



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

João Pessoa-Paraíba

2011



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Propagação do momento linear e energia cinética
em cadeias granulares afiladas**

Luis Paulo Silveira Machado
Orientador: Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

João Pessoa-Paraíba

2011

M149p Machado, Luis Paulo Silveira.

Propagação do momento linear e energia cinética em cadeias granulares afiladas / Luis Paulo Silveira Machado.- João Pessoa, 2011.

75f. : il.

Orientador: Alexandre da Silva Rosas

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Física. 2. Momento linear. 3. Energia cinética. 4. Cadeia granular. 5. propagação de pulsos.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Propagação do momento linear e energia cinética em cadeias granulares afiladas

Luis Paulo Silveira Machado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba (PPGF-UFPB) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas (Orientador)

Prof. Dr. Giovani Lopes Vasconcelos (Membro Externo)

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo (Membro Interno)

João Pessoa-Paraíba

2011

Resumo

Recentemente, cadeias granulares afiladas têm sido objeto de estudo para o desenvolvimento de dispositivos “absorvedores” de impacto (ondas de choque). A característica deste sistema em atenuar ondas de choque (pulsos de momento linear), torna este material um excelente candidato para tais absorvedores. Assim, vários estudos neste sentido foram realizados, porém a maioria são de caráter numérico e, alguns, analíticos. Todavia, as aproximações analíticas apresentadas não demonstram bons ajustes com soluções numéricas. Neste trabalho estudamos analiticamente a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas unidimensionais de grãos esféricos que interagem segundo o potencial de Hertz. Aplicamos a aproximação binária, baseada na suposição que a energia transferida ao longo da cadeia ocorre através de colisões sucessivas entre duas partículas. Estudamos quatro configurações de afilamento: linear para frente, exponencial para frente, linear para trás e exponencial para trás. Com a Teoria Binária, prevemos corretamente as *tendências* de aumento e diminuição das propagações do momento linear e energia cinética. Contudo, para capturarmos os *valores corretos* das amplitudes dos pulsos dessas grandezas desenvolvemos uma correção numérico-analítica para as velocidades das partículas. Confrontamos os resultados com soluções numéricas das equações de movimento, onde utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados demonstram: bom acordo entre as teorias analítica e numérica; as cadeias afiladas exponencialmente para frente são as mais indicadas nos projetos de absorvedores (apresentam decaimento exponencial do momento linear); um cenário mais fraco para a propagação da energia cinética (devido a dependência quadrática com a velocidade), porém o momento linear é a grandeza relevante no contexto de impactos. Além disso, obtivemos bom acordo com resultados experimentais apresentados por F. Melo e colaboradores (2006). Dessa forma, apresentamos expressões analíticas que capturam corretamente as propagações de momento linear e energia cinética em cadeias granulares afiladas. Estes sistemas, realmente demonstram serem excelentes para absorver ondas de choque, atenuando pulsos de momento linear e saturando pulsos de energia cinética. Uma extensão deste trabalho será estudar cadeias decoradas afiladas com pré-compressão, que permitem a absorção de ondas de choque com número menor de grãos nas cadeias (cadeias curtas).

Palavras-chave: momento linear; energia cinética; propagação de pulsos; cadeia granular afilada.

Abstract

Recently, tapered granular chains have been studied for the development of impact-absorbing devices (shock waves). The characteristic of this system to mitigate shock waves (pulses of linear momentum), makes this material an excellent candidate for such absorbers. Therefore, many studies have been conducted in this direction, but most are numeric character, and some analytical. However, the analytical approximations presented do not show good fits with numerical solutions. In this work we study analytically the propagation of linear momentum and kinetic energy in one-dimensional tapered chains of spherical grains that interact according to the Hertz potential. We apply the binary approximation, based on the supposition that the energy transferred along the chain occurs through successive collisions between two particles. Four settings taper were studied: forward linear, forward exponential, backward linear and backward exponential. With the Binary Theory, we correctly anticipate the *trends* of increase and decrease the propagation of linear momentum and kinetic energy. However, to capture the *correct values* of the amplitudes of the pulses of these quantities we developed a numerical-analytic correction to the velocities of particles. Compared the results with numerical solutions of the equations of motion, where we use the Runge-Kutta fourth order. The results show: good agreement between the analytical and numerical theories; forward exponentially tapered chains are the most suitable in the design of absorbers (present exponential decay of linear momentum); a weaker scenario for the propagation of kinetic energy (due to quadratic dependence with the velocity), but the linear momentum is the quantity relevant in the context of impacts. Furthermore, we found good agreement with experimental results presented by F. Melo et al (2006). Thus, we present analytical expressions that capture correctly the propagation of linear momentum and kinetic energy in tapered granular chains. These systems actually demonstrate be excellent for absorbing shock waves, attenuating pulses of linear momentum and saturating kinetic energy. An extension of this work is to study tapered decorated chains and with pre-compression, allowing the absorption in chains composed of a number smaller grains (short chains).

Keywords: momentum; kinetic energy; pulse propagation; tapered granular chain.

Agradecimentos

Agradeço profundamente à minha mãe, Rosa Maria Silveira Machado, por seu eterno amor e ao meu pai, Wandick Paulo Cavalcante Machado, por me mostrar o caminho da educação. Meus esforços, até o momento, sempre se deram em nome e orgulho de ambos. Em prol disso, minha vontade sempre crescerá.

Sou muito grato à minha irmã, Ariany Silveira Machado (que amadureceu bastante nestes tempos em que se tornou “filha única”), sou grato pelas suas decisões, iniciativas e força, que conjuntamente mudaram a família. Devido a este mestrado, não pude comparecer a apresentação do seu TCC, colação de grau, missa e festa de formatura. Minha ausência é justa, mas a este custo.

Minha gratidão ao meu irmão, Átila Afonso Silveira Machado, excelente irmão e amigo. Em razão deste curso, não estive presente no seu casamento ou mesmo no nascimento da sua filha, a qual me convidou para ser padrinho. Obrigado!

Agradeço a Andreia Alves Machado e Karina Alves Machado (cunhada e sobrinha/afilhada, respectivamente), as alegrias que me trazem apenas com as suas histórias, me motivaram a continuar e trabalhar. Em cumprimento ao total compromisso com o mestrado, não estive presente na festa de 1 ano da minha afilhada, o que pode ser um erro grave aos olhos de qualquer mãe. Em contrapartida, espero servir de exemplo para esta nova geração da família.

Minha plena gratidão, a Maricélia Lopes minha namorada e melhor amiga, maior incentivadora para este trabalho. A ela agradeço a paciência, amizade, apoio, ânimo, suporte emocional e compreensão. Agradeço as longas conversas que me fizeram sentir menos só. Agradeço a espera por 2 anos. Por causa deste mestrado, não presenciei sua apresentação de TCC, colação de grau e momentos muito difíceis em que tinha que estar ao seu lado. Por tudo isto, minha gratidão nunca será demasiada.

O apoio contínuo e irrestrito da família é fundamental para quem está sozinho e muito longe de casa (2110 km), isso sempre tive. Durante estes 2 anos, não estive presente em diversos outros momentos importantes das pessoas que amo. Pela compreensão e apoio de todos, sou muito grato!

Agradeço à Alexandre Rosas, orientador deste mestrado. Ter aceito me orientar, responder minhas incertezas e dúvidas (grandes e pequenas), *sempre* me receber em sua sala são os motivos da minha admiração. Acima de tudo, sou grato pelo amadurecimento, que me proporcionou, como estudante de física e futuro profissional.

Meu orientador de iniciação científica, Fabrício Potiguar, também é importante na minha trajetória sendo a primeira pessoa que acreditou no meu potencial. Sem conhecê-lo, não teria escrito este trabalho

ou mesmo, neste momento, finalizado o mestrado.

Além disso, esta dissertação seria mais difícil de realizar sem ajuda de grandes amigos como o Dr. Rubens Silva e família (Erick e Larissa) que me deram abrigo tão longe de casa, ou ainda, Leocádio, Wemerson (Marruá) e Bertúlio bons amigos desde primeiro semestre. Fiz grande amizade com colegas de sala de trabalho (agora amigos): Herondy, Paulo Rogério, Edinelson, Justino, Aliliane e Ítalo. Este último, juntamente com Lázaro me deram incontáveis ajudas no desenvolvimento deste trabalho. Ampliei meu ciclo de amizades estudando para o Exame Unificado de Física com Danielle Lima, Leonardo Maximino e Gislaine Varão. Outras pessoas me ajudaram ao seu modo como Lúcio, Fabrício, Jilvan, Alex e Marcos. A todos agradeço o bom convívio.

Sumário

Lista de Figuras	vii
1 Introdução	15
2 Modelo, Teoria Binária e método numérico	21
2.1 Modelos de cadeias granulares	21
2.2 A Teoria Binária	25
2.3 Teoria Binária em cadeias afiladas	27
2.3.1 Cadeias afiladas para trás (raios crescem)	28
2.3.2 Cadeias afiladas para frente (raios diminuem)	35
2.4 Correção numérico-analítica	42
2.4.1 Cadeias afiladas para trás (raios crescem)	42
2.4.2 Cadeias afiladas para frente (raios diminuem)	43
2.5 Integração numérica: Método de Runge-Kutta de quarta ordem	44
3 Resultados numéricos e analíticos	47
3.1 Previsões da aproximação binária para o momento linear e energia cinética	47
3.1.1 Cadeias afiladas para trás (raios crescem)	48
3.1.2 Cadeias afiladas para frente (raios diminuem)	52
3.2 Método de correção	58
3.2.1 Cadeias afiladas para trás	58
3.2.2 Cadeias afiladas para frente	64

4 Considerações Finais	72
Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

- 2.1 Instante inicial das cadeias granulares 1D: os grãos estão todos em repouso (exceto o da extremidade esquerda) e apenas se tocam (não existe pré-compressão). A posição do grão mais a esquerda coincide com a origem do sistema (identificamos este grão como $k = 1$), assim sempre visualizamos a cadeia da esquerda para a direita. V_1 , velocidade do grão na extremidade esquerda, corresponde a perturbação inicial. O item (a) representa uma cadeia afilada para trás e (b) afilada para frente. 23
- 2.2 Perfil do pulso de velocidade gerado por v_1 unitário, em função da posição dos grãos na cadeia (k), para uma cadeia afilada linearmente para *trás*. No item (a) temos o tempo $t = 6$, em (b) $t = 60$ e em (c) $t = 270$. As grandezas são adimensionais devido ao reescalamiento. Após a passagem do pulso, os grãos apresentam $v_k < 0$ como consequência da direção de afilamento, eles recuam. 24
- 2.3 Perfil do pulso de velocidade gerado por v_1 unitário, em função da posição dos grãos na cadeia (k), para uma cadeia afilada linearmente para *frente*. No item (a) temos o tempo $t = 5$, em (b) $t = 35$ e em (c) $t = 55$. As grandezas são adimensionais devido ao reescalamiento. Conforme o pulso se propaga uma cauda atrás da frente de onda é formada, esta cauda é constituída de grãos que continuam se deslocando para frente. A direção do afilamento é a responsável. 24
- 2.4 Comparação entre dados da integração numérica (círculos sólidos) e aproximação binária (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de velocidade em função de k em cadeias afiladas linearmente para trás, com $S = 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.9 de cima para baixo. 29
- 2.5 $v(t)$ em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.4$ até 0.9 em intervalos de 0.1 de cima para baixo. Círculos abertos são os dados analíticos e círculos sólidos os numéricos. 30
- 2.6 T_k em cadeias afiladas linearmente para trás. Difícil distinção entre os dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) devido ao excelente acordo. De baixo para cima, $S = 0.1$ até 0.9 em intervalos de 0.1 31

