

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

DINÂMICA DE PARTÍCULAS EM ESTRUTURAS
PERIÓDICAS

Marcelo da Silva Vieira

JOÃO PESSOA
-2010-

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dinâmica de Partículas em Estruturas Periódicas

Marcelo da Silva Vieira

Tese realizada no Departamento
de Física da UFPB, sob orientação do Prof.
Dr. Cláudio Benedito Furtado , para
a obtenção do grau de doutor em Física.

JOÃO PESSOA
-2010-

*A todos aqueles que bravamente
lutam por seus objetivos de vida.*

Agradecimentos

Agradeço a meus pais por me concederem a vida e por me apoiarem nos momentos de alegria e de adversidade. Agradeço ao professor Cláudio Furtado que por seis anos tem me orientado com grande paciência, ao professor Fernando Moraes pelo apoio e pelas discussões científicas, a Cleverson pela amizade e pelas discussões científicas que contribuíram direta ou indiretamente para a finalização deste trabalho e a Jonas pela parceria no trabalho de partículas de massa variável . Agradeço aos professores do Departamento de Física da UFPB, a quem devo esses dez anos de contínua formação, e aos meus colegas de pós graduação, que junto a mim vêm enfrentando batalhas árduas para vencerem estudando Física. Agradeço também a importante amizade de Bruno, Elder e Allan, que nos momentos mais difíceis deste doutorado estavam lá para me mandar seguir em frente. E finalmente, agradeço ao CNPQ pelo importante suporte financeiro ao desenvolvimento deste trabalho.

JOÃO PESSOA

-2010-

Resumo

A tecnologia que usamos nos dias de hoje tem como uma de suas bases principais, a Mecânica Quântica. Através da Mecânica Quântica, com o desenvolvimento da física dos semicondutores, somos capazes de construir dispositivos os quais, manipulam partículas para determinados fins. Como exemplo destes dispositivos, temos o diodo e o transistor, que são o coração da eletrônica. Nesta tese, buscamos teoricamente sistemas físicos para a obtenção de certos efeitos quânticos. Tais efeitos que desejamos obter são, uma estrutura de bandas para fótons e partículas carregadas, o efeito Aharonov-Bohm para fótons, e fases geométricas para partículas relativísticas descritas por hamiltonianos não hermitianos. Para tal finalidade, os problemas tratados aqui são: o estudo de fótons em cristais fotônicos formados por isolantes topológicos, a descrição de sistemas de partículas carregadas de massa variável, o estudo da dinâmica de partículas carregadas de massa periódica, o estudo do efeito Aharonov-Bohm para o fóton através de um fluido viscoso, e o surgimento de fases geométricas para partículas relativísticas sujeitas a hamiltonianos não hermitianos e que variam lentamente. As principais contribuições do nosso trabalho, foram a proposta para um hamiltoniano que descreve partículas com massa variável, a obtenção de uma estrutura de bandas de energia para uma partícula carregada com massa periódica, a obtenção de uma estrutura de bandas de frequência para fótons num cristal fotônico formado por isolantes topológicos, a obtenção de um análogo do efeito Aharonov-Bohm para o fóton, onde a vorticidade de um fluido viscoso faz o papel do campo magnético confinado, e mostrar que partículas relativísticas sujeitas a hamiltonianos não hermitianos e que variam lentamente, apresentam fases geométricas complexas.

Palavras-chave: fóton, bandas, gap, fase geométrica.

Abstract

One of the foundations of the actual technology is the Quantum Mechanics. Through Quantum Mechanics, with the development of semiconductors physics, we are able to build devices which, manipulate particles for certain purposes. As an example of these devices, we have the diode and transistor. In this thesis we seek physical systems, to obtain some quantum effects, theoretically. The quantum effects which we want to obtain, are a band structure for photons and charged particles, the Aharonov-Bohm effect for photons and geometric phases for relativistic particles described by non-Hermitian Hamiltonian. For this purpose, the issues addressed here are: the study of photons in photonic crystals formed by topological insulators, the description of systems of charged particles of varying mass, the study of dynamics of the charged particles with periodic mass, the study of the Aharonov-Bohm for the photon through a viscous fluid, and the appearance of geometric phases for relativistic particles described by non hermitian Hamiltonian. The main contributions of our work was the proposal for a Hamiltonian which describes particles with variable mass, obtaining a structure of energy bands for a charged particle with periodic mass, obtaining a structure of frequency bands for photons in a photonic crystal formed by topological insulators , showing the Aharonov-Bohm effect for the photon, where the vorticity of a viscous fluid is the role of magnetic fields confined, and show that relativistic particles subject to non-Hermitian Hamiltonian which varies slowly, has complex geometric phases.

Keywords: Photon, bands, gap, geometric phase.

Lista de Figuras

1.1	Estrutura de um cristal fotônico. O cristal fotônico se caracteriza pela periodicidade em sua estrutura dielétrica (ou magnética). A periodicidade pode ser em uma, duas, ou três dimensões.	4
1.2	Estrutura de uma fibra fotônica. Neste caso a luz será guiada pelo buraco central. Fonte: E. Yablonovitch, <i>Scientific American</i> , December, 2001. . . .	6
1.3	Cristal fotônico unidimensional. Tal sistema apresenta simetria de inversão espacial.	9
1.4	Cristal fotônico unidimensional. Tal cristal apresenta simetria contínua nas direções x e y	11
1.5	Estrutura de bandas num cristal fotônico unidimensional.	16
2.1	Partícula livre com massa periódica	20
2.2	Interface em $x = x_o$	22
2.3	Bandas de energia para a junção periódica de Ga e Pb onde as massas efetivas dos elétrons são respectivamente $m_1 = 0,58m_e$ e $m_2 = 1,97m_e$, com $a = 1\mu m$ e $b = 0,5\mu m$	26
2.4	Bandas de energia para a junção periódica de Ga e Pb onde as massas efetivas dos elétrons são respectivamente $m_1 = 0,58m_e$ e $m_2 = 1,97m_e$, com $a = 1\mu m$ e $b = 0,5\mu m$	26

3.1	(a) Estrutura eletrônica característica de um isolante comum, na qual existe um gap entre as bandas de valência e condução. (b) Estrutura eletrônica característica de um sistema que apresenta efeito Hall quântico. Esta estrutura se difere da de um isolante comum pelo surgimento de estados de superfície condutores. (c) Estrutura eletrônica de um isolante topológico que se caracteriza também por estados de superfície condutores, onde há a separação de spins.	28
3.2	Isolante topológico periódico	31
3.3	Banda de frequência para o caso em que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ e $\frac{a}{b} = 1$. O primeiro gráfico corresponde a $F = 0, 2$, o segundo gráfico corresponde a $F = 1$ e o terceiro, $F=10$	34
4.1	Cristal fotônico unidimensional.	45
4.2	Efeito Aharonov-Bohm para o elétron.	46
4.3	Cilindro girante de raio a imerso num fluido viscoso.	47
5.1	Sistema utilizado para reproduzir um efeito análogo ao Aharonov-Bohm com potencial vetor complexo. Para isso utiliza-se um cilindro metálico que gira com velocidade angular Λ , imerso num fluido viscoso que pode ter condutividade ou ganho.	58
A.1	Cristal fotônico unidimensional. Nas regiões sem fronteira, o meio pode ser considerado como homogêneo.	65
A.2	Estrutura de bandas num cristal fotônico unidimensional modulada pela razão $\frac{b}{a}$	68
B.1	Isolante topológico periódico	69

Sumário

1	Cristais Fotônicos	4
1.1	Introdução	4
1.2	Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meios Periódicos e Simetrias .	6
1.2.1	Equação de Onda para Meios não Homogêneos	6
1.2.2	Simetrias em Cristais Fotônicos	8
1.3	Cristais Fotônicos Unidimensionais	14
2	Descrição de Sistemas de Massa Variável	18
2.1	Introdução	18
2.2	Hamiltoniano para Partículas de Massa Variável	19
2.3	Condições de Contorno	21
2.3.1	Condições de Bloch	21
2.3.2	Condições de Interface	21
2.4	Bandas de Energia	24
3	Isolantes Topológicos	27
3.1	Introdução	27
3.2	Isolantes Topológicos como um Meio Axiônico	29
3.3	Cristais Fotônicos formados por Isolantes Topológicos	30
4	Função de onda do Fóton	35
4.1	Introdução	35
4.2	Obtenção da função de onda do fóton	36

4.3	Fóton num meio material	40
4.4	Potencial vetor para o fóton	43
4.5	Resultados	44
4.5.1	Fóton num meio periódico	44
4.5.2	Análogo do Efeito Aharonov-Bohm para o Fóton	45
5	Fases Geométricas em Sistemas não Hermitianos Relativísticos	49
5.1	Introdução	49
5.2	Fases Geométricas para Partículas Relativísticas Descritas por Hamiltoni- anos não Hermitianos	50
5.2.1	Partículas de Spin 0 com Interações não Hermitianas	51
5.2.2	Partículas de Spin $1/2$	55
5.2.3	Partículas de spin 1	56
5.2.4	Análogo do Efeito Aharonov Bohm não Hermitiano para o Fóton	58
5.3	Conclusão	59
6	Conclusões e Perspectivas	61
A	Cálculo da Estrutura de Bandas em Cristais Fotônicos Unidimensionais	65
B	Cálculo da Estrutura de Bandas para Luz em Cristais Fotônicos formados por Isolantes Topológicos	69

Introdução

Uma grande revolução tecnológica, talvez a maior delas ocorreu na metade do século XX, ocorreu após o desenvolvimento da mecânica quântica, em meados de 1958 com a invenção do transistor. Assim, surgiu a eletrônica. A maior parte da tecnologia atual é baseada na eletrônica. Televisores, aparelhos de rádio e som, celulares, computadores, todos esses aparelhos usam-se dela. A eletrônica é baseada na física dos semicondutores [1, 2], que são cristais moleculares cuja finalidade é o controle e manipulação de elétrons. A manipulação de elétrons em semicondutores, se dá por um fenômeno quântico que ocorre em cristais, onde elétrons com certas energias são proibidos de atravessar o cristal semicondutor. Assim, grosseiramente falando o que se faz no semicondutor é controlar quais elétrons atravessam ou não o cristal.

Atualmente, uma grande revolução tecnológica está por vir com o advento da fotônica e da spintrônica. A fotônica se baseia na manipulação e controle de fótons, e os principais dispositivos usados para a manipulação e controle de fóton são os cristais fotônicos [3, 4]. Tais cristais foram previstos no final da década de 80 [5]. Podemos dizer que os cristais fotônicos são semicondutores de luz, pois são os análogos dos semicondutores para os fótons. A vantagem de se trabalhar com manipulação de fótons ao invés de manipulação de elétrons é que a capacidade de miniaturização dos dispositivos fotônicos é muito maior que a capacidade dos dispositivos eletrônicos, o que resulta por exemplo em processadores de alto desempenho. Com o uso dos dispositivos fotônicos poderemos ter no futuro, processadores que operam na ordem de 100 THz [6]. Já a spintrônica trata-se de uma eletrônica onde se pode controlar e manipular os spins dos elétrons. Através do controle magnético de

elétrons pode-se construir dispositivos de armazenamento de informação alto desempenho, o que pode permitir por exemplo o armazenamento de informações não salvas quando se desliga o computador. Em materiais chamados de isolantes topológicos [7, 8], observa-se efeitos de controle de spin. Estes materiais são caracterizados por ser um isolante com uma superfície condutora. Essa superfície condutora se dá por uma forte interação spin órbita com os elétrons, o que permite a separação entre os elétrons de spin up e os de spin down.

O trabalho desenvolvido nesta tese trata-se da interação entre partículas e meio, e assim relacionado com o avanço tecnológico atual. No primeiro capítulo desta tese, faremos uma revisão sob os aspectos básicos da física de ondas eletromagnéticas nos cristais fotônicos. A principal motivação deste capítulo de revisão é que os métodos matemáticos empregados neste capítulo servirão de base para a obtenção dos resultados nos demais capítulos.

No capítulo 2 faremos uso do método utilizado no capítulo anterior para o cálculo de bandas em estruturas fotônicas unidimensionais. O capítulo 2 não se trata de uma revisão, mas de um estudo inédito a respeito de sistemas de partículas quânticas com massa variável. Trataremos de sistemas em que a massa varia com a posição. Assim tal massa poderá ser associada com um operador e tal operador não comuta com o operador momento linear. Iremos propor aqui um hamiltoniano para a descrição de partículas livres com massa variável, baseado na quantização canônica. Outro estudo que faremos nesse capítulo além de propormos o Hamiltoniano para partículas livres com massa variável, é o cálculo da estrutura eletrônica para partículas livres de massa variável. Mostraremos que quando a massa da partícula é periódica, esta apresenta uma estrutura de bandas, semelhante a elétrons em cristais semicondutores.

O terceiro capítulo é relacionado aos isolantes topológicos. Este capítulo divide-se numa parte informativa, onde citaremos os principais aspectos da física dos isolantes topológicos, sem se aprofundar no assunto; e uma parte de resultados, onde nesta é feito um estudo da propagação de ondas eletromagnéticas num meio formado pela junção periódica de um isolante comum e um isolante topológico. Utilizando um cálculo análogo ao que será usado no capítulo 1 e no capítulo 2, mostraremos que nesse caso a onda eletromagnética apresentará também uma estrutura de bandas que dependerá do parâmetro do isolante

topológico.

No capítulo 4 será apresentado o formalismo da primeira quantização do fóton e assim a função de onda do fóton. Tal formalismo, apesar de muito pouco explorado na literatura, possui um grande potencial de aplicação. Um das principais motivação de se estudar a função de onda do fóton, é que para fenômenos conhecidos para elétrons, pode-se buscar análogos para fótons, como por exemplo, o efeito Aharonov-Bohm, confinamento por defeito, localização de Anderson, etc. Neste capítulo mostraremos como quantizar a partícula sem massa, obtendo então a mecânica quântica de partículas sem massa de spin 1, ou seja fótons. Como resultados nossos neste capítulo, um deles diz respeito a estrutura de bandas de fótons em cristais fônicos, e o outro resultado obtido por nós, que é o mais importante deste capítulo, mostra a obtenção de um análogo do efeito Aharonov-Bohm para fótons, onde mostramos que tal efeito é reproduzido pela vorticidade de um fluido viscoso com permissividade elétrica e permeabilidade magnética.

O capítulo 5 está relacionado a física de sistemas quânticos onde o Hamiltoniano destes sistemas são descritos por operadores não Hermitianos. Nossa contribuição neste capítulo se dá através de dois resultados. Um deles é que para partículas relativística de spin 0, spin 1/2 e spin 1, que evoluem adiabaticamente; existe uma fase geométrica complexa, onde a parte real representa um fator de fase propriamente dito para a partícula, e a parte imaginária representa uma atenuação ou uma amplificação na amplitude da função de onda. O outro resultado trata-se de um análogo do efeito Aharonov-Bohm, onde este efeito é obtido pela vorticidade de um fluido viscoso que seja condutor, ou que seja um meio amplificador para a luz.

Por fim, nas conclusões, mostraremos um resumo dos principais resultados obtidos na tese, e apresentaremos propostas para trabalhos futuros relacionados diretamente com os resultados obtidos nesta tese.

Capítulo 1

Cristais Fotônicos

1.1 Introdução

Cristais fotônicos são estruturas periódicas artificiais (Fig. 1.1) nas quais ondas eletromagnéticas (fótons) podem ser manipuladas de forma análoga aos elétrons em semicondutores [3, 4, 9].

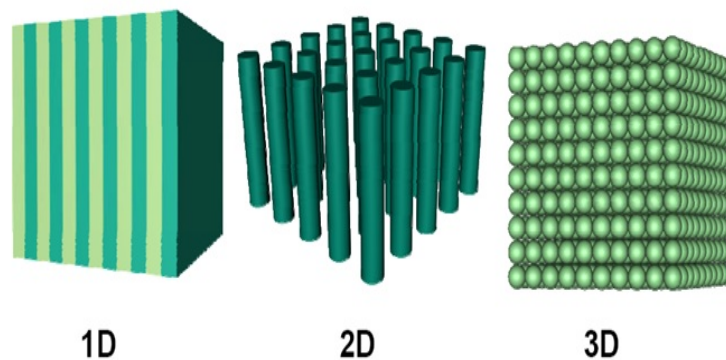


Figura 1.1: Estrutura de um cristal fotônico. O cristal fotônico se caracteriza pela periodicidade em sua estrutura dielétrica (ou magnética). A periodicidade pode ser em uma, duas, ou três dimensões.

Para entendermos a importância dos cristais fotônicos, vamos voltar nossa atenção um pouco na tecnologia desenvolvida no século XX. A maior parte dessa tecnologia foi desenvolvida graças a eletrônica. A eletrônica é baseada na física de dispositivos semicondutores (feitos de silício), cuja função destes é manipular elétrons. Essa manipulação de elétrons

depende de um fenômeno quântico, o qual um certo intervalo de energia para o elétron é bloqueado de atravessar o semicondutor. Tal intervalo de energia é comumente chamado de *gap*. Assim num semicondutor, teremos uma estrutura de bandas para a energia dos elétrons que atravessa esse material. Tem-se um intervalo de energia permitido para o elétron; e tem-se o intervalo proibido, o *gap*.

Mostraremos aqui que quando a luz atravessa um meio periódico, isto é, um cristal fotônico, observa-se também uma estrutura de bandas assim como ocorre em semicondutores. Graças a este efeito, pode-se construir dispositivos fotônicos com as mais diversas aplicações em tecnologia. Pode-se aplicar os cristais fotônicos como dispositivos para confinamento e encurvamento de luz [11]. Nesse caso tais dispositivos podem ser usados para se construir filtros de uma única frequência e usar como cavidade para nanolasers [12]. No caso do semicondutor, faz-se o processo de dopagem, onde se coloca ou retira-se um átomo extra no cristal, ou ainda se coloca um átomo diferente. Tal processo permite grandes aplicações aos dispositivos semicondutores, o que permite construir diodos e transistores. O mesmo ocorre no cristal fotônico, onde o equivalente ao processo de dopagem, é a criação de defeitos na estrutura periódica, onde se quebra a simetria da rede. Nesse caso, na região em que se tem o defeito, pode-se confinar uma pequena faixa de frequência do *gap* e assim, se o defeito for pontual teremos uma cavidade onde teremos luz confinada, e se o defeito for linear, teremos um guia de onda, e assim pode-se construir fibras ópticas de cristais fotônicos (fibras fotônicas). Estas fibras podem guiar a luz de maneira suave, isto é, a luz segue a trajetória da fibra, e assim com poucas perdas, diferentemente da fibra óptica convencional, onde a luz se propaga por sucessivas reflexões totais, o que leva a uma maior perda de energia. Na Fig. 1.2 ilustra-se a secção transversal de uma fibra fotônica. A estrutura desta secção se constitui de uma rede periódica de buracos de ar, onde tal rede seleciona as possíveis frequências que passarão na fibra, e um buraco central, que confinará luz que passar na fibra.

Neste capítulo será apresentado uma descrição básica da física dos cristais fotônicos, bem como identificar propriedades dos modos eletromagnéticos que se propagam nestes

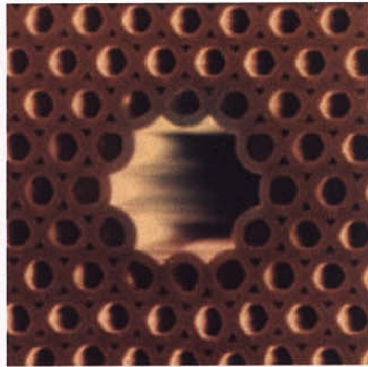


Figura 1.2: Estrutura de uma fibra fotônica. Neste caso a luz será guiada pelo buraco central. Fonte: E. Yablonovitch, *Scientific American*, December, 2001.

cristais. Entendemos como modos eletromagnéticos as possíveis frequências associada as ondas eletromagnéticas consideradas aqui. Começaremos por descrever a equação de onda num meio em que suas constante dielétrica e a permissividade magnética variam com a posição. Apresentaremos também um estudo detalhado das simetrias envolvidas num cristal fotônico para assim investigar as propriedades mais importantes das ondas eletromagnéticas que se propagam nesses meios. Após isso faremos uma explanação detalhada, de maneira analítica do problema do cristal fotônico unidimensional, bem como o cálculo da estrutura de bandas destes sistemas.

