

Lincoanderson Oliveira Dantas

*Quantização de Landau para Partículas  
Neutras em Anéis Quânticos*

João Pessoa - PB

Agosto de 2011

Lincoanderson Oliveira Dantas

*Quantização de Landau para Partículas  
Neutras em Anéis Quânticos*

Orientador:

Claudio Benedito Silva Furtado

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

João Pessoa - PB

Agosto de 2011

**Lincoanderson Oliveira Dantas**

*Quantização de Landau para Partículas Neutras em  
Anéis Quânticos*

Dissertação apresentada à Coordenação de  
Pós-Graduação do Departamento de Física  
da Universidade Federal da Paraíba para a  
obtenção do título de Mestre em Física.

João Pessoa - PB

Agosto de 2011

Dissertação de Mestrado sob o título “Quantização de Landau para Partículas Neutras em Anéis Quânticos” de autoria de Lincoanderson Oliveira Dantas, examinada pela banca examinadora constituída pelos doutores:

---

Profº Drº Claudio Benedito Silva Furtado  
Orientador  
Universidade Federal da Paraíba

---

Profº Drº Fernando Jorge Sampaio Moraes  
Examinador Interno  
Universidade Federal da Paraíba

---

Profº Drº Alexandre Manoel de Moraes Carvalho  
Examinador Externo  
Universidade Estadual de Feira de Santana

Data da Aprovação: \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_ .

João Pessoa

2011

# *Agradecimentos*

No final deste percurso, sinto-me na obrigação de agradecer a todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica, em particular ao Professor Claudio Furtado, que tem sido meu orientador desde os meus primeiros passos na Iniciação Científica, a quem sou grato pelo companheirismo e pela paciência!

Em segundo lugar, agradeço aos professores Pedro Christiano, Maria Luiza, Paulo Sergio, Fernando Moraes, Alexandre Rosas e Carlos Romero, pelos quais tenho apreço e admiração, pois neles vi dedicação e competência no desempenho de suas atividades como educadores e, conseqüentemente, muito aprendi.

Agradeço aos secretários da Graduação e da Pós-graduação, Virgínia Lúcia e Danilo Menezes, pela resolução de todas as burocracias por trás da nossa formação.

Nazaré, não esqueci de você, saiba que a considero, uma amiga e não apenas uma funcionária do Departamento, obrigado pela amizade e pelas impressões!

Já que falei em amizade, não posso esquecer dos amigos: Geilson, Erms, Jamilton, Adriano, Evandro, Jonas e José Fernando. Saibam que de alguma forma vocês contribuíram para a produção deste trabalho.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

# *Resumo*

Neste trabalho, mostramos que uma quantização típica de Landau é possível para partículas neutras em anéis quânticos bidimensionais. Para tanto, utilizamos o modelo de Tan e Inkson para descrever o potencial de confinamento e como partículas neutras, utilizamos átomos neutros com momento de dipolo elétrico induzido. Procedemos os cálculos utilizando duas configurações de campos diferentes para induzir o momento de dipolo sobre a partícula. Também fizemos uma revisão de fases topológicas e de quantização de Landau para partículas neutras e carregadas.

# *Abstract*

In this work, we shall show that a Landau quantization analog is possible for neutral particles in two-dimensional quantum rings. For that we have used the Tan Inkson model for a quantum ring to confine neutral atoms in the ring. We have also used two different fields configurations to induce a electric dipole moment on the particle. In addition, we have made a review of some quantum effects, such that Aharonov-Bohm like effects and Landau quantization for neutral and charged particles.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 8
<b>2</b>	<b>Fases Topológicas</b>	p. 10
2.1	Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	p. 10
2.2	Efeito Aharonov-Casher . . . . .	p. 12
2.3	Efeito He-McKellar-Wilkens . . . . .	p. 16
2.4	Transformações de Dualidade e Efeito Aharonov-Bohm Dual . . . . .	p. 18
<b>3</b>	<b>Quantização de Landau para Partículas Neutras</b>	p. 21
3.1	Quantização de Landau . . . . .	p. 21
3.2	Quantização de Landau para o Dipolo Magnético . . . . .	p. 24
3.3	Quantização de Landau para o Dipolo Elétrico . . . . .	p. 26
3.4	Quantização de Landau para o Dipolo Elétrico Induzido . . . . .	p. 29
<b>4</b>	<b>Quantização de Landau para Partículas Neutras Confinadas em Anéis Quânticos</b>	p. 33
4.1	Modelo de Tan-Inkson . . . . .	p. 33
4.2	Partículas Neutras em Anéis Quânticos . . . . .	p. 37
4.2.1	Dipolo Induzido Confinado - Configuração de Wei . . . . .	p. 38
4.2.2	Dipolo Induzido Confinado - Configuração de Ribeiro . . . . .	p. 40
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	p. 43
	<b>Apêndice A</b>	p. 45

A.1	Limites Assintóticos para a Equação Radial . . . . .	p. 45
A.2	Função Hipergeométrica Confluente . . . . .	p. 46
A.2.1	Integral Envolvendo a Função Hipergeométrica Confluente . . . . .	p. 46
A.2.2	Normalização . . . . .	p. 47
	<b>Referências</b>	p. 49

# 1 *Introdução*

A mecânica quântica é sem sombra de dúvidas uma teoria muito intrigantemente bem sucedida. Uma forma de comprovar o seu sucesso é olhar o mundo em nossa volta e ver o quão rápido os avanços tecnológicos acontecem, avanços esses que não seriam possíveis sem o entendimento do mundo quântico.

O objetivo deste trabalho é fazer uma revisão de alguns fenômenos muito importantes no domínio da mecânica quântica, tais como fases topológicas e quantização de Landau, e aplicar esses conceitos a um determinado sistema – uma partícula neutra como momento de dipolo elétrico induzido confinada pelo potencial de um anel quântico – obtendo os seus estados de energia assim como as suas funções de onda.

Para tanto, começamos o Capítulo 2 com uma revisão de fases topológicas, onde o carro chefe desses efeitos de interferência quântica é o efeito Aharonov-Bohm.

O efeito Aharonov-Bohm [1] traz consigo uma quebra de paradigma – até então, os potenciais eletromagnéticos eram visto como meros artifícios matemáticos, mas em um trabalho seminal de 1959, Aharonov e Bohm demonstraram que tanto potencial escalar quanto o potencial vetor magnético têm um significado físico do ponto de vista quântico.

Ainda no Capítulo 2, damos continuidade ao estudo de fases topológicas (e geométricas), fazendo uma descrição dos efeitos Aharonov-Casher [2] e He-McKellar-Wilkens [10, 24], os quais prevêem a interação de partículas neutras com campos eletromagnéticos. Uma quarta fase topológica é obtida via transformações de dualidade de Heaviside.

No Capítulo 3, nos dedicamos ao estudo da quantização de Landau. Talvez a teoria de Landau [12] seja o caso mais simples e elegante para exemplificar as hipóteses de quantização. Quando um elétron se move em um campo magnético uniforme, ele descreve órbitas circulares. Com o auxílio da mecânica quântica, mostra-se que o elétron só pode estar em órbitas com valores discretos de energia, os chamados níveis de Landau.

O estudo da quantização de Landau se faz necessário, pois é o modelo mínimo necessário para a descrição de diversos fenômenos tais como o efeito Hall quântico [18] e excitações aniônicas em condensados de Bose-Einstein [16].

Motivados por resultados de Paredes *et al.* [15], Ericsson e Sjöqvist [9] deram os primeiros passos em busca de um análogo atômico do efeito Hall quântico. Para tanto, eles mostraram que, baseados na teoria de Aharonov-Casher, uma partícula neutra com momento de dipolo magnético interagindo com um campo elétrico apresenta uma quantização típica de Landau. Inspirados pelo trabalho de Ericsson e Sjöqvist, Ribeiro, Furtado e Nascimento [19, 20] mostraram que um análogo de Landau também é possível para um dipolo elétrico interagindo com um campo magnético.

Em [19], Ribeiro *et al.* utilizaram a configuração de campos proposta por He, McKellar e Wilkens [10, 24]. Nessa configuração, o dipolo elétrico interage com campo magnético criado por uma linha de cargas magnética. Já em [20], eles fizeram uso da configuração de Wei *et al.* [23], a qual utiliza um arranjo de campos magnético e elétrico cruzados para induzir o momento de dipolo elétrico, com a finalidade de evitar a utilização de monopolos magnéticos como em [19].

Terminada a revisão da quantização de Landau para partículas carregadas e átomos neutros, abrimos o Capítulo 4 para apresentar os resultados propostos neste trabalho. Começamos este capítulo com uma revisão do modelo de Tan e Inkson [21]. Feita essa revisão, mostramos que uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido sujeita ao potencial de confinamento de um anel quântico apresenta uma quantização análoga a de Landau. Mostramos que essa quantização é possível para duas configurações de campos distintas.

Finalmente, encerramos este trabalho no Capítulo 5 com as conclusões dos resultados obtidos.

De antemão, ao longo de todo o texto estaremos trabalhando em coordenadas cilíndricas<sup>1</sup> e utilizando o sistema de unidades de Planck onde  $c = \hbar = 1$ .

---

<sup>1</sup>Exceto na seção (3.1), onde fazemos o uso de coordenadas cartesianas.

## 2 *Fases Topológicas*

Neste capítulo, faremos uma descrição do efeito Aharonov-Bohm assim como dos efeitos Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkins. Também faremos um estudo do efeito Aharonov-Bohm dual, que é obtido a partir do efeito Aharonov-Bohm via transformações de dualidade.

### 2.1 Efeito Aharonov-Bohm

Com um trabalho intitulado por *Significance of Electromagnetic Potentials on Quantum Mechanics* [1], Aharonov e Bohm mudaram o entendimento dos potenciais eletromagnéticos. Até então, tais potenciais eram vistos como meros artifícios matemáticos usados para facilitar a obtenção dos campos elétrico e magnético.

O efeito Aharonov-Bohm, como ficou assim conhecido, estabelece que uma partícula carregada adquire uma fase em sua função de onda ao circular um solenóide infinito. Tal efeito é um fenômeno quântico no qual partículas carregadas são afetadas por campos eletromagnéticos, mesmo estando em regiões onde esses campos são nulos, ou seja, em regiões livres de forças.

A primeira verificação experimental do efeito Aharonov-Bohm foi dada em 1960 por Chambers [6]. Pelo fato de ser um efeito de natureza não tão óbvia, muitas dúvidas surgiram envolvendo a real existência desse efeito, mas com um experimento conclusivo de 1986, todas essas dúvidas foram definitivamente sanadas por Tonomura *et al.* [22].