2.7	Posição do pulso (em unidades de grãos, k) como função do tempo para cadeias afiladas linearmente para trás. Difícil distinção entre os dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) devido ao bom acordo. De cima para baixo, $S = 0.3$ até 0.9 em intervalos de 0.1	31
2.8	Variação da amplitude do pulso de velocidade em função de k para cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01, 0.02, 0.05$ e 0.08 de cima para baixo. Os círculos sólidos representam os resultados numéricos, enquanto os círculos abertos a aproximação binária.	33
2.9	Comparação entre os dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de $v(t)$ em cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01, 0.02, 0.05$ e 0.08 de cima para baixo.	34
2.10	Comparação entre os dados numéricos (círculos sólidos) e os dados analíticos (círculos abertos) para o tempo de residência em função de k para cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de cima para baixo. O acordo entre as duas teorias é bom a ponto de dificultar a distinção dos dados.	35
2.11	Comparação entre os dados numéricos (círculos sólidos) e os dados analíticos (círculos abertos) para a posição do pulso (em unidades de grãos) em função do tempo para cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de cima para baixo.	36
2.12	Comparação entre dados numéricos (círculos sólidos), fornecidos por integração direta das equações de movimento, e dados analíticos (círculos abertos), obtidos com a aproximação binária, para a variação da amplitude do pulso de velocidade como função de k em cadeias afiladas linearmente para frente. $S = 0.001$ até 0.008 em intervalos de 0.001 de baixo para cima.	37
2.13	Comparação entre dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de velocidade com o tempo para cadeias afiladas linearmente para frente, com $S = 0.001$ até 0.01 de baixo para cima.	39
2.14	Comparação entre dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de velocidade em função de k em cadeias afiladas exponencialmente para frente, com $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de baixo para cima.	40

2.15	Resultados para a amplitude do pulso de velocidade em função do tempo em cadeias afiladas exponencialmente para frente, onde os círculos sólidos correspondem aos dados numéricos enquanto os círculos abertos aos dados analíticos, com $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de baixo para cima.	41
3.1	O momento linear como função de k para cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de baixo para cima, em intervalos de 0.1 . A linha contínua corresponde a uma reta arbitrária de inclinação $\frac{3}{2}$, como previsto pela teoria binária.	48
3.2	E_k em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de cima para baixo, em intervalos de 0.1 . A linha corresponde a um reta horizontal arbitrária indicando o comportamento assintótico previsto pela aproximação binária.	49
3.3	P_k em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de baixo para cima, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.	50
3.4	O decaimento da amplitude do pulso de $\ln(E_k)$ em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.	51
3.5	P_k em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de cima para baixo, em intervalos de 0.001 . As linhas contínuas representam a regressão linear dos dados numéricos.	53
3.6	A energia cinética como função de k para cadeias afiladas linearmente para frente para $S = 0.001$ até 0.01 , de cima para baixo.	54
3.7	O momento linear como função de k em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de baixo para cima, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.	55
3.8	O decaimento de E_k em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.	56
3.9	$\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de baixo para cima, em intervalos de 0.1 . Estimamos que a razão seja a constante 1.55	58

3.10	Comparações entre as velocidades previstas pela aproximação binária (círculos abertos), corrigida pelo fator 1.55, e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.8 de cima para baixo, em intervalos de 0.1.	59
3.11	Comparação entre P_k fornecido pela aproximação binária após as correções nas velocidades (círculos abertos) e determinado numericamente (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de baixo para cima, em intervalos de 0.1.	60
3.12	O decaimento de E_k , após correções nas velocidades, dado pela aproximação binária (círculos abertos) e por determinação numérica (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de cima para baixo, em intervalos de 0.1.	60
3.13	$\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ em cadeias afiladas exponencialmente para trás com q variando de 0.01 até 0.08 de baixo para cima, em intervalos de 0.01.	61
3.14	Regressão linear de $B(q)$ (item a) e $D(q)$ (item b) determinados pelas equações (2.61) e (2.62), respectivamente, para os valores da tabela 3.6. Encontramos $a = 1.64393211$, $b = 0.0257163$, $c = 0.212103694$ e $d = 1.82693$	62
3.15	Comparações entre as velocidades previstas pela aproximação binária (círculos abertos), equação (2.63), e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de cima para baixo, em intervalos de 0.01. O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os dados.	63
3.16	P_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de baixo para cima, em intervalos de 0.01. Os círculos abertos são os dados analíticos e os círculos sólidos os numéricos. O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os dados.	63
3.17	O decaimento de E_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de cima para baixo, em intervalos de 0.01. Os círculos abertos correspondem aos dados analíticos e os círculos sólidos aos numéricos.	64
3.18	$\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ em cadeias afiladas linearmente para frente com S variando de 0.001 até 0.008 de baixo para cima, em intervalos de 0.001. Estimamos que a razão seja a constante 1.47.	65
3.19	v_k , corrigida pelo fator 1.47 (círculos abertos) e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de baixo para cima, em intervalos de 0.001. O melhor acordo está em S com valor pequeno.	66

3.20	P_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de cima para baixo, em intervalos de 0.001 . Os círculos abertos são os dados analíticos e os círculos sólidos os numéricos. Como em v_k , para S com valor pequeno as teorias concordam bem.	66
3.21	O decaimento de E_k em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de cima para baixo, com intervalos de 0.001 . Os círculos abertos correspondem aos dados analíticos e os círculos sólidos aos numéricos. Em destaque está a comparação para $S = 0.001$, onde temos excelente acordo.	67
3.22	$\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ em cadeias afiladas exponencialmente para frente com q variando de 0.01 até 0.06 de baixo para cima, em intervalos de 0.01	68
3.23	Regressão linear de $B'(q)$ (item a) e $D'(q)$ (item b), previstas de modo igual as equações (2.61) e (2.62), respectivamente, para os valores mostrados na tabela 3.7. Encontramos $a' = 1.271724686$, $b' = -0.0333648$, $c' = 12.278134531$ e $d' = 2.59475$	69
3.24	Comparações entre as velocidades analíticas (círculos abertos), equação (2.66), e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de baixo para cima, em intervalos de 0.01 . O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os resultados.	69
3.25	P_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . Os círculos abertos são dados analíticos e os círculos sólidos os numéricos. O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os resultados.	70
3.26	O decaimento de E_k , após correções nas velocidades, para cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de cima para baixo, em intervalos de 0.01	70

1 Introdução

Materiais granulares estão presentes em muitas atividades humanas. Tais materiais servem desde matéria prima em setores da indústria como mineração, construção, agricultura, de alimentos e na indústria farmacêutica quanto no cotidiano [1]. Além da clara conotação econômica, os materiais granulares também desempenham papel fundamental na evolução temporal de processos ambientais como dunas, fluxo de avalanches, desmoronamentos, erosão, sedimentação e até formação de planetas e galáxias [2]. Apesar do exposto, as pesquisas nesta área ainda são iniciais. Isso se deve à dificuldade de entender as propriedades dinâmicas do material, causado pela forte não-linearidade das forças entre as partículas e distribuição complexa [3]. Recentemente o prêmio Nobel P. G. de Gennes escreveu “a Física dos Materiais Granulares, no início do século XXI, se encontra num estágio de conhecimento equivalente ao que se verificava na Física do Estado Sólido nos anos trinta do século XX” [4]. Esta citação, apesar de considerarmos uma boa analogia pode deixar implícito que em algum dia a Física de Grãos alcançará o status de conhecimento da Física do Estado Sólido no início do século XXI, o que não acreditamos.

Os materiais granulares são compostos por uma grande quantidade de partículas macroscópicas, não coesivas, com fronteiras bem definidas que interagem repulsivamente e que em alguns casos a gravidade tem papel importante [5]. No sistema estudado neste trabalho, a ação da gravidade é irrelevante devido a distribuição das partículas estar em um plano horizontal (como se estivessem dispostas no chão). Ainda, duas características marcantes nos sistemas granulares são: a não influência da temperatura e a interação entre os grãos ser dissipativa devido ao atrito estático e colisões inelásticas [6]. Contudo, a dissipação no nosso sistema é pequena e desconsideramos qualquer efeito dissipativo nesta dissertação. Como exemplos de materiais que possuem as características de materiais granulares temos areia, adubos, fármacos, farinha, sementes, pregos, cliques de papel, vidros, pilhas, soja, arroz, açúcar, grãos em geral etc.

Em particular, neste trabalho estamos interessados na propagação de pulsos em materiais granulares (em específico, cadeias unidimensionais) compostos por grãos esféricos, um dos materiais granulares mais simples, e uma área de pesquisa muito ativa. Um pequeno resumo com os avanços na área, re-

ferências [7–25], será feito adiante. Além do interesse teórico em problemas fundamentais da dinâmica de pulsos na presença de interações altamente não-lineares [7], o interesse prático para muitas aplicações também chama atenção. Dentre as principais aplicações estão a detecção de objetos estranhos no solo e, sobretudo, a dinâmica e absorção da propagação de ondas de choque [8].

Atentando para as aplicações, há bastante tempo as pessoas têm usado sacos ou montes de areia para proteção contra impactos. Alguns exemplos são o uso militar de sacos de areia para o posicionamento de postos avançados em guerras, dispositivos de proteção contra colisões em postes de energia elétrica (estrutura simples constituída de um tubo de concreto preenchido com areia grossa), barreiras de proteção compostas de areia em cabeceiras de pistas de corridas etc.

Sendo assim, com o objetivo de desenvolver materiais granulares mais sofisticados para fornecer melhor proteção contra ondas de choque, Hong [9] construiu teoricamente um “recipiente granular” usando uma série de seções com partículas e, por resolução numérica, previu que esse recipiente pode aprisionar energia em uma região particular e liberá-la pouco a pouco na forma de ondas solitárias.

