

UNIVERSIDADE FEDERAL PARAÍBA

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Coordenação de Pós-graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Teoria da Gravitação em Espaços-tempos de Weyl e os Testes do Sistema Solar

Antônio Leocádio Martins Ferreira

Dissertação realizada sob a orientação do
Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto,
apresentada ao Curso de Pós-Graduação em
Física da Universidade Federal da Paraíba
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Mestre em Física.

João Pessoa-PB

2011

F383g Ferreira, Antônio Leocádio Martins.
 Gravitação em espaços-tempos de Weyl e os testes do sistema
 solar / Antônio Leocádio Martins Ferreira. - - João Pessoa : [s.n.],
 2011.
 108f.
 Orientador: Joel Batista da Fonseca Neto.
 Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

 1. Física. 2. Relatividade geral. 3. Equações de Einstein. 4.
 Gravitação.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

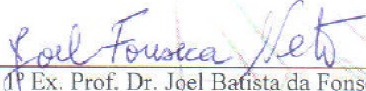


Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

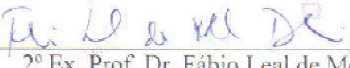
DECLARAÇÃO

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 29 de julho de 2011, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Antonio Leocadio Martins Ferreira** na defesa de sua dissertação intitulada "*Teoria da gravitação em espaço-tempo de Weyl e os testes do Sistema Solar*".

João Pessoa, 29 de julho de 2011


1º Ex. Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca
Neto
(DF/UEPB)

Presidente (Orientador)
Prof. Dr. Carlos Augusto Romero
Filho
(DF/UEPB)


2º Ex. Prof. Dr. Fábio Leal de Melo
Dahia
(UFCG)

NÃO HÁ
(Co-Orientador)

(---)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço do fundo do meu coração ao Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto pela grande paciência que sempre demonstrou durante todo o processo de construção da dissertação e, sobretudo por ser essa grande pessoa. Certamente terei uma dívida de gratidão eterna e sempre me espelharei nele no que diz respeito ao tipo de profissional e pessoa que eu devo ser. Então, muito obrigado Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto por ter aparecido no momento mais difícil minha vida.

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho, que sempre veio me dando contribuições intelectuais para o desenvolvimento de minha dissertação e também por ter estendido a mão à mim quando eu pensava que as coisas não iriam mais para frente.

Não posso deixar de esquecer de dizer o meu obrigado a minha família, em especial ao meu pai, mãe e irmã, que sempre veio me ajudando e dando força quando eu mais precisava. Agradeço à Hélia por dar um sentido melhor à vida.

Não posso esquecer de forma alguma dos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado mesmo os que estavam longe de mim. Então, obrigado: Rubens Silva, Larissa Rodrigues, Erick Silva, Luis Paulo Machado, Danielle Loiola, Cristiana Ferreira, Bertúlio de Lima Bernado, Seu Givaldo e família, Hugo Mendonça Ferreira, Joseane Gessinger, Thiago Madeira, Luciano Sousa Lima, André Santos de França, Manoela Franco, Wemerson José Alencar, Vladimir Homobono, Luis Martins, Dona Linda e família, Eduarda Matos, aos professores da graduação em física no IFPA que me deram o devido apoio: Benedito Tadeu Ferreira de Moraes, Charles Rocha e João Bosco Pampolha e muitos outros amigos.

Resumo

Considerando o espaço-tempo dotado de uma geometria não-Riemanniana dado por uma variedade de Weyl integrável, formulamos uma teoria da gravitação que generaliza a Relatividade Geral e que apresenta invariância sob transformações de Weyl. Em primeiro lugar, formulamos as equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável a partir de um princípio variacional. Em segundo lugar, generalizamos os postulados da geodésica e do relógio abordando o movimento de partículas de teste e de raios de luz que seguem auto-paralelas do espaço-tempo de Weyl, denominadas de geodésicas de Weyl. Em terceiro lugar, discutimos a questão da invariância sob transformações de Weyl e introduzimos os conceitos de representações do campo gravitacional e as noções de gauge ou frame de Weyl e de Einstein. Em quarto lugar, obtemos o limite newtoniano da teoria. Em quinto lugar, discutimos as simetrias do espaço-tempo de Weyl integrável e determinando as constantes do movimento associadas as geodésicas de Weyl. Finalmente, apresentamos uma solução das equações de campo para um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico em um frame de Weyl e calculamos os mesmos efeitos do campo gravitacional utilizados como testes da Relatividade Geral no Sistema Solar, onde obtemos os mesmos resultados da Relatividade Geral, mas agora dependentes tanto com a métrica quanto com o campo escalar de Weyl.

Abstract

Assuming that the space-time is endowed with a non-Riemannian geometry given by a Weyl manifold, we formulate a theory of gravitation which generalizes General Relativity and is invariant under Weyl transformations. First, we obtain the gravitational field equations in a Weyl integrable space-time from a variational principle. Second, we generalize both the geodesic's postulates and the clock's postulate to deal with the motion of test particles and light beams that follow the auto-parallel curves of Weyl integrable space-time, called Weyl geodesics. Thirdly, we discussed the question of invariance under Weyl transformations and introduce the concepts of representations of the gravitational field and the notions of Weyl frame (gauge) and Einstein frame (gauge). Fourth, we obtain the Newtonian limit of the theory. Fifth, we discuss the symmetries of Weyl integrable space-times and the issue of constants of motion related to Weyl geodesics. Finally, we present a solution of the field equations which represents a static and spherically symmetric gravitational field in a Weyl frame and compute the same effects of the gravitational field used as tests of General Relativity in the Solar System, where we get the same results of General Relativity but now related to both the metric and the Weyl scalar field.

Sumário

1. Introdução	7
2. A Teoria da Relatividade Geral	10
2.1. As Equações de Einstein	10
2.2. Movimento de Partículas e de Raios de Luz	11
2.3. Simetrias dos espaços-tempos	14
3. A Relatividade Geral e os Testes Experimentais no Sistema Solar	17
3.1. Campo Gravitacional Esfericamente Simétrico e Estático	17
3.2. Dilatação Temporal Gravitacional	19
3.3. Efeito Doppler Gravitacional da Luz (Redshift Gravitacional).	20
3.4. Deflexão da Luz pelo Campo Gravitacional	22
3.5. Precessão do Periélio de Mercúrio	26
4. Gravitação em um Espaço-tempo de Weyl Integrável	31
4.1. Equações do Campo Gravitacional	34
4.2. Movimento de Partículas de Teste e de Raios de Luz	39
4.3. Transformações de Weyl e Representações do Campo Gravitacional	45
4.4. O Limite Newtoniano	47
4.5. Simetrias dos Espaços-tempos de Weyl Integrável	51
5. Gravitação em Espaços-tempos de Weyl e os Testes do Sistema Solar	57
5.1. O Campo Gravitacional Estático e Esfericamente Simétrico em um Gauge de Weyl	57
5.2. Dilatação temporal Gravitacional em um Gauge de Weyl	59
5.3. Efeito Doppler Gravitacional da Luz em um Gauge de Weyl	60
5.4. Deflexão da Luz pelo Campo Gravitacional no Gauge de Weyl	62
5.5. Precessão de Periélio de Mercúrio em um Gauge de Weyl	65
Conclusão	70
A. Variedades de Weyl	73

A.1. Variedades de Weyl	73
A.2. Variedade de Weyl Integrável	86
B. Equações do Campo Gravitacional em um Espaço-tempo de Weyl Integrável	89
B.1. Ação para o Campo Gravitacional	89
B.2. Equações do Campo Gravitacional	91
C. Geodésicas de Weyl	98
C.1. Geodésicas Métricas e Geodésicas de Weyl	98
C.2. Princípio variacional para as Geodésicas de Weyl	100
C.3. Correspondência entre Geodésicas Métricas Tipo-Nulo e Geodésicas de Weyl	
Tipo-Nulo	104
Referências Bibliográficas	107

1. Introdução

A Teoria da Relatividade Geral é um dos pilares do modelo cosmológico padrão, onde o mesmo nos fornece a melhor descrição observacional do universo atual e da sua evolução. Porém, o Modelo padrão não consegue explicar alguns fatos como, por exemplo, a expansão acelerada do universo. É desse cenário que emerge a ideia de modificar a Teoria da Relatividade Geral para torná-la compatível com as atuais observações relacionadas com a cosmologia e a astrofísica.

Investigando os fundamentos da Relatividade Geral J. Ehlers, F. Pirani e A. Schild [21] constroem uma formulação axiomática para a estrutura do espaço-tempo utilizando como conceitos primitivos os movimentos de partículas de teste em queda livre e de raios de luz. Em lugar de obter o espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral, eles obtiveram um espaço-tempo dado por uma variedade de Weyl. A compatibilidade com a experiência requer a solução do problema relacionado com o “segundo efeito do relógio” (second clock effect) e impõe que o espaço-tempo seja uma variedade de Weyl integrável. Não existe nenhum outro conjunto de axiomas que utilize os mesmos conceitos primitivos que seja capaz de obter a estrutura pseudo-Riemanniana do espaço-tempo da Relatividade Geral [15, 2]. A variedade de Weyl integrável não possui somente um tensor métrico para descrever a gravitação, temos ainda um campo escalar que contém também as informações que são necessárias para descrever a interação gravitacional [23]. As variedades de Weyl têm recebido uma crescente atenção nos últimos anos, sendo utilizada como modelo do espaço-tempo para abordar diversas questões envolvendo não só a gravitação e a cosmologia, como também a física de partículas em questões relacionadas com o campo escalar de Higgs[36, 23].

A partir dos trabalhos de J. Ehlers, F. Pirani e A. Schild [21], questionamos a possibilidade de formular uma teoria da gravitação que tenha como a estrutura do espaço-tempo a variedade de Weyl integrável e que atenda a duas condições : seja equivalente a Relatividade Geral e seja invariante sob transformações de Weyl. Dentro dessa perspectiva

dividimos o nosso problema em quatro partes. Em primeiro lugar, abordamos o problema da obtenção das equações do campo gravitacional a partir de um princípio variacional. Em segundo lugar, generalizamos os postulados da geodésica e do relógio adotados na Relatividade Geral para o movimento de partículas de teste e de raios de luz, com particular atenção à estrutura causal local. Em terceiro, lugar abordamos o problema do limite newtoniano da teoria. Em quarto lugar, consideramos a questão das simetrias do campo gravitacional e das constantes de movimento. Finalmente, aplicamos os resultados obtidos, utilizando uma representação do campo gravitacional esfericamente simétrico e estático em um espaço-tempo de Weyl integrável, para calcular os efeitos previstos nos testes clássicos da Relatividade Geral no Sistema Solar. Desse modo, obtemos os mesmos resultados que são obtidos a partir do espaço-tempo de Schwarzschild, mas de uma maneira diferente onde as propriedades do campo gravitacional dependem tanto da métrica quanto do campo escalar de Weyl. Para efeito de comparação incluímos um breve resumo da Relatividade geral e dos testes clássicos realizados no Sistema Solar. A invariância sob transformações de Weyl requer que o campo gravitacional e suas propriedades sejam representados por uma classe de equivalência de espaços-tempos de Weyl integráveis, relacionados entre si por transformações de Weyl. Dentre todas essas representações, denominadas de gauge ou frames de Weyl existe uma única onde o campo escalar de Weyl é nulo, denominada de frame de Einstein, onde todos os resultados obtidos coincidem com os resultados da Relatividade Geral.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, apresentamos uma breve revisão da Relatividade Geral, com as equações de Einstein e os postulados da geodésica e do relógio (tempo próprio) para o movimento de partículas de teste e raios de luz. Concluimos com uma breve discussão das simetrias do espaço-tempo, abordando os vetores de Killing e as constantes do movimento associadas. O capítulo 3 contém alguns resultados relacionados com os testes da Relatividade Geral no Sistema Solar, a saber: a dilatação temporal, o efeito Doppler gravitacional, a deflexão da luz e o desvio do periélio de Mercúrio. No capítulo 4 apresentamos os principais resultados dessa dissertação, onde generalizamos os resultados apresentados no capítulo 2. Na primeira seção, obtemos as equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável. Na segunda

seção, generalizamos os postulados da geodésica e do relógio abordando o movimento de partículas de teste e de raios de luz que seguem auto-paralelas do espaço-tempo de Weyl, denominadas de geodésicas de Weyl. Na terceira seção, discutimos a questão da invariância sob transformações de Weyl e introduzimos os conceitos de representações do campo gravitacional e as noções de gauge ou frame de Weyl e de Einstein. Na quarta seção, obtemos o limite newtoniano da teoria. Na quinta seção, discutimos as simetrias do espaço-tempo de Weyl integrável e determinando as constantes do movimento associadas as geodésicas de Weyl. No capítulo 5, apresentamos um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico em um frame de Weyl e calculamos os mesmos efeitos do campo gravitacional utilizados como testes da Relatividade Geral apresentados no capítulo 3, onde obtemos os mesmos resultados da Relatividade Geral mas agora dependentes tanto com a métrica quanto com o campo escalar de Weyl. Finalmente, na Conclusão fazemos algumas observações sobre os resultados obtidos.

2. A Teoria da Relatividade Geral

Neste capítulo apresentamos de forma resumida alguns aspectos fundamentais da Teoria da Relatividade Geral com a finalidade de uma posterior comparação com a teoria da Gravitação em espaço-tempo de Weyl Integrável formulada no capítulo 4. Na primeira seção apresentamos as equações de campo gravitacional. Na seção seguinte apresentamos as equações de movimento para as partículas testes (com massa e sem massa). No terceiro capítulo faremos um breve estudo sobre constantes de movimento e as isometrias presente no espaço-tempo Riemanniano. Para um estudo mais detalhado segue as seguintes referências [1, 2, 3, 4, 5].

2.1. As Equações de Einstein

Nesta seção, obtemos as equações de campo de Einstein proveniente de um principio variacional, onde a distribuição de matéria atua como fonte do campo gravitacional.

Para que possamos encontrar as equações de campo de Einstein devemos obtê-las a partir da ação para o campo gravitacional dada por

$$S_g = \int \sqrt{-g} L_g d^4x = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.1.1)$$

onde R é o escalar de curvatura do espaço-tempo pseudo-Riemanniano da teoria da Relatividade Geral e g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Para acrescentar os outros campos existentes na natureza devemos acrescentar a ação para a matéria de acordo com

$$S = S_g + k S_m = \int \sqrt{-g} R d^4x + k \int \sqrt{-g} L_m d^4x, \quad (2.1.2)$$

onde $k = \frac{8\pi G}{c^4}$, G é constante gravitacional de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo e L_m é a densidade Lagrangiana para a matéria. Sendo assim, podemos então determinar as

equações de campo da Gravitação, pelo princípio da ação mínima temos para a primeira integral da ação eq.(2.1.2)

$$\delta S_g = \delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (2.1.3)$$

para a segunda parte da integral da eq.(2.1.2), logo obtemos

$$\delta S_m = \delta \int \sqrt{-g} L_m d^4x = - \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (2.1.4)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da matéria que atua como fonte do campo gravitacional.

A expressão eq.(2.1.4) é a parte não-gravitacional da integral da ação. Portanto a partir do princípio da mínima ação, obtemos as seguintes equações

1

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}. \quad (2.1.5)$$

A equação acima são as equações de Einstein para o campo gravitacional. Podemos fazer algumas discussões sobre a eq.(2.1.5). As equações de campo da gravitação são não lineares com relação ao tensor métrico, conseqüentemente o princípio da superposição não é válido para os campos gravitacionais, desta forma a soma de duas soluções da equação de Einstein não será uma solução.

2.2. Movimento de Partículas e de Raios de Luz

Nesta seção, apresentamos as equações de movimento para partículas testes massivas e raios de luz em um espaço-tempo pseudo-Riemanniano. Essas equações representam a ação do campo gravitacional, isto é, do espaço-tempo curvo, sobre a matéria. Na Relatividade Geral, esta ação é determinada a partir de dois postulados : o postulado da geodésica e o postulado do Relógio, com a definição de tempo próprio.

¹ Estamos adotando as seguintes convenções: os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos variam de 1 a 3. A assinatura da métrica é $(-, +, +, +)$; o tensor de curvatura é definido por $R^\lambda_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\mu\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\mu\alpha}$ e o tensor de Ricci por $R_{\mu\beta} = R^\lambda_{\mu\lambda\beta}$.

Em um espaço-tempo pseudo-Riemanniano existe dois tipos de curvas que são determinadas pela métrica e pela conexão, isto é, as curvas geodésicas e as curvas auto-paralelas, respectivamente.

As curvas geodésicas são obtidas partir do princípio da ação mínima dada por

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda = 0, \quad (2.2.1)$$

onde $dx^\alpha/d\lambda$ é o vetor tangente a curva $x^\alpha(\lambda)$ e λ é um parâmetro qualquer. Desse modo obtemos as famosas equações da geodésica métrica, dadas por

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \{\rho_{\nu\alpha}\} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0, \quad (2.2.2)$$

onde

$$\{\rho_{\nu\alpha}\} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}), \quad (2.2.3)$$

são os símbolos de Christoffel. Essas curvas têm a propriedade particular de serem curvas onde o comprimento de arco, isto é, o intervalo espaço-tempo $ds = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é um extremo.

As curvas auto-paralelas são curvas $x^\alpha(\lambda)$, onde λ é um parâmetro qualquer, cujo o vetor tangente $v = v^\alpha \partial_\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ é transportado paralelamente a si mesmo, de acordo com a conexão $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ da variedade pseudo-Riemanniana. A partir dessa condição obtém-se que as equações das curvas auto-paralelas são dadas por

$$\frac{Dv^\alpha}{d\lambda} = v^\nu \nabla_\nu v^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (2.2.4)$$

onde $\nabla_\nu v^\alpha$ é a derivada covariante do vetor v^α e f é uma dada função escalar. Fazendo uma reparametrização $\lambda = \lambda(\sigma)$ podemos expressar as equações da curvas auto-paralelas como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0, \quad (2.2.5)$$

onde σ é denominado de parâmetro afim, pois é determinado a menos de uma transformação afim $\sigma' = a\sigma + b$, onde a e b são constantes arbitrárias.

De acordo com os resultados acima podemos verificar que as curvas auto-paralelas parametrizadas com o parâmetro afim eqs.(2.2.5) coincide com as geodésicas métricas, quando o parâmetro afim é o comprimento de arco.

Considerando que em uma variedade pseudo-Riemanniana os vetores são classificados em tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-nulo, as curvas geodésicas e auto-paralelas também são classificadas de acordo com a natureza do seu vetor tangente em curvas tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-nula. Essa classificação é invariante tanto por transformação de Lorentz locais quanto por transformações de coordenadas. Agora veremos como essas curvas são utilizadas para representar o movimento de partículas com massa e de raios de luz na Teoria da Relatividade Geral.

Agora nossa atenção se voltará para o movimento de partículas de teste massivas na Teoria da Relatividade Geral. As equações de Einstein descreve como a matéria encurva o espaço-tempo, agora a gente vai abordar o problema inverso, isto é, como o espaço-tempo curvo influencia no movimento da matéria. De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, uma partícula de teste massiva se move em curvas geodésicas tipo-tempo. Este é o postulado da geodésica que incorpora o princípio da equivalência fraco, isto é, a igualdade entre as massas inercial e gravitacional. Além desse postulado temos o postulado do Relógio que define o tempo próprio τ , medido no referencial de repouso da partícula, em termos do comprimento de arco (intervalo espaço-tempo) ao longo da linha de universo da partícula de acordo com $c^2 d\tau^2 = \epsilon ds^2$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e $\epsilon = \mp 1$ para assinatura da métrica ± 2 .

Considere uma linha de universo $x^\alpha(\tau)$ de uma partícula parametrizada pelo tempo próprio τ , onde a 4-velocidade da partícula $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ é um 4-vetor tipo-tempo com

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1, \quad (2.2.6)$$

e o tempo próprio é o invariante definido por

$$\tau = \int (-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda})^{1/2} d\lambda, \quad (2.2.7)$$

com a integral é calculada ao longo da linha de universo da partícula. Portanto, o postulado da geodésica afirma que uma partícula de teste massiva se move em uma linha de universo onde o tempo próprio é um extremo, isto é, uma curva geodésica tipo-tempo parametrizada pelo tempo próprio cujas as equações são dadas por

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \{\rho_{\nu\alpha}\} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0, \quad (2.2.8)$$

lembramos que o tempo próprio é um parâmetro afim sendo definido a menos de uma transformação

$$\tau' = a\tau + b, \quad (2.2.9)$$

onde a e b são duas constantes reais arbitrárias.

Agora nossa atenção se voltará para o movimento de raios de luz na Teoria da Relatividade Geral. De acordo com o postulado da geodésica, os raios de luz se movem em curvas geodésicas tipo-nulo. Observamos que não existe o postulado do relógio para o movimento da luz, cujas geodésicas nulas são dadas em termos de um parâmetro afim.

Considere uma linha de universo $x^\alpha(\lambda)$ de um raio de luz parametrizada pelo parâmetro afim λ . Como a linha de universo é uma geodésica nula, então a norma do vetor tangente é dada por

$$g_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.2.10)$$

e as equações da geodésica tipo-nulo são

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \{\rho_{\nu\alpha}\} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0. \quad (2.2.11)$$

2.3. Simetrias dos espaços-tempos

Nesta seção, faremos um pequeno estudo sobre as simetrias de um espaço-tempo curvo na relatividade geral. Como o espaço-tempo na Relatividade Geral é completamente determinado pela métrica, as simetrias da métricas (isometrias) são as simetrias do espaço-tempo, isto é, do campo gravitacional quando o espaço-tempo for curvo. As

isometrias estão associadas a campos vetoriais, chamados de campos de vetores de Killing, pois a métrica não varia ao longo das curvas integrais dos mesmos. Um campo vetorial de Killing $k = k^\alpha \partial_\alpha$ é uma solução das equações

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = \nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0, \quad (2.3.1)$$

onde $\mathcal{L}_k$ representa a derivada de Lie ao longo da curva integral do vetor $k = k^\alpha \partial_\alpha$. As equações acima são denominadas de equações de Killing. Como os vetores de Killing são determinados a partir das simetrias da métrica (isometrias), é a métrica que determinará as propriedades de cada vetor de Killing. Os vetores de Killing podem ser utilizados para escolher um sistema de coordenadas adaptado aos mesmos, isto é, às simetrias do espaço-tempo.

A existência dos vetores de Killing implicam na existência de constantes de movimento associados aos movimentos das partículas de teste e dos raios de luz. Considere uma partícula de teste ou um raio de luz que se move em uma curva geodésica $x^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro afim e $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ é o vetor tangente. Vamos agora considerar uma quantidade $C_{(k)}$ definida pelo produto interno da quadri-velocidade u pelo vetor de Killing k de acordo com

$$C_{(k)} = g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu. \quad (2.3.2)$$

A variação da quantidade $C_{(k)}$ ao longo da geodésica é dada por

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = \frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu) = u^\alpha \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu)$$

e que pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = u^\alpha (\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) k^\mu u^\nu + \frac{1}{2} u^\alpha u^\nu (\nabla_\alpha k_\nu + \nabla_\nu k_\alpha) + g_{\mu\nu} k^\mu (u^\alpha \nabla_\alpha u^\nu). \quad (2.3.3)$$

Podemos verificar que essa quantidade corresponde a uma constante do movimento a partir das seguintes observações: como o espaço-tempo é pseudo-Riemanniano, vale a

condição de metricidade dada por $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$; como k_ν é um vetor de Killing, temos $\nabla_\alpha k_\nu + \nabla_\nu k_\alpha = 0$; como u^ν é o vetor tangente à geodésica, temos $u^\alpha \nabla_\alpha u^\nu = 0$. Portanto, obteremos

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = 0. \quad (2.3.4)$$

Os vetores de Killing são muito importantes para a Relatividade Geral, pois quando possuímos isometrias no espaço-tempo que estamos trabalhando, podemos obter a solução das equações da geodésica de uma forma mais simples.

Apresentamos o estudo sobre a equação de Killing, cujas as soluções desta equação são chamadas de vetores de Killing que ao longo da direção desses vetores temos que a métrica de uma variedade riemanniana é preservada. E ainda dos vetores de Killing podemos tirar quantidades conservadas associadas ao movimento geodésico. Esses resultados serão utilizados no próximo capítulo, onde calculamos algumas propriedades do movimento de partículas e da luz no espaço-tempo de Schwarzschild.

3. A Relatividade Geral e os Testes Experimentais no Sistema Solar

Neste capítulo apresentamos alguns testes experimentais da Teoria da Relatividade Geral no contexto do Sistema Solar. Vale lembrar que as quantidades medidas em todos os testes experimentais são calculadas somente em função do tensor métrico, pois a partir da métrica podemos obter todas as informações que precisamos para explicar os fenômenos gravitacionais. Posteriormente, esses resultados serão comparados com os resultados correspondentes obtidos considerando a teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável, obtidos no capítulo 4. Na primeira seção apresentamos a solução de Schwarzschild com o espaço-tempo referente ao campo gravitacional esfericamente simétrico e estático. Na segunda seção apresentamos a dilatação temporal gravitacional. Em seguida apresentamos os três testes clássicos da Teoria da Relatividade Geral propostos por Einstein, a saber o redshift gravitacional, a deflexão da luz e a precessão do periélio de Mercúrio. E para dados experimentais mais atuais sobre os testes experimentais da Relatividade Geral veja [\[37\]](#).

3.1. Campo Gravitacional Esfericamente Simétrico e Estático

A Teoria da Gravitação que Einstein apresentou ao mundo em 1916, a teoria da Relatividade Geral, explica como determinados corpos se comportam no tecido quadrimensional chamado espaço-tempo. A teoria de Einstein diz que a matéria, que também podemos falar em energia, determina como o espaço-tempo deve se encurvar, e o espaço-tempo curvo diz como a matéria como deve se mover. Essa dinâmica é descrita pelas equações chamadas Equações de Campo de Einstein dadas pelas eqs.(2.1.5)). O Lado esquerdo das equações de Einstein que possui tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura R corresponde a parte que corresponde a estrutura geométrica do espaço-tempo

e o lado direito corresponde às propriedades físicas da distribuição de matéria e energia do universo.