Fazendo uma corrente elétrica passar pelas espiras de um solenóide infinito, centrado na origem e que tem seu eixo alinhado na direção  $z$ , o campo magnético  $\mathbf{B}$  criado fica inteiramente confinado dentro do solenóide.

Embora o campo magnético seja nulo fora do solenóide, o potencial vetor não é – o seu módulo cai com o inverso da distância. Dessa forma, entendemos que o potencial vetor é o responsável pelo efeito Aharonov-Bohm, passando agora a ter um significado físico.

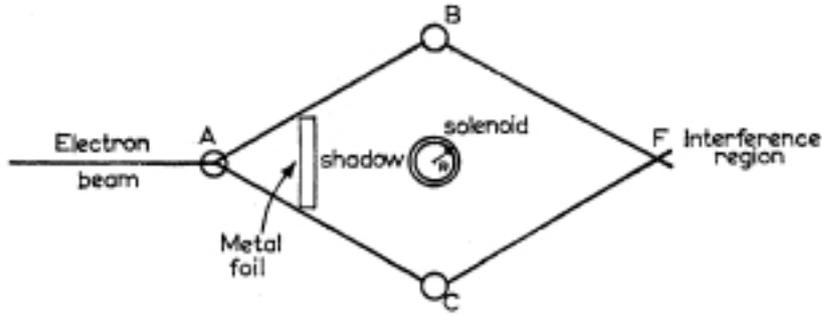


Figura 1: O feixe de elétrons é dividido em A. Um ramo do feixe passa B enquanto o outro passa por C, nas proximidades do solenóide. Finalmente, esses dois feixes são reagrupados e interferem em F.

Para demonstrar os efeitos do potencial vetor sobre a dinâmica quântica de partículas carregadas, consideremos que um feixe de elétrons em coerência de fase seja dividido em duas partes, as quais devem manter ainda esta coerência de fase, e que cada uma delas passe por um lado solenóide. Em seguida, os feixes são reagrupados e postos para interferir [ver figura (1)].

O Hamiltoniano que descreve a dinâmica de um elétron em um campo magnético é dado por

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 . \quad (2.1)$$

Em regiões simplesmente conexas, podemos escrever a solução da equação anterior na seguinte forma:

$$\psi = \psi_0 e^{-iS} , \quad (2.2)$$

onde  $\psi_0$  é a solução quando  $\mathbf{A} = 0$  e  $S = e \int \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ .

Embora a região fora do solenóide seja uma região multiplamente conexa, ainda podemos fazer uso da solução dada na equação anterior, uma vez que a função de onda foi dividida em dois feixes e cada um dele passa por uma região simplesmente conexa.

Sendo assim, temos que:

$$\psi_1 = \psi_1^0 e^{-iS_1} \quad , \quad \psi_2 = \psi_2^0 e^{-iS_2} , \quad (2.3)$$

onde  $S_1$  e  $S_2$  são calculados ao longo de suas respectivas trajetórias.

Desse modo, a diferença de fase que se observa em  $F$  quando os feixes interferem é dada por:

$$\Delta S = S_1 - S_2 = e \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = e\phi_0 , \quad (2.4)$$

onde  $\phi_0$  é o fluxo magnético dentro do solenóide.

Sendo assim, fica evidenciado que quando um elétron circula uma região onde temos um fluxo de campo magnético confinado, a sua função de onda adquire uma fase topológica.

Diz-se que a fase é topológica porque a partícula está em uma região não-simplesmente-conexa, livre de forças e a suas trajetórias circundam uma singularidade do campo. De acordo com Peshkin e Lipkin [17] a fase é topológica se é um efeito não-local, que é o caso do efeito Aharonov-Bohm, uma vez que não temos campos eletromagnéticos atuando ao longo das trajetórias das partículas.

Em conclusão, o efeito previsto por Aharonov Bohm é considerado como um dos alicerces da mecânica quântica moderna. Sem contar as possíveis aplicações experimentais, a revolução conceitual que esse efeito envolve é grandiosa, uma vez que os potenciais eletromagnéticos passaram a ter um significado físico – o potencial vetor, por exemplo, pode alterar a dinâmica quântica de uma partícula carregada fazendo a sua função de onda adquirir uma fase.

Dando continuidade ao estudo de fases quânticas, faremos na próxima seção uma revisão do efeito Aharonov-Casher.

## 2.2 Efeito Aharonov-Casher

Em 1984, Aharonov e Casher [2] sugeriram a existência de um efeito dual ao efeito Aharonov-Bohm. No efeito Aharonov-Casher, uma partícula neutra com momento de dipolo magnético adquire uma fase topológica ao circular uma linha de cargas elétricas.

A fase que a partícula adquire é um fato que ocorre devido ao acoplamento do dipolo magnético da partícula neutra com o campo elétrico produzido pela linha de carga. A comprovação experimental efeito Aharonov-Casher foi dada por Cimmino *et al.* [7].

Em seu artigo, Aharonov e Casher [2] se perguntaram se seria possível obter um efeito tipo Aharonov-Bohm para uma partícula neutra. Para tanto, eles partiram da Lagrangiana para uma partícula carregada na presença de um potencial vetor externo e adicionaram um termo cinético referente à partícula neutra.

Tal tentativa não surtiu efeito, pois não descreve a física necessária para que tenhamos um efeito de fases topológicas – a força sobre a partícula ser diferente de zero.

A Lagrangiana correta que leva a uma força nula sobre a partícula neutra é dada por:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + e\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{V}), \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{V}$  são as velocidades da partícula carregada e do momento de dipolo, respectivamente.

Como podemos notar, temos na equação anterior, além dos termos cinéticos da partícula e do dipolo, uma dependência com a velocidade relativa entre elas, sendo este o detalhe que garante que a partícula neutra esteja em uma região livre de forças.

Vamos agora mostrar como Aharonov e Casher obtiveram a equação (2.5).

Consideremos que a posição da partícula carregada seja descrita pelo vetor  $\mathbf{r}$  e a do dipolo, pelo vetor  $\mathbf{R}$ .

Para uma partícula carregada se movendo na presença de um campo magnético segue que:

$$L_{par} = \frac{mv^2}{2} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.6)$$

onde  $e$  e  $\mathbf{v}$  são respectivamente a carga e a velocidade da partícula e  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  é o potencial vetor associado ao campo magnético produzido pelo dipolo, dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}. \quad (2.7)$$

Agora, para a partícula neutra com momento dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}$  se movendo no campo elétrico produzido pela carga elétrica  $e$ , temos que:

$$L_{dip} = \frac{MV^2}{2} - q\phi, \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{V}$  é a velocidade do dipolo e  $\phi$  é o potencial elétrico associado à carga  $e$ .

A carga  $q$  que aparece na equação anterior surge pelo fato de que um dipolo magnético em movimento gera uma densidade de carga dada por:

$$\rho = \mathbf{V} \cdot \mathbf{j}, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{j} = \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{M}}$ , com  $\boldsymbol{\mathcal{M}}$  sendo a magnetização.

Com isso, a equação (2.8) fica assim:

$$L_{dip} = \frac{MV^2}{2} - \int \rho\phi d\tau. \quad (2.10)$$

Substituindo a (2.9) na equação anterior, temos que:

$$L_{dip} = \frac{MV^2}{2} - \int (\phi \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathcal{M}) d\tau. \quad (2.11)$$

Com o auxílio de identidades matemáticas, segue que:

$$L_{dip} = \frac{MV^2}{2} - \int \phi \mathcal{M} \cdot \nabla \times \mathbf{V} d\tau - \int \mathcal{M} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{E} d\tau + \int \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) \times \mathcal{M} d\tau. \quad (2.12)$$

Lembrando que  $\boldsymbol{\mu} = \int \mathcal{M} d\tau$ , considerando que a partícula tem seu movimento restrito ao plano  $x - y$  e que

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\phi) - \frac{\partial V_r}{\partial \phi} \right] = 0, \quad (2.13)$$

a primeira integral da (2.12) é nula, assim como a última, onde fizemos uso do teorema divergência. Sendo assim, a Lagrangiana para o dipolo fica assim:

$$L_{dip} = \frac{MV^2}{2} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (2.14)$$

Tendo em mente que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R} - \mathbf{r})$  é o campo elétrico produzido pela carga (situada no ponto  $\mathbf{r}$ ) em  $\mathbf{R}$ , e que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  é o potencial vetor produzido pelo dipolo magnético (situado em  $\mathbf{R}$ ) em  $\mathbf{r}$ , temos que:

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{4\pi} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\mu}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} = e\mathbf{A}. \quad (2.15)$$

A equação anterior nos mostra que o potencial vetor é dado em termos do acoplamento do momento de dipolo da partícula neutra com o campo elétrico gerado pela partícula carregada. Desse modo, segue que a Lagrangiana para o dipolo fica assim:

$$L_{dip} = \frac{MV^2}{2} - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}. \quad (2.16)$$

Finalmente, somando as equações (2.6) e (2.16) temos que a interação entre a partícula carregada e o dipolo magnético, obtida por Aharonov e Casher, é descrita por:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + e\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{V}). \quad (2.17)$$

O termo extra  $e\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$  da equação anterior se faz necessário, porque de outra forma o dipolo sentiria uma força dependente do gauge escolhido – situação que não pode ocorrer, pois para que tenhamos um efeito dual ao efeito Aharonov-Bohm a partícula tem que estar em uma região livre de forças.

O que fizemos até aqui foi obter a Lagrangiana que descreve a interação entre duas partículas – uma neutra e outra carregada. Pelo fato de no efeito Aharonov-Casher a partícula neutra interagir com o campo elétrico produzido por uma distribuição linear de cargas, se faz necessário a seguinte generalização da equação (2.17):

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_j M_j V_j^2 + e \sum_{i,j} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_j) , \quad (2.18)$$

onde os somatórios sobre  $i(j)$  são efetuados sobre as partículas carregadas (neutras).

Devemos lembrar que na equação (2.18) o potencial vetor  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_j)$  depende apenas da posição relativa entre as partículas. Essa dependência é o que nos faz pensar em uma certa dualidade entre a partícula neutra e a carregada.

Com base nisso, se considerarmos agora que o dipolo magnético se move nas proximidades de uma distribuição linear de cargas estática, a Lagrangiana que descreve essa interação é dada por:

$$L = \frac{MV^2}{2} - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} , \quad (2.19)$$

onde da equação (2.15) lembramos que  $e\mathbf{A} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}$  e que agora o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é o campo gerado por uma distribuição linear de cargas  $\lambda$ .

