modo, não há como termos uma perna externa com Φ ou $\bar{\Phi}$ em vértices próprios envolvendo somente $\langle \phi(1) \bar{\phi}(2) \rangle$. O mesmo não pode ser dito para os outros casos.

Vamos começar o cálculo primeiramente para todos os superdiagramas que envolvem somente os propagadores do supercampo de calibre V , eles são:



Os superdiagramas acima envolvem somente vértices quárticos $\bar{\Phi}V^2\phi$. Notamos que cada superdiagrama acima possui $2n$ pernas e é constituído por n -subdiagramas do tipo abaixo:



A contribuição do subdiagrama acima é dada por:

$$R = -g^2 \bar{\Phi} \Phi \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} (\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0) \delta_{12}. \quad (3.18)$$

Segue do resultado acima que a contribuição de um superdiagrama com n -subdiagramas do tipo acima é dada por:

$$\begin{aligned} I_n &= (2\pi)^4 \delta^4(0) \frac{1}{2n} \int d^4\theta_1 \dots d^4\theta_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} R^n = , \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(0) \frac{1}{2n} \int d^4\theta_1 \dots d^4\theta_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-g^2 \bar{\Phi} \Phi}{k^2(k^2 + m^2)} \right)^n \times \\ &\quad \times (\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_1 \delta_{12} (\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_2 \delta_{23} \dots (\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_{n-1} \delta_{n-1,n} (\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_n \delta_{n,1}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $2n$ é um fator de simetria, tal fator leva em conta o coeficiente da expansão em séries de Taylor da ação efetiva, o fator de simetria ordinário do superdiagrama e o número de superdiagramas topologicamente distintos [35]. O fator $(2\pi)^4 \delta^4(0)$ se deve à conservação dos momenta externos, visto que estamos tomando eles iguais à zero para o cálculo do potencial efetivo [36]. Podemos integrar por partes a contribuição acima e omitir os termos com derivadas atuando sobre os supercampos para obter:

$$I_n = \int d^8z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{n} \left(-g^2 \bar{\Phi} \Phi \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} \right)^n (1 - \alpha^n), \quad (3.20)$$

onde foi utilizado $(2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4x$ e as identidades $k^2 \Pi_{1/2} \delta|_{\theta_1=\theta_2} = 2$, $k^2 \Pi_0 \delta|_{\theta_1=\theta_2} = -2$.

A ação efetiva (na aproximação kähleriana) é dada pela soma de todos os superdiagramas de um laço acima:

$$\Gamma_a^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \int d^8z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-g^2 \bar{\Phi} \Phi \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} \right)^n (1 - \alpha^n). \quad (3.21)$$

Utilizando o resultado abaixo:

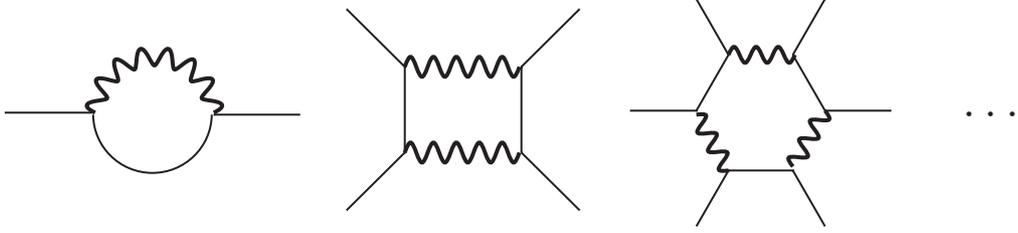
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = -\ln(1+a). \quad (3.22)$$

Obtemos finalmente,

$$\Gamma_a^{(1)} = - \int d^8z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \left[\ln \left(1 + \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{k^2(k^2 + m^2)} \right) - \ln \left(1 + \frac{\alpha g^2 \bar{\Phi} \Phi}{k^2(k^2 + m^2)} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Note que no calibre de Landau $\alpha = 0$ o segundo termo desta expressão se anula, já no caso do calibre de Fermi-Feynman $\alpha = 1$ toda a contribuição se anula.

