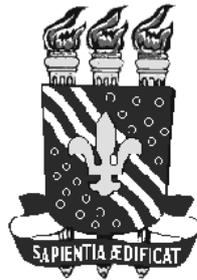


UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF



Dissertação de Mestrado

# Auto-interação Eletrostática no Espaço-tempo de um Monopolo Global com Estrutura

Denis Barros Barbosa

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Outubro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

# Auto-interação Eletrostática no Espaço-tempo de um Monopolo Global com Estrutura

Denis Barros Barbosa

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba(UFPB) como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Pr.Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

Co-orientador: Pr.Dr. Jean Paulo Spinelly

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Outubro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

# Auto-interação Eletrostática no Espaço-tempo de um Monopolo Global com Estrutura

Denis Barros Barbosa

Banca Examinadora:

Pr.Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello (UFPB)

Pr.Dr. Jean Paulo Spinelly (UEPB)

Pr.Dr. José Abdalla Helayel Neto (CBPF)

Pr.Dr. Edmundo Marinho do Monte (Suplente-UFPB)

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Outubro de 2008

*À Nadir.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, causa e efeito de todas as coisas.

À toda minha família.

Ao meu orientador pela amizade e grande compreensão na minha fase inicial de adaptação a um novo mundo e por sua contribuição para minha formação como pesquisador em Física.

Aos meus amigos.

Aos professores do Departamento de Física: Eugênio R. de Mello (Mecânica Quântica e Teoria de Campos), Valdir Bezerra (Eletromagnetismo), Carlos Romero (Cosmologia Matemática e Relatividade Geral) e Alexandre Rosas (Mecânica Estatística).

À CAPES pelo suporte financeiro durante a execução do trabalho.

E a todos aqueles que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho, obrigado.

# Resumo

Neste trabalho nós analisamos a auto-energia e a auto-força eletrostática induzida sobre uma partícula pontual, carregada, em repouso, colocada no espaço-tempo de um monopolo global com estrutura. Para desenvolvermos essa análise nós calculamos a função de Green tridimensional associada com este sistema físico. Nós mostramos explicitamente que para pontos dentro e fora do núcleo do monopolo a auto-energia apresenta duas contribuições distintas. A primeira é induzida pela geometria associada ao espaço-tempo produzido por um monopolo pontual, e a segunda é uma correção devido a estrutura não trivial atribuída ao monopolo. Considerando especificamente o modelo do *ball point-pen* para a região interna, nós fomos capazes de obter expressões exatas para a auto-energia nas regiões internas e externas ao núcleo do monopolo global.

# Abstract

In this work we analyse the electrostatic self-energy and self-force on a point-like electric charged particle induced by a global monopole spacetime considering an inner structure to it. In order to develop this analysis we calculate the three-dimensional Green function associated with this physical system. We explicitly show that for points inside and outside the monopole's core the self-energy presents two distinct contributions. The first is induced by the geometry associated with the spacetime under consideration, and the second one is a correction due to the non-vanishing inner structure attributed to it. Considering specifically the ballpoint-pen model for the region inside, we were able to obtain exact expressions for the self-energies in the regions outside and inside the monopole's core.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Defeitos topológicos</b>	<b>4</b>
1.1 O Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	4
1.2 Quebra espontânea de simetria . . . . .	6
1.2.1 Quebra espontânea de simetria Discreta . . . . .	7
1.2.2 Quebra espontânea de simetria de Gauge . . . . .	8
1.3 Campos gravitacionais produzidos por defeitos topológicos . . . . .	10
1.3.1 A métrica da corda cósmica . . . . .	11
1.3.2 A métrica do monopolo global . . . . .	15
<b>2 Funções de Green</b>	<b>19</b>
2.1 Funções de Green em uma dimensão . . . . .	19
2.1.1 Função de Green do operador Sturm-Liouville . . . . .	20
2.1.2 Autofunções e autovalores do operador Sturm-Liouville . . . . .	23
2.2 Formas da função de Green em 2 e 3 dimensões . . . . .	25
2.2.1 Função de Green do operador de Laplace em coordenadas esféricas . . . . .	26
2.2.2 Função de Green do operador de Laplace em coordenadas cilíndricas . . . . .	31
<b>3 Auto-interação Eletrostática</b>	<b>35</b>
3.1 O espaço-tempo da relatividade geral . . . . .	36
3.2 Equações de Maxwell no espaço curvo . . . . .	37

3.3	Auto-interação no espaço-tempo de um monopolo global . . . . .	41
3.3.1	Cálculo do potencial eletrostático no espaço-tempo do monopolo . . . . .	41
3.3.2	Auto-energia eletrostática no espaço-tempo do monopolo . . . . .	43
3.4	Auto-interação no espaço-tempo de uma corda cósmica . . . . .	46
3.4.1	Cálculo do potencial eletrostático no espaço-tempo da corda . . . . .	46
3.4.2	Auto-energia eletrostática no espaço-tempo da corda . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Auto-interação no espaço-tempo de um Monopolo Global com estrutura</b>	<b>51</b>
4.1	O modelo . . . . .	53
4.2	A função de Green . . . . .	55
4.3	Auto-energia . . . . .	59
4.3.1	Auto-energia na região externa do monopolo . . . . .	59
4.3.2	Auto-energia na região interna do monopolo . . . . .	63
	<b>Conclusões</b>	<b>66</b>
	<b>A Teoria de Grupos</b>	<b>68</b>
A.1	Grupos Contínuos . . . . .	69
A.1.1	Grupo das Rotações $O_3^+$ . . . . .	70
A.1.2	Grupo Unitário $SU(n)$ . . . . .	71
A.1.3	Geradores . . . . .	72
<b>B</b>	<b>Renormalização da função <math>G_0(\vec{r}, \vec{r}')</math></b>	<b>75</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>

# Introdução

A Cosmologia é a ciência que estuda o Universo como um todo, procurando entender a sua estrutura e evolução. A sua intenção é explicar o Universo em termos de uma teoria simples e esteticamente atraente. Atualmente, existem diversas questões em aberto na Cosmologia. Uma delas é a questão da formação de estruturas no universo (galáxias, aglomerados e super-aglomerados). O que sabemos sobre os mecanismos de formação de galáxias é que para haver uma formação estrutural desse tipo, se faz necessário matéria e sementes. O material necessário existe na forma de matéria escura, fria, quente ou, mais provavelmente, uma mistura de ambas [12]. Por outro lado, um dos candidatos a sementes são os chamados defeitos topológicos [2].

Teorias de Grande Unificação (GUT) [1, 11] juntamente com os modelos que explicam a evolução do Universo, nos levam a acreditar que estes defeitos foram criados durante as transições de fase que ocorreram no universo primitivo e, portanto, formam um elo entre as características do Universo atual e eventos que ocorreram no início de sua história. Na verdade, tais defeitos surgem como consequência de uma quebra espontânea de simetria de gauge local(global), em um sistema composto por campos escalares de Higgs(Goldstone) com auto-acoplamento, devido às transições de fase [1]. Dentre os defeitos, podemos citar as paredes de domínio [2], cordas cósmicas [5] e monopolos global e local [3]. O monopolo global, por exemplo, é um objeto de simetria esférica, formado na transição de fase de um sistema constituído por um isotripleto escalar auto-acoplado  $\phi^a$ , quando a simetria global de gauge original  $O(3)$  é quebrada para  $U(1)$ .

Segundo Einstein, a estrutura geométrica do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria e energia contida nele. Dessa forma, podemos esperar que esses defeitos induzam uma geometria não trivial. De fato isto acontece, e a análise de tal efeito, para o monopolo global, foi feita por Barriola e Vilenkin [3]. Estes autores mostraram que, para pontos distantes do núcleo do monopolo, a geometria correspondente é descrita pelo tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -\alpha^2 r^2, -\alpha^2 r^2 \sin^2 \theta) ,$$

sendo o parâmetro  $\alpha^2 = 1 - 8\pi G\eta^2$  determinado pela escala de energia,  $\eta$ , onde a simetria global de gauge é espontaneamente quebrada.

O estudo de fenômenos físicos, produzidos pela estrutura de um determinado espaço-tempo, permite-nos conhecê-la mais especificamente. Então, com o intuito de compreender os espaços-tempo gerados por defeitos topológicos, alguns autores investigaram determinados efeitos produzidos pela geometria e topologia dos mesmos, tanto no contexto da mecânica quântica, quanto no da eletrostática. Há alguns anos, Linet [5] e Smith [6], mostraram, independentemente, que uma partícula eletricamente carregada, em repouso no espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada<sup>1</sup>, torna-se sujeita a uma auto-interação repulsiva. Esta auto-interação é uma consequência da distorção das linhas de campo da partícula produzida pela estrutura do espaço-tempo da corda. Além desse, outros efeitos produzidos pela corda, tal como o espalhamento quântico de partículas, também foram estudados por outros autores [7, 8]. Analogamente ao que acontece no espaço-tempo da corda cósmica, uma carga pontual, em repouso no espaço-tempo de um monopolo global, também sente uma auto-interação, a topologia não trivial gerada pelo monopolo induz no campo da partícula uma auto-energia atrativa ou repulsiva sobre a mesma [9, 10]. Efeitos quânticos também são induzidos pela estrutura do espaço-tempo do monopolo [9]. Estes autores investigaram esses fenômenos considerando um monopolo idealizado, ou seja, admitiram que o mesmo não possui estrutura interna e que a métrica é descrita pela equação acima.

---

<sup>1</sup>Uma corda cósmica ideal é infinitamente longa, retilínea e sem estrutura.

Seguindo esta linha de raciocínio, analisaremos nesta dissertação o fenômeno da auto-interação eletrostática gerada pelo espaço-tempo de um monopolo global. Contudo, admitiremos que o monopolo possui uma estrutura interna. O modelo que adotaremos é conhecido como *ball point-pen* [31].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No primeiro capítulo faremos uma breve revisão sobre quebra espontânea de simetria discreta e contínua. Além disso, faremos uma descrição um pouco mais detalhada sobre defeitos topológicos, especificamente cordas cósmicas e monopolos. No segundo capítulo apresentaremos as equações da eletrodinâmica na presença de gravitação. No terceiro capítulo estudaremos as funções de Green e as suas propriedades. No quarto capítulo analisaremos a auto-interação no espaço-tempo de um monopolo global com estrutura. No apêndice faremos uma discussão sucinta sobre *teoria de grupo* e daremos em mais detalhes os cálculos referente a renormalização da função de Green tridimensional no espaço-tempo do monopolo com estrutura<sup>2</sup>. .

---

<sup>2</sup>Ao longo desta dissertação utilizamos o sistema de unidades em que  $\hbar = c = 1$  e a assinatura da métrica é  $(+ - - -)$ .

# Capítulo 1

## Defeitos topológicos

Como afirmamos anteriormente, defeitos topológicos são estruturas físicas formadas em uma teoria de campos a partir de uma quebra espontânea de simetria de Gauge de um sistema físico que apresenta um conjunto de estados de vácuo degenerados [1]. A cada tipo de simetria que é quebrada existe um tipo de defeito associado a mesma. No contexto cosmológico, isto implica que o universo primitivo passou por uma série de transições de fase, onde as simetrias a ele associadas foram espontaneamente quebradas devido ao seu esfriamento natural, surgindo assim, os defeitos topológicos.

Neste capítulo, analisaremos o campo gravitacional produzido por dois tipos de defeitos topológicos: a corda cósmica e o monopolo global. Antes, porém, faremos uma breve revisão sobre o modelo cosmológico padrão e o processo de quebra espontânea de simetria.

### 1.1 O Modelo Cosmológico Padrão

As observações de Hubble [32] e a descoberta da radiação cósmica de fundo, feita por Arno Penzias e Robert Wilson [33], deram origem ao Modelo Cosmológico Padrão (MCP). O MCP está baseado no chamado princípio cosmológico, o qual afirma que o Universo é o mesmo em toda direção e em todo ponto do espaço, ou seja, ele é homogêneo e isotrópico, comportando-se como um fluido perfeito em largas escalas.

O modelo matemático que é a base do MCP é o modelo de Friedmann-Robertson-Walker

(FRW) [12]. Assumindo que o Universo é homogêneo e isotrópico, FRW concluíram que a métrica que descreve o mesmo é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta) d\varphi^2 \right], \quad (1.1-1)$$

sendo  $a(t)$  uma função do tempo a ser determinada e  $k$  a constante de curvatura que é determinada pela topologia espacial e geométrica do Universo [1, 12]. Se  $k < 0$ , o Universo é fechado e possui geometria esférica; se  $k = 0$ , é plano e possui geometria euclidiana; se  $k > 0$ , é aberto e possui geometria hiperbólica. A partir da métrica de FRW podemos determinar as equações cinemáticas que descrevem a evolução do Universo.

Devido ao princípio cosmológico, a matéria contida no espaço-tempo de FRW comporta-se como um fluido perfeito. Sendo assim, o tensor energia momento que descreve o conteúdo de matéria no Universo é:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.1-2)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são respectivamente a densidade e pressão da matéria e  $u_\mu$  é a quadrivelocidade da matéria [13].

Considerando um observador co-móvel<sup>1</sup>, ou seja,  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , temos que os componentes do tensor energia-momento diferentes de zero são:

$$T^{\mu\nu} = \text{diag} \left( \rho, \frac{(1 - kr^2)p}{a^2}, \frac{p}{r^2 a^2}, \frac{p}{r^2 a^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (1.1-3)$$

Acoplando os componentes do tensor energia-momento diferentes de zero na equação de Einstein, obtemos as seguintes expressões:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.1-4)$$

e

$$2 \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (1.1-5)$$

---

<sup>1</sup>Observador co-móvel é aquele que se move juntamente com o conteúdo de matéria do Universo.

A partir das equações (1.1-4) e (1.1-5), obtemos:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) . \quad (1.1-6)$$

Sendo assim, devido ao fato de que  $\rho \geq 0$ , temos que  $\ddot{a} \leq 0$  (tomaremos sempre). Isto significa que  $a = \text{const.}$  não é uma solução de (1.1-6). Portanto, o Universo ou está se expandindo ( $\dot{a} > 0$ ), o que implica que a velocidade de expansão está diminuindo; ou está se contraindo ( $\dot{a} < 0$ ), o que implica que a velocidade de contração está aumentando<sup>2</sup>.

Usando o fato que a energia do universo se conserva, ou seja,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 , \quad (1.1-7)$$

chegamos à seguinte expressão:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 , \quad (1.1-8)$$

a qual é denominada por equação de continuidade. O termo  $3\dot{a}\rho/a$  representa a diminuição da densidade de energia devido a expansão do Universo e o termo  $3\dot{a}p/a$  representa o trabalho feito pela pressão do fluido [1, 12].

## 1.2 Quebra espontânea de simetria

Analisaremos agora sistemas dinâmicos nos quais o estado de vácuo não possui as mesmas propriedades de simetria da lagrangiana que descreve o sistema. Quando isto ocorre dizemos que a simetria é espontaneamente quebrada. Veremos que, devido a uma variação de estado no sistema físico, ocorrerá uma ruptura na simetria do mesmo entre um estado inicial e final, fazendo assim com que a lagrangiana associada a um determinado estado do sistema não mantenha essa simetria no estado fundamental.

Para entendermos este mecanismo, analisaremos sistemas que apresentam quebra espontânea de simetria discreta e contínua.

---

<sup>2</sup>O termo  $\ddot{a}/a$ , o qual é conhecido como o parâmetro de Hubble, tem unidade do inverso do tempo, e permite-nos estimar a idade do Universo [12].

### 1.2.1 Quebra espontânea de simetria Discreta

Considere uma densidade lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) , \quad (1.2-9)$$

com

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 , \quad (1.2-10)$$

onde  $\mu^2$  é ou pode estar associado com a massa da partícula e  $\lambda$  é uma constante de acoplamento<sup>3</sup>.

Dependendo dos sinais de  $\mu^2$  e  $\lambda$ , o potencial  $V(\phi)$  poderá ter formas distintas.

Figura 1.1:  $\lambda < 0, \mu^2 > 0$

Figura 1.2:  $\lambda > 0, \mu^2 > 0$

Figura 1.3:  $\lambda > 0, \mu^2 < 0$

*i)* O caso em que  $\lambda < 0$  e  $\mu^2 > 0$ , o qual é descrito pela figura 1.1, corresponde a uma situação não física, onde a partícula poderia perder anergia infinitamente. Por não ter conseqüências físicas esta situação não nos interessa.

*ii)* O caso em que  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 > 0$  é descrito pela figura 1.2. Este gráfico nos mostra que não existe nenhum tipo de problema com a energia potencial quando a mesma é analisada em seu estado de mais baixa energia, estado de vácuo, pois para  $\phi = 0$  temos que  $V(\phi) = 0$ . Além disso, não demonstra nenhuma quebra de simetria para o estado de vácuo. Pois, a lagrangiana original apresenta uma simetria do tipo  $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ , que se mantém no estado fundamental.

*iii)* No caso em que  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 < 0$ , o comportamento do potencial é descrito pela figura 1.3. De acordo com esta figura, vemos que o ponto  $\phi = 0$  representa um máximo local. Por outro lado, os dois mínimos estão situados em  $\phi = \pm \sqrt{\frac{|\mu^2|}{2\lambda}}$ . O problema nesta situação surge quando a energia potencial  $V(\phi)$  vai espontaneamente baixando e chega no ponto  $\phi = 0$ , e o sistema deve preferenciar por um dos dois lados de mais baixa energia, que são simétricos.

---

<sup>3</sup>No caso específico em que  $\lambda = 0$  e  $\phi$  é um campo real, obtemos a equação de Klein-Gordon.

Uma simples análise pode demonstrar que o sistema não preservará mais a simetria que ele possuía originalmente. Para tanto, vamos supor arbitrariamente que o sistema vá para o ponto  $\phi_0 = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{2\lambda}}$ . Para estudar a física na vizinhança deste vácuo, vamos definir um novo campo  $\eta = \phi - \phi_0$  e reescrever o potencial em termos deste novo campo. Fazendo isto, encontramos:

$$V(\eta) = \lambda\eta^4 + 4\lambda\eta^3 C + 4\lambda\eta^2 C^2 - \frac{|\mu^2|^2}{4\lambda} . \quad (1.2-11)$$

A partir da expressão acima, podemos ver claramente que, por uma troca do tipo  $\eta \rightarrow -\eta$ , não obtemos uma simetria como tínhamos inicialmente. Portanto, dizemos que houve uma quebra espontânea de simetria discreta neste sistema.