1.2 Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meios Periódicos e Simetrias

1.2.1 Equação de Onda para Meios não Homogêneos

A partir de agora faremos o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios periódicos, pois o cristal fotônico é um meio periódico. Vamos considerar meios lineares e isotrópicos. Meios lineares são aqueles cujas respostas elétrica e magnética não dependem dos campos incidentes, e meios isotrópicos são aqueles cujas respostas aos campos não dependem da direção que estes campos são aplicados. Assim levando-se em conta a linearidade e isotropia dos meios considerados aqui, as relações constitutivas para tais meios

são:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}. \quad (1.2)$$

onde ϵ_0 e μ_0 são respectivamente a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, e $\epsilon(\mathbf{r})$ é a constante dielétrica do meio e $\mu(\mathbf{r})$ é a permeabilidade magnética do meio.

Se estamos interessados no problema da propagação de ondas em meios periódicos e sem cargas livres e correntes. Assim estas ondas obedecem o conjunto de equações de Maxwell [14]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Vamos considerar a solução de ondas planas para as equações acima. Assim teremos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (1.8)$$

Substituindo estas soluções nas equações (1.5) e (1.6), e usando-se as relações constitutivas (1.1) e (1.2), encontramos:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

Isolando então $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ na equação (1.10), teremos assim:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_0\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.11)$$

Substituindo-se a equação (1.11) em (1.9) obtemos finalmente a equação de onda para meios dependente da posição:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.12)$$

Para se entender como a onda eletromagnética se propaga num cristal fotônico, precisamos resolver a equação (1.12) com suas devidas condições de contorno. Na próxima seção, será investigada propriedades das soluções dessas equações utilizando-se das simetrias do cristal, assim como se faz nos cristais eletrônicos.

1.2.2 Simetrias em Cristais Fotônicos

Para se estudar o movimento de elétrons em cristais eletrônicos, usamos a Física do Estado Sólido, que faz uso da Mecânica Quântica e da linguagem de simetrias. Para resolver a equação de Schrödinger e encontrar os estados eletrônicos do elétron num cristal, e assim as bandas de energia, é de fundamental importância o uso das simetrias do cristal.

Assim, para se descrever os modos eletromagnéticos num cristal fotônico, utilizaremos de um procedimento análogo ao usado na Física do Estado Sólido para se descrever estados eletrônicos em cristais. Ou seja, utilizaremos a teoria eletromagnética e exploraremos as simetrias dos cristais fotônicos para descrever os modos eletromagnéticos. Estudar simetrias em cristais fotônicos significa extrair o máximo de informações dos modos eletromagnéticos, sem precisar resolver a equação de onda.

Num cristal fotônico, várias simetrias estão presentes: simetria de inversão, simetria contínua de translação, simetria discreta de translação, simetria de rotação, simetria de inversão temporal e simetria de espelho. Cada uma dessas simetrias oferece valiosas informações a respeito dos modos eletromagnéticos presentes no cristal fotônico. Para nossos propósitos, será suficiente explorar as simetrias de inversão espacial, de translação contínua, e translação discreta.

Simetria de Inversão

Vamos observar aqui a implicação da simetria de inversão nos modos eletromagnéticos de um cristal fotônico. Para simplificar as idéias, consideremos um cristal fotônico unidimensional, isto é, cuja periodicidade se dê apenas em uma dimensão. Consideraremos também que esse cristal seja não magnético, constituídos de placas com constantes dielétricas ϵ_1 e ϵ_2 , como mostra a Fig 1.3, onde se propaga modos eletromagnéticos $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ com frequências ω .

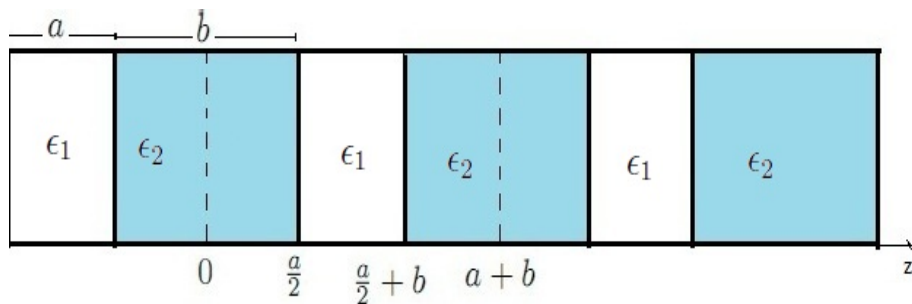


Figura 1.3: Cristal fotônico unidimensional. Tal sistema apresenta simetria de inversão espacial.

No sistema apresentado temos uma importante simetria: se invertermos o cristal fotônico em torno da origem, não observamos mudança na configuração do sistema, assim teremos uma simetria de inversão.

Consideremos agora o efeito de uma operação de simetria sobre $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Definamos o operador de inversão $\mathcal{I}$, cujo efeito é:

$$\mathcal{I}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(-\mathbf{r}). \quad (1.13)$$

Se o sistema é simétrico por inversão, então $\mathcal{I}\mathbf{H}(\mathbf{r})$ é também um modo eletromagnético de frequência ω , assim $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ e $\mathcal{I}\mathbf{H}(\mathbf{r})$ são modos degenerados. O que implica em:

$$\mathcal{I}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

Se aplicarmos a operação de inversão duas vezes, voltamos a configuração inicial, assim:

$$\mathcal{I}^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \alpha^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

Logo, $\alpha^2 = 1$, o que implica em $\alpha = \pm 1$. Como consequência da simetria de inversão, mostramos que os modos eletromagnéticos que se propagam no cristal fotônico tem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{H}(-\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{H}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

Assim encontramos uma importante informação a respeito dos modos que se propagam num cristal fotônico: estes modos tem paridade definida, isto é, ou são pares, ou são ímpares.

Que outras informações podemos conseguir a respeito dos modos eletromagnéticos num cristal fotônico, explorando as demais simetrias? Veremos mais adiante.

Simetria de Translação Contínua

Outra simetria importante presente nos cristais fotônicos é a simetria de translação contínua.

Um sistema é simétrico por translação contínua, se tal sistema for invariante por um deslocamento $\mathbf{d}$. Definamos então o operador de translação contínua $\hat{T}_{\mathbf{d}}$, o qual, quando opera numa função vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, desloca seu argumento por $\mathbf{d}$, isto é:

$$\hat{T}_d \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{d}). \quad (1.18)$$

O tratamento aqui será feito para um cristal fotônico unidimensional, mas vale também para cristais fotônicos bidimensionais e tridimensionais. Consideremos o cristal fotônico unidimensional apresentado na Figura 1.4 e um deslocamento $\mathbf{d} = x_d \hat{\mathbf{x}} + y_d \hat{\mathbf{y}}$ nesse cristal. Observamos aqui tal cristal apresenta simetria contínua nas direções x e y , pois tem-se que $\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \epsilon(\mathbf{r})$ e $\mu(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \mu(\mathbf{r})$. Vamos definir aqui o operador $\hat{O}$ como sendo:

$$\hat{O} \equiv \frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (1.19)$$

Isso permite reescrever a equação (1.12) como:

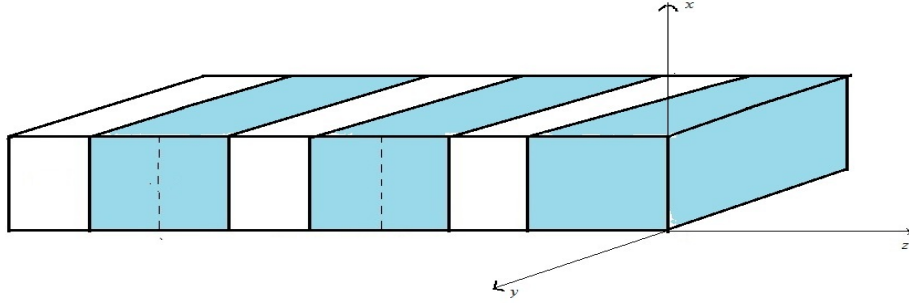


Figura 1.4: Cristal fotônico unidimensional. Tal cristal apresenta simetria contínua nas direções x e y .

$$\hat{O} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Consideremos agora a ação do operador $\hat{T}_d$ na equação (1.20). Usando o fato de que ϵ e μ são simétricos pela translação $\mathbf{d}$, então teremos:

$$\hat{T}_d \hat{O} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{r} - \mathbf{d})} \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{d})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \hat{O} \mathbf{H}(\mathbf{r} - \mathbf{d}). \quad (1.21)$$

Assim:

$$\hat{T}_d \hat{O} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{O} \hat{T}_d \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1.22)$$

o que é equivalente a:

$$[\hat{T}_d, \hat{O}] = 0. \quad (1.23)$$

O fato de $\hat{T}_d$ e $\hat{O}$ comutarem significa que estes operadores possuem o mesmo conjunto de autofunções. Assim para se obter o conjunto de autofunções de $\hat{O}$, precisamos apenas do conjunto de autofunções de $\hat{T}_d$.

Consideremos então a ação do operador $\hat{T}_d$ na função vetorial $e^{ik_x x} e^{ik_y y} \mathbf{u}(z)$, onde $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ é o vetor de onda associado aos modos eletromagnéticos e $\mathbf{u}(z)$ é uma função vetorial da variável z a ser determinada. Temos então que:

$$\hat{T}_d[e^{ik_x x} e^{ik_y y} \mathbf{u}(z)] = e^{ik_x x} e^{ik_y y} [e^{ik_x x} e^{ik_y y} \mathbf{u}(z)]. \quad (1.24)$$

Assim concluímos que as autofunções de $\hat{O}$ para um cristal fotônico unidimensional tem a forma:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = e^{ik_x x} e^{ik_y y} \mathbf{u}(z). \quad (1.25)$$

Sem precisar resolver a equação de onda, apenas explorando uma das simetrias, que é a de translação contínua, mostra-se que os modos eletromagnéticos tem a forma dada por (1.25). Nesse caso $\mathbf{u}(z)$ é uma função a ser determinada. Uma outra simetria presente no cristal fotônico, que é a simetria de translação discreta fornecerá uma importante informação a respeito de $\mathbf{u}(z)$.

Simetria de Translação Discreta

A principal simetria do cristal fotônico é a simetria de translação discreta. Os cristais eletrônicos também são caracterizados por essa simetria, e a principal consequência de tal simetria nos cristais eletrônicos é a existência de uma estrutura de bandas na energia dos elétrons que se movem nesses cristais [16, 17]. Mostraremos aqui, que nos cristais fotônicos a simetria de translação discreta também leva a uma estrutura de bandas nas frequências dos modos eletromagnéticos que se propagam no cristal.

A simetria de translação discreta não se trata de uma invariância por um deslocamento qualquer, mas sim uma invariância pelo deslocamento do sistema a uma distância que é múltiplo inteiro de um comprimento fixo. Consideremos o cristal fotônico da Figura 1.3. Tal cristal possui simetria discreta de translação na direção z . O comprimento fundamental $d = a + b$ é a *constante de rede*, e o vetor correspondente a este comprimento fundamental na direção z , é o *vetor da rede primitiva*. No caso do cristal fotônico unidimensional, ilustrado pela Figura 1.3 o vetor da rede primitiva é $\mathbf{a} = d\hat{\mathbf{z}}$. A simetria de translação discreta é dada então por $\epsilon(z) = \epsilon(z \pm ld)$, onde l é inteiro.

A região fundamental compreendida entre $0 \leq z \leq d$ é a *célula unitária*. Para se tratar da simetria discreta de translação, também fazemos uso do operador de translação. Neste caso teremos:

$$\hat{T}_l \mathbf{f}(z) = \mathbf{f}(z \pm ld), \quad (1.26)$$

e assim podemos encontrar o conjunto de autofunções de $\hat{T}_l$:

$$\hat{T}_l e^{ik_z z} \hat{\mathbf{z}} = e^{i(k_z(z \pm ld))} = e^{\pm ikl d} [e^{ik_z z} \hat{\mathbf{z}}]. \quad (1.27)$$

Vamos considerar funções vetoriais do tipo $e^{ik_z(z + \frac{2\pi l}{d})} \hat{\mathbf{z}}$. Assim teremos que:

$$\hat{T}_l e^{ik_z(z + \frac{2\pi l}{d})} \hat{\mathbf{z}} = e^{ikl d} [e^{ik_z(z + \frac{2\pi l}{d})} \hat{\mathbf{z}}]. \quad (1.28)$$

Concluimos então que $e^{ik_z(z + \frac{2\pi l}{d})} \hat{\mathbf{z}}$ formam um conjunto degenerado de autofunções com autovalor $e^{ik_z ld}$, assim se somarmos a k , qualquer múltiplo inteiro de $f = \frac{2\pi}{d}$, o modo eletromagnético não será mudado, ou seja, $\omega(k_z) = \omega(k_z \pm lf)$. O vetor $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{z}}$ é chamado de *vetor da rede recíproca*, e a região $-\frac{2\pi}{d} \leq k_z \leq \frac{2\pi}{d}$ é chamada de *zona de Brillouin*. Qualquer valor de k_z é redundância de algum valor de k_z pertencente à zona de Brillouin.

Do estudo das simetrias de translação contínua, mostramos que:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = e^{ik_x x} e^{ik_y y} \mathbf{u}(z). \quad (1.29)$$

Como o sistema é simétrico por translação discreta, então isso implica em $[\hat{O}, \hat{T}_l] = 0$ e assim pode-se concluir que $\hat{O}$ e $\hat{T}_l$ possuem auto estados comuns, e como mostramos

quem são os autoestados de $\hat{T}_d$, mostramos automaticamente os autoestados de $\hat{O}$. Assim podemos observar que a função vetorial $\mathbf{u}(z)$ pode ser escrita como uma superposição de autoestados de T_l . Isto leva a:

$$\mathbf{u}(z) = \sum_l A_l(x, y) e^{i(k_z \pm lf)z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.30)$$

A partir da equação (1.30) acima, vamos redefinir a função vetorial $\mathbf{u}(z)$ como sendo:

$$\mathbf{u}(z) = \sum_l A_l(x, y) e^{\pm lfz}. \quad (1.31)$$

Uma observação importante da expressão acima é que $\mathbf{u}(z)$ é periódico, isto é, $\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}(z \pm ld)$.

Com isso concluímos que os modos eletromagnéticos num cristal fotônico unidimensional tem a forma:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = e^{ik_x x} e^{ik_y y} \mathbf{u}(z), \quad (1.32)$$

onde $\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}(z \pm ld)$.

Tal resultado é conhecido na Física do Estado Sólido como *Teorema de Bloch* [16, 17]. O fato de $\mathbf{u}(z)$ ser periódico, significa que o problema estará restrito à célula unitária. Pelo Teorema de Bloch, podemos estender a solução restrita à célula unitária para as demais regiões do cristal. O fato do problema ser restrito a uma região finita, matematicamente pode ser entendido como um sistema confinado, assim os modos eletromagnéticos $\omega(\mathbf{k})$ serão quantizados, o que significa que aparecerá uma estrutura de bandas relacionada as frequência dos modos eletromagnéticos.

1.3 Cristais Fotônicos Unidimensionais

Faremos a partir de agora o tratamento analítico da incidência de modos eletromagnéticos em cristais fotônicos unidimensionais. Vamos considerar aqui o caso mais simples, que é o

da incidência normal, isto é, a direção de propagação da onda é perpendicular ao plano das placas do cristal e assim tem o vetor de onda dado por $\mathbf{k} = kz$. O primeiro a resolver este problema foi Lord Rayleigh [18] em 1917, que resolveu tal problema da maneira tradicional, considerando as sucessivas reflexões e transmissões nas componentes do sistema periódico. O tratamento feito aqui a respeito deste problema não será tão laboroso quanto o feito originalmente por Lord Rayleigh. Este será baseado nas simetrias do sistema. Vimos anteriormente as implicações das simetrias para os modos eletromagnéticos presentes no cristal fotônico. Uma das principais implicações dessas simetrias é que os modos eletromagnéticos obedecem o Teorema de Bloch. Assim para o caso de incidência normal teremos que:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = e^{ikz} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(z). \quad (1.33)$$

O teorema de Bloch tem uma implicação importante, que para caracterizar completamente o problema, basta tomarmos os valores de k restritos a zona de Brillouin. Assim, para obter as soluções da equação (1.12) precisamos trabalhar apenas na região compreendida entre $0 \leq z \leq a + b$. Para o caso de incidência normal no cristal, consideramos as duas polarizações lineares possíveis: a polarização $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$. Podemos observar que os modos associados a estas duas polarizações são degenerados, isto é, correspondem às mesmas frequências. Assim podemos considerar apenas uma das polarizações, por exemplo, a polarização $\hat{\mathbf{x}}$. Para o caso de incidência oblíqua, que não será tratado aqui, a degenerescência entre as polarizações $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ é quebrada. Para a polarização $\hat{\mathbf{x}}$ teremos então:

$$\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{\mathbf{x}}, \quad (1.34)$$

$$\mathbf{H}(z) = H(z) \hat{\mathbf{y}}. \quad (1.35)$$

Nas regiões sem interfaces entre as placas, podemos considerar o meio como sendo homogêneo. Assim nessas regiões, a equação de onda (1.12) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \omega^2 H = 0. \quad (1.36)$$

O cálculo detalhado da solução da equação acima é feito no apêndice A.

Assim, encontramos a seguinte equação transcendental que dá a relação de dispersão entre a frequência e o vetor de onda:

$$\cos(k(a+b)) = \cos q_1 a \cos q_2 b + \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{I_2} + \frac{I_2}{I_1} \right) \sin q_1 a \sin q_2 b \quad (1.37)$$

onde $q_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c}$, $q_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c}$, $I_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ e $I_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$.

