

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



MODELOS GÊMEOS EM TEORIAS DE CAMPOS ESCALARES

TESE DE DOUTORADO

JOSECLÉCIO DUTRA DANTAS

JOÃO PESSOA
2012

MODELOS GÊMEOS EM TEORIAS DE CAMPOS ESCALARES

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MODELOS GÊMEOS EM TEORIAS DE CAMPOS ESCALARES

Tese realizada sob orientação do
Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho,
apresentada ao Departamento de
Física, em complementação aos re-
quisitos para obtenção do título de
Doutor em Física.

JOSECLÉCIO DUTRA DANTAS

MODELOS GÊMEOS EM TEORIAS DE CAMPOS ESCALARES

JOSECLÉCIO DUTRA DANTAS

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Orientador

Prof. Dr. Claudio Benedito Silva Furtado
Examinador Interno

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Examinador Interno

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Examinador Externo (UFCG)

Prof. Dr. Antonio Murilo Santos Macedo
Examinador Externo (UFPE)

*À minha família
e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e pela oportunidade de nascer numa família que me proporcionou crescer com dignidade. Com satisfação, manifesto minha gratidão aos meus queridos pais, *Edwirgens Dutra* e *João Paulino (João da Barraca)*, pela sábia educação e pelo zelo para comigo durante toda a minha vida, em especial a vida escolar; a eles a minha admiração, a minha gratidão. Sou grato à minha esposa *Acácia Dutra*, pela companhia, paciência e por todo o carinho dedicado; à minha irmã *Kalina Clécia*, à minha sobrinha *Karen Wemilly*, ao meu irmão *Leonardo Costa (O Gordo)*, aos meus tios *Francisco Dutra* e *Elza Dutra*, aos meus avós *Sebastião (Basto da Goma)* e *Joana*, e aos demais familiares com os quais convivo fora do mundo do trabalho e dos estudos.

Meus agradecimentos aos meus irmãos *Jamilton Rodrigues* e *Manoel Dantas (O Calixto)*, pela amizade que começamos a construir durante nossa vida de estudantes. Extendo os agradecimentos às suas respectivas esposas, *Fabriciane* e *Maria José*, e aos demais familiares pela calorosa acolhida quando precisei.

Às demais pessoas que me acolheram em João Pessoa: os meus tios *Bosco* e *Gorete*, meu primo *Jailson*, meus vizinhos *Luiza*, *Jessé*, *Lindaci* e *Antony*. A *Raquel Lima* pela atenção dispensada em momentos realmente difíceis.

Ao professor *Fábio Medeiros*, atual coordenador do Curso de Licenciatura em Física do Centro de Educação e Saúde (CES) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), por colaborar com a minha tarefa de conciliação entre o trabalho e o curso de doutorado.

Ao professor *Dionísio Bazeia*, os meus sinceros agradecimentos pela sabedoria compartilhada e pela valorosa orientação durante as etapas de mestrado e doutorado. Em seu nome agradeço aos demais professores do Departamento de Física (DF). Minha gratidão ainda aos colegas do DF, os colegas de sala, os funcionários. À Universidade Federal da Paraíba

(UFPB), pelas condições proporcionadas, e à Capes, pelo tempo em que foi possível o apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho fazemos uma investigação de novas características dos chamados k -defeitos, que são defeitos topológicos com termo cinético não-canônico. Especificamente, estudamos uma classe de k -defeitos em modelos de teorias de campos escalares distintos da teoria padrão mas que descrevem, caso a caso, o mesmo defeito com a mesma densidade de energia daquele descrito pela teoria governada pela densidade lagrangiana padrão. Em teorias que apresentam tais relações, modelos distintos suportam a mesma estrutura topológica; daí chamá-los de modelos gêmeos. Construímos, então, um modelo de teoria gêmea, que denominamos modelo ALTW, e encontramos as relações existentes entre eles, incluindo as relações entre os potenciais de ambos, que, embora distintos, apresentam mínimos conectados pelo mesmo campo solução, para o caso de configurações estáticas e estáveis. Os resultados são ilustrados com vários exemplos. Com a finalidade de distinguir as teorias, analisamos a situação em que a componente T^{11} do tensor energia-momento é não-nula, o que é equivalente a quebrar a condição de pressão nula necessária para garantir a estabilidade das soluções estáticas. Com o mesmo objetivo de distinção, fizemos um estudo da estabilidade linear dos defeitos e obtivemos que, embora representem o mesmo defeito, caso a caso, uma teoria não é uma simples reparametrização da outra. Fizemos ainda uma extensão da natureza gêmea entre modelos mais gerais de teorias de campo escalar real e uma aplicação ao cenário de brana. Investigamos também o comportamento gêmeo entre os modelos padrão e taquiônico em cosmologia FRW, onde o campo escalar evolui com o tempo.

Palavras-chave: Campos escalares, Teorias gêmeas, Dinâmica modificada.

Abstract

In this work we do an investigation of new features of so-called k-defects, which are topological defects with non-canonical kinetic term. Specifically, we study a class of k-defects in models of scalar field theories distinct from standard theory but describing, case to case, the very same defect structure with the very same energy density as that described by the theory governed by standard Lagrange density. In theories which presents such relationships, distinct models support the same topological structure; why call them of twinlike models. We then build a model of twin theory, which we call ALTW model, and find the relationships between them, including relations between the potentials of both, which, although distinct, they present minima that are connected by the same field solution, for the case of static and stable configurations. The results are illustrated with several examples. In order to distinguish between theories, we analyze the situation in which the component T^{11} of the energy-momentum tensor is nonzero, which is equivalent to breaking the pressureless condition required to ensure stability of static solutions. With the same purpose of distinction, we did a study of linear stability of defects and we found that, although representing the same defect structure, case to case, a theory is not a simple reparametrization of the other. We also made an extension of the twin nature between more general models of real scalar field theories and an application to braneworld scenario. We also investigated the behavior twin between standard and tachyonic models in FRW cosmology, where the scalar field evolves over time.

Keywords: Scalar fields, Twinlike theories, Modified dynamics.

Conteúdo

Introdução	1
1 Dinâmica generalizada	3
1.1 O argumento de Derrick	6
1.2 Estabilidade linear	8
2 O modelo padrão	12
2.1 Defeitos do tipo kink	13
2.2 Defeitos do tipo lump	19
3 O modelo modificado	24
4 A natureza gêmea dos modelos	30
4.1 Propriedades específicas	31
4.2 Formalismo de primeira ordem	32
4.3 Distinguindo as teorias	34

4.3.1	T^{11} não-nulo	35
4.3.2	Estabilidade linear	39
5	Outros modelos gêmeos	44
5.1	Um modelo mais geral	45
5.2	O cenário de brana	47
6	Presença de modelos gêmeos em cosmologia	55
6.1	Dinâmica padrão	58
6.2	Dinâmica taquiônica	58
6.3	Formalismo de primeira ordem	59
6.4	Presença de curvatura	62
	Considerações finais	64
	Bibliografia	67

Introdução

Estruturas topológicas em teorias de campos clássicos estão presentes em diversas áreas da física. Estruturas como kinks, vórtices e monopolos são importantes em física de altas energias, surgindo, por exemplo, em diversos contextos na Cosmologia [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Em particular, podem ter existido em diferentes fases da evolução do universo [7, 8, 9, 10]. No universo primordial, tais defeitos podem ter sido formados à medida em que o universo resfriou e simetrias foram quebradas. Neste trabalho, investigamos algumas características de defeitos topológicos em teorias de campo escalar com termos cinéticos não-canônicos, similares àquelas empregadas em modelos de k -essência [11, 12, 13]. Os defeitos topológicos estudados em teorias generalizadas dessa natureza são denominados *k-defeitos* e alguns aspectos destes objetos já foram estudados em [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Inspirados em [22], estudamos modelos de teorias de campo escalar real com termo cinético não-canônico, mas que se relacionam com o modelo padrão de termo cinético canônico de uma maneira que nos permite classificá-los como modelos gêmeos, tendo em vista que, embora sejam distintos, os dois modelos de teorias descrevem uma mesma estrutura topológica, caso a caso, tendo mesma solução, para configurações de campo estático, e mesma densidade de energia.

Inicialmente, no primeiro capítulo, desenvolvemos as equações necessárias ao entendimento da dinâmica generalizada de uma teoria de campo escalar real em $(1 + 1)$ dimensões espaço-temporais, partindo das considerações feitas acerca do princípio de mínima ação, passando pelas condições de estabilidade de uma solução, como discutido no argumento de Derrick, e

culminando no estudo generalizado da estabilidade linear de uma estrutura de defeito a partir de flutuações em torno do campo solução. No segundo capítulo é feita uma descrição da dinâmica padrão, com termo cinético canônico, e uma investigação de estruturas topológicas, ou do tipo kink, e estruturas não-topológicas, ou do tipo lump, seguida de vários exemplos. O mesmo é feito no terceiro capítulo, desta vez para um modelo modificado que intitulamos modelo ALTW. No quarto capítulo, começamos a traçar relações entre os dois modelos tratados nos capítulos anteriores. Algumas propriedades semelhantes levaram-nos a justificar a denominação de modelos gêmeos, ou teorias gêmeas. Um formalismo de primeira ordem para resolução das equações é desenvolvido, como em [23], e a natureza gêmea é incorporada às equações reescritas segundo esse formalismo. Ainda neste capítulo, estudamos formas de distinguir as duas teorias, considerando inicialmente o componente T^{11} do tensor energia-momento não-nulo e, em seguida, através do estudo da própria estabilidade linear das soluções. Modelos mais gerais e uma aplicação ao cenário de brana podem ser vistos no capítulo quinto. O capítulo que antecede as considerações finais é dedicado ao estudo da existência de modelos gêmeos no cenário de cosmologia. Relacionamos as equações de campo evoluindo com o tempo sob dinâmica padrão e sob dinâmica taquiônica, em um sistema espaço-tempo cuja métrica é a de Friedmann-Robertson-Walker.

Capítulo 1

Dinâmica generalizada

Este capítulo é devotado ao desenvolvimento das equações gerais que formam o ferramental matemático necessário ao desenvolvimento dos capítulos seguintes, de maneira que se possa evoluir na leitura sem a necessidade de pausas para demonstrações matemáticas mais demoradas. Inspirados no desenvolvimento adotado em [19, 24], descrevemos uma dinâmica generalizada para estruturas de defeitos em modelos governados por um campo escalar real em $(1,1)$ dimensões espaço-temporais. Até então, não fazemos ilustrações com exemplos específicos. A descrição tem caráter geral e, feita dessa forma, tem a vantagem de permitir o estudo de uma diversidade de possibilidades. Algumas possibilidades, no que diz respeito principalmente à forma do termo cinético da densidade lagrangiana, serão tratadas em detalhes nos capítulos seguintes.

Consideramos inicialmente que cada ponto de uma região do espaço está associada a um campo escalar real $\phi(x, t)$: uma função contínua das coordenadas posição e tempo, que constitui um sistema com um número infinito de graus de liberdade (Para uma revisão mais detalhada, consultar [25, 26]). A dinâmica de ϕ é descrita pela ação

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, X), \tag{1.1}$$

onde $\mathcal{L}(\phi, X)$ é uma densidade lagrangiana generalizada. Esta é simultaneamente uma função

do campo e de suas primeiras derivadas, e a grandeza

$$X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (1.2)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$, representa as contribuições cinética e gradiente da dinâmica. Em princípio, a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ poderia também depender de derivadas de ϕ em ordens mais altas. A consequência indesejada é que as equações de movimento seriam não de segunda ordem, mas de ordens superiores.

A assinatura da métrica é $(+, -)$, onde x^0 é a dimensão temporal e x^1 é a dimensão espacial. Estamos considerando o campo escalar como sendo uma grandeza adimensional, com coordenadas espaciais e temporais também adimensionais.

Se fizermos uma pequena variação arbitrária $\delta\phi$ no campo ϕ , a variação consequente na ação é da forma

$$\delta S = \int d^2x \delta\mathcal{L}(\phi, X). \quad (1.3)$$

Aplicando o princípio da mínima ação, onde se requer que S seja estacionária sob uma variação arbitrária $\delta\phi$ que se anula nos limites de integração [27, 28], obtemos as equações clássicas de movimento para o sistema descrito por S :

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_\phi. \quad (1.4)$$

Estas são conhecidas como equações de Euler-Lagrange, podendo ser reescritas mais explicitamente da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\phi X} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\alpha \phi \partial_\mu \partial_\alpha \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi, \quad (1.5)$$

onde estamos usando a notação $\mathcal{L}_X = \partial\mathcal{L}/\partial X$ e $\mathcal{L}_\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\phi$. Conhecida a densidade lagrangiana que governa determinada teoria, podemos escrever as equações de movimento como equações diferenciais parciais nas variáveis x e t .

A invariância da ação com respeito a pequenas variações na métrica do espaço-tempo está relacionada a uma quantidade conservada para configurações de campo que obedecem à equação (1.5), e que identificamos como sendo o tensor energia-momento, cuja forma é

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.6)$$

As componentes do tensor energia-momento são

$$T^{00} = \rho = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L}, \quad (1.7)$$

$$T^{01} = T^{10} = \mathcal{L}_X \dot{\phi} \phi', \quad (1.8)$$

$$T^{11} = p = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L}. \quad (1.9)$$

Os termos $T^{00} = \rho$ e $T^{11} = p$, nas equações (1.7) e (1.9), representam a densidade de energia e a pressão, respectivamente. Os símbolos $(\dot{})$ e $()'$ representam, respectivamente, derivadas com respeito ao tempo e à coordenada espacial.

Desde que consideremos uma configuração de campo estático, ou seja, $\phi = \phi(x)$, da Eq. (1.2), temos que

$$X = -\frac{1}{2}\phi'^2, \quad (1.10)$$

onde usamos a notação $\phi' = d\phi/dx$. A Eq. (1.5) é então reduzida a

$$(2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X)\phi'' = 2\mathcal{L}_{\phi X}X - \mathcal{L}_\phi. \quad (1.11)$$

Com um pouco de álgebra, a equação acima pode ser reescrita de uma forma mais simples:

$$(\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X)' = 0. \quad (1.12)$$

Integrando esta equação, o resultado obtido deve ser igual a uma constante. Assim,

$$\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X = C, \quad (1.13)$$

onde C é a constante de integração a qual nos referimos.

Como estamos tratando o caso em que as soluções são estáticas, um olhar sobre a Eq. (1.9) permite-nos identificar a constante C como sendo a componente T^{11} do tensor energia-momento, ou seja, a pressão:

$$C = \mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X \left(-\frac{1}{2}\phi'^2 \right) = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L} = T^{11}.$$

A energia total da configuração de campo pode ser obtida integrando a componente T^{00} sobre todo o espaço da densidade de energia. Para configurações de campo estático, temos $T^{00} = -\mathcal{L}$ e a energia total é

$$E = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}(\phi, X). \quad (1.14)$$

Esta energia identifica a massa de repouso da estrutura do defeito.

1.1 O argumento de Derrick

O teorema de Derrick é importante porque trata da condição necessária para estabilidade da solução estática. Segundo esse teorema, não pode haver soluções estáticas, de energia finita, em teorias de campo escalar em mais do que uma dimensão espacial. Derrick percebeu que, para uma configuração de campo que é um ponto estacionário da energia, esta é estacionária para todas as variações, incluindo mudanças de escala [28, 29, 30, 31, 32, 33].

Para uma configuração de campo escalar estático $\phi(x)$, definimos uma solução reescalada da forma

$$\phi^{(\lambda)}(x) = \phi(\lambda x), \quad (1.15)$$

onde estamos considerando a mudança de escala $x \rightarrow \lambda x$, sendo λ um parâmetro finito. Temos que

$$X^{(\lambda)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^{(\lambda)}}{dx} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} (\phi(\lambda x)) \right)^2 = -\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}(\lambda x) \right)^2 = \lambda^2 X(\lambda x).$$

A energia antes da mudança de escala é a seguinte:

$$E(\phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} d^D x \mathcal{L}(\phi, X) = E_0 + E_2. \quad (1.16)$$

Aqui temos decomposto a energia em suas partes potencial e cinética. A expressão da energia escrita assim, na forma de uma soma de suas componentes, representa uma teoria governada pela dinâmica padrão ou generalizações dela. Os subscritos indicam as potências explícitas de λ que aparecem quando a integral é reescalada. Com a mudança de escala, temos

$$E^{(\lambda)} = E(\phi^{(\lambda)}) = - \int_{-\infty}^{\infty} d^D x \mathcal{L}(\phi^{(\lambda)}, X^{(\lambda)}) = - \int_{-\infty}^{\infty} d^D x \mathcal{L}(\phi(\lambda x), \lambda^2 X(\lambda x)). \quad (1.17)$$

Fazendo

$$y = \lambda x \quad \Rightarrow \quad d^D x = \lambda^{-D} d^D y, \quad (1.18)$$

podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$E^{(\lambda)} = - \int d^D y \lambda^{-D} \mathcal{L}(\phi, \lambda^2 X) \quad (1.19)$$

Decompondo esta energia em suas partes potencial e cinética como feito anteriormente, e comparando-a com a Eq. (1.16), obtemos

$$E^{(\lambda)} = \lambda^{-D} E_0 + \lambda^{2-D} E_2. \quad (1.20)$$

Considerando E_0 e E_2 como grandezas positivas, analisemos o seguinte:

$$E^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} E_0 + \lambda E_2, & D = 1 \\ \frac{1}{\lambda^2} E_0 + E_2, & D = 2 \\ \frac{1}{\lambda^3} E_0 + \frac{1}{\lambda} E_2, & D = 3 \end{cases} \quad (1.21)$$

Podemos notar que, para $D = 1$, temos um ponto estacionário em $\lambda = E_0/E_2$. Se $D > 1$, a energia $E^{(\lambda)}$ decresce monotonicamente à medida que D cresce. Assim, soluções estáticas em teorias de campo escalar com uma energia do tipo (1.16) só são possíveis em uma dimensão espacial.