### 1.2.2 Quebra espontânea de simetria de Gauge

Quando nossa Lagrangiana é invariante por uma transformação do tipo,  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha\phi}$ , dizemos que a mesma é invariante por uma transformação de Gauge. Se essa simetria não é preservada no seu estado fundamental, estado de vácuo, haverá uma quebra espontânea de simetria de Gauge, e inevitavelmente aparecerá Bósons escalares sem massa, denominados *Bósons de Goldstone*. Entretanto, quando isto acontece em uma teoria envolvendo simetria local de Gauge, aquela que depende do ponto, onde os campos de gauge são necessariamente campos não-massivos, os bósons de Goldstone são absorvidos como sendo a componente longitudinal desses campos de gauge, os quais comportam-se como massivos com três graus de liberdade de spin [34].

Para entendermos a quebra espontânea de simetria de gauge, consideraremos a seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)^* - V(\phi) , \quad (1.2-12)$$

com

$$V(\phi) = \lambda \left( |\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 , \quad (1.2-13)$$

sendo  $\phi$  um campo complexo.

Assim como no caso anterior, teremos três comportamentos distintos para o potencial  $V(\phi)$ . Tais comportamentos são análogos às discutidas anteriormente. Isto significa que o único caso que apresenta quebra espontânea de simetria é aquele em que  $\mu^2 < 0$  e  $\lambda > 0$ , conforme mostra a figura 1.4.

Figura 1.4:

Por uma questão de convenção reescreveremos o nosso potencial como

$$V(\phi) = \lambda (|\phi|^2 - \mathcal{C}^2)^2, \quad (1.2-14)$$

com  $\mathcal{C}^2 = \frac{|\mu|^2}{2\lambda}$ .

É fácil verificar que a Lagrangiana, dada por (1.2-9), é invariante por uma transformação de Gauge do tipo,  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha\phi}$ , onde  $\alpha$  é uma constante (*transformação de Gauge global*). Por outro lado, para este sistema, o estado de mais baixa energia é infinitamente degenerado. De fato, o estado de vácuo é representado por  $\phi_0 = \mathcal{C}e^{i\Delta}$ , sendo  $\Delta$  é um número real arbitrário.

Apenas por uma questão de simplicidade, escolheremos  $\Delta = 0 \Rightarrow \phi_0 = \mathcal{C}$ , e analisaremos este sistema na vizinhança do seu estado fundamental novamente através de uma pequena perturbação semelhante ao caso anterior.

Vamos escolher, então

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \xi(x) + i\chi(x)), \quad (1.2-15)$$

onde  $\xi(x)$  e  $\chi(x)$  são reais e  $v = \sqrt{\frac{|\mu|^2}{\lambda}}$ . Substituindo  $\phi(x)$  em (1.2-12) obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - 2\lambda v^2 \xi^2 - \lambda v \xi(\xi^2 + \chi^2) - \frac{1}{4}\lambda(\xi^2 + \chi^2). \quad (1.2-16)$$

A massa associada ao campo  $\xi(x)$  é  $m_\xi = 2|\mu|^2$ , e o campo  $\chi(x)$  é um campo não massivo, denominado *Bóson de Goldstone*. Como se pode ver, a Lagrangeana não apresenta mais a sua simetria original por transformação de Gauge, dizemos então que houve uma *quebra espontânea de simetria contínua*.

- **Teorema de Goldstone [34]**

Para cada gerador<sup>4</sup> quebrado espontaneamente em um grupo, num processo de quebra espontânea de simetria, aparecerá um bóson escalar sem massa, bóson de goldstone.

### 1.3 Campos gravitacionais produzidos por defeitos topológicos

Durante as primeiras fases do Universo as componentes materiais estavam em estados físicos caracterizados por elevados graus de simetria e as interações eram unificadas. O arrefecimento do Universo, devido à expansão, promoveram as condições para que algumas dessas simetrias se quebrem espontaneamente [25, 26]. De acordo com os tipos de simetrias que foram quebradas podem ter sido formado vários tipos de defeitos topológicos, entre os quais paredes de domínio, cordas cósmicas, monopolos e texturas. O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria da matéria e pela natureza da transição de fase. As paredes são objetos bidimensionais que se formaram quando uma simetria discreta foi quebrada durante uma transição de fase. Uma rede de paredes, divide efetivamente o Universo em várias “células”. Este tipo de defeito tem algumas propriedades muito peculiares, sendo uma delas que o campo gravitacional de uma parede é repulsivo em vez de atrativo. Cordas cósmicas são objetos unidimensionais que se formaram quando uma simetria axial ou cilíndrica foi espontaneamente quebrada. São muito finas e podem-se estender ao longo do Universo visível. Monopolos têm dimensão zero, ou seja, são pontuais, e formam-se quando uma simetria esférica é quebrada.

Nesta seção Abordaremos apenas dois tipos de defeitos topológicos (corda cósmica e monopolo global), bem como o campo gravitacional gerado por eles.

---

<sup>4</sup>O conceito de geradores, assim também como algumas se suas propriedades, são estudadas no apêndice deste trabalho.

### 1.3.1 A métrica da corda cósmica

Devido ao esfriamento global do universo, a energia associada ao sistema irá diminuir para diferentes estados de vácuo. A escolha do vácuo é totalmente independente para as regiões separadas, muito além de uma correlação de comprimento ou algo mais, conduzindo assim, para a formação de grandes áreas do universo denominadas *domínios* [26, 25]. Quando estes domínios colapsam entre si, eles dão lugar à arestas na sua interface. Se desenharmos um círculo imaginário em torno de uma destas arestas com o ângulo  $\theta$  variando em  $2\pi$ , então por contratação deste ciclo chegaremos a um ponto onde não podemos ir mais longe sem deixar essa variedade  $M$ , onde o mesmo se encontra definido. Trata-se de uma pequena região do espaço-tempo em torno dessa linha onde a variável  $\theta$  não está definida e, por continuidade, o campo deve ser  $\phi = 0$ . A fim de minimizar o gradiente espacial da energia nestas pequenas regiões as linhas formam um defeito denominado corda cósmica [14, 15]. A corda cósmica é um defeito topológico unidimensional análogo ao vórtice no hélio líquido, é um objeto com massa muito grande, e deve ter tido um papel muito importante na formação de estruturas do Cosmos. Todas as cordas são fonte de um campo gravitacional newtoniano em seu redor, através do qual elas devem ter produzido perturbações na densidade de energia primordial do universo, tendo sido responsáveis pela inhomogeneidade da densidade de energia que eventualmente deu origem ao surgimento das galáxias. Não há potencial gravitacional newtoniano associado a mesma. A topologia da seção espacial em torno da corda é não trivial e isto produz alguns tipos de fenômenos gravitacionais, como o fenômeno conhecido como Lente gravitacional [27] e a polarização do vácuo(efeito quântico) [28].

Nosso objetivo agora é encontrar uma solução para as equações de Einstein, que descreva o campo gravitacional de uma corda cósmica, retilínea, homogênea e estática que tem densidade linear de massa  $\mu$  situada ao longo do eixo  $z$ . Nesse modelo, a corda não possuirá nenhuma dependência com o tempo, isto é, ela será uma invariante temporal. Admitiremos também uma simetria da corda em relação ao ângulo  $\phi$ , e por fim que a mesma se mantenha invariante

por “boosts” na direção  $z$ . Diante disto, podemos escrever o elemento de linha do espaço-tempo gerado pela mesma como [14]

$$ds^2 = A(\rho)^2 dt^2 - d\rho^2 - C(\rho)^2 d\theta^2 - D(\rho)^2 dz^2 . \quad (1.3-17)$$

Como estamos admitindo uma invariância por “boosts” na direção de  $z$ , de acordo com as transformações de Lorentz a relação  $(dt^2 - dz^2)$  deve ser um invariante, e isto só acontece se  $A(\rho)^2 = D(\rho)^2$ . Levando isto em conta, a métrica (1.3-17) torna-se

$$ds^2 = A(\rho)^2 (dt^2 - dz^2) - d\rho^2 - C(\rho)^2 d\theta^2 . \quad (1.3-18)$$

Para representar o interior de uma corda cósmica vamos admitir que o tensor energia-momento possui a seguinte forma

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \sigma(\rho) \text{diag}(1, 0, 0, 1) , \quad (1.3-19)$$

com  $\sigma(\rho) = \sigma_0$  para  $\rho < \rho_0$  e  $\sigma(\rho) = 0$  para  $\rho > \rho_0$ , onde  $\rho_0$  é o raio do núcleo da corda. A expressão para o tensor energia-momento dada por (1.3-19) corresponde ao de uma corda situada ao longo do eixo  $z$  e infinitamente longa. A forma do tensor  $T_{\mu}{}^{\nu}$  dada por (1.3-19) é consistente com as simetrias da corda. No limite em que a espessura  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\sigma(\rho)$  a equação (1.3-19) torna-se

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \mu \frac{\delta(\rho)}{\rho} \text{diag}(1, 0, 0, 1) , \quad (1.3-20)$$

sendo  $\mu$  a densidade linear da corda.

Os símbolos de Christoffel não nulos relativos a métrica (1.3-18) são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{A(\rho)} \frac{dA}{d\rho}, & \Gamma_{00}^1 &= A(\rho) \frac{dA}{d\rho}, \\ \Gamma_{22}^1 &= C(\rho) \frac{dC}{d\rho}, & \Gamma_{33}^1 &= A(\rho) \frac{dA}{d\rho}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{C(\rho)} \frac{dC}{d\rho}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{01}^0 . \end{aligned} \quad (1.3-21)$$

Usando estas expressões, podemos mostrar que as componentes não nulas do tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} , \quad (1.3-22)$$

são

$$R_0^0 = R_3^3 = \frac{1}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{A^2(\rho)} \left[ \frac{dA(\rho)}{d\rho} \right]^2, \quad (1.3-23)$$

$$R_1^1 = \frac{2}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} \quad (1.3-24)$$

e

$$R_2^2 = \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho}. \quad (1.3-25)$$

Substituindo (1.3-23)-(1.3-25), juntamente com (1.3-19), nas equações de Einstein,

$$R_\nu^\mu = 8\pi G \left( T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T_\alpha^\alpha \right), \quad (1.3-26)$$

encontramos:

$$\frac{1}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{A^2(\rho)} \left[ \frac{dA(\rho)}{d\rho} \right]^2 = 0 \quad (1.3-27)$$

$$\frac{2}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} = -8\pi G \sigma(\rho) \quad (1.3-28)$$

$$\frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} = -8\pi G \sigma(\rho) \quad (1.3-29)$$

Igualando as equações (1.3-28) e (1.3-29) e substituindo (1.3-27) no resultado, podemos mostrar que  $A(\rho)$  é uma constante. Então, por uma transformação conveniente de coordenadas, podemos escolher, sem nenhuma restrição,  $A(\rho) = 1$ . Levando isto em conta, a equação (1.3-28) torna-se:

$$\frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 C(\rho)}{d\rho^2} = -8\pi G \sigma(\rho). \quad (1.3-30)$$

O espaço-tempo produzido por esta métrica não possuirá uma singularidade cônica, sobre o eixo de simetria, se a função  $C(\rho)$  satisfizer as seguintes condições:

$$C(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 1. \quad (1.3-31)$$

A densidade linear da corda é definida como sendo a integral de  $T_0^0$  sobre a superfície bidimensional  $t$  e  $z$  constantes, sendo dada por

$$\mu = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g} T_0^0 . \quad (1.3-32)$$

Substituindo o determinante da métrica  $g$  e a componente  $T_0^0$  do tensor momento-energia encontramos

$$\mu = \frac{1}{4G} \left[ 1 - \left. \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow \infty} \right] . \quad (1.3-33)$$

Admitindo que a corda cósmica seja muito fina, isto é, que o tensor energia-momento seja dado por (1.3-20), temos que a função  $\sigma(\rho)$  será nula, exceto quando  $\rho = 0$ . Então, de acordo com a equação (1.3-30), vemos que, na região exterior à corda, o termo  $dC/d\rho$  é constante. Sendo assim, a equação acima torna-se:

$$\mu = \frac{1}{4G} \left[ 1 - \frac{dC}{d\rho} \right] , \quad (1.3-34)$$

de onde deduzimos que

$$C(\rho) = (1 - 4\mu G) \rho . \quad (1.3-35)$$

Com isso, a métrica que descreve o espaço-tempo produzido por uma corda cósmica, será dada por:

$$ds^2 = dt^2 - (1 - 4\mu G)^2 d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - dz^2 \quad (1.3-36)$$

Como era de se esperar, quando  $\mu \rightarrow 0$ , a métrica da corda (1.3-36) se reduz à métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas. Isto quer dizer que, quando não existe corda o espaço-tempo é plano. No entanto, podemos ver que, embora tenhamos  $\mu \neq 0$ , o espaço-tempo (1.3-36) é localmente plano. De fato, se fizermos a mudança de coordenada  $\theta' = (1 - 4\mu G) \theta$ , a métrica (1.3-36) torna-se

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta'^2 - dz^2, \quad (1.3-37)$$

a qual é métrica do espaço plano de Minkowski. No entanto, o ângulo  $\theta'$  varia entre 0 e  $2\pi(1 - 4\mu G)$ . Deste modo, o espaço-tempo dado pelo elemento de linha (1.3-36) é localmente plano, exceto em  $\rho = 0$ . O espaço-tempo da corda difere do espaço-tempo de Minkowski apenas globalmente, e corresponde ao espaço de Minkowski a menos de uma fatia compreendida pelo ângulo  $8\pi\mu G$ . Então, a seção  $(t, z) = \text{const.}$  do espaço-tempo da corda tem a geometria de um cone e  $\rho = 0$  é uma singularidade física, e não uma singularidade de coordenadas que acontece no caso em que o ângulo  $\theta$  tem a sua variação integrável entre 0 e  $2\pi$ , e portanto na ausência da corda.

### 1.3.2 A métrica do monopolo global

Os monopolos globais são objetos topológicos pesados, esfericamente simétricos, formados na transição de fase de um sistema devido a um processo de quebra espontânea de simetria global de gauge. O modelo mais simples que reproduz esses objetos foi proposto por Barriola e Vilenkin [3]. Este modelo é constituído de um isotripleto de campo escalar que auto-interage,  $\phi^a$ , com  $a = 1, 2, 3$ . Por um processo de quebra de simetria associada ao lagrangeano do sistema do grupo  $O(3)$  para  $U(1)$ , são obtidas configurações de campo denominadas monopolo global. O campo de matéria escalar desempenha o papel de um parâmetro de ordem o qual fora do núcleo do monopolo adquire um valor não nulo.

A densidade Lagrangiana que descreve o monopolo global é dada por [3]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi^a) (\partial^\nu \phi^a) - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - \eta^2)^2 \right]. \quad (1.3-38)$$

A configuração do campo que descreve o monopolo é

$$\phi^a = \eta f(r) \frac{x^a}{r}, \quad (1.3-39)$$

onde  $x^a x^a = r$ . Para termos quebra espontânea de simetria de gauge, devemos impor a condição de que no infinito,  $\phi^a \phi^a \rightarrow \eta^2$ , onde  $\eta$  é a escala de energia onde se dá esta quebra. Assim, devemos impor a condição de que  $f(r) \rightarrow 1$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

Devido a simetria do problema, podemos escrever a métrica como sendo:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (1.3-40)$$

Assim, substituindo (1.3-39) em (1.3-38) e tomando a equação de Lagrange,

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \right] - \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial\phi^a} = 0 , \quad (1.3-41)$$

obtemos a seguinte equação diferencial para a função  $f(r)$

$$\frac{1}{A}f'' + \left[ \frac{2}{Ar} + \frac{1}{2B} \left( \frac{B}{A} \right)' \right] f' - \frac{2f}{r^2} - \lambda\eta^2 f(f^2 - 1) = 0 , \quad (1.3-42)$$

onde a linha indica uma derivada com respeito a variável  $r$ .

Usando a expressão do tensor energia momento, a qual é definida por [20, 36]

$$T^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} , \quad (1.3-43)$$

onde

$$S = \int d^4x' \sqrt{-g(x')} \mathcal{L}(\phi^a(x'), \partial\phi^a(x')) , \quad (1.3-44)$$

podemos mostrar que as componentes não nulas deste tensor são dadas por:

$$\begin{aligned} T^t_t &= \eta^2 \left[ \frac{f^2}{r^2} + \frac{(f')^2}{2A} + \frac{\lambda}{4}\eta^2(f^2 - 1)^2 \right] , \\ T^r_r &= \eta^2 \left[ \frac{f^2}{r^2} - \frac{(f')^2}{2A} + \frac{\lambda}{4}\eta^2(f^2 - 1)^2 \right] , \\ T^\theta_\theta &= T^\varphi_\varphi = \eta^2 \left[ \frac{(f')^2}{2A} + \frac{\lambda}{4}\eta^2(f^2 - 1)^2 \right] . \end{aligned} \quad (1.3-45)$$

A partir da métrica (1.3-40), obtemos as seguintes componentes não-nulas do tensor de Ricci:

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} , \quad (1.3-46)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r}{2A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{A} , \quad (1.3-47)$$

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA} , \quad (1.3-48)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} . \quad (1.3-49)$$

Combinando convenientemente as equações acima, teremos:

$$\frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{tt}}{2B} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} = -\frac{1}{2} (R^r_r - R^t_t) - R^\theta_\theta = \frac{A'}{rA^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2A}, \quad (1.3-50)$$

e, conseqüentemente

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 + r^2 \left[ \frac{1}{2} (R^r_r - R^t_t) + R^\theta_\theta \right]. \quad (1.3-51)$$

Com o auxílio das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (1.3-52)$$

a equação (1.3-50) torna-se:

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - 8\pi G r^2 T^t_t. \quad (1.3-53)$$

Usando o fato que  $A(0) = 1$ , encontramos:

$$A(r)^{-1} = 1 - 8\pi G \eta^2 - \frac{2GM(r)}{r}, \quad (1.3-54)$$

onde  $M(r)$  é dado por

$$M(r) = 4\pi\eta^2 \int_0^r \left[ \frac{(f')^2}{2A} + \frac{f^2 - 1}{r^2} + \frac{\lambda}{4}\eta^2(f^2 - 1) \right] r^2 dr. \quad (1.3-55)$$

Para acharmos a outra componente do tensor métrico escrevemos

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -R^r_r + R^t_t = \frac{1}{rA} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right). \quad (1.3-56)$$

Usando as equações de Einstein e a condição de que

$$A(r)B(r)|_{r=\infty} = 1, \quad (1.3-57)$$

obtemos

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} \exp \left[ -8\pi G \int_\infty^r (T^r_r - T^t_t) r A(r) dr \right]. \quad (1.3-58)$$

Fora do núcleo do monopolo  $f(r) \sim 1$  e o tensor energia-momento pode ser aproximado por

$$T^t_t \sim T^r_r \sim \frac{\eta^2}{r^2}, \quad T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi \sim 0. \quad (1.3-59)$$

Então, a partir das equações (1.3-58) e (1.3-54), podemos concluir que, nessa região

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2G\mathcal{M}}{r}, \quad (1.3-60)$$

onde  $\mathcal{M} = M(\infty)$  é a massa do monopolo <sup>5</sup>.