A relação (1.37) é a relação de dispersão para os modos eletromagnéticos no cristal fotônico unidimensional. Observamos que o membro esquerdo desta relação é limitado entre -1 e 1. Isso significa que $\omega(k)$ não pode assumir qualquer valor, mas sim valores restritos a relação de dispersão (1.37), o que implica em alguns valores proibidos para as frequências. Dessa forma então surgem as bandas de frequência. Abaixo traçamos gráficos que mostram estas bandas de frequência no cristal fotônico unidimensional:

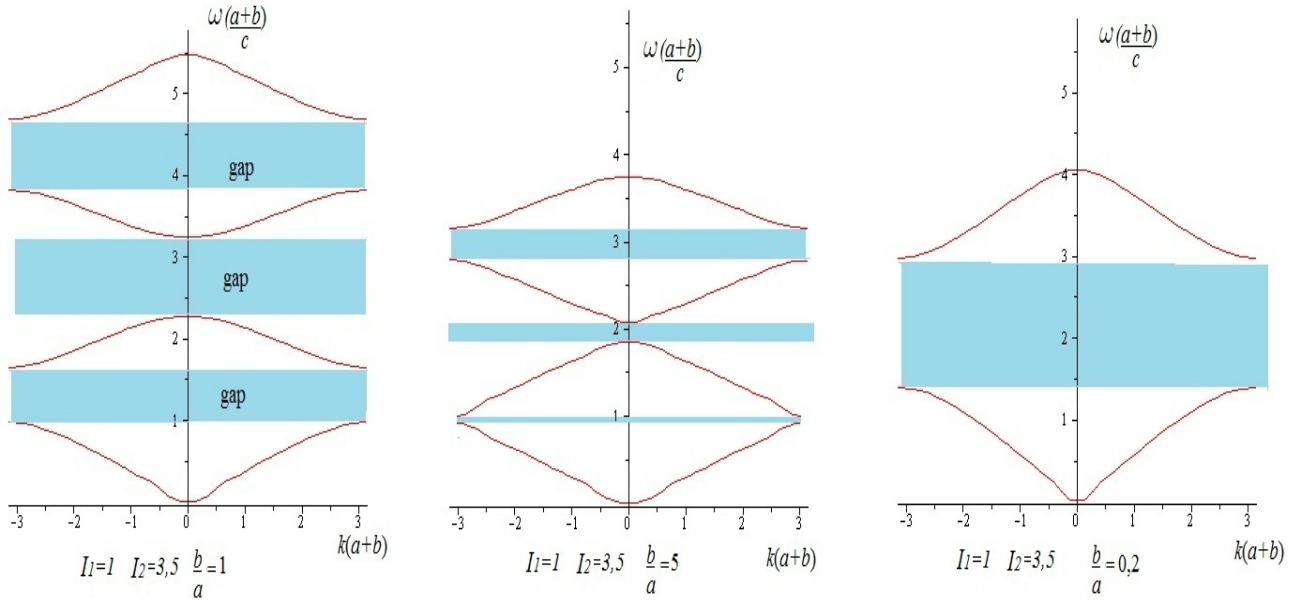


Figura 1.5: Estrutura de bandas num cristal fotônico unidimensional.

Observamos na figura 1.5 que o contraste entre os índices de refração entre as duas placas que forma a estrutura periódica traz uma estrutura de bandas e gaps. O que se observa também é que a relação entre b e a pode modular o gap. Se $\frac{b}{a}$ crescer, observamos

que os gaps diminuam, e assim para $\frac{b}{a} = 5$ o primeiro gap começa a desaparecer. Já no caso em que $\frac{b}{a}$ diminui, os gaps aumentam como é mostrado na figura acima para $\frac{b}{a} = 0,2$.

Capítulo 2

Descrição de Sistemas de Massa Variável

2.1 Introdução

O estudo de portadores de carga em semicondutores pode ser feito usando o método da massa efetiva [19]. Por isso, recentemente, o problema da dinâmica de partícula de massa variável tem sido estudado. Por exemplo, na referência [20] os autores obtêm as fórmulas de Feymann e equações tipo Schrödinger descrevendo difusão de partículas nesse caso. Já na referência [22] são estudados os estados de superfície de um cristal semi-infinito, e seus estados eletrônicos são obtidos usando o modelo de massa variável. Os estados espalhados de um sistema quântico onde uma partícula tem massa m_1 para $x > 0$ e massa m_2 para $x < 0$, é investigado em [23]. Uma classe de sistemas quânticos bidimensionais não relativísticos exatamente solúveis são construídos em [25]. Uma grande classe de osciladores com massa dependente da posição e os correspondentes estados coerentes podem ser encontrados em [24]. A análise da influência da barreira delta de Dirac tem sido feita em [26]. Enfim, há uma motivação grande para se estudar partículas com massa variável.

No capítulo anterior, entendemos os aspectos básicos da propagação de uma onda eletromagnética num cristal fotônico. A maioria dos cristais fotônicos são basicamente meios dielétricos periódicos. O principal efeito da propagação de ondas eletromagnéticas nesses

cristais são o surgimento das bandas de frequência e as regiões proibidas (photonic band gap).

Uma pergunta interessante que podemos fazer é: o que aconteceria com a onda se trocássemos num meio periódico o material dielétrico, por um material metálico? Nesse caso a onda eletromagnética seria atenuada e assim não teríamos transmissão de onda. Mas se ao invés de ondas eletromagnéticas, tivermos elétrons, acontecerá algo interessante: como num metal, o elétron de condução possui uma massa efetiva, então se tivermos um meio metálico periódico, o elétron se moverá nesse meio como se tivesse uma massa efetiva variável.

Nesse caso o hamiltoniano que descreve o problema deve ser periódico e assim teremos uma estrutura de bandas para o elétron. Uma importante aplicação para um sistema metálico periódico, é de construir um novo tipo de semiconductor a partir de metais. O que faremos então nesse capítulo será o estudo de sistemas de massa variável, propondo um hamiltoniano para descrever partículas com massa variável, para posteriormente fazermos uma aplicação num sistema de massa periódico, calculando a estrutura de bandas para tal sistema.

2.2 Hamiltoniano para Partículas de Massa Variável

Para uma partícula livre de massa constante m , o hamiltoniano clássico é escrito como $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$. A partir do processo de quantização canônica, as variáveis clássicas são convertidas em operadores lineares, e assim teremos $p \rightarrow \hat{p}$ e $m \rightarrow \hat{m}$. Se a massa da partícula é constante, então $\hat{m}^{-1}$ comuta com $\hat{p}$ e consequentemente, $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{m}^{-1}\hat{p}^2$. Agora, o que acontece se a massa depender de x ? Neste caso, os operadores $\hat{m}$ e $\hat{p}$ não comutam, então no hamiltoniano da partícula livre com massa variável, devemos considerar todas as permutações entre $\hat{p}$, $\hat{p}$ e $\hat{m}^{-1}$. Assim, de maneira natural propomos o seguinte hamiltoniano para a partícula livre com massa variável:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{6} [\hat{m}(\hat{x})^{-1} \hat{p}^2 + \hat{p} \hat{m}(\hat{x})^{-1} \hat{p} + p^2 \hat{m}(\hat{x})^{-1}] . \quad (2.1)$$

Podemos então, a partir deste hamiltoniano, escrever a equação de Schrodinger associada a partícula livre com massa variável:

$$-\frac{1}{6} \hbar^2 \left[m^{-1} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(m^{-1} \frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{d^2}{dx^2} (m^{-1} \psi) \right] = E \psi. \quad (2.2)$$

Agora para descrever completamente o problema, precisamos especificar como a massa varia. O problema que propomos resolver é o caso em que a massa varia periodicamente, como mostra a Figura 2.1. A massa tem periodicidade $a + b$. Tal escolha justifica-se pelo fato de se usar sistemas com massa periódica para descrever semicondutores [19].

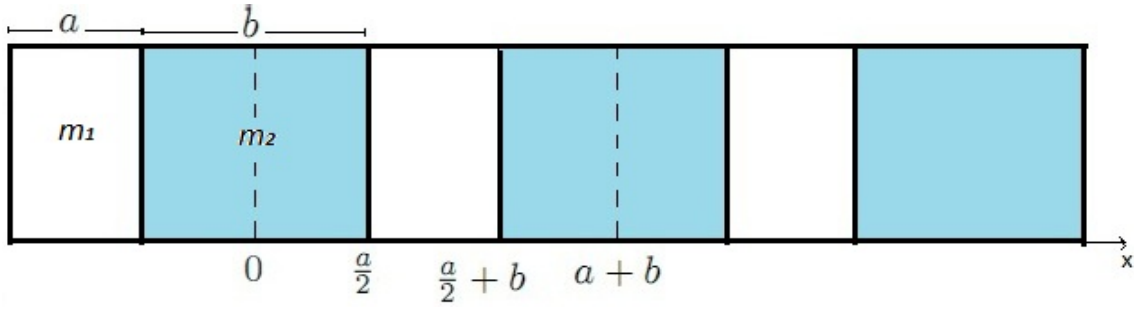


Figura 2.1: Partícula livre com massa periódica

2.3 Condições de Contorno

Para resolver a equação de Schrödinger associada ao sistema de massa periódica proposto na seção anterior, precisamos das condições de contorno do problema. Temos então dois tipos de condições de contorno: as condições de Bloch, pelo fato do Hamiltoniano ser periódico [16, 17], e as condições de interface, que se dá quando muda-se de um meio para o outro.

2.3.1 Condições de Bloch

Como o Hamiltoniano é periódico, então o teorema de Bloch é satisfeito. Nesse caso teremos:

$$\psi(a + b) = e^{ik(a+b)}\psi(0) \quad (2.3)$$

$$\psi'(a + b) = e^{ik(a+b)}\psi'(0), \quad (2.4)$$

onde k é o número de onda e $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$.

A partir do teorema de Bloch podemos reduzir o problema à célula unitária. Esta célula unitária corresponde a região $0 \leq x \leq a + b$.

2.3.2 Condições de Interface

Além das condições de Bloch, temos também as condições de interface, as quais conectam duas regiões onde as massas são diferentes. Para encontrar essas condições de contorno, consideremos a equação de Schrödinger:

$$-\frac{1}{6}\hbar^2 \left[m^{-1} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(m^{-1} \frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{d^2}{dx^2} (m^{-1}\psi) \right] = E\psi. \quad (2.5)$$

Na região fora das interfaces a massa é constante. Vamos então integrar a equação de Schrödinger nas vizinhanças do ponto x_0 , o qual divide as regiões de massas diferentes,

como é mostrado na Figura 2.2. Integrando-se então a equação de Schrodinger no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, onde δ é muito pequeno, teremos:

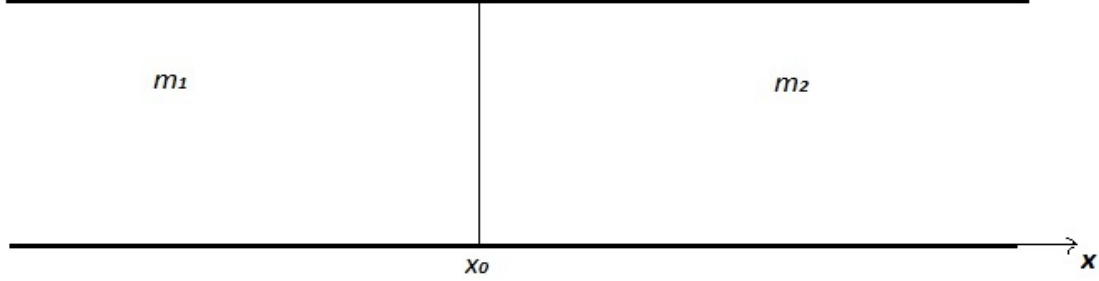


Figura 2.2: Interface em $x = x_0$

$$\left[\frac{1}{m} \psi' \right]_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \left(\frac{\psi'(x_0^+) + \psi'(x_0^-)}{2} \right) + \left[\frac{1}{m} \psi' \right]_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m} \psi \right) \right]_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} = -\frac{6E}{\hbar^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \psi dx \quad (2.6)$$

Onde nós usamos a regra de filtragem da delta de Dirac para funções descontínuas:

$$\psi(x) \delta(x - x_0) = \frac{\psi(x_0^+) + \psi(x_0^-)}{2} \delta(x - x_0). \quad (2.7)$$

E a massa é escrita como:

$$m(x)^{-1} = \frac{1}{m_1} H(x_0 - x) + \frac{1}{m_2} H(x - x_0), \quad (2.8)$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

No limite de $\delta \rightarrow 0$ encontramos então a seguinte condição de descontinuidade para a derivada em $x = x_0$:

$$\psi'(x_0^+) = \left(\frac{m_1 + 5m_2}{5m_1 + m_2} \right) \psi'(x_0^-). \quad (2.9)$$

Precisamos agora das condições de interface para ψ . Para isso, vamos encontrar a primitiva da eq.(2.6). Isto resulta em:

$$m^{-1}\psi' + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) \left(\frac{\psi'(x_0^+) + \psi'(x_0^-)}{2}\right) H(x-x_0) + m^{-1}\psi + \frac{d}{dx} (m^{-1}\psi) = F(x), \quad (2.10)$$

$$\text{onde } F(x) \equiv -\frac{6E}{\hbar^2} \int \psi dx$$

Integrando-se agora a eq. (2.10) nas vizinhanças de $x = x_0$ encontramos:

$$3 \left[\frac{1}{m} \psi \right]_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) (\psi(x_0^+) + \psi(x_0^-)) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x) dx. \quad (2.11)$$

Então, no limite em que $\delta \rightarrow 0$, encontramos a condição de contorno para $x = x_0$:

$$\psi(x_0^+) = \left(\frac{m_1 + 2m_2}{2m_1 + m_2}\right) \psi(x_0^-), \quad (2.12)$$

Das condições de interface (2.9), (5.18), e das condições de Bloch (2.3), (2.4), o problema está completamente especificado com o conjunto de condições de contorno abaixo:

$$\psi\left(\frac{a^+}{2}\right) = \alpha \psi\left(\frac{a^-}{2}\right) \quad (2.13)$$

$$\psi'\left(\frac{a^+}{2}\right) = \rho \psi'\left(\frac{a^-}{2}\right) \quad (2.14)$$

$$\psi\left(\frac{a}{2} + b^+\right) = \lambda \psi\left(\frac{a}{2} + b^-\right) \quad (2.15)$$

$$\psi'\left(\frac{a}{2} + b^+\right) = \sigma \psi'\left(\frac{a}{2} + b^-\right) \quad (2.16)$$

$$\psi(a+b) = e^{ik(a+b)} \psi(0) \quad (2.17)$$

$$\psi'(a+b) = e^{ik(a+b)} \psi'(0), \quad (2.18)$$

onde

$$\alpha = \frac{m_1 + 2m_2}{2m_1 + m_2}, \rho = \frac{m_1 + 5m_2}{5m_1 + m_2}, \lambda = \frac{m_2 + 2m_1}{2m_2 + m_1}, \sigma = \frac{m_2 + 5m_1}{5m_2 + m_1}. \quad (2.19)$$

Na próxima seção, calcularemos as bandas de energia para o sistema apresentado aqui.

2.4 Bandas de Energia

Nesta seção resolveremos o problema da partícula livre com massa variável. a solução geral da equação de Schrödinger na célula unitária é:

$$\psi = \begin{cases} A \cos q_1 x + B \sin q_1 x, & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ C \cos q_2 x + D \sin q_2 x, & \frac{a}{2} \leq x < \frac{a}{2} + b \\ \mathcal{E} \cos q_1 x + F \sin q_1 x, & \frac{a}{2} + b \leq x \leq a + b \end{cases} \quad (2.20)$$

e a derivada da solução geral é:

$$\psi' = \begin{cases} -q_1 A \sin q_1 x + q_1 B \cos q_1 x, & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ -q_2 C \sin q_2 x + q_2 D \cos q_2 x, & \frac{a}{2} \leq x < \frac{a}{2} + b \\ -q_1 \mathcal{E} \sin q_1 x + q_1 F \cos q_1 x, & \frac{a}{2} + b \leq x \leq a + b \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $q_1 = \frac{\sqrt{2m_1 E}}{\hbar}$, $q_2 = \frac{\sqrt{2m_2 E}}{\hbar}$, e $A, B, C, D, \mathcal{E}, F$ são constantes a se determinar.

Aplicando-se as condições (2.13),(2.14),(2.15) e (2.16) teremos:

$$C = \left[\alpha \cos \frac{q_2 a}{2} \cos \frac{q_1 a}{2} + \rho \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin \frac{q_2 a}{2} \sin \frac{q_1 a}{2} \right] A + \left[\alpha \cos \frac{q_2 a}{2} \sin \frac{q_1 a}{2} - \rho \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin \frac{q_2 a}{2} \cos \frac{q_1 a}{2} \right] B, \quad (2.22)$$

$$D = \left[\alpha \sin \frac{q_2 a}{2} \cos \frac{q_1 a}{2} - \rho \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cos \frac{q_2 a}{2} \sin \frac{q_1 a}{2} \right] A + \left[\alpha \sin \frac{q_2 a}{2} \sin \frac{q_1 a}{2} + \rho \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cos \frac{q_2 a}{2} \cos \frac{q_1 a}{2} \right] B, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \left[\lambda \cos q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) + \sigma \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) \right] A \\ & + \left[\lambda \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) - \sigma \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) \right] B \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$\begin{aligned} F = & \left[\lambda \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) - \sigma \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) \right] A \\ & + \left[\lambda \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) + \sigma \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos q_2 \left(\frac{a}{2} + b \right) \right] B, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Agora, aplicaremos as condições de Bloch (2.17) e (2.18):

$$\mathcal{E} \cos q_1(a+b) + F \sin q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} A \quad (2.26)$$

$$-\mathcal{E} \sin q_1(a+b) + F \cos q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} B \quad (2.27)$$

Substituindo $\mathcal{E}$ e F nas equações (2.26) e (4.4), resulta num sistema homogêneo nas variáveis A e B :

$$\begin{cases} (C_{11} - e^{ik(a+b)}) A + C_{12} B = 0 \\ C_{12} A + (C_{22} - e^{ik(a+b)}) B = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

A condição para se ter soluções não triviais é que o determinante da matriz dos coeficientes dada acima se anula. Esta condição implica em:

$$\cos k(a+b) = \cos q_1 a \cos q_2 b - \frac{1}{2} \left(\lambda \rho \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \alpha \sigma \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \sin q_1 a \sin q_2 b \quad (2.29)$$

Desta equação, obtemos a relação de dispersão $E = E(k)$. O membro esquerdo de (2.29) é limitado no intervalo $(-1, 1)$, e por isso, valores de energia tais que $|\cos k(a+b)| > 1$ serão proibidos. Isto implica então numa estrutura de bandas de energia.

Na Figura 2.3 traçamos o diagrama de bandas do sistema formado pela junção periódica de placas planas dos metais Ga e Pb, onde $a = 1\mu m$ e $b = 0.5\mu m$.

Observamos que se aumentarmos o valor de b , o gap diminui, até que desaparece para $b = 0,63\mu m$. Tal comportamento é mostrado no diagrama da figura 2.4 .