Podemos ainda ver que $E^{(\lambda)}|_{\lambda=1} = E$; e isso independe da energia ter a forma descrita em (1.16), podendo ser escrita na forma de um produto de suas componentes, por exemplo, como é o caso de uma teoria descrita pela dinâmica taquiônica [34, 35]. Assim $\partial E^{(\lambda)}/\partial \lambda$ deve ser minimizada em $\lambda = 1$. Portano, uma solução estática, $\phi = \phi(x)$, deve satisfazer

$$\left[\frac{dE^{(\lambda)}}{d\lambda} \right]_{\lambda=1} = \int_{-\infty}^{\infty} d^D x (D\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X) = 0. \quad (1.22)$$

Para $D = 1$, temos

$$\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X = 0, \quad (1.23)$$

o que significa dizer que apenas configurações estáticas e sem pressão são estáveis. Observamos que esta equação depende do campo escalar e de suas primeiras derivadas. Portanto, é uma equação de primeira ordem. É também uma equação de vínculo: ela impõe a condição de pressão nula para existência da estabilidade.

1.2 Estabilidade linear

Soluções topológicas tendem a manter a topologia mesmo quando sofrem perturbações. O estudo desta estabilidade fornece informações acerca da energia e topologia das soluções. Além do mais, possibilita associar um conjunto de níveis quânticos a qualquer solução clássica estática estável, fundamentado na observação de que sólitons - soluções de equações clássicas de campos -, sem quantização, são similares a partículas. Certas propriedades dos estados quânticos podem ser expandidos em uma série semiclássica; os termos dominantes desta série estão relacionados às soluções clássicas correspondentes [31, 36, 37].

Consideramos o campo escalar da forma

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t), \quad (1.24)$$

onde $\phi(x)$ representa o campo estático e $\eta(x, t)$ descreve uma pequena flutuação em torno da solução estática. Logo, o $X = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ também sofre uma pequena variação, podendo ser

reescrito como

$$X(x, t) = X(x) + \bar{X}(x, t), \quad (1.25)$$

onde

$$\bar{X}(x, t) = \partial_\mu \phi \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta. \quad (1.26)$$

Podemos expandir a densidade lagrangiana em série de Taylor até segunda ordem em η e em $\bar{X}$. O resultado da expansão é o seguinte:

$$\mathcal{L}(\phi + \eta, X + \bar{X}) = \mathcal{L}(\phi, X) + \eta \mathcal{L}_\phi + \bar{X} \mathcal{L}_X + \frac{\eta^2}{2} \mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{\bar{X}^2}{2} \mathcal{L}_{XX} + \eta \bar{X} \mathcal{L}_{\phi X}. \quad (1.27)$$

Substituindo (1.26) em (1.27) e reunindo apenas os termos quadráticos, a parte correspondente da ação é

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \mathcal{L}_X \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \eta)^2 + [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi)] \eta^2 \right\}. \quad (1.28)$$

A equação de movimento para η tem a forma

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \eta) = [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi)] \eta, \quad (1.29)$$

onde temos desprezado justamente os termos quadráticos em η , e considerado apenas os termos lineares. Sendo ϕ uma solução estática, a Eq. (1.29) toma a forma

$$\mathcal{L}_{X_S} \ddot{\eta} - [(2\mathcal{L}_{X_S X_S} X_S + \mathcal{L}_{X_S}) \eta']' = [\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X_S} \phi')'] \eta. \quad (1.30)$$

Supondo

$$\eta(x, t) = \eta(x) \cos(\omega t), \quad (1.31)$$

na Eq. (1.30) obtemos

$$-[(2\mathcal{L}_{X_S X_S} X_S + \mathcal{L}_{X_S}) \eta']' = [\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X_S} \phi')' + \omega^2 \mathcal{L}_{X_S}] \eta. \quad (1.32)$$

Esta pode ainda ser reescrita na forma

$$-[a(x) \eta']' = b(x) \eta, \quad (1.33)$$

onde

$$a(x) = 2\mathcal{L}_{X_S X_S} X_S + \mathcal{L}_{X_S}, \quad (1.34)$$

$$b(x) = \mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X_S} \phi')' + \omega^2 \mathcal{L}_{X_S}. \quad (1.35)$$

Agora chamemos

$$A^2 \equiv \frac{2\mathcal{L}_{X_S X_S} X_S + \mathcal{L}_{X_S}}{\mathcal{L}_{X_S}} \quad (1.36)$$

e, por simplicidade, façamos a seguinte transformação de variáveis

$$dx = Adz \quad \text{e} \quad \eta = \frac{u}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}}. \quad (1.37)$$

Com isso, obtemos

$$-u_{zz} + U(z)u = \omega^2 u, \quad (1.38)$$

onde

$$U(z) = \frac{(\sqrt{A\mathcal{L}_X})_{zz}}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\mathcal{L}_{\phi X} \frac{\phi_z}{A} \right)_z \right]. \quad (1.39)$$

A Eq. (1.38) obtida é uma equação de autovalores ω^2 que, formalmente, coincide com a equação estacionária de Schrödinger no potencial $U(z)$. A estabilidade da solução estática $\phi(x)$ depende da existência ou não de autovalores negativos do operador

$$-\frac{d^2}{dz^2} + U(z). \quad (1.40)$$

Podemos notar que a presença de autovalores negativos transforma a função cos da Eq. (1.31) em cosh. Isto contraria a nossa suposição de pequena flutuação em torno do campo estático. Neste caso, as soluções são instáveis, desde que a perturbação cresce exponencialmente. Se não há autovalores negativos, então todos os ω são reais e a pequena perturbação $\eta(x, t)$ não cresce com o tempo. Podemos notar que ou ela oscila, no caso $\omega^2 > 0$, ou então não depende do tempo. Temos, nestes casos, uma solução estável.

Nosso interesse está voltado para soluções estáveis e o não-crescimento exponencial da perturbação é assegurado pela condição de hiperbolicidade [14]. Tal condição é a imposição

de que as raízes da Eq. (1.30) sejam reais e distintas, o que resulta em

$$A^2 \equiv \frac{2\mathcal{L}_{X_S X_S} X_S + \mathcal{L}_{X_S}}{\mathcal{L}_{X_S}} > 0. \quad (1.41)$$

Uma melhor discussão pode ser encontrada em [38, 39, 40, 41].

Capítulo 2

O modelo padrão

Neste e no próximo capítulo, estaremos empregando as equações desenvolvidas no capítulo anterior aos modelos de teorias de campo escalar cujos detalhes propomo-nos a estudar. O modelo que consideramos no presente capítulo é o mais simples: o de um único campo escalar cuja dinâmica é governada pela densidade lagrangiana padrão dada por

$$\mathcal{L} = X - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ representa as contribuições cinética e gradiente para a dinâmica e $V(\phi)$ descreve o potencial: uma função de ϕ tomada frequentemente como sendo polinomial, tendo formas específicas para cada situação considerada. A densidade lagrangiana (2.1) é invariante sob transformações de Lorentz e se apresenta naturalmente como uma soma de componentes cinética e potencial da energia. A equação de movimento (1.4) para este caso toma a forma

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + V_\phi = 0, \quad (2.2)$$

onde $V_\phi = dV/d\phi$. O tensor energia-momento é

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.3)$$

Desde que consideremos soluções estáticas, a equação de movimento torna-se

$$\phi'' = V_\phi \quad (2.4)$$

e as componentes do tensor energia-momento são

$$T^{00} = \rho(x) = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi), \quad (2.5)$$

que representa a densidade de energia, e

$$T^{11} = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi). \quad (2.6)$$

A energia do campo estático é

$$E = \int dx \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right). \quad (2.7)$$

A condição de pressão nula, Eq. (1.23), leva à seguinte equação:

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = V(\phi). \quad (2.8)$$

Combinando (2.8) com (2.5), obtemos a importante relação

$$\rho(x) = \phi'^2 = 2V(\phi). \quad (2.9)$$

Uma relação deste tipo é verdadeira unicamente pela existência de uma grandeza conservada para configurações estáticas que relaciona o valor do campo à sua derivada espacial. Em geral, a densidade de energia não pode ser expressa como uma função do campo apenas.

2.1 Defeitos do tipo kink

As estruturas conhecidas como sólitons foram descobertas pelo engenheiro escocês *J. Scott Russell*, em 1834, enquanto montava seu cavalo por um canal de água, quando viu um barco parar repentinamente. Ele observou que um “morro” de água começou a se mover desde a proa do barco por uma grande distância canal abaixo, preservando a forma e a velocidade. Soluções que se propagam sem dissipação e com velocidade uniforme são conhecidas como sólitons e uma de suas mais importantes aplicações está, por exemplo, na ótica, onde eles podem se propagar em fibras óticas sem distorção.

Defeitos como kinks e paredes de domínio (a sua extensão para mais do que uma dimensão espacial) são os tipos mais simples de sólitons. São objeto de pesquisa em várias áreas da física, desde matéria condensada a cosmologia; podem ter existido, por exemplo, no universo primordial. Uma diferença consiste no fato de que os sólitons de água preservam sua identidade depois de um espalhamento enquanto que kinks e paredes de domínio não necessariamente têm essa propriedade [32, 36].

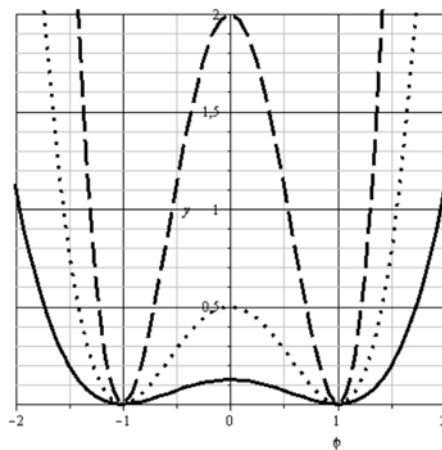


Figura 2.1: Potencial (2.11). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

Como um primeiro exemplo, consideramos o modelo descrito pelo potencial com auto-interação quártica, conhecido como modelo ϕ^4 , que sofre quebra espontânea de simetria; talvez o exemplo mais conhecido de estruturas de defeitos suportando soluções topológicas. A dinâmica é descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.10)$$

onde $\mu = 0, 1$, e λ e a são parâmetros. Esta lagrangiana é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$. O potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 \quad (2.11)$$

tem dois mínimos globais degenerados em $\phi = \pm a$ e um máximo em $\phi = 0$ (Ver Fig. 2.1). Os mínimos do potencial são equiprováveis na situação simétrica. A quebra espontânea de

simetria ocorre quando o campo ϕ assume um desses mínimos.

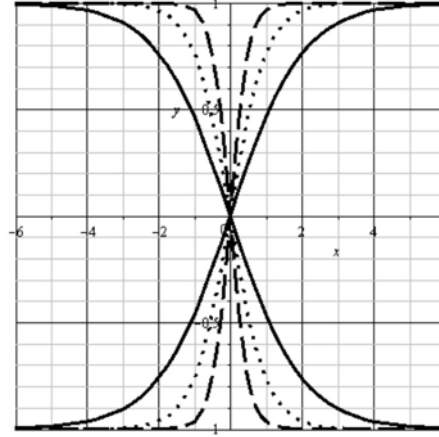


Figura 2.2: Solução (2.14). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções kink e anti-kink para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

A equação de movimento é

$$\ddot{\phi} - \phi'' + 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi = 0. \quad (2.12)$$

Duas soluções triviais da equação acima são $\phi = \pm a$. Estas, porém, têm densidade de energia nula e, como vimos, identificam os vácuos clássicos do modelo. A equação de movimento para campo estático tem a forma

$$\phi'' - 2\lambda^2 \phi (\phi^2 - a^2) = 0. \quad (2.13)$$

As soluções desta equação são chamadas topológicas ou do tipo kink, e são dadas por

$$\phi(x) = \pm a \tanh(\lambda a(x - x_0)), \quad (2.14)$$

onde x_0 localiza o centro do kink. A localização do centro de uma solução estática é arbitrária, pois o modelo tem simetria translacional. O kink tem amplitude igual a a e largura inversamente proporcional a λa . É costume denominarmos as soluções correspondentes ao sinal positivo de *kinks* e aquelas correspondentes ao sinal negativo, de *anti-kinks*. A Fig. 2.2 mostra as soluções (2.14), consideradas as duas possibilidades de sinal, para diferentes valores

de λ , onde fizemos $a = 1$ e $x_0 = 0$. Podemos então notar que, quando $x > 0$, ϕ evolui em direção a $+a$. Para $x < 0$, ϕ evolui em direção a $-a$. Uma solução topológica, portanto, conecta mínimos distintos e descreve um setor topológico.

Soluções do tipo kink são casos especiais de soluções não-dissipativas, para as quais a densidade de energia em um dado ponto não se anula no limite de tempo grande. A densidade de energia para este caso é dada por

$$\rho(x) = \lambda^2 a^4 \operatorname{sech}^4(\lambda a(x - x_0)), \quad (2.15)$$

e tem um máximo em $x = x_0$, $\rho_{max} = \lambda^2 a^4$. Gráficos da densidade de energia estão presentes na Fig. 2.3, onde novamente fizemos $x_0 = 0$. A energia total do kink é obtida integrando-se a densidade de energia em todo o espaço. Vejamos:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = \frac{4\lambda a^3}{3}. \quad (2.16)$$

É fácil observar que este valor é independente da localização do centro do kink, o que significa que translações não mudam a sua energia.

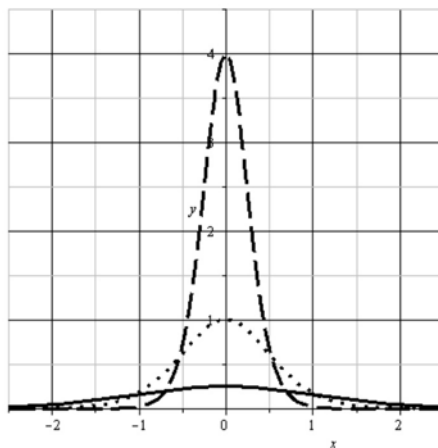


Figura 2.3: Densidade de energia (2.15). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

Associada à solução do tipo kink existe uma corrente conservada,

$$j^\mu = \frac{1}{2a} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.17)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$ e $\epsilon^{\mu\nu}$ é o símbolo anti-simétrico em duas dimensões, sendo $\epsilon^{01} = 1$. Utilizando esta propriedade de anti-simetria, podemos mostrar que j^μ é uma grandeza conservada, ou seja,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.18)$$

Kinks são caracterizados por uma grandeza denominada carga topológica, dada por

$$Q = \int dx j^0 = \frac{1}{2a} [\phi(x = +\infty) - \phi(x = -\infty)]. \quad (2.19)$$

Sua conservação dá-nos informação acerca da estabilidade do defeito. Configurações de defeito estáveis são tais que $dQ/dt = 0$.

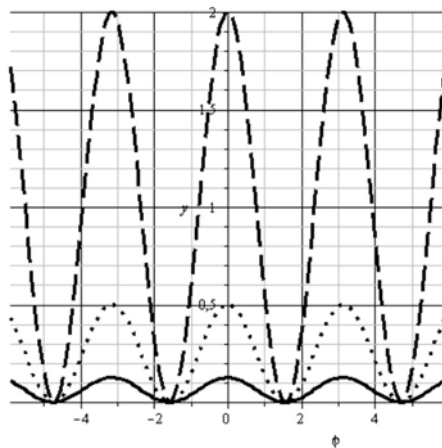


Figura 2.4: Potencial (2.20). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

Outro exemplo de defeito topológico é o conhecido como modelo *sine-Gordon*, que tem sido utilizado para estudar uma gama de fenômenos em diferentes contextos [42, 43, 44, 45], cujo potencial tem a forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2(a\phi), \quad (2.20)$$

e está plotado na Fig. 2.4. Este potencial tem um número infinito de mínimos que correspondem a $\phi = k\pi/a$, onde k é um número inteiro. Um número infinito de mínimos significa um número infinito de correntes locais conservadas e, por sua vez, um número também

infinito de setores topológicos equivalentes que são conectados pelas soluções

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{a} \arcsin[\tanh(\lambda ax)] + k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.21)$$

Um gráfico destas soluções é visto na Fig. 2.5, para diferentes valores de λ , contemplando as possibilidades kink e anti-kink.

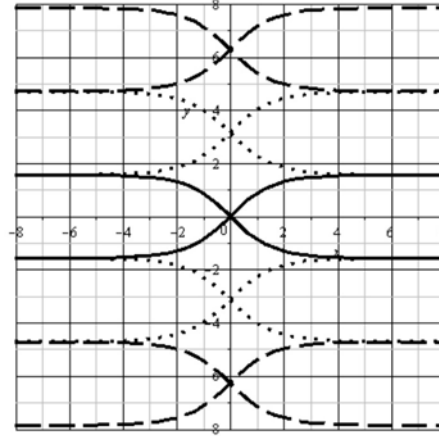


Figura 2.5: Soluções do modelo *sine-Gordon*. Sendo $a = \lambda = 1$, as linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções kink e anti-kink para $k = 0 \pm 1, \pm 2$, respectivamente.

A densidade de energia associada a cada solução é do tipo

$$\rho(x) = \lambda^2 \text{sech}^2(\lambda ax). \quad (2.22)$$

Um gráfico desta expressão está na Fig. 2.6, onde é perceptível a semelhança com a Fig. 2.3, que representa o exemplo anterior. A densidade de energia associada aos kinks está concentrada no centro do defeito. Integrando a densidade de energia em todo o espaço, obtemos a energia total de cada solução:

$$E = 2 \left| \frac{\lambda}{a} \right| \quad (2.23)$$

Mais uma vez, observamos que a energia não depende da localização do centro do kink.