Substituindo (1.3-60) em (1.3-40), desprezando o termo de massa e redefinindo a variável  $t$ , temos que a métrica do espaço-tempo exterior ao monopolo é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\alpha^2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.3-61)$$

onde  $\alpha^2 = 1 - 8\pi G\eta^2 < 1$ .

O espaço-tempo descrito por (1.3-61) tem algumas características muito interessantes, como por exemplo: O espaço-tempo não é plano, ou seja,  $R = R^\nu_\nu = 2\frac{(1-\alpha^2)}{r^2}$ ; Não apresenta potencial Newtoniano, pois  $g_{tt} = 1$ ; A superfície  $\theta = \frac{\pi}{2}$  tem a geometria de um cone com déficit angular  $\delta\Omega = 8\pi^2 G\eta^2$ ; O ângulo sólido associado a uma esfera de raio unitário é  $4\pi\alpha^2$ , portanto menor do que  $4\pi$ . Assim existe um déficit de ângulo sólido igual a  $\delta\Omega = 32\pi^2 G\eta^2$ ; Como  $T_{00} \sim \eta^2/r^2$ , fora do monopolo global a energia total diverge linearmente para grandes distâncias,  $E(r) \sim 4\pi G\eta_0^2 r$ .

---

<sup>5</sup>O símbolo de infinito significa apenas que estamos tomando pontos distantes do centro do monopolo.

# Capítulo 2

## Funções de Green

Um dos processos, pelo qual, nos permite determinar a solução exata de equações diferenciais ordinárias (E.D.O's) e/ou parciais, é conhecido como método de *Green*. Essa técnica matemática muito nos auxiliará no desenvolvimento de nossos cálculos, pois, todo o processo do cálculo da auto-interação eletrostática de nosso trabalho, estará baseado diretamente numa das soluções de nossas E.D.O's, que será dada por uma função de Green.

Em matemática, uma função de Green é um tipo de função usada para resolver equações diferenciais não homogêneas sujeitas a condições de contorno. Tecnicamente, uma função de Green<sup>1</sup> de um operador diferencial unidimensional linear  $L$  atuando numa distribuição sobre uma variedade  $M$ , num ponto  $x'$ , é qualquer das soluções de

$$Lf(x) = \delta(x - x') \quad (2.0-1)$$

Sendo  $\delta(x - x')$  a função distribuição delta de Dirac.

### 2.1 Funções de Green em uma dimensão

Nesta seção abordaremos a função de Green unidimensional, especificamente determinaremos a função de Green para um operador tipo Sturm-Liouville, muito usado

---

<sup>1</sup>George Green (Sneinton, 14 de Julho de 1793-Nottingham, 31 de Maio de 1841) matemático e físico inglês. Na sua obra *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism* (1828), introduziu a noção de função potencial no estudo dos campos magnéticos. O teorema de Green, que demonstrou em 1828 facilitou bastante o estudo das funções.

em várias situações físicas onde problemas recaem em E.D.O's que podem ser colocadas na forma de Sturm-Liouville.

### 2.1.1 Função de Green do operador Sturm-Liouville

Considere a equação diferencial não homogênea

$$\mathcal{L}_{(x)}y(x) = f(x) \quad (2.1-2)$$

onde,

$$\mathcal{L}_{(x)} = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) - s(x) \quad (2.1-3)$$

é o operador diferencial de Sturm-Liouville. Qualquer equação diferencial linear não-homogênea pode ser escrita nessa forma [21].

Denomina-se função de Green do operador diferencial  $\mathcal{L}$ , a função de duas variáveis  $G(x, x')$  que satisfaz a equação:

$$\mathcal{L}_{(x)}G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (2.1-4)$$

ou mais explicitamente

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right) - S(x)G(x, x') = \delta(x - x') , \quad (2.1-5)$$

válida para um intervalo  $a < x < b$ . A função de Green deve satisfazer a algumas condições de contorno, sejam elas:

*i)* A mesma deve satisfazer sua equação homogênea associada, para  $x \neq x'$  temos;

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right) - s(x)G(x, x') = 0$$

*ii)* para sua variável  $x$  limitada num intervalo  $a \leq x \leq b$ , ela deve satisfazer as condições do

problema específico nesse intervalo e nas suas fronteiras;

iii) Deve ser contínua no ponto  $x = x'$ ;

iv) Sua derivada não será contínua em  $x = x'$ , terá uma descontinuidade de salto proporcional a  $\frac{1}{p(x')}$ .

Seja o intervalo da função  $a \leq x \leq b$ , as condições de contorno para este intervalo são as seguintes:

$$\alpha_1 G(a, x') + \alpha_2 \frac{dG(a, x')}{dx} = 0 \quad (2.1-6)$$

$$\beta_1 G(b, x') + \beta_2 \frac{dG(b, x')}{dx} = 0 \quad , \quad (2.1-7)$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, não simultaneamente nulas. Essas condições de contorno são padrões para um intervalo finito  $[a, b]$ , que abrangem as condições de Dirichlet<sup>2</sup>, Neumann<sup>3</sup> e outras intermediárias [22].

Dividamos nosso intervalo inicial em duas partes

$$a \leq x \leq x' \text{ e } x' \leq x \leq b \quad . \quad (2.1-8)$$

Sejam  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  suas respectivas soluções não triviais da equação diferencial homogênea, satisfazendo as condições de contorno nos pontos  $x = a$  e  $x = b$ , respectivamente. Nestes termos temos:

$$\alpha_1 y_1(x = a) + \alpha_2 y_1'(x = a) = 0 \quad , \quad (2.1-9)$$

$$\beta_1 y_2(x = b) + \beta_2 y_2'(x = b) = 0 \quad , \quad (2.1-10)$$

---

<sup>2</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 de fevereiro de 1805, Düren - 5 de maio de 1859, Göttingen) foi um matemático alemão a quem se atribui a moderna definição formal de função. Nasceu em Düren, onde seu pai era chefe dos Correios. Foi educado na Alemanha e na França, onde foi aluno dos mais renomados matemáticos da época.

<sup>3</sup>John von Neumann (28 de Dezembro de 1903 - 8 de Fevereiro de 1957) foi um matemático húngaro de origem judaica, naturalizado norte-americano nos anos 30 do século XX. Desenvolveu importantes contribuições em Teoria dos Conjuntos, Análise Funcional, Teoria Ergódica, Mecânica Quântica, entre outras áreas.

que como já foi dito  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes que não podem ser simultaneamente nulas. Analizemos o primeiro intervalo  $a \leq x \leq x'$ , que tem como solução  $y_1(x)$ , e que em  $x = a$  obedece a condição de contorno:

$$\alpha_1 y_1(x = a) + \alpha_2 y_1'(x = a) = 0 . \quad (2.1-11)$$

A linha representa a derivada da função com respeito a  $x$ . Pelo que foi imposto sobre a função de Green, em  $x = a$ , ela também deve satisfazer as mesmas condições de contorno de  $y_1(x)$ ,

$$\alpha_1 G(a, x') + \alpha_2 G'(a, x') = 0 , \quad (2.1-12)$$

o que pela condição de Wronskiano implica na dependência linear entre  $y_1(x)$  e  $G(x, x')$  para o ponto  $x = a$ . Segue-se que o Wronskiano fica sendo

$$y_1'(a)G(a, x') - y_1(a)G'(a, x') = 0 , \quad (2.1-13)$$

e pela propriedade<sup>4</sup> do Wronskiano<sup>5</sup> podemos estender que o mesmo se anula em todos os pontos do intervalo  $a \leq x \leq x'$ :

$$y_1'(x)G(x, x') - y_1(x)G'(x, x') = 0 , \quad (2.1-14)$$

que também nos arremete a afirmar que devido a dependência linear entre elas em todo o intervalo, a solução  $y_1(x)$  é apenas um múltiplo de  $G_1(x, x')$ , isto é

$$G_1(x, x') = c_1 y_1(x) , \quad (2.1-15)$$

onde  $c_1$  é uma constante a ser determinada pelas condições de contorno. Se fizermos a mesma análise no intervalo  $x' \leq x \leq b$  que tem como solução a função  $y_2(x)$  e satisfaz as condições de contorno impostas sobre a solução  $y_2(x)$  no ponto  $x = b$ , chegaremos por meio de analogia que:

$$G_2(x, x') = c_2 y_2(x) , \quad (2.1-16)$$

---

<sup>4</sup>O Wronskiano de uma função é identicamente igual a zero ou nunca se anula para um ponto particular  $x$  [22].

<sup>5</sup>O Wronskiano entre duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  linearmente dependentes entre si é dado por:  $w = f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0$ .

pela condição imposta a  $G(x, x')$ , que a mesma deve ser contínua em  $x = x'$  temos:

$$c_1 y_1(x') - c_2 y_2(x') = 0, \quad (2.1-17)$$

e sua derivada será descontínua em  $x = x'$ , assim

$$c_1 y_1'(x') - c_2 y_2'(x') = \frac{1}{p(x')}, \quad (2.1-18)$$

resolvendo o sistema imposto pelas equações (2.1-17) e (2.1-18) ficamos com,

$$c_1 = \frac{y_2(x')}{p(x')W(x')} \quad (2.1-19)$$

e

$$c_2 = \frac{y_1(x')}{p(x')W(x')}. \quad (2.1-20)$$

E nossa solução para  $G(x, x')$  é

$$G(x, x') = \begin{cases} c_1 y_1(x), & \text{para } a \leq x \leq x' \\ c_2 y_2(x), & \text{para } x' \leq x \leq b \end{cases}$$

substituindo as constantes  $c_1$  e  $c_2$  chegamos a uma expressão final para a função de Green em um intervalo fechado  $[a, b]$

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(x')}{P(x')W(x')}, & \text{para } a \leq x \leq x' \\ \frac{y_2(x)y_1(x')}{P(x')W(x')}, & \text{para } x' \leq x \leq b, \end{cases}$$

onde  $W(x')$  é o Wronskiano de  $y_1(x')$  e  $y_2(x')$ , que deve sempre ser diferente de zero para que  $G(x, x')$  exista.

### 2.1.2 Autofunções e autovalores do operador Sturm-Liouville

Listemos abaixo as propriedades básicas das autofunções e autovalores de problemas que envolvem operadores tipo Sturm-Liouville regulares [30].

- i)- Os autovalores são reais.
- ii)- As autofunções correspondentes a autovalores distintos são ortonormais, com peso  $w(x)$ , isto é,

$$\int_a^b u_\lambda(x) * u_\mu(x) w(x) dx = 0 . \quad (2.1-21)$$

iii)- Existe uma infinidade numerável de autovalores reais  $\lambda_n$ , e o único ponto de acumulação desses autovalores é  $+\infty$  (o número de autovalores negativos é finito).

iv)- O conjunto das autofunções do problema de Sturm-Liouville regular é completo, para a classe das funções  $f(x)$  tais que

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty , \quad (2.1-22)$$

onde a integral deve ser interpretada no sentido de Lebesgue<sup>6</sup>

Diz-se que uma autofunção está normalizada se

$$\int_a^b |u_n(x)|^2 w(x) dx = 1 . \quad (2.1-23)$$

Qualquer função  $f(x)$  satisfazendo (2.1-22) pode ser desenvolvida em série

$$f(x) = \sum a_n u_n(x) \quad (2.1-24)$$

com

$$a_n = \int_a^b f(x) u_n(x) * w(x) dx . \quad (2.1-25)$$

Admite-se também que a função  $\delta(x - x')$  possa ter um desenvolvimento desse tipo [30], assim têm-se:

$$\delta(x - x') = w(x') \sum_n u_n(x) u_n(x') , \quad (2.1-26)$$

para  $w(x') = 1$  obtêm-se a relação de completeza para suas autofunções

$$\delta(x - x') = \sum_n u_n(x) u_n(x') . \quad (2.1-27)$$

Consideremos a equação diferencial não homogênea

$$\mathcal{L}(x)f(x) + kw(x)f(x) = g(x) . \quad (2.1-28)$$

---

<sup>6</sup>A integral de Lebesgue é uma generalização do conceito de integral de Riemann, apresenta diversas vantagens em relação à integral convencional sobretudo em relação a processos de limite.

Se a constante  $k$  que figura nesta equação não for um dos autovalores do problema de Sturm-Liouville, a equação 2.1-22 tem como solução única  $f(x)$ , obtida através da função de Green correspondente e suas condições de contorno.

## 2.2 Formas da função de Green em 2 e 3 dimensões

De modo a generalizar para o espaço em três dimensões, o método apresentado anteriormente, façamos uma modificação no operador diferencial de Sturm-Liouville. Vamos assumir que nosso operador auto-adjunto  $\mathcal{L}$  tem sua forma mais geral dada por

$$\mathfrak{S} = \vec{\nabla} \cdot [P(r)\vec{\nabla}] + q(r). \quad (2.2-29)$$

Seja o teorema de Green:

$$\int_v (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \nu - \nu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \mu) d\tau = \int_s (\mu \vec{\nabla} \nu - \nu \vec{\nabla} \mu) \cdot ds, \quad (2.2-30)$$

podemos fazer uma generalização utilizando o operador auto-adjunto  $\mathfrak{S}$

$$\int_v (\mu \mathfrak{S}' \nu - \nu \mathfrak{S}' \mu) d\tau = \int_s (\mu \vec{\nabla}' \nu - \nu \vec{\nabla}' \mu) \cdot ds' \quad (2.2-31)$$

de modo que para  $P(\vec{r}) = 1$  e  $q(\vec{r}) = 0$  voltamos para o nosso caso particular. A linha indica que o operador atua apenas na variável  $\vec{r}'$ .

Para verificarmos essa generalização façamos  $\mu(\vec{r}_2) = y(\vec{r}_2)$  ;  $\nu(\vec{r}_2) = G(\vec{r}, \vec{r}')$  e apliquemos ao teorema de Green.

$$\int (G(\vec{r}, \vec{r}') \mathfrak{S}' y(r') - y(r') \mathfrak{S}' G(\vec{r}, \vec{r}')) d\tau' = \quad (2.2-32)$$

$$\int P(\vec{r}') (G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' y(r') - y(r') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}')) \cdot ds' \quad (2.2-33)$$

usando

$$\mathfrak{S}G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.2-34)$$

ficamos com

$$y(\vec{r}) = \int_v G(\vec{r}, \vec{r}') f(r') d\tau' + \int_s P(\vec{r}_2) (G(\vec{r}, \vec{r}')) \nabla' y(r') - y(r') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot ds \quad (2.2-35)$$

Nossa solução então aparece como uma soma de uma integral de volume mais uma integral de superfície. Se ambas as funções  $y(\vec{r}')$  e  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  satisfazem as condições de contorno gerais, a integral de superfície deve desaparecer e nossa solução fica sendo apenas

$$y(\vec{r}) = \int_v G(\vec{r}, \vec{r}') f(r') d\tau' \quad (2.2-36)$$

Particularizemos esse método agora para determinarmos as funções de Green relativas a equação de Poisson com simetria esférica e cilíndrica.

### 2.2.1 Função de Green do operador de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace é dada por [18]

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (2.2-37)$$

sendo  $\nabla^2$  o operador laplaciano ordinário. Considere a mesma equação escrita em coordenadas esféricas dada por,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.2-38)$$

Para as três variáveis independentes  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  pode-se utilizar o método de separação de variáveis. Seja nossa função  $\Psi(r, \theta, \phi)$ , reescrita como

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.2-39)$$

substituindo em (2.2-38)

$$\frac{\Theta(\theta)\Phi(\phi)}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{R(r)\Phi(\phi)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{R(r)\Theta(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0. \quad (2.2-40)$$

A equação com dependência em  $\theta$  é a equação associada de Legendre, que tem como solução os polinômios associados de Legendre;

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta) \quad (2.2-41)$$

Esses polinômios tem a seguinte relação de ortogonalidade entre si

$$\int_0^\pi P_{n'}^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,n'} \quad (2.2-42)$$

fazendo  $x = \cos \theta$  e normalizando esses polinômios num intervalo fechado, temos

$$|A|^2 \int_{-1}^1 P_{n'}^m(x) P_n^m(x) dx = 1 \quad (2.2-43)$$

$$A = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}. \quad (2.2-44)$$

Temos agora uma função ortonormalizada para os polinômios associados de Legendre

$$\mathfrak{P}_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) \quad (2.2-45)$$

Sendo a função  $\Phi(\phi)$  ortonormal com respeito ao ângulo  $\phi$  e a função  $\Theta(\theta)$  também ortonormal com respeito ao ângulo  $\theta$ , nós podemos definir uma outra função como sendo um produto entre ambas as funções

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.2-46)$$

que é função dos dois ângulos, os quais são ortonormais sobre a superfície da esfera, a qual é denominada de harmônicos esféricos e também possuem uma propriedade de ortogonalidade entre sí,

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_n^{m*}(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}. \quad (2.2-47)$$

Uma importante propriedade dos harmônicos esféricos é o fato de que qualquer função contínua  $f(\theta, \phi)$  sobre a superfície da esfera pode ser expandida em uma série uniformemente

convergente através dos mesmos

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (2.2-48)$$

que é uma série de Laplace. Como uma dedução alternativa de nossa função de Green, vamos assumí-la como sendo uma expansão em harmônicos esféricos, tal como

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi'), \quad (2.2-49)$$

a função  $g_l(r, r')$  será determinada posteriormente. Pela definição de função de Green nós devemos determinar  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , tal que;

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.2-50)$$

sendo,

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2}, \quad (2.2-51)$$

$\vec{L}^2$  é o operador momento angular ordinário, dado por

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.2-52)$$

A função delta também pode ser escrita como uma expansão em termo dos harmônicos esféricos

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta', \phi'). \quad (2.2-53)$$

Substituindo 2.2-49, 2.2-53 em 2.2-50 e utilizando o fato de que os harmônicos esféricos são auto-funções do operador momento angular, sendo seus auto-valores  $l(l+1)$ , nós chegamos a seguinte expressão:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta', \phi') \frac{1}{r^2} \left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d g_l(r, r')}{dr} \right) - l(l+1) g_l(r, r') \right] = \quad (2.2-54)$$

$$-\frac{1}{r} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta', \phi'), \quad (2.2-55)$$

multiplicando toda essa expressão por  $\sin \theta$  e utilizando a propriedade de ortogonalidade dos harmônicos esféricos (2.2-47) nós obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} g_l(r, r') \right] - l(l+1)g_l(r, r') = \delta(r - r') . \quad (2.2-56)$$

A função  $g_l(r, r')$  é contínua em  $r = r'$ , porém, sua derivada terá uma descontinuidade no mesmo ponto do tipo

$$\frac{dg_l^1(r, r')}{dr} - \frac{dg_l^2(r, r')}{dr} = -\frac{1}{r^2} . \quad (2.2-57)$$

Para uma região em que  $r \neq r'$  a equação (2.2-56) tem duas regiões distintas e uma solução diferente para cada uma delas, sejam elas

$$g_l(r, r') = \begin{cases} c_1 g_l^1(r, r'), & r < r' \\ c_2 g_l^2(r, r'), & r > r' \end{cases}$$

na primeira região  $r < r'$ , devemos exigir que quando  $r \rightarrow 0$  a solução  $g_l^1(r, r')$  seja finita, e na segunda parte  $r > r'$  temos que quando  $r \rightarrow \infty$  a solução  $g_l^2(r, r') = 0$ , nesses termos ficamos com a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 g_l(r, r')}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg_l(r, r')}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = 0 \quad (2.2-58)$$

EDO's desse tipo admitem uma solução em série de potência como segue abaixo,

$$g_l(r, r') = c_1 r^{\lambda_l}, \quad (2.2-59)$$

tomando suas respectivas derivadas e substituindo em (2.2-58) obtemos os seguintes resultados para  $\lambda_l$ :

$$\lambda_l^1 = l \text{ e } \lambda_l^2 = -l - 1, \quad (2.2-60)$$

nossa solução fica sendo então parcialmente essa

$$g_l(r, r') = \begin{cases} c_1 r^l, & r < r' \\ c_2 r^{-l-1}, & r > r' \end{cases}$$

Para determinarmos as constantes  $c_1$  e  $c_2$  utilizaremos a continuidade de  $g_l(r, r')$  e a descontinuidade de sua derivada no ponto  $r = r'$ .