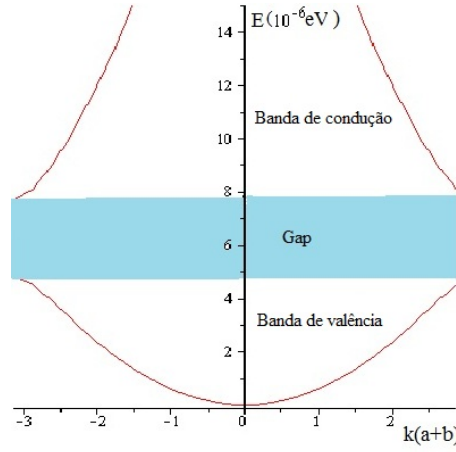


Figura 2.3: Bandas de energia para a junção periódica de Ga e Pb onde as massas efetivas dos elétrons são respectivamente $m_1 = 0,58m_e$ e $m_2 = 1,97m_e$, com $a = 1\mu m$ e $b = 0,5\mu m$

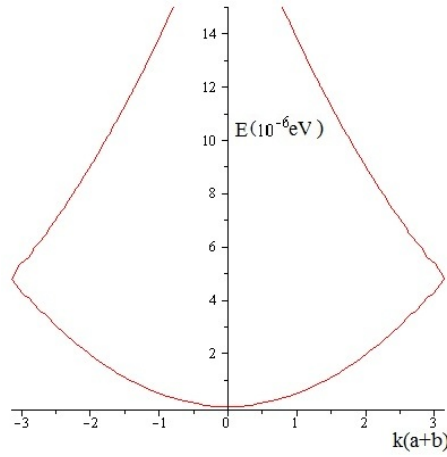


Figura 2.4: Bandas de energia para a junção periódica de Ga e Pb onde as massas efetivas dos elétrons são respectivamente $m_1 = 0,58m_e$ e $m_2 = 1,97m_e$, com $a = 1\mu m$ e $b = 0,5\mu m$

Capítulo 3

Isolantes Topológicos

3.1 Introdução

A maior parte dos estados da matéria são caracterizados por quebras de simetria. Por exemplo, a cristalização da água em gelo quebra a simetria translacional, ou o ordenamento magnético dos spins em materiais magnéticos quebra a simetria rotacional. No entanto, com a descoberta do efeito Hall quântico no início da década de 80 [27, 28], observa-se a existência de novos estados da matéria que não estão relacionados com a quebra de simetria. O estado associado ao efeito Hall quântico, que consiste num gás de elétrons em duas dimensões sujeito a um forte campo magnético externo, não quebra nenhuma simetria, mas define uma fase da matéria, no sentido de que certas propriedades, como por exemplo, a condutividade Hall quantizada, são invariantes por variações suaves nos parâmetros dos materiais. Surge daí o conceito de *ordem topológica*. Dizemos então que o estado associado ao efeito Hall quântico apresenta ordem topológica. Nos últimos 5 anos pesquisadores mostraram a existência de um material chamado de *isolante topológico* [29, 30, 31], onde neste material ocorre um novo efeito associado a ordem topológica. Tal efeito, chamado de *efeito Spin Hall Quântico* é semelhante ao efeito Hall Quântico, só que este não ocorre devido a um campo magnético externo, mas sim devido a uma forte interação spin-órbita. Enquanto no efeito Hall Quântico, o campo magnético separa as cargas de sinais opostos, no efeito Spin Hall Quântico, a interação spin-órbita separa os spins de diferentes orientações. Este efeito foi observado pela primeira vez em filmes de HgTe [32, 33]. Os

isolantes topológicos se caracterizam pela existência de uma estrutura eletrônica no seu interior, semelhante a estrutura de um isolante comum, mas em suas superfícies, a estrutura eletrônica se assemelha a um condutor. A Figura 3.1 ilustra respectivamente a estrutura eletrônica de um isolante comum, de um sistema que apresenta efeito Hall quântico e de um isolante topológico. Esta figura mostra que a diferença entre os estados eletrônicos de um isolante comum, com sistemas que apresentam efeito Hall quântico e isolantes topológicos, se dá pela existência de estados de superfície condutores nestes dois últimos. Um outro efeito observado em isolantes topológicos é que elétrons que atravessam a superfície destes materiais se comportam como se fossem partículas relativísticas descritas pela equação de Dirac. Tais partículas se comportam como férmions sem massa [34].

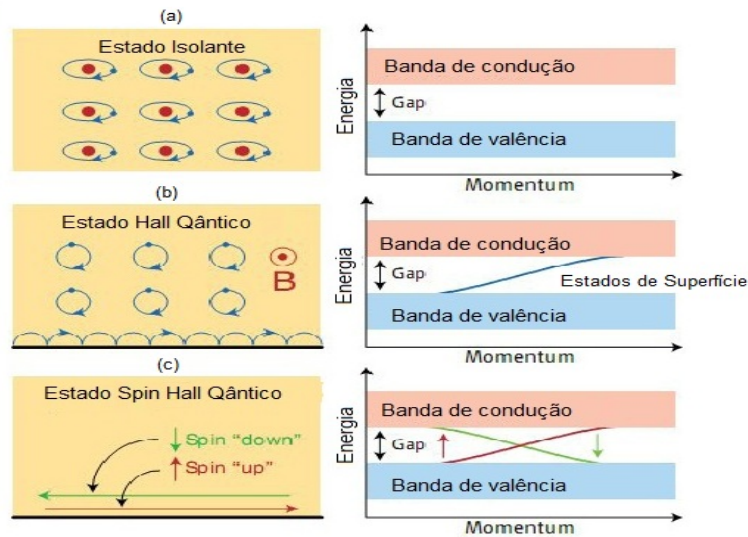


Figura 3.1: (a) Estrutura eletrônica característica de um isolante comum, na qual existe um gap entre as bandas de valência e condução. (b) Estrutura eletrônica característica de um sistema que apresenta efeito Hall quântico. Esta estrutura se difere da de um isolante comum pelo surgimento de estados de superfície condutores. (c) Estrutura eletrônica de um isolante topológico que se caracteriza também por estados de superfície condutores, onde há a separação de spins.

Vários estudos tem sido feitos até então em isolantes topológicos, com grandes potenciais de aplicação tecnológica. Um deles trata-se da obtenção de supercondutividade em superfícies de isolantes topológicos. Na referência [36] mostra-se a existência de pares de

Cooper na superfície de $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$, o qual é um isolante topológico, para $0.12 < x < 0.15$. Uma outra aplicação de isolantes topológicos está na construção de dispositivos na escala nanométricas, onde se pode sintetizar por exemplo, nanofitas e nanofaixas [37].

O nosso principal intuito neste capítulo será o estudo de estruturas fotônicas, usando agora os isolantes topológicos. Para isso iremos apresentar algumas propriedades eletrodinâmicas dos isolantes topológicos na seção a seguir.

3.2 Isolantes Topológicos como um Meio Axiônico

O tratamento da propagação de uma onda eletromagnética que se propaga num isolante comum, pode ser obtido a partir da ação de Maxwell:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^3x dt (\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}^2). \quad (3.1)$$

A partir desta ação, obtém-se as equações de Maxwell usuais para campos que se propagam num meio com permissividade ϵ e permeabilidade μ . Podemos também obter as relações constitutivas da maneira que é mostrado abaixo:

$$\mathbf{D} = \frac{\delta S_0}{\delta \mathbf{E}} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\delta S_0}{\delta \mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}. \quad (3.3)$$

A pergunta agora que fazemos é: qual seria a resposta eletromagnética de um isolante topológico? Quando se incide campos eletromagnéticos, temos os efeitos conhecidos para isolantes comum; da polarização por um campo elétrico, e da magnetização por um campo magnético. Mas a novidade do isolante topológico, é que este tem uma superfície condutora, e assim para um campo elétrico incidente, surgirá uma corrente superficial que dará origem a um campo magnético no material, magnetizando-o, ou seja, no isolante topológico um campo elétrico induz uma magnetização. Por outro lado, de maneira análoga, o campo

magnético induz uma polarização dielétrica no isolante topológico. Isso constitui então o chamado *efeito magneto-elétrico*, onde um campo magnético induz uma polarização elétrica, e um campo elétrico induz uma magnetização.

Tal efeito foi previsto no estudo de axions [38] em Física das Partículas Elementares, para a explicação da matéria escura. Sendo assim, do ponto de vista eletrodinâmico, podemos considerar um isolante topológico, como um meio axiônico [39, 40, 41]. Para a descrição de meios axiônicos, adiciona-se à ação de Maxwell, o termo axiônico $S_\theta = \frac{\alpha}{2\pi}\theta \int d^3x dt \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, onde α é a constante de estrutura fina, e θ é um parâmetro fenomenológico que caracteriza o isolante topológico como um meio axiônico. A ação axiônica S_θ é invariante se mudarmos θ por um múltiplo de 2π [39]. Assim, com a introdução do termo axiônico, teremos então as seguintes relações constitutivas para os isolantes topológicos:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} - \frac{\alpha}{2\pi} \theta(\mathbf{r}) \mathbf{B} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu(\mathbf{r})} \mathbf{B} + \frac{\alpha}{2\pi} \theta(\mathbf{r}) \mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Observamos aqui que no caso limite em que $\theta \rightarrow 0$ retorna-se as relações constitutivas para isolantes comuns. Observa-se também por um cálculo direto, que se o parâmetro θ for uniforme e não depender do tempo, uma onda eletromagnética não sofrerá influência deste parâmetro e assim se propaga como se fosse num meio isolante comum. Neste caso, para que as características do isolante topológico influam na propagação de onda em seu interior deve-se ter variações especiais ou temporais em θ .

Na seção seguinte propomos uma aplicação na qual uma onda eletromagnética se propaga num meio em que θ é periódico.

3.3 Cristais Fotônicos formados por Isolantes Topológicos

Vamos propor nesta seção uma generalização dos cristais fotônicos apresentados no capítulo 1. Tal generalização se dá por considerar que as placas que formam o cristal sejam

isolantes topológicos. O sistema proposto é ilustrado pela Figura 3.3, onde é caracterizado por uma junção periódica de placas planas caracterizadas respectivamente pelos conjuntos de parâmetros $(\epsilon_1, \mu_1, \theta_1)$ e $(\epsilon_2, \mu_2, \theta_2)$, e com respectivas espessuras a e b . O que faremos aqui é o estudo da contribuição da periodicidade do parâmetro θ para a propagação de ondas eletromagnéticas no sistema proposto aqui. Nesse caso os parâmetros que caracterizam o meio são periódicos em z com período $a + b$.

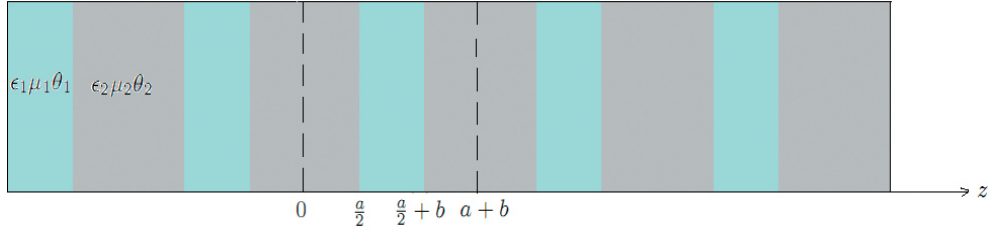


Figura 3.2: Isolante topológico periódico

Mostramos anteriormente que os isolantes topológicos possuem as seguintes relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} - \frac{\alpha}{2\pi} \theta(\mathbf{r}) \mathbf{B} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu(\mathbf{r})} \mathbf{B} + \frac{\alpha}{2\pi} \theta(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

onde α é a constante de estrutura fina.

Supondo a ausência de fontes, as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.11)$$

Para incidência normal de ondas planas no meio, o vetor de onda é $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$, e os campos são:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E_x(z)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z)\hat{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (B_x(z)\hat{\mathbf{x}} + B_y(z)\hat{\mathbf{y}}) \quad (3.12)$$

Da eq. (3.10), teremos:

$$B_x = -\frac{i}{\omega} \frac{dE_y}{dz} \quad B_y = \frac{i}{\omega} \frac{dE_x}{dz} \quad (3.13)$$

Nas regiões em que θ é uniforme e constante as equações de Maxwell são idênticas àsquelas em isolantes comuns. Precisamos agora das condições de contorno. Temos dois tipos de condições de contorno:

- *Condições de Bloch*

como os parâmetros que caracterizam o meio são periódicos, os campos obedecem o teorema de Bloch:

$$\mathbf{E}(z + a + b) = e^{ik(a+b)}\mathbf{E}(z) \quad \mathbf{B}(z + a + b) = e^{ik(a+b)}\mathbf{B}(z) \quad (3.14)$$

O teorema de Bloch nos permite restringir o problema à célula unitária. Podemos definir a célula unitária como sendo a região $0 \leq z \leq a + b$.

- *Condições de interface*

Os campos $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ são contínuos nas interfaces, então $\epsilon_0\epsilon\mathbf{E} - \theta\mathbf{B}$ e $\frac{1}{\mu_0\mu}\mathbf{B} + \theta\mathbf{E}$ são contínuos nos pontos $z = \frac{a}{2}$ e $z = \frac{a}{2} + b$.

Os detalhes do cálculo da estrutura de bandas é feito no Apêndice B. A partir destes cálculos encontra-se a seguinte relação que relaciona ω e k :

$$\cos k(a + b) = \cos q_1 a \cos q_2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_1}{I_2} + I_1 I_2 F \right) \sin q_1 a \sin q_2 b, \quad (3.15)$$

onde $I_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$, $I_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$ e $F = \frac{\alpha\mu_0^2}{4\pi^2}\Delta\theta^2$.

Observamos que o membro esquerdo da equação (3.15) é limitado por -1 e 1 enquanto o membro direito não é limitado. Consequentemente teremos valores proibidos para ω , e então uma estrutura de bandas para as frequências. O que tem de interessante aqui é que mesmo que $\epsilon_1 = \epsilon_2$ e $\mu_1 = \mu_2$, ainda sim, o contraste de θ_1 com θ_2 faz com que existam bandas de frequência para a luz que incide num isolante topológico periódico. Na Figura 3.3 traçamos diagramas de bandas para as frequências, variando apenas a diferença entre θ_1 e θ_2 que equivale a atribuir valores para F . Observamos que ao aumentarmos o valor de F , o tamanho do gap também aumenta, porém o centro do gap não se desloca com a variação de F .

Observamos que a banda que aparece é devido exclusivamente ao contraste entre θ_1 e θ_2 . No caso em que $\theta_1 = \theta_2$, observamos uma estrutura de bandas semelhante ao cristal fotônico formado por isolantes comuns. Isso porque a propagação de ondas em isolantes

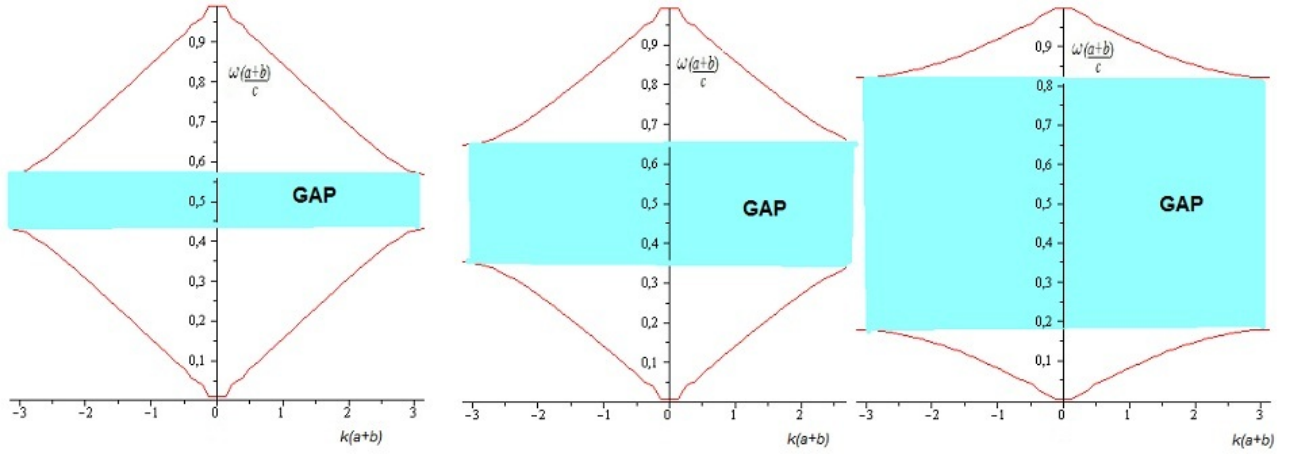


Figura 3.3: Banda de frequência para o caso em que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ e $\frac{a}{b} = 1$. O primeiro gráfico corresponde a $F = 0,2$, o segundo gráfico corresponde a $F = 1$ e o terceiro, $F=10$.

topológicos, difere da propagação de ondas em isolantes comuns, apenas, se o parâmetro θ variar com a posição ou no tempo.

Capítulo 4

Função de onda do Fóton

4.1 Introdução

Na metade do século XIX Maxwell obteve sua teoria eletromagnética. Tal teoria causou uma revolução na ciência tão grande quanto as teorias de Newton do movimento e da gravitação. O grande trunfo da teoria eletromagnética de Maxwell foi fazer a unificação das teorias que explicavam os fenômenos elétricos, magnéticos e, de maneira inesperada, os fenômenos ópticos. Além disso, iria se mostrar depois que a teoria eletromagnética serviria também para descrever a dinâmica de partículas quânticas, relativísticas e sem massa chamada fótons, a nível de primeira quantização.

Neste capítulo apresentaremos o formalismo da primeira quantização do fóton. Mostraremos que a partir da quantização da partícula clássica relativística sem massa, desenvolvemos uma teoria de primeira quantização análoga a teoria quântica de férmions sem massa, com a diferença que as matrizes de spin $1/2$ que aparecem na equação de Dirac são redefinidas para matrizes de spin 1. Um dos problemas em se ter uma teoria de primeira quantização do fóton é a questão da sua localização. D. Newton e E. Wigner [42] e Wightman [43] foram os primeiros a fazer o estudo da localização de partículas quânticas. De acordo com essas análises é possível definir operadores de posição, e assim estados localizados para partículas massivas e partículas sem massa de spin 0, mas não para partículas sem massa com spin não nulo, que é o caso do fóton. Quanto a localização do fóton, S. Dutra mostra

[44] através de um problema de espalhamento, que o fóton não pode ser localizado numa região menor que seu comprimento de onda. O fato da não localização do fóton leva a problemas ao construir uma representação de posição para a descrição do fóton. Sendo assim para construir a teoria da primeira quantização do fóton utilizaremos a descrição de J. Sipe e B. Birula [45, 46, 47, 48], onde nesse caso a interpretação probabilística é redefinida.

4.2 Obtenção da função de onda do fóton

O fóton é uma partícula intrinsecamente relativística. Para a descrição quântica, vamos considerar a energia de um fóton livre:

$$E = pc. \quad (4.1)$$

A maneira natural de se fazer o processo de quantização é partir das regras usuais de quantização. O momento do fóton é bem definido, e assim pode-se ter uma representação dos momentos para o fóton. Podemos então introduzir a amplitude de probabilidade $\gamma_{\pm}(\mathbf{p}, t)$ para um único fóton com momento $\mathbf{p}$ e polarização ± 1 . Assim, para se fazer a quantização, usamos a associação $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Neste caso obtemos a seguinte equação de onda para o fóton na representação do momento:

$$i\hbar \frac{\partial \gamma_{\pm}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = cp\gamma_{\pm}(\mathbf{p}, t). \quad (4.2)$$

Para fazermos a interpretação probabilística de $\gamma_{\pm}(\mathbf{p}, t)$, será conveniente introduzirmos os vetores de polarização linear $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e também o vetor de propagação $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. Assim os vetores de polarização circular são dados por: $\mathbf{e}_{\pm} = \mp \frac{\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}$. Com isso, definiremos a amplitude de probabilidade vetorial associado a polarização circular:

$$\vec{\gamma}_{\pm}(\mathbf{p}, t) = \gamma_{\pm}(\mathbf{p}, t)\mathbf{e}_{\pm}. \quad (4.3)$$

Então podemos interpretar a quantidade $\vec{\gamma}_{\pm}^*(\mathbf{p}, t) \cdot \vec{\gamma}_{\pm}(\mathbf{p}, t)d\mathbf{p} = \gamma_{\pm}^*(\mathbf{p}, t) \cdot \gamma_{\pm}(\mathbf{p}, t)d\mathbf{p}$, como sendo a probabilidade de detecção de um fóton com polarização(spin) ± 1 , e com momento

entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. Também é fácil de mostrar que $\vec{\gamma}_+^*(\mathbf{p}, t) \cdot \vec{\gamma}_-(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0$, pois os vetores de polarização são perpendiculares. Isto significa que os estados de polarização no espaço livre são independentes.