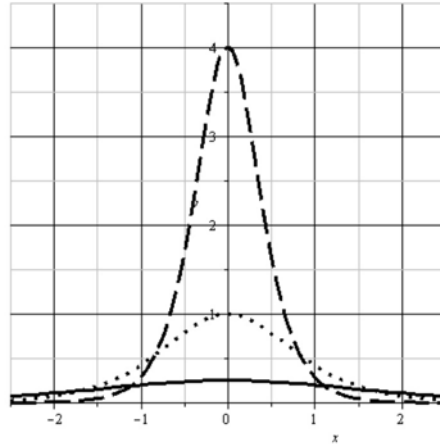


Figura 2.6: Densidade de energia do modelo *sine-Gordon*. As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

2.2 Defeitos do tipo lump

Estruturas não-topológicas, ou do tipo lump, aparecem em vários contextos dentro da física. Em física da matéria condensada, são importantes para descrever, por exemplo, transporte de carga em correntes diatômicas [46, 47, 48, 49, 50], em comunicação óptica. Em física de altas energias, estão presentes nos estudos sobre formação de estrutura [51, 52, 53, 54, 55] e propriedades da matéria escura presente nas galáxias [56, 57].

Um exemplo de defeito não-topológico ou do tipo lump é o modelo ϕ^3 descrito pelo potencial

$$V_3(\phi) = \frac{\lambda}{2}\phi^2 \left(1 - \frac{\phi}{a}\right). \quad (2.24)$$

Este tem um único mínimo local em $\phi = 0$ e um máximo em $\phi = 2a/3$ e está plotado na Fig. 2.7.

A equação de movimento para configurações de campo estático tem a seguinte forma:

$$\phi'' - \lambda\phi \left(1 - \frac{3\phi}{2a}\right) = 0. \quad (2.25)$$

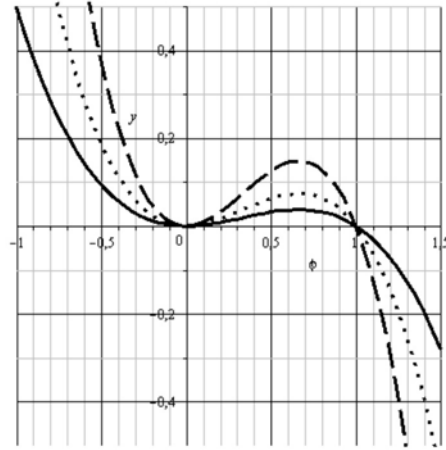


Figura 2.7: Potencial do modelo ϕ^3 . As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

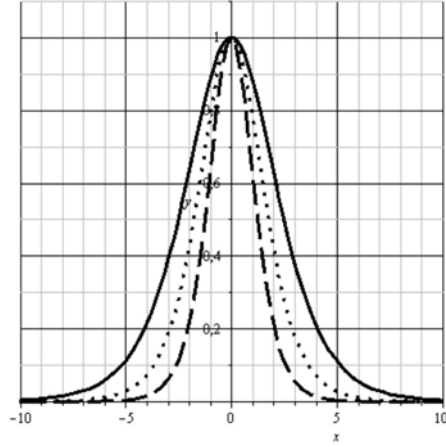


Figura 2.8: Soluções do modelo ϕ^3 . Sendo $a = 1$, as linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções do tipo lump para $\lambda = 0,5; 1; 2$, respectivamente.

A solução dessa equação é

$$\phi(x) = a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(x - x_0) \right). \quad (2.26)$$

Seus gráficos são mostrados na Fig. 2.8, onde fizemos o centro da solução ser $x_0 = 0$ e, com a fixo, escolhemos diferentes valores para λ . A denominação não-topológica para uma solução deste tipo diz respeito à ausência de carga topológica. Podemos notar que os valores assintóticos de campo $\phi(+\infty)$ e $\phi(-\infty)$ coincidem. O campo ϕ , neste caso, não descreve um setor topológico, como acontece para soluções do tipo kink.

A densidade de energia associada a essa solução é do tipo

$$\rho(x) = \lambda a^2 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(x - x_0) \right) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(x - x_0) \right). \quad (2.27)$$

Seus gráficos estão representados na Fig. 2.9, para diferentes valores do parâmetro λ , com a fixo. Desde já é perceptível a diferença entre esta forma de distribuição de energia e aquela para os exemplos do tipo kink.

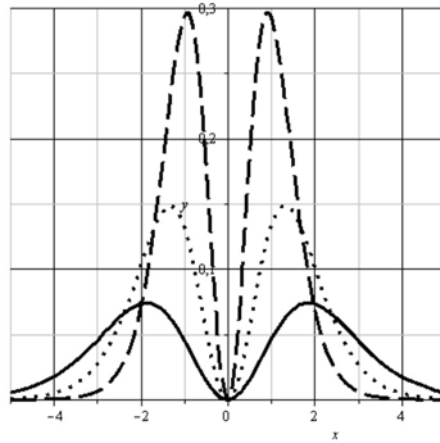


Figura 2.9: Densidade de energia (2.27). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

A energia total associada à solução do tipo lump também não depende da localização do centro do defeito. Para este caso, é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \frac{4a^2\sqrt{\lambda}}{5} \quad (2.28)$$

Outro exemplo onde se tem solução do tipo lump é o descrito pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 \phi^2 (a^2 - \phi^2), \quad (2.29)$$

cujos gráficos estão mostrados na Fig. 2.10. Este potencial é semelhante ao do modelo ϕ^4 , mas invertido. Daí ser denominado modelo ϕ^4 invertido. Ele tem um mínimo local em $\phi = 0$ e tem máximos em $\phi = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

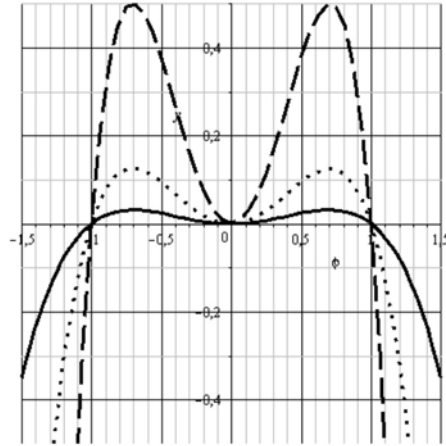


Figura 2.10: Potencial ϕ^4 invertido. As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

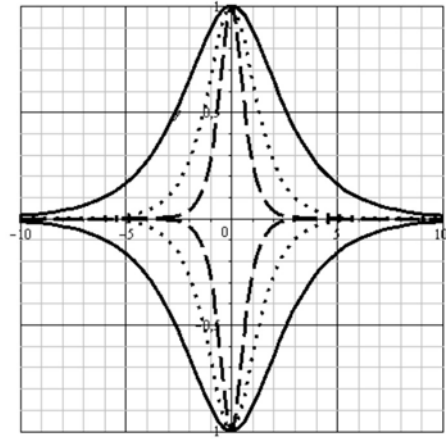


Figura 2.11: Soluções do modelo ϕ^4 invertido. Sendo $a = 1$, as linhas contínua, pontilhada e tracejada representam as soluções do tipo lump e suas simétricas para $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

A equação de movimento para campo estático é

$$\phi'' - \lambda^2 \phi(a^2 - 2\phi^2) = 0, \quad (2.30)$$

cujas soluções não-topológicas são

$$\phi(x) = \pm a \operatorname{sech}(\lambda a x). \quad (2.31)$$

Estas soluções representam lumps, cuja amplitude é dada por a e cuja largura é inversamente proporcional a λa . Vejamos a Fig. 2.11.

A densidade de energia associada a essa solução é

$$\rho(x) = \lambda^2 a^4 \operatorname{sech}^2(\lambda a x) \tanh^2(\lambda a x), \quad (2.32)$$

e está plotada na Fig. 2.12. Um olhar sobre esta e sobre a Fig. 2.9 permite-nos perceber que a densidade de energia associada à solução do tipo lump se anula no centro do defeito e tem máximos degenerados simétricos em relação ao centro. Essa forma na qual se distribui a densidade de energia sugere que lumps podem ter estrutura interna. Integrando em todo o espaço, a energia total associada ao lump é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\lambda a^3}{3}. \quad (2.33)$$

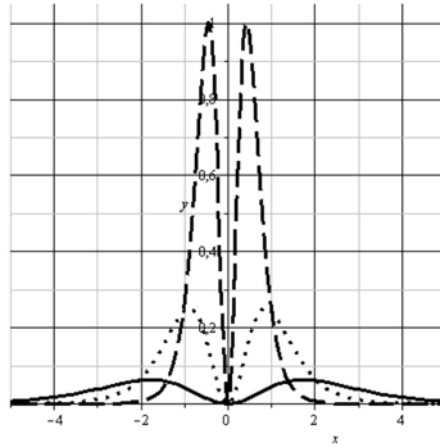


Figura 2.12: Densidade de energia do modelo ϕ^4 invertido. As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam a densidade de energia para $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

Capítulo 3

O modelo modificado

Teorias de campos escalares com termo cinético não-canônico, conhecidas como teorias de k -campos, vem tornando-se cada vez mais comuns e encontrando aplicações nos mais diversos ramos da física teórica moderna. Originalmente, tais teorias foram admitidas como uma possibilidade de estabilização de soluções estáticas em alguns modelos de sóliton, como feito em [58, 59].

Nos últimos anos, lagrangianas com termo cinético modificado vem sido bastante estudadas no contexto cosmológico. A introdução dos k -campos no estudo da inflação, por exemplo, leva ao que conhecemos como k -inflação [13, 60]. Ainda nesse contexto, foram então sugeridos modelos de k -essência como solução para o problema da coincidência cósmica, como pode ser visto em [11, 12]. Dentre outras aplicações, propostas de solução alternativa para o problema da matéria escura também surgem com a introdução de k -campos [61, 62], e os efeitos desses campos modificados na vizinhança de um buraco negro podem ser vistos em [63, 64, 65, 66].

O comportamento de defeitos topológicos, como paredes de domínio, vórtices e monopolos, também tem sido analisado em cenários governados por teorias de k -campos. Estes são denominados k -defeitos - defeitos topológicos em teorias que admitem mais do que duas derivadas no termo cinético, mas que levam a equações de movimento de segunda ordem.

Neste capítulo, investigamos novas características de defeitos topológicos em tais teorias, com termo cinético não-canônico. Estudamos detalhes do modelo modificado, que nomeamos Modelo ALTW, cuja sigla corresponde às iniciais dos autores da Ref. [22] (Andrews, Lewandowski, Trodden, Wesley), no qual o modelo foi introduzido.

No trabalho acima citado, é estudada uma família de modelos que generalizam a teoria de campo escalar canônica, por adicionar derivadas de ϕ ao termo cinético. Uma forma específica de teoria com termo cinético modificado analisada é descrita pela ação de Dirac-Born-Infeld (DBI). O modelo foi recentemente proposto no contexto da teoria de cordas, no cenário da chamada inflação DBI, onde a inflação é guiada por uma D-brana [67, 68, 69, 70, 71].

Em [22], os autores mostraram que, dada uma teoria de campo escalar canônica, como a descrita no capítulo anterior, com um potencial positivo semi-definido, existe sempre uma escolha de potencial $U(\phi)$ na teoria DBI descrita pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = M^2 - M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}, \quad (3.1)$$

de forma que as duas teorias descrevam a mesma estrutura de defeito, com o mesmo campo solução e a mesma densidade de energia. Em (3.1), M^2 é um parâmetro de massa associado ao termo DBI.

No limite de massa grande, podemos expandir o termo $(1 - 2X/M^2)^{1/2}$ e reescrever a lagrangiana como segue

$$\mathcal{L} = X - U(\phi) + \frac{1}{M^2} \left(\frac{1}{2} X^2 + U(\phi) X \right). \quad (3.2)$$

Podemos perceber que, quando $1/M^2 \rightarrow 0$, a equação acima representa a densidade lagrangiana que governa a teoria padrão, onde identificamos $U(\phi) = V(\phi)$, que é o potencial desta última.

A equação de movimento geral (1.4) que desenvolvemos anteriormente, para este caso,

toma a forma

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{1 - \frac{2X}{M^2}} \right) \partial^\mu \phi \right] + U_\phi \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}} = 0. \quad (3.3)$$

Uma maneira mais explícita de escrever a equação acima é a seguinte:

$$\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi}{1 - \frac{2X}{M^2}} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi = -\frac{1}{M^2} \frac{U_\phi}{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}. \quad (3.4)$$

Como estamos interessados em configurações de campo estático, podemos escrever a equação de movimento em uma maneira mais simples:

$$\frac{\phi''}{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}} = -\frac{1}{M^2} \frac{U_\phi}{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}. \quad (3.5)$$

Esta equação pode ser integrada; e o resultado que obtemos é uma equação de primeira ordem:

$$1 - \frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{\sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}} = \frac{C}{M^2}, \quad (3.6)$$

onde C é uma constante de integração, que mais uma vez identificamos com a componente T^{11} do tensor energia-momento. Reorganizando os termos, obtemos

$$\phi'^2 = -M^2 + M^2 \left(\frac{1 + \frac{U(\phi)}{M^2}}{1 - \frac{C}{M^2}} \right)^2. \quad (3.7)$$

O tensor energia-momento, cuja expressão geral é aquela da Eq. (1.6), na situação atual, é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} - M^2 \eta^{\mu\nu} \left[1 - \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}} \right]. \quad (3.8)$$

A componente T^{00} do tensor energia-momento fornece a densidade de energia que é dada por

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}. \quad (3.9)$$

Utilizando o resultado obtido na Eq. (3.6), podemos reescrever a densidade de energia de uma forma um pouco diferente:

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \frac{\left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right)^2}{1 - \frac{C}{M^2}} = -M^2 + M^2 \left(1 - \frac{C}{M^2} \right) \left(1 + \frac{\phi'^2}{M^2} \right). \quad (3.10)$$

Agora relembremos a condição de estabilidade estudada no Capítulo 1. Esta diz que devemos ter $C = T^{11} = 0$. Fazendo isto na Eq. (3.7), obtemos

$$\phi'^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (3.11)$$

Percebemos então que esta é a mesma expressão da densidade de energia, quando fazemos $C = 0$ na Eq. (3.10):

$$\rho(x) = 2U(\phi) + \frac{U^2(\phi)}{M^2} = \phi'^2. \quad (3.12)$$

Observamos que esta mesma igualdade foi obtida para o Modelo Padrão, na Eq. (2.9). Esta semelhança nos motiva a estudar a existência de outras relações análogas entre as duas teorias (Modelo Padrão e Modelo ALTW), de forma a poder classificá-las como teorias gêmeas.

Podemos agora analisar alguns exemplos. Inicialmente, consideramos o modelo descrito pelo potencial

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{M^2} (\phi^2 - a^2)^2}, \quad (3.13)$$

onde λ e a são parâmetros. Este potencial está plotado na Fig. 3.1, para diferentes valores de λ e a e M fixos.

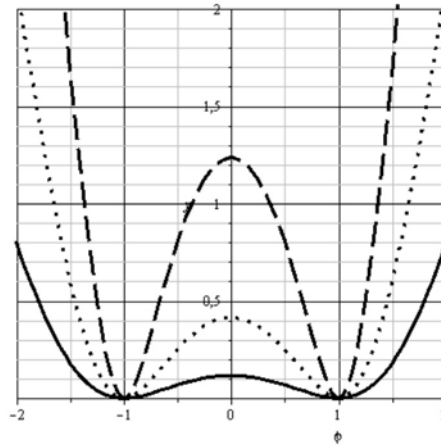


Figura 3.1: Potencial (3.13). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial para $M = 1$, $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

A equação de movimento, resultante de (3.11), toma a forma

$$\phi'^2 = \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2. \quad (3.14)$$

As soluções desta equação são

$$\phi(x) = \pm a \tanh(\lambda a(x - x_0)). \quad (3.15)$$

Podemos perceber que estas são as mesmas soluções do tipo kink que estão escritas na Eq. (2.14). A semelhança entre as soluções nas duas teorias implica também uma igualdade nas expressões da densidade de energia. Isto significa que as duas escolhas de potenciais, (2.11) e (3.13), representam teorias distintas que descrevem uma mesma estrutura de defeito. Esta última escolha de potencial, semelhantemente à escolha anterior, também tem mínimos em $\phi = \pm a$ e um máximo em $\phi = 0$.

Como um outro exemplo, consideramos desta vez o seguinte potencial:

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{M^2} \phi^2 (a^2 - \phi^2)}. \quad (3.16)$$

Os gráficos deste potencial são os da Fig. 3.2, para diferentes valores de λ e a e M fixos.

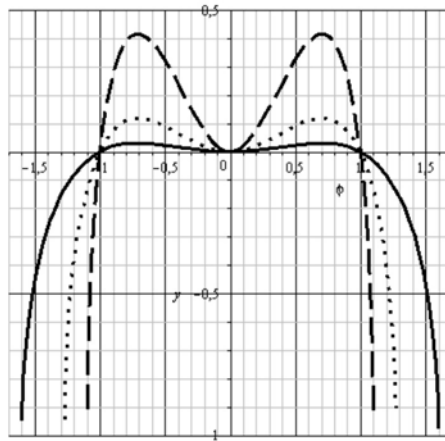


Figura 3.2: Potencial (3.16). As linhas contínua, pontilhada e tracejada representam o potencial para $M = 1$, $a = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 2$, respectivamente.