Não obstante, um dos pioneiros no estudo de cadeias de grãos, tanto teórico quanto experimental, foi Nesterenko [10–12] mostrando (há quase 3 décadas) que um pulso iniciado em uma das extremidades de uma cadeia granular, sem pré-compressão, de grãos idênticos e apenas sob a ação de forças repulsivas, pode resultar em uma onda solitária se propagando através do meio. Desde então esse sistema e suas variantes têm sido objeto de estudo. Cabe ressaltar que o avanço computacional contribuiu significativamente neste sentido. Esses primeiros trabalhos também divulgaram o caráter não-linear do problema: as equações de movimento das partículas podem ser aproximadas por uma equação parcial não-linear contínua que admite uma solução tipo sóliton (mais a frente veremos que se tratam de ondas solitárias¹) para perturbações se propagando na cadeia.

Desde o trabalho inicial de Nesterenko alguns avanços já foram obtidos na modelagem, simulação e solução das equações associadas com importantes características dos materiais granulares. Dentre os fatores que têm sido analisados podemos destacar o fato de o meio ser discreto, a importância da dimensionalidade do sistema, a presença de desordem e cargas externas como a gravidade [13]. Modelos de cadeias também têm sido generalizados para estudar interação entre ondas solitárias, impurezas na cadeia, dissipação e polidispersividade². Vários estudos puramente *numéricos* [14–17] foram devotados para estudar tais modelos. Dentre estes, há a indicação que ondas idênticas e com direção de propagação opostas formadas em cadeias de grãos iguais ao colidirem não preservam as características de sóliton,

¹Ondas solitárias são ondas que se propagam por longas distâncias com sua forma praticamente inalterada devido sua baixa dispersão. O sóliton é um tipo específico de onda solitária que não interage com outras ondas, preserva a sua forma em colisões.

²Cadeias compostas por vários tipos de grãos quanto a massa e tamanho.

portanto tratam-se de ondas solitárias [14]. No mesmo trabalho, mostra-se que após a colisão são geradas múltiplas ondas solitárias secundárias com $\sim 0.5\%$ ou menos da energia da onda solitária original. Em outra pesquisa [15], foram apresentados dados da relação entre o comprimento da onda solitária e a lei de interação (ou seja, a influência do expoente da lei de Hertz). Também, mostrou-se a distinção entre o problema do sóliton em sistemas contínuos e o cruzamento de duas ondas iniciadas nas extremidades opostas de uma cadeia granular (sistema discreto).

Igualmente, explicações sobre o complexo processo de origem das ondas solitárias secundárias foram propostas [16], sendo mostrado que depois da colisão entre duas ondas solitárias idênticas, uma pequena parte da energia total das duas ondas originais permanece no ponto de colisão. Essa energia então começa a se propagar em ambas as direções dando origem as ondas solitárias secundárias.

Em outro trabalho, novos resultados acerca de formas de sondar impurezas em sistemas granulares em 3D, analisando o produto da interação de uma onda incidente com a impureza, foram relatados [17]. Sugerindo uma espectroscopia via pulsos mecânicos. Na ocasião, foram estudados grãos com massas leves (esferas plásticas) e pesadas, ambas exercendo a função das impurezas, postas no meio de uma cadeia, semelhante à estudada por Nesterenko. A massa leve produz ondas secundárias enquanto a massa pesada essencialmente gera pulsos de reflexão.

Além disso, dentre os modelos de cadeia granular com atrito, recentemente foi apresentada uma teoria analítica para a dinâmica de pulsos de cadeias de grãos cilíndricos e esféricos [13]. Nessa teoria, foram obtidos resultados que previamente apenas tinham sido obtidos numericamente. Foram estudados casos com e sem atrito. Para o caso cilíndrico, o principal efeito de um fraco atrito é um decaimento global exponencial na energia e, um efeito inesperado, a velocidade das partículas ricocheteadas no momento da injeção é maior na presença do atrito do que no caso conservativo. Para o caso esférico, a velocidade do pulso é menor do que para grãos cilíndricos e não existe ricochete dos grãos, ambos resultados para cadeia conservativa. Quando levado em conta o atrito, a energia também mostra comportamento de decaimento exponencial.

Em outra investigação, via simulação numérica e comparações com teoria de aproximação contínua (teoria analítica) para ondas de comprimento grande, é exibido o comportamento da perturbação que se propaga ao longo de uma cadeia monodispersa (cadeia de grãos idênticos) sem pré-compressão e, que, reflete em uma parede. Mostrou-se que as principais características de reflexão das ondas solitárias dependem das propriedades mecânicas da parede [18].

Cadeias que apresentam polidispersividade (objeto de estudo deste trabalho), por outro lado, são estruturas capazes de atenuar pulsos de choque. Logo, podem ser utilizadas como dispositivos de proteção

contra explosões, fortes impactos e colisões. Tratam-se de sistemas relevantes do ponto de vista tecnológico. Sendo assim, fica evidenciada a importância de se estudar cadeias onde a massa e/ou tamanho dos grãos sistematicamente diminuem ou aumentam, estas são as chamadas *cadeias afiladas*, bem como cadeias que apresentam grãos com massa ou tamanho diferentes distribuídos periodicamente em uma cadeia uniforme, denominadas na literatura de *cadeias decoradas*. Nestas últimas, a distribuição de massas e tamanhos pode ocorrer de modo aleatório ou por algum procedimento visando uma otimização para certo propósito em particular. Esses sistemas são exemplos de cadeias com polidispersividade e se o sistema for composto por partículas idênticas será classificado como monodisperso.

Recentemente foi mostrado, através de integração numérica das equações de movimento, que um pequeno alinhamento de esferas de tamanho progressivamente menor colocadas horizontalmente em uma caixa apropriada pode absorver $\sim 80\%$ da força e $\sim 90\%$ da energia de um pulso incidente [19]. De maneira igual, buscando melhorar as soluções para cadeias ainda menores (cadeias curtas), outros resultados (utilizando cadeias decoradas afiladas) foram apresentados em diagramas para a energia cinética normalizada³ [20]. Novamente, os dados ilustraram a impressionante capacidade de absorção de energia em cadeias granulares com polidispersividade.

De modo semelhante, foi apresentado um estudo analítico e numérico da propagação de pulsos em cadeias afiladas horizontais de esferas elásticas colocadas entre duas paredes rígidas [21]. Os dados indicaram que as relações entre as energias cinéticas do menor para o maior grão possuem dependência gaussiana em relação ao afilamento e um decaimento exponencial quando o número de grãos aumenta. As conclusões são independentes do tamanho do sistema, sendo aplicáveis aos alinhamentos afilados de micro-esferas, bem como macroscópicas e, dessa forma, mais facilmente realizáveis em laboratório. Os resultados demonstram a capacidade destas cadeias de saturar os pulsos de energia e agir como potenciais dispositivos para absorção de impactos.

Em [19–21] foram introduzidas *aproximações de esferas duras*, teoria analítica, que usa conservação de energia e momento linear para estudar a dinâmica da cadeia. Essa aproximação, assume que as colisões entre os grãos que compõem a cadeia ocorrem tal como sequências de colisões independentes, onde o potencial é infinito e a transferência de energia e momento linear são *instantâneas*. Contudo, soluções deste tipo quando comparadas com soluções numéricas não mostram bom acordo. A razão, claramente, é devido ao potencial.

A partir de todo o exposto, é notório que quase todos os resultados para propagação de pulsos em cadeias granulares são numéricos e por isso, previsivelmente, limitados uma vez que resultados numéricos não podem ser estendidos para outros modelos de cadeias. Os trabalhos analíticos existentes são pontu-

³Razão entre a energia cinética do último e primeiro grão da cadeia.

ais e, destes, poucos mostram bom ajuste com soluções numéricas. Teorias analíticas são, em princípio, possíveis se uma aproximação contínua é válida. Esse tipo de aproximação, primeiramente, foi implementada com sucesso para cadeias com monodispersividade [2, 3, 10, 12, 13, 22]. Contudo, em geral encontramos poucos resultados analíticos para sistemas envolvendo polidispersividade. Buscando reverter tal contexto, foram obtidas, há pouquíssimo tempo (2009), soluções analíticas para a velocidade e outras características do pulso usando aproximação de colisões binárias para cadeias afiladas [7]. Tais resultados foram corroborados, no mesmo trabalho, por comparação com integração numérica das equações de movimento. Apesar dos excelentes resultados obtidos que preveem corretamente o comportamento qualitativo do pulso de velocidade, não foram obtidos os valores corretos para a velocidade de cada grão. Essa grandeza é fundamental para o estudo da propagação do momento linear e energia cinética na cadeia. Esse não ajustamento das velocidades é fruto da suposição da Teoria Binária para a propagação do pulso. Tal teoria, supõe que o pulso é transmitido a partir de colisões binárias, colisões de duas em duas partículas. Assim, usa-se a conservação do momento linear e energia para estimar algumas características do pulso, como: a variação da amplitude da velocidade, tempo de residência do pulso no grão e tempo total de propagação. A aproximação binária apresenta sucesso para estudar algumas destas grandezas (em especial grandezas temporais). Entretanto, apenas os comportamentos qualitativos das variações das amplitudes das velocidades são capturados. A presença da terceira partícula, que desempenha um papel importante na propagação do pulso, não é levada em consideração. Gerando o não ajuste na velocidade.

Vale destacar que a principal diferença entre a aproximação de esferas duras introduzidas em [19–21] e a *aproximação binária*, que será utilizada neste trabalho, é o tempo de permanência do pulso em cada grão, o que advém do potencial de interação entre as partículas empregados em cada aproximação. Para a teoria de esferas duras os grãos são tomados como rígidos (caroços) e, assim, o potencial é infinito e a transmissão do pulso é instantânea. Enquanto que na Teoria Binária (discutida no capítulo seguinte), o potencial é o de Hertz, potencial macio, e o pulso leva um certo tempo para ser transmitido.

Ainda na área de polidispersividade, a aproximação binária já foi introduzida em cadeias decoradas [23, 24]. Em 2004, foram estudadas algumas propriedades cinéticas do pulso em cadeias que intercalam grãos pequenos e grandes (*cadeia decorada simples*) [23]. O efeito dos grãos pequenos, analiticamente, foi capturado por cadeias não-decoradas de grãos grandes com as massas apropriadamente renormalizadas. No mesmo trabalho, foram estudadas cadeias afiladas linearmente para frente decoradas por grãos pequenos idênticos através do mesmo procedimento analítico. Em 2010, os mesmo autores [24], estudaram a propagação do pulso em cadeias decoradas onde os grãos pequenos têm o tamanho escolhido aleatoriamente.

Por último, uma importante referência neste trabalho se encontra em um estudo experimental realizado por F. Melo e colaboradores em 2006 [25]. Na ocasião, foram apresentados resultados da propagação do momento linear em cadeias granulares afiladas para frente, os autores mostraram que a amplitude do pulso de momento linear decai e que o pulso de velocidade acelera durante a propagação.