Sendo assim, a fase que a partícula neutra com momento de dipolo magnético adquire ao circular uma linha de cargas elétricas perpendicular ao plano de movimento do dipolo é dada por:

$$\Delta S = -e \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu\lambda , \quad (2.20)$$

onde  $\lambda$  é a densidade linear de carga e  $\mu$  é a projeção do momento de dipolo ao longo da linha. Note que o efeito é máximo se o feixe de dipolos tiver a sua polarização orientada ao longo da linha de cargas.

Diferente do efeito Aharonov-Bohm, a fase que o dipolo magnético adquire ao circular a linha de cargas elétricas é uma fase geométrica. Diz-se que uma é fase geométrica se ela é um efeito local. No caso do efeito Aharonov-Bohm a partícula está em uma região livre de campos, ou seja, a interação não ocorre no local onde a partícula se encontra. Em contrapartida, no efeito Aharonov-Casher o campo produzido pela linha de cargas interage localmente com o dipolo magnético, acabando portanto com o caráter topológico da fase.

Em suma, mostramos que quando um dipolo magnético circula uma linha de cargas elétricas, a sua função de onda adquire uma fase geométrica. Na próxima seção faremos uma descrição do efeito He-McKellar-Wilkins.

## 2.3 Efeito He-McKellar-Wilkens

Vimos na secção anterior que a função de onda de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético, a qual descreve uma trajetória fechada em torno de uma linha de cargas elétricas, adquire uma fase topológica.

Considerando por um momento a existência de monopolos magnéticos, poderíamos pensar em uma inversão de papéis e fazer a seguinte pergunta: uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico adquiriria uma fase topológica ao circular uma linha de monopolos magnéticos?

A resposta para a pergunta acima é sim e foi dada, em trabalhos independentes, por He e McKellar [10] e Wilkens [24]. Por esse motivo, tal efeito ficou conhecido como efeito He-McKellar-Wilkens.

Para uma partícula de massa  $m$ , com momento de dipolo elétrico  $\mathbf{d}$  se movendo na presença de um campo eletromagnético, a Lagrangiana que descreve o seu movimento é dada por:

$$L = \frac{1}{2m} \mathbf{v}^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}' , \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{E}'$  é o campo elétrico que a partícula sente em seu referencial de repouso.

Das transformações de Lorentz, sabemos que o campo elétrico  $\mathbf{E}'$  é dado por:

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (2.22)$$

mas como estamos no regime não-relativístico ( $v/c \ll 1$ )  $\gamma$  tende para 1, o que nos permite escrever a seguinte equação:

$$L = \frac{1}{2m} \mathbf{v}^2 + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (2.23)$$

onde o termo  $\mathbf{d} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  é conhecido como interação de Röntgen.

Fazendo uma analogia com a Lagrangiana para um elétron se movendo em um campo eletromagnético, o termo  $e^{-1} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$  faz o papel de potencial escalar e o termo  $e^{-1} (\mathbf{B} \times \mathbf{d})$ , de potencial vetor.

Desse modo, podemos introduzir o seguinte potencial vetor efetivo

$$\mathbf{A}_{HMW} = e^{-1} (\mathbf{B} \times \mathbf{d}) \quad (2.24)$$

como sendo o potencial vetor de He-McKellar-Wilkens.

Sendo assim, a fase associada ao efeito He-McKellar-Wilkins é dada por:

$$\Delta S = e \oint \mathbf{A}_{HMW} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (2.25)$$

O que faz esses efeitos de interferência [1, 2, 10, 24] serem tão interessantes é que as partículas são afetadas quanticamente por um potencial vetor típico mesmo estando em uma região livre de forças.

Sendo assim, vamos agora demonstrar que, para uma determinada configuração entre o campo e o dipolo, a partícula neutra adquire uma fase não-trivial em sua função de onda e que tanto o torque quanto a força sobre ela são nulos.

O torque que a partícula sente é dado por:

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.26)$$

Por sua vez, a força que age sobre ela tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \nabla [\mathbf{d} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] - \frac{d}{dt} (\mathbf{B} \times \mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{v} \times [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{d})] - \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assumindo previamente que  $\dot{\mathbf{d}} = 0$ , como justificaremos a seguir, e que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  não varie ao longo da direção do dipolo, ou seja,  $(\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} = 0$ , a equação anterior assume a forma mais simples:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \times [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{d})]. \quad (2.28)$$

Para que tenhamos o efeito desejado, consideremos uma distribuição linear de cargas magnéticas com densidade  $\lambda_m$  perpendicular ao plano  $x - y$ .

O campo magnético gerado por essa linha de monopolos é:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_m}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.29)$$

Usando o campo magnético da equação anterior e considerando que  $\mathbf{d}$  está orientado na direção  $z$ , segue que:

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{d}) = -\lambda_m \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

ou seja, exceto o no local onde se encontra a linha de cargas magnéticas, a força sobre a partícula neutra é nula. Isso ainda vale mesmo na presença de um campo elétrico  $\mathbf{E}$

homogêneo aplicado paralelamente à linha de monopolos magnéticos. Ele é utilizado para garantir que o dipolo elétrico permaneça alinhado na direção  $z$ .

Uma vez que o movimento da partícula é livre de forças, se o seu movimento começa no plano  $x - y$ , ela nunca sairá desse plano. Sendo assim, o torque sobre a partícula  $(\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}))$  se anula, pois temos que  $\mathbf{v}$  é um vetor do plano e que  $\mathbf{E}$  aponta na direção  $z$ .

Finalmente, fazendo uso das equações (2.25) e (2.29), a fase adquirida pela função de onda da partícula neutra ao circular a linha de monopolos magnéticos é dada por:

$$\Delta S = e \oint \mathbf{A}_{HMW} \cdot d\ell = \oint (\mathbf{B} \times \mathbf{d}) \cdot d\ell = -\lambda_m d. \quad (2.31)$$

Embora a ideia por trás do efeito He-McKellar-Wilkins seja interessante, a sua realização experimental é um inconveniente, uma vez que precisamos fazer uso de monopolos magnéticos.

Para contornar esse problema, Wei *et al.* [23] utilizaram uma partícula neutra, que não possui momento de dipolo elétrico permanente, e uma configuração não-trivial envolvendo um campo elétrico e um campo magnético.

A ideia de Wei *et al.* consiste em induzir sobre a partícula um momento de dipolo elétrico através de um campo elétrico radial gerado por um cilindro carregado e de um campo magnético uniforme aplicado na direção  $z$ . Desse modo, eles conseguiram obter um efeito mais realístico, uma vez que não precisaram lançar mão de um campo magnético radial produzido por uma linha de monopolos magnéticos.

Na próxima secção faremos uma revisão dos efeitos até aqui descritos utilizando conceitos de transformações de dualidade e obteremos, por intermédio dessas transformações, uma nova fase topológica.

f

## 2.4 Transformações de Dualidade e Efeito Aharonov-Bohm Dual

Até aqui fizemos uma descrição dos efeitos Aharonov-Bohm [1], Aharonov-Casher [2] e He-McKellar-Wilkins [10, 24].

No efeito Aharonov-Bohm, a função de onda de um elétron acumula uma fase topológica ao circular uma linha de fluxo magnético produzido por um solenóide. Da equação (2.4), temos que a fase Aharonov-Bohm é:

$$\Delta S_{AB} = e \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = e\phi_0. \quad (2.32)$$

Com base no efeito Aharonov-Bohm, Aharonov e Casher predisseram a existência de um efeito recíproco, no qual uma partícula neutra com momento de dipolo magnético também adquire uma fase topológica, que é dada por [conf. equação (2.20)]:

$$\Delta S_{AC} = \oint (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu\lambda. \quad (2.33)$$

Como acabamos de ver na secção anterior, uma terceira fase topológica foi predita por o He, McKellar e Wilkens, que é o efeito dual ao efeito Aharonov-Casher.

No efeito He-McKellar-Wilkens, um dipolo elétrico adquire uma fase topológica ao circular uma linha de monopolos magnéticos. Para relacionar esse efeito com o seu efeito dual, lançamos mão das seguintes transformações de dualidade:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{E} & \rightarrow & \mathbf{B} & | & \mathbf{B} & \rightarrow & -\mathbf{E} \\ \mathbf{A}_e & \rightarrow & \mathbf{A}_m & | & \mathbf{A}_m & \rightarrow & -\mathbf{A}_e \\ e & \rightarrow & N & | & N & \rightarrow & e \\ \boldsymbol{\mu} & \rightarrow & \mathbf{d} & | & \mathbf{d} & \rightarrow & \boldsymbol{\mu}, \end{array} \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são os campos elétrico e magnético,  $\mathbf{A}_e$  e  $\mathbf{A}_m$  são os potenciais vetores elétrico e magnético,  $e$  e  $N$  são as unidades de cargas positivas elétrica e magnética e  $\mathbf{d}$  e  $\boldsymbol{\mu}$  são os momentos de dipolo elétrico e magnético.

Vale ressaltar que as equações de Maxwell permanecem invariantes sob essas transformações de dualidade.

Sendo assim, utilizando as transformações acima descritas e fazendo as devidas identificações, obtemos, a partir da fase Aharonov-Casher (2.33), a fase He-McKellar-Wilkens:

$$\Delta S_{HMW} = \oint (\mathbf{B} \times \mathbf{d}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\lambda_m d, \quad (2.35)$$

que está de acordo com o resultado obtido por He-McKellar-Wilkens [conf. equação (2.31)].

O sinal negativo na equação anterior surge pelo caráter antisimétrico das transformações de dualidade.

Se o efeito He-McKellar-Wilkens é o efeito dual do efeito Aharonov-Cahser, poderíamos nos perguntar se existe um efeito dual ao efeito Aharonov-Bohm. A pergunta é válida e, de fato, tal efeito existe e é conhecido como efeito Aharonov-Bohm dual [8].

No efeito Aharonov-Bohm dual um monopolo magnético circula uma linha de fluxo elétrico, gerada por um conjunto de dipolos elétricos alinhados.

A fase que o monopolo magnético adquire é obtida aplicando as transformações (2.34) à fase do efeito Aharonov-Bohm (2.4), o que nos permite escrever:

$$\Delta S_{ABD} = -N \oint \mathbf{A}_e \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -N\phi_e, \quad (2.36)$$

onde  $\phi_e$  é o fluxo de campo elétrico.

## 3 *Quantização de Landau para Partículas Neutras*

Neste capítulo, mostraremos que uma quantização típica de Landau é possível para partículas neutras. Vamos mostrar que existe uma configuração de campos adequada que transforma os efeitos de espalhamento discutidos no capítulo anterior em um caso de estados ligados, obtendo o espectro de energia e suas funções de onda via resolução da equação de Schrödinger. Os resultados descritos são todos não-relativísticos.