A equação de movimento para este caso é a seguinte:

$$\phi'^2 = \lambda^2 \phi^2 (a^2 - \phi^2). \quad (3.17)$$

As soluções desta equação são

$$\phi(x) = \pm a \operatorname{sech}(\lambda a x). \quad (3.18)$$

Estas são as mesmas soluções do tipo lump que estão escritas na Eq. (2.31). Podemos então perceber que a densidade de energia associada a estas soluções é a mesma do modelo ϕ^4 invertido, desenvolvido segundo a dinâmica padrão. Os valores extremos dos potenciais, nos dois casos (padrão e modificado), também se assemelham: o potencial (3.16) também tem um único mínimo local em $\phi = 0$ e máximos em $\phi = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Capítulo 4

A natureza gêmea dos modelos

Nos dois capítulos anteriores, desenvolvemos dois modelos distintos de teorias de campos escalares, mas que apresentam semelhanças de caráter muito singular. Vimos a possibilidade de escrever uma teoria não-canônica cujas escolhas específicas de potenciais permitem descrever estruturas topológicas com as mesmas propriedades físicas descritas por escolhas distintas de potenciais na teoria canônica. Pelo que vimos, dada uma estrutura de defeito cuja descrição pode ser feita segundo a teoria canônica, é sempre possível descrevê-la também segundo um modelo análogo em uma teoria gêmea diferente da anterior.

Neste capítulo, analisamos detalhadamente algumas propriedades dessas duas teorias. Além da análise de semelhanças entre elas, servimo-nos também de ferramentas capazes de distingui-las, como tem sido feito na Ref. [72]. A natureza gêmea que observamos entre as duas teorias é, evidentemente, resultado de semelhanças fortes o bastante para classificá-las como tais e, ao mesmo tempo, resultado de diferenças fortes o bastante para enxergá-las como teorias realmente distintas.

4.1 Propriedades específicas

Quando consideramos o modelo padrão, no Capítulo 2, obtivemos uma relação entre a derivada espacial do campo solução ϕ' e o potencial $V(\phi)$ da teoria, da seguinte maneira:

$$\phi'^2 = 2V(\phi). \quad (4.1)$$

Para o modelo modificado, no Capítulo 3, a relação entre essas grandezas está escrita em uma expressão diferente:

$$\phi'^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (4.2)$$

Supondo que a solução seja a mesma para as duas teorias, notamos que os dois potenciais obedecem à seguinte relação:

$$V(\phi) = U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (4.3)$$

De forma a testar nossa suposição, usamos este resultado na equação de movimento do modelo padrão, Eq. (2.2). Assim, temos

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2}\right) U_\phi = 0. \quad (4.4)$$

Fazendo a mesma substituição, ou seja, $V(\phi)$ dado pela Eq. (4.3), na Eq. (2.3), o tensor energia momento toma a forma

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} X + \eta^{\mu\nu} \left(U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{U^2(\phi)}{M^2} \right). \quad (4.5)$$

Considerando configurações de campo estático, a equação de movimento pode ser reescrita como segue:

$$\phi'' = \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2}\right) U_\phi, \quad (4.6)$$

e a componente T^{00} do tensor energia-momento fornece a densidade de energia:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (4.7)$$

A componente T^{11} é

$$T^{11} = \frac{1}{2}\phi'^2 - U(\phi) - \frac{1}{2} \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (4.8)$$

No Capítulo 1, identificamos a componente T^{11} como sendo a pressão e esta, por sua vez, como sendo igual a uma constante de integração C , para configurações estáticas. Dessa maneira, podemos escrever

$$\phi'^2 = 2C + 2U(\phi) + \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (4.9)$$

Ainda no Capítulo 1, vimos que configurações estáticas estáveis são aquelas em que $C = 0$, ou seja, situações nas quais a pressão é nula. Fazendo isto na equação acima, obtemos um resultado bastante interessante:

$$\phi'^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (4.10)$$

Podemos notar que esta é a mesma Eq. (4.2), o que significa dizer que as duas teorias têm o mesmo campo como solução, desde que os potenciais se relacionem da forma dada pela Eq. (4.3). Um olhar sobre as equações (2.9) e (3.12), mostra-nos que a igualdade entre as soluções significa também uma igualdade nas densidades de energia das duas teorias. É esta a razão da denominação Teorias Gêmeas: teorias distintas, com potenciais distintos, porém com mesmas solução e densidade de energia.

4.2 Formalismo de primeira ordem

A equação de movimento (1.12), que nos Capítulos 2 e 3, é escrita respectivamente nas equações (2.4) e (3.5), tem uma forma não-trivial cujas soluções nem sempre são possíveis de se obter analiticamente. Por esta razão, recorreremos a um procedimento, conhecido como formalismo de primeira ordem, desenvolvido nas Ref. [23, 24, 73, 74, 75], em diversos contextos, como na investigação de soluções generalizadas para defeitos globais e, em cosmologia, considerando as diversas possibilidades de evolução do universo como a dinâmica

de quintessência, dinâmica taquiônica e cenário de brana. Com auxílio deste formalismo, reduzimos a ordem das equações envolvidas, obtendo um sistema de equações de primeira ordem permitindo fazer uma investigação mais aprofundada dos modelos tratados.

O formalismo começa quando introduzimos uma função $W(\phi)$, supondo poder escrever uma equação de primeira ordem da forma

$$\mathcal{L}_X \phi' = W_\phi, \quad (4.11)$$

onde $\mathcal{L}$ é uma lagrangiana genérica. Esta equação e a Eq. (1.23) formam o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que devemos resolver. As soluções dessas equações de primeira ordem são também soluções da equação de movimento original (1.12). A investigação dos modelos segue de maneira mais simples.

Para o caso padrão, temos $\mathcal{L}_X = 1$. A equação de movimento original é de segunda ordem em x , da forma como está na Eq. (2.4). Mas, de acordo com o formalismo, podemos escrever uma equação de primeira ordem, da forma (4.11), como segue:

$$\phi' = W_\phi \quad (4.12)$$

e a condição de pressão nula, Eq. (1.23), leva a

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (4.13)$$

Não é difícil verificar que as soluções destas duas equações são também soluções da Eq. (2.4).

Para o caso modificado, temos que

$$\mathcal{L}_{mX} = \frac{1 + \frac{U}{M^2}}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} = \frac{1 + \frac{U}{M^2}}{\sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}}. \quad (4.14)$$

A equação diferencial de primeira ordem obtida a partir da Eq. (4.11) é a seguinte:

$$\phi'^2 = \frac{W_\phi^2}{\left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2}\right)^2 - \frac{W_\phi^2}{M^2}}. \quad (4.15)$$

Esta equação é compatível com a (3.7) - a equação de movimento que resultou da integração da equação de segunda ordem -, para $C = 0$, desde que o potencial tenha uma forma muito específica:

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}}. \quad (4.16)$$

A densidade de energia é então dada por

$$\rho(x) = \phi'^2 = W_\phi \phi' = \frac{dW}{dx}. \quad (4.17)$$

A energia total é obtida integrando a densidade de energia em todo o espaço. O resultado é o seguinte:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = |\Delta W| = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))|. \quad (4.18)$$

É importante notar que esta energia não depende da forma explícita da solução, mas é dada em termos de W , calculada nos valores assintóticos do campo $\phi(x)$. Um outro resultado importante surge quando expandimos (4.16) para $1/M^2$ pequeno: o potencial $U(\phi)$ é dado da mesma forma que o potencial do modelo padrão,

$$U(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (4.19)$$

o que é reforçado pela Eq. (4.3), no limite $1/M^2 \rightarrow 0$, onde obtemos

$$V(\phi) = U(\phi). \quad (4.20)$$

Considerando a natureza gêmea dos modelos, observamos que há um mesmo $W = W(\phi)$ controlando os modelos padrão e modificado, embora $V(\phi)$ e $U(\phi)$ sejam funções diferentes do campo escalar real.

4.3 Distinguindo as teorias

É necessário que façamos a distinção entre as duas teorias, para que fique claro que uma não é uma simples reparametrização da outra, no sentido de que, embora tendo a mesma

solução e a mesma densidade de energia, são situações diferentes. Neste ponto, fazemos esta distinção de duas maneiras. Primeiramente, fazemos a componente T^{11} do tensor energia-momento ser diferente de zero [72]. A segunda maneira de distinguir as teorias é através do estudo da estabilidade linear da estrutura do defeito, como feito na Ref. [22]. Diferentemente do que foi feito na última Referência citada, aqui inserimos o Formalismo de primeira ordem no estudo da estabilidade, permitindo obter resultados gerais de maneira analítica.

4.3.1 T^{11} não-nulo

Para o caso padrão, considerando que a componente T^{11} do tensor energia-momento não é nula e sim igual a uma constante $C \neq 0$, a equação de movimento que devemos resolver é a seguinte:

$$\phi'^2 = W_\phi^2 + 2C. \quad (4.21)$$

Para o modelo modificado, a equação de movimento se escreve

$$\phi'^2 = -M^2 + M^2 \frac{1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}}{\left(1 - \frac{C}{M^2}\right)^2}. \quad (4.22)$$

De maneira mais explícita, tomemos como um primeiro exemplo o caso em que o superpotencial é dado por

$$W_\phi = 1 - \phi^2. \quad (4.23)$$

Esta escolha é a que leva ao modelo ϕ^4 no caso padrão, representado pelo potencial (2.11). Por simplicidade, temos feito ambas as constantes λ e a iguais à unidade. Assim, as equações de movimento para as situações padrão e modificada são, respectivamente,

$$\phi'^2 = (1 - \phi^2)^2 + 2C \quad (4.24)$$

e

$$\phi'^2 = -M^2 + M^2 \frac{1 + \frac{(1-\phi^2)^2}{M^2}}{\left(1 - \frac{C}{M^2}\right)^2}. \quad (4.25)$$

Na Fig. 4.1, estão plotadas as soluções destas equações em um plano (ϕ, ϕ') ; os gráficos superiores são os do Modelo Padrão, e os gráficos inferiores, os do Modelo ALTW. As linhas sólidas pretas representam as soluções para $C = 0$, ou seja, as soluções kink e anti-kink. As linhas tracejadas vermelhas representam as soluções para valores positivos de C . As linhas traço-pontilhadas azuis representam as soluções para valores negativos de C . Da esquerda para a direita, escolhemos $1/M^2 = 1, 0.5, 0.1$ e percebemos que, à medida que nos aproximamos do limite de massa grande, os dois casos tornam-se mais próximos; para valores pequenos de M^2 , fica clara a diferença entre eles.

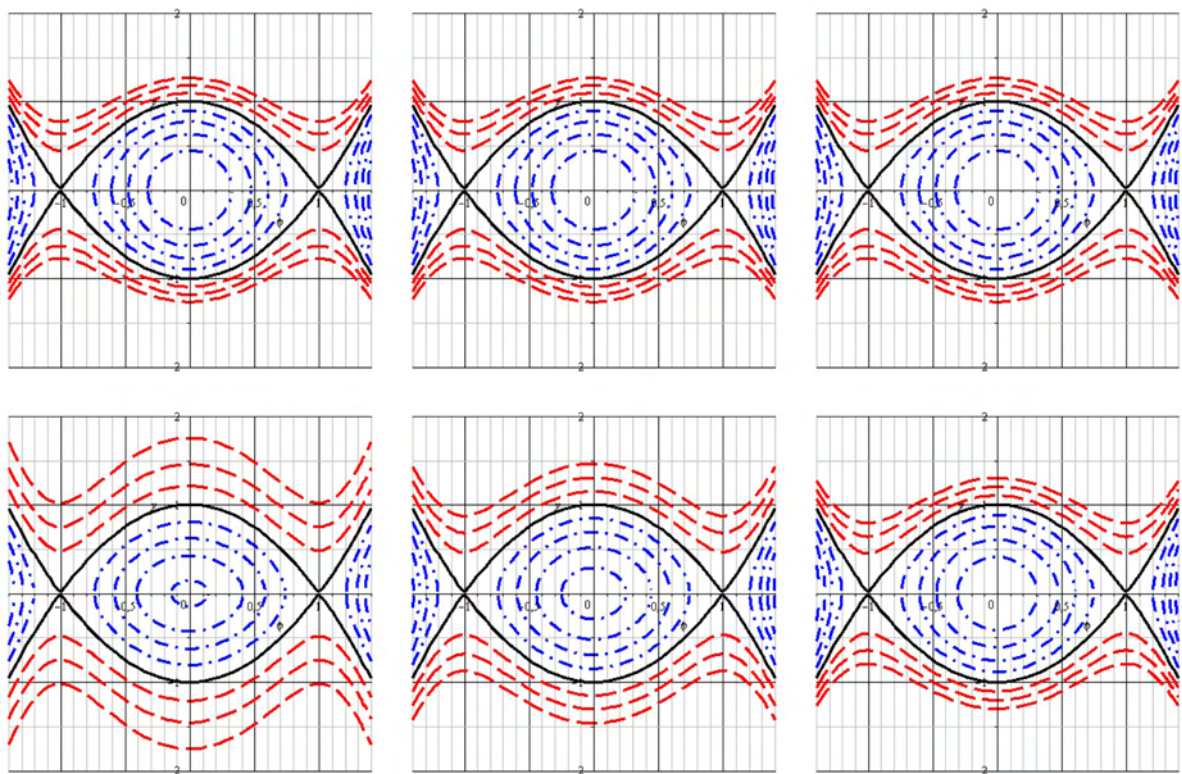


Figura 4.1: Gráficos das soluções do potencial ϕ^4 no plano (ϕ, ϕ') , no Modelo Padrão (painel superior) e no Modelo ALTW (painel inferior), para $1/M^2 = 1, 0.5, 0.1$, da esquerda para a direita, respectivamente. A linha sólida preta representa $T^{11} = 0$, as linhas tracejadas vermelhas representam $T^{11} > 0$ e as linhas traço-pontilhadas representam $T^{11} < 0$.

Outro exemplo que vamos considerar é aquele em que tomamos

$$W_\phi = \cos(\phi). \quad (4.26)$$

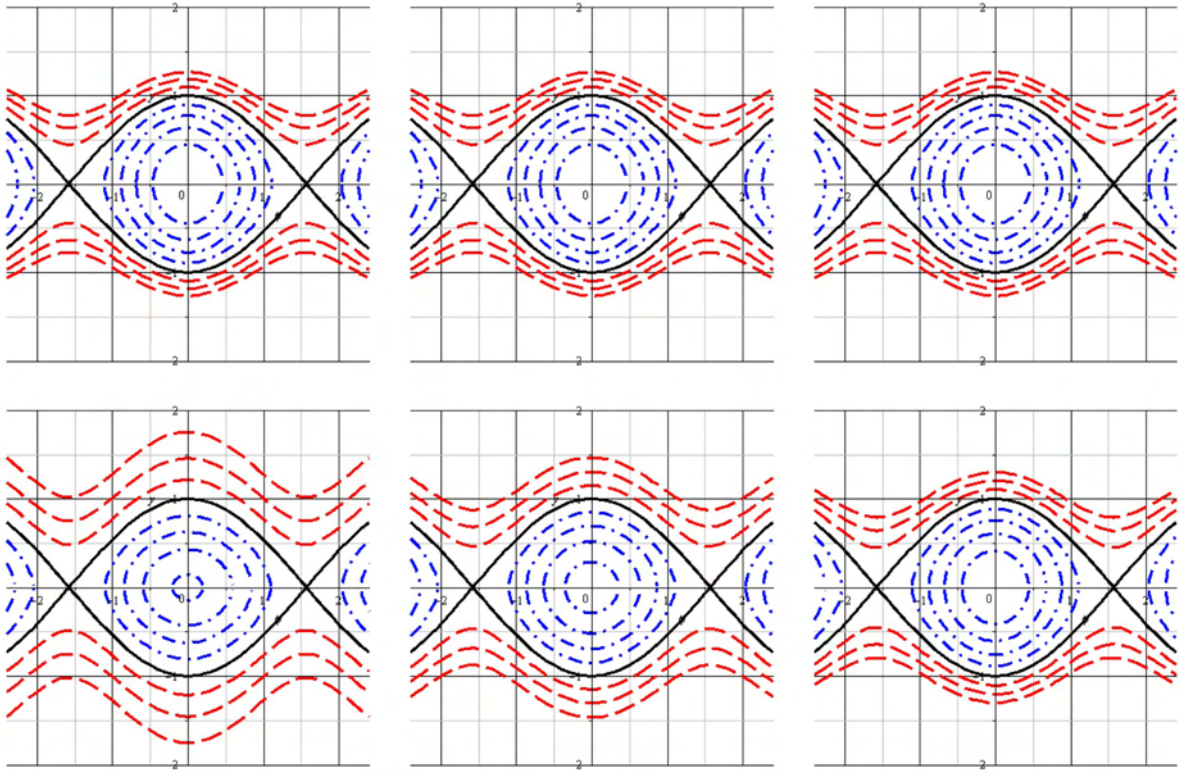


Figura 4.2: Gráficos das soluções do potencial *sine-Gordon* no plano (ϕ, ϕ') , no Modelo Padrão (painel superior) e no Modelo ALTW (painel inferior), para $1/M^2 = 1, 0.5, 0.1$, da esquerda para a direita, respectivamente. A linha sólida preta representa $T^{11} = 0$, as linhas tracejadas vermelhas representam $T^{11} > 0$ e as linhas traço-pontilhadas representam $T^{11} < 0$.

Esta escolha é a que leva ao potencial *sine-Gordon* no caso padrão, como escrito na Eq. (2.20). Novamente, por simplicidade, escolhemos $\lambda = a = 1$. As equações de movimento para os casos padrão e modificado são, respectivamente,

$$\phi'^2 = \cos^2(\phi) + 2C \quad (4.27)$$

e

$$\phi'^2 = -M^2 + M^2 \frac{1 + \frac{\cos^2(\phi)}{M^2}}{\left(1 - \frac{C}{M^2}\right)^2}. \quad (4.28)$$

Utilizando as mesmas convenções da Figura anterior, plotamos as soluções destas equações, em um plano (ϕ, ϕ') , na Fig. 4.2. A forma das linhas é bem semelhante ao exemplo anterior; isto porque em ambos os casos estamos falando de soluções topológicas. Perceberemos um comportamento diferente quando tratarmos de soluções não-topológicas no próximo exemplo.

