

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Vórtices em teorias k-generalizadas

Carlos Eduardo da Hora Santos

João Pessoa, junho de 2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Vórtices em teorias k-generalizadas

Carlos Eduardo da Hora Santos

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Dionísio Bazeia Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, junho de 2012

S237v Santos, Carlos Eduardo da Hora.
Vórtices em teorias k-generalizadas / Carlos Eduardo da
Hora Santos.-- João Pessoa, 2012.
78f. : il.
Orientador: Dionísio Bazeia Filho
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Vórtices. 3. Defeitos Topológicos. 4. Teorias
de Gauge.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Carlos Eduardo da Hora Santos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e dois dias do mês de junho do ano de dois mil e doze, às 10:00, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das
5 Partículas Elementares e Campos, o Sr. **Carlos Eduardo da Hora Santos**. A comissão
6 examinadora foi composta pelos professores doutores: *Dionísio Bazeia Filho* (UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, *Albert Petrov* (UFPB), *Fernando Jorge*
8 *Sampaio Moraes* (UFPB), *Rodolfo Casana* (UFMA) e *Roberto Menezes* (UFPB/Rio
9 Tinto). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Dionísio Bazeia Filho* comunicou aos
10 presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o
11 mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Vórtices em*
12 *teorias k-generalizadas*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca
13 Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a
14 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na
15 forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário,
16 lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca
17 Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **22 de junho de 2012**.

18

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Albert Petrov
UFPB

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
UFPB

Prof. Dr. Rodolfo Casana
UFMA

Prof. Dr. Roberto Menezes
UFPB/Rio Tinto

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

The image shows five horizontal lines, each with a handwritten signature written over it. The signatures correspond to the names listed to the left of the lines: Dionísio Bazeia Filho, Albert Petrov, Fernando Jorge Sampaio Moraes, Rodolfo Casana, and Roberto Menezes. The signature of Danilo Wilson Lemos Menezes is written below the fifth line.

"Na casa de um rico não há lugar para cuspir, a não ser na sua própria cara." (Diógenes de Sínope)

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	vi
Introdução	1
1 Revisão: Vórtices Usuais.	5
1.1 Vórtices BPS: Maxwell-Higgs.	5
1.2 Soluções numéricas: Maxwell-Higgs.	12
1.3 Vórtices BPS: Chern-Simons-Higgs.	14
1.4 Soluções numéricas: Chern-Simons-Higgs.	18
1.5 Vórtices BPS: Maxwell-Chern-Simons-Higgs.	22
1.6 Soluções numéricas: Maxwell-Chern-Simons-Higgs.	25
2 Vórtices generalizados I.	29
2.1 Modelo generalizado I.	29
2.2 Soluções numéricas I.	32
3 Vórtices generalizados II.	41
3.1 Modelo generalizado II.	41
3.2 Soluções numéricas II.	47
3.3 Teorias Gêmeas.	50
3.4 Teorias Gêmeas: O Modelo.	51
3.5 Soluções numéricas: Teorias Gêmeas.	54
Conclusões	58

Referências	64
Trabalhos Publicados.	68

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho, pela paciência, presteza, amizade e orientação.

A minha mãe, ao meu filho e a minha noiva.

Aos meus amigos.

A CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados novos sobre configurações de topologia não-trivial obtidas no âmbito de algumas teorias clássicas de campo generalizadas. Em particular, nos concentramos em vórtices estáticos possuidores de energia finita. Tais configurações surgem quando há a violação espontânea da invariância de gauge local $U(1)$ no âmbito de alguns modelos Higgs-Abelianos.

Primeiro, fazemos uma breve revisão sobre os vórtices usuais. As estruturas usuais surgem em três cenários diferentes: a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, a eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs e a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Em todos estes casos, ocorrem vórtices BPS topológicos: configurações com simetria rotacional e energeticamente estáveis que satisfazem um conjunto de equações de primeira ordem, sua energia sendo proporcional à sua carga topológica. Resolvemos as equações BPS explicitamente para diferentes valores da vorticidade n , e enunciamos as principais características que as soluções numéricas resultantes engendram.

A posteriori, introduzimos um modelo generalizado descrito por uma função arbitrária $K(X)$, onde $X = |D_\mu\phi|^2$ determina a dinâmica do campo escalar complexo. Especificamente, escolhemos $K(X) = X - \alpha X^2$, da qual resultam apenas vórtices não-BPS generalizados (o modelo assim obtido não engendra vórtices BPS). Estes vórtices engendram campo elétrico nulo (tal como aqueles obtidos no âmbito da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs usual), além de carga topológica não trivial (dado serem topológicos). Em seguida, resolvemos as equações de Euler-Lagrange (diferenciais de segunda ordem) e enunciamos as principais características que as soluções generalizadas resultantes engendram.

Em seguida, apresentamos um segundo modelo generalizado. O novo modelo é determinado por duas funções adimensionais do campo escalar, $G(|\phi|)$ e $w(|\phi|)$. Estas funções são supostas obedecerem um vínculo que relaciona-as ao potencial de Higgs, $V(|\phi|)$. Neste

contexto, vórtices BPS topológicos também existem, e as suas características numéricas podem ser muito semelhantes, ou muito diferentes, daquelas verificadas no contexto usual.

Finalmente, adaptamos o segundo modelo generalizado ao estudo das teorias gêmeas, i.e., teorias diferentes com exatamente as mesmas soluções, além de exatamente a mesma energia. Neste caso, $G(|\phi|)$, $w(|\phi|)$ e $V(|\phi|)$ são supostas obedecerem dois novos vínculos. Aqui, existem vórtices BPS gêmeos caracterizados por diferentes densidades de energia, todas elas resultando na mesma energia total.

Palavras-chave: Vórtices, Defeitos Topológicos, Teorias de Gauge.

Abstract

In this work, we present new results regarding topologically non-trivial configurations arising in some generalized classical field theories. We focus on static finite-energy vortices which arise when a spontaneous symmetry breaking of $U(1)$ local gauge invariance takes place in some Abelian-Higgs models.

First, we perform a brief review regarding the usual vortices. The usual structures emerge in three different scenarios: the Maxwell-Higgs electrodynamics, the Chern-Simons-Higgs electrodynamics and the Maxwell-Chern-Simons-Higgs electrodynamics. In all these cases, there are BPS topological vortices: energetically stable radially symmetric configurations satisfying a set of first order equations, their energy being proportional to their topological charge. We solve the BPS equations explicitly for different values of the vorticity n , and we comment on the main features the numerical solutions we found engender.

A posteriori, we introduce a generalized model, described by an arbitrary function $K(X)$, where $X = |D_\mu\phi|^2$ gives the dynamic of the complex scalar field. Specifically, we choose $K(X) = X - \alpha X^2$, from which we get generalized non-BPS vortices only (the resulting model does not allow for BPS ones). These vortices have no electric field (as the Maxwell-Higgs ones), but also have a non-trivial topological charge (since they are topological). We then solve the second order Euler-Lagrange equations and comment on the main features the generalized solutions we found engender.

Then, we introduce a second generalized model. The new model is specified by two dimensionless functions of the scalar field, $G(|\phi|)$ and $w(|\phi|)$. These two functions are supposed to obey a constraint relating them to the unspecified Higgs potential, $V(|\phi|)$. In this case, BPS topological vortices exist, and their numerical features can be quite similar, or quite different, from the standard ones.

Finally, we adapt the second generalized model to the study of twinlike theories, which are different theories allowing the very same field solutions and the very same energy. In this case, $G(|\phi|)$, $w(|\phi|)$ and $V(|\phi|)$ are supposed to obey two new constraints. Here, there are twinlike BPS topological vortices related to different energy densities, all of them giving the very same total energy.

Keywords: Vortices, Topological Defects, Gauge Theories.

Introdução

No âmbito das teorias clássicas de campo, *defeitos* são configurações descritas a partir da resolução de equações diferenciais não-lineares [1]. Em geral, estas são as equações de Euler-Lagrange de uma teoria na qual ocorre quebra espontânea de alguma simetria contínua. Assim, os defeitos se dividem em duas classes distintas: os defeitos *topológicos*, possuidores de *carga topológica* não-nula, e os *não-topológicos*, possuidoras de carga topológica nula. Neste trabalho, consideraremos apenas os defeitos pertencentes à primeira classe.

Os exemplos mais comuns de defeitos topológicos são o *kink* [2], o *vórtice* [3] e o *monopólo magnético* [4,5]. O primeiro é obtido no contexto de uma teoria definida em um espaço-tempo (1+1)-dimensional, possuidora de um único campo escalar, real e estático; vórtices são soluções construídas no âmbito de teorias de *gauge abelianas* definidas em um espaço-tempo (1+2)-dimensional, caracterizadas pela presença de um campo de gauge e de um campo escalar complexo; finalmente, monopólos magnéticos são obtidos via teorias de gauge *não-abelianas* (1+3) dimensionais, nas quais há a presença de um tripleto de campos de gauge e de um tripleto de campos escalares reais.

Em particular, vórtices são estruturas estáticas, possuidoras de simetria rotacional, construídas no âmbito de teorias de gauge abelianas (1+2)-dimensionais [6]. Neste contexto, vórtices topológicos emergem a partir da violação da simetria de gauge local [7,8]. Em casos muito específicos, tais estruturas, ao invés de obtidas via as equações de Euler-Lagrange, podem ser obtidas a partir da resolução de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas *equações BPS* [9,10]. Nestes casos, a configuração resultante, denominada *estado BPS*, possui a mínima energia possível, sendo esta energia proporcional a sua carga topológica. Por outro lado, quando tais configurações são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, pouco podemos afirmar sobre suas energias.

Via de regra, vórtices BPS são construídos a partir de três teorias de gauge distintas:

a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [11], a eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs [12, 13] e a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs [14, 15]. No primeiro caso, os vórtices BPS resultantes engendram campo elétrico nulo; nos dois casos seguintes, estas estruturas possuem não apenas campo magnético não-nulo, mas também campo elétrico não-nulo.

Vórtices possuem uma grande variedade de aplicações: desde o efeito Hall quântico inteiro e fracionário [16, 17], até a supercondutividade de alta temperatura [18]. Na verdade, justamente a partir da teoria da supercondutividade proposta por Landau e Ginzburg [19], Abrikosov [20] obteve, pela primeira vez, soluções não-relativísticas com simetria rotacional. Neste contexto, a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs fornece a versão relativística dos vórtices obtidos por Abrikosov [3].

Ao longo dos últimos anos, além dos modelos usuais citados acima, modelos generalizados, denominadas *teorias k-generalizadas*, tem atraído muita atenção. Em geral, estas teorias são construídas a partir de suas contrapartidas usuais, via a generalização dos termos responsáveis pela especificação da dinâmica dos campos em questão. A idéia por trás desta generalização, vale ressaltar, emerge naturalmente no contexto da Teoria das Cordas.

As teorias generalizadas também engendram defeitos topológicos. Em alguns casos, inclusive, não é necessário haver a violação espontânea de qualquer simetria [21]. Porém, no intuito de melhor identificar os efeitos causados pela generalização, costuma-se considerar, além da generalização em si, a ocorrência da violação de simetria. Assim, pode-se mensurar os efeitos da generalização via a simples comparação entre as soluções resultantes e suas correspondentes usuais. Neste sentido, resultados interessantes podem ser encontrados em [22]- [29]. Em geral, as soluções generalizadas engendram variações não apenas em suas amplitudes, mas também em seus comprimentos característicos.

Atualmente, teorias generalizadas como as aqui apresentadas são amplamente utilizadas como modelos efetivos, principalmente em Cosmologia, onde as *teorias $f(R)$* [30, 31] buscam, por exemplo, compreender a atual fase de expansão acelerada do Universo [32]. Ainda em Cosmologia, outras frentes de trabalho envolvem o uso de teorias generalizadas no estudo de ondas gravitacionais fortes [33], matéria escura [34], matéria taquiônica [35] e outros fenômenos [36]- [48]. Tais teorias também encontram aplicação na Física das Interações Fortes [49]- [55], e na Matéria Condensada [56, 57].

Neste sentido, esta tese sumariza alguns resultados obtidos ao longo do curso de

doutorado. Em particular, voltaremos nossa atenção ao estudo dos vórtices topológicos construídos no âmbito de teorias generalizadas, procurando definir os efeitos das generalizações utilizadas. Como veremos, algumas destas generalizações impedem a obtenção de vórtices BPS estáticos, enquanto outras engendram vórtices BPS possuidores de características muito interessantes.

No Capítulo 2, apresentamos uma breve revisão sobre a obtenção de vórtices estáticos no âmbito das eletrodinâmicas de Maxwell-Higgs [11], de Chern-Simons-Higgs [12, 13] e de Maxwell-Chern-Simons-Higgs [14, 15]. Estes vórtices, como todos nesta tese, são topológicos (i.e., caracterizados por uma carga topológica não-nula), e podem ser obtidos de duas maneiras: via a resolução numérica (i) das respectivas equações de Euler-Lagrange (equações diferenciais de segunda-ordem), ou (ii) de um par de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas equações BPS. Os vórtices obtidos a partir das equações BPS engendram os mínimos valores possíveis para suas energias totais, sendo estes valores proporcionais às suas cargas topológicas. Por outro lado, pouco podemos afirmar sobre as energias dos vórtices não-BPS, i.e., aqueles obtidos via a resolução direta das equações de Euler-Lagrange.

No Capítulo 3, início da parte central deste trabalho, apresentamos uma primeira eletrodinâmica generalizada, construída a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [24]. Também neste caso, ocorrem vórtices estáticos de topologia não-trivial. Porém, ao contrário dos obtidos no contexto usual, tais estruturas são puramente não-BPS, i.e., apenas podem ser obtidas via a resolução das equações de Euler-Lagrange generalizadas. Neste caso, apesar de topológicos, as energias destas estruturas não são mais proporcionais às suas cargas topológicas.

No Capítulo 4, introduzimos uma segunda eletrodinâmica generalizada. Neste caso, apesar de também construída a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, a nova teoria generalizada engendra a formação de vórtices BPS estáticos [26]. Assim, após uma abordagem geral, introduzimos duas generalizações específicas. As estruturas resultantes podem possuir características muito parecidas, mas também muito diferentes, daquelas observadas no contexto usual.

Ainda no Capítulo 4, adaptamos o segundo modelo generalizado ao estudo das teorias "gêmeas" [58]. Teorias gêmeas, apesar de definidas por densidades de lagrangeanas diferentes, engendram não apenas exatamente as mesmas soluções, mas também a mesma

energia total [59]- [62]. Aqui, a partir da introdução de dois vínculos específicos, a teoria generalizada fornece exatamente as mesmas estruturas BPS obtidas no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. Além disso, apesar de possuírem a mesma energia total, tais estruturas exibem diferentes densidades de energia. Novamente, após uma abordagem geral, introduzimos duas generalizações específicas, e voltamos nossa atenção para suas densidades de energia.

Finalmente, sumarizamos os resultados contidos neste trabalho, apresentamos nossas conclusões e perspectivas de investigações futuras.

As teorias apresentadas ao longo deste trabalho são definidas em um espaço-tempo (1+2)-dimensional. Aqui, os índices gregos denotam todas as coordenadas do espaço-tempo ($\mu, \nu = 0, 1, 2$), enquanto os índices latinos denotam apenas suas coordenadas espaciais ($j = 1, 2$). A métrica utilizada é $\eta^{\mu\nu} = (+ - -)$, o campo de *gauge* é dado por $A^\mu = (A_0, A_x, A_y)$, e vale $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y)$. Além disso, utilizaremos o sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$).

Capítulo 1

Revisão: Vórtices Usuais.

Vórtices são estruturas planares, dotadas de simetria rotacional, livres de quaisquer divergências e possuidoras de energia total finita. Tais estruturas são obtidas via o tratamento numérico das respectivas equações de Euler-Lagrange (equações diferenciais de segunda ordem), implementadas as corretas condições de contorno.

Porém, vórtices podem também ser obtidos a partir de uma abordagem alternativa, mais simples e sofisticada. Neste caso, tais estruturas são obtidas via a resolução de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas *equações BPS*. Naturalmente, os vórtices assim obtidos, denominados *vórtices BPS*, são também soluções das equações de Euler-Lagrange e, portanto, soluções legítimas da teoria em questão. Outra vantagem desta abordagem é mostrar serem tais vórtices soluções fundamentais (i.e., de mínima energia) do modelo.

Neste Capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre a obtenção de vórtices BPS a partir dos modelos de Maxwell-Higgs, Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

1.1 Vórtices BPS: Maxwell-Higgs.

A eletrodinâmica planar de Maxwell-Higgs é definida pela seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + X - U_M(|\phi|), \quad (1.1)$$

na qual $A^\mu(x^\nu)$ é o campo de gauge (vetorial) e $\phi(x^\mu)$ é o campo de Higgs (escalar complexo). Além disso, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, $X \equiv |D_\mu\phi|^2$ e $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi$ representa a derivada covariante do campo $\phi(x^\mu)$. O potencial $U_M(|\phi|)$ é dado por

$$U_M(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (1.2)$$

e descreve a interação de $\phi(x^\mu)$ consigo próprio (auto-interação). Aqui, e e λ são constantes de acoplamento, supostas reais e positivas, e v é o valor esperado de $|\phi|$ no vácuo do modelo ($U_M(|\phi| = v) = 0$), também real e positiva.

É útil lidar com campos, coordenadas e parâmetros completamente adimensionais. Portanto, definimos o parâmetro de massa M do modelo (1.1) e, a partir dele, implementamos as transformações de escala: $x^\mu \rightarrow M^{-1}x^\mu$, $\phi \rightarrow M^{1/2}\phi$, $A^\mu \rightarrow M^{1/2}A^\mu$, $e \rightarrow M^{1/2}e$, $\lambda \rightarrow M^{1/2}\lambda$ e $v \rightarrow M^{1/2}v$. Neste caso, obtemos $\mathcal{L}_M \rightarrow M^3\mathcal{L}$, e a teoria (1.1) passa a ser descrita por uma densidade de lagrangeana \mathcal{L} completamente adimensional, com a mesma forma funcional de \mathcal{L}_M .

Soluções próprias à (1.1) são obtidas a partir das respectivas equações de Euler-Lagrange. Estas equações são

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} = J^\rho, \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu |\phi| - e^2 A_\mu A^\mu |\phi| = -\frac{1}{2} \frac{dU_M}{d|\phi|}, \quad (1.4)$$

nas quais

$$J^\rho = -2e^2 |\phi|^2 A^\rho, \quad (1.5)$$

é o 4-vetor densidade de corrente.

Porém, antes de avançarmos, consideremos a lei de Gauss relacionada à (1.1). Ela pode ser escrita na forma (supondo campos independentes do tempo)

$$\partial_j \partial^j A^0 = -2e^2 |\phi|^2 A^0, \quad (1.6)$$

na qual $j = 1, 2$ representa somatório sobre coordenadas espaciais apenas. A partir de (1.6), notamos ser possível a escolha do *gauge* temporal (i.e., $A^0 = 0$), dado esta escolha satisfazer a própria lei de Gauss. Implementada esta escolha, soluções estáticas serão caracterizadas pela completa ausência de campo elétrico.

Como dito, vórtices são configurações estáticas possuidoras de simetria rotacional. Tais configurações são tradicionalmente descritas pelo *Ansatz*

$$\phi(r, \theta) = vg(r) e^{in\theta}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A}(r, \theta) = -\frac{\widehat{\theta}}{er} (a(r) - n), \quad (1.8)$$

onde r e θ são coordenadas polares, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ é a *vorticidade* da configuração, e $g(r)$ e $a(r)$ são funções adimensionais.

Via (1.7) e (1.8), (1.3) e (1.4) podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} = 2e^2 v^2 g^2 a, \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2 g}{r^2} = \frac{1}{2v^2} \frac{dU_M}{dg}, \quad (1.10)$$

onde $F_{21} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B$ e

$$B(r) = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \quad (1.11)$$

é o campo magnético.

Aqui, (1.9) e (1.10) são as equações de Euler-Lagrange para as funções $g(r)$ e $a(r)$. A partir da resolução destas equações, os campos $\phi(r, \theta)$ e $\mathbf{A}(r, \theta)$ são obtidos conforme (1.7) e (1.8). Porém, antes de resolvermos (1.9) e (1.10), precisamos especificar as condições de contorno a serem impostas sobre as funções $g(r)$ e $a(r)$.