Através da continuidade obtemos

$$c_1 = c_2 r'^{-1-2l} \quad (2.2-61)$$

e da descontinuidade

$$-c_2(l+1)r'^{-l-2} - lc_1 r'^{l-1} = -\frac{1}{r^2}. \quad (2.2-62)$$

Resolvendo o sistema imposto por (2.2-61) e (2.2-62) encontramos os seguintes resultados para  $c_1$  e  $c_2$

$$c_1 = \frac{r'^{-l-1}}{(2l+1)} \quad (2.2-63)$$

e

$$c_2 = \frac{r'^l}{(2l+1)}, \quad (2.2-64)$$

substituindo em nossa solução  $g_l(r, r')$

$$g_l(r, r') = \frac{1}{(2l+1)} \begin{cases} \frac{r^l}{r^{l+1}}, & r < r' \\ \frac{r'^l}{r^{l+1}}, & r > r' \end{cases}$$

e de uma forma mais compacta

$$g_l(r, r') = \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}, \quad (2.2-65)$$

substituindo esse resultado obtido para  $g_l(r, r')$  em nossa função de Green expandida em termo dos harmônicos esféricos (2.2-49), obtemos então nossa expressão final

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi'). \quad (2.2-66)$$

Chegamos então a um resultado para uma função de Green apropriada para lidar com problemas físicos de simetria esférica.

### 2.2.2 Função de Green do operador de Laplace em coordenadas cilíndricas

Análogo ao que foi feito na subseção anterior, nós também devemos encontrar uma solução para a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, sabendo que um sistema de coordenadas adequado ao problema físico facilita grandemente a resolução do mesmo em seus cálculos.

Seja a equação de Laplace escrita como

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = 0 . \quad (2.2-67)$$

A função de Green, devemos satisfazer a equação

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (2.2-68)$$

Reescrevendo em termos de coordenadas cilíndricas, obtemos:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z')}{\rho} , \quad (2.2-69)$$

A nossa função de Green através de uma expansão pode ser colocada da seguinte forma

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(\rho, \rho') e^{im\Delta\theta} \int_0^{\infty} \cos \kappa(z - z') d\kappa . \quad (2.2-70)$$

Para a função delta [21]

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Delta\theta} \int_0^{\infty} \cos \kappa(z - z') d\kappa \quad (2.2-71)$$

Substituindo  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  e  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  nas formas dadas, respectivamente, por (2.2-70) e (2.2-71), ficamos com a seguinte equação integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Delta\theta} \int_0^{\infty} \cos \kappa(z - z') d\kappa \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{dg_m(\rho, \rho')}{d\rho} \right] - \left( \frac{m}{\rho} \right)^2 g_m(\rho, \rho') - \kappa^2 g_m(\rho, \rho') \right) = \\ \frac{\delta(\rho, \rho')}{2\pi^2 \rho} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Delta\theta} \int_0^{\infty} \cos \kappa(z - z') d\kappa \end{aligned} \quad (2.2-72)$$

A equação radial para  $g_m(\rho, \rho')$  é encontrada satisfazendo a

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{dg_m(\rho, \rho')}{d\rho} \right] - \left( \frac{m^2}{\rho} + k^2 \rho \right) g_m(\rho, \rho') = \delta(\rho, \rho') \quad (2.2-73)$$

Para  $\rho \neq \rho'$  esta é a equação modificada de Bessel, e suas soluções homogêneas são as funções modificadas de Bessel,  $I_m(\kappa\rho)$  e  $K_m(\kappa\rho)$ . Assim, podemos escrever

$$g_m(\rho, \rho') = c_1 I_m(\kappa\rho) + c_2 K_m(\kappa\rho), \quad (2.2-74)$$

impondo que  $g_m(\rho, \rho')$  seja finita quando  $\rho \rightarrow 0$  devemos tomar  $c_2 = 0$  na região  $\rho < \rho'$ . Dessa forma ficamos com

$$g_m^1(\rho, \rho') = c_1 I_m(\kappa\rho) . \quad (2.2-75)$$

Para a outra região  $\rho > \rho'$  nossa solução deve ir para zero quando  $\rho \rightarrow \infty$ , sendo assim, quem é divergente nesse caso é a solução  $I_m(\kappa\rho)$ , e nós ficamos com

$$g_m^2(\rho, \rho') = c_2 K_m(\kappa\rho) . \quad (2.2-76)$$

Quando  $\rho = \rho'$  a sua derivada tem uma descontinuidade do tipo

$$\frac{dg_m^2(\rho, \rho')}{d\rho} - \frac{dg_m^1(\rho, \rho')}{d\rho} = \frac{1}{\rho'} . \quad (2.2-77)$$

Utilizando essa descontinuidade da derivada em  $\rho = \rho'$  e a continuidade da função, nós determinamos as constantes  $c_1$  e  $c_2$

$$c_1 = K_m(\kappa\rho) \quad (2.2-78)$$

e

$$c_2 = I_m(\kappa\rho) \quad (2.2-79)$$

Podemos escrever então de maneira geral

$$g_m(\rho, \rho') = I_m(\kappa\rho_{<}) K_m(\kappa\rho_{>}) . \quad (2.2-80)$$

Por fim, substituindo esse resultado encontrado em (2.2-70) chegamos a nossa expressão final da função de Green para um caso de simetria cilíndrica.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\kappa\rho) K_m(\kappa\rho) e^{im\Delta\theta} \int_0^{\infty} \cos \kappa(z - z') d\kappa . \quad (2.2-81)$$

- Propriedade de simetria da função de Green

Uma importante propriedade dessas funções é a simetria em suas duas variáveis  $r$  e  $r'$ . vejamos essa propriedade em mais detalhes. Vamos utilizar  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  satisfazendo a equação de Sturm-Liouville:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( P(\vec{r}) \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_1) \right) + \lambda q(r) G(\vec{r}, \vec{r}_1) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) , \quad (2.2-82)$$

que corresponde a uma fonte no ponto  $r = r'$ . Aqui  $P(\vec{r})$  e  $q(\vec{r})$  são funções bem comportadas, porém arbitrárias em  $\vec{r}$ .

Seja uma outra função de Green que satisfaça a mesma equação (2.2-82), porém, com subíndice 2

$$\vec{\nabla} \cdot \left( P(\vec{r}) \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_2) \right) + \lambda q(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_2) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2.2-83)$$

multiplicando (2.2-82) por  $G(\vec{r}, \vec{r}_2)$  e (2.2-83) por  $G(\vec{r}, \vec{r}_1)$  e subtraindo uma da outra, temos:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (G(\vec{r}, \vec{r}_2) P(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_1) + G(\vec{r}, \vec{r}_1) P(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_2)) = \\ G(\vec{r}, \vec{r}_2) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) - G(\vec{r}, \vec{r}_1) \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) . \end{aligned} \quad (2.2-84)$$

Integrando sobre todo o volume  $v$ , usando o teorema de Green e a propriedade de filtragem da função delta obtemos;

$$\begin{aligned} \int_v \nabla \cdot (G(\vec{r}, \vec{r}_2) P(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_1) - G(\vec{r}, \vec{r}_1) P(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_2)) d^3r = \\ - \int_v G(\vec{r}, \vec{r}_2) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) d^3\vec{r} + \int_v G(\vec{r}, \vec{r}_1) \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) d^3r \end{aligned} \quad (2.2-85)$$

$$\begin{aligned} \int_s (G(\vec{r}, \vec{r}_2) P(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_1) - G(\vec{r}, \vec{r}_1) P(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_2)) \cdot ds = \\ -G(\vec{r}, \vec{r}_2) + G(\vec{r}, \vec{r}_1) , \end{aligned} \quad (2.2-86)$$

sendo  $s$  a superfície bidimensional que encobre o volume  $v$ . Usando o fato que as duas funções  $G(\vec{r}, \vec{r}_1)$  e  $G(r, \vec{r}_2)$  tem o mesmo valor sobre a superfície de integração  $s$ . o lado esquerdo em (2.2-86) é igual a zero, e nossa demonstração de simetria da função é verificada na expressão

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G(\vec{r}_2, \vec{r}_1) . \quad (2.2-87)$$

Onde se vê claramente que  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  é simétrica em seus índices  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ .

## Capítulo 3

# Auto-interação Eletrostática

Um fenômeno que é bem conhecido na literatura consiste na influência que o campo gravitacional exerce sobre o potencial eletrostático gerado por uma partícula teste carregada [1, 6, 16, 17]. Como sabemos, segundo a Teoria da Relatividade Geral, um campo gravitacional induz uma curvatura no espaço-tempo. Esta curvatura, por sua vez, provoca distorções nas linhas de campo do potencial eletrostático gerado por um partícula, fazendo com que esta partícula sofra uma força finita sobre si mesma. Contudo, mesmo na ausência de curvatura, tal como acontece no espaço-tempo de uma corda cósmica infinita [1], foi mostrado que uma carga pontual [5, 6] ou uma distribuição linear de carga [19], neste espaço-tempo, fica submetida a uma auto-força eletrostática repulsiva e finita. Neste caso, a origem desta força é a distorção no campo da partícula causada pela conicidade deste espaço-tempo. Portanto, as modificações do potencial eletrostático são provenientes de dois fatores, um de origem geométrica e outro de origem topológica.

Neste capítulo, faremos uma breve revisão sobre o fenômeno da auto-interação no espaço-tempo de um monopolo global e de uma corda cósmica. Antes, porém, apresentaremos a generalização das equações de Maxwell para o espaço curvo.

### 3.1 O espaço-tempo da relatividade geral

O elemento de linha,  $ds^2$ , de um referencial inercial, em coordenadas cartesianas, ( $x^\mu = (t, x, y, z)$ ), é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1-1)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  é o tensor métrico de Minkowski. Este elemento de linha é invariante frente a uma transformação de Lorentz. Para um intervalo finito,  $\Delta S^2$  pode ser expresso através do teorema de Pitágoras:  $\Delta S^2 = (t - t')^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z')^2$ . Contudo, para um referencial não-inercial, a expressão para  $\delta s^2$  não mais será uma soma dos quadrados das diferenças das quatro coordenadas. Entretanto, para um intervalo infinitesimal  $ds^2$  pode ser expresso por uma forma quadrática mais geral:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1-2)$$

sendo  $g_{\mu\nu}$  uma função das coordenadas espaciais  $x^1, x^2, x^3$  e da temporal  $x^0$ .

O sistema de coordenadas descrito por (3.1-2) é chamado curvilíneo e corresponde a um sistema de referência acelerado. As funções  $g_{\mu\nu}$  contêm todas as propriedades geométricas do espaço-tempo. No caso de um referencial inercial elas se reduzem a  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

A teoria da relatividade geral, a qual foi postulada por Albert Einstein em 1916, é a teoria relativística da gravitação. Um dos pontos de partida desta teoria é o *princípio da equivalência*, o qual afirma que um referencial inercial sujeito a um campo gravitacional é, localmente, equivalente a um referencial acelerado. Sendo assim, a gravitação é entendida como um desvio na métrica do espaço-tempo plano (métrica de Minkowski)<sup>1</sup>. Em outras palavras, podemos dizer que uma distribuição de matéria e energia induz uma curvatura no espaço-tempo a sua volta.

Outro princípio importante na formulação da Teoria da Relatividade Geral é o *princípio da covariância geral*. Este princípio pode ser enunciado da seguinte forma: *As equações que*

<sup>1</sup>Na teoria da relatividade geral, a métrica não é fixada arbitrariamente, mas depende da distribuição de matéria local.

descrevem as leis da física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas [13, 20]. Isto significa que, na presença da gravitação, as leis da física devem ser modificadas de modo a se tornarem co-variantes por transformações gerais de coordenadas.

## 3.2 Equações de Maxwell no espaço curvo

As experiências acumuladas durante quase dois séculos demonstram que todos os fenômenos eletromagnéticos estão ligados à existência de uma nova quantidade extensiva, denominada carga elétrica ou simplesmente carga. Ela é uma quantidade conservada e está sujeita a equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (3.2-3)$$

sendo  $\rho$  a densidade de carga e  $\vec{J}$  a densidade de corrente. Este equação é denominada *equação de continuidade*.

Outro fato experimental é que todos os fenômenos eletromagnéticos podem ser entendidos em termos de dois campos vetoriais: o campo elétrico  $\vec{E}$  e o campo magnético  $\vec{B}$ . As leis que regem a geração e a propagação desses campos são as chamadas equações de Maxwell. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais que expressam a divergência e o rotacional de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em termos das densidades de carga e corrente, além das primeiras derivadas parciais dos campos em relação ao tempo, conforme segue<sup>2</sup>:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3.2-4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.2-5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2-6)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.2-7)$$

---

<sup>2</sup>Estamos usando o sistema de unidades Gaussiano

Estas equações são abstrações matemáticas de resultados experimentais, mas, apesar disso, a descrição de muitos fenômenos pode ser feita por meio destas sem nenhuma contradição.

O sistema de equações acima é válido apenas no vácuo. A presença da matéria requer modificações, fazendo com que as equações de Maxwell, num meio material, sejam dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (3.2-8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.2-9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.2-10)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.2-11)$$

onde  $\vec{D}$  é o vetor deslocamento e  $\vec{H}$  é o vetor intensidade magnética, os quais são dados por:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad \text{e} \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \quad (3.2-12)$$

sendo  $\vec{P}$  a polarização e  $\vec{M}$  a magnetização.

Podemos escrever as equações acima na forma co-variante, da seguinte maneira

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \quad (3.2-13)$$

e

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \quad (3.2-14)$$

onde  $j^\nu$  é definido como sendo o quadrivetor corrente

$$j^\nu = (\rho, j_x, j_y, j_z) \quad (3.2-15)$$

e  $F_{\mu\nu}$  é dado por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2-16)$$

A quantidade  $F_{\mu\nu}$  é o tensor do campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski, sendo definido

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.2-17)$$

onde

$$A^\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z), \quad (3.2-18)$$

é o quadrivetor potencial do campo eletromagnético.

As expressões (3.2-13) e (3.2-14) são equações tensoriais, e portanto, são válidas em qualquer referencial inercial. Isto significa que elas são co-variantes por transformações de Lorentz. Obviamente estas equações não são co-variantes por transformações geral de coordenadas. Nesse sentido, podemos dizer que (3.2-13) e (3.2-14) são as equações de Maxwell na ausência de gravitação, ou seja, no espaço plano.

Vale salientar que a densidade lagrangiana para o campo eletromagnético, na ausência de gravidade, é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\alpha A_\alpha + \mathcal{L}_e \quad (3.2-19)$$

onde  $\mathcal{L}_e$  é a densidade lagrangiana associada a partículas carregadas.

As equações de Maxwell no espaço plano podem ser generalizadas para um espaço-tempo curvo, ou seja, elas podem ser generalizadas de uma maneira à incluir campos gravitacionais. Para tanto, precisamos reescrevê-las de modo a torná-las co-variantes por transformações gerais de coordenadas. Esta generalização também pode ser feita a partir da densidade lagrangiana do campo eletromagnético. Neste caso, a densidade lagrangiana deverá ser modificada de modo a se tornar invariante por transformações gerais de coordenadas.

A densidade lagrangiana dada pela equação (3.2-19), pode ser estendida, pelo princípio geral da co variância [13, 20], para o caso com gravitação, introduzindo-se o termo  $\sqrt{-g}$ , sendo  $g$  o determinante de  $g_{\mu\nu}$ , como mostrado a baixo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sqrt{-g} J^\alpha A_\alpha + \mathcal{L}_e \quad (3.2-20)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial A_\alpha / \partial x^\beta)} \right) = 0 \quad (3.2-21)$$

temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \sqrt{-g} J^\alpha \quad (3.2-22)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial A_\alpha / \partial x^\beta)} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) . \quad (3.2-23)$$

Substituindo (3.2-22) e (3.2-23) em (3.2-21) ficamos com a seguinte equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = 4\pi J^\alpha . \quad (3.2-24)$$

Então, usando a seguinte identidade [20]

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) , \quad (3.2-25)$$

podemos reescrever esta última equação como

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha , \quad (3.2-26)$$

onde  $\nabla_\beta$  representa a derivada<sup>3</sup> co-variante do tensor<sup>4</sup>  $F^{\alpha\beta}$ . Esta é a equação de Maxwell com fonte, na presença de gravitação. Novamente evocando o principio da co variância geral [20], a generalização das equações de Maxwell devem ser de tal forma que elas devam voltar a sua forma original no caso de ausência de gravitação, ou seja, no espaço-tempo plano.