Levando em conta todo o exposto, neste trabalho nós desenvolvemos um melhoramento numérico-analítico, tratado no próximo capítulo, para a previsão correta das velocidades das partículas durante a propagação do pulso em quatro diferentes tipos de cadeias granulares afiladas, via aproximação binária. Dessa maneira, estaremos aptos a estudar analiticamente a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas de grãos.

O presente trabalho, encontra-se organizado do seguinte modo: no capítulo 2 apresentamos os modelos de cadeias granulares, a teoria binária para cadeias afiladas (incluindo resultados disponíveis na literatura, em particular da referência [7]) e o método analítico-numérico de correção proposto para as velocidades (principal contribuição deste trabalho). No término deste capítulo, descrevemos brevemente o método numérico utilizado para integrar as equações de movimento, que serviram de base para comparação com os dados analíticos. No capítulo 3, são apresentados os resultados e suas interpretações. Por fim, as considerações finais com um resumo do trabalho e perspectivas futuras são objeto do capítulo 4.

2 Modelo, Teoria Binária e método numérico

Neste capítulo são discutidos o modelo, a Teoria Binária e o método numérico empregado nessa dissertação. Assim, este capítulo encontra-se organizado em 5 seções. Na primeira, são abordados o modelo de cadeia granular e as condições iniciais do sistema. Na seção seguinte, apresentamos o método analítico (Teoria Binária) utilizado para estudar a propagação do momento linear e energia cinética. Na terceira seção, de modo conjunto, são descritas as regras de afilamento, adequações da aproximação binária para cadeias afiladas e motivações teóricas para o presente trabalho. Na quarta seção, abordamos as correções propostas para as velocidades das partículas a partir da Teoria Binária (a qual é a principal contribuição deste trabalho). Ao final deste capítulo, quinta seção, discutimos o método numérico empregado para integrar as equações de movimento e corroborar os resultados analíticos.

A nossa teoria analítica, Teoria Binária, é baseada no fato de que o pulso de velocidade em cadeias granulares é frequentemente estreito. Portanto, recorremos a uma aproximação via colisões de duas em duas partículas que nos conduz a expressões analíticas para várias quantidades que caracterizam o pulso. Tal teoria foi introduzida anteriormente em [22] e usada nas referências [7, 23, 24, 28]. Nessa dissertação, nós generalizamos esta teoria para a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas, tanto com o afilamento na direção da propagação quanto na direção contrária. Acerca dos procedimentos de afilamento, são descritos os casos linear e exponencial.

Não obstante, o algoritmo numérico discutido é o método de Runge-Kutta de quarta ordem que é amplamente utilizado para integração de equações diferenciais. Assim, passemos para o modelo (potencial de interação entre as partículas, condições iniciais etc).

2.1 Modelos de cadeias granulares

Nós consideramos cadeias conservativas de grãos (colisões perfeitamente elásticas) em que todos os grãos são compostos do mesmo material, ou seja, as propriedades elásticas e densidade (ρ) são constantes. Além disso, os grãos estão inicialmente apenas em contato, não existindo pré-compressão. Dentro das características de materiais granulares secos, o potencial entre as partículas é puramente repulsivo¹, proporcional a compressão e existente apenas enquanto houver contato. Sendo assim, o potencial segue a lei de Hertz [29, 30] de acordo com a seguinte lei de potência

$$V(\delta_{k,k+1}) = \begin{cases} \frac{a}{n} r'_k |\delta_{k,k+1}|^n & \text{para } \delta \leq 0, \\ 0 & \text{para } \delta > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde definimos

$$\delta_{k,k+1} = y_{k+1} - y_k, \quad (2.2)$$

sendo a uma constante que depende do módulo de Young e da razão de Poisson², e y_k corresponde ao deslocamento do grão k da sua posição de equilíbrio. O expoente n , que depende da geometria dos grãos, é $\frac{5}{2}$ para a simetria esférica considerada aqui, segundo o potencial de Hertz. r'_k na equação (2.1) é definido como

$$r'_k = \left(\frac{2R'_k R'_{k+1}}{R'_k + R'_{k+1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

onde R'_k é o raio principal de curvatura da superfície do k -ésimo grão no ponto de contato. De tal maneira, a equação de movimento para o grão k é

$$M_k \frac{d^2 y_k}{d\tau^2} = a r'_{k-1} (y_{k-1} - y_k)^{n-1} \theta(y_{k-1} - y_k) - a r'_k (y_k - y_{k+1})^{n-1} \theta(y_k - y_{k+1}), \quad (2.4)$$

onde $M_k = \frac{4}{3} \pi \rho (R'_k)^3$. A função de Heaviside $\theta(y)$ assegura que a contribuição para a aceleração só existirá durante o contato.

O sistema que estudamos é composto por um alinhamento de grãos, onde todos estão com os eixos alinhados, inicialmente em repouso (com exceção do grão mais à esquerda), apenas encostados uns aos outros e na posição de equilíbrio (não existe pré-compressão ou interação inicial). Conforme a figura 2.1, duas situações são consideradas: uma cadeia onde os grãos sistematicamente aumentam de tamanho, denominada de *cadeia afilada para trás* (figura 2.1 (a)) e outro alinhamento onde os grãos diminuem de tamanho, *cadeia afilada para frente* (figura 2.1 (b)). A origem da cadeia é atribuída, sempre, ao grão mais à esquerda. Dessa forma, ao grão na origem chamamos de $k = 1$, ao grão à sua direita de $k = 2$,

¹Em materiais granulares molhados além de forças de repulsão existem forças de coesão para curtas distâncias, devido a uma fina camada do fluido envolver cada grão que os força a manterem o contato [27].

²Módulo de Young é um parâmetro mecânico que proporciona uma medida da rigidez de um material sólido. Contudo, neste parâmetro somente é considerada a deformação longitudinal (DI) e qualquer material elástico ao ser “esticado” sofre também uma deformação transversal (Dt) que é proporcional à deformação longitudinal. Deste modo, define-se como razão de Poisson: $-\frac{Dt}{DI}$.

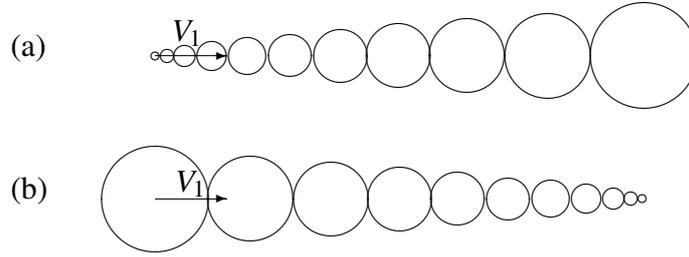


Figura 2.1: Instante inicial das cadeias granulares 1D: os grãos estão todos em repouso (exceto o da extremidade esquerda) e apenas se tocam (não existe pré-compressão). A posição do grão mais a esquerda coincide com a origem do sistema (identificamos este grão como $k = 1$), assim sempre visualizamos a cadeia da esquerda para a direita. V_1 , velocidade do grão na extremidade esquerda, corresponde a perturbação inicial. O item (a) representa uma cadeia afilada para trás e (b) afilada para frente.

ao terceiro grão de $k = 3$ e assim por diante. Com isso, visualizamos a cadeia, em todos os casos, da esquerda para a direita. Conseqüentemente, identificamos a velocidade de cada partícula com índice k e a velocidade inicial da partícula na origem é V_1 , que caracteriza a perturbação inicial do sistema.

Por conveniência teórica, reescalamos a posição de equilíbrio (y_k), o tempo (τ), massa (M_k) e o raio de curvatura (R'_k) através da seguinte constante³ adimensional

$$\alpha \equiv \left[\frac{M_1 V_1^2}{a(R'_1)^{n+1/2}} \right] \quad (2.5)$$

e das relações que seguem

$$\begin{aligned} y_k &= R'_1 \alpha^{1/n} x_k, & \tau &= \frac{R'_1}{V_1} \alpha^{1/n} t, \\ R'_k &= R'_1 R_k, & M_k &= M_1 m_k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Com isso, tornamos todas as grandezas adimensionais e a equação (2.4) pode ser reescrita como

$$m_k \ddot{x}_k = r_{k-1} (x_{k-1} - x_k)^{n-1} \theta(x_{k-1} - x_k) - r_k (x_k - x_{k+1})^{n-1} \theta(x_k - x_{k+1}), \quad (2.7)$$

onde a derivada em x diz respeito ao tempo e

$$r_k = \left(\frac{2R_k R_{k+1}}{R_k + R_{k+1}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

A velocidade inicial reescalada da partícula na origem é unitária, ou seja, $v_1 = 1$.

³Essa transformação reescala V_1 para a unidade e serve para não nos preocuparmos com as unidades das grandezas e/ou não particularizar os resultados para algum parâmetro material. Tal reescalamto enfatiza que a dinâmica da cadeia não depende das propriedades elásticas dos grãos. A elasticidade das partículas pode tornar os pulsos mais rápidos ou lentos, mas os comportamentos qualitativos não se alteram.

A equação (2.7) pode ser integrada numericamente e, dessa forma, algumas conclusões sobre o efeito da perturbação inicial no sistema são obtidas. Com a finalidade de ilustrar a propagação da perturbação inicial, são apresentadas as dinâmicas para dois casos: cadeia afilada para trás e cadeia afilada para frente, respectivamente nas figuras 2.2 e 2.3. A variação do raio dos grãos nas cadeias nas duas figuras ocorrem de modo linear, o procedimento de afilamento será abordado posteriormente.

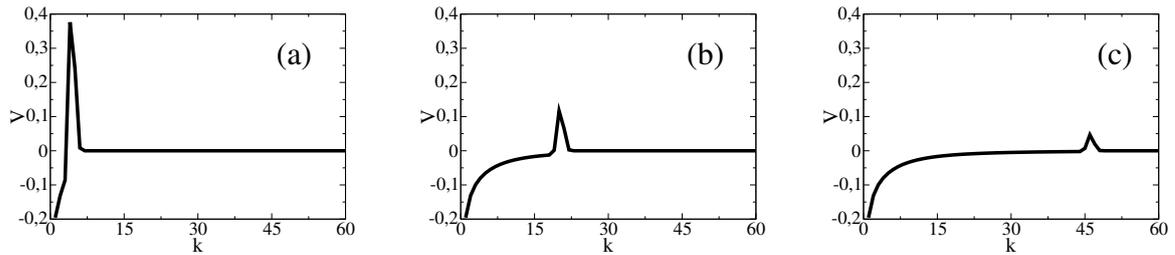


Figura 2.2: Perfil do pulso de velocidade gerado por v_1 unitário, em função da posição dos grãos na cadeia (k), para uma cadeia afilada linearmente para *trás*. No item (a) temos o tempo $t = 6$, em (b) $t = 60$ e em (c) $t = 270$. As grandezas são adimensionais devido ao reescalamto. Após a passagem do pulso, os grãos apresentam $v_k < 0$ como consequência da direção de afilamento, eles recuam.