### 3.1 Quantização de Landau

Sabemos da Física Clássica que quando uma partícula carregada entra em uma região onde temos um campo magnético ela descreve uma órbita circular. Quanticamente, mostramos que essa partícula só pode estar em órbitas que possuem valores discretos de energia, conhecidas como **níveis de Landau** [12]. Os níveis de Landau apresentam uma quantização da energia análoga a do oscilador harmônico, só que com um detalhe, cada nível de Landau é infinitamente degenerado. Em contrapartida, o grau de degenerescência pode vir a ser finito se o movimento elétron estiver restrito a uma área do plano  $x - y$ .

O estudo da quantização de Landau se faz necessário, pois é o ponto de partida para o estudo do efeito Hall quântico [18] e também serve para explicar como propriedades eletrônicas de certos materiais dependem do campo magnético aplicado [11].

Consideremos uma partícula carregada que se move no plano  $x - y$  sob a influência de um campo magnético, uniforme e constante, aplicado perpendicularmente ao plano.

O Hamiltoniano que descreve a dinâmica de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético é dado por:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o operador momento,  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor e  $\phi$  é o potencial escalar. Na equação anterior, estamos desprezando o spin da partícula.

Como sabemos, o potencial vetor  $\mathbf{A}$  associado a um dado campo magnético  $\mathbf{B}$  não é determinado de maneira única – uma vez que o rotacional de um gradiente é sempre zero, o gradiente de um campo escalar pode ser adicionado ao potencial vetor sem alterar o campo magnético  $\mathbf{B}$ , ou seja, a escolha de um gauge específico não altera as propriedades físicas do sistema.

Sendo assim, para que tenhamos um campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , vamos tomar o potencial da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = -By\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.2)$$

Desse modo, a equação de Schrödinger fica assim:

$$\frac{1}{2m} [(p_x + eBy)^2 + p_y^2] \psi = \epsilon\psi. \quad (3.3)$$

Pelo fato de  $x$  não aparecer explicitamente na equação (3.3), o operador  $p_x$  comuta com o Hamiltoniano. Isso nos sugere que a solução tenha a seguinte forma:

$$\psi = e^{ixp_x} \chi(y). \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.4) na equação (3.3), obtemos a seguinte equação para  $\chi(y)$ :

$$\chi'' + 2m \left[ \epsilon - \frac{1}{2} m \omega_B^2 (y - y_0)^2 \right] \chi = 0, \quad (3.5)$$

onde  $y_0 = -\frac{p_x}{eB}$  e  $\omega_B = \frac{|e|B}{m}$ .

Com a seguinte mudança de variáveis  $\xi = (m\omega_B)^{1/2} (y - y_0)$ , a equação (3.5) fica assim:

$$\ddot{\chi} + \left[ \left( \frac{2\epsilon}{\omega_B} - \xi^2 \right) \right] \chi = 0. \quad (3.6)$$

Quando  $\xi \rightarrow \infty$ , podemos desprezar o termo  $\frac{2\epsilon}{\omega_B}$ ; a equação  $\ddot{\chi} = \xi^2 \chi$  tem como solução  $\chi = e^{-\xi^2/2}$ , pois a solução deve ser finita quando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Dessa forma, uma possível solução para a equação (3.6) é:

$$\chi = e^{-\xi^2/2} \phi(\xi). \quad (3.7)$$

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.6), chegamos à seguinte equação para  $\phi(\xi)$ :

$$\ddot{\phi} - 2\xi\dot{\phi} + 2n\phi = 0, \quad (3.8)$$

onde

$$2n = \frac{2\varepsilon}{\omega_B} - 1. \quad (3.9)$$

A equação (3.6) tem como solução os polinômios de Hermite  $H_n(\xi)$ . Dessa forma, a equação (3.7) fica assim:

$$\chi(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_n(\xi). \quad (3.10)$$

Finalmente, usando as equações (3.4) e (3.10), temos que as funções de onda normalizadas da partícula carregada são:

$$\psi_{n,p_x}(x, y) = \frac{1}{\pi^{1/4} \lambda_B^{1/2} (2^n n!)^{1/2}} e^{ixp_x} e^{-(y-y_0)^2/2\lambda_B^2} H_n\left(\frac{y-y_0}{\lambda_B}\right), \quad (3.11)$$

onde

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{1}{m\omega_B}} \quad (3.12)$$

é o comprimento magnético, que dá as dimensões típicas do sistema.

A equação (3.8) só possui soluções para valores inteiros positivos de  $n$ . É daí que vem a quantização da energia. Resolvendo a equação (3.9) para  $\varepsilon$ , segue que:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_B, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Como podemos notar, o espectro de energia da partícula é tipo oscilador harmônico, com a frequência de oscilação sendo a frequência ciclotrônica  $\omega_B$  do caso clássico. Agora, diferente do oscilador harmônico, esse espectro é infinitamente degenerado. Vamos entender porquê. Na equação (3.11) vemos que os auto-estados são rotulados por  $n$  e  $p_x$ . Também podemos notar que a equação (3.13), não depende de  $p_x$ . Como o movimento da partícula não é quantizado na direção  $x$ , segue que  $p_x$  pode variar continuamente de  $-\infty$  até  $+\infty$ . Daí, para um dado valor de  $n$  temos infinitas possibilidades para  $p_x$ , ou seja, uma degenerescência infinita em cada nível de Landau.

Até aqui enfatizamos que os níveis de Landau são infinitamente degenerados, mas se restringirmos o movimento da partícula a uma área finita  $S = L_x L_y$ , o grau de degenerescência se torna finito, onde o número de elétrons por nível de Landau depende do campo magnético aplicado assim:

$$\eta = \frac{eBS}{2\pi}, \quad (3.14)$$

ou seja, a medida que o campo magnético aumenta, mais elétrons podem ser agrupados em um determinado nível de Landau.

## 3.2 Quantização de Landau para o Dipolo Magnético

Paredes *et al.* [15], usando uma analogia entre um condensado de Bose-Einstein, em uma armadilha em rotação, e um sistema de elétrons interagentes em um campo magnético uniforme, provaram existência de excitações aniônicas nesse condensado. Motivados por esse resultado, Ericsson e Sjöqvist [9] deram o primeiro passo para a descrição de um análogo atômico do efeito Hall quântico.

Como dissemos antes, para o entendimento do efeito Hall quântico se faz necessário o estudo da quantização de Landau do sistema em questão. Sendo assim, nos dedicaremos nesta e nas próximas seções ao estudo da quantização de Landau para partículas neutras. Começaremos com a descrição do trabalho de Ericsson e Sjöqvist que, baseados na interação Aharonov-Casher [2], mostraram a existência de um análogo à quantização de Landau para um dipolo magnético.

No limite não-relativístico, o Hamiltoniano que descreve a interação entre um átomo com momento de dipolo magnético e um campo elétrico é dado por [9]:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \mu \mathbf{n} \times \mathbf{E})^2 + \frac{\mu}{2m} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (3.15)$$

onde  $\mathbf{n}$  e  $\mu$  são a direção e o módulo do momento de dipolo magnético, respectivamente.

Como podemos notar, a equação anterior é semelhante ao acoplamento mínimo para uma partícula carregada interagindo com um campo eletromagnético. Dessa forma, definimos o potencial vetor de Aharonov-Casher assim:

$$\mathbf{A}_{AC} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (3.16)$$

Ericsson e Sjöqvist [9] demonstraram que para que tenhamos um análogo à quantização de Landau a configuração campo-dipolo tem que satisfazer às seguintes condições:

1. ausência de torque sobre a partícula;
2. condições de eletrostática, ou seja,  $\partial_t \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ;
3.  $\mathbf{B}_{AC} = \nabla \times \mathbf{A}_{AC}$  constante.

Considerando que o momento de dipolo esteja orientado na direção  $z$  e adotando a seguinte configuração para o campo elétrico

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_e}{2} r \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.17)$$

onde  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica, temos que as condições exigidas por Ericsson e Sjöqvist são satisfeitas.

Trabalhando em coordenadas cilíndricas, segue então que a equação de Schrödinger fica assim:

$$-\frac{1}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + \frac{i\sigma\omega_{AC}}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{m\omega_{AC}^2}{8} r^2 \psi + \frac{\sigma\omega_{AC}}{2} \psi = \epsilon \psi, \quad (3.18)$$

onde  $\omega_{AC} = \frac{|\mu\rho_e|}{m}$  é a frequência ciclotrônica e  $\sigma = \pm$  determina a direção de revolução do dipolo no caso clássico.

Como solução da equação (3.18) vamos utilizar o seguinte *ansatz*:

$$\psi = A e^{i\ell\phi} R(r), \quad (3.19)$$

onde  $A$  é a constante de normalização e  $\ell$  é um número inteiro.

Dessa forma, ao substituirmos a equação (3.19) na equação (3.18) chegamos à seguinte expressão:

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[ 2m\epsilon - \frac{m^2\omega_{AC}^2}{4} r^2 + \sigma(\ell - 1)m\omega_{AC} - \frac{\ell^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (3.20)$$

Agora, fazendo a seguinte mudança de variáveis  $\xi = \frac{m\omega_{AC}}{2} r^2$ , a equação anterior fica assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (3.21)$$

onde

$$\beta = \frac{\epsilon}{\omega_{AC}} + \frac{\sigma(\ell - 1)}{2}. \quad (3.22)$$

Fazendo o estudo dos limites assintóticos [conf. (A.1)], temos que a solução da equação (3.21) tem a seguinte forma:

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} \zeta(\xi), \quad (3.23)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização e  $\zeta(\xi)$  é uma função a determinar.

Substituindo a equação (3.23) na (3.21), chegamos à seguinte equação diferencial:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|\ell| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|\ell| + 1}{2} - \beta \right] \zeta = 0, \quad (3.24)$$

cuja solução é a função hipergeométrica confluyente [conf. (A.2)]:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right); |\ell| + 1; \xi \right]. \quad (3.25)$$

Para que a solução radial (3.23) seja bem definida, a função hipergeométrica deve se reduzir a um polinômio. Para tanto, devemos ter que o primeiro parâmetro da função hipergeométrica seja um número inteiro nulo ou negativo, ou seja:

$$- \left( \beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

É devido a esse fato que obtemos a quantização da energia. Substituindo a equação (3.22) na equação (3.26), chegamos ao seguinte espectro de energia:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left( n + \frac{|\ell|}{2} - \frac{\sigma\ell}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_{AC}. \quad (3.27)$$

Procedendo com a normalização da função de onda [conf. (A.2.2)], segue que:

$$\psi_{n,\ell}(r, \phi) = \frac{1}{\lambda^{|\ell|+1}} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{2^{|\ell|} n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} e^{i\ell\phi} r^{|\ell|} \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda}\right) F \left[ -n; |\ell| + 1; \frac{r^2}{2\lambda^2} \right], \quad (3.28)$$

onde  $\lambda = \sqrt{\frac{1}{m\omega_{AC}}}$

Finalmente, chegamos às expressões para os auto-valores e as auto-funções da energia. Como podemos notar da equação (3.27), o espectro de energia é infinitamente degenerado – para um dado  $n$ ,  $\ell$  pode assumir infinitos valores, uma vez que não existem vínculos entre esses dois números quânticos. Outro detalhe é que o espectro não depende do centro das órbitas, mas sim do sentido de revolução das órbitas clássicas.