Vamos agora nos voltar para o cálculo dos superdiagramas de um laço que são constituídos da mistura de propagadores dos supercampos de calibre e quiral, eles possuem uma estrutura do tipo:



Destacamos os propagadores $\langle V(1)V(2) \rangle$ porque podemos inserir um número arbitrário de vértices quárticos nele, isso significa que os laços acima envolvem além de vértices triplos $\bar{\Phi}V\Phi$ envolvem também vértices quárticos. Logo, para calcularmos as contribuições acima devemos primeiramente calcular o propagador "vestido" (ou propagador completo) [1].

Vamos "vestir" o propagador com cópias dos vértices quárticos citados. Diagramaticamente, o propagador "vestido" é dado por:

$$\text{wavy line} = \text{wavy line} + \text{wavy line with one vertex} + \text{wavy line with two vertices} + \dots$$

O resultado dos superdiagramas acima é dado por:

$$\begin{aligned} \langle V(1)V(2) \rangle_D &= -\frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} (\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0) \delta_{12} + \int d^4\theta_3 \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{[-k^2(k^2 + m^2)]^2} [(\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_1 \delta_{13}] \times \\ &\times [(\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_3 \delta_{32}] + \int d^4\theta_3 d^4\theta_4 \frac{(g^2 \bar{\Phi} \Phi)^2}{[-k^2(k^2 + m^2)]^3} [(\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_1 \delta_{13}] \times \\ &\times [(\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_3 \delta_{34}] [(\Pi_{1/2} + \alpha \Pi_0)_4 \delta_{42}] + \dots \\ \langle V(1)V(2) \rangle_D &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{k^2(k^2 + m^2)} \right)^{n+1} (g^2 \bar{\Phi} \Phi)^n (\Pi_{1/2} + \alpha^{n+1} \Pi_0) \delta_{12}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

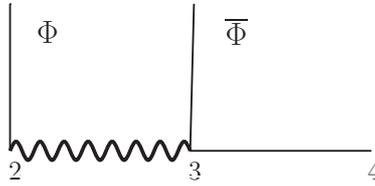
onde integramos por partes. Utilizando a soma abaixo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n = \frac{1}{a+1}, \quad (3.25)$$

obtemos o propagador "vestido":

$$\langle V(1)V(2) \rangle_D = - \left[\frac{\Pi_{1/2}}{k^2(k^2+m^2) + g^2\overline{\Phi}\Phi} + \frac{\alpha\Pi_0}{k^2(k^2+m^2) + \alpha g^2\overline{\Phi}\Phi} \right] \delta_{12}. \quad (3.26)$$

Com este resultado, estamos prontos para o cálculo das contribuições dos superdiagramas para a ação efetiva. Notamos que os superdiagramas de um laço acima são constituídos por n -subdiagramas do tipo abaixo:



Este subdiagrama fornece a contribuição:

$$Q = \int d^4\theta_3 g^2 \overline{\Phi}\Phi \left[\frac{\Pi_{1/2}}{k^2(k^2+m^2) + g^2\overline{\Phi}\Phi} + \frac{\alpha\Pi_0}{k^2(k^2+m^2) + \alpha g^2\overline{\Phi}\Phi} \right]_2 \delta_{23} [(\Pi_+)_3 \delta_{34}]$$

$$Q = \frac{\alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi}{k^2(k^2+m^2) + \alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi} \Pi_+ \delta_{24}. \quad (3.27)$$

Segue do resultado acima que a contribuição de um superdiagrama com n -subdiagramas do tipo acima é dada por:

$$J_{2n} = (2\pi)^4 \delta^4(0) \frac{1}{n} \int d^4\theta_2 \dots d^4\theta_{2n} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Q^n =$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(0) \frac{1}{n} \int d^4\theta_2 \dots d^4\theta_{2n} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi}{k^2(k^2+m^2) + \alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi} \right)^n \times$$

$$\times [(\Pi_+)_2 \delta_{24}] [(\Pi_+)_4 \delta_{46}] \dots [(\Pi_+)_{2n-1} \delta_{2n-1,2n}] [(\Pi_+)_{2n} \delta_{2n,2}]. \quad (3.28)$$