Para $r \rightarrow 0$, as condições de contorno devem evitar o surgimento de configurações dotadas de quaisquer singularidades. Portanto, e tendo em vista (1.7) e (1.8), $g(r)$ e $a(r)$ devem satisfazer

$$g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow 0) \rightarrow n. \quad (1.12)$$

Além disto, as configurações resultantes devem ser possuidoras de energia total finita. Tal imposição resulta em mais um conjunto de condições de contorno, válidas para $r \rightarrow \infty$, e obtidas via a análise do tensor de energia-momento próprio à (1.1). No presente caso, este tensor é dado por

$$T_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\mu} F_{\beta}{}^{\mu} + 2\partial_{\alpha} |\phi| \partial_{\beta} |\phi| + 2e^2 A_{\alpha} A_{\beta} |\phi|^2 - \eta_{\alpha\beta} \mathcal{L}, \quad (1.13)$$

do qual resulta a densidade de energia (já escrita a partir de (1.7) e (1.8))

$$\varepsilon(r) \equiv T_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda^2 v^4}{4} (g^2 - 1)^2. \quad (1.14)$$

A densidade de energia (1.14) resultará em uma energia total finita quando satisfizer $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Portanto, as funções $g(r)$ e $a(r)$ devem satisfazer

$$g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

Finalmente, dadas as condições de contorno (1.12) e (1.15), vórtices estáticos podem ser obtidos via a resolução numérica das equações de Euler-Lagrange (1.9) e (1.10). Esta abordagem, mais direta, foi efetivada por Nielsen e Olesen, em 1973 [3]. Porém, poucos anos mais tarde, Schaposnik e de Vega [11] obtiveram as mesmas estruturas via uma abordagem alternativa, mais simples e sofisticada, na qual precisaram resolver apenas equações diferenciais de primeira ordem (ao contrário das equações de Euler-Lagrange, de segunda ordem). No entanto, tais equações, denominadas equações BPS, apenas são obtidas em um contexto específico, denominado *limite de Bogomol'nyi* [9]. Este contexto e a obtenção de tais equações são discutidos abaixo.

Consideremos a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs (1.1). Neste caso, o limite de Bogomol'nyi é definido por $\lambda^2 = 2e^2$. Neste limite, a densidade de energia (1.14) pode ser reescrita como

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + \frac{e^2 v^4}{2} (g^2 - 1)^2, \quad (1.16)$$

ou

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 \mp \frac{v^2}{r} \frac{da}{dr} \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (g^2 a), \quad (1.17)$$

onde

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{e^2 v^4}{2} (g^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right)^2 \pm \frac{v^2 g^2}{r} \frac{da}{dr} \mp \frac{v^2}{r} \frac{da}{dr}, \quad (1.18)$$

$$v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) = v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 \pm v^2 \frac{a}{r} \frac{d}{dr} g^2. \quad (1.19)$$

Desta forma, a energia total E resulta

$$E \equiv \int \varepsilon(r) d^2r = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2r \geq E_{bps}, \quad (1.20)$$

na qual

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2r, \quad (1.21)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{v^2}{r} \frac{da}{dr} \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (g^2 a). \quad (1.22)$$

Assim, quando $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (1.23)$$

e

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (1.24)$$

a configuração resultante possuirá uma energia total mínima, $E = E_{bps}$, dada por (1.21).

As equações diferenciais de primeira ordem (1.23) e (1.24) são as equações BPS próprias à eletrodinâmica de Maxwell-Higgs (1.1). A partir destas equações, é possível obtermos as equações de Euler-Lagrange (1.9) e (1.10). Assim, verificamos serem as soluções obtidas via (1.23) e (1.24), denominadas estados BPS, também soluções de (1.9) e (1.10), e, portanto, soluções legítimas de (1.1). Como dito, tais soluções engendram configurações possuidoras de energia total mínima, $E = E_{bps}$, dada por (1.21), e cujo valor pode ser calculado a partir de (1.12), (1.15) e (1.22)

$$E_{bps} = 2\pi \int r \varepsilon_{bps} dr = 2\pi v^2 |n|, \quad (1.25)$$

na qual ε_{bps} é dada por (1.22). Assim, notamos ser o valor desta energia total quantizado conforme a vorticidade n da configuração em questão.

Antes de procedermos a resolução numérica das equações BPS, verifiquemos a compatibilidade entre estas equações e as condições de contorno (1.12) e (1.15). Esta verificação é efetivada através do processo de *linearização* das equações diferenciais em questão, e consiste na construção de versões aproximadas destas equações, válidas apenas em determinadas regiões do espaço. A partir da implementação deste processo, emergem soluções analíticas aproximadas para as funções $g(r)$ e $a(r)$, válidas apenas para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Este procedimento pode ser aplicado a todos os casos apresentados neste trabalho (inclusive os generalizados). Porém, por simplicidade, será abordado apenas aqui, a título de ilustração.

Tomemos o limite $r \rightarrow 0$. Neste limite, vale a aproximação

$$g(r) \approx \delta g(r) \quad \text{e} \quad a(r) \approx n - \delta a(r), \quad (1.26)$$

na qual $\delta g(r)$ e $\delta a(r)$ satisfazem as condições de contorno

$$\delta g(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \delta a(r \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (1.27)$$

Neste caso, as equações BPS (1.23) e (1.24) podem ser reescritas em termos das funções $\delta g(r)$ e $\delta a(r)$ (considerando apenas contribuições lineares em δ)

$$\frac{d}{dr} \delta a = \pm e^2 v^2 r, \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dr}\delta g = \pm n \frac{\delta g}{r}, \quad (1.29)$$

a partir das quais emergem as soluções (compatíveis com (1.27), G é uma constante real)

$$\delta g(r) = Gr^{|n|} \quad \text{e} \quad \delta a(r) = \pm \frac{e^2 v^2}{2} r^2, \quad (1.30)$$

e

$$g(r) \approx Gr^{|n|} \quad \text{e} \quad a(r) \approx n \mp \frac{e^2 v^2}{2} r^2. \quad (1.31)$$

Como sabemos, em $r \rightarrow 0$, as condições de contorno devem evitar o surgimento de configurações possuidoras de quaisquer singularidades. Neste sentido, as soluções (1.31), válidas justamente em $r \rightarrow 0$, por satisfazerem tais condições, reforçam a compatibilidade entre as equações BPS (1.23) e (1.24), e as condições de contorno (1.12) e (1.15).

De maneira análoga, no limite $r \rightarrow \infty$, usamos a aproximação

$$g(r) \approx 1 - \delta g(r) \quad \text{e} \quad a(r) \approx \delta a(r). \quad (1.32)$$

na qual $\delta g(r)$ e $\delta a(r)$ satisfazem

$$\delta g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \delta a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (1.33)$$

Agora, as equações BPS resultam (novamente, considerando apenas contribuições lineares em δ)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \delta a = \mp 2e^2 v^2 \delta g, \quad (1.34)$$

$$\frac{d}{dr} \delta g = \mp \frac{\delta a}{r}, \quad (1.35)$$

a partir das quais obtemos

$$\delta g(r) = \frac{1}{e\sqrt{2}evr} \quad \text{e} \quad \delta a(r) = \pm \frac{\sqrt{2}evr}{e\sqrt{2}evr}, \quad (1.36)$$

e

$$g(r) \approx 1 - \frac{1}{e\sqrt{2}evr} \quad \text{e} \quad a(r) \approx \pm \frac{\sqrt{2}evr}{e\sqrt{2}evr}, \quad (1.37)$$

compatíveis com $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, como esperado.

Utilizando estes resultados, podemos construir soluções aproximadas para, por exemplo, o campo magnético $B(r)$ (1.11) e a densidade de energia $\varepsilon(r)$ (1.22), válidas em seus respectivos limites. Ainda assim, para valores intermediários da variável r , a resolução numérica das equações BPS faz-se necessária.

Todas as configurações descritas neste trabalho são *topológicas*, ou seja, possuem *carga topológica* Q_T diferente de zero. Além disso, a energia de uma dada configuração BPS deve ser diretamente proporcional à carga topológica desta mesma configuração, ou seja, deve valer $E = E_{bps} \propto Q_T$. Assim, no intuito de melhor caracterizarmos as configurações aqui descritas, introduzimos a definição de *densidade de corrente topológica* \mathcal{J}^μ

$$\mathcal{J}^\mu = \varepsilon^{\mu\beta\alpha} \partial_\alpha A_\beta, \quad (1.38)$$

na qual $\varepsilon^{\mu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita ($\varepsilon^{012} = +1$). Desta forma, a *densidade de carga topológica* q_T é dada por

$$q_T \equiv \mathcal{J}^0 = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B, \quad (1.39)$$

a partir da qual obtemos uma expressão geral para a carga topológica Q_T de uma dada configuração

$$Q_T \equiv \int q_T d^2r = \int B d^2r \equiv \Phi_B. \quad (1.40)$$

Aqui, Φ_B representa o fluxo do campo magnético B . Em particular, para configurações descritas pelo *Ansatz* (1.7) e (1.8), a carga topológica pode ser calculada a partir das condições de contorno (1.12) e (1.15)

$$Q_T = \Phi_B = \frac{2\pi n}{e}. \quad (1.41)$$

Portanto, a energia total das configurações BPS obtidas via (1.23) e (1.24) resulta

$$E_{bps} = ev^2 |Q_T|, \quad (1.42)$$

a partir da qual notamos ser esta energia diretamente proporcional à carga topológica das configurações em questão, como esperado. Por fim, enfatizemos o fato de não só a carga topológica Q_T , mas também o fluxo do campo magnético Φ_B , serem quantizados conforme o valor de n .

Abaixo, apresentamos as soluções numéricas para $g(r)$ e $a(r)$ obtidas a partir de (1.23) e (1.24), conforme as condições de contorno (1.12) e (1.15). Por simplicidade, implementamos $e = v = 1$, mas diferentes valores de n . Além disso, constam também soluções para o campo magnético $B(r)$ (dado por (1.11)) e para a densidade de energia ε_{bps} (dada por (1.22)).

1.2 Soluções numéricas: Maxwell-Higgs.

Abaixo, constam soluções obtidas via o tratamento numérico das equações (1.23) e (1.24). Todas as soluções foram construídas a partir de (1.12) e (1.15), e descrevem configurações BPS possuidoras de vorticidade $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 3$ (curva azul ponto-tracejada) e $n = 5$ (curva vermelha tracejada). Além disso, por simplicidade, utilizou-se $e = v = 1$.

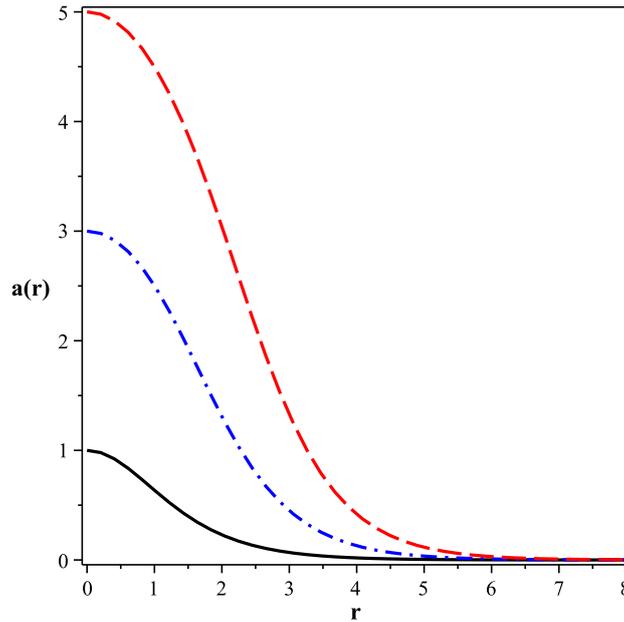


Figura 1.1: Soluções numéricas para $a(r)$, para $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 3$ (curva azul ponto-tracejada) e $n = 5$ (curva vermelha tracejada).

A Figura 1.1 mostra as soluções numéricas obtidas para $a(r)$. Em geral, este campo atinge seu valor máximo (igual à n) quando $r = 0$ (conforme (1.12)). A partir disto, $a(r)$ decresce monotonicamente, tornando-se nula no limite $r \rightarrow \infty$ (conforme (1.15)).

A Figura 1.2 mostra as soluções para $g(r)$. Conforme (1.12) e (1.15), os valores máximo e mínimo engendrados por este campo não dependem da vorticidade n . Assim, em $r = 0$, todas estas soluções engendram valor nulo. A partir disto, todas elas crescem monotonicamente ao mesmo valor máximo (igual à 1, conforme (1.15)). Além disso, soluções de maior vorticidade possuem maiores comprimentos característicos.

As soluções numéricas para a densidade de energia das configurações BPS (ε_{bps} , dada por (1.22)) são mostradas na Figura 1.3. Para $n = 1$, ε_{bps} atinge seu valor máximo quando $r = 0$, a partir do qual decresce monotonicamente, até tornar-se nula no limite $r \rightarrow \infty$.

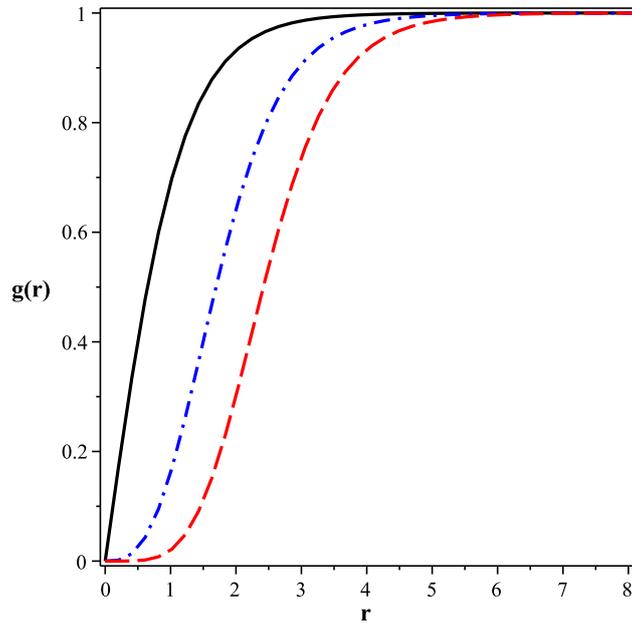


Figura 1.2: Soluções numéricas para $g(r)$. Convenções conforme a Fig.1.1.

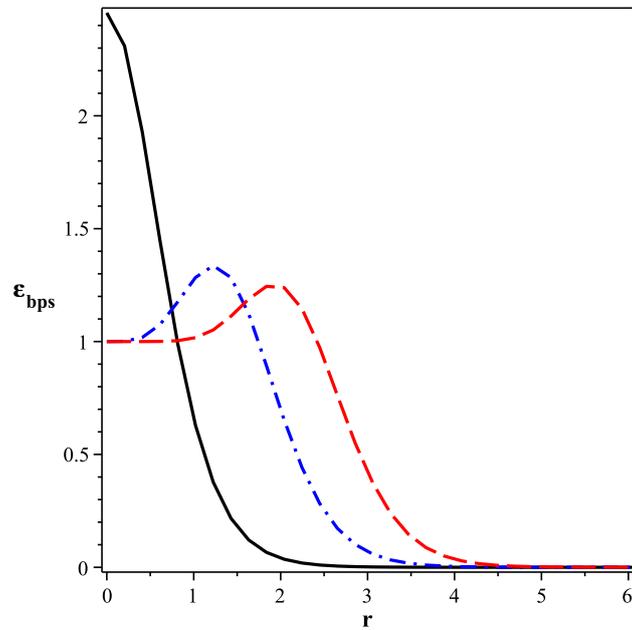


Figura 1.3: Soluções numéricas para ε_{bps} . Convenções conforme a Fig.1.1.

Por outro lado, para $n = 3$ e $n = 5$, ε_{bps} engendra valor máximo quando $r = R$, onde R é algum valor finito. Tradicionalmente, R é dito representar o "raio" da solução. Assim, as soluções de maior vorticidade exibem os maiores raios. Além disso, aparentemente, vale $\varepsilon_{bps}(r = 0, n = 3) = \varepsilon_{bps}(r = 0, n = 5)$. Em todos os casos, $\varepsilon_{bps} \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$, conforme as condições de contorno.

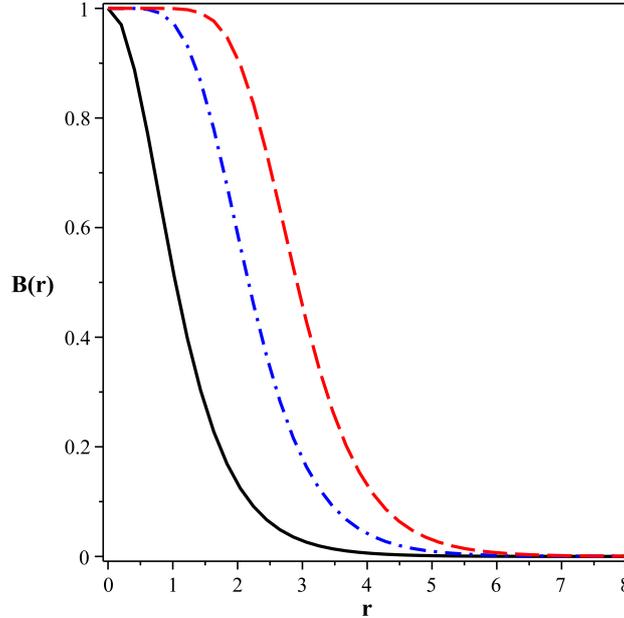


Figura 1.4: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.1.1.

A Figura 1.4 mostra soluções para o campo magnético $B(r)$ (dado por (1.11)). Todas as soluções exibem as mesmas características gerais: para $r = 0$, todas elas atingem um mesmo valor máximo, a partir do qual decrescem monotonicamente, tornando-se nulas no limite $r \rightarrow \infty$. Novamente, os comprimentos característicos são tão maiores quanto maior o valor da vorticidade n .

1.3 Vórtices BPS: Chern-Simons-Higgs.

A eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs é, por definição, uma teoria planar. Ela é definida pela densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + X - U_{CS}(|\phi|), \quad (1.43)$$

na qual k é uma constante de acoplamento. Aqui, $F_{\mu\nu}$, X e $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi$ são definidos como no caso anterior. Além disso, o potencial $U_{CS}(|\phi|)$ é dado por

$$U_{CS}(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (1.44)$$

a partir da qual notamos ser λ uma constante de acoplamento adimensional.

Via (1.44), verifica-se ser a eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs possuidora de dois vácuos distintos: o primeiro, um vácuo simétrico, ocorre quando $|\phi| = 0$ ($U_{CS}(|\phi| = 0) = 0$); já o segundo, um vácuo assimétrico, ocorre para $|\phi| = v$ ($U_{CS}(|\phi| = v) = 0$). Neste caso, como no anterior, apenas o vácuo assimétrico engendra a formação de configurações topológicas (i.e., caracterizadas por $Q_T \neq 0$).

Implementemos as transformações de escala apresentadas anteriormente, definidas a partir do parâmetro de massa M . Além destas, implementemos também $k \rightarrow Mk$. Neste caso, resulta $\mathcal{L}_{CS} \rightarrow M^3\mathcal{L}$, na qual \mathcal{L} é uma densidade de lagrangeana completamente adimensional, com a mesma forma funcional de \mathcal{L}_{CS} . Como resultado, o modelo (1.43) passa a ser descrito por \mathcal{L} , e não mais por \mathcal{L}_{CS} .

As equações de Euler-Lagrange são

$$\frac{k}{2} \epsilon^{\rho\mu\alpha} F_{\mu\alpha} = J^\rho, \quad (1.45)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu |\phi| - e^2 A_\mu A^\mu |\phi| = -\frac{1}{2} \frac{dU_{CS}}{d|\phi|}, \quad (1.46)$$

nas quais o 4-vetor densidade de corrente J^ρ é dado por (1.5).

Agora, consideremos a lei de Gauss própria à (1.43) (supondo campos independentes do tempo)

$$kB = 2e^2 |\phi|^2 A^0, \quad (1.47)$$

a partir da qual notamos não ser mais possível a escolha do gauge temporal, dado este não mais satisfazer a própria lei de Gauss. Portanto, no presente caso, soluções estáticas exibirão não somente campo magnético não-nulo, mas também campo elétrico não-nulo. De fato, a impossibilidade de escolhermos o gauge temporal é uma característica geral aos modelos de Chern-Simons.