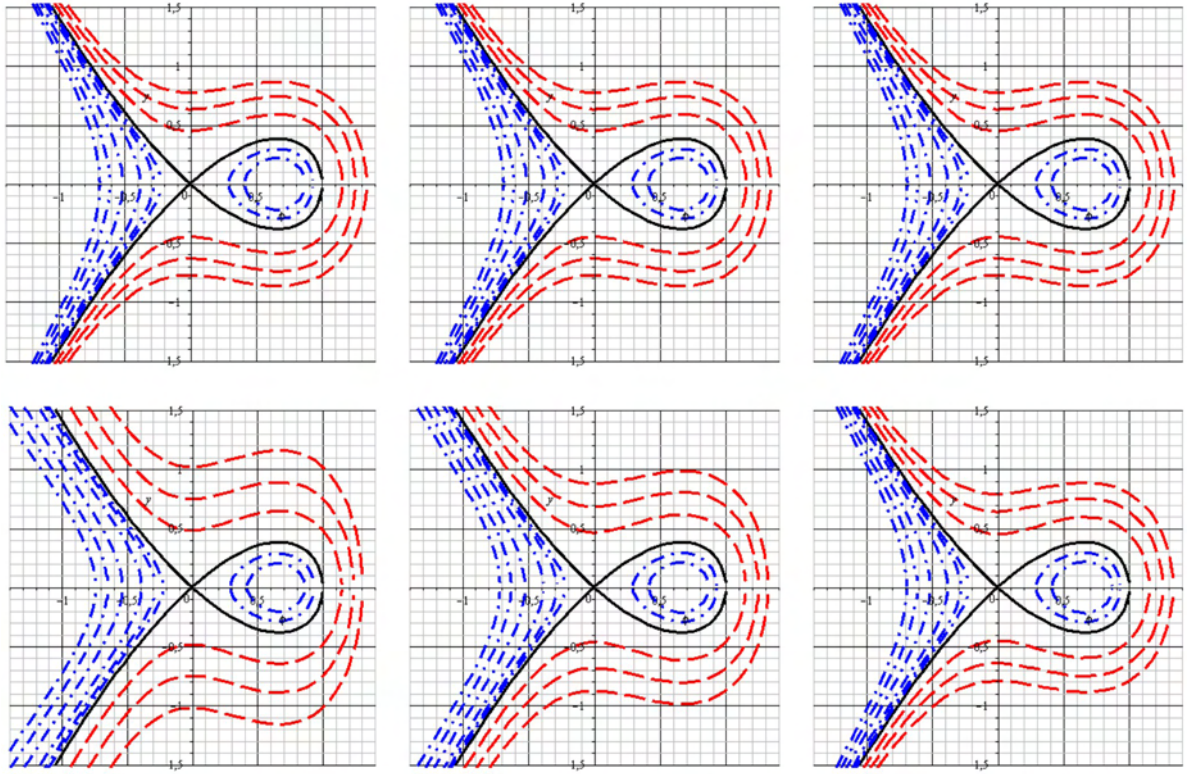


Figura 4.3: Gráficos das soluções do potencial ϕ^3 no plano (ϕ, ϕ') , no Modelo Padrão (painel superior) e no Modelo ALTW (painel inferior), para $1/M^2 = 1, 0.5, 0.1$, da esquerda para a direita, respectivamente. A linha sólida preta representa $T^{11} = 0$, as linhas tracejadas vermelhas representam $T^{11} > 0$ e as linhas traço-pontilhadas representam $T^{11} < 0$.

O exemplo mais comum de soluções do tipo lump, ou não-topológicas, surge quando fazemos a seguinte escolha:

$$W_\phi = \phi\sqrt{1-\phi}. \quad (4.29)$$

O potencial que obtemos no modelo padrão é o conhecido como ϕ^3 , cuja forma é aquela da Eq. (2.24), desde que consideremos $\lambda = a = 1$. As equações de movimento para os casos padrão e modificado são, respectivamente,

$$\phi'^2 = \phi^2(1-\phi) + 2C, \quad (4.30)$$

$$\phi'^2 = -M^2 + M^2 \frac{1 + \frac{\phi^2(1-\phi)}{M^2}}{\left(1 - \frac{C}{M^2}\right)^2}. \quad (4.31)$$

As soluções destas equações estão plotadas em um plano (ϕ, ϕ') na Fig. 4.3, onde podemos

ver claramente as diferenças entre os gráficos superiores e inferiores, para diferentes valores de $1/M^2$.

4.3.2 Estabilidade linear

Outro caminho para distinguir as teorias gêmeas é através do estudo da estabilidade linear. Neste ponto aplicaremos as expressões gerais obtidas na Seção 1.2. Inicialmente, supomos que a solução é constante e representa um mínimo v do potencial, ou seja, $\phi = v$, tal que, segundo a Eq. (4.12), fornece $W_\phi(v) = 0$. Observamos que, tanto para o modelo padrão quanto para o modelo modificado, a equação do tipo Schrödinger obtida é da forma

$$-\eta'' + W_{\phi\phi}|_v \eta = \omega^2 \eta, \quad (4.32)$$

o que significa que não há como distinguir entre os modelos gêmeos através do estudo da estabilidade linear no estado de mínimo. Isso pode ser visto mais claramente observando-se os exemplos abaixo.

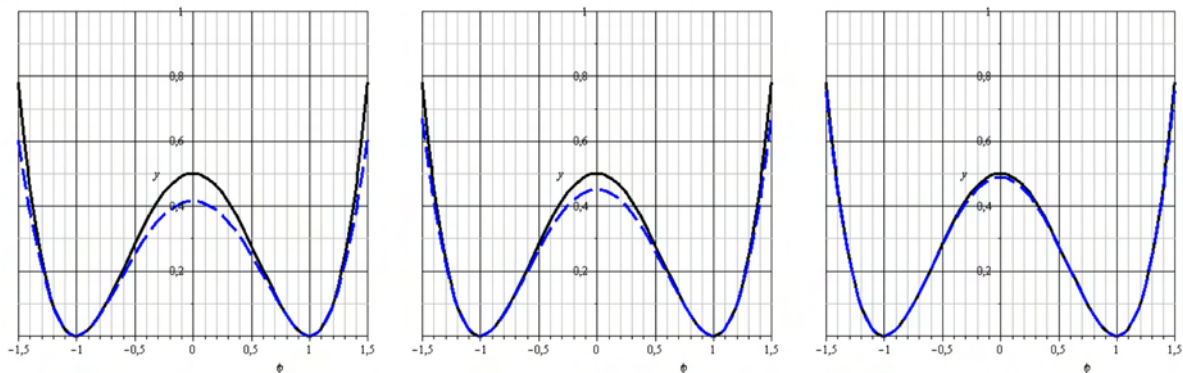


Figura 4.4: Potenciais para $W_\phi = 1 - \phi^2$ no Modelo Padrão (linha sólida preta) e no Modelo ALTW (linha tracejada azul), para $1/M^2 = 1, 0.5, 0.1$, da esquerda para a direita.

Com a escolha $W_\phi = 1 - \phi^2$, os potenciais das teorias padrão e modificada são, respectivamente,

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 \quad \text{e} \quad U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{1}{M^2} (1 - \phi^2)^2}. \quad (4.33)$$

Os gráficos desses potenciais estão na Fig. 4.4. A linha sólida preta representa o potencial da teoria padrão e a linha tracejada azul representa o potencial da teoria modificada. Notamos que, embora sejam potenciais diferentes, os valores de ϕ que representam os mínimos são sempre os mesmos. Podemos perceber ainda que os potenciais tornam-se cada vez mais parecidos à medida que M^2 aumenta. Discussão semelhante pode ser feita quando a escolha é $W_\phi = \phi\sqrt{1-\phi}$. Neste caso, os potenciais são dados por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1-\phi) \quad \text{e} \quad U(\phi) = -M^2 + M^2\sqrt{1 + \frac{\phi^2}{M^2}(1-\phi)}, \quad (4.34)$$

e estão plotados na Fig. 4.5.

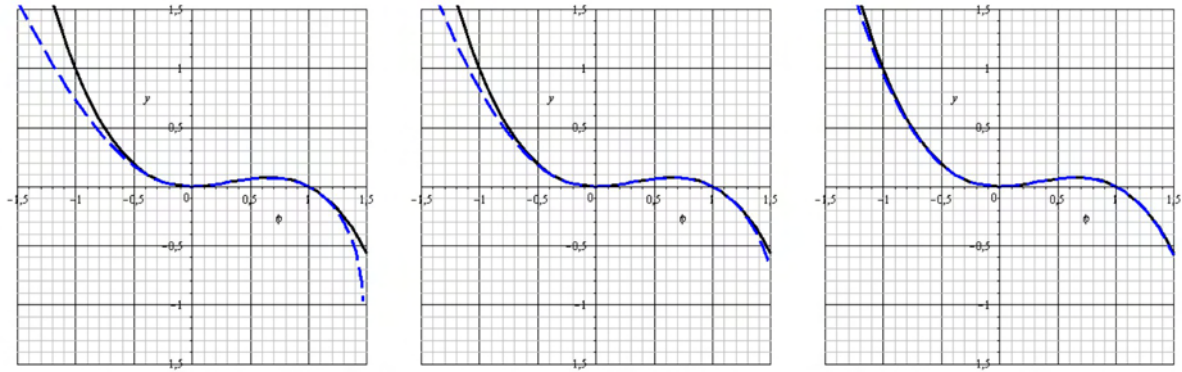


Figura 4.5: Potenciais para $W_\phi = \phi\sqrt{1-\phi}$ no Modelo Padrão (linha sólida preta) e no Modelo ALTW (linha tracejada azul), para $1/M^2 = 1, 0.5, 0.1$, da esquerda para a direita.

Consideramos agora o caso em que temos solução estática, ou seja, $\phi = \phi(x)$. A equação em η que obtemos para o modelo padrão é a seguinte:

$$-\eta'' + V_q(x)\eta = \omega^2\eta, \quad (4.35)$$

onde

$$V_q(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} \quad (4.36)$$

é o potencial do tipo Schrödinger. Para o modelo modificado, a equação de movimento que controla a estabilidade tem a forma

$$-\left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{-1} \eta'' - \left[\left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{-1}\right]' \eta' + \left[W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} + \frac{1}{M^2} \left(\frac{W_\phi^2 W_{\phi\phi}}{1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}}\right)\right] \eta = \omega^2 \eta. \quad (4.37)$$

Esta é uma equação de forma um tanto complicada. De maneira a simplificar sua escrita, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$dx = \left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz, \quad (4.38)$$

$$\eta = \left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{4}} u. \quad (4.39)$$

Dessa forma, a equação de movimento pode ser reescrita como uma equação do tipo Schrödinger

$$-u_{zz} + U_q(z)u = \omega^2 u, \quad (4.40)$$

onde $U_q(z)$ é dado pela Eq. (4.6), cuja forma explícita é

$$\begin{aligned} U_q(z) = & U_q^s(x(z)) - \frac{\frac{W_\phi^2}{M^2}}{\left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^3} (x(z)) \left\{ W_\phi W_{\phi\phi\phi} \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \frac{W_\phi^2}{M^2} + \left(\frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^2 \right] \right. \\ & \left. + W_{\phi\phi}^2 \left[4 + \frac{13}{4} \frac{W_\phi^2}{M^2} + \left(\frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^2 \right] \right\} (x(z)), \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde U_q^s representa o potencial da teoria padrão, dado pela Eq. (4.36). Este potencial está plotado na Fig. 4.6, para alguns valores de $1/M^2$, com a escolha $W_\phi = 1 - \phi^2$.

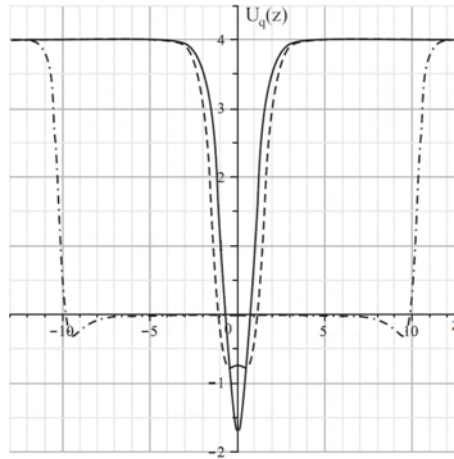


Figura 4.6: Gráficos de $U(z)$. As linhas sólida, tracejada e traço-pontilhada representam a função para $1/M^2 = 0.1, 1, 10$, respectivamente.

Feita a mudança de variáveis, precisamos saber quem é $x = x(z)$, muito embora saibamos ser difícil escrever uma expressão analítica dessa forma, para M geral. Consideramos, no entanto, o caso em que M^2 é muito grande. Assim, podemos obter resultados analíticos através de uma expansão até a ordem $1/M^2$. O termo entre parênteses na Eq. (4.38) pode ser escrito como

$$\left(1 + \frac{W_\phi^2}{M^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{W_\phi^2}{2M^2}.$$

Temos então que

$$x = z - \frac{1}{2M^2} \int W_\phi^2 dz = z - \frac{1}{2M^2} \int W_\phi \phi' dz = z - \frac{1}{2M^2} \int_0^z \frac{dW}{dz} dz. \quad (4.42)$$

Logo, podemos escrever

$$x = z - \frac{W(\phi(z))}{2M^2}, \quad (4.43)$$

onde temos feito a escolha $W(\phi(0)) = 0$.

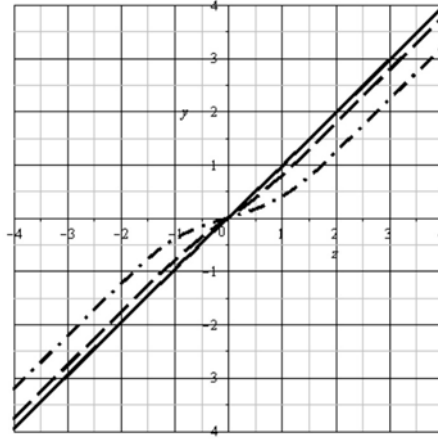


Figura 4.7: Gráficos de $x = x(z)$. As linhas sólida, tracejada e traço-pontilhada representam a função para $1/M^2 = 0.1, 1, 10$, respectivamente.

No caso geral, é necessário realizar uma integração numérica para obter $x = x(z)$. Fazendo a escolha $W_\phi = 1 - \phi^2$ na Eq. 4.38, podemos analisar o comportamento de $x = x(z)$ nos gráficos da Fig. 4.7. Podemos notar que na região fora do núcleo do defeito, o campo ϕ evolui

em direção aos mínimos e W_ϕ é pequeno; portanto, podemos aproximar $z \approx x + c$, onde c é uma constante, e $u \approx \eta$.

Uma função qualquer $F(x)$ pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor até a ordem $1/M^2$:

$$F(x) = F\left(z - \frac{W(\phi(z))}{2M^2}\right) = F(z) - F'(z)\frac{W(\phi(z))}{2M^2}. \quad (4.44)$$

Seguindo esta idéia, percebemos que uma função genérica do campo escalar ϕ pode ser escrita da forma

$$F(\phi(x)) = F(\phi(z)) - \frac{(F_\phi W_\phi W)(z)}{2M^2}. \quad (4.45)$$

Desta maneira, podemos escrever expressões do tipo

$$\begin{aligned} W_\phi(x) &= W_\phi(z) - \frac{WW_\phi W_{\phi\phi}}{2M^2}, \\ W_{\phi\phi}(x) &= W_{\phi\phi}(z) - \frac{WW_\phi W_{\phi\phi\phi}}{2M^2}, \\ W_{\phi\phi\phi}(x) &= W_{\phi\phi\phi}(z) - \frac{WW_\phi W_{\phi\phi\phi\phi}}{2M^2}, \\ W_{\phi\phi}^2(x) &= W_{\phi\phi}^2(z) - \frac{WW_\phi W_{\phi\phi} W_{\phi\phi\phi}}{M^2} \\ W_\phi W_{\phi\phi\phi}(x) &= W_\phi W_{\phi\phi\phi}(z) - \frac{WW_\phi W_{\phi\phi} W_{\phi\phi\phi\phi} + WW_\phi^2 W_{\phi\phi\phi\phi}}{2M^2}. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima na Eq. (4.41) e desprezando termos com potências de M maiores do que 2, o potencial pode então ser escrito como

$$U_q(z) = U_q^s(z) - \frac{W_\phi}{2M^2} [3WW_\phi W_{\phi\phi\phi} + WW_\phi W_{\phi\phi\phi\phi} + 3W_\phi^2 W_{\phi\phi\phi} + 8W_\phi W_{\phi\phi}^2]. \quad (4.46)$$

Um exemplo pode ser visto considerando, novamente, o caso $W_\phi = 1 - \phi^2$. Obtemos então o potencial

$$U_q(z) = 4 - 6\text{sech}^2(z) + \frac{1}{M^2} [4\text{sech}^2(z) + 14\text{sech}^4(z) - 21\text{sech}^6(z)]. \quad (4.47)$$

Capítulo 5

Outros modelos gêmeos

A possibilidade de generalizar resultados e de extendê-los a outros contextos é sempre interessante. Embora o fato da teoria padrão descrita no Capítulo 2 ter uma teoria gêmea não ser uma propriedade geral de teorias de altas derivadas, a existência de modelos gêmeos de teorias de campos escalares descritas por ações diferentes das tratadas anteriormente é possível desde que respeitados os requerimentos básicos. Devemos exigir, portanto, que as duas ações tenham o mesmo campo como solução das respectivas equações de movimento e que a densidade de energia seja a mesma nas duas situações. A forma específica através da qual os potenciais se relacionam é, então, consequência do cumprimento desses dois requerimentos.

Neste capítulo, estudamos uma generalização das teorias padrão e modificada, considerando um termo cinético com uma não-linearidade geral, indicada por um índice inteiro variável, e estudamos também uma aplicação interessante no cenário de brana, com o campo escalar sendo função da dimensão extra. Em ambas as situações podemos enxergar a natureza gêmea dos modelos.