### 3.3 Quantização de Landau para o Dipolo Elétrico

Dando continuidade ao estudo da quantização de Landau para partículas neutras, vamos agora mostrar a existência de um análogo de Landau para o dipolo elétrico.

Tal fenômeno foi descrito por Ribeiro *et al.* [19], tomando como base a interação descrita pelo efeito He-McKellar-Wilkens [10, 24].

A dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico interagindo com um campo magnético externo é descrita pelo seguinte Hamiltoniano [3]:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + d \mathbf{n} \times \mathbf{B})^2 - \frac{d}{2m} \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad (3.29)$$

onde  $d$  e  $\mathbf{n}$  são respectivamente o módulo e a direção do momento de dipolo elétrico.

A expressão anterior é semelhante ao acoplamento mínimo para uma partícula carregada: o momento de dipolo  $d$  faz o papel da carga elétrica  $e$ , enquanto o termo  $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$  faz o papel de um potencial vetor. Dessa forma, definimos o potencial vetor de He-McKellar-Wilkens como sendo:

$$\mathbf{A}_{HMW} = \mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (3.30)$$

Associado ao potencial vetor de He-McKellar-Wilkens temos uma espécie de campo magnético efetivo, dado por:

$$\mathbf{B}_{HMW} = \nabla \times \mathbf{A}_{HMW}. \quad (3.31)$$

A definição desse campo magnético efetivo se faz necessária, pois uma das condições para que tenhamos a quantização de Landau para o dipolo elétrico é que esse campo deve ser constante e uniforme.

As outras condições são as mesmas exigidas por Ericsson e Sjöqvist, ausência de torque sobre a partícula e condições de magnetostática.

Para garantir que essas condições sejam satisfeitas, vamos considerar uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico apontando na direção  $z$  interagindo com o seguinte campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\rho_m}{2} r \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.32)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade de carga magnética.

Com isso, segue que a equação de Schrödinger fica assim:

$$-\frac{1}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] - \frac{i\sigma\omega_{HMW}}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{m\omega_{HMW}^2}{8} r^2 \psi - \frac{\sigma\omega_{HMW}}{2} \psi = \epsilon \psi, \quad (3.33)$$

onde  $\sigma = \pm$  e a frequência ciclotrônica para esse caso é definida assim:

$$\omega_{HMW} = \frac{|d\rho_m|}{m}. \quad (3.34)$$

Pelo fato de  $\phi$  não aparecer explicitamente na equação (3.33) segue que temos uma simetria azimutal na função de onda. Desse modo, uma possível solução para a equação (3.33) tem a forma:

$$\psi = A e^{i\ell\phi} R(r), \quad (3.35)$$

onde  $A$  é a constante de normalização e  $\ell$  é um número inteiro.

Substituindo a equação (3.35) na equação (3.33), temos que:

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[ 2m\epsilon - \frac{m^2\omega_{HMW}^2}{4}r^2 - \sigma(\ell - 1)m\omega_{HMW} - \frac{\ell^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (3.36)$$

Com a seguinte mudança de variáveis  $\xi = \frac{m\omega_{HMW}}{2}r^2$ , a equação anterior fica assim:

$$\xi\ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (3.37)$$

onde

$$\beta = \frac{\epsilon}{\omega_{HMW}} - \frac{\sigma(\ell - 1)}{2}. \quad (3.38)$$

Como a equação (3.37) tem a mesma forma da equação (3.21) segue que a sua solução tem a mesma forma da equação (3.23), ou seja,

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} \zeta(\xi), \quad (3.39)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização.

Ao substituírmos a equação (3.39) na equação (3.37) chegamos à seguinte expressão:

$$\xi\ddot{\zeta} + (|\ell| + 1 - \xi)\dot{\zeta} - \left[ \frac{|\ell| + 1}{2} - \beta \right] \zeta = 0. \quad (3.40)$$

A solução da equação anterior é a seguinte função hipergeométrica confluyente [conf. (A.2)]:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right); |\ell| + 1; \xi \right]. \quad (3.41)$$

Para que a função de onda seja normalizável, a série dada na equação anterior tem que convergir para um polinômio de grau  $n$ . Para que isso aconteça devemos ter que:

$$- \left( \beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

Além de garantir que as auto-funções sejam de quadrado integráveis, a equação anterior nos leva à quantização da energia. Substituindo a equação (3.38) na equação (3.42) temos

que:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left( n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\sigma\ell}{2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_{HMW}. \quad (3.43)$$

Finalmente, as auto-funções normalizadas [conf. A.2.2] são:

$$\psi_{n,\ell}(r, \phi) = \frac{1}{\lambda^{|\ell|+1}} \left[ \frac{(n+|\ell|)!}{2^{|\ell|} n! [\Gamma(|\ell|+1)]^2 \pi} \right]^{1/2} e^{i\ell\phi} r^{|\ell|} \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda}\right) F\left[-n; |\ell|+1; \frac{r^2}{2\lambda^2}\right], \quad (3.44)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{m\omega_{HMW}}}. \quad (3.45)$$

Com era de se esperar, o resultado é semelhante ao obtido para o dipolo magnético - de acordo com a equação (3.43) vemos que o espectro também é infinitamente degenerado e não depende do centro das órbitas. A única diferença está na dependência do sentido de revolução dessas órbitas, que nesse caso giram no sentido oposto.

### 3.4 Quantização de Landau para o Dipolo Elétrico Induzido

Embora a ideia física fosse original, a realização experimental para se verificar a quantização do dipolo elétrico fazendo uso da interação He-McKellar-Wilkins é um inconveniente, uma vez que se faz necessário a utilização de um campo magnético radial produzido por uma linha de monopolos magnéticos.

Uma alternativa mais palpável para a observação experimental de uma fase quântica para um dipolo elétrico em um campo magnético foi proposta por Wei *et al.* [23], onde uma partícula neutra (que não possui momento de dipolo elétrico permanente) se move em uma região onde um campo elétrico radial e um campo magnético uniforme perpendicular ao plano de movimento da partícula são aplicados simultaneamente.

A Lagrangiana que descreve a dinâmica de um dipolo na presença de um campo eletromagnético é:

$$L = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{d} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{d} = \alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  é o dipolo induzido pela configuração de campos e  $\alpha$  é a polarizabilidade.

O Hamiltoniano associado a equação anterior é:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \alpha (\mathbf{E} \times \mathbf{B}))^2 - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2, \quad (3.47)$$

onde  $m = M + \alpha \mathbf{B}^2$ .

Como a equação anterior é semelhante ao Hamiltoniano de uma partícula carregada na presença de um campo magnético, identificamos o termo  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  como sendo um potencial vetor efetivo. Sendo assim, temos que:

$$\mathbf{A}_{ef} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (3.48)$$

Em seu artigo, Wei mostrou que o dipolo induzido adquire uma fase quântica ao se mover na presença de um campo magnético. Portando a configuração de campos que ele utilizou não serve para que tenhamos um análogo à quantização de Landau para o dipolo induzido.

Para tanto, considerando a configuração utilizada por Ribeiro *et al.* [20]:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2} r \hat{\mathbf{r}} ; \quad \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.49)$$

temos que as condições requeridas por Ericsson e Sjöqvist são satisfeitas.

Sendo assim, fazendo uso da equação (3.49), a equação de Schrödinger fica assim:

$$\left[ -\nabla^2 + im\omega \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{m^2 \omega^2}{4} r^2 - \frac{m^3 \omega^2}{4\alpha B^2} r^2 \right] \psi = 2m\epsilon \psi, \quad (3.50)$$

onde

$$\omega = \frac{\alpha B \rho}{m} \quad (3.51)$$

Tentando uma solução da forma  $\psi = e^{i\ell\phi} R(r)$ , chegamos à seguinte expressão para  $R(r)$ :

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[ 2m\epsilon - \frac{m^2 \omega^2 \delta^2}{4} r^2 + m\omega\ell - \frac{\ell^2}{r^2} \right] R = 0, \quad (3.52)$$

onde  $\delta^2 = 1 - \frac{m}{\alpha B^2}$ .

Com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m\omega\delta}{2} r^2, \quad (3.53)$$

a equação (3.52) fica assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right] R = 0 \quad (3.54)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{\epsilon}{\omega} + \frac{\ell}{2} \right]. \quad (3.55)$$

Fazendo o estudo dos limites assintóticos, temos que a solução da equação (3.54) tem a seguinte forma:

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} \zeta(\xi), \quad (3.56)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização e a função  $\zeta(\xi)$  satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|\ell| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|\ell| + 1}{2} - \beta \right] \zeta = 0. \quad (3.57)$$

A equação anterior tem como solução a seguinte função hipergeométrica confluenta [conf. (A.2)]:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right); |\ell| + 1; \xi \right]. \quad (3.58)$$

Para garantir a normalização da função de onda, a equação anterior deve se reduzir a um polinômio de grau  $n$ . Para tanto, devemos ter que o primeiro parâmetro da função hipergeométrica seja um número inteiro nulo ou negativo, ou seja:

$$- \left( \beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

É dessa condição que vem a quantização da energia. Substituindo a equação (3.55) na equação (3.59), segue que:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left( n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_\delta - \frac{\ell}{2} \omega, \quad (3.60)$$

onde  $\omega_\delta = \omega \delta$ .

No limite  $\delta \rightarrow 1$  (regime de campos magnéticos intensos), os níveis de energia são dados por:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left( n + \frac{|\ell|}{2} - \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad (3.61)$$

onde agora temos um espectro de energia análogo ao de uma partícula carregada.