Vamos definir agora a transformada de Fourier de $\vec{\gamma}_\pm$:

$$\Phi_\pm(\mathbf{r}, t) \equiv \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \vec{\gamma}_\pm(\mathbf{p}, t) e^{i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}} \quad (4.4)$$

Se o momento do fóton está na direção $\hat{\mathbf{p}}$, através de simples manipulações algébricas na equação (4.4), mostramos que $\Phi_\pm(\mathbf{r}, t)$ satisfaz:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \pm c\hbar \nabla \times \Phi_\pm(\mathbf{p}, t) \quad (4.5)$$

A partir da interpretação probabilística de $\vec{\gamma}(\mathbf{p}, t)$, podemos então escrever a condição de normalização abaixo:

$$\int d\mathbf{p} (\vec{\gamma}_+^* \cdot \vec{\gamma}_+ + \vec{\gamma}_-^* \cdot \vec{\gamma}_-) = 1 \quad (4.6)$$

Das equações (4.4) e (4.6) mostramos que:

$$\int d\mathbf{r} (\Phi_+^* \cdot \Phi_+ + \Phi_-^* \cdot \Phi_-) = 1 \quad (4.7)$$

Da equação (4.7), poderíamos interpretar precipitadamente $\Phi(\mathbf{r}, t)$ como sendo a função de onda do fóton na representação das posições. Mas esta interpretação entra em contradição ao resultado da não localização do fóton [42, 44]. Então temos um problema ao tomar $\Phi(\mathbf{r}, t)$ como sendo a função de onda do fóton na representação da posição. Para evitar tal problema, podemos fazer uma outra escolha para a função de onda. A possível escolha para esta função de onda deve ser tal, que sua interpretação probabilística esteja relacionada a outra grandeza do fóton ao qual se possa medir. Para a função de onda do fóton vamos definir então:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde:

$$\Psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{p} \frac{\sqrt{cp}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \vec{\gamma}_{\pm}(\mathbf{p}, t) e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}. \quad (4.9)$$

Assim com a definição acima, conclui-se que:

$$\int \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \cdot \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \langle cp \rangle = \langle E \rangle. \quad (4.10)$$

Ou seja, a interpretação probabilística para a função de onda escolhida é que a integral do quadrado do seu módulo numa certa região é o valor esperado para a energia do fóton nesta região. E se dividirmos tal expressão por $\hbar\omega$ teremos a probabilidade de medir a energia $\langle E \rangle$ para o fóton numa certa região. Resta-nos agora mostrar qual equação de onda que Ψ satisfaz.

De forma análoga a $\Phi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$, podemos mostrar que $\Psi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ satisfaz a equação:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \pm c\hbar \nabla \times \Psi_{\pm}(\mathbf{r}, t). \quad (4.11)$$

Esta equação é análoga a equação de Schrödinger para o fóton. Ou melhor dizendo, como o fóton é uma partícula intrinsecamente relativística, a eq. (4.11) é o análogo à equação de Dirac para o fóton. Para a analogia com a equação de Dirac ficar mais explícita, podemos escrever a eq. (4.11) na forma hamiltoniana, isto é, na forma $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi$. Isso é feito associando o operador hamiltoniano com

$$\mathcal{H} = c\hbar \begin{pmatrix} \nabla \times & 0 \\ 0 & -\nabla \times \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Vamos escrever o operador rotacional da seguinte maneira:

$$\nabla \times = -i\mathbf{S} \cdot \nabla, \quad (4.13)$$

onde $(S_i)_{kl} = -i\epsilon_{ikl}$, sendo ϵ_{ikl} os símbolos de Levi-Civita

Então, a forma explícita das componentes da matriz vetorial $\mathbf{S}$ é:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Usando (4.13), e $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, podemos escrever o hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = c \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{S} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Podemos escrever esta equação de uma forma mais compacta, como mostrado abaixo:

$$\mathcal{H}\Psi = c\rho_3(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\Psi, \quad (4.18)$$

onde ρ_3 é uma matriz que produz um sinal positivo quando atua na componente superior de $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\Psi$, e produz o sinal negativo quando atua na componente inferior

Podemos observar então que existe uma perfeita analogia da equação de onda para o fóton, com a equação de Dirac para Férmions de spin 1/2 sem massa [50]:

$$\mathcal{H}\Psi = c\rho_3(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\Psi, \quad (4.19)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. com a diferença de que as matrizes de Dirac de spin 1/2 são substituídas pelas matrizes S_x, S_y, S_z , as quais estão associadas a partículas de spin 1. Ou seja, fótons descritos pela função de onda apresentada aqui são partículas bosônicas de spin 1.

Outra observação importante, é que na equação de onda para o fóton aparece o fator $\hbar$ nos dois membros da equação. Assim a equação de onda não depende de $\hbar$, o que significa que no limite clássico, ou seja, $\hbar \rightarrow 0$, a descrição para o fóton continua da mesma maneira descrita pela teoria da primeira quantização do fóton. É por isso que no limite clássico os fenômenos associados ao fóton possuem caráter ondulatório. Essa característica da teoria da primeira quantização do fóton nos leva então a uma relação direta da função de onda com os campos clássicos. As equações clássicas para os campos no espaço livre e sem fontes

são:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Multiplicando-se $\nabla \times \mathbf{E}$ por $\sqrt{\epsilon_0}$, $\nabla \times \mathbf{H}$ por $\pm i\sqrt{\mu_0}$ e somando-se, temos:

$$\nabla \times (\sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E} \pm i\sqrt{\mu_0} \mathbf{H}) = \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E} \pm i\sqrt{\mu_0} \mathbf{H}). \tag{4.21}$$

Assim da última equação podemos fazer a associação abaixo [46, 47, 48]:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\sqrt{\mu_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ \sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - i\sqrt{\mu_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Observamos que a associação feita entre a função de onda do fóton e os campos clássicos é compatível com a interpretação da função de onda do fóton:

$$\int d\mathbf{r} \Psi^\dagger \cdot \Psi = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \langle E \rangle. \tag{4.23}$$

Para estados estacionários, isto é, estados os quais $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, temos então a equação de onda para o fóton independente do tempo:

$$\mathcal{H}\Psi(\mathbf{r}) = \hbar\omega\Psi(\mathbf{r}), \tag{4.24}$$

que é análoga a equação de Dirac independente do tempo.

4.3 Fóton num meio material

O problema microscópico da propagação do fóton num meio material possui um nível de complexidade alto, pois para tratar tal problema devemos considerar as sucessivas absorções e emissões de fóton nas moléculas do meio.

Macroscopicamente, um meio linear e isotrópico, é caracterizado por uma função susceptibilidade elétrica $\chi_e(\mathbf{r})$ e uma função susceptibilidade magnética $\chi_m(\mathbf{r})$. Vamos fazer o tratamento semiclássico discutido em [53]. Tal tratamento consiste em supor que o meio desempenhe o papel de um campo externo para o fóton, de maneira análoga a elétrons na

presença de campos elétricos. Dessa forma, o meio contribuirá para a energia potencial do fóton. Vamos considerar aqui um meio linear, isotrópico, e não dispersivo. Dessa forma as equações clássicas rotacionais são:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega(1 + \chi_m(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (4.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega(1 + \chi_e(\mathbf{r}))\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (4.26)$$

Vamos definir aqui as matrizes ρ e η , como sendo:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

e

$$\eta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Assim, o efeito de ρ e η aplicado a $\Psi(\mathbf{r})$ é:

$$\rho\Psi = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E} \\ \sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

e

$$\eta\Psi = \begin{pmatrix} i\sqrt{\mu_0}\mathbf{H} \\ -i\sqrt{\mu_0}\mathbf{H} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

A partir da definição das matrizes ρ e η mostramos as propriedades:

$$\rho^2 = \rho, \quad \eta^2 = \eta, \quad \rho\eta = 0 \quad (4.31)$$

e

$$\mathcal{H}\rho + \rho\mathcal{H} = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}\eta + \eta\mathcal{H} = \mathcal{H}. \quad (4.32)$$

Assim, das equações (4.25) e (4.26), e usando as definições das matrizes ρ e η podemos escrever a equação de onda para o fóton num meio material como sendo:

$$\hbar\omega\Psi(\mathbf{r}) = \mathcal{H}\Psi(\mathbf{r}) - \hbar\omega(\chi_e\rho + \chi_m\eta)\Psi(\mathbf{r}). \quad (4.33)$$

Aplicando em (4.33) o operador $\mathcal{H} - \hbar\omega(\chi_e\rho + \chi_m\eta)$ e usando as propriedades de ρ e η , teremos:

$$(\hbar\omega)^2\Psi(\mathbf{r}) = [\mathcal{H}^2 - \hbar\omega(\chi_e + \chi_m) - \hbar^2\omega^2\chi_e\chi_m]\Psi(\mathbf{r}). \quad (4.34)$$

Vamos fazer um pouco de álgebra com a equação (4.34). Sendo $E = \hbar\omega$ e $\mathcal{H}^2 = c^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{S})^2 = c^2p^2$, a equação (4.34) é escrita como:

$$E^2\Psi = c^2p^2\Psi - E\hbar\omega(\chi_e + \chi_m)\Psi - (\hbar\omega)^2\chi_e\chi_m\Psi. \quad (4.35)$$

$$[E^2 + E(\chi_e + \chi_m)\hbar\omega]\Psi = c^2p^2\Psi - (\hbar\omega)^2\chi_e\chi_m\Psi. \quad (4.36)$$

Somando-se $(\hbar\omega)^2\frac{(\chi_e+\chi_m)^2}{4}$ aos membros da eq. (4.36), obtemos a relação entre E e p dada por:

$$\left(E + \hbar\omega\frac{\chi_e + \chi_m}{2}\right)^2 = (pc)^2 + (\hbar\omega)^2\frac{\chi_e - \chi_m}{4}. \quad (4.37)$$

Esta expressão tem a mesma forma da relação entre a energia e o momento de uma partícula relativística de massa m com uma energia potencial U :

$$(E - U)^2 = (pc)^2 + m^2c^4. \quad (4.38)$$

Comparando-se (4.37) e (4.38), podemos fazer uma interessante interpretação a respeito da propagação do fóton num meio material. Esta interpretação é que um fóton num meio material se comporta efetivamente como uma partícula de massa:

$$m \equiv \frac{\hbar\omega}{2c^2}|\chi_e - \chi_m|. \quad (4.39)$$

e que tem energia potencial:

$$U \equiv -\hbar\omega \frac{\chi_e + \chi_m}{2}. \quad (4.40)$$

Podemos escrever a equação (4.38) como:

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + (\hbar\omega)^2 \frac{(\chi_e - \chi_m)^2}{4}} - \frac{1}{2} \hbar\omega (\chi_e + \chi_m). \quad (4.41)$$

A energia de uma partícula relativística de massa m é:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U. \quad (4.42)$$

Comparando-se (4.41) e (4.42) podemos definir a velocidade do fóton como partícula:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{(\epsilon - \mu)^2}{(\epsilon + \mu)^2}, \quad (4.43)$$

onde $\epsilon = \chi_e = 1$ e $\mu = \chi_m + 1$.

A velocidade do fóton é uma velocidade associada ao fóton como partícula. Tal velocidade é diferente da velocidade de fase e da velocidade de grupo, as quais estão relacionadas com os aspectos ondulatórios do fóton.

Para os casos em que $\epsilon \gg \mu$ ou $\mu \gg \epsilon$ teremos $\frac{v}{c} \ll 1$, e então teremos uma aproximação "não relativística" para o fóton.

4.4 Potencial vetor para o fóton

Qual a interpretação para o potencial vetor do fóton? Para fazer tal interpretação vamos seguir o caminho feito na referência [53]. Vamos fazer a substituição $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{A}$ na equação de onda para o fóton. Assim teremos:

$$\hbar\omega \Psi = c \begin{pmatrix} (\mathbf{p} + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -(\mathbf{p} + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S} \end{pmatrix} - \hbar\omega \chi_e \rho \Psi - \hbar\omega \chi_m \eta \Psi \quad (4.44)$$

Usando as equações clássicas $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}$ e as identidades $\mathbf{p} \cdot \mathbf{S} = \nabla \times$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = A \times$, podemos escrever a eq. (4.44) como:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{\hbar\omega} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \frac{\mathbf{A}}{\hbar\omega} \times \mathbf{E} \quad (4.45)$$

As equações (4.45) são exatamente idênticas a aproximação de Minkowski não relativística para a propagação de ondas em meios móveis [55]:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} + (\epsilon\mu - 1) \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} - (\epsilon\mu - 1) \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{E}, \quad (4.46)$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidade associado ao movimento do meio.

Comparando-se (4.45) e (4.46) concluímos que:

$$\mathbf{A} = \hbar\omega(\epsilon\mu - 1) \frac{\mathbf{u}}{c} \quad (4.47)$$

Assim é mostrado que o potencial vetor para o fóton tem uma relação direta com a velocidade do meio. Este meio pode ser inclusive um fluido, onde o campo de velocidade é obtido através do tratamento hidrodinâmico.

4.5 Resultados

4.5.1 Fóton num meio periódico

Faremos agora uma aplicação da função de onda do fóton, no problema de um fóton, propagando-se num cristal fotônico unidimensional, com o vetor de onda perpendicular ao cristal, como mostra a figura 4.1.

Nesse caso, a contribuição do cristal fotônico na equação de onda para o fóton, se dá através de um potencial periódico, que é obtido por uma susceptibilidade elétrica periódica, o que equivale a uma constante dielétrica periódica. Pela similaridade da equação de onda do fóton, com as equações clássicas, as condições de contorno de interface, serão as mesmas para o caso do campo eletromagnético clássico. Assim Ψ será contínuo na interface, e também, pela periodicidade do sistema, as condições de Bloch são válidas. Assim o cálculo será idêntico ao feito no Apêndice A, onde calculamos estrutura de bandas para ondas

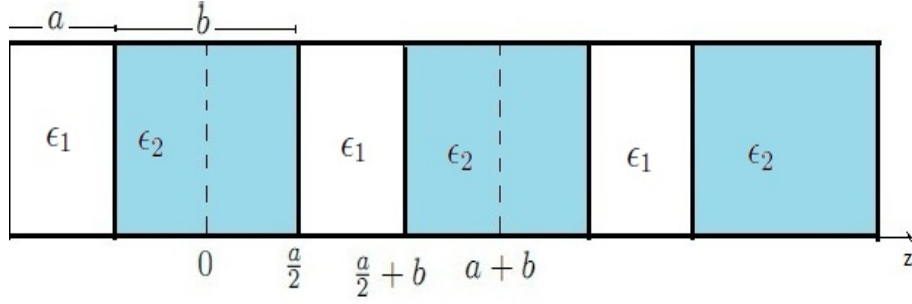


Figura 4.1: Cristal fotônico unidimensional.

eletromagnéticas que se propagam em cristais fotônicos. Logo, a equação transcendental que dá a estrutura de bandas é a mesma obtida no capítulo 1, e assim as bandas de um fóton num cristal fotônico é idêntica as bandas obidas para ondas clássicas.

$$\cos(k(a+b)) = \cos(q_1 a) \cos(q_2 b) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right) \sin(q_1 a) \sin(q_2 a). \quad (4.48)$$

Isso se dá pelo fato de que no limite clássico, as equações quânticas que descrevem a dinâmica do fóton, mantém a mesma forma.

4.5.2 Análogo do Efeito Aharonov-Bohm para o Fóton

Nas seções anteriores fizemos a explanação teórica a respeito da função de onda do fóton num meio material, e da interpretação do potencial vetor associado ao fóton. Faremos agora uma aplicação interessante: vamos investigar o problema do efeito Aharonov-Bohm para o fóton. Para entendermos este problema, vamos recordar o efeito Aharonov-Bohm para o elétron [57, 58]. Quando se tem um feixe de elétrons se dividindo em dois, e depois se recombinando-se, e na região onde o feixe se dividiu, se tem um campo magnético uniforme confinado (figura 4.2), classicamente espera-se que o campo magnético não tenha influência na dinâmica da partícula, pois esta não está imersa no campo. Mas o que se mostra quanticamente é que quando o feixe de elétrons se divide em dois, as funções de onda associada a cada um desses feixes passam a ter uma diferença de fase dada por $\varphi = \frac{1}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\Phi}{\hbar}$, onde $\Phi = \pi a^2 B$ é o fluxo magnético. Nesse caso, o potencial vetor

experimentado pelo elétron tem a forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} Br\hat{\theta}, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{Ba^2}{r}\hat{\theta}, & r > a \end{cases} \quad (4.49)$$

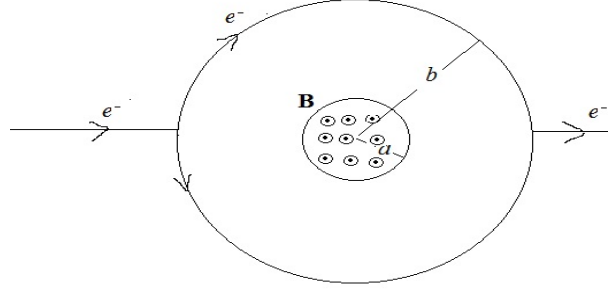


Figura 4.2: Efeito Aharonov-Bohm para o elétron.

O que faremos agora é investigar um efeito análogo para o fóton. Para isso precisamos de um sistema físico, onde em tal sistema o potencial vetor para o fóton tenha a forma semelhante a equação (4.49).

Vimos anteriormente que o potencial vetor experimentado pelo fóton é proporcional ao campo de velocidade do meio. Assim, para obtermos o efeito Aharonov-Bohm para o fóton, devemos ter um meio, onde o campo de velocidade tem uma dependência com a posição, como na equação (4.49). Vamos propor então tal sistema. O meio que atende tais condições é um cilindro dielétrico(e/ou magnético) de raio a que gira uniformemente com velocidade angular Λ em torno do seu eixo, imerso num fluido viscoso que tem viscosidade uniforme e constante. A figura 4.3 ilustra tal meio:

Assim, resolvendo as equações hidrodinâmica de fluidos para o caso acima [56], encontramos o campo de velocidade abaixo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Lambda r\hat{\theta}, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\Lambda a^2}{r}\hat{\theta}, & r > a \end{cases} \quad (4.50)$$

Assim o potencial vetor experimentado pelo fóton tem a forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\hbar\omega}{c}(\epsilon\mu - 1)\Lambda r\hat{\theta}, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\hbar\omega}{c}(\epsilon_f\mu_f - 1)\frac{\Lambda a^2}{r}\hat{\theta}, & r > a \end{cases} \quad (4.51)$$

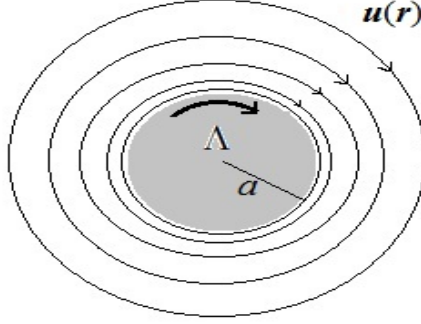


Figura 4.3: Cilindro girante de raio a imerso num fluido viscoso.

onde ϵ_f e μ_f são respectivamente as constante dielétrica e a permeabilidade magnética do fluido.

Assim, o análogo do campo magnético experimentado pelo fóton é:

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{\hbar\omega}{c}(\epsilon\mu - 1)\Lambda\hat{z} \quad (4.52)$$

E assim o "fluxo magnético" é $\bar{\Phi} = \pi\frac{\hbar\omega}{c}(\epsilon\mu - 1)\Lambda a^2$

Suponhamos então um feixe de fótons que se divida em dois, numa circunferência de raio b e em seguida o feixe se recombine, semelhante ao caso da figura (4.2).

Consideremos agora a equação de onda do fóton na presença do potencial vetor (4.44). Vamos supor a transformação:

$$\Psi = e^{i\varphi(\mathbf{r})}\Psi', \quad (4.53)$$

onde $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$.