Analisando as equações (3.2-13) e (3.2-26), observamos que, para generalizarmos as equações de Maxwell com fonte, basta fazermos uma simples troca de suas derivadas usuais pelas derivadas co-variantes.

---

<sup>3</sup>A derivada co-variante de um tensor  $F^{\mu\nu}$  com respeito a  $\alpha$  é definida como sendo:  $\nabla_\alpha F^{\mu\nu} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu F^{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu F^{\mu\gamma}$ .

<sup>4</sup>O tensor co-variante  $F_{\mu\nu}$  é definido em termos do potencial vetor pela relação:  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

Seguindo este procedimento, veremos que as equações sem fonte generalizadas serão dadas por:

$$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 . \quad (3.2-27)$$

### 3.3 Auto-interação no espaço-tempo de um monopolo global

Como mostrado, o monopolo é um objeto esfericamente simétrico, que surge de um modelo de teoria de campo iso-escalar, onde a simetria global de gauge é espontaneamente quebrada de  $O(3)$  para  $U(1)$ . Do ponto de vista realista, o monopolo possui uma estrutura interna não trivial, i.e., o seu raio não é nulo. Entretanto, adotando a configuração ideal para o monopolo, o tensor métrico gerado por esse objeto é expresso pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (3.3-28)$$

Nesta sub-seção, calcularemos a auto-interação eletrostática para uma carga pontual colocada em repouso no espaço-tempo do monopolo ideal. De modo a efetuarmos esse desenvolvimento, faz-se necessário encontrar a função de green tri-dimensional associada ao operador de laplace.

#### 3.3.1 Cálculo do potencial eletrostático no espaço-tempo do monopolo

Como estamos tratando com uma fonte estática, a componente  $F_{i0}$  do tensor  $F_{\mu\nu}$  é dada por  $F_{i0} = \partial_i A_0$ , onde  $A_0 = \Phi$  é o potencial eletrostático. Além disso, a densidade de corrente  $j^i$  é nula, assim  $j^\mu = (\rho, 0, 0, 0)$ . As componentes espaciais do potencial vetor  $A_\mu$  também são nulas, logo  $A_\mu = (\phi, 0, 0, 0)$ . Levando isto em conta, a componente  $\alpha = 0$  das equações de Maxwell Eq.(3.2-26), para uma carga pontual localizada no espaço-tempo do monopolo global em  $\vec{r} = \vec{r}'$ , torna-se:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \frac{-4\pi q \delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\sqrt{-g}} = -\frac{4\pi q}{\alpha^2 r^2 \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') , \quad (3.3-29)$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{\alpha^2 r^2}, \quad (3.3-30)$$

sendo

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.3-31)$$

Por outro lado, a função de Green, associada ao operador de Laplace no espaço-tempo do monopolo global, satisfaz à seguinte equação:

$$\Delta G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.3-32)$$

a qual fica expressa por:

$$\Delta G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\alpha^2 r^2 \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (3.3-33)$$

Então, podemos escrever o potencial como

$$\Phi(\vec{r}) = 4\pi q G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (3.3-34)$$

Devido a simetria esférica deste sistema, a função de Green pode ser expressa por:

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^{m*}(\theta', \varphi'). \quad (3.3-35)$$

Além disso, a parte angular da função delta de Dirac pode ser escrita, em termos dos harmônicos esféricos, como segue [21]:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^{m*}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (3.3-36)$$

Assim, substituindo (3.3-35) e (3.3-36) em (4.2-29), chegamos à seguinte equação diferencial para a função  $g(r, r')$ :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{\alpha^2 r^2} \right] g_l(r, r') = -\frac{1}{\alpha^2 r^2} \delta(r - r'). \quad (3.3-37)$$

A solução regular da equação acima é dada por:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A_l r^{\lambda_l}, & \text{para } r < r' \text{ e} \\ B_l r^{-\lambda_l - 1}, & \text{para } r > r'. \end{cases} \quad (3.3-38)$$

onde  $\lambda_l = -1/2 + \sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}/2\alpha$ . As constantes  $A_l$  e  $B_l$  são determinadas a partir da condição de continuidade da função  $g(r, r')$  e da descontinuidade de sua primeira derivada no ponto  $r = r'$ . Seguindo este procedimento, obtemos:

$$g_l(r, r') = \frac{1}{\alpha^2} \frac{2l+1}{(2\lambda_l+1)} \frac{r_{<}^{\lambda_l}}{r_{>}^{\lambda_l+1}}, \quad (3.3-39)$$

onde  $r_{<}$  e  $r_{>}$  representam, respectivamente, o menor e o maior valor entre  $r$  e  $r'$ .

Substituindo (3.3-39) em (3.3-35) e usando o teorema da adição dos harmônicos esféricos [21],

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y(\theta, \varphi) Y^*(\theta', \varphi') \quad (3.3-40)$$

onde

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (3.3-41)$$

obtemos:

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha^2 r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2\lambda_l+1)} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^{\lambda_l} P_l(\cos \gamma). \quad (3.3-42)$$

Finalmente, substituindo esta expressão na equação (3.3-34), chegamos ao seguinte resultado:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\alpha^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{(2\lambda_l+1)} \frac{r_{<}^{\lambda_l}}{r_{>}^{\lambda_l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (3.3-43)$$

o qual representa o potencial eletrostático gerado por uma partícula de carga  $q$  em  $\vec{r}'$ , no espaço-tempo do monopolo global idealizado.

### 3.3.2 Auto-energia eletrostática no espaço-tempo do monopolo

A auto-energia, associada a uma distribuição de carga, é dada pela seguinte expressão [18]:

$$U = 2\pi \int \int \rho(\vec{r}') G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} d^3\vec{r}', \quad (3.3-44)$$

Assim, substituindo (3.3-42) em (3.3-44) e usando o fato que a densidade de carga é dada por  $\rho(\vec{r}) = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ , obtemos a expressão para a auto-energia eletrostática, a qual é dada

por:

$$U(\vec{r}) = 2\pi q^2 G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}), \quad (3.3-45)$$

A função de Green, dada pela equação (3.3-42), é divergente no limite de coincidência, conseqüentemente  $U(\vec{r})$  também será. Fisicamente esse resultado é inaceitável. De fato, do ponto de vista matemático a auto-interação de uma carga no espaço plano é infinita. Entretanto, esse resultado, deve ser entendido e tratado do ponto de vista físico, o qual não é observado experimentalmente. De modo a obtermos um resultado fisicamente aceitável para esta função, devemos aplicar um processo de renormalização, o qual consiste basicamente em subtrairmos o infinito associado ao espaço plano, isto pode ser feito por uma redefinição da função de green, dada por:

$$G_{\alpha,ren}(\vec{r}, \vec{r}') = G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') - G_H(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (3.3-46)$$

onde  $G_H(\vec{r}, \vec{r}')$  é a função de Hadamard.

A função de Hadamard em três dimensões [35] é:

$$G_H(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\sigma(x, x')}}}, \quad (3.3-47)$$

sendo  $2\sigma(x, x')$  o quadrado da distância geodésica entre os pontos  $x$  e  $x'$ . Considerando apenas a distância radial no espaço-tempo do monopolo (3.3-28), temos:

$$2\sigma(x, x') = |\vec{r} - \vec{r}'|^2. \quad (3.3-48)$$

Desse modo, a função de Hadamard para o nosso caso fica sendo:

$$G_H(x, x') = G_H(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.3-49)$$

redefinindo uma nova variável como sendo,  $t = r_</r_>$ , ficamos com:

$$G_H(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi r_>} \frac{1}{(1-t)}. \quad (3.3-50)$$

A função de Green renormalizada será então,

$$G_{ren} = \frac{1}{4\pi r_{>}} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2\lambda_l+1)} t^{\lambda_l} - \frac{1}{1-t} \right]. \quad (3.3-51)$$

Tomando o limite de  $t \rightarrow 1$ , obtemos:

$$G_{\alpha,ren} = \frac{1}{4\pi\alpha r} S(\alpha) \quad (3.3-52)$$

sendo

$$S(\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{2l+1}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} - 1 \right]. \quad (3.3-53)$$

Sendo assim, devemos reescrever  $U(\vec{r})$  como sendo:

$$U(\vec{r}) = 2\pi q^2 G_{\alpha,ren}(\vec{r}, \vec{r}). \quad (3.3-54)$$

Substituindo (3.3-52) em (3.3-54), chegamos ao seguinte resultado:

$$U(\vec{r}) = \frac{q^2}{2\alpha r} S(\alpha), \quad (3.3-55)$$

Numericamente, poderemos mostrar que o fator  $S(\alpha)$  será um número positivo se  $\alpha < 1$  e um número negativo se  $\alpha > 1$ . Dessa forma, uma partícula carregada no espaço-tempo de um monopolo global fica submetido a ação de uma auto-interação repulsiva. Na figura (3.1) analisamos o comportamento de  $S(\alpha)$  em função de  $\alpha$ .

Figura 3.1: Comportamento da função  $S(\alpha)$ .

### 3.4 Auto-interação no espaço-tempo de uma corda cósmica

A auto-interação eletrostática sobre uma partícula carregada colocada no espaço-tempo de uma corda cósmica infinita e retilínea, têm sido muito estudada nos últimos tempos [5]. O fenômeno, é o análogo ao do monopolo, discutido na seção anterior. O tensor métrico que representa o espaço-tempo gerado pela corda, em coordenadas cilíndricas é:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - dz^2 , \quad (3.4-56)$$

sendo a variável  $\theta$  definido entre os pontos  $0 \leq \theta < 2\pi(1 - 4\pi G)$ . Devido a esse espaço-tempo não trivial, localmente plano, com um déficit angular de  $\delta\varphi = 8\pi G\mu$ , isso também fará com que o campo elétrico da partícula seja perturbado, gerando assim, a auto-energia sobre a mesma.

Nesta seção, investigaremos o efeito da auto-interação eletrostática no espaço-tempo de uma corda cósmica. Onde veremos que, igualmente ao caso do monopolo, aqui também se faz necessário a obtenção da função de Green associada a corda.

#### 3.4.1 Cálculo do potencial eletrostático no espaço-tempo da corda

Seguindo o mesmo procedimento adotado na seção anterior, iniciaremos a nossa análise calculando o potencial eletrostático,  $\Phi(\vec{r})$ , produzido por uma partícula de carga  $q$ , localizada no ponto  $\vec{r} = \vec{r}'$ , no espaço-tempo da corda-cósmica.

A partir das equações de Maxwell (Eq. (3.2-26), podemos mostrar que, neste espaço-tempo, o potencial eletrostático satisfaz a seguinte equação:

$$\Delta\Phi(\rho, \theta, z) = -\frac{4\pi q\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\sqrt{-g}} = -\frac{4\pi q}{\alpha\rho}\delta(\rho - \rho')\delta(\theta - \theta')\delta(z - z') , \quad (3.4-57)$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (3.4-58)$$

Por outro lado, a equação diferencial satisfeita pela função de Green é:

$$\Delta G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\alpha\rho}\delta(\rho - \rho')\delta(\theta - \theta')\delta(z - z') . \quad (3.4-59)$$

Devido a simetria cilíndrica do problema, podemos escrever a função de Green como sendo:

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Delta\theta} \int_0^\infty \cos \kappa(z - z') g_{m,\kappa}(\rho, \rho') d\kappa . \quad (3.4-60)$$

Temos ainda que

$$\delta(\theta - \theta') = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_n e^{in\Delta\theta} \quad (3.4-61)$$

e

$$\delta(z - z') = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos k(z - z') . \quad (3.4-62)$$

Então, substituindo (3.4-60)-(3.4-62) em (3.4-59), obtemos:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \left( \frac{n^2}{\alpha^2\rho^2} + \kappa^2 \right) \right] g_{n,\kappa}(\rho, \rho') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{\alpha\rho} . \quad (3.4-63)$$

A solução regular da equação diferencial acima é

$$g_{n,\kappa}(\rho, \rho') = \begin{cases} C_{n,\kappa} I_{|n|/\alpha}(\kappa\rho), & \text{para } \rho < \rho' \text{ e} \\ D_{n,\kappa} K_{|n|/\alpha}(\kappa\rho), & \text{para } \rho > \rho', \end{cases} \quad (3.4-64)$$

sendo  $I_{|n|/\alpha}(\kappa\rho)$  e  $K_{|n|/\alpha}(\kappa\rho)$  as funções de Bessel modificadas, as quais são regulares na origem e no infinito, respectivamente.

A partir da condição de continuidade da função  $g_{n,\kappa}$  e a descontinuidade de sua derivada no ponto  $\rho = \rho'$ , podemos determinar as constantes  $C_{n,\kappa}$  e  $D_{n,\kappa}$ . Fazendo isto, obtemos:

$$g_{n,\kappa}(\rho, \rho') = \frac{1}{\alpha} I_{|n|/\alpha}(\kappa\rho_{<}) K_{|n|/\alpha}(\kappa\rho_{>}) . \quad (3.4-65)$$

Substituindo esse resultado em (3.4-60), temos:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\alpha\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Delta\theta} \int_0^\infty \cos \kappa(z - z') I_{|n|/\alpha}(\kappa\rho_{<}) K_{|n|/\alpha}(\kappa\rho_{>}) d\kappa . \quad (3.4-66)$$

A integral sobre  $\kappa$  nesta equação nos dá uma função de Legendre de segundo tipo [29], resultando numa representação em série de Fourier, como segue

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2(\rho\rho')^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i|m|\Delta\theta} Q_{|m|-1/2}(\cosh u_0), \quad (3.4-67)$$

sendo

$$\cosh u_0 = \frac{\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2}{2\rho\rho'}. \quad (3.4-68)$$

Fazendo uso de uma representação integral para as funções de Legendre,

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\cosh^{-1} z}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\cosh(u/\alpha) - z}} e^{-(1/2+\nu)u/\alpha}, \quad (3.4-69)$$

a função de Green pode ser escrita como

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi^2\alpha(2\rho\rho')^{1/2}} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\cosh u - \cosh u_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|m|u/\alpha + im\Delta\theta}. \quad (3.4-70)$$

Executando a somatória, encontramos:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi^2\alpha(2\rho\rho')^{1/2}} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\cosh u - \cosh u_0}} \frac{\sinh u/\alpha}{\cosh u/\alpha - \cos(\theta - \theta')}. \quad (3.4-71)$$

Logo, o potencial eletrostático gerado por uma partícula, localizada no espaço-tempo da corda, é dado por:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\alpha\pi(2\rho\rho')^{1/2}} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\cosh u - \cosh u_0}} \frac{\sinh u/\alpha}{\cosh u/\alpha - \cos(\theta - \theta')}. \quad (3.4-72)$$

### 3.4.2 Auto-energia eletrostática no espaço-tempo da corda

Substituindo (3.4-71) em (3.3-44) e usando o fato que a densidade de carga é dada por

$$\rho_q(\vec{r}') = \frac{q}{\alpha r} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'), \quad (3.4-73)$$

obtemos a expressão para a auto-energia eletrostática renormalizada, a qual é dada por:

$$U(\vec{r}) = 2\pi q^2 G_{\alpha,ren}(\vec{r}, \vec{r}). \quad (3.4-74)$$

onde  $G_{\alpha,ren}(\vec{r}, \vec{r})$  é a função de Green renormalizada. De acordo com o que discutimos na seção anterior, temos que:

$$G_{ren}(\vec{r}, \vec{r}) = \lim_{r' \rightarrow r} [G(\vec{r}, \vec{r}') - G_H(\vec{r}, \vec{r}')], \quad (3.4-75)$$

sendo  $G_H(\vec{r}, \vec{r}')$  a função de Hadamard, definida anteriormente. Como o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica é localmente plano, a função de Hadamard é obtida a partir de (3.4-71) tomando  $\alpha = 1$ . Substituindo (3.4-71) na expressão acima encontramos a função de Green renormalizada, a qual é dada por [6]:

$$G_{ren}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mathcal{K}(\alpha)}{4\pi\rho}. \quad (3.4-76)$$

onde  $\mathcal{K}(\alpha)$  é

$$\mathcal{K}(\alpha) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^{-1} \coth(x/\alpha) - \coth(x/\alpha)}{\sinh(x/\alpha)} dx, \quad (3.4-77)$$

Finalmente, substituindo esse resultado em (3.4-74), temos a expressão de sua auto-energia eletrostática

$$U(\vec{r}) = \frac{q^2 \mathcal{K}(\alpha)}{2\rho}. \quad (3.4-78)$$

Sua auto-força é dada simplesmente pelo gradiente de sua auto-energia na direção radial.

O fator  $\mathcal{K}(\alpha)$  será um número positivo se  $\alpha < 1$  e um número negativo se  $\alpha > 1$ . Analisando a equação (3.4-78), verificamos que o termo de auto-interação é causado pelo déficit de ângulo na geometria que define o espaço-tempo da corda cósmica. Novamente constatamos que a auto-interação é repulsiva para  $\alpha < 1$ . A fig. (3.2) exhibe o comportamento de  $\mathcal{K}(\alpha)$  em função de  $\alpha$ .

Figura 3.2: Comportamento da função  $\mathcal{K}(\alpha)$ .

## Capítulo 4

# Auto-interação no espaço-tempo de um Monopolo Global com estrutura

Vários tipos de objetos topológicos gravitacionais podem ter sido gerados durante as primeiras transições de fase do universo primitivo, devido a uma quebra espontânea de simetria[1, 2]. Dependendo do tipo de topologia do vácuo,  $\mathcal{M}$ , formaram-se paredes de domínio, cordas cósmicas, monopolos e texturas, correspondendo aos grupos  $\pi_0(\mathcal{M})$ ,  $\pi_1(\mathcal{M})$ ,  $\pi_2(\mathcal{M})$  e  $\pi_3(\mathcal{M})$ , respectivamente. Os monopolos globais são objetos pesados formados na transição de fase de um sistema devido a um processo de quebra espontânea de simetria global de gauge. O sistema é constituído por um iso-triplete de campo escalar,  $\phi^a$ , que auto-interage, onde  $a$  varia de 1 a 3, cuja simetria global de gauge  $O(3)$  é espontaneamente quebrada para  $U(1)$ . Neste modelo o campo escalar de matéria desempenha o papel de um parâmetro de ordem, o qual fora do núcleo do monopolo adquire um valor não nulo. Barriola e Vilenkin [3], analisaram a estrutura geométrica gerada por esse objeto, e mostraram que, para pontos distantes do seu núcleo o espaço-tempo é dado pelo seguinte elemento de linha:

$$ds_+^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.0-1)$$

onde  $\alpha^2$  é muito menor que a unidade. O espaço tempo gerado por (4.0-1) tem um escalar de curvatura não nulo,  $R = \frac{2(\alpha^2-1)}{\alpha^2 r^2}$ , e apresenta um déficit de ângulo sólido  $\delta\Omega = 4\pi(1 - \alpha^2)$  associado a uma esfera de raio unitário.