Por se tratarem de estruturas planares possuidoras de simetria rotacional, vórtices estáticos são sempre descritos por (1.7) e (1.8). Portanto, (1.45) e (1.46) podem ser reescritas na forma

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - 2g^{-1} \frac{da}{dr} \frac{dg}{dr} = \frac{4v^4 e^4}{k^2} g^4 a, \quad (1.48)$$

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2g}{r^2} = -\frac{2k^2g^{-3}}{8v^4e^4} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2v^2} \frac{dU_{CS}}{dg}, \quad (1.49)$$

nas quais implementamos também a lei de Gauss (1.47).

As equações (1.48) e (1.49) são as equações de Euler-Lagrange para as funções estáticas $g(r)$ e $a(r)$. Resolvidas estas equações, os campos $\phi(r, \theta)$ e $\mathbf{A}(r, \theta)$ são obtidos conforme (1.7) e (1.8). A partir destes campos, podemos obter também os campos magnético $B(r)$ (dado por (1.11)), o campo $A^0(r)$ (via (1.47)) e, finalmente, o campo elétrico $E(r) = -d_r A^0$.

No entanto, antes de resolvermos (1.9) e (1.10), devemos especificar condições de contorno satisfeitas por $g(r)$ e $a(r)$. Novamente, estas funções devem engendrar configurações estáticas livres de quaisquer divergências. Portanto, $g(r)$ e $a(r)$ devem, também neste caso, satisfazer (1.12). Além disso, como no caso anterior, tais configurações devem possuir energia total finita. Logo, consideremos o tensor de energia-momento referente à densidade de lagrangeana (1.43). Este tensor é dado por

$$T_{\lambda\rho} = 2 \left(\partial_\lambda |\phi| \partial_\rho |\phi| + e^2 A_\lambda A_\rho |\phi|^2 \right) - \eta_{\lambda\rho} \mathcal{L}_{ntop}, \quad (1.50)$$

onde

$$\mathcal{L}_{ntop} = X - U_{CS}(|\phi|), \quad (1.51)$$

com $U_{CS}(|\phi|)$ dado por (1.44). Logo, a densidade de energia pode ser escrita na forma (já a partir de (1.7) e (1.8))

$$\varepsilon(r) = \frac{k^2}{4v^2e^4} \left(\frac{1}{rg} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda^2v^6}{4} g^2 (g^2 - 1)^2. \quad (1.52)$$

Também neste caso, (1.52) resultará em uma energia total finita quando satisfizer $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Para isto, $g(r)$ e $a(r)$ devem, também neste caso, satisfazer (1.15).

A partir de (1.12) e (1.15), vórtices estáticos são obtidos via a resolução numérica de (1.48) e (1.49). Porém, como antes, ao invés de lidarmos diretamente com estas equações de segunda ordem, busquemos pelas equações BPS relacionadas à eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs (1.43). Originalmente, estas equações foram obtidas, separadamente, por Jackiw e Weinberg [12], e por Hong, Kim e Pac [13].

O limite de Bogomol'nyi da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs é definido por $\lambda^2 = 4e^4/k^2$. Neste limite, a densidade de energia (1.52) pode ser reescrita como

$$\varepsilon(r) = \frac{k^2}{4v^2e^4} \left(\frac{1}{rg} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2g^2}{r^2} \right) + \frac{e^4v^6}{k^2} g^2 (g^2 - 1)^2. \quad (1.53)$$

ou

$$\varepsilon(r) = \frac{k^2}{4v^2e^2g^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{2e^3v^4}{k^2} g^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2 \mp \frac{v^2}{r} \frac{da}{dr} \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (g^2 a). \quad (1.54)$$

Portanto, a energia total E resulta

$$E = \int \left[\frac{k^2}{4v^2e^2g^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{2e^3v^4}{k^2} g^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2r \geq E_{bps}, \quad (1.55)$$

onde

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2r, \quad (1.56)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{v^2}{r} \frac{da}{dr} \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (g^2 a). \quad (1.57)$$

Logo, quando as funções $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm \frac{2e^4v^4}{k^2} g^2 (g^2 - 1), \quad (1.58)$$

e

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (1.59)$$

a configuração estática exibirá uma energia total mínima, $E = E_{bps}$, dada por (1.56).

As equações (1.58) e (1.59) são as equações BPS relacionadas à eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs (1.43). Naturalmente, através da manipulação destas equações, é possível obtermos as equações de Euler-Lagrange (1.48) e (1.49). Desta forma, os estados BPS (i.e., as soluções obtidas via (1.58) e (1.59)) são soluções de (1.48) e (1.49), e, por conseguinte, soluções legítimas de (1.43). Tais estados representam configurações estáticas possuidoras de uma energia total mínima, $E = E_{bps}$, dada por (1.56), e cujo valor pode ser calculado a partir das condições de contorno (1.12) e (1.15). Este cálculo resulta

$$E_{bps} = 2\pi \int r \varepsilon_{bps} dr = 2\pi v^2 |n|, \quad (1.60)$$

onde ε_{bps} é dada por (1.57), e n é a vorticidade da configuração em questão. Portanto, também neste caso, o valor da energia total mínima E_{bps} resulta quantizado. É interessante o fato de ser este valor exatamente igual ao obtido no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs (1.1); ver (1.25). Por conseguinte, configurações BPS obtidas a partir

da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs possuem a mesma energia total daquelas obtidas a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs (supondo possuírem também a mesma vorticidade).

As equações (1.58) e (1.59) descrevem configurações BPS topológicas, i.e., possuidoras de uma carga topológica Q_T não-nula, para as quais, como já sabemos, deve valer $E = E_{bps} \propto Q_T$. Novamente, utilizemos a densidade de corrente topológica (1.38), a partir da qual resulta a densidade de carga topológica (1.39). Desta forma, dado serem as condições de contorno as mesmas do caso anterior, a carga topológica Q_T resulta igual à dada por (1.40). Logo, a energia total das configurações BPS obtidas a partir de (1.58) e (1.59) pode ser reescrita como

$$E_{bps} = ev^2 |Q_T|, \quad (1.61)$$

exatamente como no caso anterior.

Abaixo, apresentamos as soluções numéricas obtidas a partir de (1.58) e (1.59), conforme (1.12) e (1.15), para diferentes valores de n . Também neste caso, usamos $e = v = 1$, além de $k = 1$. Como antes, constam também soluções para o campo magnético $B(r)$ (dado por (1.11)), para o campo elétrico $E(r) = -d_r A^0$, e para a densidade de energia ε_{bps} (neste caso, dada por (1.57)).

1.4 Soluções numéricas: Chern-Simons-Higgs.

Abaixo, constam algumas soluções numéricas obtida a partir de (1.58) e (1.59). Também neste caso, tais soluções satisfazem as condições de contorno (1.12) e (1.15). Novamente, a curva preta sólida representa a configuração com vorticidade $n = 1$, a curva azul ponto-tracejada representa a configuração com vorticidade $n = 3$ e a curva vermelha tracejada representa a configuração com vorticidade $n = 5$. Por simplicidade, implementou-se $e = v = 1$, além de $k = 1$.

A Figura 1.5 mostra as soluções para $a(r)$. Como antes, este campo atinge seu valor máximo (igual à n) quando $r = 0$, a partir do qual $a(r)$ decresce monotonicamente, tornando-se nula no limite $r \rightarrow \infty$.

A Figura 1.6 mostra as soluções numéricas obtidas para $g(r)$. Novamente, os valores máximo e mínimo engendrados por este campo não dependem da vorticidade n . Para,

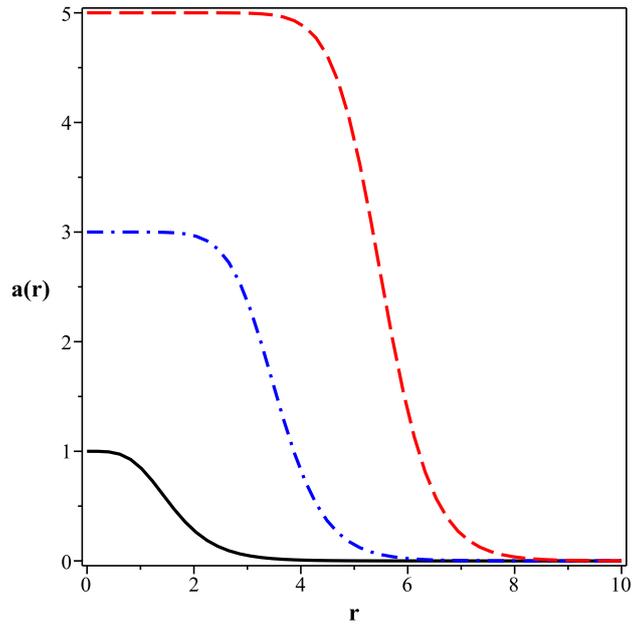


Figura 1.5: Soluções numéricas para $a(r)$, para $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 3$ (curva azul ponto-tracejada) e $n = 5$ (curva vermelha tracejada).

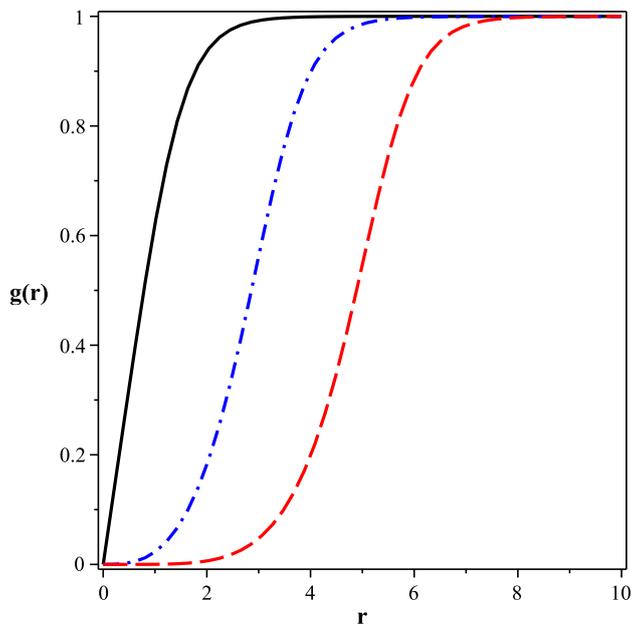


Figura 1.6: Soluções numéricas para $g(r)$. Convenções conforme a Fig.1.5.

$r = 0$, a função $g(r)$ engendra valor nulo. A partir disto, ela cresce monotonicamente ao seu valor máximo. Como antes, as soluções de maior vorticidade possuem os maiores comprimentos característicos.

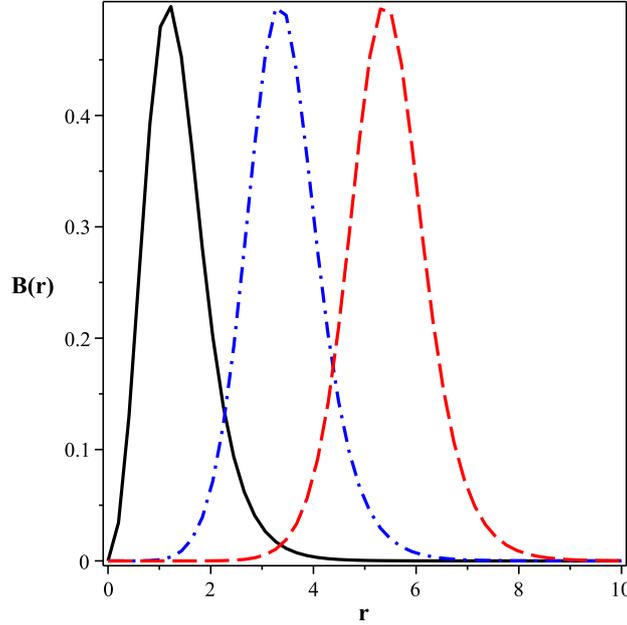


Figura 1.7: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.1.5.

As soluções obtidas para o campo magnético $B(r)$ são mostradas na Figura 1.7. Em geral, este campo engendra seu valor máximo para $r = R$, onde R é algum valor finito, o "raio" da solução. Assim, configurações de maior vorticidade possuem os maiores raios. Por outro lado, os respectivos valores máximos parecem não depender de n . Em todos os casos, $B(r = 0) = 0$ e $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

A Figura 1.8 exhibe soluções para o campo elétrico $E(r) = -d_r A^0$. Assim como $B(r)$, $E(r)$ atinge seu valor máximo quando $r = R$, sendo o raio R de uma dada configuração tão maior quanto maior o valor da vorticidade desta mesma configuração. Agora, porém, os respectivos valores máximos parecem depender do valor de n . Novamente, em todos os casos, ocorre $E(r = 0) = 0$ e $E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Finalmente, as soluções numéricas para a densidade de energia ε_{bps} (dada por (1.57)) são mostradas na Figura 1.9. Em todos os casos, ε_{bps} atinge seu valor máximo para $r = R$, sendo as soluções de maior vorticidade possuidoras dos maiores raios. Para $n = 1$, $\varepsilon_{bps}(r = 0)$ assume valor não-nulo. Contudo, $\varepsilon_{bps}(r = 0, n = 3) = \varepsilon_{bps}(r = 0, n = 5) = 0$.

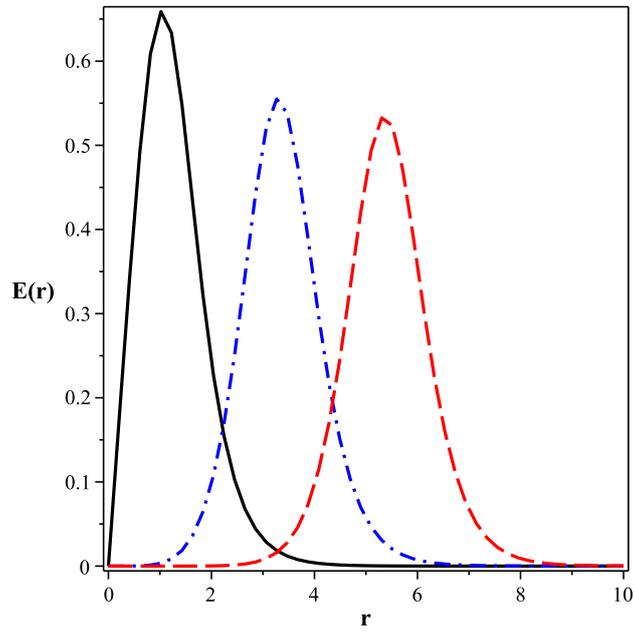


Figura 1.8: Soluções numéricas para $E(r)$. Convenções conforme a Fig.1.5.

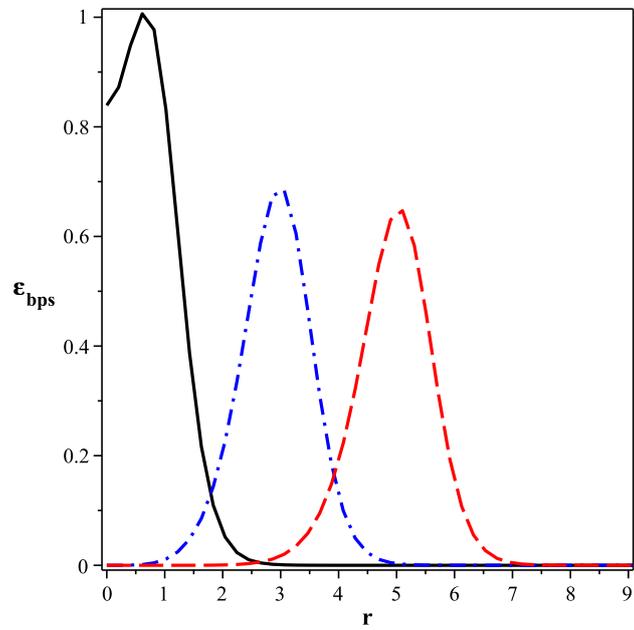


Figura 1.9: Soluções numéricas para ε_{bps} . Convenções conforme a Fig.1.5.

1.5 Vórtices BPS: Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

A obtenção de vórtices estáticos via equações BPS é factível mesmo na presença simultânea dos termos de Maxwell, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, e de Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}$. Neste caso, além do campo de Higgs $\phi(x^\mu)$, é necessária a introdução de um outro campo escalar, agora real, $N(x^\mu)$. A densidade de lagrangeana resultante é

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{k}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho} + X + \frac{1}{2}\partial_\mu N \partial^\mu N - U_{MCS}(|\phi|, N), \quad (1.62)$$

na qual, novamente, $F_{\mu\nu}$, X e $D_\mu\phi$ são definidos como antes. Agora, o potencial $U_{MCS}(|\phi|, N)$ depende não apenas do campo escalar complexo $\phi(x^\mu)$, mas também de $N(x^\mu)$. Este potencial é dado por

$$U_{MCS}(|\phi|, N) = \frac{1}{2}(e|\phi|^2 + kN - ev^2)^2 + e^2N^2|\phi|^2, \quad (1.63)$$

a partir do qual notamos ser a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCS-Higgs) (1.62) possuidora de dois vácuos distintos: o vácuo simétrico ocorre para $|\phi| = 0$ e $N = ev^2/k$ ($U_{MCS}(|\phi| = 0, N = ev^2/k) = 0$), e o vácuo assimétrico ocorre para $|\phi| = v$ e $N = 0$ ($U_{MCS}(|\phi| = v, N = 0) = 0$). Também neste caso, apenas o vácuo assimétrico engendra a formação de configurações topológicas estáticas ($Q_T \neq 0$).

Implementemos as transformações de escala definidas anteriormente. Além destas, utilizemos $N \rightarrow M^{1/2}N$. Neste caso, resulta $\mathcal{L}_{MCS} \rightarrow M^3\mathcal{L}$, sendo \mathcal{L} uma densidade de lagrangeana completamente adimensional, com a mesma forma funcional de \mathcal{L}_{MCS} .

As equações de Euler-Lagrange adimensionais são

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} - \frac{k}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}F_{\mu\nu} = J^\rho, \quad (1.64)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu |\phi| - e^2 A_\mu A^\mu |\phi| = -\frac{1}{2} \frac{\partial U_{MCS}}{\partial |\phi|}, \quad (1.65)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu N = -\frac{\partial U_{MCS}}{\partial N}, \quad (1.66)$$

a partir das quais emerge a lei de Gauss para campos estáticos

$$\partial_j \partial^j A^0 + 2e^2 |\phi|^2 A^0 = -kB. \quad (1.67)$$

Novamente, por conta da presença do termo de Chern-Simons em (1.62), notamos não ser possível a implementação do gauge temporal. Portanto, também neste caso, configurações estáticas possuirão campos elétrico e magnético não-nulos.

Agora, no intuito de descrevermos os campos $\phi(x^\mu)$ e $A(x^\mu)$, usemos os *Ansatz* (1.7) e (1.8). Além destes, implementemos

$$N(r, \theta) = \mp A^0(r). \quad (1.68)$$

Neste caso, (1.64), (1.65) e (1.66) podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 A^0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA^0}{dr} = 2e^2 v^2 g^2 A^0 \mp \frac{k}{er} \frac{da}{dr}, \quad (1.69)$$

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} = 2e^2 v^2 g^2 a \pm ekr \frac{dA^0}{dr}, \quad (1.70)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2 g}{r^2} = eg (\mp k A^0 + v^2 e (g^2 - 1)), \quad (1.71)$$

onde

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm (\mp k A^0 + v^2 e (g^2 - 1)). \quad (1.72)$$

Neste caso, dado o *Ansatz* (1.68), a coerência entre (1.66) e (1.67) é preservada pelo vínculo (1.72). Além disso, como veremos, este vínculo emerge naturalmente como uma das equações BPS próprias à (1.62).

Também neste caso, $g(r)$ e $a(r)$ devem satisfazer (1.12) e (1.15). Além disso, $A^0(r)$ deve satisfazer

$$A'_0(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad A^0(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (1.73)$$

onde $A'_0 = dA^0/dr$.