Desta transformação, temos a equação de onda do fóton como mostrado abaixo:

$$\hbar\omega\Psi' = c \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{S} \end{pmatrix} \Psi' - \hbar\omega\chi_e\rho\Psi' - \hbar\omega\chi_m\eta\Psi'. \quad (4.54)$$

Assim o análogo a fase de Aharonov Bohm para o fóton será dada por;

$$\varphi = \frac{1}{\hbar} \int_0^{2\pi} \frac{\hbar\omega}{c}(\epsilon_f\mu_f - 1)\Lambda \frac{a^2}{b} \hat{\theta} \cdot b d\theta \hat{\theta} = 2\pi\omega(\epsilon_f\mu_f - 1) \frac{a^2\Lambda}{c}. \quad (4.55)$$

Assim, mostramos a existência de uma fase do tipo Aharonov-Bohm para fótons. Podemos usar o efeito Aharonov Bohm para o fóton, por exemplo, para calcular índices de refração de fluidos viscosos. Para isso, basta apenas medirmos a fase geométrica, que assim podemos ter uma medida do índice de refração de tal fluido.

Capítulo 5

Fases Geométricas em Sistemas não Hermitianos Relativísticos

5.1 Introdução

Para se descrever sistemas de partículas que não podem ser descritos com a mecânica clássica, como elétrons, átomos, núcleos, moléculas, sólidos, supercondutores, etc, usamos a mecânica quântica. Para a descrição destes sistemas, a mecânica quântica se baseia em alguns postulados, um deles diz que os observáveis são associados a operadores hermitianos. A exigência de que os observáveis estejam associados a operadores hermitianos, deve-se ao fato desses operadores terem autovalores reais, e seus auto estados serem completos. Precisamos rever aqui este postulado. O fato de se ter autovalores complexos para operadores que representam grandezas físicas pode ter interpretações físicas. Como por exemplo, um valor complexo para o operador hamiltoniano, pode ser entendido como uma dissipação no sistema, ou ganho de energia. Então no caso em que temos sistemas com perdas ou ganho, podemos muito bem tratá-los com o uso de operadores não hermitianos. E também podemos ter operadores não hermitianos que possuem auto-valores reais e que são completos, assim, podemos usar operadores não hermitianos na descrição de sistemas físicos em mecânica quântica sem nenhum problema.

Operadores não hermitianos surgem na mecânica quântica para descrever partes de um sistema, como resultado da decisão de não se incorporar todos os graus de liberdade do

sistema [59], por exemplo, sistemas descrevendo dissipação ou ganho, já que esses dois processos se dá pela interação com um meio externo, que não é levado em consideração nos graus de liberdade. Podemos ter por exemplo, fótons se propagando em meios metálicos ou em meios amplificadores, ou podemos ter também como exemplo potenciais complexos que descrevem o espalhamento de elétrons ou raios X por núcleos atômicos.

O que faremos neste capítulo é referente ao estudo de fases geométricas em sistemas não hermitianos. Sabe-se que partículas quânticas sujeitas a interações periódicas e lentas adquirem fases geométricas em sua função de onda [58]. A generalização relativística deste problema é feita em [60], onde se mostra que o cálculo da fase geométrica é idêntico ao caso não relativístico. O caso de fases geométricas em sistemas não relativísticos, com hamiltoniano não hermitiano foi estudado por vários autores [61, 62, 63, 64]. O que eles mostraram foi que quando o hamiltoniano é não hermitiano, surge uma fase geométrica complexa, onde a parte real representa uma fase propriamente dita, e a parte imaginária representa uma atenuação na amplitude da função de onda.

O que faremos aqui é a generalização relativística do problema da fase geométrica para sistemas descritos por hamiltonianos não hermitianos. Outro problema que trataremos aqui, é o relacionado ao análogo do efeito Aharonov-Bohm para o fóton, no caso em que o potencial vetor associado ao fóton é complexo.

5.2 Fases Geométricas para Partículas Relativísticas Descritas por Hamiltonianos não Hermitianos

Um resultado importante da mecânica quântica é o teorema adiabático [58]. Este teorema nos diz que para um sistema quântico, o qual está sujeito a interações muito lentas e que inicialmente está em um dos seus autoestados, tal sistema permanecerá neste autoestado durante toda sua evolução temporal. Uma consequência deste teorema é o surgimento de um tipo de fase na função de onda chamada de fase geométrica, e tal fase é real, se o hamiltoniano for hermitiano. Para sistemas relativísticos, o teorema adiabático

continua válido [60].

Nesta seção calcularemos fases geométricas para sistemas relativísticos descritos por um hamiltoniano não hermitiano. Os sistemas tratados aqui serão: partículas de spin 0 (descritas pela equação de Klein-Gordon), partículas de spin 1/2, (descritas pela equação de Dirac) e partículas de spin 1 (descritas pelas equações de Maxwell para função de onda do fóton).

5.2.1 Partículas de Spin 0 com Interações não Hermitianas

Em geral, partículas de spin 0 são descritas pela equação de Klein Gordon:

$$(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi)^2\Psi = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2c^2\Psi + m^2c^4\Psi, \quad (5.1)$$

onde ϕ é o potencial escalar elétrico ao qual a partícula carregada com carga e está sujeito. e $\mathbf{A}$ é o potencial vetor magnético.

Será conveniente escrever esta equação na forma hamiltoniana, i.e, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle$. Para isso vamos usar o formalismo de Feshbach-Villars [65]. Definiremos então:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^+ + \psi^-). \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{mc^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \Phi = \frac{1}{\sqrt{(2)}}(\psi^+ - \psi^-) \quad (5.3)$$

Podemos substituir a equação de segunda ordem (5.1) por duas de primeira ordem para ψ^+ e ψ^- . Então podemos escrever a equação (5.1) como:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

onde

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\tau_3 + i\tau_2)(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + mc \, 2\tau_3 + e\phi, \quad (5.5)$$

$$\text{com } \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a equação de Klein Gordon na forma hamiltoniana é:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}|\Psi\rangle, \quad (5.6)$$

$$\text{onde } |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}.$$

Consideremos uma partícula de spin 0 com uma interação não hermitiana. Assim o operador hamiltoniano é não hermitiano, i.e, $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}^\dagger$. Consideremos então os conjuntos de autoestados de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\dagger$:

$$\mathcal{H}|\phi_n\rangle = \lambda_n|\phi_n\rangle \quad (5.7)$$

$$\mathcal{H}^\dagger|\chi_n\rangle = \lambda_n^*|\chi_n\rangle. \quad (5.8)$$

Os conjuntos $\{|\phi_n\rangle\}$ e $\{|\chi_n\rangle\}$ são bi ortogonais, isto é:

$$\langle\chi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn}. \quad (5.9)$$

Estes conjuntos também satisfazem a relação de completeza abaixo:

$$\sum_n |\phi_n\rangle\langle\chi_n| = I, \quad (5.10)$$

onde I é o operador identidade.

Supomos que os conjuntos $\{|\phi_n\rangle\}$ e $\{|\chi_n\rangle\}$ sejam não degenerados. Podemos escrever as soluções de (5.6) em termos desses conjuntos:

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle \quad (5.11)$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n \bar{a}_n |\chi_n\rangle \quad (5.12)$$

Vamos supor agora que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\dagger$ são funções de um conjunto de parâmetros $R^\mu(t)$, os quais variam muito lentamente com o tempo. Podemos então escrever a equação (5.6) como:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}(R^\mu(t)) |\Psi\rangle \quad (5.13)$$

Queremos estudar a evolução temporal do sistema no intervalo $[0, T]$, onde T é o período temporal da interação. Nossa hipótese é que no instante $t = 0$, o sistema está num dos seus auto estados, i.e, $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_n(0)\rangle$. Supomos também que no instante $t = T$ o sistema volta a seu estado inicial, i.e, $R^\mu(T) = R^\mu(0)$. O nosso problema é resolver a equação (5.13) com as condições abaixo:

1. $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_n(0)\rangle$;
2. $R^\mu(t)$ varia lentamente;
3. $R^\mu(T) = R^\mu(0)$.

Pelo teorema adiabático, podemos concluir que a solução para nosso problema é do tipo:

$$|\Psi(t)\rangle = f_n(t) |\varphi_n(R^\mu(t))\rangle, \quad (5.14)$$

onde $f_n(t)$ é uma função a se determinar.

Se derivarmos (5.14), teremos:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}|\Psi\rangle = i\hbar \dot{f}_n |\varphi_n(R^\mu(t))\rangle + i\hbar f_n(t) |\partial_{\mu R} \varphi_n(R^\mu(t))\rangle \dot{R}_\mu. \quad (5.15)$$

Se $|\Psi\rangle = f_n(t) |\varphi\rangle$, então,

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = f_n(t) \lambda_n |\varphi\rangle = \lambda_n |\Psi\rangle. \quad (5.16)$$

Se substituirmos (5.15) e (5.16) na eq. (5.13) teremos:

$$\lambda_n |\Psi\rangle = i\hbar \dot{f}_n |\varphi_n(R^\mu(t))\rangle + i\hbar f_n(t) |\partial_R^\mu \varphi_n(R_\nu(t))\rangle \dot{R}_\mu. \quad (5.17)$$

Pela biortogonalidade dos autoestados de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\dagger$, podemos escrever $|\Psi\rangle$ como:

$$|\Psi\rangle = g_n(t)|\chi_n(R^\mu(t))\rangle, \quad (5.18)$$

onde $g_n(t)$ é uma outra função a se determinar.

Vamos agora tomar o produto interno da eq.(5.18) com a eq. (5.17). Então teremos:

$$\lambda_n g_n^* f_n = i\hbar g_n^* \dot{f}_n + i\hbar g_n^* f_n \langle \chi_n | \partial_R^\mu \varphi_n \rangle \dot{R}_\mu. \quad (5.19)$$

Pela normalização de $|\Psi\rangle$ teremos:

$$g_n^* f_n = 1, \quad (5.20)$$

e assim:

$$g_n^* = \frac{1}{f_n}, \quad (5.21)$$

assim, podemos escrever a eq.(5.19) como:

$$\lambda_n = i\hbar \frac{\dot{f}_n}{f_n} + i\hbar \langle \chi_n | \partial_R^\mu \varphi_n \rangle \dot{R}_\mu \quad (5.22)$$

Resolvendo a eq. (5.22) para f_n , e usando a condição cíclica para R^μ no intervalo $[0, T]$, teremos:

$$f_n(t) = e^{-i \int_0^T \frac{\lambda_n}{\hbar} dt} e^{-i\bar{\gamma}} \quad (5.23)$$

e assim encontramos o fator de fase geométrico:

$$\bar{\gamma} = i \oint_{R^\mu(0)}^{R^\mu(T)} \langle \chi_n | \partial_R^\mu \varphi_n \rangle dR_\mu. \quad (5.24)$$

então, a solução da equação dinâmica é:

$$|\Psi\rangle = e^{-i \int_0^T \frac{\lambda_n}{\hbar} dt} e^{-i\bar{\gamma}} |\varphi_n\rangle \quad (5.25)$$

Se $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$ (caso hermitiano), a fase $\bar{\gamma}$ é real, mas em nosso problema temos $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}^\dagger$, assim $\bar{\gamma}$ não é real. A principal implicação do fato da fase ser não real é o decaimento(ou

ganho) na amplitude da função de onda, isto é, a probabilidade de se encontrar a partícula numa certa região decai(ou cresce) com o tempo.

Uma observação importante é que a fase geométrica dada por (5.24) está escrita na forma de um produto escalar no espaço de Minkowski, o que significa que esta fase é um invariante relativístico.

5.2.2 Partículas de Spin 1/2

Vamos calcular aqui fases geométricas para partículas de spin 1/2 com um hamiltoniano não hermitiano que varia lentamente. Na referência [60], o autor mostra que para partículas de spin 1/2, a fase geométrica é comum a todas as componentes do spinor de Dirac, e que tal fase é um invariante relativístico. Faremos aqui, a extensão deste estudo para o caso em que as interações são não hermitianas.

A equação que rege a dinâmica de partículas de spin 1/2 é a equação de Dirac:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}|\Psi\rangle, \quad (5.26)$$

onde $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} u^{LR} \\ v^{LR} \end{pmatrix}$ e os índices L e R estão relacionados com os spins up e down, enquanto as componentes u e v estão relacionado com as energias positivas e negativas.

O Hamiltoniano $\mathcal{H}$, na presença de um potencial vetor $\mathbf{A}$ e um potencial escalar ϕ tem a forma:

$$\mathcal{H} = c\vec{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta mc^2 + e\phi, \quad (5.27)$$

onde $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, sendo $\vec{\sigma}$ o conjunto de matrizes de Pauli, e I a matriz identidade 2x2.

Supomos que $\mathcal{H}$ seja não hermitiano, e que este hamiltoniano tenha a evolução temporal muito lenta através de um parâmetro adiabático $R^\mu(t)$. Vamos considerar que os autoestados de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\dagger$ sejam biortogonais, isto é, para $\{|\varphi_n\rangle\}$ e $\{|\chi_n\rangle\}$ tais que $\mathcal{H}|\varphi_n\rangle = \lambda_n|\varphi_n\rangle$ e $\mathcal{H}^\dagger|\chi_n\rangle = \lambda_n^*|\chi_n\rangle$, deve-se ter que:

$$\langle \varphi_m | \chi_n \rangle = \delta_{mn}. \quad (5.28)$$

Para a condição inicial $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_n(0)\rangle$, e supondo-se que $R^\mu(0) = R^\mu(T)$, usando o teorema adiabático teremos a solução geral :

$$|\Psi(t)\rangle = f_n(t)|\varphi(0)\rangle. \quad (5.29)$$

Utilizando-se um cálculo identico ao usado no caso das partículas de spin 0, encontramos que:

$$f_n(T) = e^{-i \int_0^T \frac{\lambda_n}{\hbar} dt} e^{-i\bar{\gamma}_n}, \quad (5.30)$$

onde a fase geométrica é dada por:

$$\bar{\gamma}_n = i \oint_C \langle \chi_n | \partial_R^\mu \varphi_n \rangle dR_\mu, \quad (5.31)$$

onde C é um caminho de integração no espaço dos parâmetros R^μ .

E assim o estado quântico se dá por:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^T \frac{\lambda_n}{\hbar} dt} e^{-i\bar{\gamma}_n} |\varphi(0)\rangle. \quad (5.32)$$

5.2.3 Partículas de spin 1

Partículas de spin 1 são os quanta do campo eletromagnético [44]. No capítulo 4 mostramos que para a descrição quântica de um único fóton, as equação que regem sua dinâmica são equivalentes ao conjunto das equações de Maxwell. Mostra-se no capítulo 4 que estas equações pode ser agupadas na equação abaixo:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{H} |\Psi\rangle, \quad (5.33)$$

onde o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ de um único fóton é:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{S} \end{pmatrix} + U, \quad (5.34)$$

onde, U é a energia potencial do fóton, cuja existência, como foi apresentada no capítulo 4, deve-se a interação do fóton com o meio. Se o meio for condutor, ou um meio amplificador, então U será complexo e assim $\mathcal{H}$ será não hermitiano.

Os estados quânticos estão relacionado da seguinte maneira com os campos:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + i\sqrt{\mu_0}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ \sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - i\sqrt{\mu_0}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

E $\mathbf{S}$ são as matrizes de spin 1, que tem a forma:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

$$S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Faremos aqui um cálculo idêntico ao que fizemos anteriormente para as partículas de spin 0 e spin 1/2. Vamos supor que H seja não hermitiano. Supomos também que $\mathcal{H}$ varie lentamente através de um parâmetro adiabático $R^\mu(t)$, que este parâmetro varie ciclicamente no intervalo $[0, T]$, e que inicialmente o sistema esteja num dos seus autoestados. Um exemplo de realização experimental de fótons com interações não hermitianas poderia ser feito considerando uma solução de rodamina, que é usado para reproduzir meios amplificadores. Ao controlar a concentração de rodamina, fazendo com que esta concentração varia lentamente, teremos um hamiltoniano que evolui lentamente e o parâmetro associado seria a concentração de partículas na solução.

De maneira análoga aos casos das partículas de spin 0 e spin 1/2, encontramos uma fase geométrica da forma:

$$\gamma_n = i \oint_C \langle \chi_n | \partial_R^\mu \varphi_n \rangle dR_\mu, \quad (5.39)$$

e assim:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^T \frac{\lambda_n}{\hbar} dt} e^{-i\gamma_n} |\varphi(0)\rangle. \quad (5.40)$$

5.2.4 Análogo do Efeito Aharonov Bohm não Hermitiano para o Fóton

Supomos aqui um fóton sujeito a uma interação não hermitiana. Se o meio no qual o fóton se propaga for um meio metálico, ou um meio de ganho, o meio terá uma susceptibilidade elétrica complexa, e assim teremos um potencial escalar complexo, e um potencial vetor complexo. Supondo que o meio seja ôhmico, então nas equações de Maxwell teremos uma corrente do tipo: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. O efeito da introdução do termo ôhmico nas equações de Maxwell se dá através de uma susceptibilidade elétrica efetiva complexa. Neste caso a equação de onda para o fóton, num meio com uma suscetibilidade complexa é dada por:

$$\hbar\omega\Psi = c \begin{pmatrix} (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{S} & 0 \\ 0 & (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{S} \end{pmatrix} \Psi - \hbar\omega\tilde{\chi}_e\rho\Psi - \hbar\omega\chi_m\eta\Psi \quad (5.41)$$

onde $\tilde{\chi}_e = \chi_e + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$.

Vamos considerar o problema do análogo do efeito Aharonov-Bohm para o fóton discutido no capítulo anterior. Na Figura 5.1 é ilustrado o sistema que reproduz tal efeito.

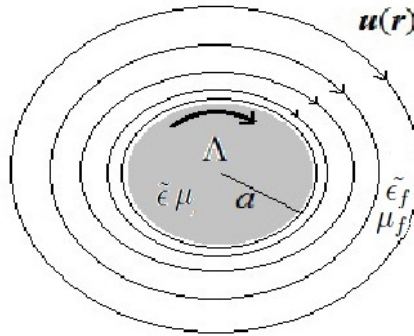


Figura 5.1: Sistema utilizado para reproduzir um efeito análogo ao Aharonov-Bohm com potencial vetor complexo. Para isso utiliza-se um cilindro metálico que gira com velocidade angular Λ , imerso num fluido viscoso que pode ter condutividade ou ganho.

A diferença é que o cilindro é metálico, nesse caso caracterizado por uma permissividade complexa $\tilde{\epsilon}$ e uma permeabilidade magnética real. O fluido viscoso se caracteriza por uma

permissividade complexa $\tilde{\epsilon}_f$ e uma permeabilidade magnética real μ_f . Um exemplos de fluido que apresenta permissividade complexa é uma solução eletrolítica, ao qual a condutividade contribui para que a parte imaginária da permissividade seja negativa. Outro exemplo de fluido que apresenta permissividade complexa é uma solução de rodamina, usada para lasers como meio amplificador. Nesse caso a parte imaginária da permissividade é positiva, o que origina efeitos amplificadores.

O potencial vetor associado ao sistema ilustrado na Figura 5.1 é então:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\hbar\omega}{c}(\tilde{\epsilon}\mu - 1)\Lambda r\hat{\theta}, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\hbar\omega}{c}(\tilde{\epsilon}_f\mu_f - 1)\frac{\Lambda a^2}{r}\hat{\theta}, & r > a \end{cases}, \quad (5.42)$$

onde $\tilde{\epsilon} = \tilde{\chi}_e + 1$.

Executando um cálculo idêntico ao feito no capítulo anterior, onde calculamos a fase geométrica de um num anel de fibra óptica de raio a confinado num cilindro girante com velocidade angular Λ , mostramos que no caso de uma susceptibilidade complexa, o fóton adquire uma fase geométrica complexa, dada por:

$$\bar{\varphi} = (\tilde{\epsilon}\mu - 1)2\pi\frac{a^2\Lambda}{c^2} \quad (5.43)$$

Nesse caso, além de efeitos de interferência, pode se ter efeitos atenuantes ou amplificadores na função de onda do fóton.