As equações de campo de Einstein eqs.(2.1.5) formam um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem no tensor métrico que é extremamente difícil de se resolver. Em 1916, o alemão Karl Schwarzschild apresentou ao mundo a primeira solução exata das equações da Relatividade Geral, que corresponde a um campo gravitacional esfericamente simétrico e estático originado por uma distribuição de massa esfericamente simétrica em repouso, sem carga e rotação, e ela é conhecida como a métrica de Schwarzschild e sua expressão é

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1.1)$$

sendo que

$$f(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (3.1.2)$$

onde $m = GM/c^2$. A equação eq.(3.1.1) é referente a solução em que fora do objeto de massa M o espaço que o rodeia seja o espaço vazio, onde as equações de Einstein são dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.3)$$

Como é bem conhecido por nós, a formulação de uma nova teoria física não significa que a teoria anterior está totalmente errada, pois existe um conjunto de fenômenos onde ela foi testada e aprovada com grande precisão. O que a nova teoria faz é explicar aquilo que a antiga teoria não conseguia ter sucesso, ampliando o conjunto de fenômenos explicados. Pois sabemos que a teoria da gravitação de Newton tem sucesso em explicar órbitas de planetas onde o campo gravitacional não é bastante intenso, tanto é que astrônomos quando estudam ou resolvem problemas ligados ao Sistema Solar com grande frequência utilizam as leis de Newton, desde que as mesma estejam em campos gravitacionais não intensos. Sendo assim, a nova teoria conserva a explicação dos fenômenos que a antiga teoria consegue ter sucesso e ainda inclui os fenômenos que a teoria anterior não teve

sucesso. Isto não foge a regra levando-se em conta a Relatividade Geral de Einstein e a teoria da gravitação de Newton.

A teoria de gravitação de Einstein leva em consideração tudo isso que mencionamos, a mesma recai na teoria da gravitacional de Newton para campos gravitacionais fracos e vai mais além quando explica fenômenos que a gravitação de Newton não é capaz de explicar, como por exemplo : dilatação temporal gravitacional, precessão do periélio de planetas, deflexão e efeito doppler gravitacional da luz, lentes gravitacionais e o atraso temporal de sinais luminosos. E todas esses fenômenos que acabamos de citar onde a gravitação de Newton não consegue explicar podemos utilizar a métrica de Schwarzschild eq.(3.1.1) para descrevê-las. Então utilizaremos a métrica de Schwarzschild para explicar determinados fenômenos que validaram a Teoria da Relatividade de Einstein como a teoria mais aceita para explicar a gravitação no âmbito do Sistema Solar.

3.2. Dilatação Temporal Gravitacional

Vamos considerar dois observadores, A e B , em repouso em relação ao sistema de coordenada, sendo que sobre o observador A age um campo gravitacional mais intenso do que está agindo no observador B . Como eles se encontram em repouso em relação ao sistema de coordenadas, temos $dr = d\theta = d\phi = 0$, logo a equação eq.(3.1.1) fica respectivamente para os observadores A e B

$$d\tau_A = \sqrt{-g_{00}(r_A)}dt = \sqrt{f(r_A)}dt = \left(1 - \frac{2m}{r_A}\right)^{1/2} dt \quad (3.2.1)$$

e

$$d\tau_B = \sqrt{-g_{00}(r_B)}dt = \sqrt{f(r_B)}dt = \left(1 - \frac{2m}{r_B}\right)^{1/2} dt, \quad (3.2.2)$$

$d\tau$ é o o tempo medido pelos observadores colocados em um campo gravitacional que é conhecido como o tempo próprio e o tempo t é a coordenada temporal. Para pontos muito distantes da fonte do campo gravitacional, isto é, para $r \rightarrow \infty$ (onde o espaço-tempo é assintoticamente plano), verificamos que o tempo próprio de observadores muito distantes coincide com a coordenada temporal. Assim, considerando que o observador B encontra-se

em uma região do espaço-tempo que é assintoticamente plana, podemos então deixar a equação eq.(3.2.2) da seguinte forma

$$d\tau_B = dt, \quad (3.2.3)$$

mostrando então que o tempo medido pelo observador B coincide com a coordenada t numa região muito distante de onde origina o campo gravitacional. Dividindo as equações eq.(3.2.1) e eq.(3.2.2), vamos obter

$$d\tau_A = \sqrt{\frac{g_{00}(r_A)}{g_{00}(r_B)}} d\tau_B = \sqrt{\frac{f(r_A)}{f(r_B)}} d\tau_B = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_A}}{1 - \frac{2m}{r_B}}} d\tau_B, \quad (3.2.4)$$

desta forma como podemos perceber na equação eq.(3.2.4), os intervalos tempos próprios medidos por A e B são diferentes. O intervalo de tempo medido por B é maior que o intervalo de tempo medido por A quando $g_{00}(r_A) < g_{00}(r_B)$, isto é, $d\tau_A < d\tau_B$ quando $r_B > r_A > 2m$. Essa diferença nos intervalos de tempo medidos por ambos se deve à efeitos puramente gravitacionais, ou seja, devido ao encurvamento do tecido espaço-temporal.

3.3. Efeito Doppler Gravitacional da Luz (Redshift Gravitacional).

Uma outra previsão extraordinária da Relatividade Geral é a influência do espaço-tempo sobre a luz, esse efeito é conhecido como efeito Doppler gravitacional da luz. Em 1905, Albert Einstein construiu um dos pilares da teoria quântica, onde a luz não possui mais um caráter contínuo, mas sim um caráter discreto, sendo formada por partículas de massa de repouso nula que receberam o nome de fótons. Desta forma, Einstein mostrou a energia de um fóton é dada por

$$E = h\nu, \quad (3.3.1)$$

onde h é a constante de Planck e ν é a frequência da onda eletromagnética luminosa.

Assim, considerando novamente os observadores A e B com respectivas frequências da luz nas posições dos mesmos dadas por

$$\nu_A = \frac{1}{d\tau_A} \quad e \quad \nu_B = \frac{1}{d\tau_B}, \quad (3.3.2)$$

e a frequência a luz para um observador muito distante da fonte do campo gravitacional vale

$$\nu = \frac{1}{dt}. \quad (3.3.3)$$

Logo, a partir das equações eq.(3.2.1) e eq.(3.2.2), podemos obter

$$\nu_A = \frac{\nu}{\sqrt{f(r_A)}} = \frac{\nu}{\sqrt{-g_{00}(r_A)}} = \frac{\nu}{\left(1 - \frac{2m}{r_A}\right)^{1/2}} \quad (3.3.4)$$

e

$$\nu_B = \frac{\nu}{\sqrt{f(r_B)}} = \frac{\nu}{\sqrt{-g_{00}(r_B)}} = \frac{\nu}{\left(1 - \frac{2m}{r_B}\right)^{1/2}}. \quad (3.3.5)$$

Definindo-se o desvio relativo da frequência da onda eletromagnética

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_A - \nu_B}{\nu}, \quad (3.3.6)$$

considerando que $r_A, r_B \gg 2m$ nas equações eq.(3.3.4) e eq.(3.3.5), podemos utilizar a seguinte aproximação $(1+x)^n \cong 1+nx$ que, aplicando às referidas equações, resulta em

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \cong 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2m}{r}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \cong 1 + \frac{m}{r}$$

Portanto, podemos deixar as equações eq.(3.3.4) e eq.(3.3.5), respectivamente, da seguinte forma

$$\nu_A = \left(1 + \frac{m}{r_A}\right) \nu \quad (3.3.7)$$

e

$$\nu_B = \left(1 + \frac{m}{r_B}\right) \nu, \quad (3.3.8)$$

levando as equações eq.(3.3.7) e eq.(3.3.8) à equação eq.(3.3.6), teremos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (3.3.9)$$

Desta forma, verifica-se que há um desvio das linhas espectrais quando um observador A envia sinais luminosos para o observador B, o contrário também é válido, esse efeito é algo ligado a curvatura do espaço-tempo, ou seja, é puramente geométrico.

3.4. Deflexão da Luz pelo Campo Gravitacional

A Relatividade Geral prediz que quando um raio de luz passa por perto de um campo de gravitação de um corpo altamente massivo o mesmo é desviado da trajetória retilínea. Agora nosso objetivo é calcular essa deflexão da luz. Considere uma geodésica métrica do tipo-luz no espaço-tempo de Schwarzschild, dada por uma curva $x^\alpha(\lambda)$ parametrizada por um parâmetro afim λ , cujo vetor tangente $v^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ é tal que

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0, \quad (3.4.1)$$

onde os componentes da 4-velocidade da luz são $v^0 = dt/d\lambda$, $v^1 = dr/d\lambda$, $v^2 = d\theta/d\lambda$ e $v^3 = d\phi/d\lambda$. Reescrevendo a equação acima da seguinte forma

$$g_{00} \left(\frac{cdt}{d\lambda} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (3.4.2)$$

Como é sabido, a métrica de Schwarzschild é esféricamente simétrica e independente do tempo, sendo assim, podemos determinar quantidades conservadas que estão relacionadas com essas simetrias. Em relação ao fato da independência da métrica com relação ao tempo, podemos determinar um campo vetorial de Killing ξ associado a esta simetria cujas componentes são

$$\xi = (\xi^\mu) = (1, 0, 0, 0) \quad (3.4.3)$$

e a quantidade conservada correspondente é a energia. Ainda podemos determinar um outro vetor de Killing η que está ligado com a simetria esférica da métrica, cujas componentes são

$$\eta = (\eta^\mu) = (0, 0, 0, 1) \quad (3.4.4)$$

e a quantidade conservada correspondente é o momento angular. Como a métrica de Schwarzschild é independente do tempo e possui simétrica de rotação, então as quantidades $\xi_\alpha v^\alpha$ e $\eta_\alpha v^\alpha$ representam respectivamente a conservação da energia e a conservação do momento angular, onde $v = (v^\mu)$ é a quadri-velocidade do raio de luz.

Levando-se em conta o plano equatorial

$$\theta = \frac{1}{2}\pi \implies \frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad (3.4.5)$$

e as quantidades conservadas eq.(2.3.4), temos

$$E = g_{\alpha\beta} u^\alpha \xi^\beta = g_{00} u^0 \xi^0 = g_{00} \frac{dt}{d\lambda}, \quad (3.4.6)$$

é conservação da energia, para a conservação do momento angular temos

$$L = g_{\alpha\beta} v^\alpha \eta^\beta = g_{33} v^3 \eta^3 = g_{33} \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad (3.4.7)$$

assim para as equações eqs.(3.4.1) obtemos

$$g_{00} \left(\frac{E}{g_{00}} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{L}{g_{33}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{E^2}{g_{00}} + g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{g_{33}} = 0, \quad (3.4.8)$$

para obter a trajetória do raio de luz devemos ter $r = r(\phi)$, deste modo

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad (3.4.9)$$

da equação eq.(3.4.7), podemos deixar a expressão acima da seguinte forma

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{L}{g_{33}} \frac{dr}{d\phi}, \quad (3.4.10)$$

agora fazendo a seguinte mudança de variável $u = r^{-1}$, logo

$$\frac{dr}{d\lambda} = -\frac{L}{g_{33}u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad (3.4.11)$$

a equação eq.(3.4.8) tornar-se-á

$$E^2 + \frac{g_{00}g_{11}}{(g_{33})^2} L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + g_{00} \frac{L^2}{g_{33}} = 0, \quad (3.4.12)$$

sendo assim, o fenômeno da precessão do periélio de mercúrio está ligado as propriedades métricas. Sabemos que

$$g_{00} = -1/g_{11} = f(u) = 1 - \frac{2m}{r} \text{ e } g_{33} = u^{-2},$$

assim a equação eq.(3.4.12) ficará na seguinte forma

$$E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - f(u) L^2 u^2 = 0,$$

mostramos que o desvio da luz é devido as propriedades métricas. Ainda podemos deixar a equação acima como

$$E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - (1 - 2mu) L^2 u^2 = 0, \quad (3.4.13)$$

derivando a equação acima em relação à ϕ , logo

$$\frac{d}{d\phi} E^2 - L^2 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \frac{du}{d\phi} \right) - L^2 \frac{d}{d\phi} u^2 + 2mL^2 \frac{d}{d\phi} u^3 = 0$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2, \quad (3.4.14)$$

o termo $3mu^2$ corresponde a um valor muito pequeno levando-se em conta os termos da equação acima. Deste modo, podemos encontrar uma solução aproximada considerando $3mu^2 = 0$, isto é

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = 0, \quad (3.4.15)$$

onde a solução da equação acima é

$$u^{(0)} = \frac{1}{R} \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.4.16)$$

temos que R e ϕ_0 são constantes de integração. Levando-se em conta que o Sol está na origem, tomando o sistema de coordenada $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$ e fazendo $\phi_0 = 0$, temos que (em coordenadas polares) a reta $r = R$ é paralela ao eixo y , onde R corresponde a distância mínima entre o raio de Luz e o centro do campo gravitacional do Sol.

Agora introduzindo na equação eq.(3.4.14) a equação eq.(3.4.16), mas considerando que $\phi_0 = 0$, temos então a seguinte equação de movimento do raio de Luz

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3m (u^{(0)})^2 = \frac{3m}{R^2} \cos^2 \phi, \quad (3.4.17)$$

cujas a solução da equação acima é

$$u = \frac{1}{R} \cos \phi + \frac{m}{R^2} (\cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi), \quad (3.4.18)$$

levando-se em conta o sistema de coordenadas cartesiano $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$x = R - \frac{m}{R} \left(\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad (3.4.19)$$

tomando y muito grande, temos

$$x \cong R - \frac{m}{R} (\pm 2y), \quad (3.4.20)$$

o ângulo que corresponde a deflexão do raio de Luz é dado pela diferença entre os coeficientes das duas assíntotas, temos a seguinte deflexão

$$\Delta = \frac{4Gm}{c^2 R}. \quad (3.4.21)$$

como $\frac{G}{c^2} = 7,414.10^{-28}\text{m/kg}$, considerando a massa do sol de aproximadamente $m = 1,989.10^{30}\text{kg}$ e o raio do sol de $r_0 = 6,96.10^8\text{m}$, encontraremos para deflexão da luz que

$$\Delta = 1,74\text{arcsec}, \quad (3.4.22)$$

chegamos a um resultado que mostra a credibilidade da Relatividade Geral quando explica a deflexão de raios luminosos quando estes passam perto de um corpo extremamente massivo.

3.5. Precessão do Periélio de Mercúrio

Vamos agora descrever o movimento orbital de Mercúrio em torno do Sol. O planeta Mercúrio, se move em uma geodésica métrica do tipo-tempo. Considerando novamente o plano equatorial, obtemos que a norma do 4-vetor velocidade é dada por

$$g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = -1, \quad (3.5.1)$$

onde $v^0 = \dot{t} = dt/d\tau$, $v^1 = \dot{r} = dr/d\tau$, $v^2 = \dot{\theta} = d\theta/d\tau$ e $v^3 = \dot{\phi} = d\phi/d\tau$, e τ é o tempo próprio que corresponde ao parâmetro afim da geodésica métrica do tipo-tempo. Por questão de simplificação analisaremos a órbita no plano equatorial, ou seja, consideramos

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

assim das equações eq.(3.4.6) e eq.(3.4.7) que estão relacionadas com a conservação da energia por unidade de massa de repouso e do momento angular por unidade de massa de repouso respectivamente, mas considerando o tempo próprio como o parâmetro afim, então podemos deixar a equação eq.(3.5.1) da seguinte maneira

$$g_{00} \left(\frac{E}{g_{00}} \right)^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{33} \left(\frac{L}{g_{33}} \right)^2 = -1$$

$$\frac{E^2}{g_{00}} + g_{11} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{g_{33}} = -1, \quad (3.5.2)$$

da métrica de Schwarzschild podemos tirar que

$$E^2 + g_{00}g_{11}\dot{r}^2 + g_{00}\left(\frac{L^2}{g_{33}} + 1\right) = 0, \quad (3.5.3)$$

para obter a trajetória da partícula devemos ter $r = r(\phi)$, deste modo

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (3.5.4)$$

da equação eq.(3.4.7), podemos deixar a expressão acima da seguinte forma

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{L}{g_{33}} \frac{dr}{d\phi}, \quad (3.5.5)$$

agora fazendo a seguinte mudança de variável $u = r^{-1}$, assim

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{L}{g_{33}u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad (3.5.6)$$

a equação eq.(3.5.3) tornar-se-á

$$E^2 + \frac{g_{00}g_{11}}{(g_{33})^2} L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + g_{00}\left(\frac{L^2}{g_{33}} + 1\right) = 0, \quad (3.5.7)$$

sendo assim, o fenômeno da precessão do periélio de mercúrio está ligado as propriedades métricas. Sabemos que

$$g_{00} = -1/g_{11} = f(u) = 1 - \frac{2m}{r} \text{ e } g_{33} = u^{-2},$$

assim a equação eq.(3.5.7) ficará na seguinte forma

$$\begin{aligned} E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - f(u) (L^2 u^2 + 1) &= 0 \\ L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= E^2 - 1 - L^2 u^2 + 2mL^2 u^3 + 2mu \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= \frac{E^2 - 1}{L^2} + 2mu^3 + \frac{2mu}{L^2}, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

diferenciando a equação acima com relação a quantidade ϕ

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \frac{du}{d\phi} \right) + \frac{d}{d\phi} u^2 = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{E^2 - 1}{L^2} \right) + 2m \frac{d}{d\phi} u^3 + \frac{2m}{L^2} \frac{d}{d\phi} u$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{L^2}, \quad (3.5.9)$$

podemos ainda escrevê-la como

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = a (1 + bu^2), \quad (3.5.10)$$

onde $a = m/L^2$ e $b = 3L^2$, quando fazemos $r^2 \gg b$ temos o caso newtoniano e a equação se reduz à

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = a. \quad (3.5.11)$$

Para que possamos determinar a precessão do periélio de mercúrio para equação eq.(3.5.9) devemos fazer a seguinte expansão binomial em potências de m/L^2

$$u \cong u^{(0)} + u^{(1)} + \dots \quad (3.5.12)$$

sendo que $u^{(0)}$ é correspondente a solução no caso newtoniano quando $3mu^2 = 0$ e $u^{(1)}$ é uma pequena correção oriunda da Relatividade Geral. A solução da equação eq.(3.5.12) correspondente ao caso newtoniano é

$$u^{(0)} = \frac{m}{L^2} [1 + z \cos(\phi - \phi_0)], \quad (3.5.13)$$

onde z e ϕ_0 são constantes de integração. Quando $0 < z < 1$ temos uma elipse que corresponde ao periélio ϕ_0 .

Fazendo a primeira aproximação para a equação eq.(3.5.9)

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3m (u^{(0)})^2 + \frac{m}{L^2}, \quad (3.5.14)$$

levando-se em conta as equações eq.(3.5.10) e a eq.(3.5.11), teremos

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} \cong \frac{3m^3}{L^4} + \frac{6m^3}{L^4} z \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3m^3 z^2}{L^4} \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.5.15)$$

desprezando o termo $\frac{3m^3 z^2}{L^4} \cos(\phi - \phi_0)$, pois para pequenas excentricidades os termos de ordem maiores de z^2 devem ser desprezados em primeira aproximação, sendo assim

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} \cong \frac{6m^3}{L^4} z \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.5.16)$$

onde o único termo que te fato contribui satisfatoriamente a cada evolução é $\cos(\phi - \phi_0)$, a solução para a equação diferencial acima é

$$u^{(1)} = \frac{3m^3}{L^4} z \phi \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.5.17)$$

de acordo com as equações eq.(3.5.13) e eq.(3.5.17) podemos deixar a equação eq.(3.5.12) da seguinte forma

$$u \cong u^{(0)} + u^{(1)} = \frac{m}{L^2} \left[1 + z \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3m^2}{L^2} z \phi \cos(\phi - \phi_0) \right], \quad (3.5.18)$$

fazendo $\Delta\phi_0 = 3m^2\phi/L^2$ e levando-se em conta que $\Delta\phi_0 \ll 1$, logo a solução acima fica da seguinte forma

$$u = \frac{m}{L^2} [1 + z \cos(\phi - \phi_0 - \Delta\phi_0)], \quad (3.5.19)$$

finalmente chegamos à uma solução que mostra que quando um certo planeta move-se de um certo ângulo $\Delta\phi$, tomando $m \rightarrow \frac{2GM}{c^2}$ temos um avanço de uma certa fração do ângulo de revolução igual à

$$\frac{\Delta\phi_0}{\phi} = \frac{3G^2 M^2}{c^2 L^2}, \quad (3.5.20)$$

onde temos que

$$L \cong r^2 \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

levando-se em conta os dados do Sistema Solar, mais precisamente de mercúrio, temos

que a distância Mercúrio-Sol é de aproximadamente de $r = 5,79.10^{10} m$, o período orbital de Mercúrio é de aproximadamente $\Delta t = 7,60.10^6 s$ e considerando uma volta completa $\Delta\phi = 2\pi$ temos que

$$L \cong 2,78.10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

Considerando que a massa do Sol vale $M = 1,989.10^{30} kg$, a constante gravitacional $G = 6,6732.10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}$ e a velocidade da luz $c = 2,98.10^8 \text{ m/s}$, então para o deslocamento do periélio de Mercúrio é dado por

$$\Delta\phi_0 = 41,43 \text{ arcsec/século.} \quad (3.5.21)$$

Como acabamos de ver, os fenômenos abordados foram todos explicados em função do tensor métrico, pois o mesmo contém todas as informações que necessitamos para descrever as propriedades do campo gravitacional. Os resultados obtidos nesse capítulo foram apresentados com a finalidade de possibilitar uma comparação com os resultados que serão obtidos no capítulo 5, onde as mesmas propriedades do campo gravitacional no Sistema Solar serão explicadas a partir das propriedades não só do tensor métrico mas também do campo escalar de Weyl, no contexto da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável.

Apresentamos alguns aspectos da Teoria da Relatividade Geral, maiores detalhes podem ser obtidos nas referências [1, 2, 3, 4, 5, 13]. No próximo capítulo apresentaremos uma generalização da Teoria da Relatividade Geral utilizando em um espaço-tempo de Weyl integrável e vamos obter resultados que serão comparados com os resultados desse capítulo.

4. Gravitação em um Espaço-tempo de Weyl Integrável

Neste capítulo formulamos alguns aspectos básicos de uma teoria geométrica da gravitação em uma geometria não-Riemanniana, onde a estrutura do espaço-tempo é dada por uma variedade de Weyl integrável.

Um espaço-tempo de Weyl integrável (ETWI) é uma variedade diferenciável M , com dimensão 4, dotada de uma métrica de Lorentz $g_{\mu\nu}$ com assinatura $(-, +, +, +)$ e de uma conexão afim $\Gamma_{\lambda\nu}^\beta$, que estaremos denominando de conexão de Weyl. A conexão de Weyl é simétrica, tendo o tensor de torção identicamente nulo $T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\mu}^\beta = 0$. O tensor de não-metricidade associado a conexão de Weyl é dado por

$$Q_{\nu\lambda\mu} = \nabla_\nu^{(g,\psi)} g_{\lambda\mu} = -\omega_\nu g_{\lambda\mu}, \quad (4.0.1)$$

onde a 1-forma $\omega = \omega_\lambda dx^\lambda$ chamada de 1-forma de Weyl e $\nabla_\nu^{(g,\psi)}$ é a derivada covariante no espaço-tempo de Weyl integrável, que depende da métrica $g_{\mu\nu}$ e do campo escalar de Weyl ψ como veremos a seguir. No espaço-tempo de Weyl integrável a 1-forma de Weyl é o gradiente de um campo escalar ψ denominado de campo escalar de Weyl de acordo com

$$\omega_\nu = \partial_\nu \psi. \quad (4.0.2)$$

Essas condições determinam univocamente a conexão de Weyl, a partir de agora denotada por $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$, em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ e do campo escalar de Weyl ψ de acordo com

$$\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (\omega_\nu \delta_\mu^\alpha + \omega_\mu \delta_\nu^\alpha - g_{\mu\nu} \omega^\alpha), \quad (4.0.3)$$

onde $\Gamma^{(g,\psi=0)\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} = \{\alpha_{\mu\nu}\}$ é o símbolo de Christoffel, que depende apenas da métrica $g_{\mu\nu}$. A conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$ é determinada pelo par (g, ψ) formado pelo tensor métrico $g = (g_{\mu\nu})$ e pelo campo escalar de Weyl ψ . Quando o campo escalar de Weyl é constante ou nulo $\psi = 0$, o espaço-tempo de Weyl integrável se reduz ao espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral.

Tanto a métrica como o escalar de Weyl estão definidas a menos de uma transformação de Weyl dada por

$$\begin{cases} \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{\sigma} g_{\mu\nu} \\ \tilde{\psi} = \psi - \sigma \end{cases}, \quad (4.0.4)$$

onde a métrica é definida a menos de uma transformação conforme, sendo $\sigma > 0$ uma função positiva, e o campo de Weyl $\omega_\lambda = \partial_\lambda \psi$ é definido a menos de uma transformação de gauge (calibre), de modo semelhante ao que ocorre com potencial eletromagnético na eletrodinâmica clássica. Em uma transformação de Weyl as coordenadas permanecem invariantes, isto é, $\tilde{x}^\mu = x^\mu$. Embora seja definida para quantidades geométricas, a transformação de Weyl tem muitas semelhanças com as transformações de gauge do eletromagnetismo. Maiores detalhes sobre variedades de Weyl podem ser encontrados no apêndice (A), onde definimos as notações e convenções utilizadas nesta dissertação.