Embora as propriedades geométricas do espaço-tempo fora do monopolo serem bem conhecidas, a análise do tensor métrico na parte interna ao monopolo requer um conhecimento mais completo do tensor energia momento associado ao campo,  $\phi^a$ , o qual por outro lado, depende do conhecimento das componentes do tensor métrico, levando a uma equação integral que não possui solução analítica [37]. Devido a esse fato, várias investigações físicas foram feitas ao monopolo considerando o mesmo um objeto pontual. Neste modelo a geometria do espaço-tempo é dada por (4.0-1). Entretanto, adotando esse elemento de linha, cálculos de efeitos de polarização do vácuo foram realizados, apresentando divergência no núcleo do monopolo.

Um dos fenômenos mais interessantes associado com defeitos topológicos gravitacionais, é a auto-energia eletrostática induzida sobre uma partícula carregada colocada nas vizinhanças do monopolo. Este efeito foi analisado primeiramente por Linet e Smith [5, 6], independentemente, no espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada e de um monopolo pontual por Bezerra de Mello e C. Furtado [9]. Para estas análises a auto-energia induzida apresenta uma divergência nos seus respectivos núcleos. Para resolver esse problema, um modelo mais realístico para esses defeitos foi criado, com uma estrutura interna diferente de zero. Para a corda cósmica, dois tipos diferentes de modelos foram propostos para descrever essa geometria interna: O *ball point pen*, proposto independentemente por Gott e Hiscock [38], onde a singularidade cônica no eixo da corda era trocada por uma curvatura constante no espaço-tempo da região interior; e o *flower plot model* [31], apresentando uma curvatura concentrada sobre o anel na região interna a corda, de espaço-tempo plano. Khusnutdinov e Bezerra [39] consideraram o problema da auto-energia eletrostática induzida levando em conta o modelo de Gott e Hiscock para uma região dentro da corda. Recentemente esse problema foi analisado no contexto do monopolo global, no *flower plot model*, considerando uma região interna ao mesmo [40].

Para completar a análise da auto-energia eletrostática induzida no espaço-tempo do

monopolo, neste último capítulo do nosso trabalho nós analisaremos [42] o problema da auto-força e da auto-energia eletrostática de uma partícula carregada colocada no espaço-tempo do monopolo global considerando o modelo *ball point pen*.

## 4.1 O modelo

Como anteriormente, infelizmente não existe uma solução analítica para as equações de Einstein na região interior ao monopolo. Harari e Loustó [41], apresentaram uma versão simplificada para descrever essa geometria na região interna. Eles mostraram que ela poderia ser representada por um espaço-tempo de Sitter, o qual um escalar de curvatura constante é proporcional a escala de energia,  $\eta$ , onde a simetria é quebrada. Embora esse modelo compartilhe as principais características da solução exata, a análise da função de Green na região interna ao monopolo é uma tarefa bastante difícil. O modelo do *ball point pen*, adotado para obter informações quantitativas a respeito da auto-força induzida sobre a partícula carregada no espaço-tempo do monopolo é descrito a seguir:

- Para regiões externas ao núcleo do monopolo a geometria do espaço tempo é dada por (4.0-1), onde a coordenada radial varia no intervalo  $[r_0, \infty)$ , sendo  $r_0$  o raio do monopolo.
- Para a parte interna ao monopolo, seu espaço-tempo é descrito pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \left(\frac{\rho_0}{\epsilon^2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\epsilon\rho}{\rho_0}\right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) , \quad (4.1-2)$$

com a nova coordenada radial definida no intervalo  $[0, \rho_0]$ .

Na fronteira do monopolo, pela condição de continuidade da coordenada radial  $r$ , no ponto,  $r_0 = \rho_0$ , nós fazemos  $ds_+^2 = ds_-^2$ , e obtemos a seguinte relação entre os parâmetros internos e externos,

$$r_0 = \frac{\rho_0}{\alpha\epsilon} \sin \epsilon \quad \text{e} \quad \alpha = \cos \epsilon . \quad (4.1-3)$$

Na região interna, as componentes não nulas do tensor de Riemman, Ricci e o escalar de curvatura são:

$$R_{\rho\theta}^{\rho\theta} = R_{\rho\varphi}^{\rho\varphi} = R_{\varphi\theta}^{\varphi\theta} = \frac{\epsilon^2}{\rho_0^2}, \quad R_{\rho}^{\rho} = R_{\theta}^{\theta} = R_{\varphi}^{\varphi} = 2\frac{\epsilon^2}{\rho_0^2}, \quad (4.1-4)$$

e

$$R = 2\frac{\epsilon^2}{\rho_0^2}. \quad (4.1-5)$$

É possível descrever o tensor métrico na região interna através da seguinte relação da coordenada radial  $r$ :

$$\sin\left(\frac{\epsilon\rho}{\rho_0}\right) = \frac{r}{r_0} \sin(\epsilon), \quad (4.1-6)$$

Através desta última relação, o elemento de linha (4.1-2) pode ser escrito por

$$ds^2 = dt^2 - P(r)^2 dr^2 - \alpha^2 r^2 (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.1-7)$$

sendo a função  $P(r)$  definid por:

$$P(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}(1 - \alpha^2)}}, & \text{para } r \leq r_0 \\ 1, & \text{para } r \geq r_0. \end{cases}$$

Os símbolos de Christoffel não nulos para a métrica (4.1-7) são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{P'(r)}{P(r)}, & \Gamma_{33}^1 &= \frac{\alpha^2 r \sin^2 \theta}{P^2(r)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\alpha^2 r}{P^2(r)}, & \Gamma_{12}^2 &= -\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= \sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (4.1-8)$$

e o escalar de curvatura

$$R = -2 \frac{[2\alpha^2 P'(r)/P(r) + P^2(r) - \alpha^2]}{\alpha^2 r^2 P^2(r)}, \quad (4.1-9)$$

a linha representa a derivada da função com respeito a  $r$ .

## 4.2 A função de Green

Com o objetivo de construir a função de Green associada a uma partícula carregada em repouso no espaço-tempo do monopolo global, nós escrevemos abaixo as equações de Maxwell para um espaço curvo arbitrário:

$$\square A^\mu + R^\mu_\nu A^\nu = -4\pi j^\mu(\vec{r}), \quad (4.2-10)$$

sendo o vetor quadri-corrente,  $j^\mu(\vec{r}) = q \int u^\mu(\tau) \delta^4(x - x(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g}}$  e

$$\begin{aligned} \square A^\mu = & g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta A^\mu) + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\Gamma^\mu_{\beta\gamma} A^\gamma) + g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} (\partial_\alpha A^\gamma) + g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\nu} (\partial_\beta A^\nu) + \\ & g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \Gamma^\nu_{\beta\gamma} A^\gamma - g^{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} (\partial_\rho A^\mu) - g^{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\rho\gamma} A^\gamma. \end{aligned} \quad (4.2-11)$$

Para uma partícula pontual em repouso, com coordenadas  $\vec{r}' = (r', \theta', \varphi')$ , o seu vetor quadri-corrente e o potencial quadri-vetor são, respectivamente:  $j^\mu = (j^0, 0, 0, 0)$  e  $A^\mu = (A^0, 0, 0, 0)$ . A única componente não trivial de (4.2-10) é para  $\mu = 0$ ,

$$j^0 = q \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\sqrt{-g}}, \quad (4.2-12)$$

sendo  $q$  a carga da partícula. A equação de Maxwell correspondente é escrita como

$$\Delta A^0 = -4\pi j^0(\vec{r}), \quad (4.2-13)$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano tri-dimensional, que no sistema de coordenadas dado pela métrica (4.1-7), é

$$\Delta A^0 = \left[ \frac{1}{r^2 P(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{P(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{\alpha^2 r^2} \right] A^0, \quad (4.2-14)$$

e  $\vec{L}^2$  é o operador momento angular usual, já definido anteriormente em (2.2-52).

Sabe-se que a função de Green para este operador deve obedecer a seguinte equação:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (4.2-15)$$

sendo sua função de Green obtida pela substituição de

$$A^0(r) = 4\pi q G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (4.2-16)$$

na equação (4.2-14). Desse modo, esta é a equação diferencial não homogênea que obtemos:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{P(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{P(r)}{\alpha^2} \vec{L}^2 \right] G(\vec{r}, \vec{r}') = - \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\alpha^2 \sin \theta} . \quad (4.2-17)$$

Levando em consideração a simetria esférica do problema, nós podemos apresentar a função de Green como a expansão

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') , \quad (4.2-18)$$

com  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  sendo os harmônicos esféricos usuais. Substituindo (4.2-18) em (4.2-17) e utilizando a bem conhecida relação de fechamento dos harmônicos esféricos, nós chegamos a seguinte equação diferencial para a função radial:

$$\left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{P(r)} \frac{d}{dr} \right) - \frac{P(r)l(l+1)}{\alpha^2} \right] g_l(r, r') = - \frac{\delta(r - r')}{\alpha^2} . \quad (4.2-19)$$

A descontinuidade da primeira derivada em  $r = r'$  é obtida por integração da equação acima neste ponto:

$$\frac{dg_l(r, r')}{dr} \Big|_{r=r'+} - \frac{dg_l(r, r')}{dr} \Big|_{r=r'-} = - \frac{P(r')}{\alpha^2 r'^2} . \quad (4.2-20)$$

A função de Green radial é calculada pelo procedimento padrão:

$$g_l(r, r') = \Theta(r' - r) R_{1l}(r) R_{2l}(r') + \Theta(r - r') R_{1l}(r') R_{2l}(r) , \quad (4.2-21)$$

onde  $R_{1l}(r)$  e  $R_{2l}(r)$  são as duas soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente a (4.2-19). Nós assumimos que  $R_{1l}(r)$  é regular no núcleo do monopolo e  $R_{2l}(r)$  vai pra zero no infinito, e que ambas são normalizadas pela relação do Wronskiano

$$R_{1l}(r) R'_{2l}(r) - R'_{1l}(r) R_{2l}(r) = - \frac{P(r)}{\alpha^2 r^2} . \quad (4.2-22)$$

Além disso, ambas devem ser regular nas suas primeiras derivadas radiais na fronteira do monopolo, i.e.,

$$\begin{aligned} R_{jl}(r)|_{r=r_0-} &= R_{jl}(r)|_{r=r_0+} , \\ R'_{jl}(r)|_{r=r_0-} &= R'_{jl}(r)|_{r=r_0+} , \end{aligned} \quad (4.2-23)$$

para  $j = 1, 2$ .

Na região fora do núcleo as soluções linearmente independente correspondente a equação homogênea associada, são as funções  $r^{\lambda_l}$  e  $r^{-1-\lambda_l}$ , onde

$$\lambda_l = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)} \geq 0 , \quad (4.2-24)$$

e para a região interna, em coordenadas dadas através do elemento de linha (4.1-7), as soluções regular e irregular são  $\frac{P_{1/2}^{-l-1/2}(x_r)}{\sqrt{r}}$  e  $\frac{P_{1/2}^{l+1/2}(x_r)}{\sqrt{r}}$ , respectivamente, com  $x_r = \alpha(P(r))^{-1}$ , sendo  $P'_\mu(x)$  as funções associadas de Legendre.

Com o auxílio de (4.2-20), (4.2-22) e das funções encontradas, após alguns cálculos intermediários, podemos escrever a função de Green radial como mostrado abaixo:

- Para uma partícula carregada fora do núcleo,  $r' > r_0$ , nós temos:

$$g_1(r, r') = \frac{1}{\alpha^2(2\lambda_l + 1)} \frac{(1 + \gamma_l(\alpha))}{\sqrt{rr_0}} \left(\frac{r_0}{r'}\right)^{\lambda_l+1} \frac{P_{1/2}^{-l-1/2}(x_r)}{P_{1/2}^{-l-1/2}(\alpha)} , \text{ para } r \leq r_0 \quad (4.2-25)$$

e

$$g_l(r, r') = \frac{1}{\alpha^2(2\lambda_l + 1)} \left[ \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^{\lambda_l} \frac{1}{r_{>}} + \gamma_l(\alpha) r_0^{\lambda_l} \left(\frac{r_0}{rr'}\right)^{1+\lambda_l} \right] , \text{ para } r \geq r_0 \quad (4.2-26)$$

com

$$\gamma_l(\alpha) = \frac{\alpha\lambda_l P_{1/2}^{-l-1/2}(\alpha) - l P_{-1/2}^{-l-1/2}(\alpha)}{\alpha(\lambda_l + 1) P_{1/2}^{-l-1/2}(\alpha) + l P_{-1/2}^{-l-1/2}(\alpha)} . \quad (4.2-27)$$

- Para uma partícula carregada dentro do núcleo do monopolo,  $r' < r_0$ , nós temos:

$$g_l(r, r') = \frac{1}{\alpha\kappa_l\sqrt{rr'}} P_{1/2}^{-l-1/2}(x_{r_{<}}) \left[ P_{1/2}^{-l-1/2}(x_{r_{>}}) \eta_l(\alpha) + P_{1/2}^{l+1/2}(x_{r_{>}}) \right] , r \leq r_0 \quad (4.2-28)$$

e

$$g_l(r, r') = \frac{1}{\alpha \kappa_l \sqrt{rr'}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda_l+1} P_{1/2}^{-l-1/2}(x_{r'}) \left[ P_{1/2}^{-l-1/2}(\alpha) \eta_l(\alpha) + P_{1/2}^{l+1/2}(\alpha) \right], \quad (4.2-29)$$

para  $r \geq r_0$ , com <sup>1</sup>

$$\eta_l(\alpha) = \frac{(l+1)P_{-1/2}^{l+1/2}(\alpha) - \alpha(\lambda_l+1)P_{1/2}^{l+1/2}(\alpha)}{lP_{-1/2}^{-l-1/2}(\alpha) + \alpha(\lambda_l+1)P_{1/2}^{-l-1/2}(\alpha)}, \quad (4.2-30)$$

e

$$\kappa_l = \frac{2}{\pi}(-1)^l. \quad (4.2-31)$$

Nestas equações nós temos adotados  $r_< = \min(r, r')$  and  $r_> = \max(r, r')$ , com a mesma convenção para  $x_{r_<}$  e  $x_{r_>}$ .

Primeiro, vamos considerar o caso em que a partícula carregada está fora do núcleo do monopolo. Substituindo (4.2-26) em (4.2-18), nós temos

$$\begin{aligned} G_{ext}(r, r') &= \frac{1}{4\pi\alpha^2 r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2\lambda_l+1} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\lambda_l} P_l(\cos \gamma) \\ &+ \frac{1}{4\pi\alpha^2 r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2\lambda_l+1} \gamma_l(\alpha) \left(\frac{r_0^2}{rr'}\right)^{1+\lambda_l} P_l(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (4.2-32)$$

onde o primeiro termo do lado direito de (4.2-32) é a função de Green para a geometria de um monopolo ideal,  $G_m(r, r')$ , e o segundo,  $G_\alpha(r, r')$ , é a função de Green induzida devido a estrutura não trivial do núcleo.  $\gamma$  é o ângulo entre as direções  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ .

Para uma partícula dentro do núcleo do monopolo, a função de Green é dada pela substituição de (4.2-28) em (4.2-18), o resultado é:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{r'r}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\kappa_l} P_{\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(x_>) P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_<) P_l(\cos \gamma) \\ &+ \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{r'r}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\kappa_l} P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_>) P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_<) \eta(\alpha) P_l(\cos \gamma), \end{aligned} \quad (4.2-33)$$

---

<sup>1</sup>Para a derivação de (4.2-28) e (4.2-29), nós utilizamos o Wronskiano correspondente as funções associadas de Legendre [23]:  $\mathcal{W}[P_\nu^{-\mu}(x), P_\nu^\mu(x)] = \frac{2 \sin \mu \pi}{\pi(1-x^2)}$ .

sendo

$$x_{>} = \sqrt{1 - \frac{r_{>}^2 \sin^2 \epsilon}{r_0^2}}, \text{ e } x_{<} = \sqrt{1 - \frac{r_{<}^2 \sin^2 \epsilon}{r_0^2}}. \quad (4.2-34)$$

Esta função também apresenta duas contribuições: A primeira delas,  $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ , é a função de Green na geometria descrita pelo elemento de linha (4.1-2) utilizando a coordenada radial externa, e a segunda,  $G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$ , é a função de Green devido a geometria do monopolo global para  $r > r_0$ .

### 4.3 Auto-energia

De acordo com [5, 6], a auto-energia eletrostática induzida associada com uma partícula carregada é dada por

$$U_{ele}(\vec{r}) = 2\pi q^2 \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} G_{ren}(\vec{r}', \vec{r}), \quad (4.3-35)$$

onde  $G_{ren}$  é a função de Green renormalizada definida como

$$G_{ren}(\vec{r}', \vec{r}) = G(\vec{r}', \vec{r}) - G_H(\vec{r}', \vec{r}), \quad (4.3-36)$$

sendo  $G_H$  a função de Hadamard, já definida anteriormente na seção (3.3.2).

Devido ao fato da auto-energia depender apenas da coordenada radial  $r$ , a sua respectiva auto-força induzida é dada simplesmente por

$$\vec{F}_{ele}(r) = -\frac{d}{dr} U_{ele}(r) \hat{r}. \quad (4.3-37)$$

No restante da seção nós calcularemos a auto-energia eletrostática induzida para dois casos específicos:

- i)* Para a carga localizada num ponto fora do monopolo;
- ii)* Para a carga localizada num ponto dentro do núcleo do monopolo.