Finalmente, (1.69), (1.70) e (1.71) podem ser solucionadas via (1.12), (1.15) e (1.73). Porém, como antes, investiguemos a existência de estados BPS próprios à (1.62). Para isso, consideremos o tensor de energia-momento. Este tensor é dado por

$$T_{\lambda\rho} = -F_{\lambda\mu} F_\rho{}^\mu + 2 (\partial_\lambda |\phi| \partial_\rho |\phi| + e^2 A_\lambda A_\rho |\phi|^2) + \partial_\lambda N \partial_\rho N - \eta_{\lambda\rho} \mathcal{L}_n, \quad (1.74)$$

onde

$$\mathcal{L}_n = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + X + \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N - U_{MCS}(|\phi|, N). \quad (1.75)$$

A densidade de energia, já escrita a partir de (1.7) e (1.8), resulta

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dA^0}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dN}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) + e^2 v^2 A_0^2 g^2 + U. \quad (1.76)$$

Agora, a partir de (1.68), notamos ser possível reescrever (1.76) como

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp (\mp k A^0 + v^2 e (g^2 - 1)) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2$$

$$\mp \frac{v^2 da}{r dr} \pm \frac{v^2 d}{r dr} (g^2 a) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r A^0 \frac{dA^0}{dr} \right), \quad (1.77)$$

na qual utilizamos também a lei de Gauss (1.69). Desta forma, a energia total E resulta

$$E = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp (\mp k A^0 + v^2 e (g^2 - 1)) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ag}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2 r \geq E_{bps}, \quad (1.78)$$

onde

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2 r, \quad (1.79)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{v^2 da}{r dr} \pm \frac{v^2 d}{r dr} (g^2 a) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r A^0 \frac{dA^0}{dr} \right). \quad (1.80)$$

Portanto, quando $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm (\mp k A^0 + v^2 e (g^2 - 1)), \quad (1.81)$$

e

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (1.82)$$

a configuração estática resultante possuirá uma energia total mínima, $E = E_{bps}$, dada por (1.79).

As equações (1.81) e (1.82) são as equações BPS próprias à eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (1.62) [14,15]. Neste caso, os estados BPS são obtidos via a resolução numérica simultânea destas equações e da lei de Gauss (1.69). Como em todos os casos anteriores, tais estados, além de serem também soluções das respectivas equações de Euler-Lagrange, engendram soluções possuidoras de uma energia total mínima E_{bps} dada por (conforme as condições de contorno (1.12), (1.15) e (1.73))

$$E_{bps} = 2\pi \int r \varepsilon_{bps} dr = 2\pi v^2 |n|, \quad (1.83)$$

onde ε_{bps} é dada por (1.80). O valor desta energia mínima, além de quantizado e igual aos obtidos nos contextos anteriores, pode ainda ser relacionado à carga topológica Q_T

$$E_{bps} = ev^2 |Q_T|, \quad (1.84)$$

exatamente como nos casos já discutidos.

Abaixo, constam algumas soluções numéricas obtidas a partir de (1.69), (1.81) e (1.82), para diferentes valores de n , conforme (1.12), (1.15) e (1.73). Constam também soluções para o campo magnético $B(r)$, para o campo elétrico $E(r)$ e para a densidade de energia ε_{bps} . Como antes, usamos $e = v = k = 1$.

1.6 Soluções numéricas: Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

Abaixo, apresentamos as soluções obtidas via (1.69), (1.81) e (1.82), para diferentes valores de n , conforme (1.12), (1.15) e (1.73). Também neste caso, a configuração com vorticidade $n = 1$ é descrita pela curva preta sólida, a configuração com vorticidade $n = 3$ é representada pela curva azul ponto-tracejada, e a configuração com vorticidade $n = 5$ é representada pela curva vermelha tracejada. Constam também as respectivas soluções para os campos elétrico e magnético, e para a densidade de energia ε_{bps} . Por simplicidade, implementamos $e = v = k = 1$.

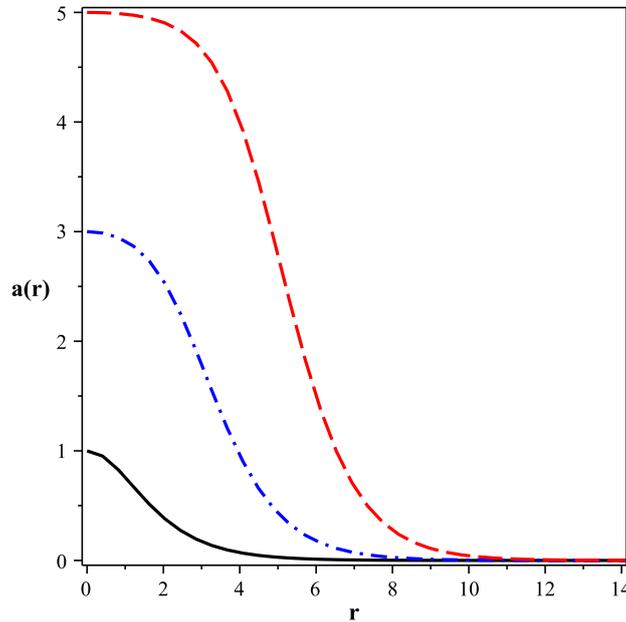


Figura 1.10: Soluções numéricas para $a(r)$, para $n = 1$ (curva preta sólida), $n = 3$ (curva azul ponto-tracejada) e $n = 5$ (curva vermelha tracejada).

A figuras 1.10 e 1.11 mostram as soluções numéricas obtidas para $a(r)$ e $g(r)$, respectivamente. Estas soluções exibem as mesmas características gerais já discutidas anteriormente. Passemos, portanto, às próximas figuras.

A Figura 1.12 mostra soluções para o campo magnético $B(r)$. Neste caso, nota-se a ocorrência de um comportamento peculiar, quase dúbio: para $n = 1$, o campo $B(r)$ se comporta como o observado no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs: para $r = 0$, $B(r)$ atinge seu valor máximo, a partir do qual decresce monotonicamente, tornando-se nulo no limite $r \rightarrow \infty$; por outro lado, para $n = 3$ e $n = 5$, o campo magnético se comporta como aquele obtido no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs:

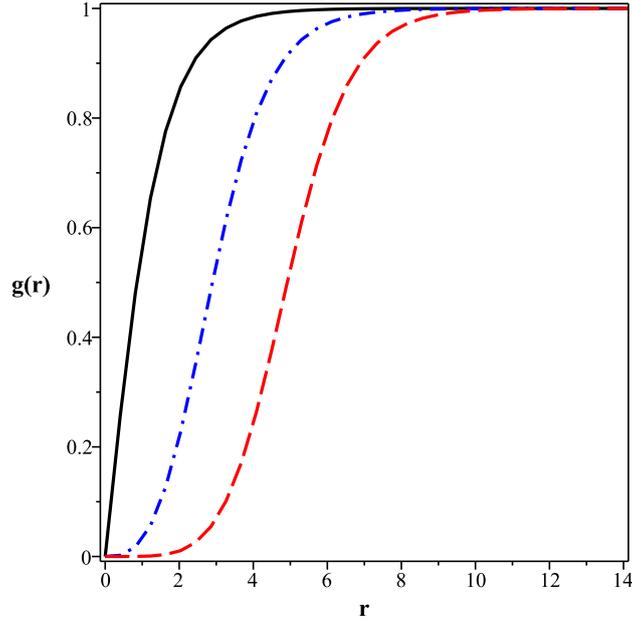


Figura 1.11: Soluções numéricas para $g(r)$. Convenções conforme a Fig.1.10.

engendra valor máximo para $r = R$, enquanto $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

As soluções numéricas obtidas para o campo elétrico $E(r)$ são mostradas na Figura 1.13. Em geral, estas soluções exibem as mesmas características gerais já observadas no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs. Porém, vale uma ressalva: ao contrário do caso anterior, no qual as soluções de maior vorticidade engendram os menores valores máximos, no presente caso, as configurações de maior vorticidade engendram as maiores amplitudes. Contudo, em ambos os casos, as soluções de maior vorticidade possuem os maiores raios.

A Figura 1.14 exhibe as soluções para a densidade de energia ε_{bps} . As soluções obtidas possuem o mesmo comportamento engendrado pelo campo magnético: para $r = 0$, ε_{bps} atinge um valor máximo, a partir do qual decresce monotonicamente, anulando-se para $r \rightarrow \infty$; para $n = 3$ e $n = 5$, as respectivas soluções engendram seus valores máximos para $r = R$, com $\varepsilon_{bps}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

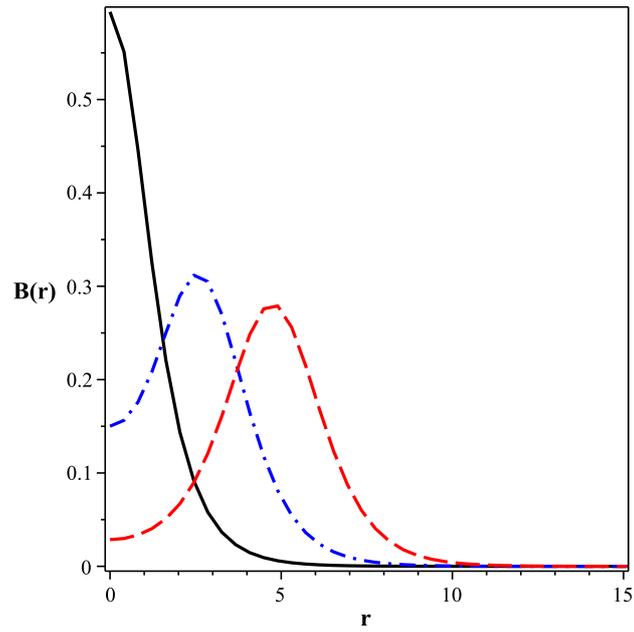


Figura 1.12: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.1.10.

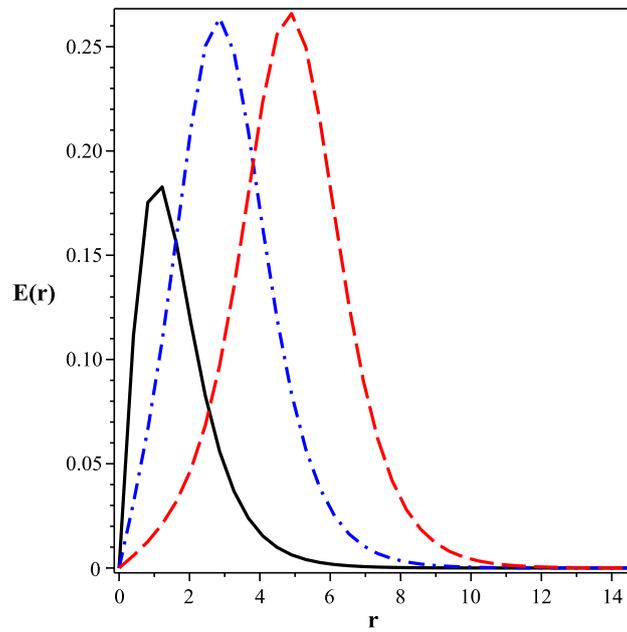


Figura 1.13: Soluções numéricas para $E(r)$. Convenções conforme a Fig.1.10.

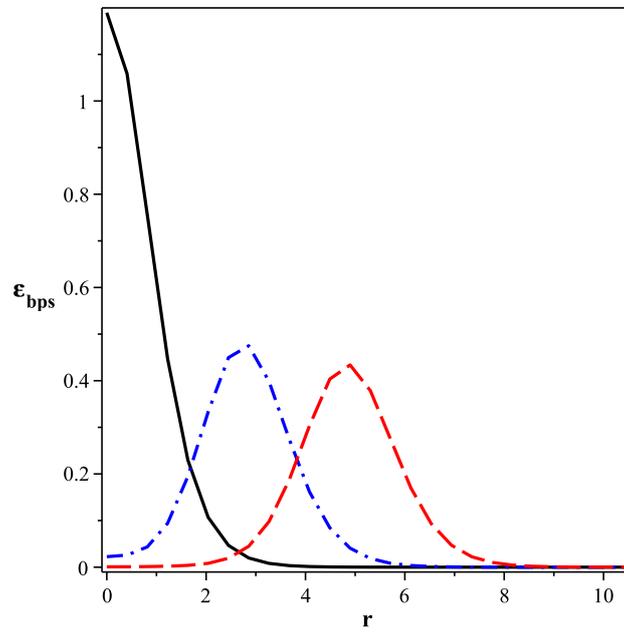


Figura 1.14: Soluções numéricas para ε_{bps} . Convenções conforme a Fig.1.10.

Capítulo 2

Vórtices generalizados I.

Neste Capítulo, apresentamos um primeiro modelo generalizado. Este modelo é obtido a partir de uma alteração imposta sobre a densidade de lagrangeana (1.1) [24]. Neste caso, infelizmente, tal alteração não permite a ocorrência de equações BPS. Ainda assim, vórtices estáticos podem ser obtidos a partir da resolução numérica das respectivas equações de Euler-Lagrange. Para tanto, usaremos as condições de contorno (1.12) e (1.15), dado serem tais condições válidas também no contexto generalizado.

2.1 Modelo generalizado I.

Apresentemos um primeiro modelo generalizado. Ele é descrito pela densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_k = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + K(X) - U(|\phi|), \quad (2.1)$$

na qual $F_{\mu\nu}$, X e $D_\mu\phi$ são definidos como nos casos anteriores. Aqui, $K(X)$ é uma função arbitrária de $X \equiv |D_\mu\phi|^2$, para a qual vale $\dim K = 3$. Além disso, o potencial $U(|\phi|)$ também é suposto arbitrário.

Como antes, introduzimos o parâmetro de massa M próprio do modelo generalizado (2.1), a partir do qual implementemos as transformações de escala: $x^\mu \rightarrow M^{-1}x^\mu$, $\phi \rightarrow M^{1/2}\phi$, $A^\mu \rightarrow M^{1/2}A^\mu$ e $e \rightarrow M^{1/2}e$. Assim, obtemos $U \rightarrow M^3U$, $K \rightarrow M^3K$ e $\mathcal{L}_k \rightarrow M^3\mathcal{L}$, sendo \mathcal{L} uma densidade de lagrangeana completamente adimensional.

As soluções estáticas são obtidas a partir das respectivas equações de Euler-Lagrange generalizadas. Tais equações são

$$\partial_\alpha F^{\mu\alpha} = J^\mu, \quad (2.2)$$

$$K_X D_\mu D^\mu \phi + K_{XX} D_\mu \phi \partial^\mu X = -\frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (2.3)$$

nas quais

$$J_\mu = ie (\phi \overline{D_\mu \phi} - \overline{\phi} D_\mu \phi) K_X \quad (2.4)$$

é o 4-vetor densidade de corrente generalizado. Aqui, $K_X = dK/dX$ e $K_{XX} = d^2K/dX^2$. Em geral, tais equações são válidas para quaisquer funções $K(X)$ e $U(|\phi|)$.

Antes de continuarmos, escrevemos a lei de Gauss generalizada (supondo campos estáticos)

$$\nabla^2 A^0 = 2e^2 |\phi|^2 A^0 K_X, \quad (2.5)$$

a partir da qual notamos ser possível, também no caso generalizado, a implementação do gauge temporal $A^0 = 0$. Portanto, apesar da generalização introduzida via a função $K(X)$, também as configurações estáticas generalizadas, como as usuais, serão caracterizadas pela ausência de campo elétrico.

A partir de agora, buscamos por configurações generalizadas estáticas possuidoras de simetria rotacional. Para tanto, utilizemos os *Ansatz* usuais (1.7) e (1.8). Além disto, suponhamos um modelo definido por

$$K(X) = X - \alpha X^2, \quad (2.6)$$

e

$$U(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} \left(1 + \frac{3\beta}{2}\right) (|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (2.7)$$

Aqui, α e β são constantes reais, não-negativas e adimensionais. Neste caso, as equações de Euler-Lagrange (2.2) e (2.3) podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - 4\alpha e^2 v^4 G_1(g, a) = 2e^2 v^2 g^2 a, \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2 g}{r^2} + 2\alpha v^2 G_2(g, a) = \frac{\lambda^2 v^2}{2} \left(1 + \frac{3\beta}{2}\right) (g^3 - g), \quad (2.9)$$

nas quais $G_1(g, a)$ e $G_2(g, a)$ são dadas por

$$G_1(g, a) = g^2 a \left(\frac{dg}{dr}\right)^2 + \frac{g^4 a^3}{r^2}, \quad (2.10)$$

$$G_2(g, a) = \frac{1}{r} \left(\frac{dg}{dr} \right)^3 + 3 \left(\frac{dg}{dr} \right)^2 \frac{d^2g}{dr^2} + \frac{g^2 a^2}{r^2} \frac{d^2g}{dr^2} + \frac{ag}{r^2} \frac{dg}{dr} \left(a \frac{dg}{dr} + 2g \frac{da}{dr} - \frac{ga}{r} \right) - \frac{g^3 a^4}{r^4}. \quad (2.11)$$

As equações (2.8) e (2.9) são as equações de Euler-Lagrange para as funções $g(r)$ e $a(r)$. Para $\alpha = \beta = 0$, estas equações resultam em (1.9) e (1.10), i.e., a teoria generalizada (2.6)-(2.7) resulta na usual (1.1)-(1.2). Por outro lado, para qualquer α não-nulo, além da não-linearidade introduzida pelo potencial $U(|\phi|)$ (2.7) (presente mesmo para $\beta = 0$), também estarão presentes aquelas causadas pelas funções $G_1(g, a)$ e $G_2(g, a)$, ambas extremamente não-lineares; ver (2.10) e (2.11). Neste caso, mesmo a resolução numérica das equações (2.8)-(2.9) constitui tarefa difícil, e a obtenção de equações BPS generalizadas seria de grande utilidade. Porém, como afirmamos abaixo, a obtenção de equações BPS próprias ao modelo (2.6)-(2.7) não é possível.

Agora, no intuito de resolvermos (2.8) e (2.9), busquemos as condições de contorno satisfeitas pelos campos $g(r)$ e $a(r)$. Como antes, tais condições devem evitar configurações possuidoras de quaisquer divergências. Portanto, para $r = 0$ e dados (1.7) e (1.8), $g(r)$ e $a(r)$ devem, também no caso generalizado, satisfazer (1.12). Além disso, como nos casos anteriores, as configurações generalizadas resultantes devem possuir energia total finita. Assim, consideremos o tensor de energia-momento generalizado. Ele é dado por (expressão válida para qualquer $K(X)$)

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} + 2K_X \overline{D_{\mu}\phi} D_{\nu}\phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.12)$$

a partir da qual calculamos a densidade de energia generalizada

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) \\ & + \alpha v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right)^2 + \frac{\lambda^2 v^4}{4} \left(1 + \frac{3\beta}{2} \right) (g^2 - 1)^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

já reescrita a partir de (1.7), (1.8), (2.6) e (2.7). Agora, devemos implementar $\varepsilon(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Assim, as funções $g(r)$ e $a(r)$ devem, também no caso generalizado, satisfazer as condições de contorno dadas por (1.15). Em suma, mesmo na presença da generalização introduzida via a função $K(X)$, as funções $g(r)$ e $a(r)$ devem satisfazer exatamente as mesmas condições de contorno obtidas no contexto da teoria usual.

Finalmente, a partir da densidade de energia generalizada (2.13), verifica-se não ser possível a obtenção de equações BPS e, por conseguinte, de estados BPS generalizados

próprios ao modelo (2.6)-(2.7). Portanto, precisaremos lidar diretamente com as equações (2.8) e (2.9). Abaixo, constam algumas soluções numéricas para $g(r)$ e $a(r)$ obtidas a partir de (2.8) e (2.9). Além destas, constam também soluções para o campos magnético $B(r)$ e densidade de energia ε (2.13). Todas as soluções satisfazem as condições de contorno (1.12) e (1.15).

2.2 Soluções numéricas I.

A partir de agora, apresentamos algumas soluções para as funções $g(r)$ e $a(r)$. Tais soluções foram obtidas a partir do tratamento numérico das equações de Euler-Lagrange generalizadas (2.8) e (2.9). Para tanto, utilizamos as condições de contorno (1.12) e (1.15), e diferentes valores para α e β . Além disso, implementemos $e = v = n = 1$ e $\lambda^2 = 2$. Neste caso, (2.8) e (2.9) resultam

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - 4\alpha G_1(g, a) = 2g^2 a, \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2 g}{r^2} + 2\alpha G_2(g, a) = \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right) (g^3 - g). \quad (2.15)$$

Além das soluções para $g(r)$ e $a(r)$, constam também as soluções para a densidade de energia (2.13)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dr}\right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} + \alpha \left(\left(\frac{dg}{dr}\right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\beta}{2}\right) (g^2 - 1)^2, \quad (2.16)$$

e para o campo magnético $B(r)$

$$B(r) = -\frac{1}{r} \frac{da}{dr}. \quad (2.17)$$

Por enquanto, façamos, por simplicidade $\beta = 0$. Neste caso, a convenção utilizada é: a curva preta sólida representa as configurações para as quais $\alpha = 0$ (caso usual), a curva azul ponto-tracejada representa as configurações para as quais $\alpha = 10$ e a curva vermelha tracejada representa as configurações para as quais $\alpha = 40$.