A teoria da Relatividade Geral tem muitos aspectos que precisam ser compreendidos, além das questões recentes envolvendo as galáxias e a expansão acelerada do universo. Uma questão importante diz respeito a natureza da estrutura do espaço-tempo, pois desconhecemos uma teoria geométrica da gravitação formulada em um espaço-tempo não-riemanniano que seja compatível com os dados experimentais e seja equivalente ou generalize a teoria da Relatividade Geral.

A formulação axiomática do espaço-tempo desenvolvida por Ehlers, Pirani e Schild, tendo como conceitos primitivos o movimento de partículas de teste e de raios de luz, resultou em um espaço-tempo dado por uma variedade de Weyl. A compatibilidade com a experiência requer a solução do problema relacionado com o “segundo efeito do relógio” (second clock effect) e impõe que o espaço-tempo seja uma variedade de Weyl integrável, isto é, a 1-forma de Weyl seja integrável $\omega = d\psi$. É importante observar que não existe

nenhum outro conjunto de axiomas que utilize os mesmos conceitos primitivos e que seja capaz de obter a estrutura pseudo-Riemanniana do espaço-tempo da Relatividade Geral [2].

A formulação de uma teoria geométrica da gravitação em um espaço-tempo não-riemanniano é um problema complexo que envolve pelo menos quatro partes fundamentais. Em primeiro lugar, existe a questão da formulação das equações do campo gravitacional, tanto para o vazio quanto envolvendo o acoplamento com a matéria na condição de fonte do campo gravitacional. Essas equações devem generalizar as equações de Einstein além do domínio de validade experimental das mesmas. A questão das ondas gravitacionais também se insere nesse contexto. Em segundo lugar, vem o problema do movimento da matéria, agora envolvendo o acoplamento da matéria com o campo gravitacional na condição de alvo da ação do campo gravitacional. O caso particular do movimento de partículas de teste e de raios de luz é fundamental, pois essas estruturas elementares são usadas para detectar e investigar as propriedades do campo gravitacional dado pelo espaço-tempo curvo. A situação da luz é mais complexa porque envolve a estrutura causal local do espaço-tempo. Os postulados da geodésica e do relógio, com a definição do tempo próprio, adotados na Relatividade Geral precisam ser generalizados. Por fim, em quarto lugar, existe o problema geral do acoplamento da gravitação com a matéria nas suas mais variadas manifestações e escalas. Em particular, nos domínios da gravitação quântica e da cosmologia.

Neste capítulo, formulamos uma teoria geométrica da gravitação, tendo como espaço-tempo uma variedade de Weyl integrável, a partir de duas condições: a invariância sob transformações de Weyl e a equivalência com a teoria da Relatividade Geral. Entretanto, apenas as questões envolvendo as equações do campo gravitacional para o vazio e o movimento de partículas de teste e de raios de luz são abordadas. Os demais problemas envolvidos na formulação de uma teoria geométrica da gravitação não são investigados. O capítulo está organizado da seguinte forma. Na primeira seção abordamos o problema da formulação das equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável. As equações de campo são obtidas a partir de um princípio variacional, onde a ação e as equações de campo são invariantes por transformações de Weyl. Na segunda seção,

abordamos problema da obtenção das equações do movimento de partículas de testes e de raios de luz em um espaço-tempo de Weyl integrável. Os postulados da geodésica e do relógio, com a definição de tempo próprio, adotados na Relatividade Geral, são generalizados de uma maneira invariante por transformações de Weyl. Na terceira seção, introduzimos o conceito de representação (ou gauge ou frame) de Weyl para o campo gravitacional, a partir da invariância da teoria sob transformações de Weyl. Mostrando que um dado campo gravitacional tem uma classe de equivalência de representações, dadas pelos espaços-tempos de Weyl integráveis relacionadas entre si por transformações de Weyl. Comparando as transformações de Weyl com as transformações de gauge (calibre) da eletrodinâmica clássica e podemos dizer que as diversas representações correspondem a diferentes escolhas de gauge ou frame para o campo gravitacional, que denominamos de gauges ou frames de Weyl. Utilizamos a invariância sob transformações de Weyl para mostrar que existe uma única representação do campo gravitacional, denominada de gauge ou frame de Einstein, onde todas as equações da teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável coincidem com as equações correspondentes da Relatividade Geral, demonstrando assim a equivalência da teoria proposta com a Relatividade Geral. Na quarta seção, obtemos o limite newtoniano em um frame de Weyl e mostramos que o potencial newtoniano está relacionado tanto com a métrica quanto com o campo escalar de Weyl. Na quinta seção, abordamos a noção de simetrias do espaço-tempo, generalizando os conceitos de isometrias e de vetores de Killing para o contexto dos espaços-tempos de Weyl integráveis. A questão das constantes de movimento também é considerada.

4.1. Equações do Campo Gravitacional

Nesta seção abordamos o problema da formulação das equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável. As equações do campo gravitacional para o vazio em um espaço-tempo de Weyl integrável são obtidas a partir de um princípio variacional e são uma generalização das equações de Einstein da Relatividade Geral. Tanto a ação quanto as equações de campo são invariantes sob transformações de Weyl e têm um significado geométrico. A invariância sob transformações de Weyl corresponde a uma

invariância de gauge que explica o fato das equações de campo para o escalar de Weyl não serem independentes das equações de campo para a métrica.

A escolha da ação para o campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável foi feita levando em consideração duas condições: a equivalência com a Relatividade Geral e a invariância sob transformações de Weyl. A primeira condição pode ser atendida utilizando uma ação linear no escalar de curvatura $R^{(g,\psi)}$ do espaço-tempo de Weyl integrável, onde (g, ψ) denota a dependência tanto da métrica $g = (g_{\mu\nu})$ quanto do campo escalar de Weyl ψ . A segunda condição requer um fator compensador para as transformações tanto do escalar de curvatura $R^{(g,\psi)}$ quanto do elemento de volume $dV = \sqrt{-g}d^4x$ do espaço-tempo de Weyl integrável sob transformações de Weyl, dado pela exponencial do campo escalar de Weyl. Tendo em vista essas considerações, a ação para o campo gravitacional escolhida foi a seguinte

$$S_{grav} = \int \sqrt{-g} e^\psi R^{(g,\psi)} d^4x, \quad (4.1.1)$$

essa ação é invariante por transformação de Weyl eq.(4.0.4). Os detalhes dos cálculos envolvendo os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados no apêndice (B).

Deste modo, o campo gravitacional não será determinado somente pela métrica $g_{\mu\nu}$, mas o campo escalar de Weyl ψ também desempenhará um papel fundamental na descrição do campo gravitacional, conseqüentemente as equações oriundas da ação devem ter a presença tanto da métrica $g_{\mu\nu}$ quanto do campo escalar Weyl ψ . E ainda das equações eq.(4.1.1) e eq.(A.2.8) obtemos que a ação fica decomposta em

$$S_{grav} = \int \sqrt{-g} e^\psi (R^{(g,0)} - 3\Box^{(g,0)}\psi - \frac{3}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi) d^4x, \quad (4.1.2)$$

que, a menos de uma divergência total, fica reduzida a

$$S_{grav} = \int \sqrt{-g} e^\psi \left(R^{(g,0)} + \frac{3}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi \right) d^4x, \quad (4.1.3)$$

onde a primeira parcela é dada pelo escalar de curvatura $R^{(g,0)}$ calculado com os símbolos de Christoffel e a segunda parcela é apenas a parte cinética do campo escalar ψ . Observa-

mos que ação dada pela eq.(4.1.3) é bem conhecida na literatura [27, 32, 33, 34, 35], porém no contexto da teoria da Relatividade Geral onde o espaço-tempo é pseudo-Riemanniano e o campo escalar ψ não está associado à estrutura geométrica do espaço-tempo.

No contexto da Relatividade Geral a ação dada pela eq.(4.1.3) é interpretada como resultante do acoplamento não mínimo de um campo escalar ψ não geométrico com o escalar de curvatura $R^{(g,0)}$ de maneira invariante por transformações conformes da métrica e transformações correspondentes do campo escalar. No nosso caso, o campo escalar de Weyl ψ tem um significado geométrico, pois juntamente com a métrica $g_{\mu\nu}$, determina univocamente a conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$ de um espaço-tempo de Weyl integrável que, por sua vez, determina as propriedades das curvas auto-paralelas e da curvatura do espaço-tempo de Weyl integrável. Portanto, embora a ação presente nas referências [27, 32, 33, 34, 35] seja formalmente idêntica a ação dada pela eqs.(4.1.3), possuindo a mesma forma matemática, podemos afirmar que seus significados físicos e geométricos são bastante diferentes.

Como veremos a seguir, no espaço-tempo de Weyl integrável não só a ação dada pela eqs.(4.1.3) tem um significado geométrico como também as equações de campo obtidas a partir da mesma, ao contrário do que ocorre no contexto do espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral.

As equações do campo gravitacional no espaço-tempo de Weyl integrável são obtidas a partir da ação dada pela eqs.(4.1.3) através da variação tanto do campo escalar de Weyl ψ quanto da métrica $g_{\mu\nu}$. A equação do campo gravitacional correspondente ao campo escalar de Weyl ψ é dada por

$$R^{(g,0)} - \frac{3}{2}(\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + 2\Box^{(g,0)}\psi) = 0, \quad (4.1.4)$$

onde $\Box^{(g,0)} = g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)}$ é o d'Alambertiano e $\nabla_\mu^{(g,0)}$ é a derivada covariante calculados apenas com o símbolo de Christoffel. Os detalhes dos cálculos estão no apêndice (B).

Podemos observar que, de acordo com a eq.(A.2.8), a equação do campo gravitacional correspondente ao campo escalar de Weyl ψ no espaço-tempo de Weyl integrável significa simplesmente que o escalar de curvatura $R^{(g,\psi)}$ do espaço-tempo de Weyl integrável deve ser identicamente nulo, isto é,

$$R^{(g,\psi)} = R^{(g,0)} - \frac{3}{2} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + 2\Box^{(g,0)}\psi) = 0. \quad (4.1.5)$$

Embora as equações eqs.(4.1.5) também tenha sido obtida nas referências [27, 32, 33, 34, 35], apenas na variedade de Weyl integrável elas podem ser identificadas com um elemento da geometria do espaço-tempo, a saber, o escalar de curvatura $R^{(g,\psi)}$ do espaço-tempo de Weyl integrável .

As equações do campo gravitacional no espaço-tempo de Weyl integrável para a métrica $g_{\mu\nu}$ são dadas por

$$G^{(g,0)}_{\mu\nu} - (\nabla_\nu^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)} \psi - g_{\mu\nu} \Box^{(g,0)} \psi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi) = 0, \quad (4.1.6)$$

onde $G^{(g,0)}_{\mu\nu} = R^{(g,0)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{(g,0)}$ é o tensor de Einstein calculado apenas com os símbolos de Christoffel. Novamente, podemos observar que as equações acima também foram obtidas nas referências [27, 32, 33, 34, 35] . Entretanto, apenas na variedade de Weyl integrável elas podem ser identificadas como um elemento da geometria do espaço-tempo. Podemos mostrar que as equações do campo gravitacional para a métrica em um espaço-tempo de Weyl integrável significam simplesmente que o tensor de Einstein da variedade de Weyl integrável deve ser identicamente nulo, isto é,

$$G^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = G^{(g,0)}_{\mu\nu} - (\nabla_\nu^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)} \psi - g_{\mu\nu} \Box^{(g,0)} \psi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi) = 0. \quad (4.1.7)$$

A partir desses resultados, podemos observar que a equações de campo eq.(4.1.5) para o escalar de Weyl não é independente das equações de campo eqs.(4.1.7) para a métrica, pois o escalar de curvatura $R^{(g,\psi)}$ é obtido a partir do traço do tensor de Einstein $G^{(g,\psi)}_{\mu\nu}$. O fato das equações de campo para o campo escalar não serem independentes das equações de campo para a métrica é conhecido na literatura [27, 32, 33, 34, 35], embora nenhum significado geométrico seja dada para o mesmo.

Uma propriedade importante das equações do campo gravitacional $(g_{\mu\nu}, \psi)$ no espaço-tempo de Weyl integrável, consiste na invariância das equações (4.1.5) e (4.1.7) sob as

transformações de Weyl dadas pelas eqs.(4.0.4) . Embora o campo escalar de Weyl ψ corresponda a 1 (um) grau de liberdade a mais do campo gravitacional, além dos graus de liberdade da métrica $g_{\mu\nu}$, existe uma liberdade de gauge devido à invariância das equações de campo sob as transformações de Weyl (4.0.4) que também envolvem 1 (um) grau de liberdade através da função σ . Portanto, os graus de liberdade do campo gravitacional são determinados pelo conjunto $(g_{\mu\nu}, \psi)$, a menos do grau de liberdade presente nas transformações de Weyl. Isto significa que 1 (um) grau de liberdade do conjunto $(g_{\mu\nu}, \psi)$ pode ser eliminado ou da métrica $g_{\mu\nu}$ ou do campo escalar de Weyl ψ . A dinâmica do campo gravitacional envolve ambos os campos $g_{\mu\nu}$ e ψ através das equações de campo dadas em termo do tensor de Einstein $G^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = 0$.

Finalmente, obtemos no espaço-tempo de Weyl integrável uma completa analogia com as equações de Einstein para o vazio, pois substituindo a eq.(B.2.6) nas eqs.(B.2.17), obtemos que as equações para o campo gravitacional na ausência de matéria no espaço-tempo de Weyl integrável são dadas por

$$R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = R^{(g,0)}_{\mu\nu} - \left(\nabla^{(g,0)}_{\nu} \nabla^{(g,0)}_{\mu} \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi \right) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi - \partial_{\mu} \psi \partial_{\nu} \psi) = 0. \quad (4.1.8)$$

Assim, obtivemos um conjunto de equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável que correspondem a uma generalização das equações de Einstein, onde o campo gravitacional é dado simultaneamente pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo campo escalar de Weyl ψ que nos informam como o espaço-tempo deve se encurvar diante da presença da matéria.

No contexto da teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável a geometrização da gravitação ocorre com a identificação do campo gravitacional com um espaço-tempo de Weyl integrável curvo. Portanto, a condição que identifica um campo gravitacional nulo é a mesma condição que determina integrabilidade do transporte paralelo através da conexão de Weyl, isto é, o tensor de curvatura do espaço-tempo de Weyl ser identicamente nulo $R^{(g,\psi)}_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$. É importante observar que, a menos de transformações conforme, o campo gravitacional nulo é dado por um espaço-tempo com métrica de Minkowski e campo escalar de Weyl nulo.

Finalmente, resta considerar a equivalência com a Relatividade Geral. Como as equações do campo gravitacional em um espaço tempo de Weyl integrável, dadas pelas eqs. (4.1.7), são invariantes sob transformações de Weyl, para cada solução das mesmas existe um conjunto de soluções equivalentes obtidas da solução através de transformações de Weyl. Cada classe de equivalência de soluções obtidas dessa maneira constitui o conjunto de representações de um dado campo gravitacional. Embora as propriedades da métrica e as propriedades do campo escalar de Weyl sejam diferentes em diferentes representações, o campo gravitacional é invariante e tem as mesmas propriedades em todas as representações.

Em uma representação do campo gravitacional onde o escalar de Weyl é constante ou nulo, não só o espaço-tempo de Weyl integrável coincide com o espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral, como também a ação para o campo gravitacional e as equações (4.1.7) de campo em um espaço-tempo de Weyl coincidem com a ação de Einstein-Hilbert as equações de Einstein, respectivamente. O movimento de partículas de teste e de raios de luz também se reduzem aos resultados da Relatividade Geral, como veremos a seguir.

Assim, podemos concluir que a gravitação na variedade de Weyl integrável introduz um outro elemento da geometria, além do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que precisamos considerar para descrever completamente a gravitação: o campo escalar de Weyl ψ .

É curioso mencionar que a ação para o campo gravitacional da teoria de Brans-Dicke, é igual a ação eq..(4.1.3) quando o parâmetro de Brans-Dicke $\omega = -3/2$.

4.2. Movimento de Partículas de Teste e de Raios de Luz

Nesta seção abordamos o problema da obtenção das equações do movimento de partículas de testes e de raios de luz em um espaço-tempo de Weyl integrável. Os postulados da geodésica e do relógio, com a definição de tempo próprio, adotados na Relatividade Geral, são generalizados de uma maneira invariante por transformações de Weyl para o contexto dos espaços-tempos de Weyl integráveis. Os cálculos realizados para a obtenção dos resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados no apêndice (C).

Em uma teoria geométrica da gravitação o movimento de partículas de teste massivas

e de raios de luz, sob ação apenas do campo gravitacional, é determinado exclusivamente pela estrutura geométrica do espaço-tempo. Como em um espaço-tempo de Weyl apenas as curvas geodésicas métricas e as curvas auto-paralelas são determinadas pelas propriedades geométricas do espaço-tempo, as partículas de teste e os raios de luz devem se movimentar ao longo de um desses dois tipos de curvas. Por um lado, as geodésicas métricas, cujas equações são dadas por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \{\alpha_{\nu\mu}\} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 0,$$

onde $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é o elemento de arco, isto é, o intervalo espaço-tempo, são determinadas completamente pela métrica através dos símbolos de Christoffel e o campo escalar de Weyl não interfere nas mesmas. Por outro lado, as curvas auto-paralelas, cujas equações são

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0,$$

onde λ é um parâmetro afim, são determinadas pela conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu}$, que depende tanto da métrica quanto do campo de Weyl.

Uma diferença importante entre as geodésicas métricas e as curvas auto-paralelas (geodésicas de Weyl) em uma variedade de Weyl consiste no fato que de apenas as geodésicas de Weyl serem invariantes sob transformações de Weyl. As geodésicas métricas não são invariantes sob transformações de Weyl. No contexto da Relatividade Geral, isto é, nos espaços-tempos pseudo-Riemannianos, as equações das geodésicas métricas coincidem com as equações das curvas auto-paralelas parametrizadas com um parâmetro afim.

Considerando que as equações do movimento devem incluir todos os elementos da geometria que definem o campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável, isto é, a métrica e o campo escalar de Weyl, devemos adotar a hipótese de que as partículas de teste massivas e os raios de luz se movem em curvas auto-paralelas, que denominamos de geodésicas de Weyl. Dessa forma, generalizamos o postulado da geodésica da Relatividade Geral.

Agora vamos descrever o movimento das partículas testes massivas em uma variedade de Weyl integrável, onde além do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ temos um campo escalar ψ que juntos

vão descrever a estrutura local do espaço-tempo em questão, assim os dois terão um papel fundamental na formulação da teoria da gravitação em uma variedade de Weyl integrável.

Na teoria da Relatividade Geral o movimento de partículas de teste massivas ocorre ao longo de geodésicas métricas tipo-tempo, onde o tempo próprio medido no referencial de repouso da partícula coincide com o comprimento de arco da geodésica. Intuitivamente, podemos considerar que a medida que a partícula percorre sua linha de universo o relógio no referencial de repouso da partícula vai medindo o tempo próprio e isto nos permite supor que ambos sejam proporcionais. A partir dessa hipótese, podemos concluir que a linha de universo da partícula pode ser determinada como aquela em que o tempo próprio é um extremo e assim obter as equações do movimento como curvas geodésicas tipo-tempo a partir de um princípio variacional. Essa suposição é conhecida como o postulado do relógio e define o conceito de tempo próprio na Relatividade Geral.

A generalização do postulado do relógio para o contexto do espaço-tempo de Weyl integrável requer uma quantidade, determinada ao longo da linha de universo da partícula, que tenha as seguintes propriedades: (1) seja um escalar, (2) seja invariante sob transformações de Weyl, (3) seja um extremo para as geodésicas de Weyl e (4) coincida com o tempo próprio da Relatividade Geral quando o campo escalar de Weyl seja constante ou nulo. Podemos definir no espaço-tempo de Weyl integrável uma quantidade com essas propriedades, conforme os cálculos realizados no apêndice (C), que adotaremos como o tempo próprio de uma partícula de teste massiva que se move em uma geodésica de Weyl tipo-tempo, generalizando assim o postulado do relógio.

O tempo próprio τ medido por uma partícula viajando em uma linha de universo em um espaço-tempo de Weyl integrável é definido por nós da seguinte forma

$$\tau = \int d\tau = \int \sqrt{\epsilon e^\psi g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda, \quad (4.2.1)$$

onde $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ é o vetor tangente à geodésica de Weyl $x^\alpha(\lambda)$ parametrizada com um parâmetro λ , onde $\epsilon = \mp 1$ para a assinatura da métrica ± 2 . O movimento das partículas de teste massivas é determinado pela condição de que o tempo próprio é um extremo. Considerando que a ação para o movimento da partícula é dada pela eq. (4.2.1), obtemos

que as equações do movimento são as equações de uma geodésica de Weyl tipo-tempo dadas por (vê apêndice C)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0.$$

Entretanto, o campo escalar de Weyl ψ compensa a variação por transporte paralelo da norma do vetor tangente $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ de uma geodésica de Weyl parametrizada com um parâmetro afim λ , de modo que a quantidade $\epsilon e^\psi g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$ é uma constante do movimento (vê apêndice C). Portanto, podemos parametrizar a geodésica de Weyl com o tempo próprio, fazendo

$$\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 = \epsilon e^\psi g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 1$$

e obtendo que as equações do movimento de uma partícula de teste massiva no espaço-tempo de Weyl integrável são dadas por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0.$$

Finalmente, abordamos a questão da equivalência dos resultados obtidos para o movimento de partículas de teste massivas em um espaço-tempo de Weyl integrável com os resultados correspondentes no contexto da Relatividade Geral. Em primeiro lugar, observamos que, tanto as equações da geodésica de Weyl quanto o tempo próprio definido acima são invariante por transformações de Weyl. Em segundo lugar, quando o campo escalar de Weyl for constante ou nulo, obtemos que não só as geodésicas de Weyl coincidem com as geodésicas métricas, mas também o tempo próprio definido no espaço-tempo de Weyl coincide com o tempo próprio definido na Relatividade Geral.

É importante observar que as geodésicas métricas tipo-tempo e as geodésicas de Weyl tipo-tempo são curvas distintas com propriedades diferentes, pois não existe reparametrização que possa transformar as equações da geodésica de Weyl tipo-tempo nas equações das geodésicas métricas tipo-tempo. Portanto, o movimento de partículas de teste em geodésicas de Weyl tipo-tempo tem propriedades diferentes do movimento de partículas em geodésicas métricas tipo-tempo. Isto significa que, as propriedades dos movimentos

das partículas de teste calculadas a partir das geodésicas métricas são diferentes das propriedades calculadas a partir das geodésicas de Weyl, pois os efeitos do campo escalar de Weyl estão presentes apenas nas últimas. Portanto, ou as geodésicas métricas tipo-tempo ou as geodésicas de Weyl tipo-tempo devem coincidir com os resultados experimentais sobre o movimento de partículas de teste. Como veremos a seguir, o mesmo não ocorre com relação ao movimento dos raios de luz em geodésicas tipo-nulo.

Com a mesma importância com que abordamos os movimentos de partículas de teste massivas em um espaço-tempo de Weyl integrável, utilizados para detectar e determinar propriedades importantes do espaço-tempo, estudaremos os movimentos dos raios de luz em um espaço-tempo de Weyl integrável, que também permitem determinar diversas propriedades importantes do espaço-tempo, em particular, a estrutura causal local através dos cones de luz.

E analogia com os resultados para movimento das partículas de teste massivas, adotamos a hipótese de que o movimento dos raios de luz em um espaço-tempo de Weyl integrável ocorre em geodésicas de Weyl tipo-nulo, isto é, em curvas $x^\mu(\lambda)$ cujo vetor tangente $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ tem norma nula

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

e que são determinadas pelas equações

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0,$$

em função de um parâmetro afim λ .

Entretanto, como está demonstrado no apêndice [C](#), as equações das geodésicas de Weyl tipo-nulo diferem das equações das geodésicas métricas tipo-nulo por uma reparametrização do parâmetro afim, isto é, temos a igualdade

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0,$$

onde os parâmetros λ e σ estão relacionados pela equação

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} + \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = 0,$$

que nos permite representar a reparametrização $\sigma = \sigma(\lambda)$ por

$$\sigma(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-\psi(x(\lambda'))} d\lambda'. \quad (4.2.2)$$

Este é o postulado da geodésica para o movimento de raios de luz em um espaço-tempo de Weyl integrável. A partir desse resultado, podemos analisar a estrutura causal determinada pelo cone de luz em uma variedade de Weyl integrável. Assim, devemos analisar se a noção local de causa e efeito é preservada quando realizamos uma transformação de Weyl.

Em geral as geodésicas de Weyl dependam da métrica $g_{\mu\nu}$ e do campo escalar de Weyl ψ , através da conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu}$. Entretanto, no caso das geodésicas de Weyl tipo-nulo, a condição do vetor v^μ tangente à geodésica ter norma nula (isto é, $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$), permite que a dependência com relação ao campo escalar de Weyl seja removida através de uma reparametrização. Isto significa que as geodésicas métricas tipo-nulo coincidem com as geodésicas de Weyl tipo-nulo, a menos de uma reparametrização, e que o movimento dos raios de luz é determinado exclusivamente pelas propriedades da métrica do espaço-tempo de Weyl integrável.

Como as geodésicas métricas tipo-nulo e as geodésicas de Weyl tipo-nulo coincidem, existe apenas um único cone de luz no espaço-tempo de Weyl integrável e a estrutura causal local do espaço-tempo é determinada de maneira única pela métrica do espaço-tempo. Além disso, as geodésicas de Weyl são invariantes por transformações de Weyl e as geodésicas métricas tipo-luz também são invariantes (a menos de uma reparametrização). Por fim, embora a norma de um vetor não seja preservada tanto por transporte paralelo quanto por transformações de Weyl, a condição de um vetor ser tipo-tempo, tipo-nulo e tipo-espaço é preservada tanto pelo transporte paralelo quanto pela transformações de Weyl. Portanto, a estrutura causal local do espaço-tempo é preservada pelas transformações de Weyl e pelo transporte paralelo, sendo determinada apenas pelas propriedades métricas sem participação do campo escalar de Weyl.