5.1 Um modelo mais geral

Consideramos agora uma teoria de campo escalar mais geral, inspirados no que foi feito em [17]. O trabalho citado investiga a conexão entre k-campos e o aparecimento de uma classe especial de defeitos topológicos denominados compactons, que são estruturas de defeitos existentes em uma região compacta dentro da linha real. Lagrangianas invariantes de Lorentz k-deformadas são consideradas, semelhantes a que escolhemos na nossa investigação. A densidade lagrangiana que consideramos é a seguinte:

$$\mathcal{L} = \frac{2^{n-1}}{n} X|X|^{n-1} - V(\phi). \quad (5.1)$$

Podemos observar que no caso $n = 1$, voltamos a obter o modelo padrão. Para outros valores de n , há uma mudança na cinemática da teoria, e isto é de interesse em cosmologia, como em k-essência ou k-inflação [13, 60, 76, 77], e também no contexto já citado de compactons [14, 17, 19].

Para o caso geral, temos

$$\mathcal{L}_X = 2^{n-1}|X|^{n-1}. \quad (5.2)$$

Neste ponto, recorreremos mais uma vez ao formalismo de primeira ordem introduzido da Seção 4.2. Assim, o sistema de equações de primeira ordem que precisamos resolver é o seguinte:

$$\phi' = W_{\phi}^{\frac{1}{2n-1}}, \quad (5.3)$$

$$V(\phi) = \frac{2n-1}{2n} W_{\phi}^{\frac{2n}{2n-1}}. \quad (5.4)$$

Essas duas equações acima representam uma generalização das Eqs. (4.12) e (4.13), obtidas para a teoria padrão. Neste caso, a densidade de energia aqui obtida também representa uma generalização daquela obtida para a teoria padrão:

$$\rho(x) = W_{\phi}^{\frac{2n}{2n-1}}. \quad (5.5)$$

Supomos então uma teoria que seja gêmea àquela descrita pela densidade lagrangiana (5.1). Tal teoria é descrita por:

$$\mathcal{L} = M^2 + M^2 F(X) G(\phi), \quad (5.6)$$

onde M é um parâmetro de massa e $F(X)$ e $G(\phi)$ são funções a serem determinadas. Para soluções estáticas, as Eqs.(1.23) e (4.11) fornecem

$$M^2 F_X G(\phi) \phi' = W_\phi, \quad (5.7)$$

$$G(\phi) = \frac{1}{2X F_X - F}. \quad (5.8)$$

Usando as equações (5.3) e (5.7,5.8) e considerando que a solução $\phi(x)$ e o superpotencial $W(\phi)$ são os mesmos para ambas as teorias, obtemos a seguinte equação diferencial

$$F_X (M^2 - 2^n X |X|^{n-1}) = -F |2X|^{n-1}, \quad (5.9)$$

que integrada fornece

$$F(X) = (M^2 - 2^n X |X|^{n-1})^{\frac{1}{2n}}. \quad (5.10)$$

Portanto, substituindo (5.10) em (5.6), encontramos que a teoria gêmea é dada por

$$\mathcal{L} = M^2 + M^{\frac{2n+1}{n}} G(\phi) \left(1 - 2^n \frac{X |X|^{n-1}}{M^2}\right)^{\frac{1}{2n}}. \quad (5.11)$$

Substituindo ainda (5.10) em (5.8), a função $G(\phi)$ pode ser escrita como

$$G(\phi) = -M^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{W_\phi^{\frac{2n}{2n-1}}}{M^2}\right)^{\frac{2n-1}{2n}}. \quad (5.12)$$

A densidade lagrangiana, por sua vez, toma a forma

$$\mathcal{L} = M^2 - M^2 \left(1 + \frac{2n}{2n-1} \frac{V(\phi)}{M^2}\right)^{\frac{2n-1}{2n}} \left(1 - 2^n \frac{X |X|^{n-1}}{M^2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \quad (5.13)$$

onde, no desenvolvimento, utilizamos a Eq. (5.4). Com o auxílio da Eq. (4.16), podemos reescrever o resultado acima em termos de $U(\phi)$:

$$\mathcal{L} = M^2 - M^2 \left\{1 - \frac{n}{2n-1} \left[1 - \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2}\right)^2\right]\right\}^{\frac{2n-1}{2n}} \left(1 - 2^n \frac{X |X|^{n-1}}{M^2}\right)^{\frac{1}{2n}}. \quad (5.14)$$

Podemos notar que, no limite $n \rightarrow 1$, a equação acima reproduz exatamente o modelo ALTW estudado anteriormente. A densidade de energia, neste mesmo limite, é também dada como antes.

Quando investigamos o caso no qual $1/M^2$ é muito pequeno, até a ordem $1/M^2$, obtemos

$$\mathcal{L} \approx \frac{2^{n-1}}{n} X|X|^{n-1} - V + \frac{1}{M^2} \frac{2n-1}{8n^2} \left(2^n X|X|^{n-1} + \frac{2n}{2n-1} V(\phi) \right)^2. \quad (5.15)$$

Podemos ainda observar que o modelo gêmeo descrito pela densidade lagrangiana (5.13) reproduz o modelo descrito por (5.1) no limite $1/M^2 \rightarrow 0$. Como antes, as relações de semelhanças aqui estudadas levam-nos a classificar essas duas teorias como gêmeas.

5.2 O cenário de brana

Neste ponto faremos uma aplicação no cenário de brana, cuja motivação vem do fato de que a afirmação de que vivemos em quatro dimensões espaço-temporais não-compactas pode não ser totalmente verdadeira, como argumentado em [78], cujo trabalho consiste no estudo sobre uma 3-brana (um subspaço $(3+1)$ -dimensional) imersa em cinco dimensões. Originalmente, a idéia de dimensões extras surge como uma proposta de solução para o problema da hierarquia [79]. Daí em diante vários estudos relacionados a dimensões extras têm sido realizados, como em teoria de cordas, gravidade $f(R)$ e em diversos outros contextos [80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]. Aqui, a partir de uma teoria generalizada [21] com uma única dimensão extra de extensão infinita, construiremos a sua teoria gêmea, observando os requerimentos de igualdade da solução e da densidade de energia estabelecidos anteriormente.

Consideramos uma ação 5-dimensional descrevendo gravidade acoplada ao campo escalar na forma

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, X) \right]. \quad (5.16)$$

Como de costume, temos feito $4\pi G = 1$, onde G representa a constante gravitacional de Newton. Temos adotado a mesma convenção:

$$X = \frac{1}{2} \nabla_M \phi \nabla^M \phi, \quad (5.17)$$

desta vez com uma dimensão a mais, onde $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$. A equação de movimento para o campo escalar é obtida a partir da variação da ação com respeito ao campo. Temos então:

$$\nabla_A (\mathcal{L}_X \nabla^A \phi) - \mathcal{L}_\phi = 0, \quad (5.18)$$

que, de maneira mais explícita se escreve

$$G^{AB} \nabla_A \nabla_B \phi + 2X \mathcal{L}_{X\phi} - \mathcal{L}_\phi = 0, \quad (5.19)$$

com G^{AB} dado da forma

$$G^{AB} = \mathcal{L}_X g^{AB} + \mathcal{L}_{XX} \nabla^A \phi \nabla^B \phi. \quad (5.20)$$

As equações de Einstein são

$$G_{AB} = 2T_{AB}, \quad (5.21)$$

com o tensor energia-momento dado por

$$T_{AB} = \nabla_A \phi \nabla_B \phi \mathcal{L}_X - g_{AB} \mathcal{L}. \quad (5.22)$$

O elemento de linha do espaço 5-dimensional pode ser escrito como

$$ds_5^2 = e^{2A} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (5.23)$$

onde e^{2A} é o *warp factor*¹ e

$$ds_4^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.24)$$

¹O *warp factor* é o fator responsável pela “deformação” na parte da métrica correspondente à métrica de Minkowski. É uma função da dimensão extra e pode ser escrito de outras formas. Neste caso, o warp factor é uma exponencial.

descreve a geometria de Minkowski. Supomos que tanto A quanto ϕ são estáticos e dependem apenas da dimensão extra, ou seja, $A = A(y)$ e $\phi = \phi(y)$. Neste caso, a equação de movimento (5.19) toma a forma

$$(\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX})\phi'' - (2X\mathcal{L}_{X\phi} - \mathcal{L}_\phi) = -4\mathcal{L}_X\phi'A', \quad (5.25)$$

onde o $(\cdot)$ denota derivada com respeito à dimensão extra. Temos usado também $\mathcal{L}_X = \partial\mathcal{L}/\partial X$ e $\mathcal{L}_\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\phi$.

Considerando a métrica em questão, as equações de Einstein se escrevem como

$$A'' = \frac{4}{3}X\mathcal{L}_X, \quad (5.26)$$

$$A'^2 = \frac{1}{3}(\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X), \quad (5.27)$$

onde $X = -\phi'^2/2$ para configuração estática. A Equação (5.25) pode então ser reescrita na forma

$$(\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X)' = -4\phi'^2 A' \mathcal{L}_X. \quad (5.28)$$

Novamente lançamos mão do formalismo de primeira ordem. Para obter o sistema de primeira ordem, introduzimos uma função $W = W(\phi)$ que obedeça à seguinte relação:

$$A' = -\frac{1}{3}W(\phi). \quad (5.29)$$

Neste caso, as equações (5.26) e (5.27) levam-nos a

$$\mathcal{L}_X\phi' = \frac{1}{2}W_\phi, \quad (5.30)$$

$$\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X = \frac{1}{3}W^2. \quad (5.31)$$

No caso de um campo escalar padrão, $\mathcal{L} = X - V(\phi)$, a equação de movimento (5.25) fornece uma equação de segunda ordem da forma

$$\phi'' + 4A'\phi' = V_\phi. \quad (5.32)$$

De posse do procedimento de redução de ordem, porém, podemos utilizar as Eqs. (5.30) e (5.31) e obter a seguinte equação de primeira ordem

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi, \quad (5.33)$$

e uma expressão para o potencial,

$$V = \frac{1}{8}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2, \quad (5.34)$$

ambas escritas em função do $W(\phi)$.

É importante notar que as soluções das equações de primeira ordem (5.29) e (5.33) são também soluções da equação de segunda ordem (5.32), com o potencial tendo a forma (5.34). A componente T^{00} do tensor energia-momento fornece a densidade de energia; esta é dada por

$$T^{00} = e^{2A} \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2 \right). \quad (5.35)$$

De maneira a obter a teoria gêmea, consideramos que esta é governada pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = M^2 - M^2 \left(1 + \frac{U}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}} + f(\phi). \quad (5.36)$$

Podemos notar que esta é semelhante àquela do caso bidimensional que analisamos no Capítulo 3. A diferença é a adição da função $f(\phi)$, a ser determinada de acordo com os requerimentos que determinam a natureza gêmea de uma teoria em relação à sua contrapartida canônica. Usamos as equações (5.30) e (5.31) para escrever

$$\frac{1 + \frac{U}{M^2}}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} \phi' = \frac{1}{2}W_\phi, \quad (5.37)$$

$$\frac{1 + \frac{U}{M^2}}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} = 1, \quad (5.38)$$

onde temos feito $f(\phi) = W^2/3$. Se substituírmos (5.38) em (5.37) obtemos

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi. \quad (5.39)$$

Portanto, obtemos a mesma equação de movimento do modelo padrão, o que significa dizer que, para um determinado W , o campo solução é o mesmo em ambos os modelos de teoria. Podemos usar (5.38) para escrever

$$\phi'^2 = 2U + \frac{U^2}{M^2}. \quad (5.40)$$

Determinada a função $f(\phi)$, podemos reescrever a densidade lagrangiana do modelo gêmeo de brana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = M^2 - M^2 \left(1 + \frac{U}{M^2}\right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}} + \frac{1}{3}W^2. \quad (5.41)$$

A densidade de energia é

$$T^{00} = e^{2A} \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2 \right), \quad (5.42)$$

a mesma do modelo padrão. Notamos então que os dois modelos tem a mesma solução, com a mesma densidade de energia, que são os determinantes básicos da natureza gêmea entre eles. O potencial do modelo modificado tem a forma

$$U(\phi) = -M^2 + \frac{1}{2}M^2 \sqrt{4 + \frac{W_\phi^2}{M^2}}, \quad (5.43)$$

e os potenciais das duas teorias se relacionam como segue:

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + 2 \frac{V(\phi)}{M^2} + \frac{2}{3} \frac{W^2(\phi)}{M^2}}. \quad (5.44)$$

Como consequência da semelhança entre solução e densidade de energia, podemos notar que também o *warp factor* é o mesmo nos dois casos, o que significa que a “deformação” na brana, como função da dimensão extra, é a mesma. Podemos ainda ver que, no limite de $1/M^2$ muito pequeno, o modelo gêmeo (5.41), com $U(\phi)$ dado por (5.44), recai no modelo padrão.

Um exemplo interessante de ilustração é quando fazemos a seguinte escolha:

$$W = 2a \arctan(\sinh(b\phi)), \quad (5.45)$$

onde a e b são parâmetros. Os potenciais do modelo padrão e do modelo modificado são, respectivamente,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}a^2b^2\text{sech}^2(b\phi) - \frac{4}{3}a^2 \arctan(\sinh^2(b\phi)), \quad (5.46)$$

$$U(\phi) = -M^2 + M^2\sqrt{1 + \frac{a^2b^2}{M^2}\text{sech}^2(b\phi)}. \quad (5.47)$$

Estes estão plotados na Fig. 5.1 para diferentes valores de $1/M^2$, mantendo $a = b = 1$.

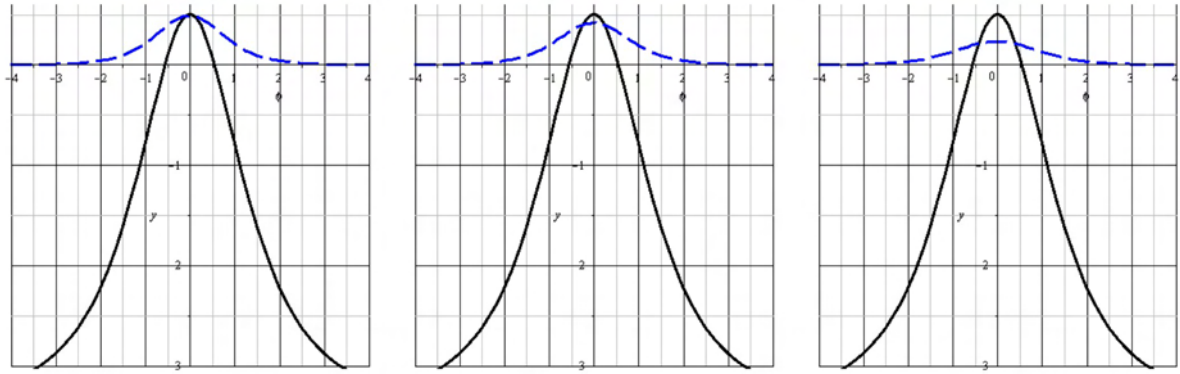


Figura 5.1: Potenciais para a escolha (5.45) no Modelo Padrão (linha sólida preta) e no Modelo ALTW (linha tracejada azul), para $1/M^2 = 0.1, 1, 10$, da esquerda para a direita.

As soluções das equações de primeira ordem são

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{b} \text{arcsenh}(ab^2y). \quad (5.48)$$

Estas conectam mínimos no infinito. Temos ainda que

$$A(y) = \frac{1}{3b^2} \ln(1 + a^2b^4y^2) - \frac{2}{3}ay \arctan(ab^2y). \quad (5.49)$$

Na Fig. 5.2 estão os gráficos da solução (sinal positivo), do *warp factor* e da densidade de energia, respectivamente, para diferentes valores de a e b .

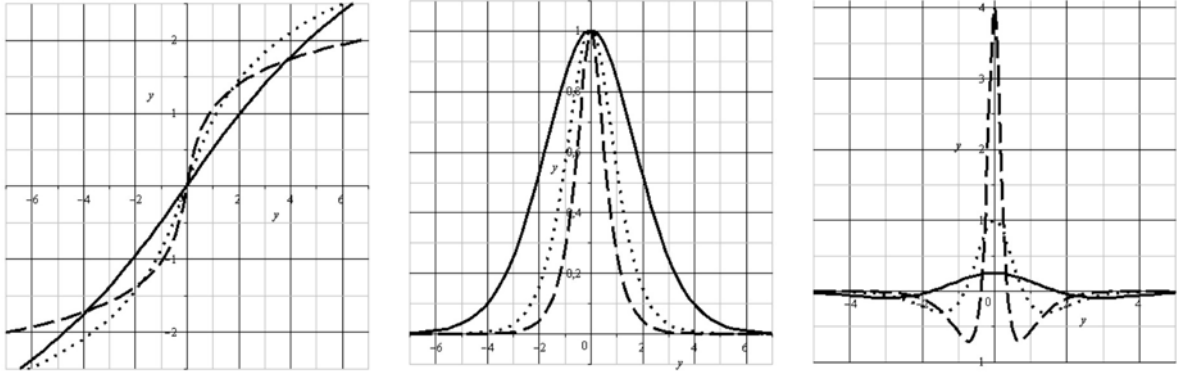


Figura 5.2: Da esquerda para a direita, a solução, o *warp factor* e a densidade de energia para $a = 1$ e $b = 1/2, 1, 2$, respectivamente para as linhas sólida, pontilhada e tracejada.

Outro exemplo é o modelo conhecido como ϕ^4 . Neste caso, o superpotencial é dado da forma

$$W(\phi) = 2ab \left(\phi - \frac{b^2}{3}\phi \right), \quad (5.50)$$

onde a e b são parâmetros. Os potenciais gêmeos são os seguintes:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}a^2b^2 (1 - b^2\phi^2)^2 - \frac{4}{3}a^2b^2\phi^2 \left(1 - \frac{b^2}{3}\phi^2 \right)^2, \quad (5.51)$$

$$U(\phi) = -M^2 + M^2 \sqrt{1 + \frac{a^2b^2}{M^2} (1 - b^2\phi^2)^2}. \quad (5.52)$$

Seus gráficos são os da Fig. 5.3, para diferentes valores de $1/M^2$.