5.3 Conclusão

Neste capítulo mostramos que partículas relativísticas quaisquer, de spin 0, spin 1/2 ou spin 1, que sofrem interações lentas e não hermitianas, adquirem em suas funções de onda, um fator de fase geométrico complexa. A interpretação da fase geométrica complexa, é que a parte real da fase geométrica corresponde a um fator de fase propriamente dito, enquanto que a parte imaginária da fase geométrica corresponde a uma atenuação na amplitude da função de onda, ou a uma amplificação.

Mostramos também a possibilidade de um efeito Aharonov-Bohm complexo para o fóton. Para que ocorra a existência de tal efeito, basta que um feixe de fótons que se divide

em depois e recombina-se em torno da vorticidade de um fluido viscoso que apresenta tenha permissividade complexa. Nesse caso o fluido pode ser condutor, ou um meio de ganho.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Ao fim deste trabalho, discutiremos agora algumas conclusões a respeito dos conhecimentos obtidos nesta tese, e importantes propostas para trabalhos posteriores a partir dos resultados aqui apresentados.

No capítulo 1, onde foi apresentado a física básica da propagação de onda em cristais fotônicos, conseguimos obter os resultados nas estruturas de banda de forma analítica, e assim é mostrado que o contraste dielétrico e magnético entre as placas que formam o material, assim como a razão entre as espessuras, determinam as bandas de frequências nesses cristais.

Podemos dizer que uma das aplicações indiretas dos conhecimentos obtidos no nosso estudo dos cristais fotônicos, foi referente ao capítulo 2, sobre a física de sistemas com massa periódica. Embora os cristais fotônicos e os sistemas com massa periódica sejam fisicamente diferentes, a matemática que se usa nos dois sistemas é semelhante. Assim aproveitamos a matemática utilizada no estudo dos cristais fotônico para se obter os resultados referentes ao estudo de sistemas de massa periódica.

Do capítulo 2, os resultados mais relevantes foram a nossa proposta para o Hamiltoniano que descreve partículas de massa variável e o cálculo de estruturas de bandas para sistemas de massa variável. A proposta para o hamiltoniano, baseia-se no processo de quantização canônica para um observável composto pelo produto de outros observáveis. O fato dos sistemas de massa periódica possuírem estrutura de bandas, pode ser aplicado no estudo

de semicondutores. Assim a principal conclusão que podemos chegar, quanto ao estudo de sistemas de massa periódica, é que como o elétron ao se mover numa estrutura metálica ou num semicondutor, adquire uma massa efetiva, então pode-se construir uma estrutura onde o elétron possui massa efetiva periódica, utilizando-se a junção periódica de duas placas de metais diferentes. Assim pode-se construir novos dispositivos semicondutores, usando-se apenas junção periódica de metais, que são condutores.

No capítulo 3, onde apresentamos os isolantes topológicos, mostramos que a luz ao se propagar numa estrutura periódica em uma dimensão composto por um isolante comum e um isolante topológico também apresenta estruturas de bandas, semelhantes aos cristais fotônicos usuais, com a diferença que o parâmetro correspondente ao isolante topológico também controla a estrutura de bandas, inclusive no caso em que a estrutura não tenha contraste dielétrico nem magnético.

No capítulo 4, introduzimos o formalismo da primeira quantização do fóton. Tal formalismo, apesar de pouco explorado, possui um enorme potencial de aplicação, já que podemos buscar problemas quânticos que foram resolvidos para elétrons, mas que ainda são pouco explorados para o fóton, como por exemplo, o efeito Aharonov-Bohm. Mostramos que para fótons num meio periódico em uma dimensão, surgem estruturas de bandas iguais as calculadas no capítulo 1. Mostramos também que para um feixe de fótons que se divide em dois e depois se recombina, em torno da vorticidade de um fluido viscoso, surge uma fase do tipo Aharonov-Bohm. Podemos usar este análogo do efeito Aharonov-Bohm, por exemplo para se medir índices de refração de um fluido viscoso.

No capítulo 5 discutimos que o uso de operadores não hermitianos para descrever observáveis é fisicamente aceitável. O estudo feito neste capítulo foi referente a fase geométrica em sistemas relativístico com hamiltoniano não hermitiano. Mostramos que para sistemas de spin 0, spin 1/2 e spin 1, sujeitos a hamiltonianos não hermitianos que variam lentamente no tempo surgem um fator de fase geométrica complexo, o que influi diretamente na amplitude da função de onda do sistema em questão. O fato da fase

geométrica ter uma parte imaginária, significa que a amplitude da função de onda decai, ou sofre uma amplificação. Mostramos ainda que é possível teoricamente a existência de um análogo efeito Aharonov-Bohm complexo, onde o potencial experimentado pelo fóton é complexo. O que desempenha o papel do potencial vetor complexo é um meio formado por um cilindro que gira com velocidade angular constante, imerso num fluido viscoso condutor. Nesse caso mostramos teoricamente que em tal sistema surge uma fase do tipo Aharonov-bohm complexa.

Quanto as perspectivas, apresentaremos aqui algumas propostas de trabalhos futuros:

1. Uma de nossas propostas quanto aos sistemas de massa periódica, é estudar a inclusão de defeitos na estrutura, para assim estudar propriedade de semicondutores nestes materiais. Nesse caso, o defeito se dá pela inserção de uma placa diferente na estrutura periódica. Poderemos fazer então o estudo de modos localizados, da densidade de portadores de carga, o estudo da estatística destes portadores, e etc. Um dos problemas no resultado obtido para a estrutura de bandas no problema de massa periódica, é que o tamanho do gap($10^{-6}eV$) para estrutura da ordem de 1μ é muito menor do que o gap de um semicondutor típico($1eV$), assim o sistema proposto só teria aplicação em semicondutores para temperaturas muito baixas. Uma proposta nossa para se elevar esse gap é a inclusão de efeitos de campo magnético nestes sistemas. Se colocarmos um campo magnético periódico, que tenha a mesma periodicidade da massa, talvez possamos obter uma estrutura de bandas ajustável pelo campo magnético, o que teria um grande potencial para aplicações práticas, já que nesse caso teríamos um sistema com condutividade elétrica ajustável.
2. Uma das diferenças fundamentais entre semicondutores eletrônicos e cristais fotônicos, é a estatística das partículas transportadas. Enquanto nos semicondutores eletrônicos, os elétrons obedecem a estatística de Fermi-Dirac, nos cristais fotônicos os fótons obedecem a estatística de Bose-Einstein. No estudo de ondas eletromagnéticas em cristais fotônicos, não se é levado em conta a estatística quântica, já que o sistema é clássico. Pretendemos então, investigar a influência da estatística de Bose-Einstein na

propagação de fótons em cristais fotônicos. Um estudo que pode ser feito também, é a influência da estatística de Bose-Einstein na propagação de fótons em cristais fotônicos.

3. Pretendemos também fazer o estudo do confinamento de fótons, usando o formalismo apresentado aqui da função de onda do fóton. Podemos então verificar o confinamento geométrico do fóton através de um defeito topológico, os quais podem ser descritos por uma geometria efetiva. Esses defeitos topológicos existem, por exemplo, em cristais líquidos.
4. E por fim, podemos estudar a dinâmica de fótons na presença de uma distribuição de defeitos topológicos. Se a distribuição de defeitos for ordenada, teremos então um novo cristal fotônico, e se a distribuição for desordenada podemos verificar localização de Anderson para fótons nessas estruturas.

Apêndice A

Cálculo da Estrutura de Bandas em Cristais Fotônicos Unidimensionais

Neste apêndice vamos mostrar como foi feito o cálculo da estrutura de bandas no cristal fotônico unidimensional apresentado no capítulo 1. A Figura A.1 ilustra o sistema trabalhado. Nas regiões sem interfaces, a equação de onda é a mesma para meios homogêneos. Ou seja:

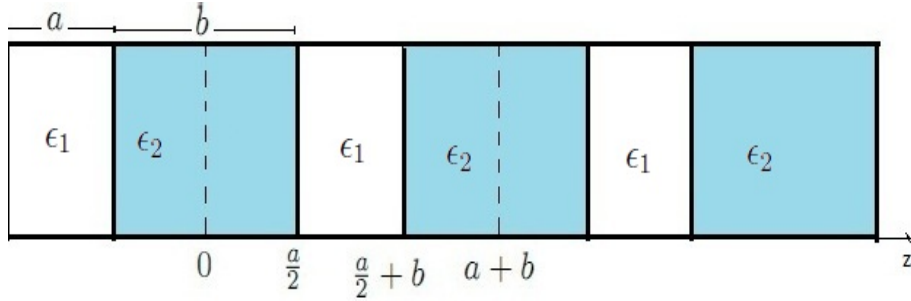


Figura A.1: Cristal fotônico unidimensional. Nas regiões sem fronteira, o meio pode ser considerado como homogêneo.

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \omega^2 H = 0. \quad (\text{A.1})$$

Podemos então escrever a solução para $H(z)$ como:

$$H(z) = \begin{cases} A \cos q_1 z + B \sin q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ C \cos q_2 z + D \sin q_2 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ F \cos q_1 z + G \sin q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2}, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde $q_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c} \omega$ e $q_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c} \omega$

Para determinar a solução do problema, precisamos das condições de contorno. A teoria eletromagnética informa as condições de fronteira na interface [14, 15], e a simetria do cristal informa as condições de contorno de periodicidade do sistema.

A teoria eletromagnética diz que as componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ tangentes à interface são contínuas nessas interfaces. Já das simetrias do sistema temos o teorema de Bloch, e tal teorema implica que $E(a+b) = e^{ik(a+b)}E(0)$ e $H(a+b) = e^{ik(a+b)}H(0)$. Assim, na célula unitária, o conjunto de condições de contorno nas interfaces $z = \frac{a}{2}$ e $z = \frac{a}{2} + b$ são:

$$\left\{ \begin{array}{l} H\left(\frac{a}{2}^+\right) = H\left(\frac{a}{2}^-\right) \\ H\left(\frac{a}{2} + b^+\right) = H\left(\frac{a}{2} + b^-\right) \\ \frac{1}{\epsilon_2} \frac{dH}{dz}\left(\frac{a}{2}^+\right) = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{dH}{dz}\left(\frac{a}{2}^-\right) \\ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{dH}{dz}\left(\frac{a}{2} + b^+\right) = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{dH}{dz}\left(\frac{a}{2} + b^-\right) \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

e as condições de Bloch são:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(a+b) = e^{ik(a+b)}H(0) \\ \frac{dH}{dz}(a+b) = e^{ik(a+b)}\frac{dH}{dz}(0) \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Aplicando-se as condições (A.3) na solução geral (A.2) encontramos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \cos \frac{q_2 a}{2} + D \sin \frac{q_2 a}{2} = A \cos \frac{q_1 a}{2} + B \sin \frac{q_1 a}{2} \\ -\frac{q_2}{\epsilon_2} C \sin \frac{q_1 a}{2} + \frac{q_1}{\epsilon_1} D \cos \frac{q_2 a}{2} = -\frac{q_1}{\epsilon_1} B \sin \frac{q_1 a}{2} + \frac{q_1}{\epsilon_1} B \cos \frac{q_1 a}{2} \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b\right) + G \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b\right) = C \cos q_2 \left(\frac{a}{2} + b\right) + D \sin q_2 \left(\frac{a}{2} + b\right) \\ -\frac{q_1}{\epsilon_1} F \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b\right) + \frac{q_1}{\epsilon_1} G \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b\right) = -\frac{q_2}{\epsilon_2} C \sin q_2 \left(\frac{a}{2} + b\right) + \frac{q_2}{\epsilon_2} D \cos q_2 \left(\frac{a}{2} + b\right) \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

Vamos encontrar C, D, F e G em função de A e B . As constantes A e B dependem das condições iniciais dos campos. Resolvendo os sistemas acima encontramos:

$$C = \left(\cos \frac{q_1 a}{2} \cos \frac{q_2 a}{2} + \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \sin \frac{q_1 a}{2} \sin \frac{q_2 a}{2} \right) A + \left(\sin \frac{q_1 a}{2} \cos \frac{q_2 a}{2} - \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \cos \frac{q_1 a}{2} \sin \frac{q_2 a}{2} \right) B \quad (\text{A.7})$$

$$D = \left(\cos \frac{q_1 a}{2} \sin \frac{q_2 a}{2} - \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \sin \frac{q_1 a}{2} \cos \frac{q_2 a}{2} \right) A + \left(\sin \frac{q_1 a}{2} \sin \frac{q_2 a}{2} - \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \cos \frac{q_1 a}{2} \cos \frac{q_2 a}{2} \right) B \quad (\text{A.8})$$

$$F = \left(\cos q_1 b \cos q_2 b - \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b + \frac{q_2 \epsilon_1}{q_1 \epsilon_2} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b \right) A \\ + \left(-\sin q_1 b \cos q_2 b + \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b + \frac{q_2 \epsilon_1}{q_1 \epsilon_2} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b \right) B \quad (\text{A.9})$$

$$G = \left(\sin q_1 b \cos q_2 b - \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b - \frac{q_2 \epsilon_1}{q_1 \epsilon_2} \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b \right) A \\ + \left(\cos q_1 b \cos q_2 b + \frac{q_1 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \sin q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \cos \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b - \frac{q_2 \epsilon_1}{q_1 \epsilon_2} \cos q_1 \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin \frac{q_1 a}{2} \sin q_2 b \right) B \quad (\text{A.10})$$

Agora vamos aplicar as condições de Bloch (A.4) a solução encontrada. Teremos então o sistema:

$$\begin{cases} F \cos q_1(a+b) + G \sin q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} A \\ -F \sin q_1(a+b) + G \cos q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} B \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

O sistema acima pode ser escrito da forma geral abaixo:

$$\begin{cases} (C_{11} - e^{ik(a+b)})A + C_{12}B = 0 \\ C_{21}A + (C_{22} - e^{ik(a+b)})B = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

A condição para que tenhamos soluções não triviais para os modos eletromagnéticos é que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema seja nulo. Então isto implica em:

$$\cos(k(a+b)) = \cos q_1 a \cos q_2 b + \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{I_2} + \frac{I_2}{I_1} \right) \sin q_1 a \sin q_2 b \quad (\text{A.13})$$

onde $I_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ e $I_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$ são as impedâncias das placas que formam o cristal fotônico.

A relação (A.13) é a relação de dispersão para os modos eletromagnéticos no cristal fotônico unidimensional. O membro esquerdo desta relação é limitado entre -1 e 1, o que significa que os valores de $\omega(k)$ deve ter restrições para que a relação (A.13) obedeça tal limitação. Assim surgem bandas de frequência. Os gráficos traçados abaixo ilustram tais bandas:

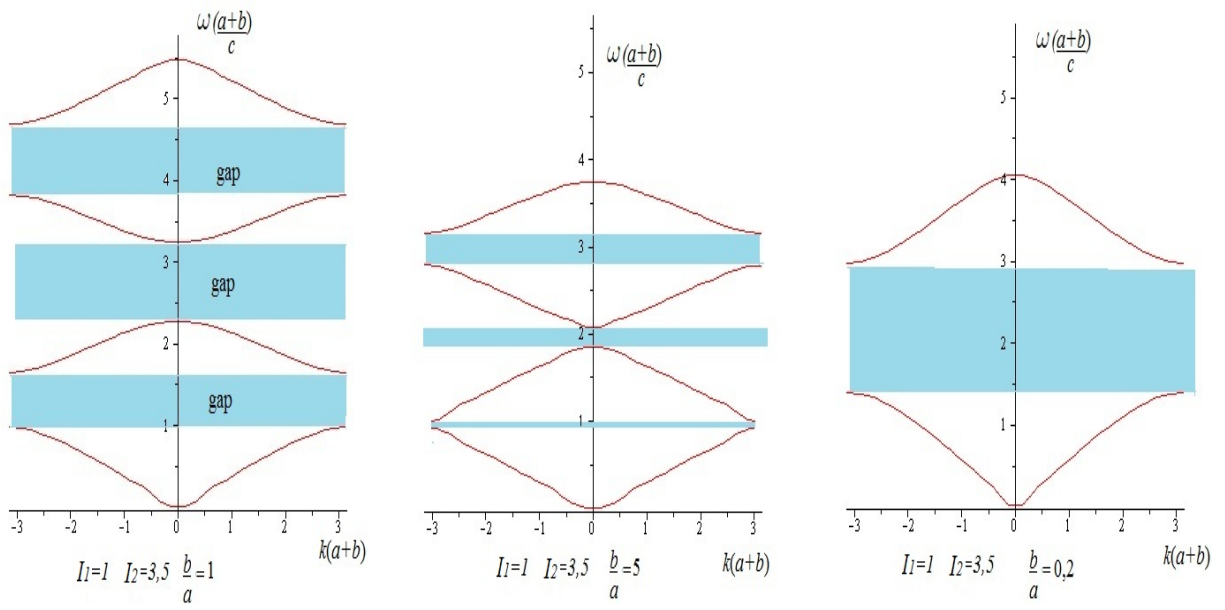


Figura A.2: Estrutura de bandas num cristal fotônico unidimensional modulada pela razão $\frac{b}{a}$.

Apêndice B

Cálculo da Estrutura de Bandas para Luz em Cristais Fotônicos formados por Isolantes Topológicos

Vamos aqui apresentar o cálculo da estrutura de banda para as frequências de ondas planas que incidem normalmente num isolante topológico periódico. O sistema em questão é ilustrado pela Figura B.

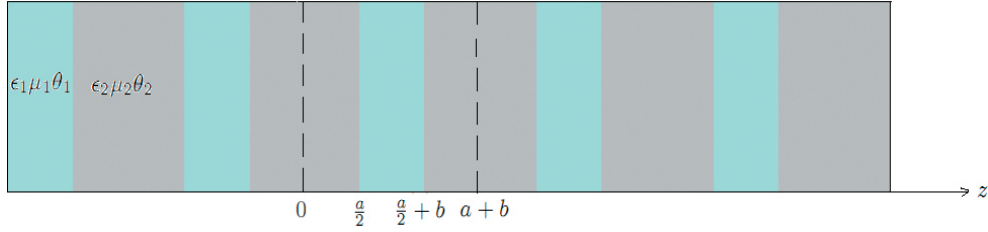


Figura B.1: Isolante topológico periódico

Precisamos encontrar a solução da equação de onda. Considerando-se regiões sem interfaces, a equação de onda para as partes espaciais dos campos é dada poré escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{E}}{dz^2} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{d^2 \mathbf{B}}{dz^2} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Dessa forma, a solução geral para os campos é então dada por:

$$E_x = \begin{cases} a_x \cos q_1 z + b_x \sin q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ c_x \cos q_2 z + d_x \sin q_2 z, & \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ e_x \cos q_1 z + f_x \sin q_1 z, & \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$E_y = \begin{cases} a_y \cos q_1 z + b_y \sin q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ c_y \cos q_2 z + d_y \sin q_2 z, & \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ e_y \cos q_1 z + f_y \sin q_1 z, & \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Da eq. (3.13) temos:

$$B_x = \begin{cases} \frac{i}{\omega} q_1 a_y \sin q_1 z - \frac{i}{\omega} q_1 b_y \cos q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ \frac{i}{\omega} q_2 c_y \sin q_2 z - \frac{i}{\omega} q_2 d_y \cos q_2 z, & \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ \frac{i}{\omega} q_1 e_y \sin q_1 z - \frac{i}{\omega} q_1 f_y \cos q_1 z, & \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$B_y = \begin{cases} -\frac{i}{\omega} q_1 a_x \sin q_1 z + \frac{i}{\omega} q_1 b_x \cos q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ -\frac{i}{\omega} q_2 c_x \sin q_2 z + \frac{i}{\omega} q_2 d_x \cos q_2 z, & \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ -\frac{i}{\omega} q_1 e_x \sin q_1 z + \frac{i}{\omega} q_1 f_x \cos q_1 z, & \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

onde $q_1 = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{c}$ e $q_2 = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{c}$.