Assim, concluímos que a estrutura causal local determinada pelo cone de luz em uma variedade de Weyl integrável é preservada, coincidindo com a estrutura causal local da Relatividade Geral quando o escalar de Weyl for constante ou nulo. Lembramos que, embora o escalar de Weyl não interfira nas geodésicas tipo-nulo, ele interfere nas geodésicas de Weyl tipo-tempo.

4.3. Transformações de Weyl e Representações do Campo

Gravitacional

Nesta seção discutimos alguns aspectos relacionados com o significado de uma das condições impostas para a formulação da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável apresentada neste capítulo: a invariância da teoria sob transformações de Weyl. Mostramos que o campo gravitacional tem diversas representações, dadas por espaços-tempos de Weyl relacionados entre si por transformações de Weyl, que denominamos de gauges ou frames de Weyl. Embora duas representações tenham tanto métricas quanto campos escalares de Weyl com propriedades diferentes, os resultados físicos obtidos a partir das mesmas são idênticos, pois as propriedades do campo gravitacional são invariantes sob transformações de Weyl. Nesse novo contexto, as propriedades do campo gravitacional são determinadas a partir das propriedades tanto da métrica quanto do campo escalar de Weyl. Como veremos a seguir, existem muitas semelhanças entre as transformações de gauge na eletrodinâmica clássica e as transformações de Weyl em uma teoria da gravitação invariante sob transformações de Weyl.

A invariância da teoria da gravitação por transformações de Weyl introduz na descrição da interação gravitacional uma propriedade semelhante à invariância da interação eletromagnética por transformações de gauge do potencial eletromagnético. As equações de Maxwell para o campo eletromagnético e as equações do movimento de partículas dadas pelas equações da força de Lorentz são invariantes por transformações de gauge, pois são expressas em termos do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ que é invariante por transformações de gauge do potencial eletromagnético A_μ , dadas por $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$, onde f é uma função arbitrária. Na teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável existe um resultado semelhante, pois tanto as equações do campo gravitacional, dadas

por (4.1.5) e (B.2.17), quanto as equações do movimento de partículas de teste e de raios de luz, dadas pelas geodésicas de Weyl (C.1.4), são invariantes pelas transformações de Weyl dadas por (4.0.4). Portanto, da mesma forma que as equações da eletrodinâmica clássica são invariantes por transformações de gauge, as equações da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl são invariantes por transformações de Weyl.

Por causa da invariância sob transformações de Weyl, o campo gravitacional na teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável tem diversas representações, dadas por espaços-tempos de Weyl relacionados entre si por transformações de Weyl. Dentre todas as representações existe uma única onde o campo escalar de Weyl é constante ou identicamente nulo, que chamamos de gauge ou frame de Einstein, pois é a representação em que a teoria coincide com a Relatividade Geral. As demais representações, onde o campo escalar de Weyl não é constante nem nulo, são chamadas de frames ou gauges de Weyl.

Embora duas representações tenham tanto métricas quanto campos escalares de Weyl com propriedades diferentes, os resultados físicos obtidos a partir das mesmas são idênticos, pois as propriedades do campo gravitacional são invariantes sob transformações de Weyl. Nesse novo contexto, as propriedades do campo gravitacional são determinadas a partir das propriedades tanto da métrica quanto do campo escalar de Weyl. Como diversas escolhas de gauge são utilizadas na eletrodinâmica para o estudo das propriedades do campo eletromagnético, a teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável possibilita que diversas representações equivalentes sejam usadas para o estudo das propriedades do campo gravitacional. Dependendo da representação escolhida uma dada propriedade do campo gravitacional pode ser determinada apenas pela métrica, apenas pelo campo escalar de Weyl ou por ambos. Portanto, algumas representações podem ser mais adequadas do que outras para a determinação de uma dada propriedade do campo gravitacional.

Os campos gravitacionais dados pelos espaços-tempos de Weyl integrável curvos podem ser classificados a partir das suas representações no gauge ou frame de Einstein, onde o campo escalar de Weyl é nulo é a teoria coincide com a Relatividade Geral. Para cada solução das equações de Einstein, no gauge de Einstein, existe uma classe de equivalência

de soluções das equações de campo da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl, relacionadas da mesma através de transformações de Weyl, onde cada uma corresponde a um gauge ou frame de Weyl. Em particular, a classe de equivalência que corresponde ao campo gravitacional nulo, dado no frame de Einstein é dado pelo espaço-tempo de Minkowski, é formada por espaços-tempos de Weyl com métricas conformalmente planas $g_{\mu\nu} = e^{\varphi}\eta_{\mu\nu}$ e campos escalares de Weyl ψ , onde as funções φ e ψ são soluções das equações da gravitação para o vazio $R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = 0$.

4.4. O Limite Newtoniano

Nesta seção, mostraremos que a teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável tem o limite newtoniano, o qual pode ser obtido a partir de uma representação do campo gravitacional dada em um frame de Weyl qualquer. Mostraremos como o potencial escalar newtoniano está relacionado com a métrica e com o campo escalar de Weyl. O limite newtoniano é um requisito muito importante para qualquer teoria da gravitação. Ele existe quando, no regime dos campos gravitacionais fracos e das velocidades não relativistas (muito menores do que a velocidade da luz no vácuo), as equações do movimento de Newton puderem ser obtidas a partir das equações de movimento das partículas de teste da teoria e a equação de campo da gravitação newtoniana (a equação de Poisson) puder ser obtida a partir das equações do campo gravitacional da teoria.

Considerando que a geometria espacial na mecânica Newtoniana é euclidiana, um campo gravitacional fraco deve representar uma pequena perturbação no espaço-tempo de Minkowski. Como na teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável é determinado tanto pela métrica $g_{\mu\nu}$ quanto pelo campo escalar de Weyl ψ , temos duas condições a considerar. Em primeiro lugar, consideramos que a métrica é dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (4.4.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, ϵ é um parâmetro pequeno ($\epsilon^2 \ll \epsilon$) e a parcela $\epsilon h_{\mu\nu}$ representa uma pequena perturbação independente do tempo devido à presença de

alguma configuração de matéria. Em segundo lugar, consideramos que o campo escalar de Weyl é dado por

$$\psi = \psi_0 + \epsilon\varphi, \quad (4.4.2)$$

onde ψ_0 é uma constante arbitrária, que será escolhida como zero, e $\epsilon\varphi$ representa uma pequena perturbação independente do tempo também associada à configuração de matéria. Finalmente, no regime de baixas velocidades temos a condição de que a velocidade $\vec{v} = (\frac{dx^i}{dt})$ da partícula ao longo da geodésica de Weyl deve ser muito menor do que a velocidade da luz no vácuo c , de modo que o parâmetro $\beta = \frac{v}{c}$ também deve ser considerado pequeno.

Utilizando as coordenadas cartesianas de um referencial de Lorentz da relatividade especial (nesta seção utilizamos a assinatura -2 para a métrica), podemos escrever o elemento de linha de acordo com

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \epsilon h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = +(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + \epsilon h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (4.4.3)$$

que nos permite aproximar a relação entre o tempo próprio e a coordenada temporal $x^0 = ct$, em primeira ordem em ϵ , por

$$\frac{1}{c} \frac{d\tau}{dt} = e^{\psi/2} \frac{1}{c} \frac{ds}{dt} \cong \sqrt{(1 + \epsilon\varphi)} \sqrt{(1 + \epsilon h_{00})} \cong (1 + \frac{1}{2}\epsilon\varphi)(1 + \frac{1}{2}\epsilon h_{00}) \cong [1 + \frac{1}{2}\epsilon(h_{00} + \varphi)], \quad (4.4.4)$$

cujas inversa é dada por

$$c \frac{dt}{d\tau} \cong [1 - \frac{1}{2}\epsilon(h_{00} + \varphi)]. \quad (4.4.5)$$

Reparametrizando as equações da geodésica de Weyl tipo-tempo

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (4.4.6)$$

em termos da coordenada temporal, obtemos que

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}\right) = - \left[\frac{d^2t}{d\tau^2} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d\psi}{dt}\right] \frac{dx^\alpha}{dt}.$$

A partir da relação dada pela eq.(4.4.5) e do fato do campo gravitacional ser estático, obtemos os resultados $\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$ e $\frac{d\psi}{dt} = \epsilon \frac{d\varphi}{dt} = 0$ que nos permite expressar as equações da geodésica de Weyl como

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0.$$

Aproximando agora a conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$ em primeira ordem em ϵ , obtemos

$$\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\epsilon}{2} n^{\alpha\lambda} [(h_{\lambda\mu,\nu} + h_{\lambda\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\lambda}) + (n_{\lambda\mu}\varphi_{,\nu} + n_{\lambda\nu}\varphi_{,\mu} - n_{\mu\nu}\varphi_{,\lambda})]. \quad (4.4.7)$$

A partir dos resultados acima, podemos perceber que, a menos que $\mu = \nu = 0$, o produto $c^2 \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{cdt} \frac{dx^\nu}{cdt}$ é da ordem $\epsilon\beta$ ou maior. Portanto, as equações da geodésica de Weyl em primeira ordem nos parâmetros ϵ e β ficam dadas por

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + c^2 \Gamma^\mu_{00} = 0, \quad (4.4.8)$$

que, para $\mu = 0$ são uma identidade. Para μ igual a um índice espacial i , considerado que a assinatura da métrica é -2, obtemos

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{\epsilon}{2} \eta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (h_{00} + \varphi) = \frac{\epsilon}{2} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (h_{00} + \varphi),$$

e, usando uma notação com vetores espaciais,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \epsilon c^2 \vec{\nabla}^{(g,0)} (h_{00} + \varphi), \quad (4.4.9)$$

que nada mais são do que as equações de Newton do movimento para uma partícula em um campo gravitacional quando identificamos o potencial gravitacional Newtoniano como

$$U = \frac{1}{2}c^2(\epsilon h_{00} + \epsilon\varphi). \quad (4.4.10)$$

Portanto, o potencial newtoniano é determinado tanto pela métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ quanto o campo escalar de Weyl $\psi = \epsilon\varphi$, que contribuem para o potencial newtoniano através da combinação $\epsilon(h_{00} + \varphi)$.

Para completar a demonstração do limite newtoniano falta obter o limite das equações de campo da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável. As equações de campo para o vazio, dadas pelas eqs.(4.1.8), isto é,

$$R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = R^{(g,0)}_{\mu\nu} - \left(\nabla^{(g,0)}_{\nu} \nabla^{(g,0)}_{\mu} \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi \right) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \psi \partial_{\beta} \psi - \partial_{\mu} \psi \partial_{\nu} \psi) = 0.$$

Na aproximação de campos fracos, onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$, em primeira ordem em ϵ , temos o seguinte resultado

$$R^{(g,0)}_{00} = -\frac{1}{2}\epsilon \vec{\nabla}^2 h_{00},$$

onde $\vec{\nabla}^2$ denota o Laplaciano no espaço euclidiano. Por outro lado, tendo em vista que estamos supondo um campo gravitacional estático, obtemos que

$$\square^{(g,0)} \psi = g^{\mu\nu} \nabla^{(g,0)}_{\mu} \nabla^{(g,0)}_{\nu} \psi = -\epsilon \vec{\nabla}^2 \varphi, \quad (4.4.11)$$

e as equações de campo para $\mu = \nu = 0$ coincidem com as equações de campo da gravitação Newtoniana quando o potencial newtoniano for definido pela eq.. (4.4.10), isto é,

$$R^{(g,\psi)}_{00} = R^{(g,0)}_{00} + \frac{1}{2} g_{00} \square^{(g,0)} \psi = -\frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 (h_{00} + \varphi) = -\frac{1}{c^2} \nabla^2 U = 0.$$

Considerando que tanto as equações de campo quanto as geodésicas de Weyl na teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável são invariantes por transformações de Weyl, podemos concluir que o limite newtoniano obtido através da identificação do potencial newtoniano com $U = \frac{1}{2}c^2\epsilon(h_{00} + \varphi)$ é válido em qualquer representação do

campo gravitacional dado em um frame de Weyl arbitrário. Em particular, no frame de Einstein onde $\psi = 0$, os resultados coincidem com os da Relatividade Geral.

4.5. Simetrias dos Espaços-tempos de Weyl Integrável

Nesta seção, abordamos a noção de simetrias do espaço-tempo de Weyl integrável, generalizando os resultados da Relatividade Geral relacionados com as isometrias e os vetores de Killing na Relatividade Geral apresentados na seção 2.3. A partir dos campos vetoriais associados a transformações de simetria dos espaços-tempos de Weyl integrável, denominados de campos de vetores de Killing-Weyl, obtemos as constantes do movimento dado pelas geodésicas de Weyl. Esses resultados têm duas propriedades importantes, eles são invariantes por transformações de Weyl e coincidem com os resultados correspondentes na Relatividade Geral quando o campo escalar de Weyl é nulo.

Como na teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável, o campo gravitacional é determinado pela métrica $g_{\mu\nu}$ e pelo campo escalar de Weyl ψ , as simetrias do campo gravitacional devem estar relacionadas com as transformações de ambas quantidades, isto é, do par $(g_{\mu\nu}, \psi)$. As condições de invariância sob transformações de Weyl e equivalência com a Relatividade geral quando o campo de Weyl for nulo, impostas para a formulação da teoria, também devem ser válidas para a determinação das transformações das simetrias do espaço-tempo de Weyl integrável definidas em termos do par $(g_{\mu\nu}, \psi)$. Assim, tendo em vista essas considerações, obtivemos que as simetrias dos espaços-tempos de Weyl integráveis são dadas pelas transformações

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = -(\mathcal{L}_k \psi) g_{\mu\nu} = -\frac{d\psi}{d\lambda} g_{\mu\nu} = -k^\alpha \psi_{,\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (4.5.1)$$

onde $\mathcal{L}_k$ é a derivada de Lie calculada com relação ao campo de vetores

$$k = \frac{\partial}{\partial \lambda} = k^\alpha \partial_\alpha,$$

essas equações serão denominadas de equações de Killing-Weyl e os campos de vetores k^α serão denominados de campos de vetores de Killing-Weyl. As equações de Killing-Weyl

são idênticas as equações dos vetores de Killing conformes $\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$ onde o fator conforme é dado pela derivada de Lie do campo escalar de Weyl $\phi = -(\mathcal{L}_k \psi)$.

A equivalência com a Relatividade Geral no frame de Einstein, onde o campo escalar de Weyl é nulo, pode ser verificada substituindo $\psi=0$ nas eqs.(4.5.1), resultando nas equações de Killing no espaço-tempo pseudo-Riemanniano. A invariância sob transformações de Weyl está demonstrada logo a seguir.

Considere uma representação de Weyl do espaço-tempo dada por $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\psi})$ e um vetor de Killing-Weyl $k = \frac{\partial}{\partial \lambda} = k^\alpha \partial_\alpha$, tal que

$$\mathcal{L}_k \tilde{g}_{\mu\nu} = -k^\alpha \tilde{\psi}_\alpha \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.5.2)$$

e uma outra representação de Weyl dada por $(g_{\mu\nu}, \psi)$ e relacionada com a primeira através das transformações de Weyl dadas por

$$\begin{cases} \tilde{\psi} = \psi - \sigma \\ \tilde{g}_{\mu\nu} = e^\sigma g_{\mu\nu} \end{cases}, \quad (4.5.3)$$

aplicando a transformação de Weyl acima nas eqs.(4.5.2), obtemos que o membro esquerdo se transforma de acordo com

$$\mathcal{L}_{\tilde{k}} \tilde{g}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\tilde{k}} e^\sigma g_{\mu\nu} = (\mathcal{L}_k e^\sigma) g_{\mu\nu} + e^\sigma (\mathcal{L}_k g_{\mu\nu}) = e^\sigma [(k^\alpha \partial_\alpha \sigma) g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_k g_{\mu\nu}] \quad (4.5.4)$$

e que o membro direito se transforma de acordo com

$$k^\alpha \tilde{\psi}_\alpha \tilde{g}_{\mu\nu} = k^\alpha (\psi_\alpha - \sigma_\alpha) e^\sigma g_{\mu\nu} = e^\sigma (k^\alpha \psi_\alpha - k^\alpha \sigma_\alpha) g_{\mu\nu}. \quad (4.5.5)$$

Finalmente, substituindo as eqs.(4.5.4) e eqs.(4.5.5) nas eqs.(4.5.1), obtemos

$$e^\sigma [(k^\alpha \partial_\alpha \sigma) g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_k g_{\mu\nu}] = e^\sigma (k^\alpha \psi_\alpha - k^\alpha \partial_\alpha \sigma) g_{\mu\nu}$$

que, depois de simplificar, ficam dadas por

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = -k^\alpha \psi_\alpha g_{\mu\nu}. \quad (4.5.6)$$

Portanto, as equações de Killing-Weyl são invariantes sob transformações de Weyl. Quando passamos de um gauge de Weyl para um outro temos que a equação acima continua tendo a mesma forma.

Existe uma situação onde os vetores de Killing-Weyl coincidem com os vetores de Killing e as equações de Killing-Weyl coincidem com as equações de Killing em um frame de Weyl. Isto ocorre quando a derivada de Lie do campo escalar de Weyl ψ em relação ao vetor de Killing-Weyl $k = \frac{\partial}{\partial \lambda} = k^\alpha \partial_\alpha$ é identicamente nula, isto é, quando

$$\mathcal{L}_k \psi = k^\alpha \psi_\alpha = \frac{d\psi}{d\lambda} = 0. \quad (4.5.7)$$

Vamos agora obter uma expressão equivalente para as equações de Killing-Weyl. Substituindo a derivada de Lie da métrica

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = k^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \partial_\nu k^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_\mu k^\alpha,$$

e as derivadas parciais por derivadas covariantes $\nabla_\alpha^{(g,\psi)}$ na variedade de Weyl integrável, pois a conexão de Weyl $\Gamma_{\alpha\beta}^{(g,\psi)\rho}$ é simétrica, nas equações de Killing-Weyl dadas pelas eqs.(4.5.1), obtemos que

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = k^\alpha \nabla_\alpha^{(g,\psi)} g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu^{(g,\psi)} k^\alpha + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu^{(g,\psi)} k^\alpha = -k^\alpha \psi_\alpha g_{\mu\nu}. \quad (4.5.8)$$

Em seguida, considerando que a derivada covariante da métrica em uma variedade de Weyl integrável é dada por

$$\nabla_\alpha^{(g,\psi)} g_{\mu\nu} = -\psi_\alpha g_{\mu\nu}, \quad (4.5.9)$$

e substituindo nas eqs.(4.5.9), obtemos a equação

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = -k^\alpha \psi_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu^{(g,\psi)} k^\alpha + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu^{(g,\psi)} k^\alpha = -k^\alpha \psi_\alpha g_{\mu\nu},$$

que, depois de simplificada, resulta nas equações

$$g_{\mu\alpha} \nabla_{\nu}^{(g,\psi)} k^{\alpha} + g_{\alpha\nu} \nabla_{\mu}^{(g,\psi)} k^{\alpha} = 0, \quad (4.5.10)$$

que são as expressões equivalentes para as equações de Killing-Weyl (4.5.10), cuja solução é dada pelos vetores de Killing-Weyl que representam as simetrias dos espaços-tempos de Weyl integráveis. Ao longo das direções dos vetores de Killing-Weyl as propriedades do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável são preservado. Assim, a simetria na variedade de Weyl integrável depende de $g_{\mu\nu}$ e ψ .

A existência dos vetores de Killing-Weyl está relacionada com a existência de quantidades conservadas associados ao movimento de partículas de teste e raios de luz ao longo de geodésicas de Weyl. Considere uma partícula de teste ou um raio de luz que se move em uma curva geodésica $x^{\mu}(\lambda)$, onde λ é um parâmetro afim e $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$ e o vetor tangente. Vamos agora considerar uma quantidade $C_{(k)}$ definida pelo produto interno da quadri-velocidade u^{ν} pelo vetor de Killing-Weyl k_{ν} de acordo com

$$C_{(k)} = k_{\nu} u^{\nu}. \quad (4.5.11)$$

A variação da quantidade $C_{(k)}$ ao longo da geodésica de Weyl é dada por

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = \frac{d}{d\lambda} (k_{\nu} u^{\nu}) = u^{\alpha} \nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} (k_{\nu} u^{\nu}) = u^{\alpha} \nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} (g_{\mu\nu} k^{\mu} u^{\nu})$$

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = u^{\alpha} \left[(\nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} g_{\mu\nu}) k^{\mu} u^{\nu} + g_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} k^{\mu}) u^{\nu} + g_{\mu\nu} k^{\mu} (\nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} u^{\nu}) \right]$$

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = u^{\alpha} (\nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} g_{\mu\nu}) k^{\mu} u^{\nu} + \frac{u^{\alpha} u^{\nu}}{2} \left[g_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} k^{\mu}) + g_{\mu\alpha} (\nabla_{\nu}^{(g,\psi)} k^{\mu}) \right] + g_{\mu\nu} k^{\mu} (u^{\alpha} \nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} u^{\nu})$$

$$\frac{d}{d\lambda} C_{(k)} = u^{\alpha} (-\psi_{\alpha} g_{\mu\nu}) k^{\mu} u^{\nu} + u^{\alpha} u^{\nu} \left[g_{\mu(\nu} \nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} k^{\mu)} \right] + g_{\mu\nu} k^{\mu} (u^{\alpha} \nabla_{\alpha}^{(g,\psi)} u^{\nu}), \quad (4.5.12)$$

mas das equações eq.(4.5.10) e eq.(4.5.9) , podemos deixar a equação acima da seguinte forme

$$\frac{d}{d\lambda}C_{(k)} = u^\alpha (-\psi_\alpha g_{\mu\nu}) k^\mu u^\nu + g_{\mu\nu} k^\mu u^\alpha (\nabla_\alpha^{(g,\psi)} u^\nu), \quad (4.5.13)$$

mas como o segundo termo do lado direito corresponde a equação geodésica, podemos ainda deixar a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}C_{(k)} &= -\psi_\alpha u^\alpha (g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu) = -\psi_\alpha u^\alpha C_k \\ \frac{d}{d\lambda}C_{(k)} &= -\left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right) C_k, \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

finalmente, integrando a equação eq.(4.5.14) ao longo da geodésica de Weyl, obtemos que

$$C_{(k)}(\lambda) = C_{(k)}(\lambda_0) e^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\psi} = C_{(k)}(\tau_0) e^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\psi}{d\lambda} d\lambda}. \quad (4.5.15)$$

Portanto, a quantidade $C_{(k)}$ não é uma constante do movimento ao longo das geodésicas de Weyl. Apenas quando os vetores forem transportados paralelamente ao longo de uma curva fechada a quantidade $C_{(k)}$ será conservada. Entretanto, existe uma situação em que $C_{(k)}$ é uma constante do movimento, ela ocorre quando o campo de Weyl ψ é invariante ao longo da geodésica de Weyl, isto é, quando

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \psi_\alpha u^\alpha = 0. \quad (4.5.16)$$

Embora $C_{(k)}$ não seja uma constante do movimento, a sua variação pode ser compensada através do campo escalar de Weyl de modo que a quantidade $W_{(k)} = e^\psi C_{(k)}$ é uma constante do movimento para as geodésicas de Weyl. Multiplicando a eq.(4.5.14) pelo fator e^ψ obtemos que

$$e^\psi \frac{d}{d\lambda}C_{(k)} = -e^\psi \left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right) C_{(k)} = -\left(\frac{de^\psi}{d\lambda}\right) C_{(k)},$$

e reorganizando as parcelas podemos escrever

$$e^\psi \frac{d}{d\lambda} C_{(k)} + \left(\frac{de^\psi}{d\lambda} \right) C_{(k)} = \frac{d}{d\lambda} (e^\psi C_{(k)}) = 0$$

e concluir que a quantidade

$$W_{(k)} = e^\psi C_{(k)} = e^\psi g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu, \quad (4.5.17)$$

é uma constante de movimento para as geodésicas de Weyl. Podemos obter o mesmo resultado calculando diretamente a variação de $W_{(k)}$ ao longo da geodésica de Weyl de acordo com

$$\frac{d}{d\lambda} W_{(k)} = u^\alpha \nabla_\alpha^{(g,\psi)} (e^\psi g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu) = u^\alpha \left[(\nabla_\alpha^{(g,\psi)} e^\psi) g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu + e^\psi \nabla_\alpha^{(g,\psi)} (g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu) \right]$$

$$\frac{d}{d\lambda} W_{(k)} = e^\psi \left[u^\alpha \psi_\alpha C_{(k)} + u^\alpha \nabla_\alpha^{(g,\psi)} C_{(k)} \right]$$

$$\frac{d}{d\lambda} W_{(k)} = e^\psi \left[\frac{d\psi}{d\lambda} C_{(k)} + \frac{d}{d\lambda} C_{(k)} \right] = 0, \quad (4.5.18)$$

portanto, para cada campo de vetores de Killing-Weyl do espaço-tempo de Weyl integrável existe uma quantidade conservada $W_{(k)} = e^\psi g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu$ associada as geodésicas de Weyl.