#### 4.3.1 Auto-energia na região externa do monopolo

Como tínhamos visto, para uma região fora do núcleo do monopolo, a função de Green que deve ser considerada no cálculo da auto-energia é dada em (4.2-32). De acordo com (4.3-

35), a auto-energia eletrostática induzida é dada tomando o limite de coincidência da função de Green renormalizada. Nós observamos que para pontos com  $r > r_0$ , parte desta função é finita neste limite de coincidência, e que a contribuição divergente aparece apenas para a função associada com a parte ideal do monopolo. Então o procedimento de renormalização deve ser considerado apenas para a função  $G_m$ :

$$G_{m,ren}(\vec{r}, \vec{r}) = \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} [G_m(\vec{r}', \vec{r}) - G_H(\vec{r}', \vec{r})] . \quad (4.3-38)$$

No limite de coincidência, vamos primeiramente tomar  $\gamma = 0$ , então, para pontos ao longo da distância radial, a parte singular da função de Hadamard é,

$$G_H(r', r) = \frac{1}{4\pi|r' - r|} . \quad (4.3-39)$$

Agora, usando  $G_m(r', r)$  dado em (4.2-32), nós temos:

$$G_{m,ren}(r, r) = \frac{1}{4\pi r_0} \lim_{t \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} t^{l\alpha} - \frac{1}{1-t} \right], \quad (4.3-40)$$

onde  $t = r_</r_>$ . Para avaliar o limite de coincidência do lado direito da equação acima, nós observamos que:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} t^{l/\alpha + 1/2\alpha - 1/2} - \frac{1}{1-t} \right) = 0. \quad (4.3-41)$$

Portanto, baseando-se nesta relação, substituindo em (4.3-40)  $1/(1-t)$  pelo primeiro termo entre parênteses em (4.3-41), nós encontramos

$$G_{m,ren}(r, r) = \frac{S(\alpha)}{4\pi\alpha r} . \quad (4.3-42)$$

Na expressão acima nós estamos usando a notação

$$S(\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{2l+1}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} - 1 \right] . \quad (4.3-43)$$

A função  $S(\alpha)$  é positiva (negativa) para  $\alpha < 1$  ( $\alpha > 1$ ) e, devido a isto, a relação correspondente para a auto-força é repulsiva (atrativa), respectivamente.

Combinando as equações (4.3-35), (4.2-32) e (4.3-42), a auto-energia eletrostática induzida fica sendo

$$U_{ele}(r) = \frac{q^2}{2\alpha r} S(\alpha) + \frac{q^2}{2\alpha r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\gamma_l(\alpha)(2l+1)}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+2\lambda_l}. \quad (4.3-44)$$

O segundo termo do lado direito desta expressão a cima é positivo para  $\alpha < 1$  e negativo para  $\alpha > 1$ , conseqüentemente, de acordo com as propriedades discutidas sobre a função  $S(\alpha)$ , a auto-força correspondente é dada por

$$\vec{F}_{ele}(r) = \frac{q^2 S(\alpha)}{2\alpha r^2} \hat{r} + \frac{q^2}{\alpha r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\gamma_l(\alpha)(2l+1)(\lambda_l+1)}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+2\lambda_l} \hat{r}, \quad (4.3-45)$$

sendo repulsiva para o primeiro caso e atrativa para o segundo. Para pontos distantes do núcleo do monopolo, a contribuição mais relevante associada com a parte induzida de  $G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$  torna-se apenas para a componente  $l = 1$  (a componente  $l = 0$  se anula), então nós temos

$$U_{ele}(r) \approx \frac{q^2}{2\alpha r} \left[ S(\alpha) + \frac{3\gamma_1(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 + 8}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\sqrt{1+8/\alpha^2}} \right]. \quad (4.3-46)$$

Existe um fator suprimido,  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\sqrt{1+8/\alpha^2}}$ , na contribuição induzida devido ao núcleo.

A contribuição induzida pela finitude do núcleo é divergente na fronteira,  $r = r_0$ . Para verificarmos este comportamento singular, basta analisarmos o termo dentro do somatório de (4.3-44) para grandes valores de  $l$ . A expressão assintótica para (4.2-27) pode ser obtida utilizando uma relação entre as funções de Legendre e as funções hipergeométricas [23],

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right). \quad (4.3-47)$$

Para este caso em particular  $\nu = \pm\frac{1}{2}$  e  $\mu = -l - \frac{1}{2}$ . Para  $l \gg 1$  temos as seguintes aproximações:

- O fator,

$$\frac{2l+1}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} \longrightarrow 1. \quad (4.3-48)$$

- Pela expansão em série da função hipergeométrica:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad (4.3-49)$$

podemos ver que para  $\gamma \gg 1$ , temos:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) \cong 1 + O\left(\frac{1}{\gamma}\right). \quad (4.3-50)$$

Assim,

$$\gamma_l(\alpha) \longrightarrow \frac{\alpha\lambda_l - l}{\alpha\lambda_l + 1} \longrightarrow -\frac{1}{4l}(\alpha - 1) + O\left(\frac{1}{\gamma^2}\right). \quad (4.3-51)$$

Conseqüentemente o termo genérico dentro do somatório (4.3-44), nesse limite, fica sendo:

$$\frac{1 - \alpha}{4l} t^{2l}, \quad \text{onde } t = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/\alpha}. \quad (4.3-52)$$

Substituindo esse resultado na soma, temos:

$$\frac{1 - \alpha}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{2l}}{l} = -\frac{(1 - \alpha)}{4} \ln(1 - (r_0/r)^{1/\alpha}), \quad (4.3-53)$$

Mais alguns passos adicionais e encontramos

$$U_{ele}(r) \approx \frac{q^2}{8\alpha r_0} (\alpha - 1) \ln(1 - (r_0/r)^{1/\alpha}). \quad (4.3-54)$$

Nós podemos ver que a auto-energia eletrostática é dominada pela parte induzida devido ao núcleo. A análise completa para o comportamento da auto-interação é reproduzida apenas de maneira numérica. Usando o programa computacional *Maple*, nós exibimos na figura (4.1) a dependência de  $r_0 U_{ele}/q^2$  em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $r_0/r$ . Podemos ver que o gráfico apresenta um crescimento para pontos com  $t \approx 1$ , o que é compatível com o comportamento singular mostrado analiticamente em (4.3-54).

Figura 4.1: Auto-energia eletrostática para uma carga colocada fora do núcleo do monopolo em função do parâmetro  $\alpha$  e da nova coordenada  $t_{ext} = r_0/r$ .

### 4.3.2 Auto-energia na região interna do monopolo

Para desenvolvermos a análise da auto-energia numa região interna ao monopolo, nós devemos considerar a função de Green correspondente dada em (4.2-33). Como uma análise prévia, a contribuição induzida devido ao núcleo nesta função é finita no limite de coincidência para  $r < r_0$ . A contribuição divergente aparece apenas no limite de coincidência da função  $G_0(\vec{r}', \vec{r})$ . A função de Hadamard, na parte interna ao monopolo, necessária para renormalizar a função de Green, pode ser obtida por um caminho mais simples usando o sistema de coordenadas dado em (4.1-2). Tomando o limite de coincidência, primeiramente das variáveis da parte angular, temos:

$$G_H(\rho', \rho) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\rho' - \rho|} . \quad (4.3-55)$$

A função de Green obtida anteriormente (4.2-33) foi dada em termos do sistema de coordenadas (4.1-7), é mais conveniente para nós expressar-mos a função de Hadamard acima neste sistema. Utilizando a relação (4.1-6) o comportamento de (4.3-55) é

$$G_H(r', r) = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{\sqrt{1 - (r/r_0)^2 \sin^2 \epsilon}}{|r' - r|} . \quad (4.3-56)$$

Finalmente a função renormalizada de Green é dada por

$$G_{0,ren}(r, r) = \lim_{r' \rightarrow r} [G_0(r', r) - G_H(r', r)] . \quad (4.3-57)$$

Desenvolvendo mais alguns passos, nós obtemos a seguinte expressão para  $G_{0,ren}(r', r)^2$ :

$$G_{0,m}(r, r) = \frac{1}{4\pi\alpha r} \bar{S}(\alpha, r/r_0) , \quad (4.3-58)$$

---

<sup>2</sup>No apêndice B deste volume nós apresentamos em mais detalhes os cálculos desenvolvidos para obter (4.3-58).

onde

$$\bar{S}(\alpha, r/r_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{1-x_r}{2} \right) F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + l; \frac{1-x_r}{2} \right) - 1 \right] \quad (4.3-59)$$

e

$$x_r = \sqrt{1 - (r/r_0)^2 \sin^2 \epsilon} . \quad (4.3-60)$$

Agora nós estamos em posição para escrever a função da auto-energia eletrostática induzida de uma partícula carregada colocada na região interna ao núcleo do monopolo:

$$U_{ele}(r) = \frac{q^2}{2\alpha r} \bar{S}(\alpha, r/r_0) + \frac{q^2}{4\alpha r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\pi(-1)^l \eta_l(\alpha) (P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_r))^2 . \quad (4.3-61)$$

Em semelhança ao caso da região exterior, a auto-energia é positiva para  $\alpha < 1$  e negativa para  $\alpha > 1$ . Sua auto-força correspondente é obtida através de (4.3-37), sendo repulsiva para o primeiro caso e atrativa para o segundo. Próximo ao centro do núcleo, a contribuição mais relevante é para a componente  $l = 0$ . Nesta região a auto-energia se comporta como

$$U_{ele}(r) \approx \frac{q^2}{2\alpha^2 r_0} \eta_0(\alpha) (1 - \alpha^2) . \quad (4.3-62)$$

O termo induzido devido ao núcleo também diverge na fronteira. Para visualizarmos este comportamento, analisemos o termo genérico da soma em (4.3-61) para grandes valores de  $l$ . Com base no que foi discutido anteriormente, podemos ver que, neste limite, temos:

$$\eta_l(\alpha) \approx \frac{1-\alpha}{4l} \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^l \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+l)}{\Gamma(\frac{1}{2}-l)} \quad (4.3-63)$$

e

$$P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_r) \approx \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{2}+l))} \left( \frac{1-x_r}{1+x_r} \right)^{l/2} . \quad (4.3-64)$$

Assim,

$$(2l+1)\pi(-1)^l \eta_l(\alpha) (P_{\frac{1}{2}}^{-l-1/2})^2 \approx (2l+1)(-1)^l \pi \frac{1-\alpha}{4l} \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^l \approx \frac{(1-\alpha)\delta^l}{2} \frac{1}{l} , \quad (4.3-65)$$

onde,

$$\delta = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{1 - x}{1 + x} . \quad (4.3-66)$$

O somatório (4.3-65), resulta em:

$$\frac{(1 - \alpha)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta^l}{l} = \frac{(\alpha - 1)}{2} \ln(1 - \delta) . \quad (4.3-67)$$

No limite  $r \rightarrow r_0$ ,

$$\delta \longrightarrow 1 - \frac{2}{\alpha} (1 - r/r_0) , \quad (4.3-68)$$

assim,  $\ln(1 - \delta) \approx \ln(1 - r/r_0)$  .

Finalmente a expressão para a auto-energia fica:

$$U_{ele}(r) \approx \frac{q^2}{8\alpha r} (\alpha - 1) \ln(1 - r/r_0) . \quad (4.3-69)$$

Na figura (4.2) nós apresentamos o comportamento completo de  $r_0 U_{ele}/q^2$  em função do parâmetro  $\alpha$  e  $r/r_0$ . Novamente aqui também foi utilizado o programa computacional *Maple*. Podemos ver que o gráfico apresenta um crescimento para  $t < 1$  e  $t \approx 1$ . Esse resultado numérico é compatível com a expressão (4.3-69).

Figura 4.2: Auto-energia eletrostática para uma carga localizada dentro do núcleo do monopolo em função do parâmetro  $\alpha$  e da nova coordenada  $t_{in} = r/r_0$ .

# Conclusões

Essa dissertação teve como objetivo principal analisar a auto-interação eletrostática sobre uma carga elétrica, induzida pelo espaço-tempo gerado por um monopolo global com estrutura interna não trivial. Nesse sentido, admitimos que o monopolo tem um raio interno  $r_0$  não nulo, e que a geometria gerada por esse objeto, pode ser descrita por duas métricas: uma na região interna,  $g_{\mu\nu}^-$ , e outra na região externa  $g_{\mu\nu}^+$ . Dessa forma, o elemento de linha nessas regiões,  $ds_-^2$  e  $ds_+^2$ , pode ser, genericamente, expresso por:

$$ds_{\pm}^2 = g_{\mu\nu}^{\pm} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (4.3-70)$$

Em nosso trabalho [42], admitimos que para a região externa, o espaço-tempo é descrito pelo seguinte elemento de linha

$$ds_+^2 = dt^2 - dr^2 + \alpha^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) , \quad (4.3-71)$$

onde a variável  $r$  pertence ao intervalo  $[r_0, \infty)$ .

O escalar de curvatura associado a essa geometria é

$$R = \frac{2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 r^2} . \quad (4.3-72)$$

Como não é conhecido o tensor métrico para a região interna, decidimos adotar nessa dissertação um modelo denominado de *ball point pen*, o qual apresenta um escalar de curvatura constante, evitando dessa forma a singularidade em  $r = 0$ , caso estendêssemos a métrica (4.3-71) para todo o espaço-tempo. Assim para a região interna temos:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \left(\frac{\rho_0}{\epsilon^2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\epsilon\rho}{\rho_0}\right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (4.3-73)$$

Para essa carta, a coordenada radial  $\rho$  varia num intervalo  $[0, \rho_0]$ . Seu escalar de curvatura é  $R = -6 \frac{\epsilon^2}{\rho_0^2}$ .

O tensor métrico para a região interna, pode ser compatibilizado com o tensor métrico para a região externa, sem a necessidade de se incluir uma casca infinitesimal de matéria-energia. Para isso é necessário que

$$g_{\mu\nu}^-(\rho_0) = g_{\mu\nu}^+(r_0) \quad e \quad \frac{dg_{\mu\nu}^-(\rho_0)}{d\rho} = \frac{dg_{\mu\nu}^+(r_0)}{dr} . \quad (4.3-74)$$

Essas duas condições fornecem:

$$\alpha r_0 = \frac{\rho_0}{\epsilon} \sin \epsilon \quad \text{com} \quad \alpha = \cos \epsilon . \quad (4.3-75)$$

Admitindo essa estrutura geométrica para o monopolo global, nós calculamos a auto-energia eletrostática induzida associada a uma carga pontual, em repouso, colocada nesse espaço-tempo. As duas regiões distintas foram analisadas interna e externamente. Constatamos que as auto-energias geradas, fornecem auto-força repulsiva com respeito a fronteira do monopolo para  $\alpha < 1$ , e atrativa para  $\alpha > 1$ . Além disso, demonstramos que as mesmas divergem logaritmicamente nas proximidades da fronteira,  $r = r_0$ .

Finalizamos nosso trabalho, apresentando as expressões para a auto-energia eletrostática induzida na parte interna e externa ao núcleo, respectivamente:

- Região interna:

$$U_{ele}(r) = \frac{q^2}{2\alpha r} \bar{S}(\alpha, r/r_0) + \frac{q^2}{4\alpha r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \pi (-1)^l \eta_l(\alpha) (P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_r))^2 . \quad (4.3-76)$$

com

$$x_r = \sqrt{1 - (r/r_0)^2 \sin^2 \epsilon} . \quad (4.3-77)$$

- Região externa:

$$U_{ele}(r) = \frac{q^2}{2\alpha r} S(\alpha) + \frac{q^2}{2\alpha r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\gamma_l(\alpha)(2l+1)}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+2\lambda_l} . \quad (4.3-78)$$

# Apêndice A

## Teoria de Grupos

Grupos são usados na Matemática e nas ciências em geral para classificar a simetria interna de uma estrutura na forma de automorfismos de grupo. Uma simetria interna está normalmente associada com alguma propriedade invariante, e o conjunto de transformações que preserva este invariante, juntamente com a operação de composição de transformações, forma um grupo chamado um grupo de simetria.

Na topologia algébrica, grupos são usados para descrever os invariantes de espaços topológicos. Eles são chamados de *invariantes* porque não mudam se o espaço é submetido a uma transformação.

A compreensão da teoria de grupos é fundamental na Física, onde é utilizada para descrever as simetrias que as leis da Física devem obedecer. O interesse da Física na representação de grupos é grande, especialmente em grupos de Lie, ou grupos contínuos, pois suas representações podem apontar o caminho para possíveis teorias físicas.

A teoria de grupos se divide basicamente em duas partes: Grupos discretos, muito utilizado na Cristalografia e estado sólido e Grupos contínuos, utilizado na Mecânica Quântica, Teoria de campos e outras áreas afins.

Nesta parte do nosso trabalho iremos fazer uma breve revisão sobre grupos, especialmente grupos contínuos, ou comumente denominados, Grupos de Lie.

## A.1 Grupos Contínuos

Um grupo  $G$  qualquer é um conjunto de objetos que combinam-se por uma operação de multiplicação e que satisfazem as seguintes condições:

- 1– Se  $a, b \in G$  então o produto  $ab \in G$ ;
- 2–  $\exists I$  tal que  $Ia = aI = a$ , denominado elemento identidade do grupo
- 3– A multiplicação de elementos é associativa:  $(ab)c = a(bc)$ ;
- 4– Existe o recíproco para cada elemento do grupo  $G$ .  $\exists a^{-1}$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ .

Grupos discretos são grupos que são formados por um número finito de elementos e que seguem as regras estabelecidas anteriormente, ex:  $(1, i, -1, -i)$  onde se pode definir uma regra de multiplicação entre eles e definir o seu elemento identidade  $I$ . Grupos contínuos, ou Grupos de Lie, são os conjuntos que possuem um número infinito de elementos, elementos esses que possuem um ou mais parâmetros que variam sobre um intervalo de forma contínua.

i)-Grupo completo: Se os parâmetros do grupo variam em um intervalo finito, tal como um ângulo no intervalo  $[0, 2\pi]$  ou  $[0, \pi]$ , este grupo é dito completo, caso contrário é dito incompleto.

ii)-Sub-grupo: Defini-se como sub grupo de  $G$ , um subconjunto de  $G$  que contenha o elemento  $I$  e satisfaça as propriedades de grupo.

iii)-Grupo Abeliano: Se o produto de dois elementos quaisquer de um grupo é comutativo diz-se que o mesmo é um grupo Abeliano.

### A.1.1 Grupo das Rotações $O_3^+$

Este grupo é o denominado: Grupo das rotações em  $3D$ . Em geral uma matriz  $n \times n$  ortogonal forma um grupo  $O_n$  desse tipo, estas matrizes satisfazem a seguinte propriedade:

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-1})$$

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (\text{A.1-2})$$

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_j (x_j)^2 \Rightarrow \sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (\text{A.1-3})$$

o número de parâmetros independentes  $N$  que esse grupo possui é dado por:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (\text{A.1-4})$$

Para uma matriz  $n \times n$ , com  $n = 2$ , temos apenas um parâmetro independente: um ângulo de rotação. Com  $n = 3$ , teremos três parâmetros independentes: os conhecidos ângulos de Euler.