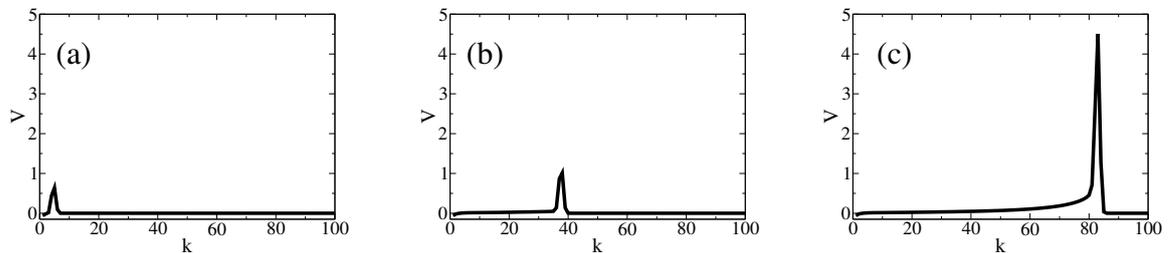


Figura 2.3: Perfil do pulso de velocidade gerado por v_1 unitário, em função da posição dos grãos na cadeia (k), para uma cadeia afilada linearmente para *frente*. No item (a) temos o tempo $t = 5$, em (b) $t = 35$ e em (c) $t = 55$. As grandezas são adimensionais devido ao reescalamto. Conforme o pulso se propaga uma cauda atrás da frente de onda é formada, esta cauda é constituída de grãos que continuam se deslocando para frente. A direção do afilamento é a responsável.

Observando as figuras 2.2 e 2.3, é visto que a perturbação inicial, fornecida por v_1 , rapidamente forma um pulso⁴ se propagando ao longo do sistema onde a frente de onda envolve tipicamente 3 grãos. Ainda, nas cadeias afiladas para trás, figura 2.2, nota-se que o pulso formado é estreito e bem definido. Também, $v_k < 0$ após a passagem do pulso. Esta última característica, é motivada pela inércia dos grãos gradualmente aumentar (afilamento para trás) fazendo com que as partículas atrás do pulso sejam rico-

⁴O pulso se forma devido ao potencial de interação entre as partículas ser não linear, assim a energia se propaga de modo localizado. O que não ocorre em sólidos, onde os modos normais de vibração distribuem a energia ao longo de todo o objeto.

cheteadas, por isso as velocidades são negativas. Contudo, as partículas que ricocheteiam não participam na propagação para frente do momento linear e energia cinética.

Por sua vez, nas cadeias afiladas para frente, figura 2.3, além de ser formado um pulso estreito e bem definido, surge uma cauda atrás da frente de onda (visível no item (c) da figura 2.3) constituída de grãos que continuam se movendo na direção da propagação, a inércia é a responsável. Essa cauda paulatinamente aumenta conforme o pulso viaja, porém ela não afeta a dinâmica da frente de onda.

Dos resultados da integração numérica da equação (2.7) nas figuras 2.2 e 2.3, é nítido que os pulsos formados em cadeias granulares, em especial cadeias afiladas, são estreitos e localizados⁵. Tais características são excelentes, dado que esse comportamento é essencial para o êxito da aproximação binária. Um pulso estreito indica que ele é formado por poucos grãos e um deles sempre estará na amplitude máxima do pulso, uma teoria analítica satisfatória deve ser capaz de capturar as propriedades dinâmicas deste grão. Agora, passemos para a Teoria Binária e o modo de empregá-la no estudo de cadeias afiladas.

2.2 A Teoria Binária

A Teoria Binária supõe que a propagação do pulso ocorre através de sucessivas colisões de duas em duas partículas e desse modo são transferidos a energia e momento linear ao longo da cadeia. Em outras palavras, primeiro a partícula $k = 1$ de velocidade unitária colide com outra partícula inicialmente em repouso, $k = 2$, esta última, adquire uma velocidade v_2 e colide com uma terceira partícula estacionária $k = 3$, e assim por diante. Com tal suposição, as velocidades após as colisões podem facilmente ser obtidas com as conservações do momento linear e energia. Atentando, que após $k - 1$ colidir em k a velocidade final do grão k será a velocidade inicial com que colidirá em $k + 1$. Por outro lado, como a velocidade final de $k + 1$ é sempre positiva, o pulso não será transmitido para trás, e a velocidade final do grão incidente pode ser positiva ou negativa dependendo da direção de afilamento (esta velocidade pode ser até nula se a cadeia for monodispersa).

De posse dessas velocidades, vários parâmetros da dinâmica da cadeia podem ser estudados, dentre eles: tempo de propagação, a variação da amplitude do pulso de velocidade ao longo da cadeia etc. Nesse sentido, conclusões importantes em cadeias afiladas estão na referência [7]. Vale destacar que conforme

⁵Os pulsos são formados pela perturbação inicial que fornece energia ao sistema, neste trabalho usamos v_1 (energia cinética, T). Entretanto, para outra perturbação inicial como uma pré-compressão inicial (energia potencial, U) entre os grãos $k = 1$ e $k = 2$, fornecendo ao sistema a mesma energia ($U = T$), são formados pulsos com as mesmas características porém com amplitudes menores. Isso ocorre, pois os primeiros grãos ($k = 1, 2, \dots$) são ejetados da cadeia.

o modelo descrito na seção anterior, os grãos inicialmente estão apenas se tocando. Entretanto, se nas condições iniciais houvessem espaços entre os grãos, neste caso, realmente o cenário da propagação do pulso seria tal como na aproximação binária. O método, portanto, representaria perfeitamente o modelo.

Contudo, supondo grãos inicialmente em contato, usando as leis de conservação, após o grão k colidir com $k + 1$, o último emergirá com a velocidade

$$v_{k+1} = \frac{2v_k}{1 + \frac{m_{k+1}}{m_k}}. \quad (2.9)$$

Levando em conta as sucessivas colisões anteriores, a equação (2.9) pode ser calculada recursivamente para obter

$$v_k = \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{2}{1 + \frac{m_{k'+1}}{m_{k'}}}. \quad (2.10)$$

Conforme mencionado há pouco, um resultado desejado é o tempo que o pulso leva para chegar ao grão k , ou simplesmente, o tempo de propagação. Para essa análise, é conveniente introduzir a variável

$$z_k = x_k - x_{k+1}, \quad (2.11)$$

que representa a compressão radial entre dois grãos sucessivos. Logo, a equação de movimento segundo essa nova variável pode ser obtida, utilizando a equação (2.7) e a teoria binária, como

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k &= -\frac{r_k}{m_k} (x_k - x_{k+1})^{n-1}, \\ \ddot{x}_{k+1} &= \frac{r_k}{m_{k+1}} (x_k - x_{k+1})^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

e encontramos

$$\mu_k \ddot{z}_k = -r_k z_k^{n-1}. \quad (2.13)$$

Aqui, $\mu_k = \frac{m_k m_{k+1}}{m_k + m_{k+1}}$ é a massa reduzida. A equação (2.13) é a equação de movimento de uma partícula de massa μ_k sobre a ação do potencial $\left(\frac{r_k}{n}\right) z_k^n$, onde $z_k \geq 0$. A condição inicial, $\dot{z}_k(0)$, é simplesmente v_k desde que o grão $k + 1$ está em repouso antes da colisão. Assim, podemos reescrever a equação (2.10) como

$$\dot{z}_k(0) = \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{2}{1 + \frac{m_{k'+1}}{m_{k'}}}. \quad (2.14)$$

A expressão acima é a velocidade inicial da partícula com massa μ_k , em outras palavras, é a velocidade final da partícula original $k + 1$ após a colisão com a partícula k . Um detalhe importante é que calculamos intervalos de tempo, ou seja, o tempo é reiniciado a cada colisão. A conservação de energia, desde que a compressão inicial é nula, é dada por

$$\frac{1}{2} \dot{z}_k^2(t) + \left(\frac{r_k}{n\mu_k}\right) z_k^n = \frac{1}{2} \dot{z}_k^2(0), \quad (2.15)$$

da qual podemos obter

$$\dot{z}_k(t) = \left[z_k^2(0) - \left(\frac{2r_k}{n\mu_k} \right) z_k^n \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Nós atribuímos que a condição para que o pulso passe de um grão para outro seja $v_{k+1} > v_k$, quer dizer, o pulso chega no grão k quando a sua velocidade torna-se maior que a do grão $k-1$, e que passa para o grão $k+1$ quando este tem velocidade maior do que o grão k . Com isso, o tempo de residência do pulso no grão k (T_k) é o tempo que o grão k permanece com a maior velocidade da cadeia. Da equação (2.16), temos

$$T_k = \int_0^{z_k^{max}} \frac{dz_k}{\dot{z}_k} = \int_0^{z_k^{max}} \frac{dz_k}{\left[z_k^2(0) - \left(\frac{2r_k}{n\mu_k} \right) z_k^n \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.17)$$

onde z_k^{max} é a compressão quando as velocidades das partículas k e $k+1$ são iguais, isto é, velocidade relativa nula⁶. Desse modo, z_k^{max} também é a compressão máxima e obtemos da equação (2.15) que

$$z_k^{max} = \left(\frac{n\mu}{2r_k} z_k^2(0) \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.18)$$

A integral pode ser resolvida exatamente para se obter

$$T_k = \sqrt{\pi} \left(\frac{n\mu_k}{2r_k} \right)^{1/n} [\dot{z}_k(0)]^{-(1+2/n)} \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/n+1/2)}. \quad (2.19)$$

Por fim, o tempo total para o pulso chegar ao k -ésimo grão é

$$t = \sum_{k'=1}^k T_{k'}. \quad (2.20)$$

De modo que, para cadeias monodispersas $\mu = \frac{1}{2}$, $r_k = 1$ e $\dot{z}_k(0) = 1$, a equação (2.19) torna-se

$$T_k = \sqrt{\pi} \left(\frac{n}{4} \right)^{1/n} \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/n+1/2)}, \quad (2.21)$$

conforme previamente obtida na referência [22]. No entanto, para avaliar estes tempos explicitamente para cadeias afiladas é necessário definir as regras de afilamento, as quais, por sua vez, determinam μ_k e r_k . Discutiremos a seguir as formas de afilamento consideradas neste trabalho e como a Teoria Binária se aplica em tais casos.