5. Gravitação em Espaços-tempos de Weyl e os Testes do Sistema Solar

Neste capítulo apresentaremos alguns testes experimentais da Gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável no contexto do Sistema Solar, levando-se em conta as modificações geométricas onde generalizamos a Relatividade Geral. Os resultados dos testes experimentais são explicados agora em função tanto do tensor métrico quanto do campo escalar de Weyl, que guardam todas as informações que precisamos para explicar os fenômenos gravitacionais. Como no capítulo 3 os mesmos resultados foram apresentados no contexto da Relatividade Geral, faremos sempre um paralelo entre as explicações da teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável com as explicações da Relatividade Geral. Na primeira seção apresentamos uma solução das equações do campo da Teoria da Gravitação do espaço-tempo de Weyl integrável que representa um campo gravitacional esfericamente simétrico e estático. Nas seções seguintes apresentamos alguns testes da Teoria da Relatividade Geral no Sistema Solar. A saber: o redshift gravitacional, o efeito Doppler gravitacional da luz, a deflexão da luz pelo campo gravitacional e a precessão do periélio de Mercúrio

5.1. O Campo Gravitacional Estático e Esfericamente Simétrico em um Gauge de Weyl

Nesta seção, apresentamos uma solução das equações do campo gravitacional no vácuo em um espaço-tempo de Weyl integrável dadas pelas eqs.(B.2.19), isto é,

$$R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = R^{(g,0)}_{\mu\nu} - \left(\psi_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi \right) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi - \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi) = 0,$$

que corresponde a um objeto com distribuição de massa esfericamente simétrica e estática. Em um gauge de Weyl, onde o campo gravitacional é determinado pela métrica e pelo campo escalar de Weyl, o campo gravitacional esfericamente simétrico e estático é representado pelo par $(g_{\mu\nu}, \psi)$, dado por

$$\begin{cases} ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{f(r)^2} dr^2 + \frac{r^2}{f(r)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ \psi(r) = \ln[f(r)] \end{cases}, \quad (5.1.1)$$

onde temos que

$$f(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (r > 2m). \quad (5.1.2)$$

Esta solução é um espaço-tempo assintoticamente plano, pois a métrica tende para a métrica de Minkowski e o campo escalar de Weyl tende para zero. Podemos identificar a constante m utilizando o limite do campo fraco da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável, onde o potencial newtoniano é identificado como sendo dado por $U = \frac{1}{2}c^2(\epsilon h_{00} + \epsilon\varphi)$, onde a métrica é dada por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ e o campo escalar de Weyl por $\psi = \epsilon\varphi$. Em uma região muito distante da origem, onde está localizado o corpo com massa M , tal que $r \gg 2m$, obtemos que $\epsilon h_{00} = 0$ e $\epsilon\varphi \cong -2m/r$. Considerando que o potencial newtoniano no exterior de um corpo com uma massa M distribuída esfericamente, a uma distância r do seu centro é dado por $U = -GM/r$, onde G é a constante gravitacional de Newton, obtemos a relação $-GM/r = -\frac{1}{2}c^2 2m/r$ que resulta em $m = GM/c^2$. Portanto, podemos identificar o parâmetro m como a massa do corpo.

A solução acima representa o campo gravitacional estático e esfericamente simétrico na teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável em um frame de Weyl. Lembremos que esta é apenas uma das muitas representações ou frames de Weyl para esse campo gravitacional estático e esfericamente simétrico, que estão relacionadas entre si por transformações de Weyl. Podemos verificar também que a solução acima coincide com a solução de Schwarzschild no frame de Einstein onde o escalar de Weyl é identicamente nulo, isto é, a solução de Schwarzschild é uma das representações. Portanto, podemos denominar essa classe de equivalência de representações do campo gravitacional

estático e esfericamente simétrico em um espaço-tempo de Weyl integrável de classe de Schwarzschild.

A solução acima será utilizada para calcular os resultados correspondentes a alguns testes da Teoria da Relatividade Geral no contexto do Sistema Solar. A saber: o redshift gravitacional, o efeito Doppler gravitacional da luz, a deflexão da luz pelo campo gravitacional e a precessão do periélio de Mercúrio.

5.2. Dilatação temporal Gravitacional em um Gauge de Weyl

Consideremos dois observadores, A e B , em um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico representado pelo espaço-tempo de Weyl integrável dado pelas eqs.(5.1.1) acima. A distância entre o observador A e o centro da fonte do campo gravitacional é r_A e a distância do observador B até o centro da fonte do campo é r_B , onde $r_A < r_B$. Considere que esses observadores estão em repouso em relação ao sistema de coordenadas, logo para a equação eq.(5.1.1) devemos ter

$$dr = d\theta = d\phi = 0,$$

logo, levando-se em conta que o tempo próprio na variedade de Weyl integrável, ou seja, o tempo medido na posição dos observadores que se encontram em pontos diferentes do mesmo campo gravitacional é dado por

$$d\tau^2 = -e^{\psi(r)} ds^2,$$

Então, a partir da solução dada pelas eqs.(5.1.1), podemos escrever o tempo medido pelos observadores A e B nas posições acima, isto é, o tempo próprio medido por cada um deles é dado, respectivamente, por

$$d\tau_A = \sqrt{-e^{\psi(r_A)} g_{00}(r_A)} dt \quad e \quad d\tau_B = \sqrt{-e^{\psi(r_B)} g_{00}(r_B)} dt$$

que, depois de substituirmos os valores de $\psi(r)$ e de $g_{00}(r)$ da representação do campo gravitacional estático e esfericamente simétrico dada pelas eqs.(5.1.1), ficam dados por

$$d\tau_A = \sqrt{e^{\psi(r_A)}} dt = \sqrt{f(r_A)} dt \quad e \quad d\tau_B = \sqrt{e^{\psi(r_B)}} dt = \sqrt{f(r_B)} dt. \quad (5.2.1)$$

Como podemos perceber pelas equações acima, as informações que precisamos para analisar se há diferença entre os tempos próprios dos observadores A e B estão relacionadas com o campo escalar de Weyl $\psi(r)$ e o componente $g_{00}(r)$, diferente do que foi exposto na seção 3.2 no contexto da Relatividade Geral, onde as informações que precisamos para analisar a diferença de tempos medidos para observadores que se encontram em pontos diferentes do mesmo campo gravitacional está apenas no tensor métrico. A coordenada temporal t que está nas equações eqs.(5.2.1) não representa o tempo medido por um observador que está em um ponto qualquer do campo gravitacional, mas coincide com o tempo próprio τ de um observador está muito distante dos efeitos gravitacionais originado pelo corpo massivo, ou seja, numa região assintoticamente plana onde $\psi(r) \cong 0$ e $e^{\psi(r)} \cong 1$. Para compararmos os tempos próprios medidos pelos observadores A e B utilizamos a relação

$$d\tau_A = \sqrt{\frac{e^{\psi(r_A)}}{e^{\psi(r_B)}}} d\tau_B = \sqrt{\frac{f(r_A)}{f(r_B)}} d\tau_B = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_A}}{1 - \frac{2m}{r_B}}} d\tau_B. \quad (5.2.2)$$

Como o observador B está mais distante da fonte que origina o campo gravitacional do que o observador A , isto é, como $r_A < r_B$, temos $e^{\psi(r_A)} < e^{\psi(r_B)}$ e podemos concluir que o intervalo de tempo medido pelo observador B é maior que o intervalo de tempo correspondente medido pelo observador A , ou seja, quando se passa 1 hora para o observador B para o observador A o tempo medido ainda não chega a 1 hora. Devemos lembrar, na representação do campo gravitacional acima, que a dilatação temporal gravitacional é um efeito determinado apenas pelo campo escalar de Weyl ψ que tem origem geométrica.

5.3. Efeito Doppler Gravitacional da Luz em um Gauge de Weyl

Vamos novamente considerar os observadores A e B que já foram mencionados na seção anterior sobre a dilatação temporal proveniente dos efeitos do campo gravitacional. Vimos nesse caso, que os tempos próprios medidos por esses dois observadores eram diferentes por causa do campo gravitacional de acordo com a equação eq.(5.2.1), onde os tempos próprios medido por A e B são, respectivamente, dados por

$$d\tau_A = \sqrt{e^{\psi(r_A)}} dt = \sqrt{f(r_A)} dt \quad (5.3.1)$$

e

$$d\tau_B = \sqrt{e^{\psi(r_B)}} dt = \sqrt{f(r_B)} dt. \quad (5.3.2)$$

Suponhamos que o observador A emite um pulso de luz para o observador B e as frequências da onda luminosa medidas pelos observadores sejam, respectivamente,

$$\nu_A = \frac{1}{d\tau_A} \quad (5.3.3)$$

e

$$\nu_B = \frac{1}{d\tau_B}. \quad (5.3.4)$$

Comparando-se as equações eq.(5.3.3) e eq.(5.3.4) com as equações eq.(5.3.1) e eq.(5.3.2), obteremos

$$\nu_A = \frac{\nu}{\sqrt{e^{\psi(r_A)}}} = \frac{\nu}{\sqrt{f(r_A)}} \quad e \quad \nu_B = \frac{\nu}{\sqrt{e^{\psi(r_B)}}} = \frac{\nu}{\sqrt{f(r_B)}}, \quad (5.3.5)$$

onde ν é a frequência medida por um observador na região assintoticamente plana do espaço-tempo de Weyl integrável. A partir desses resultados, obtemos que o desvio na frequência da onda eletromagnética definido por

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_A - \nu_B}{\nu}, \quad (5.3.6)$$

calculado com os resultados das eqs.(5.3.5), fica dado por

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{\frac{\nu}{\sqrt{-e^{\psi(r_A)}}} - \frac{\nu}{\sqrt{-e^{\psi(r_B)}}}}{\nu} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{\sqrt{-e^{\psi(r_A)}} - \sqrt{-e^{\psi(r_B)}}}{\sqrt{e^{\psi(r_A)}} e^{\psi(r_B)}}, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

A partir da equação acima podemos perceber que existe um efeito Doppler gravitacional da luz no espaço-tempo de Weyl integrável, e que este fenômeno é causado apenas pelo campo escalar de Weyl ψ , sem participação da métrica. Diferentemente do efeito Doppler gravitacional na Relatividade Geral, obtido na seção 3.3, onde apenas o tensor métrico é necessário para explicar o fenômeno. Como sabemos o valor de $e^{\psi(r)}$ a partir da eq.(5.1.1), supondo que as posições dos observadores A e B sejam tais que $r_{A,B} \gg 2m$, teremos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (5.3.8)$$

Assim, já da equação eq.(5.3.7) podemos concluir que há uma diferença na frequência medida pelos os observadores A e B e esse efeito é causado apenas pelo campo escalar de Weyl $\psi(r)$ e não pela métrica, ao contrário do que ocorre na Relatividade Geral como foi mostrado no capítulo 3. Suponhamos que o observador A emita um sinal luminoso para o observador B , quando esse sinal for medido por B ele perceberá que a frequência do sinal luminoso está menor do que foi enviado pelo A , esse efeito é devido as propriedades escalares do campo escalar de Weyl ψ . Devemos lembrar que esse efeito é devido a influência do campo gravitacional e desprezamos os efeitos cinemáticos.

5.4. Deflexão da Luz pelo Campo Gravitacional no Gauge de Weyl

Agora descreveremos o caso em que os raios de luz são desviados quando os mesmos passam em regiões do espaço-tempo de Weyl integrável onde há um campo gravitacional suficientemente forte a ponto de desviá-los. Para isso, consideraremos a solução das equações do campo gravitacional para o vácuo dada pelas eqs.(5.1.1) que constitui uma representação do campo gravitacional no exterior de um corpo com distribuição de massa esfericamente simétrica e estática.

A luz se move em uma geodésica de Weyl do tipo-luz, o vetor tangente tem norma nula

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0, \quad (5.4.1)$$

sendo que $v^0 = dt/d\lambda$, $v^1 = dr/d\lambda$, $v^2 = d\theta/d\lambda$ e $v^3 = d\phi/d\lambda$ são os componentes da 4-velocidade e λ é um parâmetro afim da geodésica de Weyl do tipo luz, então podemos deixar a equação eq.(5.4.2) da seguinte forma.

$$g_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (5.4.2)$$

Considerando que o campo gravitacional dado pelas eqs.(5.1.1) possui simetrias translacional temporal e rotacional, logo podemos determinar os vetores de Killing-Weyl correspondentes dados, respectivamente, por

$$\xi = (\xi^\mu) = (1, 0, 0, 0) \quad e \quad \eta = (\eta^\mu) = (0, 0, 0, 1). \quad (5.4.3)$$

Esses vetores estão relacionados respectivamente com a conservação da energia e do momento angular da luz. A partir da eq.(4.5.17) obtemos que a energia do raio luminoso é dada por

$$E = e^\psi g_{\alpha\beta} v^\alpha \xi^\beta = e^\psi g_{00} v^0 \xi^0 = e^\psi g_{00} \frac{dt}{d\lambda}, \quad (5.4.4)$$

e que o momento angular é dado por

$$L = e^\psi g_{\alpha\beta} v^\alpha \xi^\beta = e^\psi g_{00} v^0 \xi^0 = e^\psi g_{33} \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad (5.4.5)$$

Substituindo as equações eq.(5.4.4) e eq.(5.4.5) na eq.(5.4.2) e considerando-se o plano equatorial

$$\theta = \frac{1}{2}\pi \implies \frac{d\theta}{d\lambda} = 0,$$

obtemos que

$$g_{00} \left(\frac{e^{-\psi} E}{g_{00}} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{e^{-\psi} L}{g_{33}} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{E^2}{g_{00}} + e^{2\psi} g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{g_{33}} = 0. \quad (5.4.6)$$

Para obter a trajetória espacial do raio de luz vamos determinar $r = r(\phi)$ inicialmente fazendo a mudança

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (5.4.7)$$

que, utilizando as equações (5.4.5) , fica dada por

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{L}{g_{33}} \frac{dr}{d\phi}. \quad (5.4.8)$$

Finalmente, fazendo a mudança de variável $r = u^{-1}$ obtemos

$$\frac{dr}{d\lambda} = -\frac{Le^{-\psi}}{g_{33}u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad (5.4.9)$$

que substituímos na eq.(5.4.6) para chegar ao seguinte resultado

$$\frac{E^2}{g_{00}} + \frac{g_{11}L^2}{g_{33}^2u^4} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2}{g_{33}} = 0, \quad (5.4.10)$$

Podemos perceber, a partir da equação acima, que a deflexão dos raios de Luz é causada somente pelo tensor métrico, de maneira idêntica ao que ocorre no espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral como foi exposto na seção (3.4). Assim, tanto na deflexão dos raios luminosos pelo espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral quanto pelo espaço-tempo de Weyl integrável, o fenômeno da deflexão dos raios luminosos pelo campo gravitacional é determinado apenas pela métrica. Aplicando o resultado obtido utilizando a representação do campo gravitacional esfericamente simétrico e estático no frame de Weyl dado pelas eqs.(5.1.1) , onde

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = \frac{1}{f^2(u)}, \quad g_{33} = \frac{1}{f(u)u^2} \quad e \quad e^\psi = f(u),$$

obtemos que

$$E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - f(u)u^2L^2 = 0, \quad (5.4.11)$$

e considerando que

$$f(u) = 1 - 2mu,$$

a eq.(5.4.11) fica dada por

$$E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - (1 - 2mu)u^2 L^2 = 0. \quad (5.4.12)$$

Finalmente, derivando a equação acima em relação à ϕ , a equação da órbita do raio de luz fica expressa por

$$\frac{d}{d\phi} E^2 - L^2 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \frac{du}{d\phi} \right) - L^2 \frac{d}{d\phi} u^2 + 2mL^2 \frac{d}{d\phi} u^3 = 0$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - 3mu^2 = 0, \quad (5.4.13)$$

cuja solução é a mesma da equação eq.(3.4.14), onde vamos obter para a deflexão da luz o seguinte resultado

$$\Delta = \frac{4m}{r_0} = \frac{4Gm}{c^2 r_0}, \quad (5.4.14)$$

Esse resultado é idêntico ao que foi obtido na seção (3.4) no contexto da Relatividade Geral, onde consta apenas o tensor métrico determina as informações para o cálculo dessa propriedade da interação gravitacional.

Assim, mostramos que o campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável originado por um corpo extremamente massivo pode alterar a trajetória da Luz quando a mesma passa em uma região próxima desse corpo, mas a explicação do fenômeno é proveniente apenas do tensor métrico sem a participação do campo escalar de Weyl.

5.5. Precessão de Periélio de Mercúrio em um Gauge de Weyl

Nessa última seção, vamos obter a equação do movimento orbital de Mercúrio em torno do Sol. Consideramos que campo gravitacional do Sol seja estático e esfericamente simétrico e seja representado pelo espaço-tempo de Weyl integrável dado pelas eqs.(5.1.1) . O planeta Mercúrio será tratado como uma partícula de teste que se move em uma

geodésica de Weyl do tipo-tempo parametrizada pelo tempo próprio. Considerando, no gauge de Weyl, a norma do 4-vetor velocidade da partícula $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ não é constante e vale

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -e^{-\psi}, \quad (5.5.1)$$

onde $v^0 = \dot{t} = dt/d\tau$, $v^1 = \dot{r} = dr/d\tau$, $v^2 = \dot{\theta} = d\theta/d\tau$ e $v^3 = \dot{\phi} = d\phi/d\tau$ são os componentes da 4-velocidade e τ é tempo próprio da geodésica de Weyl do tipo-tempo. Reescrevendo a equação eq.(5.5.1) levando-se em conta o plano equatorial

$$\theta = \frac{1}{2}\pi \quad (5.5.2)$$

obtemos que a equação eq.(5.5.1) fica dada por

$$g_{00}\dot{t}^2 + g_{11}\dot{r}^2 + g_{33}\dot{\phi}^2 = -e^{-\psi}. \quad (5.5.3)$$

Utilizando as simetrias do espaço-tempo de Weyl integrável, que possui simetria translacional temporal e rotacional, podemos novamente determinar os vetores de Killing-Weyl correspondentes

$$\xi = (\xi^\mu) = (1, 0, 0, 0) \quad e \quad \eta = (\eta^\mu) = (0, 0, 0, 1) \quad (5.5.4)$$

que estão relacionados, respectivamente, com a conservação da energia por unidade de massa de repouso da partícula e a conservação do momento angular por unidade de massa de repouso da partícula. A partir desses vetores de Killing-Weyl, de acordo com a eq.(4.5.17), podemos determinar a energia por unidade de massa de repouso

$$E = e^\psi g_{\alpha\beta} u^\alpha \xi^\beta = e^\psi g_{00} u^0 \xi^0 = e^\psi g_{00} \frac{dt}{d\tau}, \quad (5.5.5)$$

e o momento angular por unidade de massa de repouso

$$L = e^\psi g_{\alpha\beta} u^\alpha \eta^\beta = e^\psi g_{33} u^3 \eta^3 = e^\psi g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (5.5.6)$$

Utilizando o resultados acima podemos expressar a equação eq.(5.5.3) de acordo com

$$g_{00} \left(\frac{e^{-\psi} E}{g_{00}} \right)^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{33} \left(\frac{e^{-\psi} L}{g_{33}} \right)^2 = -e^{-\psi}$$

$$\frac{E^2}{g_{00}} + g_{11} e^{2\psi} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{g_{33}} = -e^{\psi}, \quad e$$

$$\frac{E^2}{g_{00}} + g_{11} e^{2\psi} \dot{r}^2 + e^{\psi} \left(\frac{e^{-\psi} L^2}{g_{33}} + 1 \right) = 0. \quad (5.5.7)$$

Mas como queremos a trajetória de um planeta em torno de uma estrela, necessitamos procurar uma expressão que descreva como a coordenada r varia com a coordenada ϕ , desta forma, devemos determinar $r = r(\phi)$ e para isso calculamos

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (5.5.8)$$

e substituimos na eq.(5.4.5) para obter que

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{e^{-\psi} L}{g_{33}} \frac{dr}{d\phi}. \quad (5.5.9)$$

Finalmente, introduzindo uma nova variável $u = r^{-1}$ obtemos que

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{e^{-\psi} L}{g_{33} u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad (5.5.10)$$

e substituindo a eq.(5.5.10) na eq.(5.5.7), chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{E^2}{g_{00}} + g_{11} e^{2\psi} \left(-\frac{e^{-\psi} L}{g_{33} u^2} \frac{du}{d\phi} \right)^2 + e^{\psi} \left(\frac{e^{-\psi} L^2}{g_{33}} + 1 \right) = 0$$

$$\frac{E^2}{g_{00}} + \frac{g_{11} L^2}{g_{33}^2 u^4} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + e^{\psi} \left(\frac{e^{-\psi} L^2}{g_{33}} + 1 \right) = 0, \quad (5.5.11)$$

Uma conclusão importante que podemos tirar da equação acima é que a precessão do periélio de Mercúrio é determinada tanto pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ quanto pelo campo escalar de Weyl ψ . O resultado acima é diferente do resultado análogo no espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral obtido na seção (3.5), onde a precessão do

periélio é determinada apenas o tensor métrico. Utilizando agora o espaço-tempo de Weyl integrável dado pelas eqs.(5.1.1) onde

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = \frac{1}{f^2(u)}, \quad g_{33} = \frac{1}{f(u)u^2} \quad e \quad e^\psi = f(u),$$

e substituindo esses valores na eq.(5.5.11), obtemos que

$$E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - f(u)(L^2 u^2 + 1) = 0 \quad (5.5.12)$$

e substituindo agora

$$f(u) = 1 - 2mu,$$

o resultado final fica dado por

$$E^2 - L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - (1 - 2mu)(L^2 u^2 + 1) = 0$$

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + 2mu^3 + \frac{2mu}{L^2}, \quad (5.5.13)$$

que é a equação da órbita de uma partícula de teste em um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático no vazio. Finalmente, derivando a equação acima em relação à coordenada ϕ de acordo com

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \frac{du}{d\phi} \right) + \frac{d}{d\phi} u^2 = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{E^2 - 1}{L^2} \right) + 2m \frac{d}{d\phi} u^3 + \frac{2m}{L^2} \frac{d}{d\phi} u,$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{L^2}, \quad (5.5.14)$$

obtemos uma equação idêntica à a eq.(3.5.9) obtida no capítulo (3), para o cálculo da precessão do periélio de Mercúrio utilizando a solução de Schwarzschild na Relatividade Geral. Portanto, procedendo de maneira análoga, podemos mostra que a precessão é dada por

$$\frac{\Delta\phi_0}{\phi} = \frac{3m^2}{L^2}. \quad (5.5.15)$$

Portanto, mostramos que a precessão do periélio de Mercúrio pode ser obtida em um espaço-tempo de Weyl integrável estático e esfericamente simétrico, e que o resultado depende tanto do campo escalar de Weyl ψ quanto do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo.

Assim, concluímos que alguns dos principais resultados que confirmam a Relatividade Geral como uma teoria mais aceita para explicar fenômenos no contexto do Sistema Solar também podem ser obtidos em uma teoria gravitação construída tendo por base um espaço-tempo não-Riemanniano dado por uma variedade de Weyl integrável.

Conclusão

Nessa tese apresentamos uma formulação de uma teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável que é invariante sob transformações de Weyl e equivalente à teoria da Relatividade Geral. Inicialmente apresentamos alguns resultados da teoria da Relatividade Geral com a finalidade de compará-los com os resultados correspondentes da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável. Em primeiro lugar, mostramos as equações de Einstein que nos informam como a distribuição de matéria no universo atua como fonte do campo gravitacional. Em segundo lugar, apresentamos as equações geodésicas métrica que dirá como o espaço-tempo influenciará no movimento de partículas testes e de raios de luz. Devemos lembrar que no movimento de partículas na Relatividade Geral, se fundamenta em cima dos postulados geodésico e do tempo próprio. Assim, Einstein geometriza a gravitação, mostrando que ela nada mais é que uma manifestação do encurvamento do espaço-tempo, onde essa teoria é toda construída matematicamente em cima apenas do tensor métrico. E por último, apresentamos alguns testes experimentais do Sistema Solar que confirmam a teoria da Relatividade Geral como uma teoria boa para explicar fenômenos na escala do Sistema Solar.

Em seguida, apresentamos uma formulação da Relatividade Geral utilizando uma geometria não-Riemanniana, onde o espaço-tempo é dado por uma variedade de Weyl integrável, que é determinada a partir do tensor métrico e do campo escalar de Weyl. No espaço-tempo de Weyl integrável a estrutura causal local é determinada apenas pela métrica, mas o transporte paralelo depende tanto da métrica quanto do campo escalar de Weyl. A teoria gravitacional formulada é invariante sob transformações de Weyl e permite que sejam obtidas diversas representações diferentes do mesmo campo gravitacional que chamamos de gauges de Weyl, em analogia com o eletromagnetismo. Primeiramente, obtemos as equações de campo para um campo gravitacional em uma variedade de Weyl integrável por meio de uma ação que é invariante por transformação de Weyl, onde as equações de campo obtidas a partir da variação do campo escalar de Weyl e da métrica são

eq.(4.1.5) e eqs.(4.1.7), respectivamente. Geometricamente, elas coincidem com o escalar de curvatura e o tensor de Einstein do espaço-tempo de Weyl integrável, respectivamente. Portanto, as equações não são todas independentes e revelam a existência de uma simetria de gauge dada pelas transformações de Weyl que envolvem um grau de liberdade através de uma função arbitrária.

Posteriormente, fizemos uma extensão do postulado geodésico e do postulado do relógio para uma variedade de Weyl integrável. O postulado da geodésica diz que partículas de teste e raios de luz se movem sob a influência da gravidade apenas seguindo curvas geodésicas no espaço-tempo. O postulado do relógio afirma que o tempo próprio medido no referencial de repouso de uma partícula em movimento é proporcional ao intervalo espaço-tempo. A extensão do postulado geodésico afirma que as partículas de teste se movem em curvas auto-paralelas (geodésicas de Weyl) tipo-tempo onde o tempo próprio, definido de forma invariante a partir do tensor métrico e do campo escalar de Weyl, é um extremo. Para o movimento de raios de luz mostramos que elas seguem geodésicas de Weyl tipo-nulo e por meio dessas geodésicas vimos que a estrutura causal local do cone de luz é invariante quando passamos de um gauge de Weyl para outro gauge de Weyl, sendo determinado apenas pela métrica.