Calculando as integrais e utilizando a identidade $-k^2 \Pi_+ \delta_{24} |_{\theta_2=\theta_4} = 1$, obtemos:

$$J_{2n} = -\frac{1}{n} \int d^8z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \left(\frac{\alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi}{k^2(k^2+m^2) + \alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi} \right)^n. \quad (3.29)$$

A última contribuição para a ação efetiva será obtida somando todas as contribuições J_{2n} acima por meio da expressão:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a). \quad (3.30)$$

Assim, depois de um pequeno trabalho algébrico, obtemos:

$$\Gamma_b^{(1)} = - \int d^8z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha g^2 \overline{\Phi}\Phi}{k^2(k^2+m^2)} \right). \quad (3.31)$$

Note que esta contribuição se anula no calibre de Landau $\alpha = 0$.

Somando as contribuições (3.23) e (3.31) obtemos a contribuição total dos diagramas de um laço que calculamos:

$$\Gamma^{(1)} = - \int d^8z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \ln \left(1 + \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{k^2 (k^2 + m^2)} \right). \quad (3.32)$$

Notamos que o resultado acima é independente do calibre α . O que nos resta agora é somente calcular a integral acima, para isso, devemos lembrar que no capítulo 2 as regras de Feynman que comentamos estavam com a coordenada temporal sob uma rotação de Wick, então podemos fazer uma mudança de variáveis $k^2 = \ell$ e $d^4k = \pi^2 \ell d\ell$ para poder reescrever a integral acima em coordenadas polares esféricas:

$$\Gamma^{(1)} = - \int d^8z \int_0^\infty \frac{d\ell}{(4\pi)^2} \ln \left(1 + \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{\ell(\ell + m^2)} \right). \quad (3.33)$$

Apesar de podermos calcular a integral acima de maneira direta, o resultado encontrado é bastante extenso. Portanto é mais instrutivo estimarmos o seu valor em algumas situações aproximadas. Primeiramente, vamos assumir que a massa é pequena mais não-nula. No caso citado, podemos aproximar a integral acima por:

$$\Gamma^{(1)} = - \int d^8z \int_{m^2}^\infty \frac{d\ell}{(4\pi)^2} \ln \left(1 + \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{\ell^2} \right). \quad (3.34)$$

Que gera o resultado:

$$\Gamma^{(1)} = - \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^8z \left\{ (g^2 \bar{\Phi} \Phi)^{1/2} \left[\pi - 2 \arctan \left(\frac{m^2}{(g^2 \bar{\Phi} \Phi)^{1/2}} \right) \right] - m^2 \ln \left(1 + \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{m^4} \right) \right\}. \quad (3.35)$$

Agora, vamos supor que a massa seja nula. Neste caso o resultado é dado por:

$$\Gamma^{(1)} = - \frac{1}{16\pi} \int d^8z (g^2 \bar{\Phi} \Phi)^{1/2}. \quad (3.36)$$

Tendo em vista as expressões (2.43) e (2.47), obtemos finalmente o potencial efetivo de Kähler em um laço para o caso massivo e não-massivo respectivamente:

$$\begin{aligned} K_{m^2 \neq 0}^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) &= - \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ (g^2 \bar{\Phi} \Phi)^{1/2} \left[\pi - 2 \arctan \left(\frac{m^2}{(g^2 \bar{\Phi} \Phi)^{1/2}} \right) \right] - m^2 \ln \left(1 + \frac{g^2 \bar{\Phi} \Phi}{m^4} \right) \right\}, \\ K_{m^2 = 0}^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) &= - \frac{1}{16\pi} (g^2 \bar{\Phi} \Phi)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Vale apenas destacar que ambos os resultados (3.37) são finitos e não necessitam de nenhuma renormalização. De uma forma mais precisa, o potencial efetivo de Kähler em um laço para a teoria de calibre abeliana com altas derivadas, escrito em termos dos supercampos médio externos Φ e $\bar{\Phi}$, não exhibe nenhuma divergência. Este comportamento mais convergente, de certa forma esperado, se deve ao grau aumentado nos momenta do propagador do supercampo V ,