2.3 Teoria Binária em cadeias afiladas

Nesta dissertação, como assumimos que os grãos são feitos do mesmo material (densidade e pro-

⁶Formalmente, esta conclusão pode ser obtida da equação (2.11): $\dot{x}_k(t) = \dot{x}_{k+1}(t) \Rightarrow \dot{z}_k(t) = 0$.

priedades elásticas constantes), as regras de afilamento, tanto para trás quanto para frente, são dadas em função dos raios. Ainda, ao longo da abordagem da Teoria Binária no contexto de cadeias afiladas, serão mostrados alguns gráficos originalmente apresentados na referência [7], figuras 2.4 até 2.15. Tais gráficos foram refeitos, neles são comparados os dados da *integração numérica* da equação de movimento com os obtidos via *aproximação binária*. Isto servirá como motivação para o método de correção proposto na seção seguinte.

Quanto as regras de afilamento, foram estudados os casos de afilamento para frente e para trás, ambos com as seguintes regras: linear e exponencial. Vamos iniciar nossas discussões com as cadeias afiladas para trás.

2.3.1 Cadeias afiladas para trás (raios crescem)

Conforme discutido previamente, cadeias afiladas para trás são alinhamentos de grãos com aumento progressivo do tamanho e/ou massa dos grãos ao longo da cadeia, rever figura 2.1. A seguir discutiremos o afilamento linear.

Cadeia afilada linearmente

Nas cadeias afiladas linearmente para trás os grãos crescem de modo linear de acordo com

$$R_k = 1 + S(k - 1), \quad (2.22)$$

onde $S > 0$ é um parâmetro fixo de afilamento. A razão entre os raios de dois grãos sucessivos é

$$\frac{R_k}{R_{k+1}} = 1 - \frac{S}{1 + Sk}, \quad (2.23)$$

e para as massas, utilizando o fato da densidade ser constante, temos

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = \left(1 - \frac{S}{1 + Sk}\right)^3. \quad (2.24)$$

Substituindo a equação acima em (2.10), encontramos

$$v_k = \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{2}{1 + \left(1 - \frac{S}{1 + Sk'}\right)^{-3}}. \quad (2.25)$$

Na figura 2.4, mostramos a comparação entre os resultados da equação acima, teoria analítica, com os da integração numérica. A velocidade obtida com a Teoria Binária, equação (2.25) e outras equações para v_k , é a velocidade final do grão k devido a colisão com o grão $k - 1$, onde não é levado em conta a

presença do grão $k + 1$. Enquanto que a velocidade oriunda dos dados numéricos, é a velocidade máxima atingida pelo grão k (grão que está no pico do pulso), por isso em alguns momentos usamos termos como amplitude do pulso de velocidade. Em todos os gráficos onde comparamos as velocidades numéricas e analíticas são estas velocidades que apresentamos. Na figura 2.4, é visto que a aproximação binária não captura quantitativamente os dados da integração numérica. Entretanto, o seu decaimento ao ∞ é obtido perfeitamente.

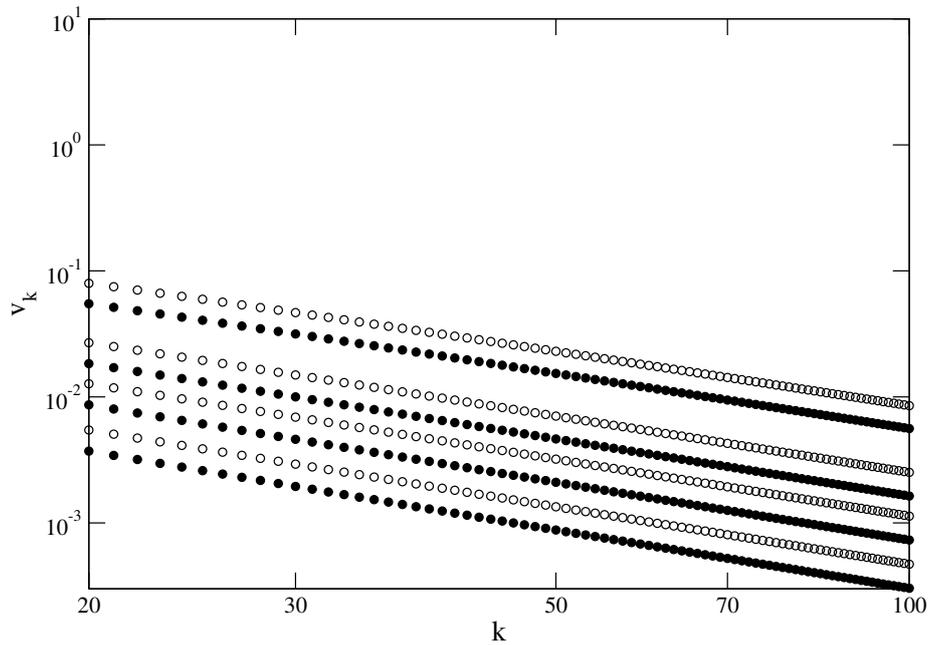


Figura 2.4: Comparação entre dados da integração numérica (círculos sólidos) e aproximação binária (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de velocidade em função de k em cadeias afiladas linearmente para trás, com $S = 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.9 de cima para baixo.

A equação (2.25), apesar de ser um resultado obtido analiticamente da Teoria Binária, não deixa clara a dependência da velocidade com k . Para termos uma melhor idéia desse comportamento, analisamos o comportamento assintótico de v_k . Usamos as equações (2.9) e (2.24) para obtermos

$$v_{k+1} = \frac{2v_k}{1 + \left(1 - \frac{S}{1+S'k}\right)^{-3}} \simeq \frac{2v_k}{1 + \left(1 + \frac{3}{k}\right)} \simeq v_k \left(1 - \frac{3}{2k}\right),$$

onde empregamos expansões polinomiais e truncamos os termos quando, ambos, $1 \ll Sk$ e k . Expandindo, a expressão acima, novamente em série de Taylor,

$$\begin{aligned} v_k + \frac{dv_k}{dk} &\simeq v_k - \frac{3v_k}{2k} \\ \ln v_k &\simeq -\frac{3 \ln k}{2} \\ v_k &\sim k^{-3/2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Nota-se que a amplitude do pulso de velocidade diminui com o aumento do número de grãos. Como é esperado, desde que a massa dos grãos cresce continuamente.

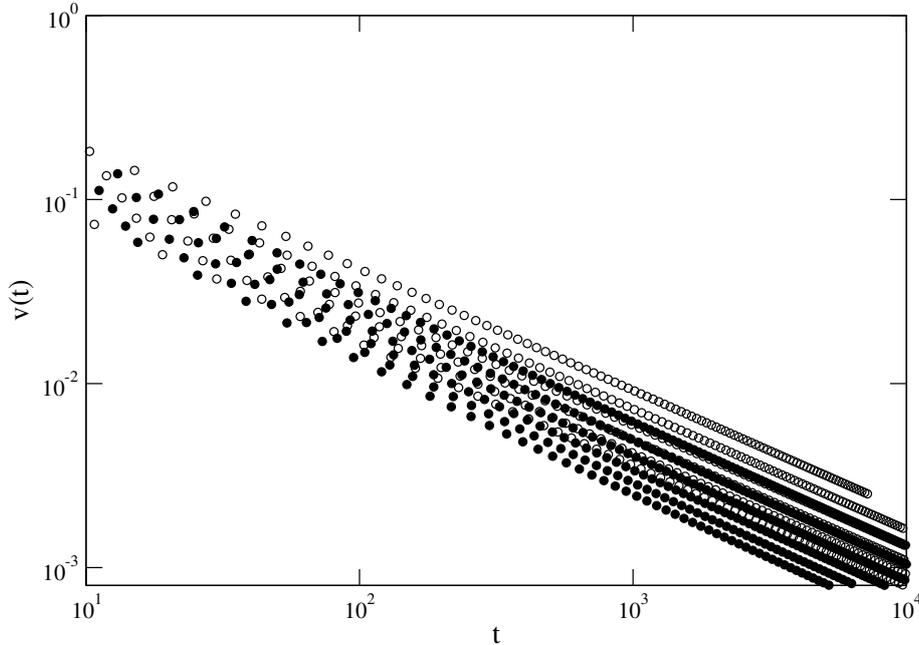


Figura 2.5: $v(t)$ em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.4$ até 0.9 em intervalos de 0.1 de cima para baixo. Círculos abertos são os dados analíticos e círculos sólidos os numéricos.

Para os parâmetros associados com a equação (2.19), massa reduzida e r_k , nas cadeias afiladas linearmente para trás temos

$$\mu_k = (1 + Sk)^3 \left(\frac{\left(1 - \frac{S}{1+Sk}\right)^3}{1 + \left(1 - \frac{S}{1+Sk}\right)^3} \right), \quad (2.27)$$

$$r_k = (1 + Sk)^{1/2} \left(\frac{1 - \frac{S}{1+Sk}}{1 - \frac{S/2}{1+Sk}} \right)^{1/2}. \quad (2.28)$$

Com estas duas expressões juntamente com a equação (2.25) resolve-se as equações (2.19) e (2.20) obtendo-se $t(k)$. Logo, pode-se fazer um gráfico paramétrico de $v(t)$, figura 2.5. Além disso, o tempo de residência do pulso em cada grão e o tempo de propagação do pulso são mostrados nas figuras 2.6 e 2.7, respectivamente.

Na figura 2.5, de novo não são obtidos os valores corretos da velocidade em função do tempo, mas é capturada a tendência de decaimento da velocidade. Por sua vez, nas figuras 2.6 e 2.7 os dados numéricos e analíticos estão em excelente acordo. A Teoria Binária para a obtenção destas grandezas (tempo de residência e tempo de propagação) mostra tamanho sucesso que é difícil distinguir os dados numéricos e analíticos.

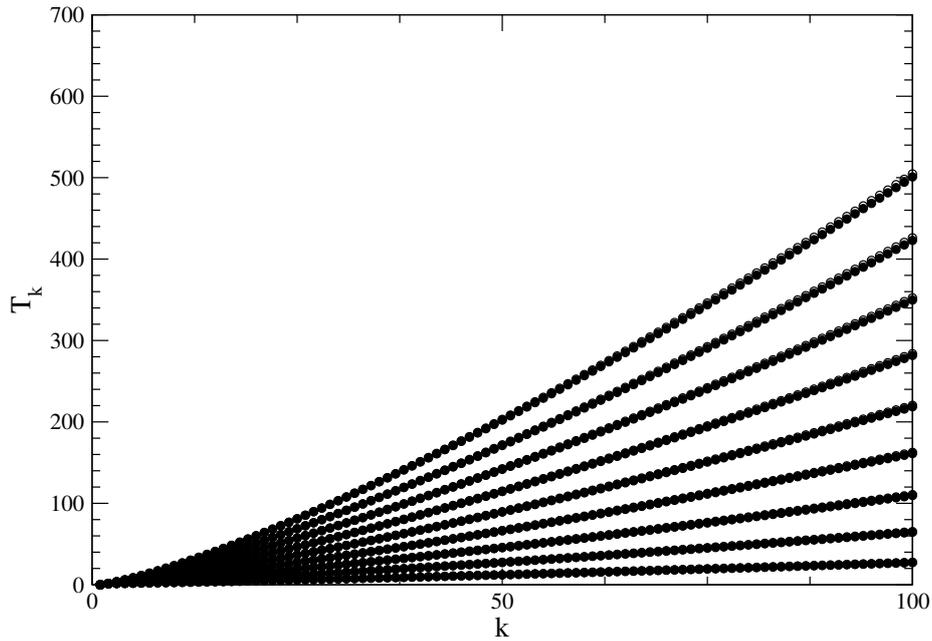


Figura 2.6: T_k em cadeias afiladas linearmente para trás. Difícil distinção entre os dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) devido ao excelente acordo. De baixo para cima, $S = 0.1$ até 0.9 em intervalos de 0.1 .