E não podemos esquecer que em limites de campos fracos, temos que as equações de campo da variedade de Weyl integrável, recai nas equações da mecânica newtoniana como caso particular, onde o potencial newtoniano depende tanto da métrica quanto do campo escalar de Weyl em um frame ou gauge de Weyl arbitrário. Finalmente, obtivemos um espaço-tempo de Weyl integrável esfericamente simétrico e estático e calculamos alguns dos testes da Relatividade Geral no Sistema Solar, obtendo resultados idênticos.

Assim, formulamos uma gravitação que é a generalização da Teoria da Relatividade Geral, que nos dá um outro grau de liberdade para analisar a interação gravitacional que é o campo escalar de Weyl. Por meio das transformações de Weyl, podemos construir diversas representações do mesmo campo gravitacional e quando tomamos o campo escalar como nulo temos o gauge de Einstein, onde somente o tensor métrico guarda as informações do campo gravitacional. Estes resultados podem ser utilizados para investigar diversas propriedades do campo gravitacional utilizando frames de Weyl diferentes, para

investigar se existe uma escolha de gauge onde o cálculo de alguma propriedade do campo gravitacional seja mais simples. Falta considerar o problema do acoplamento com a matéria e generalizar as equações de campo obtidas. Extensões dessa teoria também podem ser consideradas modificando ou acrescentando termos na lagrangiana, para investigar problemas relacionados com a gravitação e a cosmologia onde a teoria da Relatividade Geral apresenta dificuldades.

A. Variedades de Weyl

Neste apêndice apresentamos alguns conceitos básicos e propriedades de uma variedade de Weyl, onde definimos as notações e convenções utilizadas nesta monografia, tendo em vista que diversas convenções e notações diferentes são usadas na literatura. Informações adicionais podem ser obtidas em [7, 13, 17, 18, 20, 24, 39, 40] e nas referências citadas pelos mesmos. Na primeira seção, apresentamos a propriedades do transporte paralelo, da derivada covariante, do tensor de curvatura, bem como as identidades de Ricci e de Bianchi de uma variedade de Weyl. Na segunda seção, apresentamos o caso particular da variedade de Weyl integrável, mostrando como resultados apresentados na seção anterior são modificados para esse contexto.

A.1. Variedades de Weyl

Uma variedade de Weyl é uma variedade diferenciável M dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$ e de uma conexão afim $\Gamma^\beta_{\lambda\nu}$, que estaremos denominando de conexão de Weyl. A conexão de Weyl é simétrica, isto é, o tensor de torção é identicamente nulo

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu} = 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Em uma variedade de Weyl o tensor de não-metricidade, definido pela derivada covariante da métrica $\nabla_\lambda g_{\mu\nu}$, é dado por

$$Q_{\nu\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\beta_{\lambda\nu} g_{\beta\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu} g_{\beta\lambda} = \nabla_\nu g_{\lambda\mu} = -\omega_\nu g_{\lambda\mu}, \quad (\text{A.1.2})$$

onde a 1-forma $\omega = \omega_\lambda dx^\lambda$ é chamada de campo de Weyl. Tanto a métrica como a conexão de uma variedade de Weyl estão definidas a menos de uma transformação de Weyl dada por

$$\begin{cases} \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu} \\ \tilde{\omega}_\lambda = \omega_\lambda - 2\partial_\lambda \sigma \end{cases}, \quad (\text{A.1.3})$$

onde a métrica é definida a menos de uma transformação conforme, sendo $\sigma > 0$ uma função positiva, e o campo de Weyl é definido a menos de uma transformação de gauge (calibre) de modo semelhante ao que ocorre com potencial eletromagnético. Em uma transformação de Weyl as coordenadas permanecem invariantes, isto é, $\tilde{x}^\mu = x^\mu$. A transformação de Weyl tem muitas semelhanças com as transformações de gauge do eletromagnetismo, embora seja aplicada a quantidades geométricas. Quando o campo de Weyl é identicamente nulo $\omega_\lambda = 0$, de acordo com as condições dadas pelas eqs.(A.1.1) e eqs.(A.1.2), a variedade de Weyl se reduz a uma variedade riemanniana.

Pelo fato de a condição de metricidade não ser válida em uma variedade de Weyl, conexão de Weyl não é determinada unicamente pela métrica $g_{\mu\nu}$, pois também depende do campo de Weyl ω_λ . O tensor de curvatura, que é definido em termos da conexão de Weyl, também depende tanto da métrica quanto do vetor de Weyl e suas propriedades são diferentes do tensor de curvatura de uma variedade riemanniana. Agora veremos como fica a conexão de Weyl em termos da métrica e do vetor de Weyl. Utilizando a condição da derivada covariante da métrica ser não-nula, dada pelas eqs.(A.1.2), e fazendo uma permutação cíclica entre os índices ν, λ e μ , obtemos que

$$\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\lambda} - \Gamma^\beta_{\lambda\mu} g_{\beta\nu} = -\omega_\mu g_{\lambda\nu}, \quad (\text{A.1.4})$$

e

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\lambda} g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\lambda\mu} g_{\beta\mu} = -\omega_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.5})$$

somando as eqs.(A.1.2) com as eqs.(A.1.4) e subtraindo as eqs.(A.1.5), resulta em

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (\omega_\nu g_{\lambda\mu} + \omega_\mu g_{\lambda\nu} - \omega_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.1.6})$$

e finalmente, contraindo as eqs.(A.1.6) com $g^{\lambda\alpha}$, obteremos que a conexão de Weyl é dada por

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\omega_\nu g_{\lambda\mu} + \omega_\mu g_{\lambda\nu} - \omega_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.1.7})$$

Para indicar explicitamente que a conexão depende tanto da métrica $g_{\mu\nu}$ quanto do campo de Weyl ω_λ a conexão de Weyl será denotada por

$$\Gamma^{(g,\omega)\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} + C^\alpha_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.8})$$

onde $C^\alpha_{\mu\nu}$ é um campo tensorial, oriundo do campo de Weyl, definido por

$$C^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\omega_\nu g_{\lambda\mu} + \omega_\mu g_{\lambda\nu} - \omega_\lambda g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\omega_\nu \delta_\mu^\alpha + \omega_\mu \delta_\nu^\alpha - g_{\mu\nu} \omega^\alpha), \quad (\text{A.1.9})$$

e a conexão

$$\Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} = \{\alpha_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.1.10})$$

são os símbolos de Christoffel, que coincidem com a conexão de Weyl quando o campo de Weyl é identicamente nulo $\omega_\mu = 0$. De agora em diante adotaremos a notação $\Gamma^{(g,\omega=0)\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu}$ para os símbolos de Christoffel, tendo em vista que a estrutura geométrica de uma variedade riemanniana é determinada somente pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Também estaremos utilizando a notação $\Gamma^{(g,\omega)\alpha}_{\mu\nu}$ para a conexão da variedade de Weyl, onde a estrutura geométrica é determinada pelo par $(g_{\mu\nu}, \omega_\lambda)$ formado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo campo de Weyl ω_ν .

A conexão de Weyl tem uma importante propriedade: ela é invariante sob transformações de Weyl. Todas as métricas e campos de Weyl relacionados por transformações de Weyl correspondem a uma única conexão de Weyl. Os campos fundamentais de uma variedade de Weyl, dados pela métrica $g_{\mu\nu}$ e pelo campo de Weyl ω_λ , formam um par $(g_{\mu\nu}, \omega_\lambda)$ que se transformam sob transformações de Weyl. O par $(g_{\mu\nu}, \omega_\lambda)$ pode ser comparado ao potencial eletromagnético A_μ que se transforma sob transformações de gauge do eletromagnetismo. A conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\omega)\alpha}_{\mu\nu}$, que é invariante sob transformações de Weyl, pode ser comparada com o tensor campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

que é invariante sob transformações de gauge do eletromagnetismo. Se uma métrica e um campo de Weyl dados por $(g_{\mu\nu}, \omega_\lambda)$ estão relacionados por uma transformação de Weyl [A.1.3](#) com outra métrica e outro campo de Weyl dados por $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\omega}_\lambda)$, então as respectivas conexões de Weyl são iguais

$$\Gamma^{(g,\omega)\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{(\tilde{g},\tilde{\omega})\alpha}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.11})$$

portanto, a cada conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\omega)\alpha}_{\mu\nu}$ corresponde uma classe de equivalência $[g_{\mu\nu}, \omega_\lambda]$ de métricas $g_{\mu\nu}$ e campos de Weyl ω_λ que estão relacionados pelas transformações de Weyl dadas pelas eqs. [\(A.1.3\)](#).

Do mesmo modo que em uma variedade riemanniana, podemos definir na variedade de Weyl diversos objetos geométrico como formas diferenciáveis, tensores e espinores. Os tensores são dados em termos de componentes em relação a base do espaço vetorial tangente $T_p(M)$ no ponto p da variedade M . E as formas diferenciáveis são definidas em um espaço cotangente $T_p^*(M)$ que podemos também chamar de espaço dual de $T_p(M)$ e os espaços tangentes e cotangente definidos em um ponto p da variedade, possui a mesma dimensão de M .

Agora vamos abordar uma consequência da derivada covariante do tensor métrico ser não-nula, para isso levaremos em conta o transporte paralelo de um vetor $V = V^\mu \partial_\mu$ ao longo de uma curva em uma variedade M . O comprimento do vetor V é determinado de acordo com

$$l^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (\text{A.1.12})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que guarda as informações sobre as propriedades geométricas da variedade M e V^μ são as componentes do vetor. Considere que o vetor $V = V^\mu \partial_\mu$ é transportado paralelamente a si mesmo de modo que sua derivada covariante é identicamente nula

$$\nabla_\beta V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} V^\alpha = 0. \quad (\text{A.1.13})$$

Assim, transportando o vetor V paralelamente até um ponto infinitamente próximo

da variedade M , a expressão para a variação do comprimento l do vetor V é obtida calculando

$$d(l^2) = d(gV^\mu V^\nu),$$

que pode ser expresso como

$$2l dl = dg_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + g_{\mu\nu} dV^\mu V^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu dV^\nu.$$

Considerando que

$$dg_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} dx^\rho \quad (\text{A.1.14})$$

e

$$dV^\nu = -\Gamma^\nu_{\sigma\rho} V^\sigma dx^\rho,$$

obtemos que

$$2l dl = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} V^\mu V^\nu dx^\rho + g_{\mu\nu} (-\Gamma^\mu_{\sigma\rho} V^\sigma dx^\rho) V^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu (-\Gamma^\nu_{\sigma\rho} V^\sigma dx^\rho),$$

e finalmente que

$$2l dl = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} \right) V^\mu V^\nu dx^\rho = \nabla_\rho g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu dx^\rho. \quad (\text{A.1.15})$$

A partir da equação eq.(A.1.15) podemos tirar duas conclusões importantes. Se a derivada covariante da métrica $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$ possuir um valor nulo, o comprimento de um vetor quando transportado paralelamente terá o mesmo valor, ou seja, temos uma invariância no comprimento do vetor em todos os pontos da variedade. Esse caso ocorre numa variedade riemanniana, o comprimento do vetor é fixo e independará do caminho seguido entre um ponto e outro. Se a derivada do tensor métrico $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$ for não-nula, então existirá uma variação do comprimento, ou seja, o comprimento final após o vetor ser transportado paralelamente não será igual ao comprimento inicial.

Aplicando o resultado acima em uma variedade de Weyl e substituindo a condição

eqs.(A.1.2) na eqs.(A.1.15) , obtemos que a variação do comprimento de um vetor por transporte paralelo é dado por

$$dl = \frac{1}{2}l\omega_\mu dx^\mu, \quad (\text{A.1.16})$$

que pode ser expresso como

$$l = l_0 e^{\frac{1}{2} \int \omega_\mu dx^\mu}, \quad (\text{A.1.17})$$

onde l_0 é o comprimento inicial e l é o comprimento final do vetor após o transporte paralelo ao longo de uma dada curva.

O tensor de curvatura $R^{(g,\omega)\lambda}_{\mu\alpha\beta}$, de uma variedade de Weyl é definido a partir das identidades de Ricci

$$(\nabla_\beta^{(g,\omega)} \nabla_\alpha^{(g,\omega)} - \nabla_\alpha^{(g,\omega)} \nabla_\beta^{(g,\omega)})V_\mu = R^{(g,\omega)\rho}_{\mu\alpha\beta} V_\rho, \quad (\text{A.1.18})$$

onde V_μ é um vetor arbitrário e $\nabla_\alpha^{(g,\omega)}$ é a derivada covariante calculada com a conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\alpha\beta}$ dada pelas eqs.(A.1.11). Estamos utilizando a notação com o par (g, ω) sobrescrito para indicar quantidades na variedade de Weyl que dependem do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e do campo de Weyl ω_ν . A derivada covariante calculada apenas com o símbolo de Christoffel será denotada por $\nabla_\alpha^{(g,0)}$ daqui em diante. A partir da definição acima, obtemos que

$$R^{(g,\omega)\lambda}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,\omega)\rho}_{\beta\mu} - \Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\beta\rho} \Gamma^{(g,\omega)\rho}_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.1.19})$$

o tensor de curvatura $R^{(g,\omega)}_{\nu\mu\alpha\beta} = g_{\lambda\nu} R^{(g,\omega)\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ possui somente as seguintes simetrias

$$R^{(g,\omega)}_{\lambda\mu\alpha\beta} = -R^{(g,\omega)}_{\lambda\mu\beta\alpha} \quad (\text{A.1.20})$$

e

$$R^{(g,\omega)}_{\nu\mu\alpha\beta} + R^{(g,\omega)}_{\nu\beta\mu\alpha} + R^{(g,\omega)}_{\nu\alpha\beta\mu} = 0. \quad (\text{A.1.21})$$

Por fim, as identidades de Bianchi em uma variedade de Weyl são

$$\nabla_{\lambda}^{(g,\omega)} R^{(g,\omega)\alpha}_{\beta\mu\nu} + \nabla_{\mu}^{(g,\omega)} R^{(g,\omega)\alpha}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_{\nu}^{(g,\omega)} R^{(g,\omega)\alpha}_{\beta\lambda\mu} = 0. \quad (\text{A.1.22})$$

O tensor de curvatura $R^{(g,\omega)}_{\nu\mu\alpha\beta}$ de uma variedade de Weyl pode ser decomposto em uma parte dada pelo tensor de curvatura $R^{(g,0)}_{\nu\mu\alpha\beta}$ calculado apenas com a métrica e por outra parte calculada com o tensor $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ definido pelas eqs.(A.1.9) e suas derivadas covariantes calculadas usando apenas os símbolos de Christoffel, denotadas por $\nabla_{\alpha}^{(g,0)}$. Escreveremos as parcelas do tensor de curvatura da variedade de Weyl dado pelas eqs.(A.1.19) utilizando a conexão de Weyl decomposta de acordo com as eqs.(A.1.8), obtemos para os termos que envolve as derivadas parciais da conexão de Weyl

$$\partial_{\alpha} \Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\beta\mu} = \partial_{\alpha} \left(\Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\mu} + C^{\lambda}_{\beta\mu} \right) = \partial_{\alpha} \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\mu} + \partial_{\alpha} C^{\lambda}_{\beta\mu} \quad (\text{A.1.23})$$

e

$$\partial_{\beta} \Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\alpha\mu} = \partial_{\beta} \left(\Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\mu} + C^{\lambda}_{\alpha\mu} \right) = \partial_{\beta} \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\mu} + \partial_{\beta} C^{\lambda}_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.1.24})$$

agora para o produto entre as conexões

$$\Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,\omega)\rho}_{\beta\mu} = \left(\Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\rho} + C^{\lambda}_{\alpha\rho} \right) \left(\Gamma^{(g,0)\rho}_{\mu\beta} + C^{\rho}_{\mu\beta} \right)$$

$$\Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,\omega)\rho}_{\beta\mu} = \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\mu\beta} + \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\mu\beta} + C^{\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\mu\beta} + C^{\lambda}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\mu\beta} \quad (\text{A.1.25})$$

e

$$\Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\beta\rho} \Gamma^{(g,\omega)\rho}_{\alpha\mu} = \left(\Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\rho} + C^{\lambda}_{\beta\rho} \right) \left(\Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\mu} + C^{\rho}_{\alpha\mu} \right)$$

$$\Gamma^{(g,\omega)\lambda}_{\beta\rho} \Gamma^{(g,\omega)\rho}_{\alpha\mu} = \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\mu} + \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\rho} C^{\rho}_{\alpha\mu} + C^{\lambda}_{\beta\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\mu} + C^{\lambda}_{\beta\rho} C^{\rho}_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.1.26})$$

substituindo as equações eqs.(A.1.23), eqs.(A.1.24), eqs.(A.1.25) e eqs.(A.1.26) nas eqs. (A.1.19), obtemos que

$$R^{(g,\omega)\lambda}_{\mu\alpha\beta} = R^{(g,0)\lambda}_{\mu\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}^{(g,0)} C^{\lambda}_{\beta\mu} - \nabla_{\beta}^{(g,0)} C^{\lambda}_{\alpha\mu} + C^{\lambda}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta\mu} - C^{\lambda}_{\beta\rho} C^{\rho}_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.1.27})$$

onde

$$R^{(g,0)\lambda}_{\mu\alpha\beta} = \partial_{\alpha} \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\mu} - \partial_{\beta} \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\beta\mu} - \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\mu}, \quad (\text{A.1.28})$$

$$\nabla_{\alpha}^{(g,0)} C^{\lambda}_{\beta\mu} = \partial_{\alpha} C^{\lambda}_{\beta\mu} + \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\mu\beta} - C^{\lambda}_{\rho\beta} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\mu} - \Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\beta} C^{\lambda}_{\rho\mu} \quad (\text{A.1.29})$$

e

$$\nabla_{\beta}^{(g,0)} C^{\lambda}_{\alpha\mu} = \partial_{\beta} C^{\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{(g,0)\lambda}_{\beta\rho} C^{\rho}_{\alpha\mu} - C^{\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{(g,0)\rho}_{\beta\mu} - \Gamma^{(g,0)\rho}_{\alpha\beta} C^{\lambda}_{\rho\mu}. \quad (\text{A.1.30})$$

A partir do tensor de curvatura $R^{(g,\omega)\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ de uma variedade de Weyl podemos definir dois tensores de segunda ordem, o tensor

$$P_{\mu\nu} = R^{(g,\omega)\lambda}_{\lambda\mu\nu}, \quad (\text{A.1.31})$$

e o tensor de Ricci $R^{(g,\omega)}_{\mu\beta}$, que pode ser decomposto em uma parte riemanniana $R^{(g,0)}_{\mu\beta}$ e outra parte dependente da métrica e do vetor de Weyl, de acordo com

$$R^{(g,\omega)}_{\mu\beta} = R^{(g,\omega)\nu}_{\mu\nu\beta} = R^{(g,0)}_{\mu\beta} + \nabla_{\alpha}^{(g,0)} C^{\alpha}_{\beta\mu} - \nabla_{\beta}^{(g,0)} C^{\alpha}_{\alpha\mu} + C^{\alpha}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta\mu} - C^{\alpha}_{\beta\rho} C^{\rho}_{\alpha\mu}. \quad (\text{A.1.32})$$

Os tensores $P_{\mu\nu}$ e $R^{(g,\omega)}_{\mu\nu}$ não são independentes. Utilizando a identidade de simetria eqs.(A.1.21), obtemos que $P_{\mu\nu}$ coincide com a parte antissimétrica do tensor de Ricci

$$P_{\mu\nu} = R^{(g,\omega)}_{\mu\nu} - R^{(g,\omega)}_{\nu\mu} = 2R^{(g,\omega)}_{[\mu\nu]}, \quad (\text{A.1.33})$$

e aplicando a identidade Ricci para o tensor métrico obtemos as equações

$$\left(\nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \right) g_{\mu\nu} = R^{(g,\omega)\rho}_{\mu\alpha\beta} g_{\rho\nu} + R^{(g,\omega)\rho}_{\nu\alpha\beta} g_{\rho\mu}, \quad (\text{A.1.34})$$

cujo lado direito pode ser escrito como

$$R^{(g,\omega)\rho}_{\mu\alpha\beta} g_{\rho\nu} + R^{(g,\omega)\rho}_{\nu\alpha\beta} g_{\rho\mu} = R^{(g,\omega)}_{\nu\mu\alpha\beta} + R^{(g,\omega)}_{\mu\nu\alpha\beta} = 2R^{(g,\omega)}_{(\mu\nu)\alpha\beta}, \quad (\text{A.1.35})$$

entretanto, o lado esquerdo das equações eqs.(A.1.34) também pode ser escrito como

$$\left(\nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \right) g_{\mu\nu} = \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \left(\nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} g_{\mu\nu} \right) - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \left(\nabla_{\beta}^{(g,\omega)} g_{\mu\nu} \right),$$

levando-se em conta a equação eqs.(A.1.2). Assim, obtemos que

$$\left(\nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \right) g_{\mu\nu} = \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} (-\omega_{\alpha} g_{\mu\nu}) - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} (-\omega_{\beta} g_{\mu\nu})$$

$$\left(\nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \right) g_{\mu\nu} = \left(\nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \omega_{\beta} - \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \omega_{\alpha} \right) g_{\mu\nu}$$

$$\left(\nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} - \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \right) g_{\mu\nu} = H_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.36})$$

onde definimos

$$H_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)} \omega_{\beta} - \nabla_{\beta}^{(g,\omega)} \omega_{\alpha}. \quad (\text{A.1.37})$$

Assim, a partir das equações eqs.(A.1.35) e eqs.(A.1.36), podemos mostrar que a equação eqs.(A.1.34) pode ser escrita como

$$2R^{(g,\omega)}_{(\mu\nu)\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.38})$$

isto é, a parte simétrica no primeiro par de índices do tensor de curvatura de Weyl é proporcional ao tensor métrico e ao rotacional do campo de Weyl. Por sua vez, contraindo a equação acima com $g_{\mu\nu}$, então obtemos

$$P_{\alpha\beta} = 2H_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.1.39})$$

a partir dos resultados acima, podemos decompor o tensor de curvatura $R^{(g,\omega)}_{\alpha\beta\mu\nu}$ em suas partes simétrica e antissimétrica no primeiro par de índices de acordo com

$$R^{(g,\omega)}_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{(g,\omega)}_{(\alpha\beta)\mu\nu} + R^{(g,\omega)}_{[\alpha\beta]\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}H_{\mu\nu} + R^{(g,\omega)}_{[\alpha\beta]\mu\nu}. \quad (\text{A.1.40})$$

Por fim, o escalar de curvatura $R^{(g,\omega)}$ de uma variedade de Weyl também pode ser decomposto com uma parte $R^{(g,0)}$ calculada apenas com os símbolos de Christoffel e em outra parte dependente do campo de Weyl, de acordo com

$$R^{(g,\omega)} = g^{\mu\beta}R^{(g,\omega)}_{\mu\beta} = R^{(g,0)} + g^{\mu\beta}\nabla_{\alpha}^{(g,0)}C^{\alpha}_{\mu\beta} - g^{\mu\beta}\nabla_{\beta}^{(g,0)}C^{\alpha}_{\alpha\mu} + g^{\mu\beta}C^{\alpha}_{\alpha\rho}C^{\rho}_{\beta\mu} - g^{\mu\beta}C^{\alpha}_{\beta\rho}C^{\rho}_{\alpha\mu}. \quad (\text{A.1.41})$$

Considerando que podemos comutar a métrica $g^{\mu\beta}$ com a derivada covariante que é escrita na variedade $\nabla_{\alpha}^{(g,0)}$ definida com os símbolos de Christoffel, podemos escrever que

$$R^{(g,\omega)} = R^{(g,0)} + \nabla_{\alpha}^{(g,0)}(g^{\mu\beta}C^{\alpha}_{\mu\beta}) - \nabla_{\beta}^{(g,0)}(g^{\mu\beta}C^{\alpha}_{\alpha\mu}) + (g^{\mu\beta}C^{\rho}_{\beta\mu})C^{\alpha}_{\alpha\rho} - (g^{\mu\beta}C^{\rho}_{\alpha\mu})C^{\alpha}_{\beta\rho}$$

e

$$R^{(g,\omega)} = R^{(g,0)} + \nabla_{\alpha}^{(g,0)}C^{\alpha\mu}_{\mu} - \nabla_{\beta}^{(g,0)}C^{\alpha\beta}_{\alpha} + C^{\rho\mu}_{\mu}C^{\alpha}_{\alpha\rho} - C^{\rho\beta}_{\alpha}C^{\alpha}_{\beta\rho}, \quad (\text{A.1.42})$$

entretanto, utilizando as eqs. (A.1.9) obtemos que

$$C^\alpha_{\alpha\nu} = 2\omega_\nu \quad (\text{A.1.43})$$

e

$$C^{\alpha\mu}_{\mu} = -\omega^\alpha. \quad (\text{A.1.44})$$

Combinando o resultado das equações eqs.(A.1.43) e eqs.(A.1.44), temos

$$C^{\rho\mu}_{\mu} C^\alpha_{\alpha\rho} = -2\omega_\alpha \omega^\alpha, \quad (\text{A.1.45})$$

por outro lado, podemos obter

$$C^{\rho\beta}_{\alpha} C^\alpha_{\beta\rho} = -\frac{1}{2}\omega_\alpha \omega^\alpha, \quad (\text{A.1.46})$$

agora substituindo as equações eqs.(A.1.44), eqs.(A.1.45) e eqs.(A.1.46) na equação eqs.(A.1.42), vamos obter finalmente que

$$R^{(g,\omega)} = R^{(g,0)} - 3\nabla^{(g,0)}_\alpha \omega^\alpha - \frac{3}{2}\omega_\alpha \omega^\alpha. \quad (\text{A.1.47})$$

E para averiguar a simetria do tensor de Ricci na variedade de Weyl, multiplicando a identidade eqs.(A.1.21) por $g^{\alpha\mu}$

$$g^{\alpha\mu} \left(R^{(g,\omega)}_{\alpha\beta\mu\nu} + R^{(g,\omega)}_{\alpha\mu\nu\beta} + R^{(g,\omega)}_{\alpha\nu\beta\mu} \right) = 0$$

$$R^{(g,\omega)}_{\mu\beta}{}^\mu{}_\nu + g^{\alpha\mu} R^{(g,\omega)}_{\alpha\mu\nu\beta} + R^{(g,\omega)}_{\mu\nu\beta}{}^\mu = 0$$

$$R^{(g,\omega)}_{\mu\beta}{}^\mu{}_\nu + g^{\alpha\mu} R^{(g,\omega)}_{(\alpha\mu)\nu\beta} + R^{(g,\omega)}_{\mu\nu\beta}{}^\mu = 0, \quad (\text{A.1.48})$$

levando-se em conta a equação eqs.(A.1.38)

$$R^{(g,\omega)}_{\mu\beta}{}^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu} H_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} + R^{(g,\omega)}_{\mu\nu\beta}{}^\mu = 0$$

$$R^{(g,\omega)}_{\mu\beta}{}^{\mu}{}_{\nu} - R^{(g,\omega)}_{\mu\nu}{}^{\mu}{}_{\beta} = -2H_{\nu\beta}$$

$$R^{(g,\omega)}_{\beta\nu} - R^{(g,\omega)}_{\nu\beta} = -2H_{\nu\beta}$$

$$R^{(g,\omega)}_{[\nu\beta]} = H_{\nu\beta} = \nabla_{\alpha}^{(g,\omega)}\omega_{\beta} - \nabla_{\beta}^{(g,\omega)}\omega_{\alpha}, \quad (\text{A.1.49})$$

então o tensor de Ricci é antissimétrico e é dado por eqs.(A.1.49). Todavia, a equação eqs.(A.1.38) pode ser interpretado como uma medida de intensidade que um vetor muda em cada ponto da variedade [14]. De fato, o comprimento do vetor é variante ante um transporte paralelo em um circuito fechado, sendo assim a variação δV_{μ} do vetor fica dada por

$$\delta V_{\mu} = \frac{1}{2} R^{(g,\omega)}_{(\mu\nu)\alpha\beta} V^{\nu} \delta S^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.1.50})$$

onde $\delta S^{\alpha\beta}$ é o elemento de área. Também temos que

$$\delta (l^2) = \delta (V_{\mu} V^{\mu}) = 2V^{\mu} \delta V_{\mu}, \quad (\text{A.1.51})$$

combinando-se as equações eqs.(A.1.50) e eqs.(A.1.51), obtemos

$$\delta (l^2) = 2V^{\mu} \left[\frac{1}{2} R^{(g,\omega)}_{(\mu\nu)\alpha\beta} V^{\nu} \delta S^{\alpha\beta} \right]$$

$$\delta (l^2) = R^{(g,\omega)}_{(\mu\nu)\alpha\beta} V^{\mu} V^{\nu} \delta S^{\alpha\beta},$$

e ainda das equações eqs.(A.1.12) e eqs.(A.1.38), chegamos à

$$\delta l = \frac{1}{2} l H_{\alpha\beta} \delta S^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.1.52})$$

assim, se tivermos dois relógios e transportamos eles paralelamente ao longo de curvas diferentes da variedade, mas que cheguem no mesmo ponto, eles terão medições diferentes do tempo, isso se deve a quantidade $H_{\alpha\beta}$. A quantidade $H_{\alpha\beta}$ foi interpretada por Weyl

como o campo eletromagnético numa tentativa de geometrizar o mesmo [15], para que possa construir uma teoria de unificação do eletromagnetismo com a gravitação.