A Figura 2.1 mostra soluções numéricas para $a(r)$. Em todos os casos, esta função engendra seu valor máximo para $r = 0$, a partir do qual $a(r)$ decresce monotonicamente, tornando-se nula para $r \rightarrow \infty$. Em particular, quanto maior o valor de α , menor o comprimento característico da solução resultante.

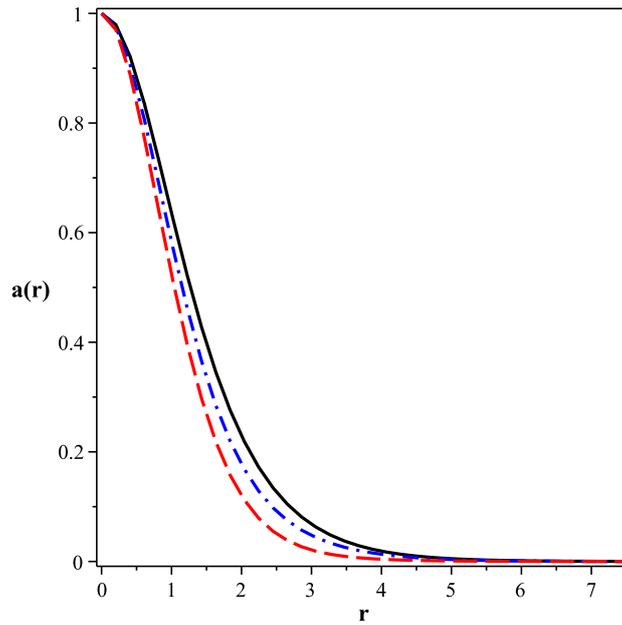


Figura 2.1: Soluções numéricas para $a(r)$, para $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ (caso usual, curva preta sólida), $\beta = 0$ e $\alpha = 10$ (curva azul ponto-tracejada), e $\beta = 0$ e $\alpha = 40$ (curva vermelha tracejada).

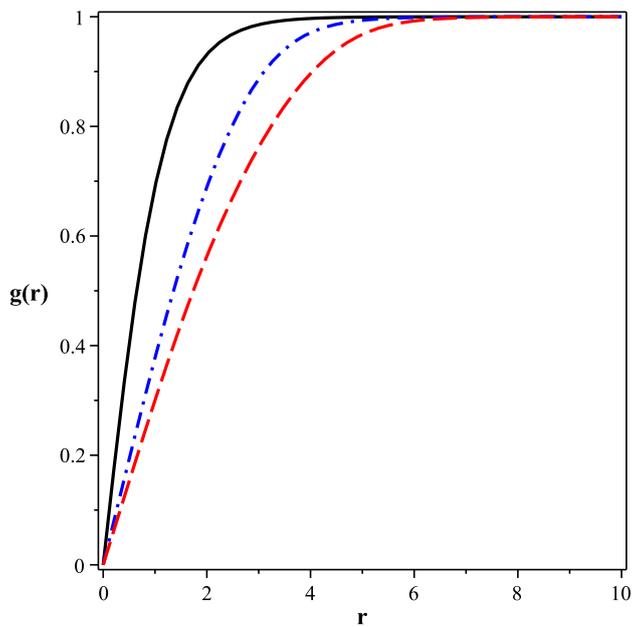


Figura 2.2: Soluções numéricas para $g(r)$. Convenções conforme a Fig.2.1.

A Figura 2.2 mostra as soluções para $g(r)$. Novamente, todas as soluções engendram as mesmas características gerais. Porém, ao contrário das soluções para $a(r)$, os maiores valores de α correspondem aos maiores comprimentos característicos.

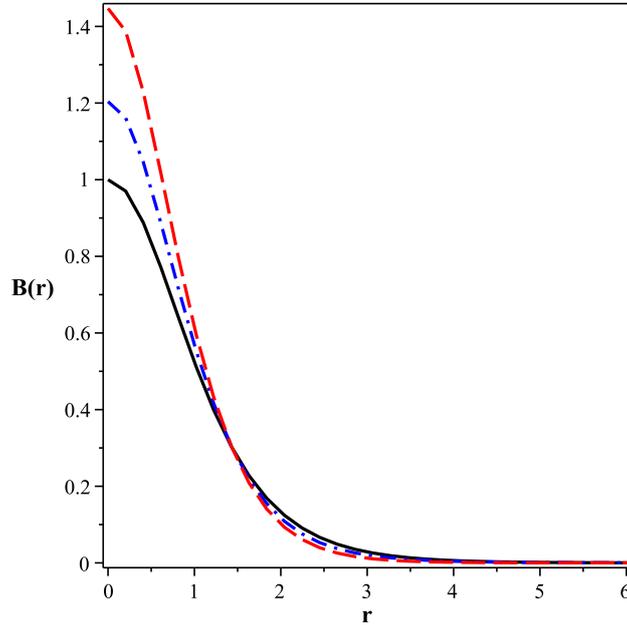


Figura 2.3: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.2.1.

As soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ são mostradas na Figura 2.3. Neste caso, além de variações nos comprimentos característicos, ocorrem também variações nos valores máximos das soluções: quanto maior o valor de α para uma dada solução, tanto maior a amplitude, mas tanto menor o comprimento característico desta mesma solução. Ainda assim, todas as soluções exibem o mesmo comportamento: para $r = 0$, todas elas atingem seus respectivos valores máximos, a partir do qual decrescem monotonicamente, satisfazendo $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

A Figura 2.4 mostra as soluções numéricas para a densidade de energia $\varepsilon(r)$. Independente do valor de α , todas elas engendram um mesmo comportamento, já enunciado no parágrafo anterior. Também neste caso, ocorrem variações não só nas amplitudes, mas também nos comprimentos característicos destas soluções.

Na verdade, para qualquer valor fixo do parâmetro real β (e não só para $\beta = 0$), a amplitude e o comprimento característico das soluções para $a(r)$, $g(r)$, $B(r)$ e $\varepsilon(r)$ dependem do valor de α exatamente da mesma maneira. Ver figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8. Para $\beta = 10$, por exemplo, e considerando a solução para $a(r)$, os maiores valores de α engendram os menores comprimentos característicos, exatamente como na Figura 2.1,

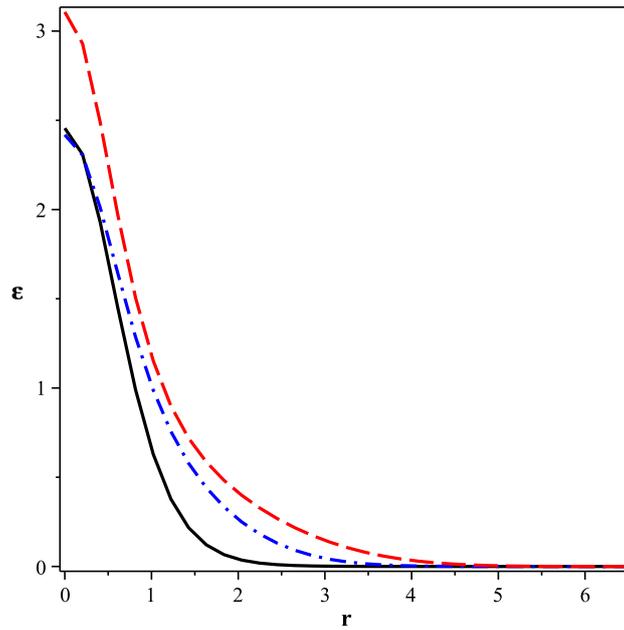


Figura 2.4: Soluções numéricas para $\varepsilon(r)$. Convenções conforme a Fig.2.1.

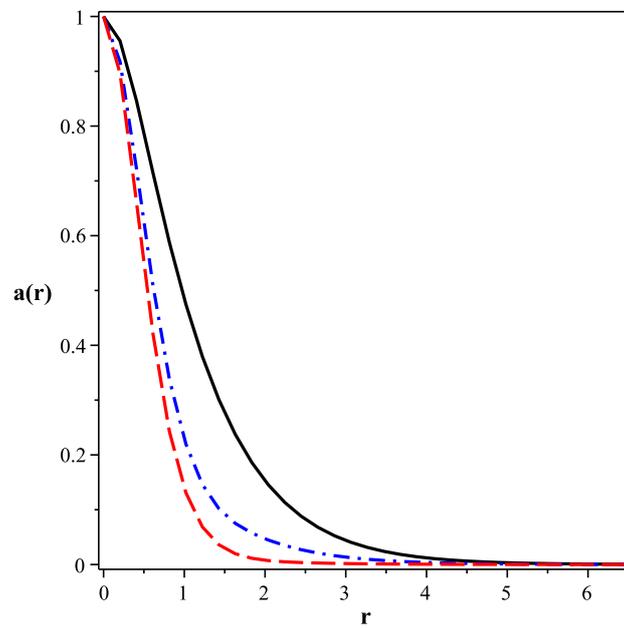


Figura 2.5: Soluções numéricas para $a(r)$, para $\beta = 10$ e $\alpha = 0$ (curva preta sólida), $\beta = 10$ e $\alpha = 10$ (curva azul ponto-tracejada), e $\beta = 10$ e $\alpha = 40$ (curva vermelha tracejada).

obtida para $\beta = 0$. Agora, contudo, os valores máximos atingidos por $B(r)$ e $\varepsilon(r)$ são consideravelmente maiores.

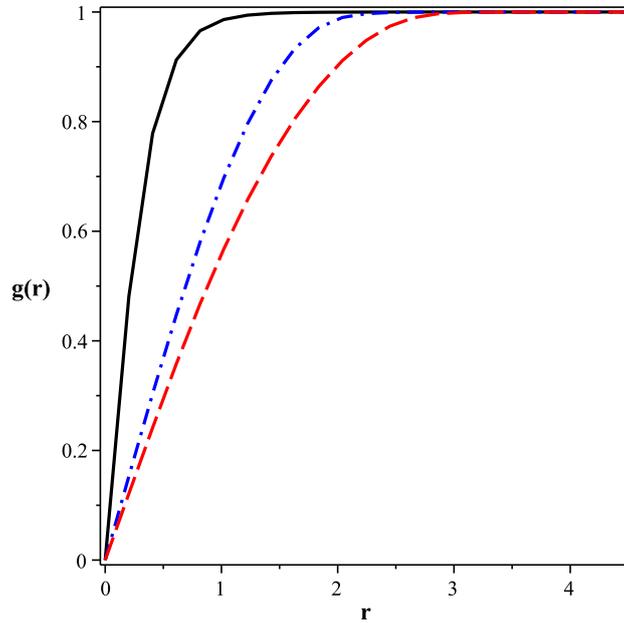


Figura 2.6: Soluções numéricas para $g(r)$. Convenções conforme a Fig.2.5.

A partir de agora, analisemos um segundo caso, definido por $\alpha = \beta$. Também neste caso, a curva preta sólida representa as configurações para as quais $\alpha = \beta = 0$ (caso usual), e a curva azul ponto-tracejada representa as configurações para as quais $\alpha = \beta = 10$. Agora, porém, a curva vermelha tracejada representa as configurações para as quais $\alpha = \beta = 20$.

A Figura 2.9 mostra as soluções para $a(r)$. As características gerais destas soluções permanecem as mesmas. Novamente, os maiores valores de α correspondem aos menores comprimentos característicos.

As soluções para $g(r)$ são mostradas na Figura 2.10, a partir da qual notamos serem todas as soluções possuidoras das mesmas características gerais. Porém, neste caso, ao contrário dos anteriores, quanto maior o valor de α para uma dada solução, menor o comprimento característico desta mesma solução.

As figuras 2.11 e 2.12 mostram as soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$ e para a densidade de energia $\varepsilon(r)$, respectivamente. Também neste caso, a amplitude e o comprimento característico destas soluções dependem do valor de α como nos casos anteriores; ver figuras 2.3, 2.4, 2.7 e 2.8.

Como sabemos, a interação entre vórtices estáticos ocorre quando há a sobreposição

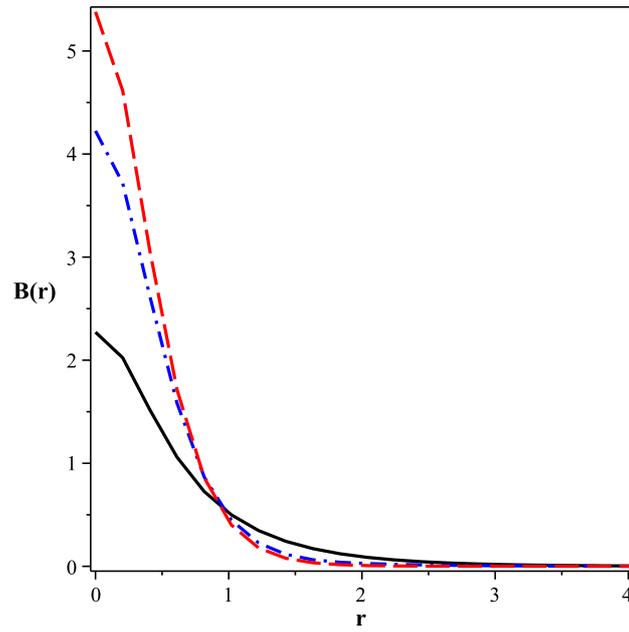


Figura 2.7: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.2.5.

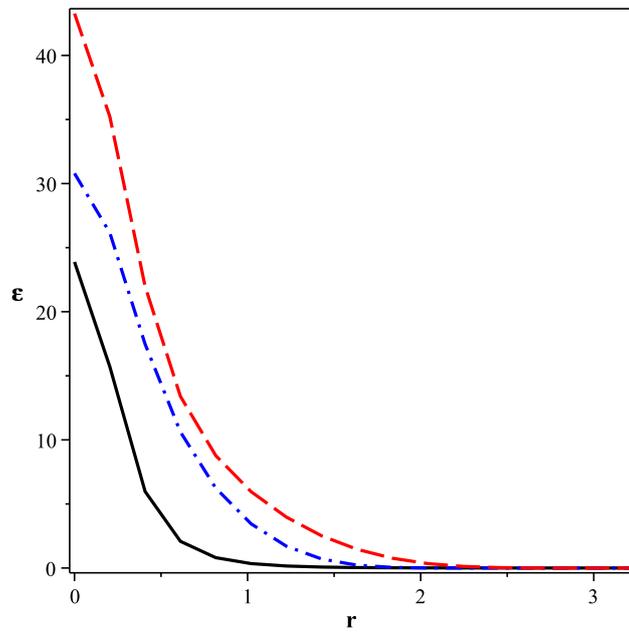


Figura 2.8: Soluções numéricas para $\varepsilon(r)$. Convenções conforme a Fig.2.5.

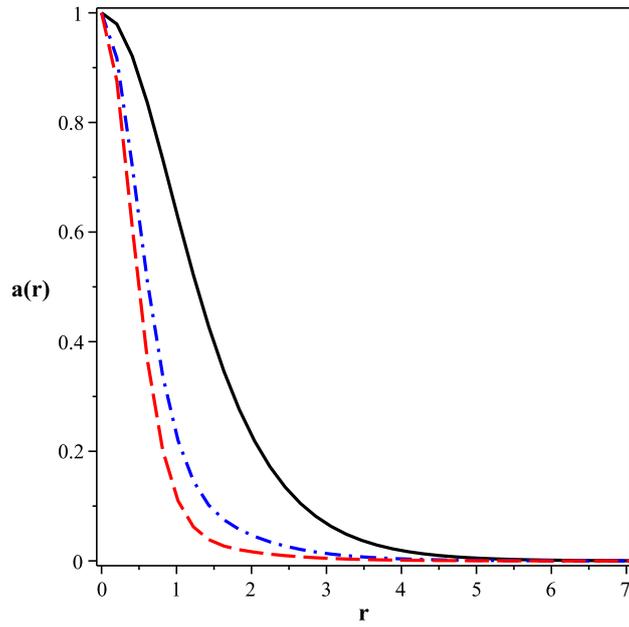


Figura 2.9: Soluções numéricas para $a(r)$, para $\alpha = \beta = 0$ (caso usual, curva preta sólida), $\alpha = \beta = 10$ (curva azul ponto-tracejada), e $\alpha = \beta = 20$ (vermelha tracejada).

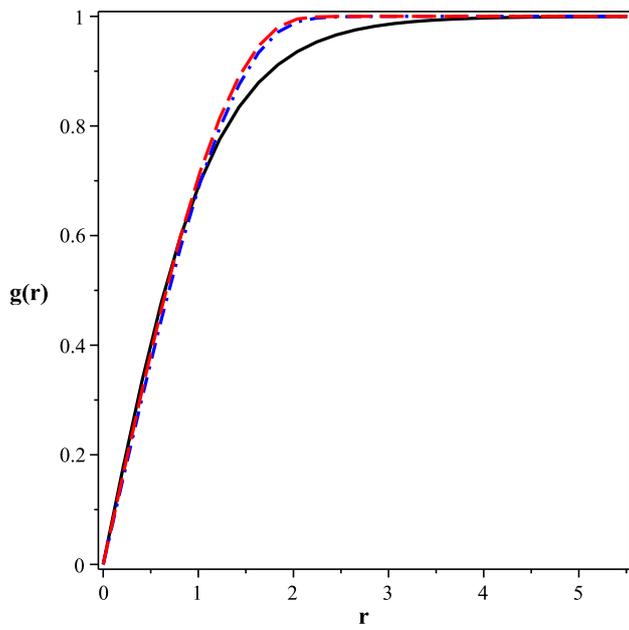


Figura 2.10: Soluções numéricas para $g(r)$. Convenções conforme a Fig.2.9.

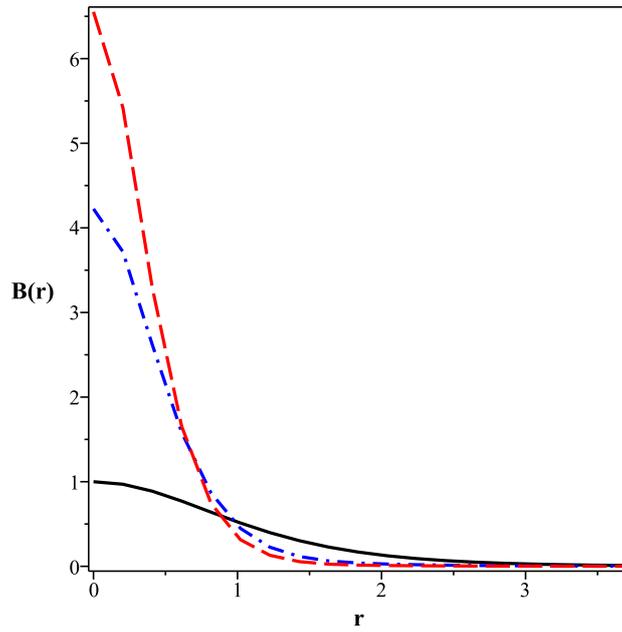


Figura 2.11: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.2.9.

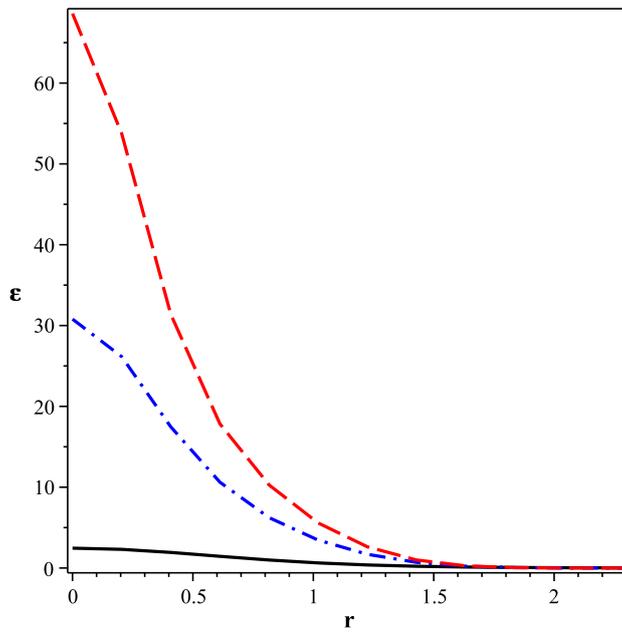


Figura 2.12: Soluções numéricas para $\varepsilon(r)$. Convenções conforme a Fig.2.9.

de suas soluções. Assim, quanto menor o comprimento característico das configurações interagentes, menor será a intensidade da interação, e vice-versa. Por outro lado, o comprimento característico das soluções generalizadas depende dos valores dos parâmetros reais α e β .