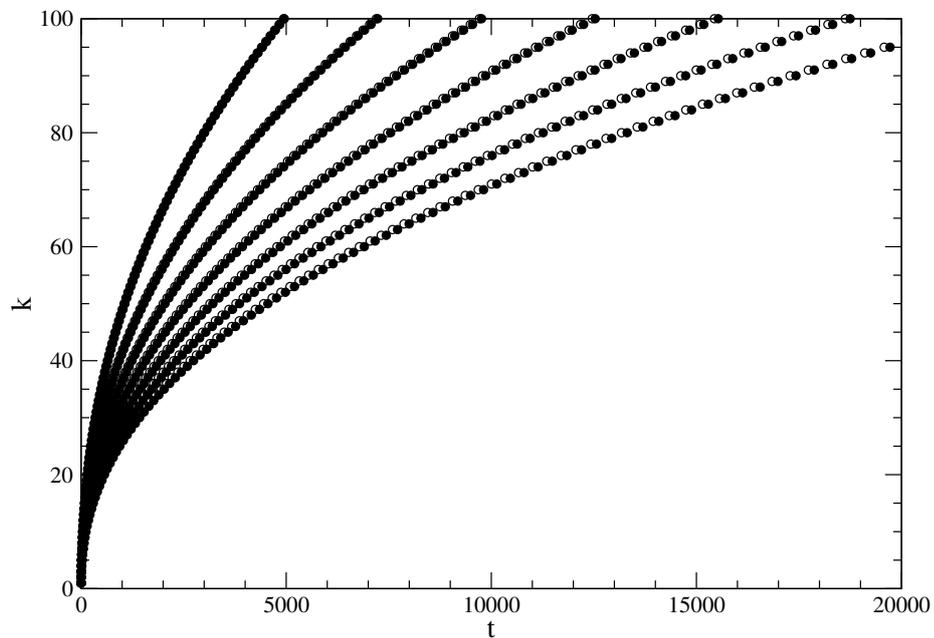


Figura 2.7: Posição do pulso (em unidades de grãos, k) como função do tempo para cadeias afiladas linearmente para trás. Difícil distinção entre os dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) devido ao bom acordo. De cima para baixo, $S = 0.3$ até 0.9 em intervalos de 0.1 .

Por outro lado, nós estendemos as expressões da teoria binária para a propagação do momento linear e energia cinética. Considerando a simetria esférica dos grãos, sabemos que $m_k = R_k^3 \sim k^3$ e o momento linear e a energia cinética são previstos terem o seguinte comportamento assintótico (usa-se a equação (2.26))

$$P_k = m_k v_k \sim k^{3/2}, \quad (2.29)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2 \sim 1. \quad (2.30)$$

Com as equações (2.29) e (2.30), encontramos o desejado: um modo analítico de prever a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas linearmente para trás. Outra regra de afilamento (ainda para trás) é visto a seguir, o caso exponencial.

Cadeia afilada exponencialmente

Para cadeias afiladas exponencialmente para trás, a razão entre os raios de dois grãos sucessivos é uma constante,

$$\frac{R_k}{R_{k+1}} = 1 - q \quad (2.31)$$

onde q é o parâmetro de afilamento, $0 < q < 1$. Com isso, o raio dos grãos aumenta em progressão geométrica. Sendo o raio de $k = 1$ unitário nas variáveis reescaladas que usamos, o raio do k -ésimo grão é dado por $R_k = (1 - q)^{1-k}$ e a razão das massas será

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = (1 - q)^3. \quad (2.32)$$

Notando a simetria esférica dos grãos ($m_k = R_k^3$) escrevemos

$$m_k = (1 - q)^{3(1-k)}. \quad (2.33)$$

Em particular, essa regra de afilamento foi bastante estudada [19–21, 31]. Entretanto, tais estudos foram somente numéricos ou, quando utilizado algum método analítico, empregaram *aproximação de esferas duras*. Como dito na introdução, esta aproximação (até o presente) não demonstra bom ajuste com as soluções numéricas.

Utilizando as equações (2.10) e (2.32), obtemos

$$\begin{aligned} v_k &= \prod_{k'=1}^{k-1} 2 [1 + (1 - q)^{-3}]^{-1} \\ &= \prod_{k'=1}^{k-1} [A(q)]^{-1} = [A(q)]^{1-k}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde

$$A(q) = \frac{1}{2}[1 + (1 - q)^{-3}]. \quad (2.35)$$

Aplicando o logaritmo natural na equação (2.34) e exponenciando, temos

$$v_k = A(q)e^{-k \ln A(q)}. \quad (2.36)$$

Empregando os resultados da equação (2.36), mostra-se a variação da amplitude do pulso de velocidade ao longo da cadeia na figura 2.8, onde é observado que a aproximação binária obtém perfeitamente o comportamento qualitativo de v_k , mas não os valores corretos.

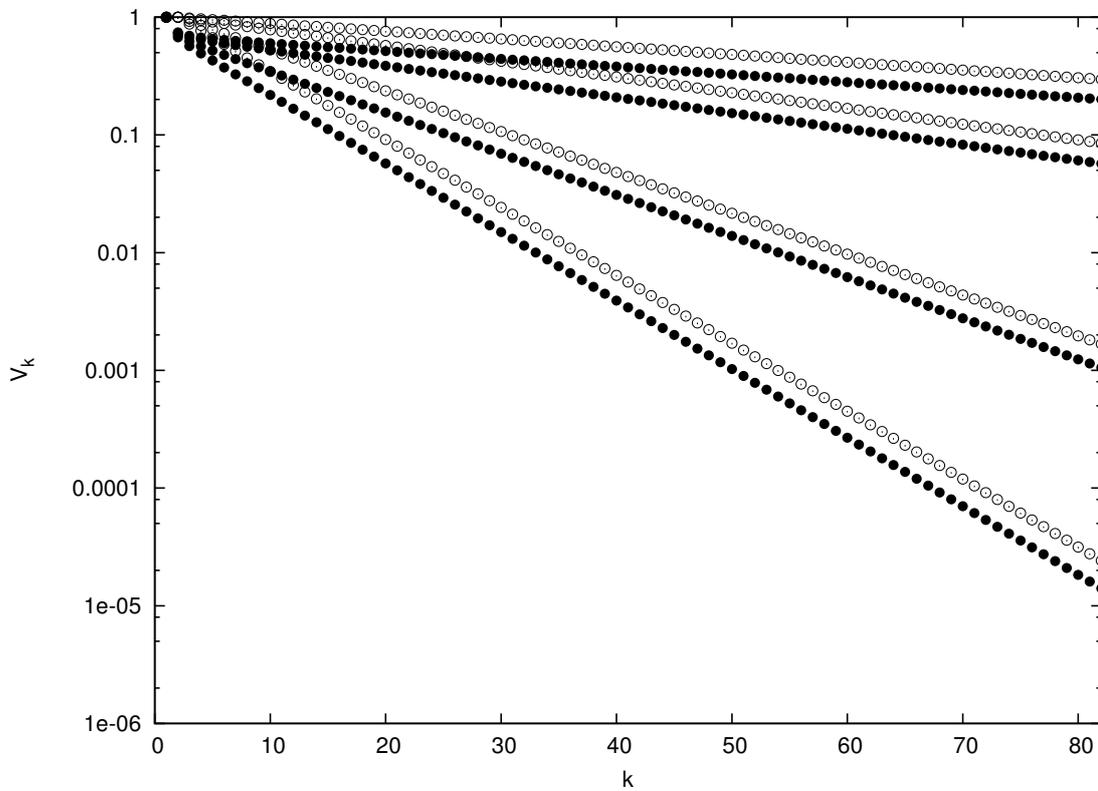


Figura 2.8: Variação da amplitude do pulso de velocidade em função de k para cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01, 0.02, 0.05$ e 0.08 de cima para baixo. Os círculos sólidos representam os resultados numéricos, enquanto os círculos abertos a aproximação binária.

Ainda, acerca dos parâmetros associados a equação (2.19), massa reduzida e r_k , para este tipo de afilamento são

$$\mu_k = \frac{(1 - q)^{-3(k-1)}}{[1 + (1 - q)^3]}, \quad (2.37)$$

$$r_k = (1 - q/2)^{-1/2} (1 - q)^{-(k-1)/2}. \quad (2.38)$$

De tal maneira, é possível estudar a variação temporal da amplitude do pulso de velocidade, o tempo

de residência em unidades de grãos e o tempo de propagação, mostrados nas figuras 2.9, 2.10 e 2.11, respectivamente.

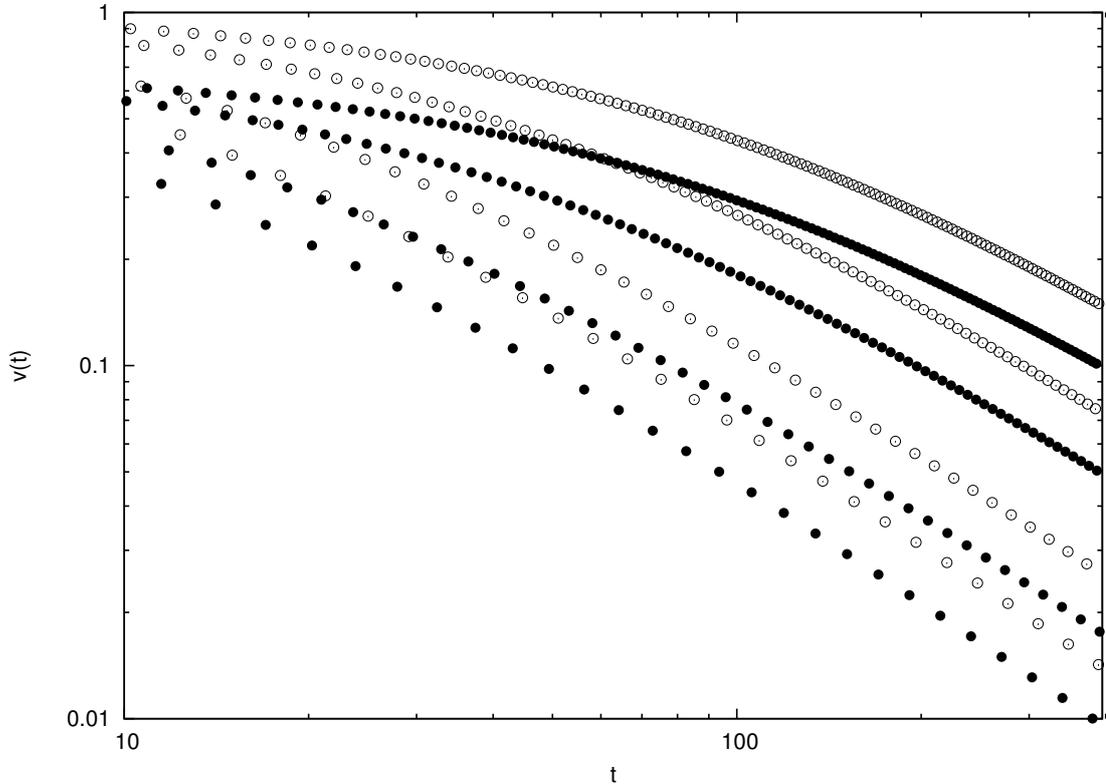


Figura 2.9: Comparação entre os dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de $v(t)$ em cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01, 0.02, 0.05$ e 0.08 de cima para baixo.