E para finalizar a revisão sobre a variedade de Weyl, vamos apresentar alguma propriedades que são importantes para a continuação do estudo independente sobre variedade de Weyl:

$$\nabla^{(g,\omega)\alpha}\omega_\alpha = \nabla_\alpha^{(g,\omega)}\omega^\alpha$$

$$\square^{(g,\omega)} = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha^{(g,\omega)}\nabla_\beta^{(g,\omega)} = \nabla^{(g,\omega)\alpha}\nabla_\alpha^{(g,\omega)} = \nabla_\alpha^{(g,\omega)}\nabla^{(g,\omega)\alpha} - \omega_\alpha\nabla^{(g,\omega)\alpha}$$

$$\omega_\alpha\nabla^{(g,\omega)\alpha} = \omega^\alpha\nabla_\alpha^{(g,\omega)}$$

$$\nabla_\mu^{(g,\omega)}A^\nu = \nabla_\mu^{(g,0)}A^\nu + C_{\mu\alpha}^\nu A^\alpha \quad \nabla^{(g,\omega)\mu}B_\nu = \nabla^{(g,0)\mu}B_\nu - C_{\mu\nu}^\alpha B_\alpha$$

$$C_{\alpha\mu}^\alpha = 2\omega_\mu \quad g^{\mu\nu}C_{\mu\nu}^\alpha = -\omega^\alpha$$

$$\nabla_\mu^{(g,\omega)}\omega_\nu = \nabla_\mu^{(g,0)}\omega_\nu - \omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}\omega^2g_{\mu\nu}$$

$$\nabla^{(g,\omega)\alpha}\omega_\alpha = \nabla^{(g,0)\alpha}\omega_\alpha + \omega^2 \quad \nabla_\alpha^{(g,\omega)}\omega^\alpha = \nabla_\alpha^{(g,0)}\omega^\alpha + 2\omega^2$$

$$\nabla_\alpha^{(g,\omega)}\omega^2 = \omega_\alpha\omega^2 + 2\omega^\mu\nabla_\alpha^{(g,\omega)}\omega_\mu = \omega^\mu\nabla_\alpha^{(g,\omega)}\omega_\mu + \omega_\mu\nabla_\alpha^{(g,\omega)}\omega^\mu.$$

Na seção seguinte, apresentaremos a variedade de Weyl integrável que é um caso particular da variedade de Weyl, onde o campo de Weyl ω_α é o gradiente de um campo escalar. A variedade de Weyl integrável tem diversas propriedades que a tornam adequada para representar o espaço-tempo e ser considerada como um campo gravitacional em uma teoria da gravitação que generalize a teoria da Relatividade Geral de Einstein.

A.2. Variedade de Weyl Integrável

Até aqui o nosso estudo foi sobre a variedade de Weyl que fora apresentada por Weyl em 1918 como uma tentativa de unificar a gravitação com o eletromagnetismo[6] , porém a variedade proposta por Weyl não é compatível com algumas propriedades da natureza, como foi observado por Albert Einstein. A objeção de Einstein era a seguinte, sabemos que a magnitude do vetor muda quando transportado paralelamente de um ponto ao outro na variedade de Weyl de acordo com a eqs.(A.1.17) . Einstein observou que o espaçamento das linhas atômicas irá depender de sua história passada e estão sujeitos a alterações. Sendo que a partir de dados espectroscópicos (como prediz a mecânica quântica), os espectros dos átomos só dependem de sua natureza e não de sua história passada. Este problema levantado por Einstein é conhecido como o segundo efeito do relógio (second clock effect) [15].

A objeção de Einstein resulta da aplicação da hipótese do relógio da Relatividade Geral em um espaço-tempo de Weyl integrável , pois associa o tempo próprio com o intervalo espaço-tempo ao longo do movimento da partícula. Nesse caso, em um espaço-tempo de Weyl integrável onde o campo de Weyl é dado pelo gradiente de um campo escalar $\omega_\lambda = \partial_\lambda \psi$, a variação do tique-taque do relógio é dado por

$$\tau_b = \tau_a e^{\frac{1}{2} \int_a^b d\psi} = \tau_a e^{\frac{1}{2} [\psi(b) - \psi(a)]}, \quad (\text{A.2.1})$$

onde τ_a é o tique-taque no ponto inicial a e τ_b é o tique-taque no ponto final b . Portanto, o tique-taque de um relógio permanece o mesmo após ele ser transportado paralelamente em um percurso fechado. Além disso, para que a condição de um vetor ser tipo-tempo, tipo-nulo ou tipo-espaço seja preservada por transporte paralelo é necessário que $e^{[\psi(b) - \psi(a)]} > 0$, onde $\psi(b)$ é o valor do campo escalar no ponto final e $\psi(a)$ é o valor do campo escalar de Weyl no ponto inicial do percurso.

Assim, para que este problema seja eliminado, faz-se necessário impor que o campo de Weyl ω_λ seja integrável, isto é, seja o gradiente de um campo escalar ψ , que chamaremos de campo escalar de Weyl. Então, nessa nova estrutura o comprimento dos vetores é integrável ao longo de um circuito fechado e a parte antissimétrica do tensor de Ricci é identicamente nula, como podemos observar a partir das eqs.(A.1.49), pois a quantidade

$H_{\nu\beta}$ dada pelas eqs.(A.1.37) torna-se nula. Portanto, no caso particular da variedade de Weyl integrável não existe o “Second clock effect” [8, 9, 10, 11]. Assim, o campo de Weyl na variedade de Weyl integrável é definido por

$$\omega_\lambda = \partial_\lambda \psi = \nabla_\lambda^{(g,0)} \psi. \quad (\text{A.2.2})$$

Em uma variedade de Weyl integrável a equação eqs.(A.1.37) pode ficar como

$$H_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha^{(g,\psi)} \omega_\beta - \nabla_\beta^{(g,\psi)} \omega_\alpha = \nabla_\alpha^{(g,\psi)} \partial_\beta \psi - \nabla_\beta^{(g,\psi)} \partial_\alpha \psi$$

$$H_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} (\partial_\beta \partial^\beta \psi) - g_{\alpha\beta} (\partial_\beta \partial^\beta \psi) = 0, \quad (\text{A.2.3})$$

assim, para as equações eqs.(A.1.38) teremos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{(g,\psi)} + R_{\nu\mu\alpha\beta}^{(g,\psi)} = H_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = 0,$$

isto é, o tensor de curvatura é antissimétrico no primeiro par de índices

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{(g,\psi)} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}^{(g,\psi)}, \quad (\text{A.2.4})$$

e ainda para a parte antissimétrico do tensor de Ricci temos que

$$H_{\nu\beta} = R_{[\nu\beta]}^{(g,\psi)} = 0, \quad (\text{A.2.5})$$

logo o tensor de Ricci é simétrico, e ainda obtemos que não ocorrerá nenhuma variação do comprimento de um vetor considerando que

$$\delta (l^2) = l^2 H_{\alpha\beta} \delta S^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.2.6})$$

E para finalizar, obtemos que em uma variedade de Weyl integrável o tensor de Ricci é dado por

$$R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = R^{(g,0)}_{\mu\nu} - \left(\psi_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi \right) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi - \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi), \quad (\text{A.2.7})$$

e que o escalar de curvatura por

$$R^{(g,\psi)} = R^{(g,0)} - 3 \square^{(g,0)} \psi - \frac{3}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi, \quad (\text{A.2.8})$$

onde $\square^{(g,0)} = g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)}$ é o d'Alambertiano calculado apenas com os símbolos de Christoffel. Esse resultado é de extrema importância para nós, pois ela entrará na construção de nossa ação para o campo gravitacional em uma variedade de Weyl integrável, o que nos permitirá encontrar as equações de campo.

Finalizamos aqui o estudo sobre a variedade de Weyl integrável, que é de profunda importância para entender a estrutura geométrica que está por detrás da teoria da gravitação formulada nesta dissertação.

B. Equações do Campo Gravitacional em um Espaço-tempo de Weyl Integrável

Neste apêndice, obtemos as equações do campo gravitacional para o vácuo em um espaço-tempo de Weyl integrável, obtidas a partir de um princípio variacional que corresponde a uma generalização das equações de Einstein da Relatividade Geral. Tanto a ação quanto as equações de campo são invariantes sob transformações de Weyl e têm um significado geométrico correspondente. A invariância sob transformações de Weyl corresponde a uma invariância de gauge que explica o fato das equações de campo para o escalar de Weyl não serem independentes das equações de campo para a métrica.

B.1. Ação para o Campo Gravitacional

Nesta seção, apresentaremos as equações que descrevem o campo gravitacional em uma variedade de Weyl integrável a partir de um princípio variacional na ausência de matéria. A ação para o campo gravitacional é dada por

$$S = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} R^{(g,\psi)} d^4x, \quad (\text{B.1.1})$$

onde o campo escalar de Weyl é dado por

$$\omega_\lambda = \kappa \partial_\lambda \psi \quad (\kappa = \pm 1), \quad (\text{B.1.2})$$

a constante κ foi introduzida para verificar a influência do sinal do campo escalar de Weyl nas equações de campo. Essa ação tem uma importante propriedade, ela é invariante sob as transformações de Weyl dadas pelas eqs. (A.1.3). Deste modo, tiramos a conclusão que o campo gravitacional não será determinado somente pela métrica $g_{\mu\nu}$, mas o campo escalar de Weyl ψ também desempenhará um papel fundamental na descrição do campo

gravitacional, consequentemente as equações oriundas da ação terão a presença da métrica $g_{\mu\nu}$ e do campo escalar de Weyl ψ .

A partir das equações eqs.(B.1.1) e eqs.(A.2.8) obtemos que

$$S = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} (R^{(g,0)} - 3\kappa \square^{(g,0)} \psi - \frac{3}{2} \kappa^2 \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi) d^4x, \quad (\text{B.1.3})$$

mas de uma diferenciação

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial^\mu \psi) &= \partial_\mu (\sqrt{-g} e^{\kappa\psi}) \partial^\mu \psi + \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial_\mu \partial^\mu \psi \\ \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \square^{(g,0)} \psi &= \partial_\mu (\sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial^\mu \psi) - \kappa \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi, \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

levando-se as equações eqs.(B.1.4) à eqs.(B.1.3) e antes considerando em conta que

$$\int_V \partial_\mu (\sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial^\mu \psi) d^4x = \oint_s (\sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial^\mu \psi) dS_\mu = 0,$$

a ação ficará

$$S = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \left(R^{(g,0)} + \frac{3}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right) d^4x, \quad (\text{B.1.5})$$

podemos observar na equação acima que o sinal do campo escalar de Weyl interfere apenas na parte da exponencial. Fazendo $\kappa = 1$, obtemos que a ação para o campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável pode ser decomposta de acordo com

$$S = \int \sqrt{-g} e^\psi \left(R^{(g,0)} + \frac{3}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right) d^4x, \quad (\text{B.1.6})$$

onde a primeira parcela é dada pelo escalar de curvatura $R^{(g,0)}$ calculado com os símbolos de Christoffel e a segunda parcela é apenas a parte cinética do campo escalar ψ . Observamos que ação dada pela eqs.(B.1.6) é bem conhecida na literatura [27, 32, 33, 34, 35], porém no contexto da teoria da Relatividade Geral onde o espaço-tempo é pseudo-Riemanniano e o campo escalar de Weyl ψ não está associado à estrutura geométrica do espaço-tempo. No contexto da Relatividade Geral a ação é interpretada como um campo escalar ψ acoplando não-minimamente com a métrica $g_{\mu\nu}$ de maneira invariante

por transformações conformes da métrica. Entretanto, o campo escalar de Weyl ψ tem um significado geométrico em um espaço-tempo de Weyl integrável, pois juntamente com a métrica $g_{\mu\nu}$, determina univocamente a conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$ que, por sua vez, determina as propriedades das curvas auto-paralelas e da curvatura da variedade de Weyl. Portanto, embora a ação presente nas referências [27, 32, 33, 34, 35] seja formalmente idêntica a ação dada pela eqs.(B.1.6), possuindo a mesma forma matemática, podemos afirmar que seus significados físicos e geométricos são bastante diferentes. Como veremos a seguir, no espaço-tempo de Weyl integrável não só a ação dada pela eqs.(B.1.6) tem um significado geométrico como também as equações de campo obtidas a partir da mesma, ao contrário do que ocorre no contexto do espaço-tempo pseudo-Riemanniano da Relatividade Geral.

B.2. Equações do Campo Gravitacional

Nesta seção, as equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável serão obtidas considerando uma teoria gravitacional formulada a partir da ação dada pela eq.(B.1.6). E como sabemos desde a mecânica clássica, que as equações de movimento podem ser obtidas do princípio variacional, então temos que

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \left(R^{(g,0)} + \frac{3}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right) d^4x = 0 \\ \delta S &= \int \delta \left(\sqrt{-g} e^{\kappa\psi} R^{(g,0)} \right) d^4x + \frac{3}{2} \kappa^2 \int \delta \left(\sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right) d^4x = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

como podemos perceber acima, teremos equações de campo que serão construídas em função do campo escalar de Weyl ψ e do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, logo iremos fazer variações da ação em relação ao campo de Weyl e em relação ao tensor métrico. Primeiramente com a variação do campo escalar de Weyl ψ , logo eq.(B.2.1) ficará

$$\delta S = \int \sqrt{-g} R^{(g,0)} \delta (e^{\kappa\psi}) d^4x + \frac{3}{2} \kappa^2 \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (e^{\kappa\psi} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi) d^4x = 0, \quad (\text{B.2.2})$$

da primeira parte da integral

$$\int \sqrt{-g} R^{(g,0)} \delta e^{\kappa\psi} d^4x = \kappa \int \sqrt{-g} R^{(g,0)} e^{\kappa\psi} \delta\psi d^4x, \quad (\text{B.2.3})$$

e da segunda parte da integral da ação eq.(B.2.2)

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (e^{\kappa\psi} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi) d^4x = - \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} (\kappa \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + 2 \partial_\mu \partial_\nu \psi) \delta\psi d^4x, \quad (\text{B.2.4})$$

assim eq.(B.2.2) fica

$$\int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \left[\kappa R^{(g,0)} - \frac{3}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} (\kappa \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + 2 \partial_\mu \partial_\nu \psi) \right] \delta\psi d^4x = 0,$$

deste modo que

$$e^{\kappa\psi} \left[\kappa R^{(g,0)} - \frac{3}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} (\kappa \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + 2 \partial_\mu \partial_\nu \psi) \right] = 0,$$

e

$$\kappa R^{(g,0)} - \frac{3}{2} \kappa^2 g^{\mu\nu} (\kappa \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + 2 \partial_\mu \partial_\nu \psi) = 0.$$

Podemos observar, na equação acima, que o sinal do campo de Weyl ψ dado pela constante $\kappa = \pm 1$ influi apenas na parcela linear no campo ψ . Escolhendo $\kappa = 1$, obtemos que a equação de campo para o campo escalar de Weyl ψ é dada por

$$R^{(g,0)} - \frac{3}{2} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + 2 \square^{(g,0)} \psi) = 0, \quad (\text{B.2.5})$$

essa mesma equação também é obtida nas referências [27, 32, 33, 34, 35]. Entretanto, apenas na variedade de Weyl integrável ela pode ser interpretada geometricamente. Podemos observar que, de acordo com a eq.(A.2.8), a equação de campo para o campo escalar de Weyl ψ significa simplesmente que o escalar de curvatura da variedade de Weyl integrável $R^{(g,\psi)}$ deve ser identicamente nulo, isto é,

$$R^{(g,\psi)} = R^{(g,0)} - \frac{3}{2} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + 2 \square^{(g,0)} \psi) = 0, \quad (\text{B.2.6})$$

prossequindo na obtenção das equações de campo, faremos agora a variação da ação com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$ para encontrar as equações de campo para o tensor métrico, assim a partir da ação dada pela eq.(B.1.5) obtemos que

$$\delta S = \int e^{\kappa\psi} \delta (\sqrt{-g} R_{\mu\nu}^{(g,0)}) d^4x + \frac{3}{2} \kappa^2 \int e^{\kappa\psi} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = 0, \quad (\text{B.2.7})$$

da primeira integral da ação acima

$$\begin{aligned} \int e^{\kappa\psi} \delta (\sqrt{-g} R^{(g,0)}) d^4x &= \int e^{\kappa\psi} \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(g,0)}) d^4x \\ \int e^{\kappa\psi} \delta (\sqrt{-g} R^{(g,0)}) d^4x &= \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} G_{\mu\nu}^{(g,0)} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}^{(g,0)} d^4x, \end{aligned} \quad (\text{B.2.8})$$

onde

$$G_{\mu\nu}^{(g,0)} = R_{\mu\nu}^{(g,0)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{(g,0)}, \quad (\text{B.2.9})$$

é o tensor de Einstein definido a partir dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu}$ apenas.

Prossequindo com os cálculos para obter as equações de campo para a métrica, precisamos obter a variação do tensor de Ricci $\delta R_{\mu\nu}^{(g,0)}$. Para tanto, consideramos apenas a variação dos símbolos de Christoffel $\delta \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu}$ que é uma quantidade tensorial, pois representa a diferença entre duas conexões $\Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu}$. Para simplificar os cálculos, vamos escolher um referencial onde os símbolos de Christoffel são nulos $\Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} = 0$. Observamos que embora $\Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} = 0$, a sua variação é não-nula $\delta \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} \neq 0$. Consequentemente podemos escrever a variação do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}^{(g,0)}$ da seguinte forma

$$\delta R_{\mu\nu}^{(g,0)} = \delta \left(\partial_\alpha \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{(g,0)\beta}_{\mu\beta} \right),$$

assim a segunda integral da equação eq.(B.2.8) fica

$$\int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \delta R^{(g,0)}_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \delta \left(\partial_\alpha \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{(g,0)\beta}_{\mu\beta} \right) d^4x$$

$$\int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \delta R^{(g,0)}_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial_\alpha \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{(g,0)\beta}_{\mu\beta} \right) d^4x$$

$$\int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \delta R^{(g,0)}_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial_\alpha S^\alpha d^4x, \quad (\text{B.2.10})$$

onde

$$S^\alpha = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{(g,0)\beta}_{\mu\beta}, \quad (\text{B.2.11})$$

levando-se em conta a seguinte derivação

$$\partial_\alpha (e^{\kappa\psi} S^\alpha) = \partial_\alpha (e^{\kappa\psi}) S^\alpha + e^{\kappa\psi} \partial_\alpha S^\alpha$$

$$e^{\kappa\psi} \partial_\alpha S^\alpha = -\kappa e^{\kappa\psi} \partial_\alpha \psi S^\alpha, \quad (\text{B.2.12})$$

sendo que consideramos que

$$\int_v \partial_\alpha (e^{\kappa\psi} S^\alpha) d^4x = \oint_s (e^{\kappa\psi} S^\alpha) dS_\alpha = 0,$$

logo a equação eq.(B.2.10) ficará

$$\int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} g^{\mu\nu} \delta R^{(g,0)}_{\mu\nu} d^4x = -\kappa \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} \partial_\alpha \psi S^\alpha d^4x. \quad (\text{B.2.13})$$

Uma vez que podemos escrever

$$\delta \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(\nabla_\mu^{(g,0)} \delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu^{(g,0)} \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho^{(g,0)} \delta g_{\mu\nu} \right),$$

podemos deixar o S^α como

$$S^\alpha = \nabla^{(g,0)\alpha} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\beta}^{(g,0)} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (\text{B.2.14})$$

levando a equação eq.(B.2.14) à equação eq.(B.2.10), e em seguida pegando o resultado dessa substituição e levando à equação eq.(B.2.8), resultará

$$\int e^{\kappa\psi} \delta (\sqrt{-g} R^{(g,0)}) d^4x = \int \sqrt{-g} e^{\kappa\psi} [G^{(g,0)}_{\mu\nu} + \kappa^2 (g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi - \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi) +$$

$$\kappa (g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi - \nabla_\nu^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)} \psi)] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{B.2.15})$$

Resolvendo a segunda integral da ação eq.(B.2.7), obteremos

$$\int e^{\kappa\psi} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int e^{\kappa\psi} \sqrt{-g} \left(\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{B.2.16})$$

Assim, finalmente teremos

$$e^{\kappa\psi} \left[G^{(g,0)}_{\mu\nu} - \kappa (\nabla_\nu^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)} \psi - g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi) + \frac{\kappa^2}{2} \left(\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi \right) \right] = 0$$

e

$$G^{(g,0)}_{\mu\nu} - \kappa (\nabla_\nu^{(g,0)} \nabla_\mu^{(g,0)} \psi - g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi) + \frac{\kappa^2}{2} \left(\partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi \right) = 0.$$

Podemos observar, na equação acima, que o sinal do campo de Weyl ψ dado pela constante $\kappa = \pm 1$ influi apenas na parcela linear no campo ψ . Escolhendo $\kappa = 1$ na equação acima, obtemos que as equações de campo para a métrica em um espaço-tempo de Weyl integrável são dadas por

$$G^{(g,0)}_{\mu\nu} - (\nabla^{(g,0)}_{\nu} \nabla^{(g,0)}_{\mu} \psi - g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi) + \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} \psi \partial_{\nu} \psi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi \right) = 0. \quad (\text{B.2.17})$$

Novamente, podemos observar que as equações (B.2.17) acima também foram obtidas nas referências [27, 32, 33, 34, 35] . Entretanto, apenas na variedade de Weyl integrável elas podem ser interpretada geometricamente. Podemos mostrar que as equações campo eqs.(B.2.17), para a métrica em um espaço-tempo de Weyl integrável, significam simplesmente que o tensor de Einstein da variedade de Weyl integrável deve ser identicamente nulo, isto é,

$$G^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{(g,\psi)} = 0. \quad (\text{B.2.18})$$

A partir desses resultados, podemos observar que as equações de campo para o escalar de Weyl eq.(B.2.6) não são independentes das equações de campo para a métrica eqs.(B.2.17), pois o escalar de curvatura $R^{(g,\psi)}$ é obtido a partir do traço do tensor de Einstein $G^{(g,\psi)}_{\mu\nu}$. O fato das equações de campo para o campo escalar não serem independentes das equações de campo para a métrica é conhecido na literatura [27, 32, 33, 34, 35], embora nenhum significado geométrico seja dada para este fato.