Precisamos aplicar agora as condições de contorno. Das condições de interface temos:

- Para $z = \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} c_x \cos \frac{q_2 a}{2} + d_x \sin \frac{q_2 a}{2} = a_x \cos \frac{q_1 a}{2} + b_x \sin \frac{q_1 a}{2} \\ c_y \cos \frac{q_2 a}{2} + d_y \sin \frac{q_2 a}{2} = a_y \cos \frac{q_1 a}{2} + b_y \sin \frac{q_1 a}{2} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{cases} \frac{i q_2}{\omega \mu_0 \mu_2} c_y \sin \frac{q_2 a}{2} - \frac{i q_2}{\omega \mu_0 \mu_2} d_y \cos \frac{q_2 a}{2} = \\ \frac{i q_1}{\omega \mu_0 \mu_1} a_y \sin \frac{q_1 a}{2} - \frac{i q_1}{\omega \mu_0 \mu_1} b_y \cos \frac{q_1 a}{2} - \Delta \theta a_x \cos(\frac{q_1 a}{2}) - \Delta \theta b_x \sin(\frac{q_1 a}{2}) \\ -\frac{i q_2}{\omega \mu_0 \mu_2} c_x \sin \frac{q_2 a}{2} + \frac{i q_2}{\omega \mu_0 \mu_2} d_x \cos \frac{q_2 a}{2} = \\ -\frac{i q_1}{\omega \mu_0 \mu_1} a_x \sin \frac{q_1 a}{2} + \frac{i q_1}{\omega \mu_0 \mu_1} b_x \cos \frac{q_1 a}{2} + \Delta \theta a_y \cos(\frac{q_1 a}{2}) + \Delta \theta b_y \sin(\frac{q_1 a}{2}) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

- Para $z = \frac{a}{2} + b$

$$\begin{cases} e_x \cos(\frac{q_1 a}{2} + b) + f_x \sin(\frac{q_1 a}{2} + b) = c_x \cos(\frac{q_2 a}{2} + b) + d_x \sin(\frac{q_2 a}{2} + b) \\ e_y \cos(\frac{q_1 a}{2} + b) + f_y \sin(\frac{q_1 a}{2} + b) = c_y \cos(\frac{q_2 a}{2} + b) + d_y \sin(\frac{q_2 a}{2} + b) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{iq_1}{\omega\mu_0\mu_1}e_y \sin\left(\frac{q_1a}{2} + b\right) - \frac{iq_1}{\omega\mu_0\mu_1}f_y \cos\left(\frac{q_1a}{2} + b\right) = \\ \frac{iq_2}{\omega\mu_0\mu_2}c_y \sin\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) - \frac{iq_2}{\omega\mu_0\mu_2}d_y \cos\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) + \Delta\theta c_x \cos\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) + \Delta\theta d_x \sin\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) \\ - \frac{iq_1}{\omega\mu_0\mu_1}e_x \sin\left(\frac{q_1a}{2} + b\right) + \frac{iq_1}{\omega\mu_0\mu_1}f_x \cos\left(\frac{q_1a}{2} + b\right) = \\ - \frac{iq_2}{\omega\mu_0\mu_2}c_x \sin\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) + \frac{iq_2}{\omega\mu_0\mu_2}d_x \cos\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) - \Delta\theta c_y \cos\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) - \Delta\theta d_y \sin\left(\frac{q_2a}{2} + b\right) \end{array} \right. \quad (\text{B.9})$$

onde $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Resolvendo o sistema acima para c_x, c_y, d_x, d_y teremos:

$$c_x = \left(\cos \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} + \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \sin \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} \right) a_x + \left(\cos \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} - \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \sin \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} \right) b_x \\ + \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \sin \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} a_y + \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \sin \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} b_y, \quad (\text{B.10})$$

$$c_y = \left(\cos \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} + \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \sin \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} \right) a_y + \left(\cos \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} - \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \sin \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} \right) b_y \\ - \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \sin \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} a_x - \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \sin \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} b_x, \quad (\text{B.11})$$

$$d_x = \left(\sin \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} - \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \cos \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} \right) a_x + \left(\sin \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} + \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \cos \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} \right) b_x \\ - \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \cos \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} a_y - \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \cos \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} b_y, \quad (\text{B.12})$$

$$d_y = \left(\sin \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} - \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \cos \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} \right) a_y + \left(\sin \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} + \frac{q_1\mu_2}{q_2\mu_1} \cos \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} \right) b_y \\ + \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \cos \frac{q_2a}{2} \cos \frac{q_1a}{2} a_x + \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \cos \frac{q_2a}{2} \sin \frac{q_1a}{2} b_x. \quad (\text{B.13})$$

A solução para e_x, e_y, f_x, f_y é:

$$e_x = \left[\cos \left(\frac{q_2a}{2} + b \right) \cos \left(\frac{q_1a}{2} + b \right) + \frac{q_2\mu_1}{q_1\mu_2} \sin \left(\frac{q_2a}{2} + b \right) \sin \left(\frac{q_1a}{2} + b \right) \right] c_x \\ + \left[\sin \left(\frac{q_2a}{2} + b \right) \cos \left(\frac{q_1a}{2} + b \right) - \frac{q_2\mu_1}{q_1\mu_2} \cos \left(\frac{q_2a}{2} + b \right) \sin \left(\frac{q_1a}{2} + b \right) \right] d_x \\ - \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \cos \left(\frac{q_2a}{2} + b \right) \sin \left(\frac{q_1a}{2} + b \right) c_y \\ - \frac{\omega\mu_0\mu_2}{iq_2} \Delta\theta \sin \left(\frac{q_2a}{2} + b \right) \sin \left(\frac{q_1a}{2} + b \right) d_y, \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}
e_y = & \left[\cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) + \frac{q_2 \mu_1}{q_1 \mu_2} \sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) \right] c_y \\
& + \left[\sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) - \frac{q_2 \mu_1}{q_1 \mu_2} \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) \right] d_y \\
& + \frac{\omega \mu_0 \mu_2}{i q_2} \Delta \theta \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) c_x \\
& + \frac{\omega \mu_0 \mu_2}{i q_2} \Delta \theta \sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) d_x,
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
f_x = & \left[\cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) + \frac{q_2 \mu_1}{q_1 \mu_2} \sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) \right] c_x \\
& + \left[\sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) + \frac{q_2 \mu_1}{q_1 \mu_2} \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) \right] d_x \\
& + \frac{\omega \mu_0 \mu_2}{i q_2} \Delta \theta \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) c_y \\
& + \frac{\omega \mu_0 \mu_2}{i q_2} \Delta \theta \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) d_y,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
f_x = & \left[\cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) + \frac{q_2 \mu_1}{q_1 \mu_2} \sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) \right] c_y \\
& + \left[\sin\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) + \frac{q_2 \mu_1}{q_1 \mu_2} \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) \right] d_y \\
& - \frac{\omega \mu_0 \mu_2}{i q_2} \Delta \theta \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \cos\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) c_x \\
& - \frac{\omega \mu_0 \mu_2}{i q_2} \Delta \theta \cos\left(\frac{q_2 a}{2} + b\right) \sin\left(\frac{q_1 a}{2} + b\right) d_y.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Para finalizar o problema, precisamos aplicar as condições de Bloch. Das equações (B.2),(B.3),(B.4) e (B.5) teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x \cos q_1(a+b) + f_x \sin q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} a_x \\ -e_x \sin q_1(a+b) + f_x \cos q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} b_x \\ e_y \cos q_1(a+b) + f_y \sin q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} a_y \\ -e_y \sin q_1(a+b) + f_y \cos q_1(a+b) = e^{ik(a+b)} b_y \end{array} \right. \tag{B.18}$$

Escrevendo e_x, e_y, f_x, f_y em termos de a_x, a_y, b_x, b_y temos um sistema linear homogêneo do tipo: :

$$(\mathbf{C} - e^{ik(a+b)} \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{B.19}$$

onde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_x \\ a_y \\ b_y \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} - e^{ik(a+b)} \hat{\mathbf{I}}$ é a matriz dos coeficientes. sendo $\hat{\mathbf{I}}$ a matriz identidade 4×4 .

Para a existência de soluções não triviais, devemos impor que $\det(\mathbf{C} - e^{ik(a+b)}\hat{\mathbf{1}}) = 0$.

Desta condição encontramos a equação transcendental:

$$\cos k(a+b) = \cos q_1 a \cos q_2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_1}{I_2} + \frac{\alpha \mu_0^2}{4\pi^2} I_1 I_2 \Delta\theta^2 \right) \sin q_1 a \sin q_2 b, \quad (\text{B.20})$$

onde $I_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ e $I_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$.

Observamos que o membro esquerdo da equação (3.15) é limitado por -1 e 1 enquanto o membro direito não é limitado. consequentemente teremos valores proibidos para ω , e então uma estrutura de bandas para as frequências.

Referências Bibliográficas

- [1] H. A. de Mello e R. S. de Biasi, *Introdução a Física dos Semicondutores*, São Paulo, Ed. Edgar Blücher (1975).
- [2] S. M. Rezende, *Materiais e Dispositivos Eletrônicos*, 2a ed., Editora Livraria da Física, São Paulo, (2004).
- [3] E. Yablonovitch, *Photonic crystals: Semiconductors of light*, Scientific American, December, 2001.
- [4] J. M. Lourtioz, Henri Benisty, V. Berger, J.M. Gérard, D. Maystre e A. Tchebnokov, *Photonic Crystals: Towards Nanoscale Photonic Devices*, Phys. Today, august, 2006.
- [5] E. Yablonovitch e T.J. Gmitter, *Photonic Band Structure: The face-centered cubic case*, Phys. Rev. Lett. **63**, 1950-1953, (1989).
- [6] G. Parker e M. Charlton, *Photonic crystals*, PhysicsWorld, Feature article , August 2000.
- [7] M.Z. Hasan e C. L. Kane, *Topological Insulators*, arXiv: 1002.3895v1 [cond-mat. mes-hall] 20 feb 2010.
- [8] J. Seo, P. Roushan, A. Yazdani, *Star Material*, Nature, **466**, july (2010).
- [9] K. M. Ho, C. T. Chan, e C. M. Soukoulis. *Existence of a Photonic Band Gap in a Periodic Dielectric Structures*, Phys. Rev. Lett. 65: 3152-3155, 1990.

- [10] M. Boroditsky e E. Yablonovitch *Photonic Crystals Boost Light Emission*, PhysicsWorld, Feature article , July, 1997.
- [11] Shawn-Yu Lin, E. Chow, V. Hietala, P.R. Villeneuve e J.D. Joannopoulos, *Experimental Demonstration of Guiding and Bending of electromagnetic Wave in a Photonic Crystal*, Science 282: 274-276.
- [12] D. D Marcenac e J.E. Carrol, *Quantum-Mechanical model for Realistic Fabry - Perot Lasers*, IEE Proceedings-J, vol. 140, No 3, June 1993.
- [13] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the flow of light*, Second Edition.
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York: Willey(1998).
- [15] D. J, Ghriffiths, *Introduction to electrodynamics*, englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall (1990).
- [16] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, N.York: Wiley, (1996).
- [17] A. Ashcroft e N.D. mermin, *Solid State Physics*. Phyladelphia: Holt Saunders.
- [18] Lord Rayleigh, *On the reflection of light from a regurlaly stratified medium*, Proc. Royal society of London, 93: 565-577, (1917).
- [19] M. G. Burt, J. Phy.: Condens. Matter **4** 6551490 (1992).
- [20] Yana A Butko, Martin Grothaus e Oleg G Smolyanov, J. of Physics: Conference Series **128**, 012050 (2008).
- [21] M. Gadella e O. G. Smolyanov, Doklady Akad. Nauk **418**, 727 (2008).
- [22] S.Y. Ren e Y.-C. Chang, Ann. Phys. doi:10.1016/j.aop.2010.01.008 (2010).

- [23] O. Mustafa e S. H. Mazharimousavi, arXiv:0906.4534v1 [quant-ph] 24 Jun 2009.
- [24] S. Cruz y Cruz e O. Rosas-Ortiz, J. Phys. A: Math. Theor. **42** 185205 (2009).
- [25] A. de Souza Dutra e J. A. de Oliveira, arxiv:1002.4590v1 [quant-ph] 24 Feb 2010.
- [26] M. Gadella, F. J. H. Heras, J. Negro e L. M. Nieto, *A Delta Well with a Mass Jump*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** 465207 (2009).
- [27] K. Von Klitzing, G. Dord e M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*. Phys. Rev. Lett. **45**, 494-497 (1980).
- [28] D. C. Tsui, H. L. Stormer, e A. C. Gossard, *Two-Dimensional Magneto-transport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **48** 1559-1562 (1982).
- [29] Xiao-Liang Qi e Shou-Cheng Zhang, *The Quantum Spin Hall Effect and Topological Insulator*, Phys. Today, January, 2010, pag. 33.
- [30] S. C. Zhang, *Surfaces States and Topological Invariantes in Three dimensional Topological Insulators: appication to $Bi_{1-x}Sb_x$* , Physics 1, 6(2008).
- [31] C. L. Kane e E. J. Mele, *A New Spin on the Insulating State*, Science, vol 314, 1692, (2006).
- [32] B. A. Bernevig, T.I. Hughes e S.C. Zhang, Science 314, 1757, (2006).
- [33] M. koning, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molekamp, X.L Qi, e S. C. Zhang, Science 318, 766, (2007).

- [34] D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan, *A Topological Dirac Insulator in a Quantum Spin Hall Phase*, Nature, **42**, april (2008).
- [35] R. Li, J. Wang, X. Qi, Shou-Cheng Zhang, *Dynamical Axion Field In Topological Magnetic Insulators*, Nature Physics, **6**, 288 (2010).
- [36] Y.S. Hor, A.J. Williams, J.G. Checkelsky, P. Roushan, J. Seo, Q. Xu, H. W. Zandbergen, A. Yazdani, N.P. Ong, R.J Cava, *Superconductivity in $Cu_xBi_2Se_3$ and its Implications for Pairing in the Undoped Topological Insulator*, Phys. Rev. Lett., **104**, 057001 (2010).
- [37] D. Kong, J.C; Randel, H. Peng, J.J. Cha, S. Meister, K. Lai, Y. Chen, Zhi-Xun Shen, H. C. Manoharan, e Y. Cui, *Topological Insulator Nanowire and Nanoribbons*, Nano Letters, **10**, 329, (2010).
- [38] F. Wilczek, *Two Applications of axion Electrodynamics*, Phys. Rev. Lett., vol. 58, No 18, pag. 1779, (1987).
- [39] Xiao-Liang qi, Rundong Li, Jiadong Zang e shou-Cheng Zhang, *Inducing a Magnetic monopole with Topological Surface States*, Science vol 323, 1184, (2009).
- [40] G. Rosenberg e M. Franz, *Witten Effect in a Crystalline Topological Insulator*, arXiv: 1001.3179v3 [cond-mat.mes-hall] 21 May 2010.
- [41] A. Karch, *electric-Magnetic duality and Topological Insulators*, Phys. Rev. Lett. 103, 171601, (2009).
- [42] D.Newton, E.P.Wigner, *Localized States for Elementary Systems*, Rev. Mod. Phys., **21**,400(1949).
- [43] A. S. Wightman, *On the Localizability of Quantum Mechanicl Systems*, Rev. Mod. Phys. 34, 845.

- [44] S.Dutra, *Cavity Quantum Electrodynamics: The Strange Theory of Light in a Box*, p.71, Ed. Wiley-Interscience.
- [45] J.E. Sipe, *Photon Wave Function*, Phys. Rev. A **52**, 1875 (1995).
- [46] I. Bialynicki-Birula, *On the wave function of the photon*, Acta Phys. Pol. A **86**, 97 (1994); e-print www.cft.edu.pl/birula/pubbl.html.
- [47] I. Bialynicki-Birula, *The Photon Wave Function*, Coherence and Quantum Optics VII, eds. J. H. Eberly, L. Mandel, e E. Wolf, Plenum. New York 1996 p. 313; e-print www.cft.edu.pl/birula/pubbl.html.
- [48] I. Bialynicki-Birula, *Photon wave function*, **86**, 97 (1994); e-print www.cft.edu.pl/birula/pubbl.html in Progress in Optics **36**, Ed. E. Wolf, Elsevier, Amsterdam 1996, p.245; e-print www.cft.edu.pl/birula/pubbl.html.
- [49] M. G. Raymer e B. J. Smith, *The Maxwell Wave Function of the Photon*, SPIE conference Optics and Photonics, Conference number 5866, "The Nature of Light: what is a Photon?" (San diego, Aug.2005).
- [50] P. A. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, 4 ed., Clarendon Press, (1958).
- [51] L.E. Reichl, *A modern course in Statistical Physics*, second edition, John Wiley & Sons, (1998).
- [52] S. Salinas, *Introdução a Física Estatística*, pag. 248-259, segunda edição, edusp, (1999).
- [53] J. Zalesny, *Propagation of photon in resting and moving medium*, Phys. Rev. A **63**, (2001).
- [54] Z. Y. Wang, C. D. Xiong and Q. Qiu, *Photon Wave Function and Zitterbewegung*, Phys. Rev. A **80**, 032118, (2009).

- [55] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*. (Pergamon, Oxford, 1984).
- [56] F.H.Hibberd, *A Simple Arrangement for a Rotating Cylinder Viscosimeter*, Am. J. Phys. 20, pag. 134-135(1952).
- [57] Y. Aharonov e D. Bohm, *Significance of electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [58] D. Ghriffits, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison Wesley, 2004.
- [59] M.V.Berry, *Physics of nonhermitian degeneracies*, Czechoslovak journal of Physics, Vol. 54 (2004), No 10.
- [60] Zheng-Chuan Wang and Bo-Zang Li, *Geometric Phase in Relativistic Theory*, Phys. Rev. A, Vol. 60, No. 6, pag. 4313, (1990).
- [61] G. Dattoli, R. Mignani e A. Torre, *Geometrical Phase in the Cyclic Evolution of Non-Hermitian Systems*, J. Phys A: Math. Gen. **23**, 5795, (1990).
- [62] Chang-Pu Sun, *High-Order Adiabatic Approximation for Non-Hermitian Quantum System and Complexification of Berry Phase*, Physica Scripta, vol. **48**, 393, (1993).
- [63] Xiao-Chun Gao, Jin-Bo Xu e Tie-Zheng Qian, *Invariants and Geometric Phase Systems with Non-Hermitian Time-Dependent Hamiltonians*, Phys. Rev. A, Vol. 46, No. 7, pag. 3626, (1992).
- [64] N.A. Sinitsyn e Avadh Saxena, *Geometric Phase for Non-Hermitian Hamiltonian Evolution as an holonomy of parallel transport along a curve*, arXiv:0807.3121v2 [cond-mat.stat-mech], 23 Jul 2008.
- [65] H.Feshbach e F. Villars, *elementary Relativistic Wave Mechanics of Spin 0 and Spin 1/2 Particles*, Rev. Mod. Phys, vol. 30, No 1, January, 1958.

- [66] M. S. Sarandy e D. A. Lidar, *Abelian and Non-Abelian Geometric Phases in open Quantum Systems*, Phys. Rev. A 73, 0621101 (2006).
- [67] A. Mostafazadeh, *A New Class of Adiabatic Cyclic States and Geometric Phase for Non-Hermitian Hamiltonians*, Phys Lett. A, 264, 11-17,(1999).
- [68] A. Das e L. Greenwood, *An Alternative construction of the positive inner Product in Non-Hermitian Quantum Mechanics*, arXiv: 0905. 1454v2 [quant-ph] 29 Jun 2009.