Finalmente, os auto-estados de energia normalizados são dados por:

$$\psi_{n,\ell}(r, \phi) = \frac{1}{\lambda^{|\ell|+1}} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{2^{|\ell|} n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} e^{i\ell\phi} r^{|\ell|} \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda}\right) F \left[ -n; |\ell| + 1; \frac{r^2}{2\lambda^2} \right], \quad (3.62)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{m\omega_\delta}}. \quad (3.63)$$

Como queríamos, chegamos ao espectro de energia e as auto-funções para o dipolo

elétrico induzido utilizando a interação proposta por Wei. A quantização típica de Landau é obtida no regime de campos magnéticos intensos. Como podemos notar, para cada valor do número quântico principal  $n$  temos infinitas possibilidades para  $\ell$ , ou seja, cada nível é infinitamente degenerado.

## 4 *Quantização de Landau para Partículas Neutras Confinadas em Anéis Quânticos*

Este capítulo é o cerne desta dissertação. Aqui, mostraremos que uma quantização análoga a de Landau para um dipolo induzido confinado pelo potencial harmônico de um anel quântico também ocorre. Primeiramente, faremos uma revisão do modelo de Tan e Inkson que descreve o potencial para um anel quântico bidimensional com espessura finita. Logo após, utilizaremos tal potencial de confinamento e, via resolução da equação de Schrödinger, obteremos o espectro de energia e as auto-funções para o dipolo elétrico induzido utilizando as configurações de campos de Wei [23] e de Ribeiro [20].

### 4.1 Modelo de Tan-Inkson

Nos últimos anos, as propriedades eletrônicas de nanoestruturas com geometria anelar, os chamados anéis quânticos, vêm sendo extensivamente estudadas. Tais dispositivos são especialmente interessantes pois permitem a verificação experimental de alguns efeitos de interferência quântica, tais como o efeito Aharonov-Bohm e o efeito Hall quântico.

Muitos experimentos envolvendo anéis quânticos vêm sendo realizados e, consequentemente, propriedades muito interessantes dos anéis quânticos vêm surgindo. Com tantos resultados vindos do laboratório, faltava era um modelo teórico que fosse capaz e explicar essas propriedades.

Muito esforço teórico foi dedicado para criar um modelo eficaz. O modelo mais simples consistia em considerar um anel unidimensional, ou seja, um anel sem espessura. Tal modelo era muito útil no entendimento de efeitos de interferência quântica, mas falhava na descrição de efeitos tipo Aharonov-Bohm e de correntes persistentes.

Uma alternativa que levava em conta os efeitos de espessura finita do anel eram os quantum wires bidimensionais. Nesse modelo se considerava uma fita bidimensional com condições de contorno periódicas.

A resolução numérica da equação de Schrödinger também foi usada para entender os estados de elétrons em anéis bidimensionais sujeitos a um campo magnético uniforme. Em contrapartida, pelo fato de em um anel quântico o número de elétrons ser consideravelmente elevado, a abordagem numérica não é viável, pois exigiria um grande poder computacional na resolução da equação de Schrödinger para um problema real.

Finalmente, um modelo simples e elegante foi proposto por Tan e Inkson [21]. Tal modelo descreve o potencial de confinamento de um anel quântico com espessura finita. Em seu trabalho, Tan e Inkson apresentam o modelo e o utilizam para obter o espectro de energia assim como suas autofunções.

No que segue, vamos apresentar o modelo propriamente dito e os estados eletrônicos para um anel bidimensional.

O tão falado modelo de Tan e Inkson é uma ideia simples – consiste no seguinte potencial de confinamento radial:

$$V(r) = \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0, \quad (4.1)$$

onde  $V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$ .

No ponto de mínimo desse potencial, situado em  $r_0 = (a_1/a_2)^{1/4}$ , uma partícula de massa  $m$  tem seu movimento confinado a um círculo. Desse modo,  $r_0$  define o raio médio do anel.

Expandindo a equação (4.1) em torno de  $r_0$ , temos que:

$$V(r) = V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r - r_0)^2 + \dots \quad (4.2)$$

Substituindo  $r_0$  na equação anterior, o potencial assume a seguinte forma:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(r - r_0)^2 \quad (4.3)$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{8a_2}{m}. \quad (4.4)$$

Para uma dada energia de Fermi  $E_f$ , segue de (4.1) que:

$$r_{\pm} = \left( \frac{V_0 + E_f \pm \sqrt{2E_f V_0 + E_f^2}}{2a_2} \right)^{1/2}, \quad (4.5)$$

onde  $r_+$  e  $r_-$  representam o raio externo e o interno, respectivamente.

Considerando uma energia muito baixa ( $E_f \ll V_0$ ), a expressão para  $r_{\pm}$  fica assim:

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \left( \frac{V_0 \pm \sqrt{2E_f V_0}}{2a_2} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{V_0}{2a_2} \right)^{1/2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{2E_f}{V_0}} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{V_0}{2a_2} \right)^{1/2} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_f}{V_0}} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sendo assim, com ajuda da equação anterior e da equação (4.4), estima-se que a espessura do anel ( $\Delta r = r_+ - r_-$ ) seja dada por:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{8E_f}{m\omega_0^2}} \quad (4.7)$$

Embora seja simples, este modelo é muito flexível: tanto a espessura  $\Delta r$  quanto o raio médio  $r_0$  do anel podem ser ajustados através da escolha adequada dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$ . Outras estruturas quânticas, como pontos e anti-pontos quânticos e anéis unidimensionais também podem ser descritos por este modelo.

Como dissemos antes, é uma ideia simples, porém muito elegante, pois com esse modelo, Tan e Inkson conseguiram resolver a equação de Schrödinger para um elétron em um anel bidimensional sujeito a um campo magnético uniforme perpendicular ao plano do anel e a um fluxo magnético concentrado em seu centro.

O potencial vetor que gera essa configuração do campo e do fluxo magnéticos é escolhido da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} B r \hat{\phi} + \frac{\ell}{er} \hat{\phi}, \quad (4.8)$$

onde  $\ell$  mede o número de fluxos magnéticos que passa pelo centro do anel.

Com esse potencial vetor, temos que a equação de Schrödinger para um elétron, com massa efetiva  $m^*$ , fica assim:

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + i\ell \right)^2 - ieB \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + i\ell \right) + \frac{e^2 B^2}{4} r^2 \right] + \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0 \right\} \Psi = \epsilon \Psi. \quad (4.9)$$

Resolvendo a equação anterior, Tan e Inkson chegaram ao seguinte espectro de energia:

$$\epsilon_{n,m} = \left( n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \right) \omega - \frac{m - \ell}{2} \omega_c - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2, \quad (4.10)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  é o número quântico que caracteriza o movimento radial e  $m = \dots - 1, 0, 1, \dots$ , o momento angular.

Como o elétron interage com um campo magnético uniforme, temos uma frequência ciclotrônica típica do análogo clássico, dada por:

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}. \quad (4.11)$$

Temos também uma frequência ciclotrônica resultante  $\omega$ , que é dada por:

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}, \quad (4.12)$$

onde  $\omega_0^2 = \frac{8a_2}{m^*}$  é a frequência relacionada ao potencial e confinamento.

Tan e Inkson também obtiveram as auto-funções da energia, que são dadas por:

$$\psi_{n,m}(r, \phi) = \frac{1}{\lambda^{M+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + M + 1)}{2^{M+1} n! [\Gamma(M + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} e^{-im\phi} r^M \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda}\right) F\left[-n; M + 1; \frac{r^2}{2\lambda^2}\right], \quad (4.13)$$

onde temos que  $M^2 = (m - \ell) + 2a_1 m^*$  e que  $\lambda = \sqrt{\frac{1}{m^* \omega}}$ .

Nesta seção apresentamos o modelo de Tan e Inkson que descreve anéis quânticos com espessura finita. Na próxima seção vamos utilizá-lo para confinar uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido e obter o seu espectro de energia e as suas auto-funções e mostrar que existe uma quantização de Landau para o dipolo elétrico induzido.

## 4.2 Partículas Neutras em Anéis Quânticos

O que foi apresentado na secção anterior foram resultados que são válidos para elétrons em anéis quânticos.

As analogias trazidas de sistemas eletrônicos para partículas neutras começaram com um trabalho de Ericsson e Sjöqvist [9]. A partir desse trabalho, vimos que, se utilizarmos uma configuração de campos adequada, uma partícula neutra se comporta como uma partícula carregada em um campo magnético.

Continuando com as analogias, propomos aqui obter uma quantização típica de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido, utilizando duas configurações de campos distintas – que são as configurações propostas por Wei [23] e Ribeiro [20].

A ideia de se utilizar uma partícula neutra com momento de dipolo induzido em detrimento de outra com momento de dipolo permanente, é que no último caso nos deparamos com inconvenientes de caráter experimental.

Para induzir o momento de dipolo sobre a partícula neutra, tanto Wei quanto Ribeiro, utilizaram uma configuração não usual de campos elétrico e magnético aplicados simultaneamente à partícula.

A única diferença entre as configurações de Wei e Ribeiro está apenas no arranjo do campo elétrico.

Wei considerou um campo gerado por um fio cilíndrico com densidade linear de cargas elétricas  $\lambda$  situado na origem. Sendo assim, a configuração de Wei é:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2r} \hat{\mathbf{r}} ; \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.14)$$

enquanto a de Ribeiro é:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2} r \hat{\mathbf{r}} ; \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.15)$$

onde  $\rho$  é uma densidade uniforme de carga.

Como podemos notar, a única diferença entre as configurações está na escolha do campo elétrico. No caso de Wei, essa configuração sem a presença do confinamento gerado pelo anel quântico nos levaria a um caso de espalhamento, que foi discutido em seu trabalho original [23].

Vamos agora resolver a equação de Schrödinger para cada uma dessas configurações e mostrar a existência de uma quantização típica de Landau.

### 4.2.1 Dipolo Induzido Confinado - Configuração de Wei

Como sabemos da equação (3.47), o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido é:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \alpha (\mathbf{E} \times \mathbf{B}))^2 - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2, \quad (4.16)$$

onde  $m = M + \alpha \mathbf{B}^2$ .