Uma propriedade importante das equações do campo gravitacional $(g_{\mu\nu}, \psi)$ no espaço-tempo de Weyl integrável, consiste na invariância das equações eqs.(B.2.6) e eqs.(B.2.17) sob as transformações de Weyl dadas pelas eqs.(A.1.3) . Embora o campo escalar de Weyl ψ corresponda a um grau de liberdade a mais do campo gravitacional, além dos graus de liberdade da métrica $g_{\mu\nu}$, existe uma liberdade de gauge devido à invariância das equações de campo sob as transformações de Weyl que também envolvem um grau de liberdade através da função σ . Portanto, os graus de liberdade do campo gravitacional são determinados pelo conjunto $(g_{\mu\nu}, \psi)$, a menos do grau de liberdade presente nas transformações de Weyl. Isto significa que 1 grau de liberdade do conjunto $(g_{\mu\nu}, \psi)$ pode ser eliminado tanto da métrica $g_{\mu\nu}$ quanto do campo escalar de Weyl ψ . A dinâmica do campo gravitacional envolve ambos os campos $g_{\mu\nu}$ e ψ através das equações de campo dadas em termo do tensor de Einstein $G^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = 0$.

Finalmente, obtemos no espaço-tempo de Weyl integrável uma completa analogia com as equações de Einstein para o vazio, pois substituindo a eq.(B.2.6) nas eqs.(B.2.17), obtemos que as equações para o campo gravitacional na ausência de matéria no espaço-tempo de Weyl integrável são dadas por

$$R^{(g,\psi)}_{\mu\nu} = R^{(g,0)}_{\mu\nu} - \left(\nabla^{(g,0)}_{\nu} \nabla^{(g,0)}_{\mu} \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square^{(g,0)} \psi \right) - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi - \partial_{\mu} \psi \partial_{\nu} \psi) = 0. \quad (\text{B.2.19})$$

Assim, obtivemos um conjunto de equações do campo gravitacional em um espaço-tempo de Weyl integrável que correspondem a uma generalização das equações de Einstein, onde o campo gravitacional é dado simultaneamente pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo campo escalar de Weyl ψ que nos informam como o espaço-tempo deve se encurvar diante da presença da matéria.

C. Geodésicas de Weyl

Neste apêndice faremos uma extensão dos postulados geodésico e do tempo próprio (postulado do Relógio) da Relatividade Geral para a teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável de tal maneira que os resultados obtidos sejam invariantes por transformação de Weyl. Na primeira seção obtemos as geodésicas métricas e as geodésicas de Weyl. Na segunda seção, analisaremos o movimento de partículas e como fica o tempo medido no espaço-tempo de Weyl integrável para essa partícula. E finalmente na última seção, analisamos o movimento de raios de luz em um espaço-tempo de Weyl integrável e como fica a estrutura causal nessa nova variedade.

C.1. Geodésicas Métricas e Geodésicas de Weyl

Nesta seção, obtemos as equações para as geodésicas métricas e para as geodésicas de Weyl em uma variedade de Weyl Integrável, bem como algumas de suas propriedades. Essas curvas são muito importantes para a investigação das propriedades da variedade porque são determinadas pela métrica e pela conexão afim da variedade, respectivamente.

Em uma variedade de Weyl, existem dois tipos de curvas que são determinadas pelas propriedades geométricas da variedade: as curvas geodésicas métricas e as curvas auto-paralelas. Como veremos a seguir, as geodésicas métricas são determinadas completamente pela métrica e as curvas auto-paralelas são determinadas pela conexão de Weyl, que depende tanto da métrica quanto do campo de Weyl.

As curvas geodésicas métricas são as curvas definidas pela seguinte propriedade: o seu comprimento de arco Δs é um extremo. Elas são obtidas a partir de um princípio variacional onde a ação é dada pelo comprimento de arco

$$\Delta s = \int ds = \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda, \quad (\text{C.1.1})$$

onde $dx^\alpha/d\lambda$ é o vetor tangente à geodésica métrica $x^\alpha(\lambda)$ parametrizada com um parâmetro λ qualquer. Desse modo obtemos as famosas equações da geodésica métrica, dadas por

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \{\alpha_{\nu\mu}\} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 0, \quad (\text{C.1.2})$$

onde $\{\alpha_{\nu\mu}\} = \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\alpha g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu})$ são os símbolos de Christoffel e $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ é o elemento de arco da curva. Portanto, de acordo com as eqs.(C.1.2), as geodésicas métricas são curvas que são completamente determinadas apenas pelas propriedades do tensor métrico da variedade de Weyl. Apenas as propriedades métricas da variedade de Weyl estão envolvidas, pois a conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$ não está presente nas equações. Em uma superfície tipo-espaço as geodésicas métricas são as curvas que têm o menor comprimento entre dois pontos da superfície.

As curvas auto-paralelas em uma conexão de Weyl, que denominaremos de geodésicas de Weyl, são curvas $x^\alpha(\lambda)$, onde λ é um parâmetro qualquer, definidas pela seguinte propriedade: o vetor tangente $V = V^\alpha \partial_\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ à curva é transportado paralelamente a si mesmo através da conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu}$. Essa condição requer que a derivada direcional $\frac{DV^\alpha}{d\lambda}$ do vetor tangente ao longo da curva seja proporcional ao vetor tangente. Portanto, as equações das curvas auto-paralelas na variedade de Weyl são dadas por

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = V^\nu \nabla_\nu^{(g,\psi)} V^\alpha = \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = f(x(\lambda)) \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (\text{C.1.3})$$

onde $\nabla_\nu^{(g,\psi)} V^\alpha$ é a derivada covariante do vetor tangente V^α na variedade de Weyl e f é uma dada função escalar definida na variedade. As equações das curvas auto-paralelas acima podem ser simplificadas através de uma reparametrização $\lambda = \lambda(\sigma)$, ficando dadas por

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = V^\nu \nabla_\nu^{(g,\psi)} V^\alpha = \frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0. \quad (\text{C.1.4})$$

onde o vetor tangente fica expresso por $V = W^\alpha \partial_\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ e o novo parâmetro σ é denominado de parâmetro afim. Dizemos que as equações das auto-paralelas dadas na forma (C.1.4) estão parametrizadas por um parâmetro afim, pois são invariantes por uma

mudança de parâmetros dada por uma transformação afim $\sigma' = a\sigma + b$, onde a e b são constantes arbitrárias. Como as curvas auto-paralelas são definidas utilizando o transporte paralelo da variedade de Weyl, de acordo com as eqs.(C.1.4), podemos afirmar que elas são completamente determinadas pela conexão de Weyl $\Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\nu\mu}$ dada pelas eqs.(A.1.7) .

Uma diferença importante entre as geodésicas métricas e as curvas auto-paralelas (geodésicas de Weyl) em uma variedade de Weyl consiste no fato de apenas as geodésicas de Weyl serem invariantes sob transformações de Weyl. As geodésicas métricas não são invariantes sob transformações de Weyl.

No contexto da Relatividade Geral, isto é, nos espaços-tempos pseudo-Riemannianos, as geodésicas métricas coincidem com as curvas auto-paralelas determinadas a partir dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{(g,0)\alpha}_{\mu\nu}$ e parametrizadas pelo comprimento de arco $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, pois existe a igualdade

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \{\alpha_{\nu\mu}\} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^{(g,0)\alpha}_{\nu\mu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\nu}{ds} \nabla_\nu^{(g,0)} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0, \quad (\text{C.1.5})$$

Considerando que o espaço-tempo de Weyl está dotado de uma métrica de Lorentz com assinatura $(-, +, +, +)$ as curvas são classificadas de acordo com seus vetores tangentes em curvas tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-nulo. Essa classificação é invariante tanto por transformação de Lorentz locais quanto por transformações de coordenadas. Como veremos a seguir, a classificação também é invariante sob transformações de Weyl.

Agora veremos como essas curvas são utilizadas para representar o movimento de partículas com massa e sem massa na Teoria da Relatividade Geral.

C.2. Princípio variacional para as Geodésicas de Weyl

Nesta seção, mostramos que as geodésicas de Weyl podem ser obtidas a partir de um princípio variacional em um espaço-tempo de Weyl integrável. Esse resultado generaliza os resultados referentes ao movimento de partículas de teste na Relatividade Geral.

Na teoria da Relatividade Geral o movimento de partículas de teste massivas ocorre ao longo de geodésicas métricas tipo-tempo, onde o tempo próprio medido no referencial de

repouso da partícula coincide com o comprimento de arco da geodésica. Intuitivamente, podemos considerar que a medida que a partícula percorre sua linha de universo o relógio no referencial de repouso da partícula vai medindo o tempo próprio e isto nos permite supor que ambos sejam proporcionais. A partir dessa hipótese, podemos concluir que a linha de universo da partícula pode ser determinada como aquela em que o tempo próprio é um extremo e assim obter as equações do movimento como curvas geodésicas tipo-tempo a partir de um princípio variacional.

As curvas geodésicas de Weyl podem ser caracterizadas como as curvas definidas pela seguinte propriedade: são curvas onde a quantidade escalar $\Delta\tau$ é um extremo, sendo $\Delta\tau$ definido por

$$\Delta\tau = \int d\tau = \int \sqrt{-e^\psi g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda, \quad (\text{C.2.1})$$

onde $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ é o vetor tangente à geodésica de Weyl $x^\alpha(\lambda)$ parametrizada com um parâmetro afim λ . Portanto, podemos obter as equações para uma geodésica de Weyl, isto é, uma curva auto-paralela em uma variedade diferenciável de Weyl integrável, a partir de um princípio variacional da ação definida pela eq.(C.2.1). Considerando que a Lagrangiana para a ação acima é dada por

$$L = \sqrt{F} = \sqrt{-e^\psi g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}, \quad (\text{C.2.2})$$

onde $F = -e^\psi g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$. A partir dessa lagrangiana podemos obter as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \right] = 0, \quad (\text{C.2.3})$$

para a geodésica de Weyl. Utilizando a Lagrangeana acima obtemos que

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{2\sqrt{F}} \partial_\mu (e^\psi g_{\alpha\beta}), \quad (\text{C.2.4})$$

semelhantemente, a segunda parte da equação (C.2.3) pode ser obtida de acordo com

$$\frac{\partial L_p}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} = \frac{e^\psi g_{\alpha\beta}}{2\sqrt{F}} \left[\frac{\partial}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \right]$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} = \frac{e^\psi g_{\alpha\mu}}{\sqrt{F}} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (\text{C.2.5})$$

Agora, diferenciando a equação acima em relação ao parâmetro afim λ obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \right] &= \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{e^\psi g_{\alpha\mu}}{\sqrt{F}} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right] \\ \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \right] &= \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{d}{d\lambda} \left[e^\psi g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right] + e^\psi g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

considerando que F é uma constante do movimento, temos

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right) = 0, \quad (\text{C.2.7})$$

e podemos deixar a equação eq.(C.2.6) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \right] &= \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{d}{d\lambda} \left[e^\psi g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right] \\ \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} \right] &= \frac{1}{2\sqrt{F}} \left[\partial_\beta (e^\psi g_{\alpha\mu}) + \partial_\alpha (e^\psi g_{\beta\mu}) \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{\sqrt{F}} e^\psi g_{\alpha\mu} \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.8})$$

Levando a equação eq.(C.2.5) e a equação eq. (C.2.8) para a Equação de Euler-Lagrange, virá

$$\frac{\delta_\mu^\nu}{2} \left[\partial_\beta (e^\psi g_{\alpha\mu}) + \partial_\alpha (e^\psi g_{\beta\mu}) - \partial_\nu (e^\psi g_{\alpha\beta}) \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + e^\psi g_{\alpha\mu} \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = 0, \quad (\text{C.2.9})$$

levando-se em conta $\delta_\mu^\nu = g_{\mu\rho} g^{\rho\nu}$, e em seguida multiplicando por $g^{\mu\rho}$

$$\frac{g^{\nu\rho}}{2} \left[\partial_\beta (e^\psi g_{\alpha\mu}) + \partial_\alpha (e^\psi g_{\beta\mu}) - \partial_\nu (e^\psi g_{\alpha\beta}) \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + e^\psi \frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} = 0, \quad (\text{C.2.10})$$

mas

$$\partial_\beta (e^\psi g_{\alpha\nu}) = e^\psi (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\nu} \psi_\beta) \quad (\text{C.2.11})$$

$$\partial_\alpha (e^\psi g_{\beta\mu}) = e^\psi (\partial_\alpha g_{\beta\mu} + g_{\beta\mu} \psi_\alpha) \quad (\text{C.2.12})$$

e

$$\partial_\nu (e^\psi g_{\alpha\beta}) = e^\psi (\partial_\nu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \psi_\nu), \quad (\text{C.2.13})$$

vamos obter para a equação eq.(C.2.9)

$$\left[\frac{g^{\rho\nu}}{2} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) + g^{\rho\nu} (g_{\alpha\nu} \psi_\beta + g_{\beta\mu} \psi_\alpha - g_{\alpha\beta} \psi_\nu) \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} = 0, \quad (\text{C.2.14})$$

mas das equações eq.(A.1.8) e eq.(A.1.9) podemos deixar eq.(C.2.14) da seguinte forma

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma^{(g,\psi)\rho}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (\text{C.2.15})$$

Para finalizar, vamos mostrar que o campo escalar de Weyl ψ compensa a variação da norma do vetor tangente $V^\alpha = \dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ de uma geodésica de Weyl, parametrizada com um parâmetro afim λ , de modo que a quantidade

$$F = -e^\psi g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (\text{C.2.16})$$

é uma constante do movimento. A variação da quantidade F ao longo da geodésica de Weyl é dada por

$$\frac{d}{d\lambda} F = \frac{d}{d\lambda} (-e^\psi g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-e^\psi g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu) V^\alpha,$$

e pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\lambda} F = -e^\psi \left[\psi_\rho V^\rho g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + (\partial_\rho g_{\mu\nu}) V^\rho V^\nu V^\mu + g_{\mu\nu} (-\Gamma^{(g,\psi)\mu}_{\rho\varrho} V^\rho V^\varrho) V^\nu + g_{\mu\nu} (-\Gamma^{(g,\psi)\nu}_{\rho\varrho} V^\rho V^\varrho) V^\mu \right] \quad (\text{C.2.17})$$

considerando que

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{d\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\lambda}$$

e que

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^{(g,\psi)\mu}_{\rho\varrho} V^\rho V^\varrho,$$

de acordo com as equações da geodésica de Weyl com o parâmetro afim. Finalmente, fatorando as eqs.(C.2.17) podemos expressá-las de acordo com

$$\frac{d}{d\lambda} F = -e^\psi \left[g_{\mu\nu} \psi_\rho + \partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\rho\alpha} \Gamma^{(g,\psi)\alpha}_{\mu\nu} - g_{\sigma\rho} \Gamma^{(g,\psi)\sigma}_{\mu\nu} \right] V^\mu V^\nu V^\rho = -e^\psi (\nabla_\rho^{(g,\psi)} g_{\mu\nu} + \psi_\rho g_{\mu\nu}) V^\mu V^\nu V^\rho, \quad (\text{C.2.18})$$

como temos que

$$\nabla_\rho^{(g,\psi)} g_{\mu\nu} = -\psi_\rho g_{\mu\nu},$$

então da equação acima resulta que

$$\frac{d}{d\lambda} F = 0, \quad (\text{C.2.19})$$

e consequentemente, a quantidade K também é uma constante do movimento. Esses resultados são bastante importantes, pois permitem generalizar os postulados da geodésica e do relógio utilizados na Relatividade Geral para determinar o movimento de uma partícula de teste.

C.3. Correspondência entre Geodésicas Métricas Tipo-Nulo e Geodésicas de Weyl Tipo-Nulo

Nesta seção mostramos que as geodésicas métricas tipo-nulo e as geodésicas de Weyl tipo-nulo em um espaço-tempo de Weyl integrável diferem apenas por uma reparametrização. Portanto, as geodésicas métricas e as geodésicas de Weyl coincidem quando são

do tipo-nulo e determinam uma única curva no espaço-tempo de Weyl integrável, a qual é determinada apenas pelas propriedades da métrica do espaço-tempo.

Este resultado tem um significado importante do ponto de vista da teoria da gravitação, considerando que as geodésicas tipo-nulo são as linhas de universo dos raios de luz.

Considere uma geodésica de Weyl tipo-nulo em uma variedade de Weyl integrável definida pela curva $x^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro afim, cujo vetor tangente $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ tem norma dada por

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (\text{C.3.1})$$

e cujas equações são dadas por

$$u^\sigma \nabla_\sigma^{(g,\psi)} u^\rho = u^\sigma (\partial_\sigma u^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^{(g,\psi)\rho} u^\mu) = 0.$$

Decompondo a conexão de Weyl de acordo com as eqs.(A.1.8), obtemos que

$$u^\sigma \nabla_\sigma^{(g,\psi)} u^\rho = u^\sigma \nabla_\sigma^{(g,0)} u^\rho + C^\rho_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma. \quad (\text{C.3.2})$$

A partir da definição do tensor $C^\rho_{\sigma\mu}$, dada pelas eqs.(A.1.9), obtemos

$$C^\rho_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma = \frac{1}{2} (u^\rho \psi_\mu u^\mu + u^\rho \psi_\sigma u^\sigma - \psi^\rho g_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma). \quad (\text{C.3.3})$$

e, considerando que para a geodésica de Weyl tipo-nulo temos $g_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma = 0$, podemos escrever a quantidade acima como

$$C^\rho_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma = u^\rho u^\mu \psi_\mu = u^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\psi}{dx^\mu} = u^\rho \frac{d\psi}{d\lambda}. \quad (\text{C.3.4})$$

Substituindo o resultado acima nas eqs.(C.3.2) da geodésica obtemos a seguinte decomposição

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{(g,0)\rho} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = - \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{d\psi}{d\lambda}, \quad (\text{C.3.5})$$

as equações eqs.(C.3.5) acima é a equação geral de uma geodésica métrica.auto-paralela

cujo parâmetro não é afim. Portanto, podemos realizar uma reparametrização $x^\alpha(\lambda(\sigma)) = x^\alpha(\sigma)$ para expressá-la em termos de um parâmetro afim. Substituindo as relações abaixo

$$\frac{dx^\rho}{d\lambda} = \frac{d\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\sigma}, \quad (\text{C.3.6})$$

$$\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2} = \frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} \frac{dx^\rho}{d\sigma} + \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2}, \quad (\text{C.3.7})$$

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{d\sigma}{d\lambda} \frac{d\psi}{d\sigma}, \quad (\text{C.3.8})$$

na equação eq.(C.3.5) , podemos verificar que ela ficará da seguinte forma

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} \frac{dx^\rho}{d\sigma} + \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^{(g,0)\rho}_{\mu\nu} \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = - \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{d\psi}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma},$$

que, depois de reordenar as parcelas, pode ser escrita como

$$\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^{(g,0)\rho}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right) = - \left[\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} + \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{d\psi}{d\sigma} \right] \frac{dx^\rho}{d\sigma}.$$

Finalmente, escolhendo a reparametrização de modo que

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} + \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = 0, \quad (\text{C.3.9})$$

o que nos rende

$$\sigma = \int e^{-\psi} d\lambda, \quad (\text{C.3.10})$$

obtemos as equações da geodésica métrica dadas por

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^{(g,0)\rho}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0.$$

O resultados deste apêndice serão utilizados para definir o movimento de partículas de teste e de raios de luz em uma teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Ehlers, F. A. E. Pirani and A Schild, *The Geometry of Free Fall and Light Propagation in General Relativity, Papers in Honor of J. L. Synge*, Oxford U.P., Oxford(1972). [2](#), [3.5](#)
- [2] Volker Perlick, *Class. Quantum Grav.*, 8, 1369 (1991). [1](#), [2](#), [3.5](#), [4](#)
- [3] J.M. Salim and S.L. Sautú, *Class. Quant. Grav.*,15, 203 (1998). [2](#), [3.5](#)
- [4] Erhard Scholz. *Weyl Geometry in the Late 20TH Century Physics*. [2](#), [3.5](#)
- [5] L.D. Landau e E. Lifschitz, *Teoria do campo*, Hemus, Livraria Editora Ltda. (1974). [2](#), [3.5](#)
- [6] James B. Hartler, *Gravity. An Introduction to Einstein´s General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco (2003). [A.2](#)
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Nova York (1972). [A](#)
- [8] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, 2ª Ed. John Wiley and sons, USA (1988). [A.2](#)
- [9] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*, Addison Wesley, San Francisco(2004). [A.2](#)
- [10] Riccardo March, Giovanni Belletini, Roberto Tauraso and Simone Dell´Agnello. *Constraining spacetime torsion with the Moon and Mercury*.Phys. Rev.D,83,104008(2011). [A.2](#)
- [11] Eddington AS 1922 *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press). [A.2](#)
- [12] Mariusz P. Dabrowski, Januz Garecki and David B. Blaschke, *Conformal Transformations and Conformal Invariance in Gravitation*, Ann. Phys.(Berlin),18, 13(2009).
- [13] Nathalie Deruelle and Misao Sasaki, *Conformal equivalence in classical gravity: the example of “veiled” General Relativity*, Cosmology, Quantum Vacuum and

- Zeta Functions Springer Proceedings in Physics, volume 137, part 2, 247-260, doi: 10.1007/978-3-642-19760-4_23(2011). [3.5](#), [A](#)
- [14] J.D. Barrow and M.P. Dabrowski, Phys. Rev. D 55, 630 (1997). [A.1](#)
 - [15] J.E. Lidsey, D.W. Wands and E.J. Copeland, Phys. Rept. 337,343(2000). [1](#), [A.1](#), [A.2](#)
 - [16] E.J. Copeland, A. Lahiri and D. Wands, Physical Review D 50, 4868 (1994).
 - [17] Salim JM and Sautu SL 1996 Class. Quantum Grav. 13 353. [A](#)
 - [18] Colber G. Oliveira, *Introdução à Formulação de Algumas Teorias do Campo Unitário em II Escola de Cosmologia e Gravitação Vol.1 CBPF-UFPB* (1980). [A](#)
 - [19] M. Blagojevic, *Gravitation and Gauge Symmetries*, Institute of Physics Publishing, Bristol , UK (1999).
 - [20] Guillermo A. T. Gomez e C. Romero, *Geometria de Weyl e Teorias Gravitacionais em Dimensões Extras*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (2008). [A](#)
 - [21] John Miritzis, *Journal of Physics*, 8 ,131 (2005). [1](#)
 - [22] Hermann Weyl, *Space-time-Matter*, Translated from the 4th German edition by H.Brose. London: Methuen. Reprint New York: Dover (1952).
 - [23] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, New York(1958). [1](#)
 - [24] H. Weyl, *Sitzungsber. Press. Akad. Wiss.*, 465(1918). [A](#)
 - [25] H. Weyl, *Gravitation and Electricity*. Sitz. Berichte d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften, 465 (1918).
 - [26] M. Novello , L. A. R. Oliveira , J. M. Salim and E. Elbas 1993 Int. J. Mod. Phys. D 1 N 3-4 641.
 - [27] M. Y. Konstantinov and V. N. Melnikov .Int. J. Mod. Phys. D4 339 (1995). [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [B.1](#), [B.2](#), [B.2](#), [B.2](#)
 - [28] H. P. Oliveira , J. M. Salim and S. L. Sautu .Class. Quantum Grav. 14 2833(1997)
 - [29] N.D.Birell and P.C.W.Davis, *Quantum field theory in curved space*,Cambridge University Press, 1982.
 - [30] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R., *The large-scale structure of space-time*, Cambridge Univ, Press, 1999.

- [31] Adler R, Bazin M and Schiffer M 1975 *Introduction to General Relativity* 2nd edn (New York: MacGraw-Hill).
- [32] Ta-Pei Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology A basic Introduction*, Oxford University Press, New York (2005). [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [B.1](#), [B.2](#), [B.2](#), [B.2](#)
- [33] J.M. Salim, S.L. Sautú and H.P. de Oliveira, *Class. Quant. Grav.*, 14, 2833(1997). [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [B.1](#), [B.2](#), [B.2](#), [B.2](#)
- [34] Tae Y. Moon, Joohan Lee and Phillial Oh, *Conformal Invariance in Einstein-Cartan-Weyl Space*, *Mod.Phys.Lett.A*25:3129-3143(2010). [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [B.1](#), [B.2](#), [B.2](#), [B.2](#)
- [35] Mariusz P. Dabrowski, Tomasz Denkwicz and David B. Blaschke, *The Conformal status of $\omega = -3/2$ Brans-Dicke Cosmology*, *Ann.Phys.*16:237(2007). [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [4.1](#), [B.1](#), [B.2](#), [B.2](#), [B.2](#)
- [36] Jürgen Audretsch and Claus Lämmerzahl, *Establishing The Riemannian Structure of Space-time by Means of Light Rays and Free Matter Waves*, *J. Math. Phys.*,32, 8(1991). [1](#)
- [37] M. Di Mauro, L. Fatibene, M. Ferraris and M. Francaviglia, *Further Extended Theories of Gravitation: Part I*, *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.*7:887-898 (2010). [3](#)
- [38] Israel Quiros, *Transformations of Units and World's Geometry*, arXiv:gr-qc/0004014v3.
- [39] Israel Quiros, *Is the Schwarzschild Black Hole Spurious?*, arXiv:gr-qc/9903041v2. [A](#)
- [40] Abhijit Biswas and Krishnnan R.S. Mani. *Relativistic Perihelion Precession of Orbits of Venus and the Earth*.*Cent. Eur. J. Phys.*6(3).2008. 754-758. [A](#)
- [41] Valerio Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*, Dordrecht etc.: Kluwer(2004).
- [42] Valerio Faraoni, Edgar Gunzig and Paquale Nardoni, *Transformations in Classical Gravitational Theories and in cosmology. Fundamentals in Cosmic Physics* 20.121ff.[arXiv:gr-qc/9811047].