fazendo assim que haja uma maior convergência na integração do laço. É importante frisar que apesar da SUSY melhorar o comportamento ultravioleta de uma TQC, como já foi dito anteriormente, ela sozinha não é capaz de tornar o potencial efetivo de Kähler da QED supersimétrica finito em laço, o potencial efetivo é apenas renormalizável [36].

O potencial efetivo quirral não fornece nenhuma contribuição para a ação efetiva do modelo em consideração, visto que em tal modelo não há auto-acoplamentos de supercampos (anti)quirais, assim não há propagadores do tipo $\langle \overline{\phi\phi} \rangle$ e $\langle \phi\phi \rangle$ que nos permitam formar um laço válido envolvendo somente $\overline{\Phi}$ ou Φ externo.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, tratamos da construção de uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas consistente. Além disso, nos ocupamos com o cálculo das contribuições kählerianas para o potencial efetivo de supercampo no nível de um laço.

Na primeira parte do trabalho fizemos uma breve revisão de alguns aspectos clássicos da teoria de supercampos. Introduzimos a SUSY como sendo uma extensão não-trivial da álgebra do grupo de Poincaré. Definimos o superespaço como uma extensão do espaço-tempo de Minkowski com quatro coordenadas adicionais de Grassmann que se transformam como espinores de Weyl de mão-direita e esquerda. A partir disso, definimos funções analíticas no superespaço que carregam índices dos grupos $SL(2, \mathbb{C})$ e $SU(N)$ que são conhecidos como supercampos. Vimos que o formalismo de supercampos possui muitas vantagens em relação ao formalismo de campos componentes, por exemplo, vimos que a SUSY é manifesta em todo os passos do cálculo no formalismo de supercampos. Com este formalismo à nossa disposição, concluímos o capítulo 1 com a construção das versões no superespaço dos modelos supersimétricos mais conhecidos, a saber, o modelo de Wess-Zumino e o modelo de Yang-Mills supersimétrico. Vimos que as versões no superespaço de tais modelos além de serem mais compactos, possuem menos índices e a SUSY é manifesta em comparação com os modelos de campos componentes.

Na segunda parte do trabalho revisamos, muito rapidamente, os aspectos quânticos da teoria de supercampos. Definimos a diferenciação funcional de um funcional de um supercampo ir-restrito e de um supercampo quiral, vimos que ela se assemelha à definição encontrada na TQC. Depois disso, exibimos o formalismo geral necessário para à quantização de modelos definidos no superespaço. Vimos que, como o caso da diferenciação, os principais objetos de interesse também se assemelham aos encontrados na TQC com pequenas distinções. Em seguida, providos com o formalismo geral básico, obtivemos as regras de Feynman para a ação efetiva dos modelos de Wess-Zumino e da teoria de calibre $U(1)$ acoplada à matéria quiral não-massiva. Enunciamos o teorema mais importante da teoria quântica de supercampos perturbativa: o teorema de não-renormalização. Finalmente, concluímos o capítulo 2 com a definição do potencial efetivo de supercampo, tal potencial foi o nosso principal objeto de estudo.