Introduzindo o potencial de confinamento do anel quântico ao hamiltoniano para o dipolo induzido, ou seja, somando as equações (4.1) e (4.16), o novo Hamiltoniano  $\mathcal{H} = H + V(r)$  para o dipolo confinado fica assim:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \alpha \mathbf{A}_{ef})^2 - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2 + \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0, \quad (4.17)$$

onde  $\alpha$  é a polarizabilidade da partícula e o potencial vetor efetivo é dado por:

$$\mathbf{A}_{ef} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (4.18)$$

Fazendo uso da configuração de Wei dada na equação (4.14), o potencial vetor efetivo fica assim:

$$\mathbf{A}_{ef} = -\frac{\lambda B}{2r} \hat{\phi}. \quad (4.19)$$

Usando as equações (4.14) e (4.17), temos que a equação de Schrödinger fica assim:

$$\left[ -\nabla^2 + 2ma_2 r^2 + \left[ i\lambda B \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\alpha^2 \lambda^2 B^2}{4} - \frac{m\alpha \lambda^2}{r} + 2ma_1 \right] \frac{1}{r^2} - 2m(\epsilon + V_0) \right] \psi = 0. \quad (4.20)$$

Lembrando que  $\omega_0^2 = \frac{8a_2}{m}$  e definindo  $\omega = \frac{\alpha \lambda B}{m}$  e  $\delta^2 = 1 - \frac{m}{\alpha B^2}$ , reescrevemos a equação anterior assim:

$$\left[ -\nabla^2 + \frac{m^2 \omega_0^2}{4} r^2 + \left[ \frac{m^2 \omega^2 \delta^2}{4} + i\omega \frac{\partial}{\partial \phi} + 2ma_1 \right] \frac{1}{r^2} - 2m(\epsilon + V_0) \right] \psi = 0. \quad (4.21)$$

Tentando uma solução do tipo

$$\psi = e^{i\ell\phi} R(r), \quad (4.22)$$

obtemos a seguinte equação para  $R(r)$ :

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[ 2m(\epsilon + V_0) - \frac{m^2 \omega_0^2}{4} r^2 - \frac{L^2}{r^2} \right] R = 0, \quad (4.23)$$

onde

$$L^2 = \ell^2 + \frac{m^2\omega^2\delta^2}{4} + m\omega\ell + 2ma_1 = \left(\ell + \frac{\alpha\lambda B}{2}\right)^2 + 2ma_1 - \frac{m\alpha\lambda^2 B^2}{4}. \quad (4.24)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis  $\xi = \frac{m\omega_0}{2}r^2$ , chegamos à seguinte equação:

$$\xi\ddot{R} + \dot{R} + \left[-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{L^2}{4\xi}\right]R = 0 \quad (4.25)$$

onde

$$\beta = \frac{\epsilon + V_0}{\omega_0}. \quad (4.26)$$

Fazendo o estudo dos limites assintóticos, temos que a solução da equação (4.25) tem a seguinte forma:

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (4.27)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização e a função  $\zeta(\xi)$  satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$\xi\ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi)\dot{\zeta} - \left[\frac{|L| + 1}{2} - \beta\right]\zeta = 0. \quad (4.28)$$

A equação anterior tem como solução a seguinte função hipergeométrica confluyente [conf. (A.2)]:

$$\zeta(\xi) = F\left[-\left(\beta - \frac{|L| + 1}{2}\right); |L| + 1; \xi\right]. \quad (4.29)$$

Para garantir a normalização da função de onda, a equação anterior deve se reduzir a um polinômio de grau  $n$ . Para tanto, devemos ter que o primeiro parâmetro da função hipergeométrica seja um número inteiro nulo ou negativo, ou seja:

$$-\left(\beta - \frac{|L| + 1}{2}\right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Substituindo a equação (4.26) na equação anterior temos o seguinte espectro de energia:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left(n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2}\right)\omega_0 - \frac{m}{4}\omega_0^2 r_0^2, \quad (4.31)$$

onde  $L^2 = \left(\ell + \frac{\alpha\lambda B}{2}\right)^2 + 2ma_1 - \frac{m\alpha\lambda^2 B^2}{4}$ .

Como podemos notar, os auto-valores da energia apresentados na (4.31) são infinitamente degenerados, uma vez que os números quânticos  $n$  e  $\ell$  não apresentam vínculos entre si.

Outro detalhe é que se tomarmos  $a_1 = a_2 = 0$ , ou seja, desconsiderar a contribuição do potencial de Tan e Inkson, o espectro da energia da partícula deixa de ser quantizado. De acordo Ericsson e Sjöqvist [9], uma das condições para que tenhamos uma quantização típica de Landau, o “campo magnético” associado ao potencial vetor efetivo deve ser constante e uniforme, condição essa que não é satisfeita, uma vez que esse “campo magnético” associado à equação (4.19) é nulo.

Sendo assim, concluímos que uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido pela configuração de campo de Wei e confinada em um anel quântico apresenta uma quantização análoga a de Landau e que essa quantização deixa de existir se o potencial de confinamento for desconsiderado.

Reunindo as equações (4.22), (4.27) e (4.29), segue que as auto-funções de energia são dadas por:

$$\psi_{n,\ell}(r, \phi) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} e^{iL\phi} r^{|L|} \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda_0}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{r^2}{2\lambda_0^2}\right], \quad (4.32)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{m\omega_0}}. \quad (4.33)$$

## 4.2.2 Dipolo Induzido Confinado - Configuração de Ribeiro

Vamos agora abordar o problema para uma partícula neutra sujeita a configuração de campos proposta por Ribeiro (4.15).

Mais uma vez, o Hamiltoniano para a partícula neutra com momento de dipolo induzido confinada pelo anel é:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \alpha \mathbf{A}_{ef})^2 - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2 + \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0. \quad (4.34)$$

Fazendo uso da configuração de Ribeiro (4.15) vemos que o potencial vetor efetivo fica agora assim:

$$\mathbf{A}_{ef} = -\frac{\rho B}{2} r \hat{\phi}. \quad (4.35)$$

Dessa forma, temos que neste caso a equação de Schrödinger fica assim:

$$\left[ -\nabla^2 + \frac{m^2 \omega^2}{4} r^2 + i\omega_c \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{2ma_1}{r^2} - 2m(\epsilon + V_0) \right] \psi = 0, \quad (4.36)$$

onde

$$\omega^2 = \omega_c^2 \delta^2 + \omega_0^2; \quad (4.37)$$

$$\omega_c = \frac{\alpha \rho B}{m}; \quad (4.38)$$

$$\delta^2 = 1 - \frac{m}{\alpha B^2}; \quad (4.39)$$

$$\omega_0^2 = \frac{8a_2}{m}. \quad (4.40)$$

Pelo fato da equação (4.36) não depender explicitamente de  $\phi$ , tentamos a solução da seguinte forma:

$$\psi = e^{i\ell\phi} R(r), \quad (4.41)$$

obtemos a seguinte equação para  $R(r)$ :

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[ 2m(\epsilon + V_0) - \frac{m^2 \omega^2}{4} r^2 + m\omega_c \ell - \frac{L^2}{r^2} \right] R = 0, \quad (4.42)$$

onde

$$L^2 = \ell^2 + 2ma_1. \quad (4.43)$$

Com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m\omega}{2} r^2, \quad (4.44)$$

segue que a equação (4.42) fica assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0 \quad (4.45)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\omega} \left[ (\epsilon + V_0) + \frac{\ell}{2} \omega_c \right]. \quad (4.46)$$

Como sabemos temos que, através do estudo dos limites assintóticos, a solução da equação (4.45) tem a seguinte forma:

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (4.47)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização e que

$$\zeta(\xi) = F \left[ -\left( \beta - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right], \quad (4.48)$$

que é a solução da seguinte equação hipergeométrica:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \beta \right] \zeta = 0. \quad (4.49)$$

Para que a função de onda seja bem definida, devemos ter que

$$-\left( \beta - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.50)$$

o que nos leva a quantização da energia.

Sendo assim, o espectro e as auto-funções de energia para o dipolo induzido na configuração de campos de Ribeiro são dados respectivamente por:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left[ n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right] \omega - \frac{\ell}{2} \omega_c - \frac{m}{4} \omega_0^2 r_0^2. \quad (4.51)$$

$$\psi_{n,\ell}(r, \phi) = \frac{1}{\lambda^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} e^{iL\phi} r^{|L|} \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{r^2}{2\lambda^2}\right], \quad (4.52)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{m\omega}}. \quad (4.53)$$

Como podemos notar, o espectro de energia é infinitamente degenerado, apresentando assim uma quantização típica de Landau.

Da mesma forma que fizemos para a configuração de Wei, vamos analisar como o espectro de energia se comporta se desconsiderarmos a influência do potencial de confinamento do anel quântico. Para tanto, basta fazer os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  iguais a zero. Desse modo, o espectro de energia fica assim:

$$\epsilon_{n,\ell} = \left( n + \frac{|\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_\delta - \frac{\ell}{2} \omega. \quad (4.54)$$

A equação anterior é idêntica à equação (3.60), que foi obtida por Ribeiro *et al.* em [20]. Esse resultado era de se esperar, uma vez que por si só a configuração de Ribeiro já garante uma quantização de Landau para o dipolo elétrico induzido.

## 5 *Conclusões*

Neste trabalho, fizemos o estudo de alguns fenômenos quânticos, tais como efeitos de interferência quântica e quantização de Landau para partículas neutras e carregadas.

Começamos com a descrição do efeito Aharonov-Bohm [1], no qual a uma partícula carregada acumula uma fase topológica ao circular uma linha de fluxo magnético. Mostramos que essa fase está associada ao potencial vetor. Sendo assim, dizemos que no efeito Aharonov-Bohm a dinâmica quântica da partícula carregada é afetada pelo potencial vetor, atribuindo assim um significado físico aos potenciais eletromagnéticos.

Estudamos também o efeito Aharonov-Casher [2], que prevê um efeito tipo Aharonov-Bohm para uma partícula neutra com momento de dipolo magnético interagindo com um campo elétrico radial.

Mostramos que, a partir dos efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher, via transformações de dualidade podemos obter mais dois casos de fases topológicas, que são os efeitos Aharonov-Bohm Dual e He-McKellar.

Todos esses efeitos de interferência quântica podem levar a um caso de estados ligados. Como no efeito Aharonov-Bohm um elétron interage com um fluxo de campo magnético, podemos estudar os níveis de energia para o elétron e se substituirmos o fluxo magnético por um campo magnético uniforme, obtemos a quantização da energia em níveis de Landau.

Sendo assim, fazendo uma correspondência com os outros casos de fases topológicas, mostramos que uma quantização de Landau é possível para partículas neutras, desde que as configurações de campos obedeçam às condições exigidas por Ericsson e Sjöqvist [9].

Finalmente, mostramos que uma partícula neutra com momento de dipolo induzido confinada por um potencial de um anel quântico bidimensional [21], também apresenta uma quantização da energia semelhante a de um elétron em um campo magnético uniforme.

Mostramos que tanto para a configuração de Wei quanto para a de Ribeiro os níveis de energia são infinitamente degenerados, caracterizando assim uma quantização análoga a de Landau para átomos neutros em anéis quânticos.

Uma das diferenças entre essas duas configurações é que na ausência do potencial de Tan e Inkson, a configuração de Wei não nos leva a um caso de estados ligados, situação essa que é completamente oposta no caso de Ribeiro, uma vez que a sua configuração foi construída com o propósito de quantização.