Portanto, a partir da definição do modelo generalizado (2.1), introduziu-se a possibilidade de controlar a intensidade da interação entre vórtices estáticos, sendo este controle exercido via o dois parâmetros reais não-negativos, α e β .

Infelizmente, o modelo (2.1) não permite a ocorrência de equações BPS. Porém, no próximo Capítulo, apresentaremos um segundo modelo generalizado; este modelo, sim, permite a ocorrência de tais equações e, por conseguinte, a partir das corretas condições de contorno, a obtenção de configurações BPS generalizadas.

Capítulo 3

Vórtices generalizados II.

Agora, apresentamos um segundo modelo generalizado. Este modelo, como o anterior, é obtido através de uma modificação imposta sobre a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs (1.1) [26]. Porém, neste caso, a sutileza da alteração permite a ocorrência de equações BPS e, por conseguinte, de estados BPS generalizados. Como veremos, tais estados podem exibir características gerais muito distintas uns dos outros: podem possuir as mesmas características já observadas no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs usual, mas, por outro lado, também podem exibir um comportamento semelhante ao observado no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs. Consideremos ambos os casos, separadamente.

3.1 Modelo generalizado II.

Neste caso, o modelo generalizado é descrito pela seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_{GM} = -\frac{G(|\phi|)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + w(|\phi|) X - V(|\phi|), \quad (3.1)$$

na qual o potencial $V(|\phi|)$ é suposto arbitrário, e $G(|\phi|)$ e $w(|\phi|)$ são funções arbitrárias e adimensionais do módulo do campo escalar complexo $\phi(x^\mu)$.

Aplicuemos as já especificadas transformações de escala, a partir das quais obtemos uma densidade de lagrangeana adimensional. Desta forma, a partir de agora, todas as coordenadas, campos e constantes de acoplamento são adimensionais.

Neste caso, as equações de Euler-Lagrange generalizadas são dadas por

$$G\partial_\mu F^{\mu\rho} + F^{\mu\rho}\partial_\mu G = J^\rho, \quad (3.2)$$

$$w\partial_\mu\partial^\mu|\phi| + \partial_\mu|\phi|\partial^\mu w - e^2 A_\mu A^\mu |\phi| w = \frac{X}{2} \frac{dw}{d|\phi|} - \frac{F^2}{8} \frac{dG}{d|\phi|} - \frac{1}{2} \frac{dV}{d|\phi|}, \quad (3.3)$$

onde $F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e

$$J^\rho = -2e^2 |\phi|^2 A^\rho w. \quad (3.4)$$

Aqui, J^ρ é o 4-vetor densidade de corrente generalizado.

A lei de Gauss generalizada (supondo campos estáticos) pode ser escrita como

$$G\partial_j\partial^j A^0 + \partial_j A^0\partial^j G = -2e^2 |\phi|^2 w A^0, \quad (3.5)$$

a partir da qual notamos ser válida a implementação do gauge temporal $A^0 = 0$. Portanto, de agora em diante, implementemos este gauge. Por conseguinte, tal como ocorre no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs usual, também as soluções estáticas generalizadas serão engendrarão campo elétrico nulo.

A partir de agora, busquemos por configurações generalizadas independentes do tempo e possuidoras de simetria rotacional. Para isso, usemos (1.7) e (1.8). Além disto, também neste caso generalizado, suponhamos a validade das condições de contorno (1.12) e (1.15). As equações de Euler-Lagrange para os campos $g(r)$ e $a(r)$ podem ser reescritas na forma

$$G \frac{d^2 a}{dr^2} + \left(\frac{dG}{dr} - \frac{G}{r} \right) \frac{da}{dr} = 2e^2 v^2 g^2 a w, \quad (3.6)$$

$$w \left(\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{a^2 g}{r^2} \right) - \frac{1}{4v^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right)^2 \frac{dG}{dr} = \frac{1}{2v^2} \frac{dV}{dr} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 - \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) \frac{dw}{dr}. \quad (3.7)$$

Antes de solucionarmos as equações (3.6) e (3.7), precisamos especificar o modelo sob análise. Via de regra, podemos fazê-lo via a implementação de quaisquer escolhas não-triviais para as funções $G(g)$ e $w(g)$. Neste ponto, faz-se necessária uma ressalva: como veremos adiante, ambas estas funções devem ser positivas, no intuito de assegurarmos a positividade da energia total associada à (3.1). Neste caso, mesmo diante desta restrição, ainda existe uma infinidade de escolhas possíveis para $G(g)$ e $w(g)$. Em particular, para $w(g) = 1$, (3.1) resulta no modelo considerado em [63], o qual possui importantes aplicações na descrição da interação entre quarks e gluons [64]- [66]. A partir disto, para $G(g) = 1$, emerge a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs usual (1.1).

Além de escolhermos $G(g)$ e $w(g)$, devemos também escolher o potencial $V(g)$. Pelos mesmos motivos, este potencial deve ser positivo. Além disso, ele deve também estar de acordo com as condições de contorno (1.15).

Em geral, para quaisquer $G(g)$, $w(g)$ e $V(g)$ não-triviais, a tarefa de solucionar as equações (3.6) e (3.7) pode ser extremamente complicada. Portanto, busquemos por equações BPS generalizadas próprias à (3.1). Para tanto, usemos o tensor de energia-momento generalizado

$$T_{\alpha\beta} = 2w (\partial_\alpha |\phi| \partial_\beta |\phi| + e^2 A_\alpha A_\beta |\phi|^2) - GF_{\alpha\mu} F_\beta^\mu - \eta_{\alpha\beta} \mathcal{L}_{GM}, \quad (3.8)$$

do qual emerge a densidade de energia generalizada (já reescrita em termos de $g(r)$ e $a(r)$)

$$\varepsilon(r) = \frac{G}{2e^2} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 w \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + V, \quad (3.9)$$

a partir da qual notamos a necessidade de $G(g)$, $w(g)$ e $V(g)$ serem funções positivas de $g(r)$.

A obtenção de equações BPS generalizadas próprias à (3.1) está condicionada ao uso do vínculo

$$\frac{d}{dg} \sqrt{GV} = \sqrt{2} e v^2 w g. \quad (3.10)$$

Este vínculo relaciona as funções $G(g)$ e $w(g)$ ao potencial $V(g)$. Neste caso, dadas duas funções positivas $G(g)$ e $w(g)$, o potencial $V(g)$ é obtido conforme a equação (3.10). Se a plena positividade do potencial resultante não puder ser assegurada, $G(g)$ e $w(g)$ devem ser descartadas, outras duas funções $G(g)$ e $w(g)$ devem ser escolhidas, e o procedimento deve ser repetido. Por outro lado, no caso de o potencial resultar positivo, as três funções $G(g)$, $w(g)$ e $V(g)$ devem ser implementadas junto à densidade de energia (3.9). Neste contexto, equações BPS generalizadas podem ser obtidas via o procedimento usual, já descrito anteriormente, sendo os respectivos estados BPS construídos via o tratamento numérico destas equações, via as condições de contorno (1.12) e (1.15).

Antes de apresentarmos alguns destes estados generalizados, recobremos os resultados usuais. Para tanto, implementemos $G(g) = w(g) = 1$. Neste caso, o potencial resultante é dado por

$$V(g) = \frac{e^2 v^4}{2} (1 - g^2)^2. \quad (3.11)$$

Neste contexto, a densidade de energia (3.9) pode ser reescrita como (1.16), e prescrição usual pode ser implementada.

Agora, passemos a considerar alguns casos generalizados. Um primeiro caso é definido por

$$G(g) = \frac{(g^2 + 3)^2}{g^2} \quad (3.12)$$

e

$$w(g) = 2(g^2 + 1). \quad (3.13)$$

O potencial $V(g)$ resulta

$$V(g) = \frac{e^2 v^4}{2} g^2 (1 - g^2)^2. \quad (3.14)$$

As funções $G(g)$, $w(g)$ e $V(g)$ são positivas, como desejado. Assim, a densidade de energia (3.9) pode ser reescrita como

$$\varepsilon(r) = \frac{(g^2 + 3)^2}{2e^2 g^2} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right)^2 + 2v^2 (g^2 + 1) \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + \frac{e^2 v^4}{2} g^2 (1 - g^2)^2, \quad (3.15)$$

ou

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = & \frac{(g^2 + 3)^2}{2g^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{ev^2 g^2 (g^2 - 1)}{g^2 + 3} \right)^2 + 2v^2 (g^2 + 1) \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 \\ & \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (a (g^2 - 1) (g^2 + 3)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Neste caso, a energia total é dada por

$$\begin{aligned} E = & \int \left[\frac{(g^2 + 3)^2}{2g^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{ev^2 g^2 (g^2 - 1)}{g^2 + 3} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2v^2 (g^2 + 1) \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2 r \geq E_{bps}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2 r, \quad (3.18)$$

com

$$\varepsilon_{bps} = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (a (g^2 - 1) (g^2 + 3)). \quad (3.19)$$

Portanto, quando $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm \frac{e^2 v^2 g^2 (g^2 - 1)}{g^2 + 3}, \quad (3.21)$$

a configuração estática resultante possuirá uma energia total dada por

$$E = E_{bps} = 2\pi \int r \varepsilon_{bps} dr = 6\pi v^2 |n|. \quad (3.22)$$

As expressões (3.20) e (3.21) são as equações BPS próprias ao modelo definido por (3.12) e (3.13). Estas equações devem ser solucionadas via as condições de contorno (1.12)

e (1.15). As soluções assim obtidas descrevem configurações BPS possuidoras de energia total dada por (3.22), e densidade de energia dada por (3.19).

A partir de agora, apresentemos um segundo modelo generalizado. Ele é definido por

$$G(g) = (g^2 + 1)^2 \quad (3.23)$$

e

$$w(g) = 2g^2. \quad (3.24)$$

Neste caso, o potencial resultante é dado por (3.11). Novamente, as funções $G(g)$, $w(g)$ e $V(g)$ são positivas, e a densidade de energia (3.9) resulta

$$\varepsilon(r) = \frac{(g^2 + 1)^2}{2e^2} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right)^2 + 2v^2 g^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + \frac{e^2 v^4}{2} (1 - g^2)^2, \quad (3.25)$$

ou

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = & \frac{(g^2 + 1)^2}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{ev^2(g^2 - 1)}{g^2 + 1} \right)^2 + 2v^2 g^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 \\ & \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (a(g^2 - 1)(g^2 + 1)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

A energia total é

$$E = \int \left[\frac{(g^2 + 1)^2}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{ev^2(g^2 - 1)}{g^2 + 1} \right)^2 + 2v^2 g^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2 r \geq E_{bps}, \quad (3.27)$$

onde

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2 r, \quad (3.28)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (a(g^2 - 1)(g^2 + 1)). \quad (3.29)$$

Logo, quando as funções $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (3.30)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm \frac{e^2 v^2 (g^2 - 1)}{g^2 + 1}, \quad (3.31)$$

a configuração resultante possuirá energia total

$$E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|. \quad (3.32)$$

As equações (3.30) e (3.31) são as equações BPS referentes ao modelo especificado por (3.23) e (3.24). Também neste caso, tais equações devem ser solucionadas a partir de (1.12) e (1.15). As configurações BPS resultantes possuem energia total dada por (3.32), i.e., a mesma engendrada pelas configurações BPS usuais; ver (1.25). Ainda assim, tais configurações são caracterizadas por diferentes densidades de energia: enquanto o resultado usual é dado por (1.22), a densidade de energia generalizada é dada por (3.29).

Antes de finalizarmos, apresentemos um terceiro modelo generalizado. Este modelo, proposto em 1992 [63], é definido por $w(g) = 1$ e

$$G(g) = (1 + \rho) \left(1 + 2\rho \frac{v^2 e^2}{k^2} g^2 \right)^{-1}, \quad (3.33)$$

na qual ρ é uma constante real, positiva e adimensional.

Para $\rho = 0$, (3.33) resulta em $G(g) = 1$. Neste caso, o vínculo (3.10) fornece o potencial (3.11), e a densidade de energia (3.9) resulta em (1.16). Assim, a prescrição padrão pode ser implementada, a partir da qual são obtidos os resultados usuais.

Por outro lado, para $\rho = 1$, (3.33) resulta em

$$G(g) = \frac{k^2}{2v^2 e^2 g^2}, \quad (3.34)$$

a partir da qual obtemos o potencial

$$V(g) = \frac{e^4 v^6}{k^2} g^2 (g^2 - 1)^2. \quad (3.35)$$

Neste caso, (3.9) fornece

$$\varepsilon(r) = \frac{k^2}{4v^2 e^4 g^2} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + \frac{e^4 v^6}{k^2} g^2 (g^2 - 1)^2, \quad (3.36)$$

ou

$$\varepsilon(r) = \frac{k^2}{4v^2 e^2 g^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{2v^4 e^3}{k^2} g^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (a (g^2 - 1)). \quad (3.37)$$

Assim, a energia total é

$$E = \int \left[\frac{k^2}{4v^2 e^2 g^2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp \frac{2v^4 e^3}{k^2} g^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2 r \geq E_{bps}, \quad (3.38)$$

onde

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2 r, \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{bps} = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (a (g^2 - 1)). \quad (3.40)$$

Portanto, quando as funções $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm \frac{2v^4 e^4}{k^2} g^2 (g^2 - 1), \quad (3.42)$$

elas descreverão uma configuração estática possuidora de energia total dada por

$$E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|. \quad (3.43)$$

As expressões (3.41) e (3.42) são as equações BPS generalizadas próprias ao modelo definido por (3.34) e $w(g) = 1$, e devem ser solucionadas a partir de (1.12) e (1.15). As configurações BPS resultantes exibem energia total dada por (3.43), e densidade de energia dada por (3.40).

Por fim, notamos serem (3.41) e (3.42) são iguais à (1.58) e (1.59). Porém, no caso generalizado, tais equações resultam em configurações BPS possuidoras de campo elétrico nulo (ver discussão após (3.5)), enquanto (1.58) e (1.59) descrevem configurações possuidoras de campo elétrico não-nulo. Ainda assim, como vimos, ambas configurações possuem energia total $E_{bps} = 2\pi v^2 |n|$.

Abaixo, constam as soluções numéricas para $g(r)$ e $a(r)$ obtidas a partir dos modelos generalizados apresentados acima. Além disso, constam também soluções para os campos magnéticos e densidades de energia ε_{bps} . Por simplicidade, usamos $e = v = n = 1$.

3.2 Soluções numéricas II.

Agora, apresentamos as soluções numéricas obtidas a partir de (3.20) e (3.21), e (3.30) e (3.31). Além destas, mostramos também as soluções usuais, obtidas a partir de (1.23) e (1.24). A convenção utilizada é: a curva preta sólida descreve as soluções usuais, a curva vermelha ponto-tracejada descreve as soluções obtidas via (3.20) e (3.21), e a curva azul tracejada descreve as soluções obtidas via (3.30) e (3.31). Em todos estes casos, utilizou-se as condições de contorno (1.12) e (1.15), além de $e = v = n = 1$.

A Figura 3.1 mostra as soluções numéricas obtidas para a função $g(r)$. Neste caso, todas as soluções exibem as mesmas características gerais, já discutidas em oportunidades

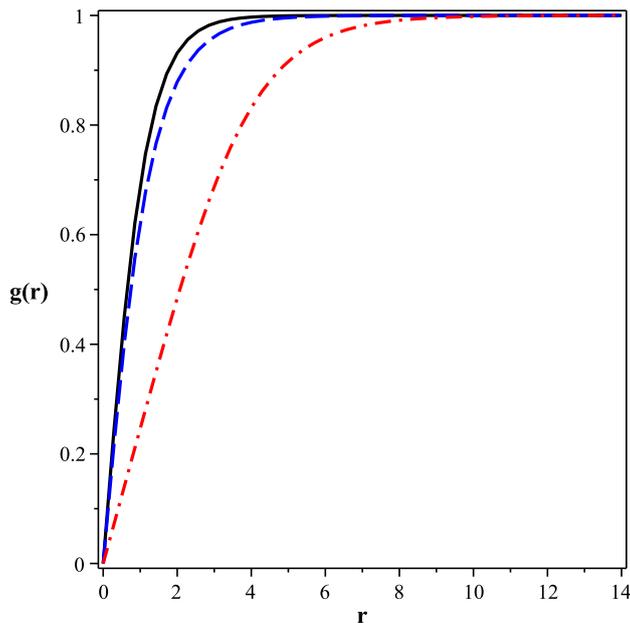


Figura 3.1: Soluções numéricas para $g(r)$ obtidas a partir de (1.23) e (1.24) (curva preta sólida), (3.20) e (3.21) (curva vermelha ponto-tracejada), e (3.30) e (3.31) (curva azul tracejada).

anteriores. Contudo, ressaltemos o fato de soluções diferentes possuírem comprimentos característicos distintos.

As soluções obtidas para $a(r)$ são mostradas na Figura 3.2. Novamente, tais soluções possuem características gerais já discutidas anteriormente. Contudo, para $r \rightarrow 0$, a solução obtida a partir de (3.20) e (3.21) possui uma espécie de *plateau*, também presente na Figura 1.5. Em ambos os casos, acredita-se ser esta estrutura uma consequência direta da estrutura de vácuos da teoria, a mesma em ambos os contextos; ver os potenciais (1.44) e (3.14). Novamente, soluções diferentes possuem comprimentos característicos distintos.

A Figura 3.3 mostra as soluções numéricas para o campo magnético $B(r)$. Assim como a solução usual, a solução obtida via (3.30) e (3.31) atinge seu valor máximo quando $r = 0$, a partir do qual decresce monotonicamente, tornando-se nula no limite $r \rightarrow \infty$. Por outro lado, a solução obtida a partir de (3.20) e (3.21) atinge seu valor máximo para $r = R$, e é nula para $r = 0$ e $r \rightarrow \infty$. Novamente, acredita-se serem estas características consequências da estrutura de vácuos destas teorias.

Por fim, as soluções obtidas para as densidades de energia são mostradas na Figura 3.4. Tais soluções foram obtidas a partir de (3.19) (caso usual), (3.19) e (3.29), e todas elas engendram $\varepsilon_{bps}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, como esperado. A solução usual e a obtida a partir de

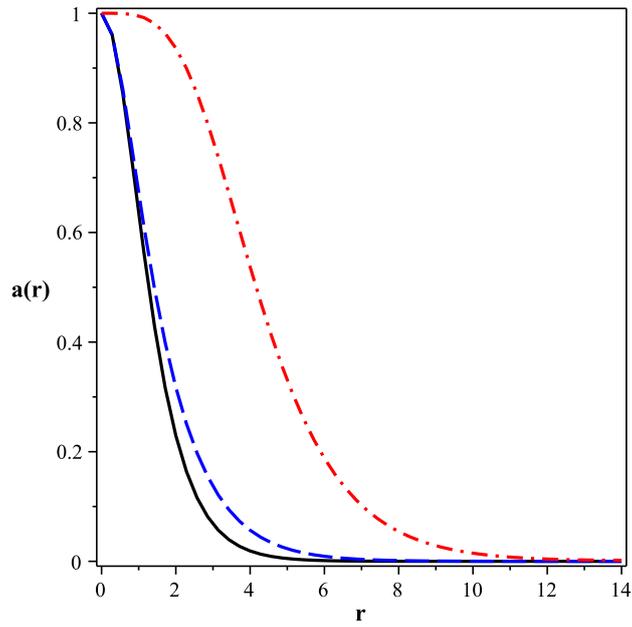


Figura 3.2: Soluções numéricas para $a(r)$. Convenções conforme a Fig.3.1.

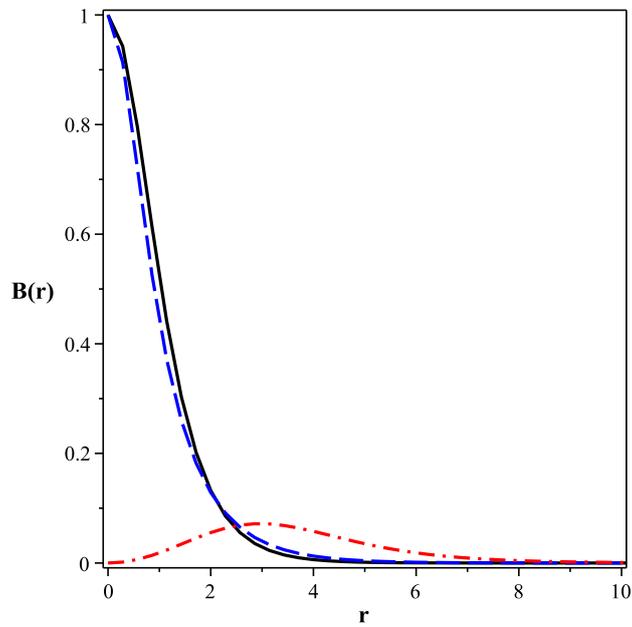


Figura 3.3: Soluções numéricas para $B(r)$. Convenções conforme a Fig.3.1.