No último capítulo desta dissertação, apresentamos nossa contribuição para a área de pesquisa. Discutimos e construímos uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas consistente com a invariância de calibre. Logo após, restringimos nossos estudos, por simplicidade,

somente ao caso do modelo supersimétrico com altas derivadas abeliano e acoplado com matéria quirial sem auto-interações quirais. Em seguida, calculamos explicitamente o potencial efetivo de Kähler no nível de um laço para o modelo abeliano. Nosso principal resultado foi mostrar que o potencial efetivo de Kähler em um laço para a teoria de calibre abeliana com altas derivadas escrito em termos dos supercampos médio externos Φ e $\bar{\Phi}$ é finito, ou seja, não exibe nenhuma divergência ao contrário das teorias de calibre usuais [35]. Além disso, vimos que o potencial efetivo quirial é nulo por causa da ausência de termos de auto-interação quirais na ação clássica [15]. Os resultados exibidos aqui e em [15] são importantes porque eles podem ser utilizados para o estudo fenomenológico da quebra-espontânea de simetria de calibre e estabilidade do vácuo em baixas energias.

Como perspectivas futuras, o estudo de teorias de calibre supersimétricas com altas derivadas no caso não-abeliano e com termos de auto-interação quirial seria a continuação natural do estudo feito aqui. Uma perspectiva mais audaciosa seria formular uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas no contexto das TQC não-comutativas. Nosso interesse reside em modelos de baixas energias, visto que teorias não-comutativas surgem no limite de baixas energias da teoria de cordas, então seria interessante estudar modelos supersimétricos não-comutativos com altas derivadas [37].

Notações e Convenções

Nesta dissertação utilizamos as notações e convenções adotadas na referência [6]. Iremos apresentá-las aqui sem muitos detalhes e no final deste apêndice comentaremos algumas vantagens de sua utilização¹.

A assinatura do espaço-tempo é $(-, +, +, +)$. Utilizamos espinores de Weyl no formalismo de Van der Waerden. Os espinores carregam índices com ponto $\dot{\alpha}$ e sem ponto α que assumem dois valores, por exemplo, $\dot{\alpha} = (\dot{+}, \dot{-})$. Os espinores ψ^α carregam a representação $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ enquanto que os $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ carregam a representação $(0, \frac{1}{2})$. Neste trabalho utilizamos somente índices com e sem ponto, objetos com índices a associado ao grupo de Lorentz $SO(3, 1)^\uparrow$ são mapeados em objetos com índices $\alpha\dot{\alpha}$ por meio das definições:

$$\text{Para campos: } V^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}V^b, \quad V^b = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}V^{\alpha\dot{\alpha}}; \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Para derivadas: } \partial_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_b, \quad \partial_b = \frac{1}{2}\sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}; \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Para coordenadas: } x^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}x^b, \quad x^b = \sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}x^{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.3})$$

onde as matrizes de Pauli e a identidade satisfazem:

$$\sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}\sigma_c^{\alpha\dot{\alpha}} = 2\delta_b^c, \quad \sigma_b^{\alpha\dot{\alpha}}\sigma_b^{\beta\dot{\beta}} = 2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.4})$$

Sabemos que a métrica η_{ab} e o tensor de Levi-Civita ε_{abcd} são tensores não-triviais que são invariantes sob transformações do grupo $SO(3, 1)^\uparrow$ e assim são úteis para levantar e baixar índices além de fazer contrações. No caso do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ o único tensor invariante é sua métrica $C_{\alpha\beta}$, seu conjugado e suas inversas:

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} = -C^{\alpha\beta} = C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -C^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Os C 's satisfazem:

$$C_{\alpha\gamma}C^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta, \quad C_{\alpha\beta}C^{\gamma\delta} = \delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma\delta_\alpha^\delta. \quad (\text{A.6})$$

Logo, podemos utilizar a métrica $C_{\alpha\beta}$ para levantar e baixar índices espinoriais:

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\beta = \psi^\alpha C_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.7})$$

¹É aconselhável que o leitor dê uma olhada em [6] se estiver interessado em detalhes e explicações das convenções adotadas aqui.