Consideremos o caso em que a matriz ortogonal tem determinante  $+1$ , ou seja, consideraremos apenas rotação, sem reflexão. No caso tri-dimensional  $n = 3$ , este grupo é o  $O_3^+$ , que é o grupo das rotações em  $3D$ , sejam as matrizes:

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-5})$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-6})$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-7})$$

$R_x(\varphi)$ ,  $R_y(\theta)$  e  $R_z(\psi)$  formam um grupo completo de rotações no espaço tridimensional que deixam a norma de um vetor invariante. Uma rotação genérica qualquer em  $R^3$  é dada pelos

ângulos de Euler:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha), \quad (\text{A.1-8})$$

uma rotação arbitrária seria expressa como

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-9})$$

no caso se nós tivéssemos reflexão,  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  ficaria como

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-10})$$

cujos seu determinante é  $-1$ .

### A.1.2 Grupo Unitário $SU(n)$

O conjunto de matrizes unitárias  $n \times n$  formam o grupo  $U(n)$ , se impormos a condição de que o determinante dessas matrizes seja igual a  $+1$ , obtemos o grupo especial  $SU(n)$ . O número de parâmetros independentes desse grupo é dado por  $N = n^2 - 1$ , para  $n = 2$  temos 3 parâmetros, o mesmo número que  $O_3^+$ .

Quando  $n=2$ , temos o grupo  $SU(2)$  dado por:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1-11})$$

sendo  $a$  e  $b$  complexos,  $aa^* + bb^* = 1$  e  $UU^+ = 1$ . A matriz  $U$  descreve a transformação de uma matriz coluna complexa de dois elementos, spinor.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1-12})$$

com

$$u' = au + bv, \quad (\text{A.1-13})$$

e

$$v' = -b^*u + a^*v. \quad (\text{A.1-14})$$

Uma maneira alternativa de escrever a matriz  $U$  com parâmetros reais é:

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\gamma} \sin \eta \\ -e^{-i\gamma} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-15})$$

onde  $\xi$ ,  $\gamma$  e  $\eta$  são parâmetros reais. Os grupos  $SU(2)$  e  $O_3^+$  apresentam um homomorfismo entre si, de maneira tal que a relação entre ambos é expressa como segue abaixo:

$$R_x(\varphi) = U_x \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) & i \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \\ i \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) & \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-16})$$

$$R_y(\beta) = U_y \left( \frac{\beta}{2} \right) = \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) & \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) \\ -\sin \left( \frac{\beta}{2} \right) & \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-17})$$

$$R_z(\alpha) = U_z \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-18})$$

A correspondência aqui não é 1-para-1, e sim 2-para-1,  $U_z \left( \frac{\alpha}{2} \right)$  e  $U_z \left( \frac{\alpha}{2} + \pi \right) = -U_z \left( \frac{\alpha}{2} + \pi \right)$  correspondente a  $R_z(\alpha)$ , portanto, homomorfas.

### A.1.3 Geradores

Para que uma transformação qualquer  $x^i = x^i(x^j, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  seja um grupo de Lie é necessário que a função seja uma função analítica em seus parâmetros  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ . A analiticidade da função permiti-nos desenvolver o conceito de geradores, e reduz o estudo de todo o grupo ao estudo de geradores.

1- Seja uma rotação de um ângulo  $\varphi$  (no sentido horário) em torno do eixo  $z$ , dado por:

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-19})$$

$$R(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-20})$$

2- Seja  $\varphi$  um ângulo infinitesimal do tipo  $\delta\varphi$ , desse modo,  $R(\varphi)$  fica sendo dada por:

$$R_z(\delta\varphi) = I + i\delta\varphi M_z + O(\delta\varphi)^2 \approx e^{i\delta\varphi M_z}, \quad (\text{A.1-21})$$

com

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & +i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1-22})$$

podemos ver também que

$$\frac{dR_z(\varphi)}{d\varphi} = iM_z \quad (\text{A.1-23})$$

. em  $\varphi = 0$ .

3- Rotações finitas a partir de rotações infinitesimais. A partir de sucessivas rotações infinitesimais  $\delta\varphi$  nós podemos construir uma rotação finita de um ângulo  $\varphi$ , escrevamos  $R_z(\varphi)$  como um produto de sucessivas rotações  $R_z(\delta\varphi)$ .

$$R_z(\varphi) \cong R_z(\delta\varphi_n)R_z(\delta\varphi_{n-1})\dots R_z(\delta\varphi_1) = (1 + i\delta\varphi_n M_z)\dots(1 + i\delta\varphi_1 M_z), \quad (\text{A.1-24})$$

escrevendo  $\delta\varphi_i = \frac{\varphi}{n}$ , podemos reescrever essa expressão como

$$R_z(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i\varphi}{n} M_z \right)^n, \quad (\text{A.1-25})$$

que implica

$$R_z(\varphi) = e^{i\varphi M_z}. \quad (\text{A.1-26})$$

Onde defini-se  $M_z$  como sendo o gerador do grupo  $R_z(\varphi)$ , sub-grupo de  $O_3^+$ . A matriz  $M_z$  é uma matriz hermitiana que implica que  $R_z(\varphi)$  é unitária, seu traço, como se pode ver claramente é zero, fazendo o determinante de  $R_z(\varphi)$  igual a +1,  $\det R_z(\varphi) = 1$ . Por analogia a esse cálculo nós também podemos obter os geradores de  $R_x(\alpha)$  e  $R_y(\beta)$ , que são :

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1-27})$$

e

$$M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1-28})$$

Que são identificadas como sendo geradores dos grupos  $R_x(\alpha)$  e  $R_y(\beta)$ , respectivamente, obedecendo também as mesmas propriedades impostas sobre o gerador  $M_z$ .

Por fim, se fizermos uma rotação infinitesimal  $\delta\varphi$  em torno de um eixo principal, cujo o versor é  $\hat{n}$ , ficamos com:

$$R_{\hat{n}}(\delta\varphi) = 1 + i\delta\varphi \hat{n} \cdot \vec{M} + O(\delta\varphi)^2, \quad (\text{A.1-29})$$

encontraremos que  $\vec{M}$  é dado pela soma dos 3 geradores anteriormente determinados.

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z) \tag{A.1-30}$$

Que forma um conjunto completo de geradores no espaço em três dimensões.

## Apêndice B

### Renormalização da função $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$

A expressão encontrada para a função de Green na região interna ao monopolo é:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{r'r}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\kappa_l} P_{\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(x_>) P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_<) P_l(\cos\gamma) + \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{r'r}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\kappa_l} P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_>) P_{\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(x_<) P_l(\cos\gamma)\eta(\alpha), \quad (\text{B.0-1})$$

sendo

$$x_> = \sqrt{1 - \frac{r_>^2 \sin^2 \epsilon}{r_0^2}} \quad \text{e} \quad x_< = \sqrt{1 - \frac{r_<^2 \sin^2 \epsilon}{r_0^2}}. \quad (\text{B.0-2})$$

Definindo,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (\text{B.0-3})$$

com

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{r'r}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\kappa_l} P_{\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(x_>) P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_<) P_l(\cos\gamma), \quad (\text{B.0-4})$$

e

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{r'r}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\kappa_l} P_{\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(x_>) P_{\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(x_<) P_l(\cos\gamma)\eta(\alpha). \quad (\text{B.0-5})$$

Vemos que a função  $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$  é a contribuição associada ao espaço-tempo da região interna ao monopolo, enquanto que  $G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$  é devido a geometria externa, i.e.,  $r > r_0$ .

Verifica-se que  $G_\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$  é finita no limite de coincidência, para pontos distantes da fronteira, enquanto que  $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$  diverge nesse mesmo limite.

De modo a observar o comportamento singular de  $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ , vamos analisar o termo dentro do somatório para valores de  $l \gg 1$ . Inicialmente tomamos  $\gamma = 0$ , e em seguida expressamos o polinômio generalizado de Legendre em termo das funções hipergeométricas [23]:

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\mu}{2}} F \left( -\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2} \right), \quad (\text{B.0-6})$$

Assim, após algumas simplificações, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{(2l+1)}{\kappa_l} P_{1/2}^{l+1/2}(x_<) P_{1/2}^{-l-1/2}(x_>) = Y^{l/2+1/4} F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{1-x_<}{2} \right) \times \\ F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + l; \frac{1-x_>}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.0-7})$$

com

$$Y = \frac{x_< + 1}{x_< - 1} \frac{x_> - 1}{x_> + 1}. \quad (\text{B.0-8})$$

Fazendo agora  $l \gg 1$ ,

$$F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{1-x_<}{2} \right) F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + l; \frac{1-x_>}{2} \right) \rightarrow 1 + \frac{3}{8l}(x_> - x_<) + O \left( \frac{1}{l^2} \right). \quad (\text{B.0-9})$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Y^{1/2} F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{1-x_<}{2} \right) F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + l; \frac{1-x_>}{2} \right) \rightarrow \\ Y^{1/2} + \frac{3Y^{1/2}}{8l}(x_> - x_<) + O \left( \frac{1}{l^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.0-10})$$

Substituindo os termos do lado direito da expressão (B.0-10) em (B.0-4), encontramos duas contribuições distintas:

- $\sum_{l=0}^{\infty} Y^{l/2} = \frac{1}{1-\sqrt{Y}}$  ,
- $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{Y^{l/2}}{l} = -\ln(1-\sqrt{Y})$  .

Embora a contribuição logarítmica seja divergente no limite de coincidência, a contribuição  $(x_> - x_<) \ln(1-\sqrt{Y}) \rightarrow 0$ , no limite  $r \rightarrow r'$ . Logo, apenas a primeira contribuição é relevante:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\kappa_l} P_{1/2}^{l+1/2}(x_<) P_{1/2}^{-l-1/2}(x_>) \approx \frac{1}{1-\sqrt{Y}} + (\text{termos regulares}). \quad (\text{B.0-11})$$

## Renormalização da função $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$

---

Usando as expressões, (B.0-2), e considerando que  $r_{<} \rightarrow r_{>}$ , temos:

$$Y = 1 - \frac{2(r_{<} - r_{>})}{r_{>} \sqrt{1 - \left(\frac{r_{\leq}}{r_0}\right)^2 \sin^2 \epsilon}}. \quad (\text{B.0-12})$$

Assim,

$$1 - \sqrt{Y} \approx \frac{r_{>} - r_{<}}{r_{>} \sqrt{1 - \left(\frac{r_{\leq}}{r_0}\right)^2 \sin^2 \epsilon}}. \quad (\text{B.0-13})$$

Finalmente a contribuição devido a esse termo em (B.0-4) é

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha\sqrt{rr'}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{r_{\leq}}{r_0}\right)^2 \sin^2 \epsilon}}{1 - t} + (\text{termos regulares}), \quad (\text{B.0-14})$$

onde  $t = \frac{r_{\leq}}{r_{>}} < 1$ . A função de Hadamard é:

$$G_H(\rho, \rho') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\rho - \rho'|}. \quad (\text{B.0-15})$$

Expressando  $\rho$  em termo da variável  $r$ , usando (4.1-6), obtemos:

$$G_H(\rho, \rho') = G_H(r, r') = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{\sqrt{1 - (r/r_0)^2 \sin^2 \epsilon}}{r - r'}. \quad (\text{B.0-16})$$

Desse resultado vemos que a função de Hadamard coincide com a parte singular de  $G_0(r, r')$ , a qual é resultante do primeiro termo da expressão (B.0-9).

A função de Green renormalizada é definida por:

$$G_{0,ren}(r, r') = \lim_{r' \rightarrow r} [G_0(r, r') - G_H(r, r')] \quad (\text{B.0-17})$$

$$G_{0,ren}(r, r') = \frac{1}{4\pi\alpha r} \lim_{r' \rightarrow r} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\kappa_l} P_{1/2}^{l+1/2}(x_{>}) P_{1/2}^{-l-1/2}(x_{<}) - \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{r_{\leq}}{r_0}\right)^2 \sin^2 \epsilon}}{1 - \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right)} \right].$$

Mais alguns passos e obtemos:

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha} \lim_{r' \rightarrow r} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ Y^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{1 - x_{<}}{2}\right) F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + l; \frac{1 - x_{>}}{2}\right) - Y^{\frac{1}{2}} \right]$$

## Renormalização da função $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$

---

Tomando o limite,  $r \rightarrow r'$ , que implica  $Y \rightarrow 1$ , finalmente encontramos a função de Green renormalizada,

$$G_{0,ren}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\alpha r} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - l; \frac{1-x_{<}}{2}\right) F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + l; \frac{1-x_{>}}{2}\right) - 1 \right]. \quad (\text{B.0-19})$$

# Bibliografia

- [1] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, **Cosmic Strings and Other Topological Defects** Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).
- [2] T. W. B. Kibble, **Topology of Cosmic Strings and Domains Walls**, Journal of Physics A. **9**, 1387 (1976).
- [3] M. Barriola e A. Vilenkin, **Gravitational Field of a Global Monopole**, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1989).
- [4] D. D. Sokolov e A. A. Starobinsky, Dokl. Akad. Nauk USSR. **234**, 1043 (1977) [Sov. Phys. - Doklady **22**, 312 (1977)].
- [5] B. Linet, **Force on a Charge in the Space-time of a Cosmic String**. Phys. Rev. D. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. **33**, 1333-1334, (1986).
- [6] A.G. Smith, **In Proceeding of the Symposium on The Formation and Evolution of Cosmic Strings**, ed. by G.W. Gibbons, S.W. Hawking and T. Vachaspati, University Press, Cambridge, England, (1990).
- [7] S. Deser e Jackiw, **Classical and Quantum Scattering on a Cone**. **Communications in Mathematical Physics**. New York: Springer, vol. 118, 495-509, (1988).

- [8] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello e V. B. Bezerra, **Relativistic Quantum Scattering on a Cone**, Classical and Quantum Gravity. Bristol: IOP Publishing Ltd, 1555-1566, 2001.
- [9] E.R. Bezerra de Mello e C. Furtado, **Nonrelativistic Scattering Problem by a Global Monopole**, Phys. Rev. D **56**, 1345(1997).
- [10] E. R. Bezerra de Mello, **Physics in the Global Monopole Spacetime**, Brazilian journal of Physics, vol. **31**, 2, (2001).
- [11] Howard Georgi e S. L. Glashow, **Unity of All Elementary-Particle Forces**, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 - 441 (1974)
- [12] J. N. Islan, **An Introdoctuion to Mathematical Cosmology**, Cambridge University Press, UK (1992).
- [13] P. G. Bergmann, **Introduction to the Theory of Relativity**, New York, Dover Publications, (1976).
- [14] A. Vilenkin, **Cosmic Strings end Domain Wall**, Phys. Rep. **121**(1985) 263.
- [15] M.B.hind e T.W.B. kibble, **Cosmic Strings**, Rep. Prog. Phys. **58** (1995),447.
- [16] J. Cohen, R. Wald e J. Math. Phys. Rev. **12**, 1845 (1971).
- [17] R. Hanni e R. Ruffini, **Lines of Force of a Point Charge near a Schwarzschild Black Hole**, Phys. Rev. D **8**, 3259 (1973).
- [18] J.D. Jackson, **Eletrodinâmica Clássica**, ed. Guanabara dois, Rio de Janeiro 1983.
- [19] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, C. Furtado e F. Moraes, **Self-forces on Electric and Magnetic Linear Sources in the Space-time of a Cosmic String**, Phys. Rev D **51**, 7140 (1995).

- [20] M. Carmeli, **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**, ed. John Wiley and Sons, New York (1982).
- [21] G.B. Arfken e H.J. Weber, **Mathematical Methods for Physicists**, 4th ed. Academic Press, New York (1995).
- [22] E. Butkov, **Física Matemática**, ed. Guanabara dois, Rio de Janeiro 1978.
- [23] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, **Table of Integrals, Series and Products**, Academic Press, New York, (1980).
- [24] M. Abramowitz e I.A Stegun, **Handbook of Mathematical Functions**, (National Bureal of Standards, Washington DC, (1964)).
- [25] A. Gangui, **Cosmology from Topological Defects**, Instituto de Astronomia y Física del Espacio, Argentina, (2003).
- [26] H.R. Brandenberger, **Topological Defects and Cosmology**, Brown University Physics Department, United States (1998).
- [27] M. B. Hind Marsh e T.W.B. kibble, **Cosmic Strings**, Rep. Prog. Phys. **58**, 477, (1995).
- [28] V.P. Frolov e E. M. Serebryany, **Vacumm Polarization in Gravitaional Field of Cosmic String**, Phys. Rev. **D35**, 3779, (1987).
- [29] S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, **Tables of Integrals, Series and Products**, Academics Press, 4th ed, New York, (1965).
- [30] C.R. Braga, **Notas de Física Matemática**, ed. Livraria da Física, Instituto de Física da USP, São Paulo, (2006).
- [31] B. Allen e A. C. Ottewill, **Effects of curvature couplings for quantum fields on cosmic-string space-times**, Phys. Rev. **D 42**, 2669 - 2677 (1990).

- [32] E. Hubble, **A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae**, Proc.Nat.Acad.Sci.**15**:168-173, (1929).
- [33] A. A. Penzias, R. W. Wilson, **A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080-Mc/s**, Astrophys.J. **142**:419-421, (1965).
- [34] S. Coleman, **Aspects os Symetry**, Cambridge University Press, New York, 1988.
- [35] S. M. Christensen, **Regularization, Renormalization, and Covariant Geodesic Point Separation**, Phys. Rev. **D 17**, 946 - 963 (1978).
- [36] N. D. Birrel e P.C.W. Davier, **Quantum Fields in Curved Space**, Cambridge University Press, (1999).
- [37] E. R. Bezerra de Mello, Braz. J. Phys. **31**, 211 (2001).
- [38] J. R. Gott, Astrophys. J. **288**, 422 (1985); W.A. Hiscock, Phys. Rev. D **31**, 3288 (1985).
- [39] N. R. Khusnutdinov e V. B. Bezerra, **Self-energy and Self-force in the Space-time of a Thick Cosmic String**, Phys. Rev. D **64**, 083506 (2001).
- [40] E. R. Bezerra de Mello e A. A. Saharian, Class. Quantum Grav. **24**, 2389 (2007).
- [41] D. Harari e C. Loustó, **Repulsive Gravitational Effects of Global Monopoles**, Phys. Rev. **D 42**, 2626 - 2631 (1990).
- [42] D. Barbosa, J. Spinelly e E. R. Bezerra de Mello, **Electrostatic Self-Interaction in the Spacetime of a Global Monopole with Inner Structure**, arXiv:0807.3919[hep-th].