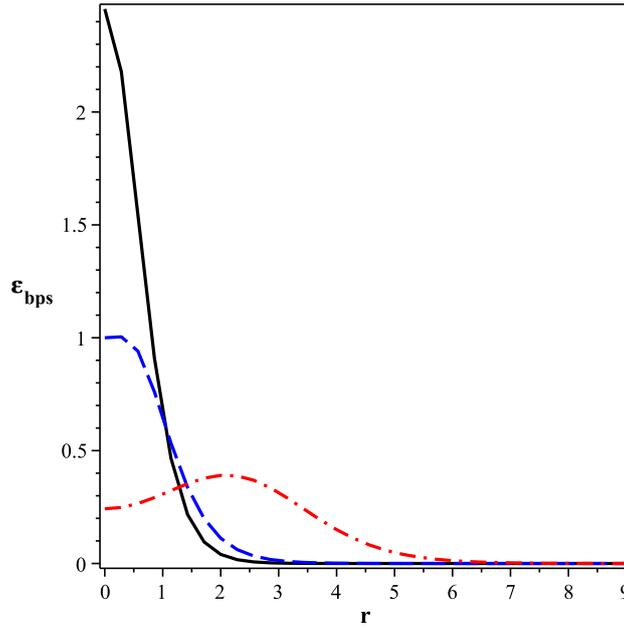


Figura 3.4: Soluções numéricas para ε_{bps} . Convenções conforme a Fig.3.1.

(3.30) e (3.31) possuem o mesmo comportamento geral engendrado pelos seus respectivos campos magnéticos: elas atingem seus valores máximos quando $r = 0$, e depois decrescem monotonicamente, anulando-se para $r \rightarrow \infty$. Enquanto isso, a solução obtida via (3.20) e (3.21) atinge seu valor máximo para algum r finito.

3.3 Teorias Gêmeas.

Teorias distintas são ditas "gêmeas" quando, mesmo definidas por densidades de lagrangeanas diferentes, exibem exatamente as mesmas soluções, as mesmas densidades de energia, e a mesma energia total [59]- [62]. Para tanto, naturalmente, tais teorias devem engendrar não só as mesmas equações de movimento, mas também as mesmas condições de contorno. Neste contexto, configurações gêmeas serão possuidoras não apenas dos mesmos campos físicos (campo elétrico, magnético e etc.), mas também a mesma energia total.

O modelo generalizado (3.1) pode ser adaptado ao estudo de configurações BPS *tipo gêmeas* [58]. Para isto, o vínculo (3.10) deve ser substituído por dois outros; ver (3.44) e (3.45). As teorias assim obtidas, apesar de exibirem diferentes densidades de energia, possuem as mesmas equações de Euler-Lagrange, as mesmas equações BPS, as mesmas condições de contorno e a mesma energia total. Ainda assim, a partir de agora e por

simplicidade, tais teorias serão chamadas "gêmeas"

3.4 Teorias Gêmeas: O Modelo.

Consideremos o modelo generalizado (3.1) e sua densidade de energia (3.9). Porém, ao invés do vínculo (3.10), utilizemos

$$w = G + \frac{g^2 - 1}{2g} \frac{dG}{dg}, \quad (3.44)$$

e

$$V(g) = G(g) V_s(g), \quad (3.45)$$

no qual $V_s(g)$ é dado por (3.11)

$$V_s(g) = \frac{e^2 v^4}{2} (g^2 - 1)^2. \quad (3.46)$$

Também neste caso, ambas as funções $w(g)$ e $G(g)$ devem ser positivas. Assim sendo, o potencial generalizado $V(g)$ (3.45) resulta também positivo.

A partir de (3.44) e (3.45), a densidade de energia generalizada (3.9) pode ser reescrita como

$$\varepsilon(r) = \frac{G}{2e^2} \left(\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right)^2 + v^2 \left(G + \frac{g^2 - 1}{2g} \frac{dG}{dg} \right) \left(\left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{g^2 a^2}{r^2} \right) + G V_s, \quad (3.47)$$

ou

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = \frac{G}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right)^2 + v^2 \left(G + \frac{g^2 - 1}{2g} \frac{dG}{dg} \right) \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 \\ \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} ((g^2 - 1) aG). \end{aligned} \quad (3.48)$$

A energia total resultante é

$$\begin{aligned} E = \int \left[\frac{G}{2} \left(\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \mp ev^2 (g^2 - 1) \right)^2 \right. \\ \left. + v^2 \left(G + \frac{g^2 - 1}{2g} \frac{dG}{dg} \right) \left(\frac{dg}{dr} \mp \frac{ga}{r} \right)^2 + \varepsilon_{bps} \right] d^2 r \geq E_{bps}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde

$$E_{bps} \equiv \int \varepsilon_{bps} d^2 r, \quad (3.50)$$

e

$$\varepsilon_{bps} = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} ((g^2 - 1) aG). \quad (3.51)$$

Portanto, quando as funções $g(r)$ e $a(r)$ satisfizerem

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ga}{r}, \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} = \pm e^2 v^2 (g^2 - 1), \quad (3.53)$$

as configurações resultantes possuirão energia total dada por

$$E = E_{bps} = 2\pi \int r \varepsilon_{bps} dr. \quad (3.54)$$

Agora, antes de calcularmos o valor de E_{bps} , precisamos especificar as condições de contorno satisfeitas por $G(|\phi|)$. Por simplicidade, escolhemos

$$G(r=0) = 1 \quad \text{e} \quad G(r \rightarrow \infty) \rightarrow C. \quad (3.55)$$

Aqui, C é uma constante real não-negativa. Neste caso, (3.54) resulta em

$$E_{bps} = 2\pi \int r \varepsilon_{bps} dr = 2\pi v^2 |n|. \quad (3.56)$$

As equações (3.52) e (3.53) são exatamente iguais às (1.23) e (1.24). Além disso, tais equações devem ser solucionadas via as mesmas condições de contorno (1.12) e (1.15). Portanto, dado os vínculos (3.44) e (3.45), os modelos generalizado (3.1) e usual (1.1) engendram não só as mesmas soluções para $g(r)$ e $a(r)$, mas também para campo magnético $B(r)$; ver as figuras 1.1, 1.2 e 1.4. Além disso, em ambos os casos, tais soluções descrevem configurações estáticas possuidoras da mesma energia total $E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|$. Assim, tais teorias são ditas *gêmeas*.

A partir de agora, apresentemos dois casos específicos. O primeiro é definido por

$$G(g) = g^2 + 1, \quad (3.57)$$

para o qual vale $C = 2$. Via (3.57), a densidade de energia (3.51) pode ser reescrita como

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{v^2}{r} \frac{da}{dr} \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (g^4 a), \quad (3.58)$$

ou

$$\varepsilon_{bps} = \varepsilon_{fis} + \varepsilon_{irr}, \quad (3.59)$$

na qual definimos

$$\varepsilon_{fis} \equiv \mp \frac{v^2 da}{r dr}, \quad (3.60)$$

e

$$\varepsilon_{irr} \equiv \pm \frac{v^2 d}{r dr} (g^4 a). \quad (3.61)$$

Aqui, ε_{fis} é a densidade de energia *física*, enquanto ε_{irr} é a densidade de energia *irrelevante*. Expliquemos esta nomenclatura: a partir das condições de contorno (1.12) e (1.15), calcula-se

$$\int r \varepsilon_{fis} dr = v^2 |n|, \quad (3.62)$$

$$\int r \varepsilon_{irr} dr = 0, \quad (3.63)$$

a partir das quais obtemos

$$\frac{E_{bps}}{2\pi} = \int r \varepsilon_{bps} dr = \int r \varepsilon_{fis} dr = v^2 |n|. \quad (3.64)$$

Portanto, a densidade de energia física ε_{fis} encerra toda a informação necessária ao cálculo da energia total $E_{bps} = 2\pi v^2 |n|$. Contudo, vale ressaltar, apesar de a densidade de energia irrelevante ε_{irr} não contribuir ao cálculo da energia total, a densidade de energia das configurações BPS ainda é dada por $\varepsilon_{bps} = \varepsilon_{fis} + \varepsilon_{irr}$; ver (3.59).

Um segundo caso é definido por

$$G(g) = (g^2 + 1)(g^2 - 1)^2, \quad (3.65)$$

para o qual vale $C = 0$. A densidade de energia (3.51) pode ser reescrita como

$$\varepsilon_{bps} = \mp \frac{v^2 da}{r dr} \pm \frac{v^2 d}{r dr} (ag^2 (g^6 - 2g^4 + 2)), \quad (3.66)$$

ou

$$\varepsilon_{bps} = \varepsilon_{fis} + \varepsilon_{irr}, \quad (3.67)$$

na qual valem

$$\varepsilon_{fis} = \mp \frac{v^2 da}{r dr}, \quad (3.68)$$

e

$$\varepsilon_{irr} = \pm \frac{v^2 d}{r dr} (ag^2 (g^6 - 2g^4 + 2)). \quad (3.69)$$

Novamente, valem

$$\int r \varepsilon_{fis} dr = v^2 |n|, \quad (3.70)$$

$$\int r\varepsilon_{irr}dr = 0, \quad (3.71)$$

a partir das quais obtemos

$$\frac{E_{bps}}{2\pi} = \int r\varepsilon_{bps}dr = \int r\varepsilon_{fis}dr = v^2 |n|. \quad (3.72)$$

Assim, também neste caso, notamos ser ε_{fis} possuidora de toda a informação referente ao cálculo da energia total. Novamente, porém, ressaltamos ser a densidade de energia das configurações BPS ainda dada por $\varepsilon_{bps} = \varepsilon_{fis} + \varepsilon_{irr}$.

As teorias (1.1), (3.57) e (3.65) engendram exatamente as mesmas soluções para $g(r)$, $a(r)$ e $B(r)$ (ver discussão logo após (3.56)). Estas soluções são mostradas nas figuras 1.1, 1.2 e 1.4. Elas descrevem configurações BPS possuidoras da mesma energia total $E = E_{bps} = 2\pi v^2 |n|$.

Neste contexto, as principais diferenças entre estas três teorias são suas densidades de energia, ε_{bps} , e suas densidades de energia irrelevantes, ε_{irr} (suas densidades de energia física ε_{fis} são as mesmas). Exploremos estas diferenças: abaixo, constam as soluções numéricas para ε_{bps} , para $r\varepsilon_{bps}$ e para $r\varepsilon_{irr}$ obtidas a partir de (1.1), (3.57) e (3.65). Novamente, usamos $e = v = 1$.

3.5 Soluções numéricas: Teorias Gêmeas.

Abaixo, apresentamos algumas soluções numéricas obtidas a partir dos modelos (1.1), (3.57) e (3.65). Como já esclarecido, estes modelos engendram exatamente as mesmas soluções para os campos $g(r)$, $a(r)$ e $B(r)$; ver as figuras 1.1, 1.2 e 1.4. Além disso, estes campos descrevem configurações BPS possuidoras da mesma energia total. Todas características já foram discutidas em momento anterior. Assim, voltemos nossa atenção para as soluções obtidas para ε_{bps} , $r\varepsilon_{bps}$ e $r\varepsilon_{irr}$.

A Figura 3.5 mostra as soluções para ε_{bps} , obtidas a partir de (1.22) (caso usual, curva preta sólida), (3.58) (curva azul ponto-tracejada) e (3.69) (curva vermelha tracejada). Além disso, utilizou-se $e = n = v = 1$. As soluções para (1.22) e (3.69) exibem as mesmas características gerais: para $r = 0$, elas atingem seus respectivos valores máximos, a partir do qual decrescem monotonicamente. Por outro lado, a solução obtida a partir de (3.58) engendra valor máximo para $r = R$. Em todos os casos, vale $\varepsilon_{bps}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

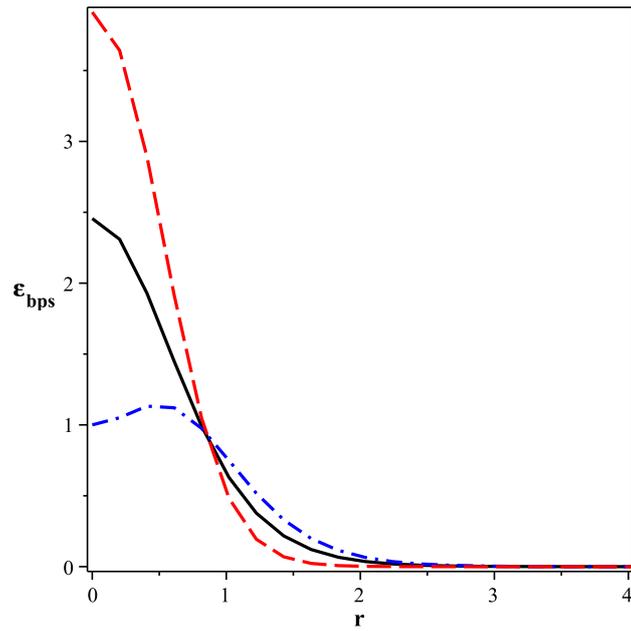


Figura 3.5: Soluções numéricas para ε_{bps} obtidas a partir de (1.22) (curva preta sólida), (3.58) (curva azul ponto-tracejada), e (3.69) (curva vermelha tracejada).

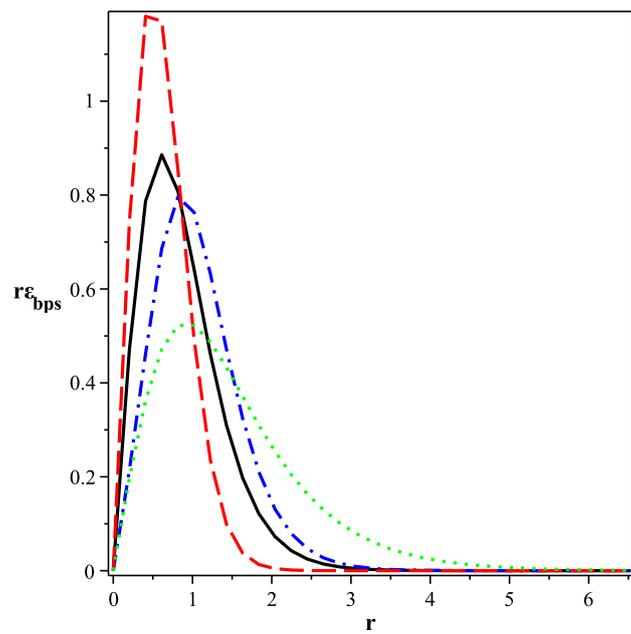


Figura 3.6: Soluções numéricas para $r\varepsilon_{bps}$. Convenções conforme a Fig.3.5.

A Figura 3.6 mostra as soluções numéricas para $r\varepsilon_{bps}$, obtidas a partir de (1.22), (3.58) e (3.69), e descritas conforme a convenção anterior. Além destas, consta também a solução para $r\varepsilon_{fis}$ (curva verde pontilhada). Todas estas soluções possuem o mesmo comportamento: para $r = 0$ e $r \rightarrow \infty$, elas se anulam; no entanto, para $r = R$, atingem seus respectivos valores máximos. O valor máximo de uma dada solução é tão menor quanto maior o comprimento característico desta mesma solução, e vice-versa. Desta forma, todas as soluções engendram exatamente a mesma energia total

$$\frac{E_{bps}}{2\pi} = \int r\varepsilon_{bps}dr = \int r\varepsilon_{fis}dr = v^2 |n|, \quad (3.73)$$

conforme esclarecido anteriormente.

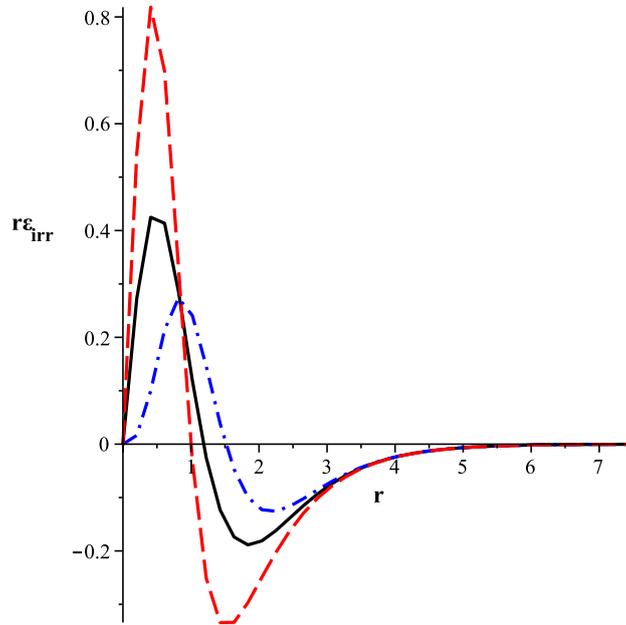


Figura 3.7: Soluções numéricas para $r\varepsilon_{irr}$. Convenções conforme a Fig.3.5.

A Figura 3.7 mostra as soluções para $r\varepsilon_{irr}$, descritas conforme a convenção anterior. A solução usual foi obtida a partir de

$$\varepsilon_{irr} = \pm \frac{v^2}{r} \frac{d}{dr} (g^2 a), \quad (3.74)$$

definida a partir de (1.22). Em todos os casos, o comportamento destas soluções visa satisfazer $\int r\varepsilon_{irr}dr = 0$.

Finalmente, as figuras 3.8 e 3.9 mostram as soluções numéricas para $r\varepsilon_{irr}$, obtidas via $n = 3$ e $n = 5$, respectivamente. Também nestes casos, vale $\int r\varepsilon_{irr}dr = 0$.

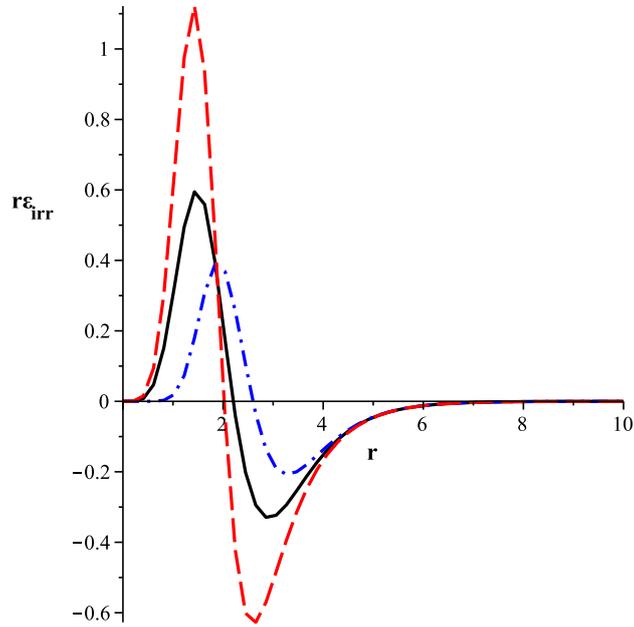


Figura 3.8: Soluções numéricas para $r\varepsilon_{irr}$. Convenções conforme a Fig.3.5.

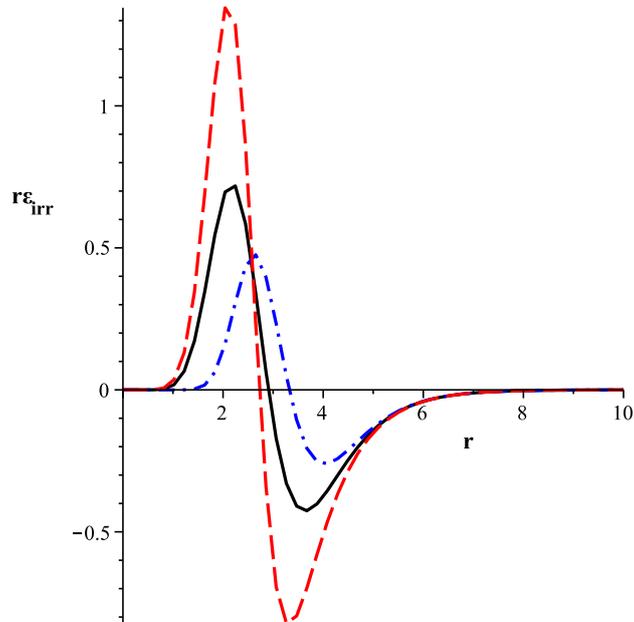


Figura 3.9: Soluções numéricas para $r\varepsilon_{irr}$. Convenções conforme a Fig.3.5.