Visto que $C_{\alpha\beta}$ é anti-simétrico, notamos que:

$$\Psi^\alpha \Psi_\alpha \neq \Psi_\alpha \Psi^\alpha. \quad (\text{A.8})$$

Os tensores η_{ab} e ε_{abcd} podem ser escritos em termos de $C_{\alpha\beta}$:

$$\eta_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} = C_{\alpha\beta}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \varepsilon_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta}} = i(C_{\alpha\beta}C_{\gamma\dot{\delta}}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}C_{\beta\dot{\gamma}} - C_{\alpha\dot{\delta}}C_{\beta\dot{\gamma}}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}C_{\gamma\dot{\delta}}). \quad (\text{A.9})$$

Vamos definir o quadrado de um espinor e de um vetor como sendo respectivamente:

$$\Psi^2 = \frac{1}{2}\Psi^\alpha\Psi_\alpha, \quad (\text{A.10})$$

$$V^2 = \frac{1}{2}V^{\alpha\dot{\alpha}}V_{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.11})$$

Note que o quadrado do vetor (e do espinor) definido acima é diferente do que é comumente encontrado em outras referências.

Finalmente, a relação abaixo é muito útil em cálculos:

$$\Psi_\alpha\chi_\beta - \chi_\beta\Psi_\alpha = C_{\beta\alpha}\Psi^\gamma\chi_\gamma. \quad (\text{A.12})$$

Vamos agora justificar as convenções adotadas acima. Vamos defender a idéia de que tais convenções simplificam os cálculos no superspaço.

A utilização de somente índices espinorias é conveniente porque neste formalismo não surgem matrizes de Pauli nem matrizes de Dirac, assim não precisamos calcular traços de tais matrizes. Além disso, a construção de invariantes na teoria se resume à contração dos índices, por exemplo, o acoplamento entre um objeto de spin-1 e objetos de spin-1/2 é dado por $V_{\alpha\dot{\alpha}}\Psi^\alpha\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}$, ou seja, não é necessário o uso de objetos especiais como matrizes de Pauli ou Dirac para obter um invariante, por exemplo, $V_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$.

A normalização das expressões (A.10) e (A.11) é conveniente para cálculos com supercampos porque poucas expressões carregam constantes numéricas. Por exemplo, utilizando as convenções de [21], o supercampo covariante W_α é dado por:

$$W_\alpha = -\frac{1}{8}\bar{D}^2(e^{-2V}D_\alpha e^{2V}). \quad (\text{A.13})$$

Enquanto que utilizando nossas convenções (que são as de [6]) não temos nenhum fator numérico:

$$W_\alpha = i\bar{D}^2(e^{-V}D_\alpha e^V). \quad (\text{A.14})$$

Logo, as expressões serão mais fáceis de escrever, memorizar e manipular, levando assim a menos erros algébricos.

As convenções adotadas aqui levam a normalizações "estranhas" no nível de campos componentes, mas isso não é problema porque podemos recuperar as normalizações "padrões" por meio de uma redefinição dos campos. Este problema não surge aqui, visto que os cálculos realizados nesta dissertação envolvem somente supercampos, não campos componentes.

Referências Bibliográficas

- [1] RYDER, L., *Quantum Field Theory*, (Cambridge University, Cambridge, England, 1996).
- [2] MAGGIORE, M., *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, (Oxford University Press, Oxford, 2005).
- [3] GOLFAND, Y., LICHTMAN, E., *JETP Lett.* **13**, 323 (1971); VOLKOV, D., AKULOV, V., *JETP Lett.* **16**, 621 (1972); WESS, J., B. ZUMINO, B., *Nucl. Phys. B* **70**, 139 (1974).
- [4] BAER, H., TATA, X., *Weak Scale Supersymmetry: From Superfields to Scattering Events*, (Cambridge University Press, Cambridge, England (2006).
- [5] KAKU, M., *Quantum Field Theory*, (Oxford University Press, New York, 1993).
- [6] GATES, S. J., GRISARU, M. T., ROČEC, M., SIEGEL, W., arXiv:hep-th/0108200v1.
- [7] BERN, Z., CARRASCO, J., DIXON, L., JOHANSSON, H., ROIBAN, R., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 081301 (2009); KALLOSH, R., *JHEP* **12**, 009 (2010).
- [8] BOPP, F., *Ann. d. Physik* **38**, 345 (1940).
- [9] PAIS, A., UHLENBECK, G., *Phys. Rev.* **79**, 145 (1950).
- [10] LEE T., WICK, G., *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970); STELLE, K., *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [11] BUCHBINDER, I., PETROV, A., *Class. Quantum Grav.* **14**, 21 (1997).
- [12] STEPANYANTZ, K. *Theor. Math. Phys.* **146**, 321 (2006).
- [13] ANTONIADIS, I., DUDAS, E., GHILENCEA, D., *JHEP* **03**, 045 (2008).
- [14] GOMES, M., NASCIMENTO, J. R., PETROV, A. Yu., SILVA, A. J. *Phys. Lett. B* **682**, 229 (2009).
- [15] GAMA, F. S., GOMES, M., NASCIMENTO, J. R., PETROV, A. Yu., SILVA, A. J., arXiv:1101.0724v1.
- [16] SIGNER, A., arXiv:0905.4630v1.