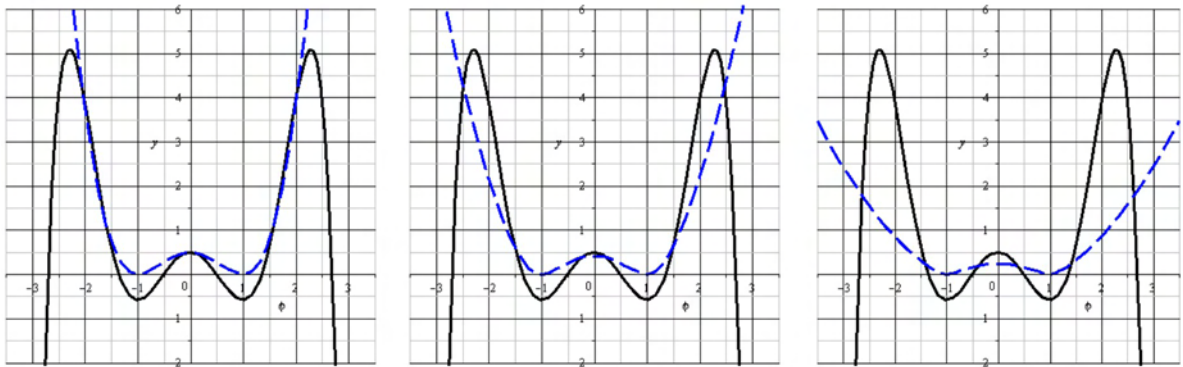


Figura 5.3: Potenciais para a escolha (5.50) no Modelo Padrão (linha sólida preta) e no Modelo ALTW (linha tracejada azul), para $1/M^2 = 0.1, 1, 10$, da esquerda para a direita.

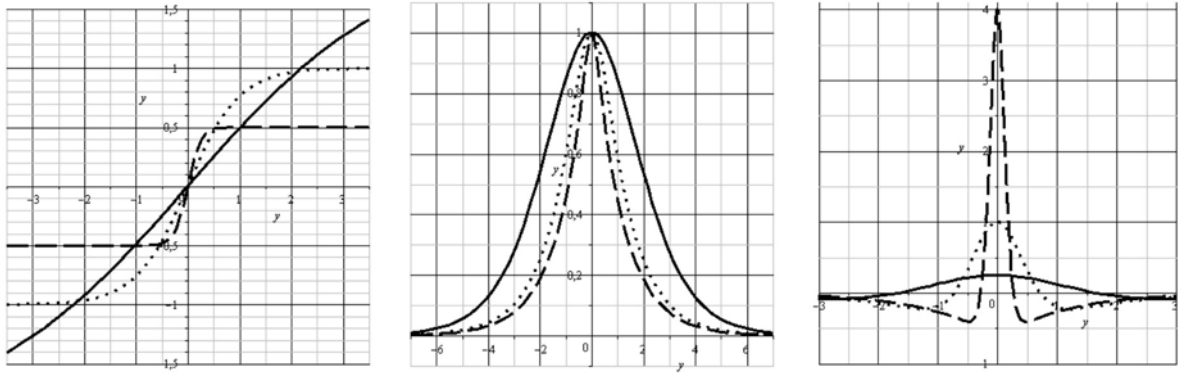


Figura 5.4: Da esquerda para a direita, a solução, o *warp factor* e a densidade de energia para $a = 1$ e $b = 1/2, 1, 2$, respectivamente para as linhas sólida, pontilhada e tracejada.

Para este modelo, as soluções das equações de movimento são

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{b} \tanh(ab^2 y), \quad (5.53)$$

e

$$A(y) = \frac{4}{9b^2} \ln(\operatorname{sech}(ab^2 y)) - \frac{1}{9b^2} \tanh^2(ab^2 y). \quad (5.54)$$

As soluções do tipo kink para este modelo conectam os mínimos $\phi = \pm 1/b$. Os gráficos da solução (sinal positivo), do *warp factor* e da densidade de energia são os da Fig. 5.4. Ambos os exemplos descrevem branas com energia finita. Pelos gráficos, percebemos que a densidade de energia é localizada.

Capítulo 6

Presença de modelos gêmeos em cosmologia

A descoberta da aceleração cósmica [88, 89, 90], como consequência da existência de uma energia escura com pressão negativa, iniciou um novo estágio para a cosmologia moderna. Recentes observações [91, 92, 93, 94, 95] apontam uma constante cosmológica como uma possível responsável desta aceleração, que concorda com todos os dados. O grande problema desta opção é o conhecido problema da coincidência cósmica: uma enorme quantidade de ajuste fino que deve ser realizada de maneira a fazer a constante cosmológica dominar a densidade de energia do universo atual. Outra possibilidade de entendimento da atual fase de expansão acelerada é considerar o universo preenchido por um fluido perfeito com equação de estado dependente do tempo, ou seja, um campo escalar [96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104]. Um campo escalar respeita o requerimento de homogeneidade e isotropia do princípio cosmológico, e pode evoluir de acordo com diferentes dinâmicas.

Neste capítulo, de maneira distinta ao que foi feito nos capítulos anteriores, onde tratamos campos estáticos, investigamos a presença de modelos gêmeos em teorias de campos escalares reais que evoluem no tempo, ou seja, modelos descritos por diferentes dinâmicas, mas que descrevem uma mesma evolução de universo.

A ação que nos fornece as equações de movimento é a de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, X) \right], \quad (6.1)$$

onde temos feito $4\pi G = 1$ e $X = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$, como anteriormente. Temos ainda que g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura e $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana que descreve o modelo. Um detalhamento da motivação para escrever a ação da forma (6.1) pode ser visto em [105].

As equações de movimento surgem da variação da ação com respeito à métrica. Aplicando o princípio de mínima ação, obtemos as conhecidas equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

onde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (6.3)$$

escrito em termos do tensor e do escalar de Ricci, é o tensor de Einstein. Este nos fornece informação acerca da curvatura do espaço tempo. O tensor que aparece no membro direito,

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (6.4)$$

é o tensor energia-momento. Este nos fornece informação acerca do conteúdo do universo.

A métrica que utilizamos, fundamentada no requerimento de homogeneidade e isotropia do princípio cosmológico, é a FRW (Friedmann-Robertson-Walker) que tem a forma padrão

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (6.5)$$

onde a representa o fator de escala do universo em expansão, r é a coordenada radial e $d\Omega^2$ descreve a parte angular da métrica, esta sendo dada por

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (6.6)$$

Para uma melhor compreensão sobre a estrutura da métrica FRW, ver [106]. A constante k pode ter três valores: $k = 0$, para um universo plano; $k = +1$, para um universo fechado de geometria esférica; e $k = -1$, para um universo aberto de geometria hiperbólica.

As equações de Einstein, escritas para a métrica escolhida, fornecem as equações de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \quad (6.8)$$

onde ρ e p são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão, e $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. O *ponto* sobrescrito indica derivada com relação ao tempo; assim, $\dot{a} = da/dt$. A primeira equação nos dá informação acerca da evolução do parâmetro de Hubble enquanto a segunda é conhecida também como equação da aceleração, por conter uma derivada segunda do fator de escala com relação ao tempo. A partir destas equações, obtemos a seguinte equação de continuidade:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (6.9)$$

Por fim, definimos uma grandeza chamada parâmetro de aceleração, dada por

$$q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (6.10)$$

Esta nos fornece informações importantes sobre como se dá a expansão do universo, se acelerada ou desacelerada. Originalmente, o que se media era o parâmetro de desaceleração, termo utilizado porque se acreditava inicialmente que o universo estaria em uma fase de expansão desacelerada.

A seguir tratamos dois modelos de teorias de campos escalares reais, considerando inicialmente um universo com geometria plana, ou seja, $k = 0$. A presença de curvatura é vista logo em seguida.

6.1 Dinâmica padrão

Como um primeiro modelo de teoria, consideramos aquele no qual a densidade lagrangiana descreve uma dinâmica padrão, com termo cinético canônico, cuja forma é motivada pela mecânica relativística de meio contínuo. Este é conhecido como modelo de quintessência [107, 108]. Temos então:

$$\mathcal{L} = X - V(\phi). \quad (6.11)$$

Neste caso, a densidade de energia e a pressão são dadas, respectivamente, por

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (6.12)$$

A equação de continuidade (6.9) leva-nos à seguinte equação de movimento:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (6.13)$$

As formas das equações acima são as mesmas independentemente de ser considerada, ou não, a curvatura. A equação de Friedmann, no entanto, traz explícita a constante de curvatura. Para o caso plano, onde $k = 0$, o parâmetro de Hubble evolui segundo a expressão

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V. \quad (6.14)$$

6.2 Dinâmica taquiônica

Uma outra forma de dinâmica de campo escalar tem motivação no contexto de teoria de cordas [109, 110, 111]. Neste caso, a ação é do tipo Born-Infeld. Com uma pequena modificação, a densidade Lagrangiana é então dada por

$$\mathcal{L} = -U(\phi)\sqrt{1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi} + f(\phi), \quad (6.15)$$

onde $U(\phi)$ representa o potencial da teoria e $f(\phi)$ é uma função a ser determinada. A razão da presença de $f(\phi)$ é garantir que a teoria satisfaça os requisitos de teoria gêmea do modelo

de quintessência. A densidade de energia e a pressão são dadas por

$$\rho = \frac{U}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - f, \quad p = -U\sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + f. \quad (6.16)$$

A equação de movimento tem uma forma um pouco mais complicada do que a do caso anterior:

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2) \left(3H\dot{\phi} + \frac{U_{\phi}}{U} \right) - (1 - \dot{\phi}^2)^{3/2} \frac{f_{\phi}}{U} = 0. \quad (6.17)$$

E o parâmetro de Hubble, também para $k = 0$, é dado pela equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2U}{3\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \frac{2}{3}f. \quad (6.18)$$

6.3 Formalismo de primeira ordem

Seguindo a ideia do formalismo de redução de ordem das equações de movimento tratado anteriormente [23, 74], escrevemos o parâmetro de Hubble como uma função do campo escalar, da forma $H = W(\phi)$. Esta é uma equação de primeira ordem no tempo. A outra equação de primeira ordem que obtemos tem a forma geral

$$W_{\phi}\dot{\phi} = -(\rho + p). \quad (6.19)$$

Considerando inicialmente a dinâmica padrão, de (6.19) obtemos a seguinte equação de primeira ordem:

$$\dot{\phi} = -W_{\phi}. \quad (6.20)$$

Para este caso, o potencial é dado por

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_{\phi}^2. \quad (6.21)$$

Podemos notar que as soluções das equações de primeira ordem obtidas, para o potencial escrito da forma (6.21), são também soluções da equação de segunda ordem (6.13).

Considerando agora a dinâmica taquiônica, desde que H é a mesma função $W(\phi)$ do caso padrão, obtemos

$$\dot{\phi} = -\frac{W_\phi}{\frac{3}{2}W^2 + f}, \quad (6.22)$$

e o potencial tem a forma

$$U = \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} \left(\frac{3}{2}W^2 + f \right). \quad (6.23)$$

Neste caso, podemos também notar que as soluções das equações de primeira ordem, para o potencial da forma (6.23), são também soluções da equação de segunda ordem (6.17).

De forma a obter os modelos gêmeos, igualamos as equações (6.20) e (6.22), com o propósito de determinarmos a função $f(\phi)$, garantindo que ambas as equações tenham a mesma solução. A função $f(\phi)$ é então dada por

$$f = 1 - \frac{3}{2}W^2. \quad (6.24)$$

Assim, obtemos a forma do potencial taquiônico:

$$U = \sqrt{1 - W_\phi^2}, \quad (6.25)$$

e a densidade lagrangiana do modelo taquiônico gêmeo tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{1 - W_\phi^2} \sqrt{1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi} + 1 - \frac{3}{2}W^2. \quad (6.26)$$

Como consequência da natureza gêmea entre os modelos, podemos notar que em ambos os casos, padrão e taquiônico, a densidade de energia é a mesma:

$$\rho = \frac{3}{2}W^2, \quad (6.27)$$

e também a pressão:

$$p = W_\phi^2 - \frac{3}{2}W^2. \quad (6.28)$$

O parâmetro de aceleração também tem a mesma forma para os dois casos:

$$q = 1 - \frac{W_\phi^2}{W^2}. \quad (6.29)$$

O que temos são duas teorias distintas que descrevem a evolução de um mesmo universo, caracterizado por densidade de energia e pressão comuns. O universo é então preenchido por um fluido com uma equação de estado dependente do tempo, que é comum às duas dinâmicas.

Como um exemplo, tomamos $W = A \cosh(B\phi)$. Assim, os potenciais gêmeos tomam as formas

$$V = \frac{3}{2}A^2 \cosh^2(B\phi) - \frac{1}{2}A^2B^2 \sinh^2(B\phi) \quad (6.30)$$

e

$$U = \sqrt{1 - A^2B^2 \sinh^2(B\phi)}. \quad (6.31)$$

Ambos estão plotados na Fig. 6.1.

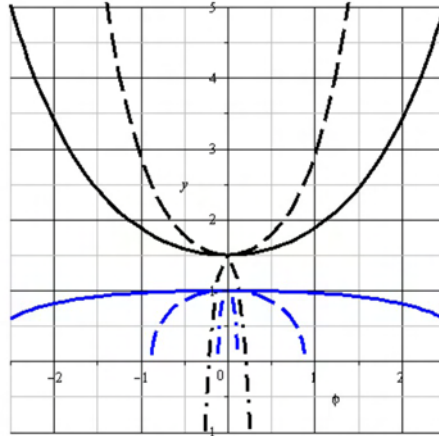


Figura 6.1: Potenciais (6.30)(curvas pretas) e (6.31)(curvas azuis) para $A = 1$ e $B = 0.5, 1, 3$ correspondendo a linhas sólida, tracejada e traço-pontilhadas, respectivamente.

A solução das equações de movimento é

$$\phi = \frac{1}{B} \ln \left(\tanh \frac{AB^2 t}{2} \right). \quad (6.32)$$

O parâmetro de Hubble também é determinado:

$$H = A \coth(AB^2 t). \quad (6.33)$$

O parâmetro de aceleração é dado por

$$q = 1 - B^2 \text{sech}^2(AB^2 t), \quad (6.34)$$

e seus gráficos são os da Fig. 6.2. A curva sólida indica uma expansão sempre acelerada. A curva tracejada indica uma expansão que começa a acelerar em $t = 0$. A curva traço-pontilhada mostra a evolução de uma fase desacelerada para uma fase acelerada.



Figura 6.2: Parâmetro de aceleração q for $A = 1$ e $B = 0.5, 1, 3$ correspondendo a linhas sólida, tracejada e traço-pontilhada, respectivamente.

6.4 Presença de curvatura

Considerando a situação em que $k \neq 0$ e insistindo com $H = W$, a equação de primeira ordem que obtemos tem a seguinte forma geral:

$$W_\phi \dot{\phi} = -(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \quad (6.35)$$

Inspirados em [74], introduzimos α como sendo um número real e $Z = Z(\phi)$ como sendo uma função do campo escalar, através da escolha $\frac{1}{a^2} = \alpha Z \dot{\phi}$. Para o caso padrão, obtemos

$$\dot{\phi} = k\alpha Z - W_\phi. \quad (6.36)$$

O potencial é então dado por

$$V = \frac{3}{2}W^2 + (k\alpha Z - W_\phi) \left(k\alpha Z - \frac{1}{2}W_\phi \right). \quad (6.37)$$

A validade do formalismo de primeira ordem depende do fato de as soluções das equações de primeira ordem serem também soluções da equação de segunda ordem (6.13). Neste sentido, as funções W e Z devem obedecer à seguinte equação de vínculo:

$$W_{\phi\phi}Z + W_\phi Z_\phi - 2k\alpha Z Z_\phi - 2WZ = 0. \quad (6.38)$$

Para o caso taquiônico, a equação de primeira ordem que obtemos é

$$\dot{\phi} = -\frac{W_\phi}{\frac{3}{2}(W^2 + \frac{k}{a^2}) + f}. \quad (6.39)$$

Seguindo o procedimento da seção anterior, igualamos as equações (6.36) e (6.39), e determinamos f . Esta é dada por

$$f = -\frac{3}{2}W^2 - \frac{3}{2}k\alpha Z(k\alpha Z - W_\phi) - \frac{W_\phi}{k\alpha Z - W_\phi}. \quad (6.40)$$

O potencial é então

$$U = -\frac{W_\phi \sqrt{1 - (k\alpha Z - W_\phi)^2}}{k\alpha Z - W_\phi}. \quad (6.41)$$

Podemos notar que as expressões para o $\dot{\phi}$, para os potenciais $V(\phi)$ e $U(\phi)$ e para $f(\phi)$, todas são reduzidas às equações correspondentes do caso plano, quando fazemos $k = 0$. A equação de vínculo para o caso taquiônico, porém, é diferente daquela do caso padrão:

$$W_{\phi\phi}Z + W_\phi Z_\phi - 2k\alpha Z Z_\phi = 0. \quad (6.42)$$

Este resultado sugere que a presença de curvatura distingue os dois modelos. A natureza gêmea entre esses dois modelos de teorias é estabelecida apenas para o caso plano.

Considerações finais

Neste trabalho, fizemos uma extensão da idéia apresentada na Ref. [22], que diz respeito à existência de duas teorias de campo escalar distintas que suportam a mesma estrutura de defeito. Tais teorias são denominadas gêmeas, pois descrevem uma mesma estrutura de defeito com a mesma densidade de energia. Inicialmente tratamos de montar a estrutura matemática necessária ao entendimento dos modelos. Dedicamos um capítulo ao estudo de equações gerais a partir das quais podemos obter as equações de movimento para as situações distintas.