Conclusões

Neste trabalho, apresentamos vários resultados referentes ao estudo de vórtices estáticos no âmbito de eletrodinâmicas generalizadas. Todos estes vórtices são topológicos, i.e., são possuidores de carga topológica não-nula. Aqui, tratamos não apenas os vórtices BPS, mas também os não-BPS. Os vórtices BPS generalizados, como sua contrapartida usual, possuem energia total mínima proporcional a sua carga topológica. Por outro lado, e infelizmente, pouco podemos afirmar sobre a energia total de vórtices não-BPS.

No Capítulo 1, apresentamos uma breve revisão sobre a obtenção de vórtices BPS a partir de diferentes eletrodinâmicas.

Em um primeiro momento, consideramos a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [3]. Além de sua simplicidade, esta teoria é a base sobre a qual as eletrodinâmicas generalizadas (foco deste trabalho) foram construídas. Portanto, o amplo entendimento sobre a obtenção de vórtices no contexto desta eletrodinâmica, além de útil, é desejável.

No caso usual (i.e., na ausência de quaisquer generalizações), vórtices topológicos podem ser obtidos via as respectivas equações de Euler-Lagrange estáticas. Para tanto, devemos utilizar *Ansatz* específicos, definidos em termos da vorticidade n da configuração resultante (com $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$). A partir disto, as equações de Euler-Lagrange devem ser solucionadas a partir de condições de contorno previamente definidas: tais condições evitam o surgimento de configurações possuidoras de quaisquer divergências, além de assegurar serem as configurações resultantes caracterizadas por uma energia total finita.

No entanto, por serem equações diferenciais de segunda ordem, não-lineares e acopladas, a resolução das equações de Euler-Lagrange, mesmo para configurações estáticas, é tarefa difícil. Assim, no intuito de contornarmos esta dificuldade (mas não apenas por isto), voltamos nossa atenção ao estudo do formalismo BPS próprio à esta eletrodinâmica [9]. Este formalismo apenas pode ser construído em um contexto bastante específico, denomi-

nado limite de Bogomol'nyi [11]. Neste limite, quando os campos satisfazem um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, a configuração resultante engendra um valor mínimo de energia total, proporcional a sua própria carga topológica. Não por acaso, a partir da manipulação destas equações, denominadas equações BPS, é possível reproduzirmos as equações de Euler-Lagrange do modelo. Assim, provamos serem as soluções das equações BPS, denominadas estados BPS, também soluções legítimas da teoria em questão.

A posteriori, apresentamos algumas soluções numéricas obtidas a partir das equações BPS, para diferentes valores de vorticidade n . Por simplicidade, todos os outros parâmetros da teoria foram supostos iguais a 1. Além disso, todas as soluções satisfazem as já definidas condições de contorno. A partir destas soluções, obtivemos também as soluções para o campo magnético, $B(r)$, e para a densidade de energia dos estados BPS, ε_{bps} .

As soluções assim obtidas são mostradas nas figuras 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 (as funções $a(r)$ e $g(r)$ descrevem os campos de Higgs e de gauge, respectivamente). Via de regra, soluções com diferentes vorticidades apresentam as mesmas características gerais; a exceção é a solução para a densidade de energia: por exemplo, a solução obtida para $n = 1$ (curva preta sólida) possui um comportamento muito diferente daquela obtida para $n = 5$ (curva vermelha tracejada).

Ainda no Capítulo 1, após considerarmos a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, voltamos nossa atenção para a eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs. Neste caso, ao contrário do anterior, supondo campos estáticos, o gauge temporal não mais satisfaz a lei de Gauss. Portanto, vórtices independentes do tempo engendram não apenas campo magnético, mas também campo elétrico não-nulo. Ainda assim, tais estruturas são descritas pelos mesmos *Ansatz* e satisfazem as mesmas condições de contorno do caso anterior.

Também neste contexto, por conta das dificuldades em lidarmos com as respectivas equações de Euler-Lagrange, buscamos por vórtices estáticos via a resolução numérica de equações BPS. Para tanto, implementamos o respectivo limite de Bogomol'nyi [12, 13]. Assim, quando os campos satisfazem um conjunto específico de equações de primeira ordem, eles encerram configurações possuidoras de energia total mínima (proporcional à sua carga topológica) cujo valor é exatamente igual ao obtido no caso anterior. Como antes, estas configurações são também soluções das equações de Euler-Lagrange e, portanto, soluções legítimas desta teoria.

As figuras 1.5 e 1.6 mostram, respectivamente, as soluções numéricas para as funções $a(r)$ e $g(r)$, enquanto as figuras 1.7, 1.8 e 1.9 mostram as soluções para o campo magnético, para o campo elétrico, $E(r)$, e para a densidade de energia, respectivamente. Como antes, mesmo as soluções para $a(r)$ e $g(r)$ com diferentes vorticidades apresentam as mesmas características. Porém, vale ressaltar, a substituição do termo de Maxwell, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, pelo termo de Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}$, transforma substancialmente o comportamento do campo magnético, mesmo para o caso $n = 1$, além de, como já observado, proporcionar o surgimento de campo elétrico não-nulo. Além disso, para $n = 1$, mudam também as características da solução para a densidade de energia.

Finalizamos a revisão tratando a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Neste caso, além dos campos de Higgs e de gauge, existe também um terceiro campo, escalar real, $N(x^\mu)$, introduzido no intuito de estabilizar a energia das respectivas configurações BPS [14, 15]. Agora, como no caso anterior, configurações estáticas possuem campos elétrico e magnético não-nulos, dado o fato de o gauge temporal não satisfazer a lei de Gauss.

Novamente, utilizamos os mesmos *Ansatz*, as mesmas condições de contorno e o limite de Bogomol'nyi. Assim, supomos $a(r)$ e $g(r)$ obtidas a partir de equações BPS, das quais resulta uma configuração caracterizada por uma energia mínima proporcional à carga topológica e cujo valor é igual ao obtido nos dois casos anteriores. Neste contexto, estados BPS são obtidos a partir da resolução numérica não apenas das equações BPS, mas também da lei de Gauss.

As soluções numéricas assim obtidas são mostradas nas figuras 1.10, 1.11, 1.12, 1.13 e 1.14, para diferentes valores de n . Independente da vorticidade, $a(r)$ e $g(r)$ exibem as mesmas características gerais observadas nos casos anteriores. Além disso, o campo elétrico $E(r)$ engendra as mesmas características daquele obtido no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs; ver Figura 1.8. Porém, tanto o campo magnético $B(r)$, quanto a densidade de energia ε_{bps} possuem comportamento muito peculiar: para $n = 1$, ambas as soluções exibem as características observadas no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs; por outro lado, para $n = 3$ e $n = 5$, tais soluções se comportam como o observado a partir da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs.

No Capítulo 2, introduzimos um primeiro modelo generalizado. Este modelo foi erigido a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, e é caracterizado pelo uso de uma função

arbitrária $K(X)$, na qual $X = |D_\mu\phi|^2$ [24]. Em particular, consideramos o caso $K(X) = X - \alpha X^2$, e o potencial de Higgs $U(|\phi|)$ foi suposto possuir a forma

$$U(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} \left(1 + \frac{3\beta}{2}\right) (|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (3.75)$$

Aqui, α e β são constantes reais não-negativas.

Infelizmente, a teoria generalizada assim obtida não permite a construção de estruturas BPS independentes do tempo. Ainda assim, vórtices topológicos foram obtidos via a resolução numérica das respectivas equações de Euler-Lagrange, para diferentes valores de α e β . As configurações resultantes, por não serem BPS, não possuem a mínima energia possível, e suas energias não são proporcionais as suas cargas topológicas. Ainda assim, tais configurações também engendram campo elétrico nulo, e isto independe da função escolhida para $K(X)$.

Para $\beta = 0, 10, 40$ e $n = 1$, as soluções para $a(r)$ e $g(r)$ são mostradas nas figuras 2.1 e 2.2, enquanto as soluções para o campo magnético e a densidade de energia são mostradas nas figuras 2.3 e 2.4. Em geral, mudanças no valor de α influenciam as soluções para um mesmo campo da mesma maneira. Neste caso, a partir das figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8, construídas para $\beta = 10, \alpha = 0, 10, 40$ e $n = 1$, percebemos ser este comportamento independente do valor do parâmetro β .

Para $\alpha = \beta = 0, 10, 20$ e $n = 1$, as soluções para $a(r)$, $g(r)$, $B(r)$ e $\varepsilon(r)$ são mostradas nas figuras 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12. Agora, apesar de mudanças no valor de α influenciarem as soluções para $a(r)$, $B(r)$ e $\varepsilon(r)$ exatamente como no caso anterior, o mesmo não ocorre com a solução para $g(r)$; ver figuras 2.2, 2.6 e 2.10.

A partir deste modelo generalizado, introduzimos mecanismo capaz de controlar a intensidade da interação entre vórtices estáticos, sendo este controle exercido via dois parâmetros reais não-negativos, α e β . Infelizmente, estes primeiros vórtices generalizados não são BPS. Assim, no intuito de considerarmos também vórtices BPS, introduzimos uma outra teoria generalizada.

No Capítulo 3, apresentamos um segundo modelo generalizado [26]. Este modelo, também construído a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs, foi obtido a partir da introdução de duas funções positivas e adimensionais, $G(|\phi|)$ e $w(|\phi|)$, além do uso de um potencial $V(|\phi|)$ arbitrário. Aqui, implementamos também o vínculo

$$\frac{d}{dg}\sqrt{GV} = \sqrt{2}ev^2wg. \quad (3.76)$$

Neste caso, ao contrário do anterior, o modelo generalizado engendra configurações BPS independentes do tempo. Assim, vórtices topológicos foram obtidos a partir do tratamento numérico de equações diferenciais de primeira ordem. As estruturas resultantes possuem energia total mínima e campo elétrico nulo. Além disso, suas energias são proporcionais as suas cargas topológicas.

Apresentamos dois casos específicos. O primeiro é definido por $G(g) = g^{-2}(g^2 + 3)^2$, $w(g) = 2(g^2 + 1)$ e

$$V(g) = \frac{e^2 v^4}{2} g^2 (1 - g^2)^2, \quad (3.77)$$

e o segundo é definido por $G(g) = (g^2 + 1)^2$, $w(g) = 2g^2$ e

$$V(g) = \frac{e^2 v^4}{2} (1 - g^2)^2. \quad (3.78)$$

As soluções BPS para $a(r)$, $g(r)$, $B(r)$ e ε_{bps} são mostradas nas figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, para ambos os casos, para $n = 1$. Para efeito de comparação, são também mostradas as soluções usuais, obtidas a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. Em geral, as soluções generalizadas próprias ao segundo caso exibem o comportamento observado no contexto usual. Por outro lado, as soluções obtidas via o primeiro caso generalizado possuem as características gerais já observadas no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons-Higgs, no qual vórtices estáticos engendram campo elétrico não-nulo; ver as figuras 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8.

Ainda no Capítulo 3, adaptamos o segundo modelo generalizado ao estudo de teorias gêmeas [58]. Tais teorias, apesar de definidas por densidades de lagrangeana diferentes, engendram exatamente as mesmas soluções, além da mesma energia total [59]- [62].

Para tanto, ao invés de (3.76), utilizamos dois outros vínculos. O primeiro é dado por

$$w = G + \frac{g^2 - 1}{2g} \frac{dG}{dg}. \quad (3.79)$$

Além disso, o potencial $V(g)$ é suposto possuir a forma $V(g) = G(g) V_s(g)$, na qual

$$V_s(g) = \frac{e^2 v^4}{2} (g^2 - 1)^2. \quad (3.80)$$

Implementados estes vínculos, o modelo generalizado resultante engendra exatamente as mesmas configurações BPS já obtidas a partir do caso usual, i.e., via a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs; ver 1.1, 1.2 e 1.4. Além disso, tais configurações, apesar de caracterizadas por densidades de energia diferentes, possuem exatamente o mesmo valor de energia total.

Introduzimos dois modelos generalizados distintos. O primeiro é definido por $G(g) = g^2 + 1$, enquanto o segundo é definido por $G(g) = (g^2 + 1)(g^2 - 1)^2$. Tais modelos engendram as soluções obtidas no contexto usual. Portanto, voltamos nossa atenção para as respectivas densidades de energia, a partir das quais definimos não só uma densidade de energia física, mas também uma densidade de irrelevante. *A posteriori*, verificamos ser a densidade de energia física possuidora de toda a informação necessária ao cálculo da energia total das configurações BPS gêmeas.

As idéias apresentadas neste trabalho podem ser utilizadas em vários outros contextos, e com outros fins. Recentemente, vórtices generalizados foram obtidos no âmbito de uma eletrodinâmica de Born-Infeld-Higgs generalizada [67]. Assim, podemos, por exemplo, buscá-los também no contexto de uma eletrodinâmica de Born-Infeld-Chern-Simons-Higgs generalizada. Além disso, via um processo de redução dimensional, estruturas topológicas unidimensionais também podem ser investigadas. A obtenção de monopólos magnéticos e dyons a partir de teorias de Yang-Mills-Higgs generalizadas é outra frente de investigação possível, além de podermos buscar por configurações generalizadas no âmbito das teorias supersimétricas. Finalmente, via a utilização das funções $G(|\phi|)$ e $w(|\phi|)$, pode-se controlar a extensão das estruturas topológicas resultantes. Assim, podemos, por exemplo, utilizar estas funções no intuito de estabilizar configurações reconhecidamente problemáticas, como os vórtices semilocais [68, 69]. Algumas destas investigações estão em andamento, e os resultados devem se apresentados em breve.

Referências

- [1] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004).
- [2] D. Finkelstein, *J. Math. Phys.* **7**, 1218 (1966).
- [3] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973).
- [4] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **79**, 276 (1974).
- [5] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
- [6] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [7] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).
- [8] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [9] E. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [10] M. K. Prasad, C. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).
- [11] H. J. de Vega, F. A. Schaposnik, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2564 (1986).
- [12] R. Jackiw, E. J. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2234 (1990).
- [13] J. Hong, Y. Kim, P. Y. Pac, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2230 (1990).
- [14] S. K. Paul, A. Khare, *Phys. Lett. B* **174**, 420 (1986).
- [15] C. Lee, K. Lee, H. Min, *Phys. Lett. B* **252**, 79 (1990).
- [16] R. B. Laughlin, *Science* **242**, 525 (1988).

- [17] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **60**, 2677 (1988).
- [18] S. Desser, R. Jackiw, S. Templeton, Ann. Phys (N.Y.) **140**, 372 (1982).
- [19] A L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Mc-Graw Hill, New York, 1971).
- [20] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [21] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. A **262**, 237 (1961).
- [22] X. Jin, X. Li, D. Liu, Class. Quantum Gravity **24**, 2773 (2007).
- [23] C. Adam, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, J. Phys. A **42**, 089801 (2009).
- [24] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira, C. dos Santos, Phys. Rev. D **81**, 125016 (2010).
- [25] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes, Phys. Rev. D **81**, 125014 (2010).
- [26] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes, Eur. Phys. J. C **71**, 1833 (2011).
- [27] C. dos Santos, E. da Hora, Eur. Phys. J. C **70**, 1145 (2010).
- [28] C. dos Santos, E. da Hora, Eur. Phys. J. C **71**, 1519 (2011).
- [29] C. dos Santos, Phys. Rev. D **82**, 125009 (2010).
- [30] E. Babichev, V. Mukhanov, A. Vikman, J. High. Energy Phys. **02**, 101 (2008).
- [31] T. Chiba, T. Okabe, M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **62**, 023511 (2000).
- [32] C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).
- [33] V. Mukhanov, A. Vikman, J. Cosmol. Astropart. Phys. **02**, 004 (2005).
- [34] C. Armendariz-Picon, E. A. Lim, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 007 (2005).
- [35] A. Sen, J. High. Energy Phys. **07**, 065 (2002).
- [36] J. Garriga, V. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999).
- [37] R. J. Scherrer, Phys. Rev. Lett. **93**, 011301 (2004).

- [38] A. D. Rendall, *Class. Quantum Gravity* **23**, 1557 (2006).
- [39] E. Babichev, *Phys. Rev. D* **74**, 085004 (2006).
- [40] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, J. C. R. E. Oliveira, *Eur. Phys. J. C* **51**, 953 (2007).
- [41] C. Adam, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, *J. Phys. A* **40**, 13625 (2007).
- [42] E. Babichev, *Phys. Rev. D* **77**, 065021 (2008).
- [43] C. Adam, N. Grandi, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, *J. Phys. A* **41**, 212004 (2008).
- [44] M. Olechowski, *Phys. Rev. D* **78**, 084036 (2008).
- [45] C. Adam, N. Grandi, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, *J. Phys. A* **41**, 375401 (2008).
- [46] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, *Phys. Lett. B* **668**, 246 (2008).
- [47] D. Bazeia, A. R. Gomes, L. Losano, R. Menezes, *Phys. Lett. B* **671**, 402 (2009).
- [48] C. Adam, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, *J. Phys. A* **42**, 135401 (2009).
- [49] T. H. R. Skyrme, *Proc. R. Soc. A* **260**, 127 (1961).
- [50] L. Faddeev, A. J. Niemi, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1624 (1999).
- [51] D. A. Nicole, *J. Phys. G* **4**, 1363 (1978).
- [52] S. Deser, M. J. Du, C. J. Isham, *Nucl. Phys. B* **114**, 29 (1976).
- [53] H. Aratyn, L. A. Ferreira, A. H. Zimerman, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1723 (1999).
- [54] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 241601, 2003.
- [55] C. Adam, J. Sanchez-Guillen, R. A. Vazquez, J. A. Wereszczynski, *J. Math. Phys.* **47**, 052302 (2006).
- [56] C. M. C. Cantanhade, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, submetido ao *Phys. Rev. D*.

- [57] C. M. C. Cantanhade, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, trabalho em andamento.
- [58] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, Phys. Rev. D **85**, 045005 (2012).
- [59] M. Andrews, M. Lewandowski, M. Trodden, D. Wesley, Phys. Rev. D **82**, 105006 (2010).
- [60] D. Bazeia, J. D. Dantas, A. R. Gomes, L. Losano, R. Menezes, Phys. Rev. D **84**, 045010 (2011).
- [61] C. Adam, J. M. Queiruga, Phys. Rev. D **84**, 105028 (2011).
- [62] D. Bazeia, R. Menezes, Phys. Rev. D **84**, 125018 (2011).
- [63] D. Bazeia, Phys. Rev. D **46**, 1879 (1992).
- [64] R. Friedberg, T. D. Lee, Phys. Rev. D **15**, 1694 (1977).
- [65] R. Friedberg, T. D. Lee, Phys. Rev. D **16**, 1096 (1977).
- [66] R. Friedberg, T. D. Lee, Phys. Rev. D **18**, 2623 (1978).
- [67] D. Bazeia, E. da Hora, D. Rubiera-Garcia, Phys. Rev. D **84**, 125005 (2011).
- [68] E. Abraham, Nucl. Phys. B **399**, 197 (1993).
- [69] P. Forgács, S. Reuillon, M. Volkov, Phys. Rev. Lett. **96**, 041601 (2006).

Trabalhos Publicados.

1. Compact-like kinks and vortices in generalized models.

D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H.P. de Oliveira, C. dos Santos.

Phys. Rev. D **81**, 125016 (2010).

2. Generalized self-dual Chern-Simons vortices.

D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes.

Phys. Rev. D **81**, 125014 (2010).

3. Domain walls in a generalized Chern-Simons model.

C. dos Santos, E. da Hora.

Eur. Phys. J. C **70**, 1145 (2010).

4. Lump-like solitons in a generalized Abelian-Higgs Chern-Simons model.

C. dos Santos, E. da Hora.

Eur. Phys. J. C **71**, 1519 (2011).

5. Compact vortex in a generalized Born-Infeld model.

D. Bazeia, E. da Hora, D. Rubiera-Garcia.

Phys. Rev. D **84**, 125005 (2011).

6. BPS Solutions to a Generalized Maxwell-Higgs Model.

D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes.

Eur. Phys. J. C **71**, 1833 (2011).

7. Twinlike Models for Self-Dual Abelian-Higgs Theories.

D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes.

Phys. Rev. D **85**, 045005 (2012).