- [17] GATES, S. J., arXiv:hep-th/9809064v1.
- [18] COLEMAN, S., MANDULA, J., *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).
- [19] HAAG, R., ŁOPUSZAŃSKI, J. & SOHNIUS, M., *Nucl. Phys. B* **88**, 257 (1975).
- [20] LYKKEN, J., arXiv:hep-th/9612114v1.
- [21] BUCHBINDER, I., KUZENKO, S. *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity: Or a Walk Through Superspace*, (Iop Pub/Inst of Physics, 1998).
- [22] WEST, P., *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, (World Scientific, Singapore, 1986).
- [23] SIEGEL, W., arXiv:hep-th/9912205v3.
- [24] GALPERIN, A., IVANOV, E., OGIEVETSKY, V., SOKATCHEV, E., *Harmonic Superspace*, (Cambridge University Press, Cambridge 2001).
- [25] WESS, J. & BAGGER, J., *Supersymmetry and Supergravity*, (Princeton University Press, Princeton NJ, 1992).
- [26] SRIVASTAVA, P., *Supersymmetry and Superfields*, (Adam-Hilger, Bristol England, 1986).
- [27] BAILIN, D., LOVE, A., *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, (Institute of Physics Publishing, Bristol England, 1994).
- [28] SALAM, A., STRATHDEE, J., *Phys. Rev. D* **11**, 1521, (1975).
- [29] FERRARA, S., PIGUET, O., *Nucl. Phys. B* **93**, 261 (1975).
- [30] GRISARU, M. T., ROČEC, M., SIEGEL, W., *Nucl. Phys. B* **159**, 429 (1979).
- [31] BAILIN, D., LOVE, A., *Introduction to Gauge Field Theory*, (Adam Hilger, Bristol and Boston, 1993).
- [32] PETROV, A., arXiv:hep-th/0106094v2.
- [33] BUCHBINDER, I. ODINTSOV, S., SHAPIRO, I., *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [34] BUCHBINDER, I., PETROV, A., *Phys. Lett. B* **461**, 209, (1999).
- [35] HATFIELD, B., *Quantum Field Theory of Point Particles and String Theory*, (Westview Press, 1998).

- [36] DE WITT, B., GRISARU, M. T., ROČEC, M., *Phys. Lett. B* **374**, 297 (1996); PICKE-
RING, A., WEST, P., *Phys. Lett. B* **383**, 54 (1996); GRISARU, M. T., ROČEC, M., VON
UNGE, R., *Phys. Lett. B* **383**, 415 (1996); McARTHUR, P., GARGETT, T., *Nucl. Phys. B*
497, 525 (1997); PLETNEV, N. & BANIN, A., *Phys. Rev. D* **60**, 105017, (1999).
- [37] RIVELLES, V., arXiv:1101.4579v2.
- [38] SOHNIUS, M., *Phys. Rep.* **128**, 39 (1985).
- [39] DAS, A., *Field Theory: a Path Integral Approach*, (World Scientific, Singapore, 1993).