Como a quantização de Landau é a primeira ferramenta para a descrição de efeitos como efeito Hall quântico ou correntes persistentes, temos então uma possível aplicação para os resultados aqui obtidos que seria uma busca por um análogo do efeito Hall quântico e de correntes persistentes para átomos neutros.

# APÊNDICE A

## A.1 Limites Assintóticos para a Equação Radial

Considere a seguinte equação:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right] R = 0. \quad (\text{A.1})$$

Para encontrarmos uma candidata para solução da equação anterior precisamos fazer o estudo dos limites assintóticos. Para tanto, vamos escrevê-la da seguinte forma:

$$\ddot{R} + \frac{\dot{R}}{\xi} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{\xi} - \frac{\ell^2}{4\xi^2} \right] R = 0. \quad (\text{A.2})$$

Quando  $\xi \rightarrow 0$ , temos que:

$$\ddot{R} + \frac{\dot{R}}{\xi} - \frac{\ell^2}{4\xi^2} R = 0, \quad (\text{A.3})$$

cuja solução é

$$R(\xi) \approx \xi^{\pm|\ell|/2}. \quad (\text{A.4})$$

Para  $\xi \rightarrow \infty$ , segue que:

$$\ddot{R} - \frac{1}{4} R = 0, \quad (\text{A.5})$$

cuja solução é:

$$R(\xi) \approx e^{\pm\xi/2}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, a solução deve ter a seguinte forma:

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} \zeta(\xi), \quad (\text{A.7})$$

onde  $C$  é uma constante de normalização.

## A.2 Função Hipergeométrica Confluente

A seguinte equação diferencial

$$x\ddot{y} + (c - x)\dot{y} - ay = 0 \quad (\text{A.8})$$

é a equação hipergeométrica confluyente. Ela tem como solução a função hipergeométrica confluyente [4, 13], que é definida pela série

$$F(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad (\text{A.9})$$

podendo ser escrita em uma forma mais compacta:

$$F(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $(a)_n$  e  $(c)_n$  são os símbolos de Pochhammer, os quais definimos assim:

$$\begin{aligned} (a)_n &= \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \\ (a)_0 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$F(a; c; x)$  converge para todo  $x$  finito; o parâmetro  $a$  é arbitrário, enquanto o parâmetro  $c$  deve ser diferente de zero ou de um inteiro negativo. Se  $a$  for um inteiro negativo (ou zero), a série se reduz a um polinômio de grau  $|a|$ .

### A.2.1 Integral Envolvendo a Função Hipergeométrica Confluente

A seguinte integral

$$J_b = \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{b-1} [F(-a; c; x)]^2 dx, \quad a \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.12})$$

nos vai ser muito útil na normalização da parte radial das funções de onda dos problemas aqui abordados. Ela está calculada no livro do Landau [13] e é dada por:

$$J_b = \frac{\Gamma(b)a!(c-1)!}{k^b(c+a-1)!} \cdot \left[ 1 + \sum_{s=0}^{a-1} \frac{a(a-1)\dots(a-s) \cdot (c-b-s-1)(c-b-s)\dots(c-b+s)}{[(s+1)!]^2 c(c+1)\dots(c+s)} \right]. \quad (\text{A.13})$$

## A.2.2 Normalização

Vamos agora à normalização da função de onda. A condição de normalização é:

$$\int \psi^* \psi r dr d\phi = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^\pi e^{-i\ell\phi} e^{i\ell\phi} d\phi \int_0^\infty R^*(r)R(r)rdr = 1. \quad (\text{A.14})$$

É conveniente normalizar as partes angular e radial separadamente. Sendo assim, temos que:

$$A^2 \int_0^\pi d\phi = 1 \quad e \quad \int_0^\infty R^*(r)R(r)rdr = 1. \quad (\text{A.15})$$

Para a parte angular vemos facilmente que a constante de normalização é:

$$A = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.16})$$

Para a parte radial, devemos lembrar que  $\xi = \frac{m\omega_{AC}}{2}r^2$ , o que nos leva a:

$$\int_0^\infty R^*(\xi)R(\xi)d\xi = 1. \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a equação (3.23) na equação (A.17), temos que:

$$\frac{C^2}{m\omega_{AC}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{|\ell|} [F(-n; |\ell| + 1; \xi)]^2 d\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \left(\frac{m\omega_{AC}}{I}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.18})$$

onde

$$I = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{|\ell|} [F(-n; |\ell| + 1; \xi)]^2 d\xi. \quad (\text{A.19})$$

A integral anterior é facilmente obtida utilizando a equação (A.13). Fazendo as seguintes identificações  $k = 1$ ;  $b = c = |\ell| + 1$ ;  $a = n$  e  $x = \xi$ , temos que

$$I = \frac{n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2}{(n + |\ell|)!}; \quad (\text{A.20})$$

o que nos leva a:

$$C = (m\omega_{AC})^{1/2} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.21})$$

Sendo assim, retornando para a variável inicial  $r$ , as auto-funções radiais ficam assim:

$$R_{n,\ell} = \frac{1}{\lambda^{|\ell|+1}} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{2^{|\ell|} n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2} \right]^{1/2} r^{|\ell|} \exp\left(\frac{r^2}{4\lambda}\right) F\left[-n; |\ell| + 1; \frac{r^2}{2\lambda^2}\right], \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{m\omega_{AC}}}. \quad (\text{A.23})$$

## *Referências*

- [1] Aharonov, Y. e D. Bohm: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev., 115(3):485–491, 1959. [1](#), [2.1](#), [2.3](#), [2.4](#), [5](#)
- [2] Aharonov, Y. e A. Casher: *Topological Quantum Effects for Neutral Particles*. Phys. Rev. Lett, 53(4):319, 1984. [1](#), [2.2](#), [2.3](#), [2.4](#), [3.2](#), [5](#)
- [3] Anandan, J.: *Electromagnetic Effects in the Quantum Interference of Dipoles*. Phys. Rev. A, 138(8):347, 1989. [3.3](#)
- [4] Arfken, G.: *Mathematical Methods for Physicists*, capítulo 13, página 753. Academic Press, Inc., terceira edição, 1985. [A.2](#)
- [5] Büttiker, M., Y. Imry e R. Landauer: *Josephson Behavior in Small Normal One-Dimensional Rings*. Physics Letters A, 96(7):365 – 367, 1983.
- [6] Chambers, R. G.: *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux*. Phys. Rev. Lett., 5(1):3–5, 1960. [2.1](#)
- [7] Cimmino, A., G. I. Opat, A. G. Klein, H. Kaiser, S. A. Werner, M. Arif e R. Clothier: *Observation of the Topological Aharonov-Casher Phase Shift by Neutron Interferometry*. Phys. Rev. Lett., 63:380–383, Jul 1989. [2.2](#)
- [8] Dowling, Jonathan P., Colin P. Williams e J. D. Franson: *Maxwell Duality, Lorentz Invariance, and Topological Phase*. Phys. Rev. Lett., 83(13):2486–2489, Sep 1999. [2.4](#)
- [9] Ericsson, M. e E. Sjöqvist: *Towards a Quantum Hall Effects for Atoms Using Electric Fields*. Phys. Rev. A, 65(013657), 2001. [1](#), [3.2](#), [3.2](#), [4.2](#), [4.2.1](#), [5](#)
- [10] He, X. G. e B. H. J. McKellar: *Topological Phase Due to Electric Dipole Moment and Magnetic Monopole Interaction*. Phys. Rev. A, 47(4):3424, 1993. [1](#), [2.3](#), [2.3](#), [2.4](#), [3.3](#)
- [11] Holstein, T., R. E. Norton e P. Pincus: *de Haas-van Alphen Effect and the Specific Heat of an Electron Gas*. Phys. Rev. B, 8(6):2649–2656, Sep 1973. [3.1](#)
- [12] Landau, L. D. e E. M. Lifshitz: *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, volume 3, capítulo 112, páginas 458–460. Pergamon Press, terceira edição, 1977. [1](#), [3.1](#)
- [13] Landau, L. D. e E. M. Lifshitz: *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, volume 3, capítulo 112, páginas 673–681. Pergamon Press, terceira edição, 1977. [A.2](#), [A.2.1](#)

- [14] Lévy, L. P., G. Dolan, J. Dunsmuir e H. Bouchiat: *Magnetization of Mesoscopic Copper Rings: Evidence for Persistent Currents*. Phys. Rev. Lett., 64(17):2074 – 2077, 1990.
- [15] Paredes, B., P. Fedichev, J. I. Cirac e P. Zoller: *1/2-Anyons in Small Atomic Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett., 87(1):010402, Jun 2001. 1, 3.2
- [16] Paredes, B., P. Zoller e J.I. Cirac: *Fractional Quantum Hall Regime of a Gas of Ultracold Atoms*. Solid State Communications, 127(2):155 – 162, 2003. 1
- [17] Peshkin, M. e H. J. Lipkin: *Topology, Locality, and Aharonov-Bohm Effect with Neutrons*. Phys. Rev. Lett., 74(15):2847–2850, 1995. 2.1
- [18] Prange, R. E. e S. M. Girvin: *The Quantum Hall Effect (Graduate Texts in Contemporary Physics)*. Springer-Verlag, 1990. 1, 3.1
- [19] Ribeiro, L. R., C. Furtado e J. R. Nascimento: *Landau Levels Analog to Electric Dipole*. Phys. Lett. A, 138:135–140, 2006. 1, 3.3
- [20] Ribeiro, L. R., C. Furtado e J. R. Nascimento: *Landau Quantization of Neutral Particles in an External Field*. Phys. Lett. A, 358:336 – 338, 2006. 1, 3.4, 4, 4.2, 4.2.2
- [21] Tan, W C. e J C Inkson: *Electron States in a Two-Dimensional ring - an Exactly Soluble Model*. Semicond. Sci. Technol., 11:1635–1641, 1996. 1, 4.1, 5
- [22] Tonomura, A., N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano e H. Yamada: *Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded From Electron Wave*. Phys. Rev. Lett., 56:792–795, Feb 1986. 2.1
- [23] Wei, H., R. Han e X. Wei.: *Quantum Phase of Induced Dipoles Moving in a Magnetic Field*. Phys. Rev. Lett., 75(11):2071–2073, 1995. 1, 2.3, 3.4, 4, 4.2, 4.2
- [24] Wilkens, M.: *Topological Phase due to Electric Dipole Moment and Magnetic Monopole Interaction*. Phys. Rev. Lett., 72:5, 1994. 1, 2.3, 2.3, 2.4, 3.3