Deduzimos em detalhes as equações que descrevem tanto o modelo padrão de teoria de campo escalar como o modelo que denominamos ALTW, apresentado anteriormente na Ref. [22]. Alguns exemplos, os mais comuns, de soluções do tipo kink e do tipo lump foram apresentados. O estudo das relações entre os dois modelos, no que diz respeito às soluções das equações e a densidade de energia associada à estrutura de defeito, permitiram-nos identificar a natureza gêmea entre eles. Utilizamos o formalismo de primeira ordem desenvolvido em [23, 73, 74, 75] e reescrevemos as equações que relacionam os modelos gêmeos em função do superpotencial $W = W(\phi)$.

Mostramos duas maneiras de distinguir as teorias. Inicialmente estudamos a situação em que a componente T^{11} do tensor energia-momento é constante e diferente de zero. Neste caso, vimos que as equações de movimento são resolvidas por soluções estáticas distintas. Um estudo da estabilidade linear da estrutura de defeito nas duas teorias também permitiu-

nos distingui-las. Isto foi apresentado primeiramente na Ref. [22], mas aqui investigamos a estabilidade na maneira padrão, buscando a equação tipo Schrödinger que normalmente aparece no estudo da estabilidade linear. Como o modelo ALTW é descrito por uma densidade lagrangiana modificada, com uma generalização do termo cinético, não é tão direto obter a equação tipo Schrödinger. Porém, uma correta transformação de variáveis e o formalismo de primeira ordem que aqui utilizamos permitiu obter a referida equação; podemos observar a distinção entre as teorias através de alguns exemplos.

Estendemos a idéia da natureza gêmea para outras classes de modelos. Tratamos de modelos mais gerais, dos quais os modelos padrão e ALTW são casos específicos em que $n = 1$. Fizemos ainda uma investigação sobre a presença de modelos gêmeos no contexto de brana. Sabemos que campos escalares podem ser usados para produzir branas *thick* e, observamos que uma brana pode ser gerada a partir de dois modelos distintos de campos escalares reais, acoplados a gravidade em $4 + 1$ dimensões espaço-temporais, com uma dimensão extra do tipo espaço e extensão infinita.

Investigamos ainda a existência de modelos gêmeos no cenário da cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker, onde encontramos que dois modelos distintos de um campo escalar dependente do tempo - o modelo de quintessência, descrito pela dinâmica padrão, e aquele com dinâmica taquiônica - podem descrever uma mesma evolução de universo plano com densidade de energia e parâmetro de aceleração comuns aos dois modelos. Vimos, porém, que a situação é diferente quando da presença de curvatura, caso em que os modelos se distinguem.

A natureza gêmea entre modelos de campos escalares é, portanto, um campo no qual podem ainda existir muitas possibilidades de pesquisa. Como perspectivas a partir deste trabalho, podemos citar a investigação de modelos gêmeos em cenários com dois ou mais campos escalares, ou mesmo a possibilidade de mais de duas teorias gêmeas simultaneamente.

Podemos ainda pensar em descrever um comportamento gêmeo em diferentes contextos dentro da cosmologia, como na fase inflacionária. Aplicações na área da matéria condensada também podem trazer resultados interessantes.

Bibliografia

- [1] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [2] LIDDLE, A.R.; LYTH, D.H. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] PEEBLES, P. J. E. *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.
- [4] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Canadá, 1976.
- [5] LIDDLE, A.R. *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wiley, Canadá, 2003.
- [6] DODELSON, S. *Modern Cosmology*, Elsevier, 2003.
- [7] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, 1994.
- [8] ACHUCARRO, A.; VACHASPATI, T. *Semilocal and Electroweak Strings*, Phys. Rep. **327**, 347, 2000.
- [9] NAMBU, Y. *String-Like Configurations in the Weinberg-Salam Theory*, Nucl. Phys. B **130**, 505, 1977.
- [10] DAVIS, S. C.; DAVIS, A. C.; TRODDEN, M. *$N=1$ Supersymmetric Cosmic Strings*, Phys. Lett. B **405**, 257, 1997.

- [11] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V. F.; STEINHARDT, P. J. *Essentials of k Essence*, Phys. Rev. D **63**, 103510, 2001.
- [12] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V. F.; STEINHARDT, P. J. *A Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late Time Cosmic Acceleration*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438, 2000.
- [13] ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. F. *k -Inflation*, Phys. Lett. B **458**, 209, 1999.
- [14] BABICHEV, E. *Global Topological k -Defects*, Phys. Rev. D **74**, 085004, 2006.
- [15] BABICHEV, E. *Gauge k -Vortices*, Phys. Rev. D **77**, 065021, 2008.
- [16] SARANGI, S. *DBI Global Strings*, JHEP **07**, 18, 2008.
- [17] ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. J. *k -Defects as Compactons*, Phys A **40**, 13625, 2007; **42**, 089801 (E), 2009.
- [18] JIN, X. H.; LI, X. Z.; LIU, D. j. *A Gravitating Global k -Monopole*, Class. Quantum Grav. **24**, 2773, 2007.
- [19] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R.; OLIVEIRA, J.C.R.E. *Generalized Global Defect Solutions*, Eur. Phys. J. C. **51**, 953-962, 2007.
- [20] BABICHEV, E.; BRAX, P.; CAPRINI, C.; MARTIN, J.; STEER, D. *Dirac Born Infeld (DBI) Cosmic Strings*, JHEP **903**, 91, 2009.
- [21] BAZEIA, D.; GOMES, A. R.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *Braneworld Models of Scalar Fields with Generalized Dynamics*, Phys. Lett. B **671**, 402, 2008.
- [22] ANDREWS, M.; LEWANDOWSKI, M.; TRODDEN, M.; WESLEY, D. *Distinguishing k -defects from Their Canonical Twins*, Phys. Rev. D. **82**, 105006, 2010.

- [23] BAZEIA, D.; GOMES, C. B.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *First-Order Formalism and Dark Energy*, Phys. Lett. B **633**, 415, 2006.
- [24] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *First-Order Framework and Generalized Global Defect Solutions*, Phys. Lett. B **668**, 246, 2008.
- [25] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [26] KAKU, M. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [27] RAMOND, P. *Field Theory: a Modern Primer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [28] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological Solitons*, Cambridge University Press, 2004.
- [29] DERRICK, G. H. *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. **5**, 1252, 1964.
- [30] HOBART, R. *On the Instability of a Class of Unitary Field Models*, Proc. Phys. Soc. **82**, 201, 1963.
- [31] RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, 2002.
- [32] VACHASPATI, T. *Kinks and Domain Walls*, Cambridge University Press, 2006.
- [33] RANGARAJAN, R. *WMAPping the Inflationary Universe*, hep-ph/0706416v1, 2007.
- [34] SEN, A. *Dirac-Born-Infeld Action on the Tachyon Kink and Vortex*, Phys. Rev. D **68**, 066008, 2003.
- [35] SEN, A. *Tachyon Dynamics in Open String Theory*, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 5513, 2005.

- [36] RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [37] BOGOMOLNYI, E. B. *The Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449, 1976.
- [38] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt Academic Press, New York, 2001.
- [39] CHOW, T. L. *Mathematical Methods for Physicists: A Concise Introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [40] KAPLAN, W. *Advanced Calculus*, Addison Wesley Publishing Company, 2003.
- [41] STONE, M. *Methods of Mathematical Physics I*, Pimander-Casaubon, Londres, 2001.
- [42] RUBINSTEIN, J. *Sine-Gordon Equation*, J. Math. Phys. **11**, 258, 1970.
- [43] MAKI, K.; KUMAR, P. *Magnetic Solitons in Superfluid ^3He* , Phys. Rev. B **14**, 118, 1976.
- [44] DVEY-AHARON, H.; SLUCKIN, T. J.; TAYLOR, P. L.; HOPFINGER, A. J. *Kink Propagation as a Model for Poling in Poly(vinylidene fluoride)*, Phys. Rev. B **21**, 3700, 1980.
- [45] CONDAT, C. A.; GUYER, R. A.; MILLER, M. D. *Double sine-Gordon Chain*, Phys. Rev. B. **27**, 474, 1983.
- [46] PNEVMATIKOS, S. *Soliton Dynamics of Hydrogen-Bonded Networks: A Mechanism for Proton Conductivity*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1534, 1988.
- [47] XU, J. -Z.; HUANG, J. -N. *Bell-Shape Soliton Pair in a Hydrogen-Bonded Chain with Asymmetric Double-Well Potential*, Phys. Lett. A **197**, 127, 1995.

- [48] XU, J. -Z.; ZHOU, B. *Kink And bell-Shape Solitons in Hydrogen-Bonded Chains*, Phys. Lett. A **210**, 307, 1996.
- [49] BAZEIA, D.; NASCIMENTO, J. R.; TOLEDO, D. *Alternate Route to Soliton Solutions in Hydrogen-Bonded Chains*, Phys. Lett. A **228**, 357, 1997.
- [50] BAZEIA, D.; LEITE, V. B. P.; LIMA, B. H. B.; MORAES, F. *Soliton Model for Proton Conductivity in Langmuir Films*, Chem. Phys. Lett. **340**, 205, 2001.
- [51] FRIEMAN, J. A.; GELMINI, G. B.; GLEISER, M.; KOLB, E. W. *Primordial Origin of Nontopological Solitons*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2101, 1988.
- [52] MECPHERSON, A. L.; CAMPBELL, B. A. *Biased Discrete Symmetry Breaking and Fermi Balls*, Phys. Lett. B **347**, 205, 1995.
- [53] MORRIS, J. R.; BAZEIA, D. *Supersymmetry Breaking and Fermi Balls*, Phys. Rev. D. **54**, 5217, 1996.
- [54] COULSON, D.; LALAK, Z.; OVRUT, B. *Biased Domain Walls*, Phys. Rev. D **53**, 4237, 1996.
- [55] KHLOPOV, M. Y. *Cosmoparticle Physics*, Word Scientific, Singapore, 1999.
- [56] FUCHS, B.; MIELKE, E.W. *Scaling Behaviour of a Scalar Field Model of Dark Matter Haloes*, MNRAS **350**, 707, 2004.
- [57] SCHUNCK, F. E.; FUCHS, B.; MIELKE, E. W. *Scalar Field Haloes as Gravitational Lenses*, MNRAS **369**, 485, 2006.
- [58] SKYRME, T. H. R. *Particle States of a Quantized Meson Theory*, Proc. Roy. Soc. A **262**, 233, 1961.
- [59] FADDEEV, L.; NIEMI, A. *Partially Dual Variables in $SU(2)$ Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1624, 1999.

- [60] CHIBA, T.; OKABE, T.; YAMAGUCHI, M. *Kinetically Driven Quintessence*, Phys. Rev. D **62**, 023511, 2000.
- [61] ARMENDARIZ-PICON C.; LIM, E. A. *Haloed of k -Essence*, JCAP **0508**, 007, 2005.
- [62] NOVELLO, M.; HUGUET, E.; QUEVA, J. *Toy Model of a Fake Inflation*, Phys. Rev. D **73**, 123531, 2006.
- [63] BABICHEV, E.; DOKUCHAEV, V.; EROSHENKO, Yu. *Black Hole Mass Decreasing Due to Phantom Energy Accretion*, Phys. Rev. Lett. **93**, 021102, 2004.
- [64] FROLOV, A. V. *Accretion of Ghost Condensate by Black Holes*, Phys. Rev. D. **70**, 061501, 2004.
- [65] MUKOHYAMA, S. *Black Holes in the Ghost Condensate*, Phys. Rev. D **71**, 104019, 2005.
- [66] BABICHEV, E.; DOKUCHAEV, V.; EROSHENKO, Yu. *The Accretion of Dark Energy onto a Black Hole*, J. Exp. Theor. Phys. **100**, 528, 2005.
- [67] ALISHAHIHA, M.; SILVERSTEIN, E.; TONG, D. *DBI in the sky: Non-Gaussianity from Inflation with a Speed Limit*, Phys. Rev. D **70**, 123505, 2004.
- [68] CHEN, X. *Multithroat Brane Inflation*, Phys. Rev. D **71**, 063506, 2005.
- [69] CHEN, X. *Inflation from Warped Space*, JHEP **08**, 045, 2005.
- [70] SHANDERA, S. E.; TYE, S-H. H. *Observing brane inflation*, JCAP **05**, 007, 2006.
- [71] COPELAND, E. J.; MIZUNO, S.; SHAERI, M. *Cosmological Dynamics of a Dirac-Born-Infeld Field*, Phys. Rev. D **81**, 123501, 2010.
- [72] BAZEIA, D.; DANTAS, J. D.; GOMES, A. R.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *Twinlike Models in Scalar Field Theories*, Phys. Rev. D. **84**, 045010, 2011.

- [73] AFONSO, V. I.; BAZEIA, D.; LOSANO, L. *First-Order Formalism for Bent Brane*, Phys. Lett. B **634**, 526, 2006.
- [74] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; RODRIGUES, J. J. *First-Order Formalism for Scalar Field in Cosmology*, hep-th/0610028, 2006.
- [75] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; RODRIGUES, J. J.; ROSENFELD, R. *First-Order Formalism for Dark Energy and Dust*, Eur. Phys. J. C **55**, 113, 2008.
- [76] GARRIGA, J.; MUKHANOV, V. F. *Perturbations in k -inflation*, Phys. Lett. B **458**, 219, 1999.
- [77] SCHERRER, R. J. *Purely Kinetic k -essence as Unified Dark Matter*, Phys. Rev. Lett. **93**, 011301, 2004.
- [78] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690, 1999.
- [79] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*, Phys. Lett. B **429**, 263, 1998.
- [80] ANTONIADIS, I.; ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. *New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV*, Phys. Lett. B **436**, 257, 1998.
- [81] SHIU, G.; TYE, S-H. R. *TeV Scale Superstring and Extra Dimensions*, Phys. Rev. D **58**, 106007, 1998.
- [82] GOLDBERGER, W. D.; WISE, M. B. *Modulus Stabilization with Bulk Fields*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922, 1999.
- [83] DEWOLFE, O.; FRIEDMAN, D. Z.; GUBSER, S. S.; KARCH, A. *Modeling the Fifth Dimension with Scalars and Gravity*, Phys. Rev. D **62**, 046008, 2000.

- [84] AFONSO, V. I.; BAZEIA, D.; MENEZES, R.; PETROV, A. Yu. *f(R)-Brane*, Phys. Lett. B **658**, 71, 2007.
- [85] BAZEIA, D.; GOMES, A. R.; LOSANO, L. *Gravity Localization on Thick Branes: A Numerical Approach*, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 1135, 2009.
- [86] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; COSTA, F. G. *First-Order Framework and Domain-Wall/Brane-Cosmology Correspondence*, Phys. Lett. B **661**, 179, 2008.
- [87] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; LOSANO, L. *Scalar Fields, Bent Branes, and RG Flow*. JHEP **611**, 64, 2006.
- [88] RIESS, A. G. et al. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116**, 1009, 1998.
- [89] PERLMUTTER, S. J. et al. *Measurements of ω and λ from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565, 1999.
- [90] BACHALL, N. A.; OSTRIKER, J. P.; PERLMUTTER, S. J.; STEINHARDT, P. J., Science **284**, 1481, 1999.
- [91] RIESS, A. G. et al. *Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution*, Astrophys. J. **607**, 665, 2004.
- [92] ASTIER, P. et al. *The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M , Ω , Λ and w from the First Year Data Set*, Astron. Astrophys. **447**, 31, 2006.
- [93] SPERGEL, D. N. et al. *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175, 2003.

- [94] SPERGEL, D. N. et al. *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377, 2007.
- [95] TEGMARK, M. et al. *Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies*, *Phys. Rev. D* **74**, 123507, 2006.
- [96] FRIMAN, J.; HILL, C.; STEBBINS, A.; WAGA, I. *Cosmology with Ultra-light Pseudo-Nambu-Goldstone Bosons*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2077, 1995.
- [97] CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582, 1998.
- [98] CARROLL, S. M. *Quintessence and the Rest of the World*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3067, 1998.
- [99] ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. *Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896, 1999.
- [100] HUEY, G.; LIDSEY, J. E. *Inflation, Braneworlds and Quintessence*, *Phys. Lett. B* **514**, 217, 2001.
- [101] SEN, A. A.; SETHI, S. *Quintessence Model with Double Exponential Potential*, *Phys. Lett. B* **532**, 159, 2002.
- [102] KRATOCHVIL, J.; LINDE, A.; LINDER, E. V.; SHMAKOVA, M. *Testing the Cosmological Constant as a Candidate for Dark Energy*, *JCAP* **0407**, 001, 2004.
- [103] BRAX, P.; JEROME, M. *The SUGRA Quintessence Model Coupled to the MSSM*, *JCAP* **0611**, 008, 2006.
- [104] SETARE, M. R. *Interacting Holographic Dark Energy Model and Generalized Second Law of Thermodynamics in Non-Flat Universe*, *JCAP* **0701**, 023, 2007.

- [105] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [106] PADMANABHAN, T. *Cosmology and Astrophysics through Problems*, Cambridge University Press, 1996.
- [107] DEBENEDICTIS, A.; DAS, A.; KLOSTER, S. *The Gravitating Perfect Fluid-Scalar Field Equations: Quintessence and Tachyonic Matter*, Gen. Relat. Grav. **36**, 11, 2004.
- [108] MAK, M. K.; HARKO, T. *Quintessence and Cosmic Acceleration*, Int. J. Mod. Phys. **D11**, 1389, 2002.
- [109] MAZUMDAR, A.; PANDA, S.; PÉREZ-LORENZANA, A. *Assisted Inflation via Tachyon Condensation*, Nucl. Phys. B **614** 101, 2001.
- [110] SEN, A. *Supersymmetric World-volume Action for Non-BPS D-branes*, JHEP **9910**, 008, 1999.
- [111] CHUNG, J. H.; L'YI, W. S. *The Energy-carrying Velocity and Rolling of Tachyons of Unstable D-branes*, arXiv:hep-th/0305249, v2 **14**, 2003.