De acordo com a figura 2.9, encontra-se de modo correto o comportamento temporal qualitativo do pulso de velocidade. No entanto, os dados numéricos e analíticos não coincidem. Em contrapartida, para o tempo de residência, figura 2.10, e tempo de propagação, figura 2.11, a aproximação binária obtém excelentes resultados. Consequentemente, para estas duas grandezas, não é fácil diferenciar os resultados das duas teorias.

Através das equações (2.36) e (2.33), neste trabalho, estendemos a teoria binária para o momento linear, obtendo

$$P_k = \left(1 - \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3\right)^{1-k}. \quad (2.39)$$

A equação acima, é válida para todos os grãos e não somente na região assintótica como ocorre na equação (2.29). A equação (2.39) é exata, uma vez que não foi realizada nenhuma aproximação na velocidade. Ainda, se tomarmos o logaritmo natural na equação (2.39), prevemos que o crescimento do momento em função de k é exponencial, e a uma taxa de: $-\ln\left(1 - \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3\right)$. Para a dependência

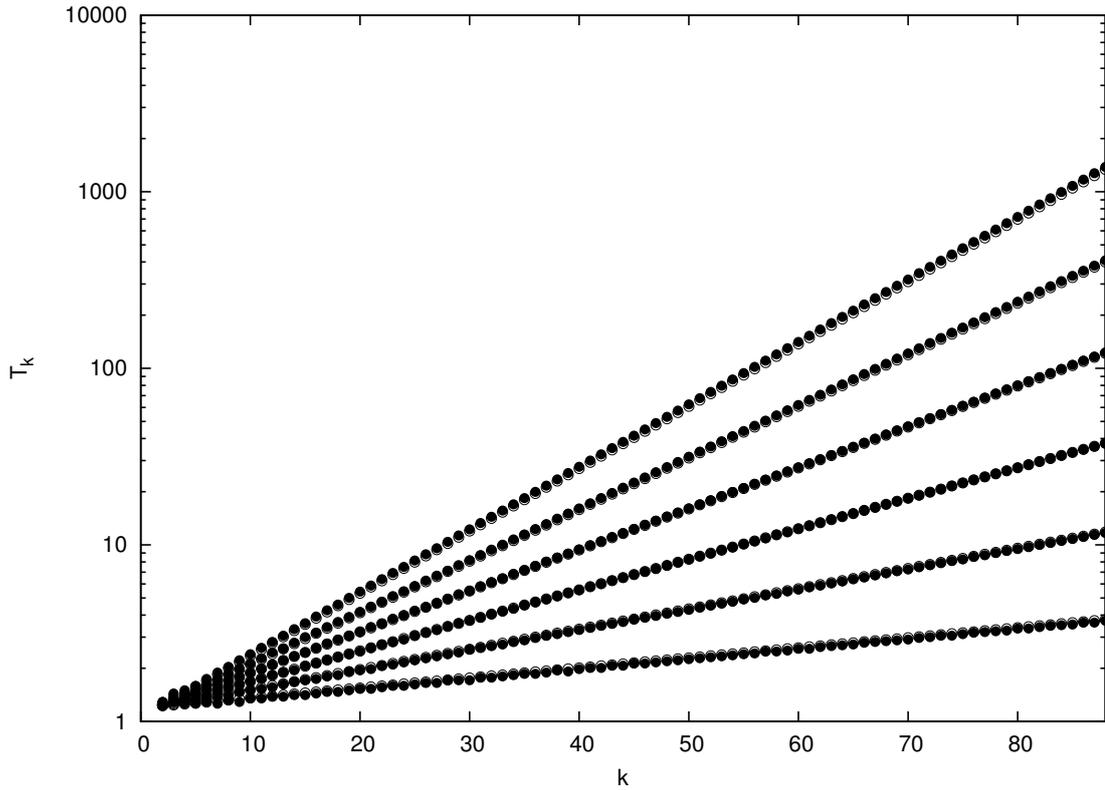


Figura 2.10: Comparação entre os dados numéricos (círculos sólidos) e os dados analíticos (círculos abertos) para o tempo de residência em função de k para cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de cima para baixo. O acordo entre as duas teorias é bom a ponto de dificultar a distinção dos dados.

da energia cinética, a expressão exata (para todo k) é

$$E_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2k} [(1-q)^{3/2} + (1-q)^{-3/2}]^{2(1-k)}. \quad (2.40)$$

Assim, para valores grandes de k temos

$$\ln(E_k) \sim -2k \ln \left\{ \frac{1}{2} [(1-q)^{3/2} + (1-q)^{-3/2}] \right\}. \quad (2.41)$$

Com as últimas equações, estamos aptos a estudar (de modo analítico) a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas exponencialmente para trás. Sendo assim, encerramos (por enquanto) as discussões quanto a cadeias afiladas para trás consideradas neste trabalho. No entanto, as regras de afilamento para frente ainda não foram abordadas. Este assunto será tratado a seguir.

2.3.2 Cadeias afiladas para frente (raios diminuem)

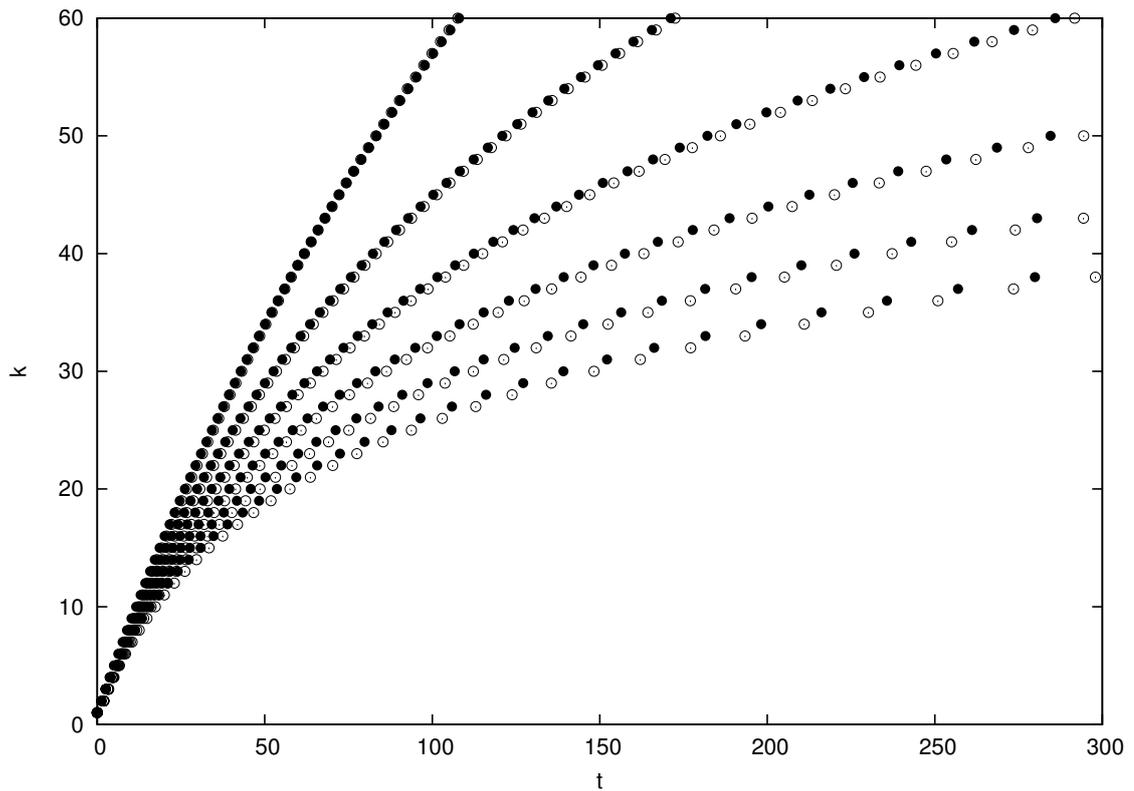


Figura 2.11: Comparação entre os dados numéricos (círculos sólidos) e os dados analíticos (círculos abertos) para a posição do pulso (em unidades de grãos) em função do tempo para cadeias afiladas exponencialmente para trás, onde $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de cima para baixo.

Cadeias afiladas para frente dizem respeito a alinhamentos de grãos que sucessivamente diminuem de tamanho. Vale ressaltar, que este tipo de afilamento impõe limites na quantidade de grãos que podem compor a cadeia. Tal restrição, é devido a razões práticas e dificuldades de análise. Quanto as razões práticas, devem-se principalmente a complicações experimentais. Esferas demasiadamente pequenas causam inúmeros problemas experimentais como confecção, alinhamento, manuseio etc. Acerca da análise, procura-se evitar erros numéricos e, até, o cálculo de raios negativos. Novamente, duas regras de afilamento são consideradas: o caso linear e exponencial. Iniciaremos nossa discussão com o afilamento linear.

Cadeia afilada linearmente

Nas cadeias afiladas linearmente para frente, os raios dos grãos diminuem de modo linear com $R_k = 1 - S(k - 1)$. Note, que o primeiro grão tem raio unitário ($R_1 = 1$) nas unidades adimensionais que usamos. Afim de evitar grãos com raio negativo, impomos a seguinte restrição ao número de grãos na

cadeia

$$N < 1 + \frac{1}{S}. \quad (2.42)$$

Isso estabelece uma restrição dependente de S em uma cadeia de N grãos (ou uma restrição que depende de N para um parâmetro de afilamento S). A razão dos raios e das massas entre o k -ésimo grão e o grão seguinte são

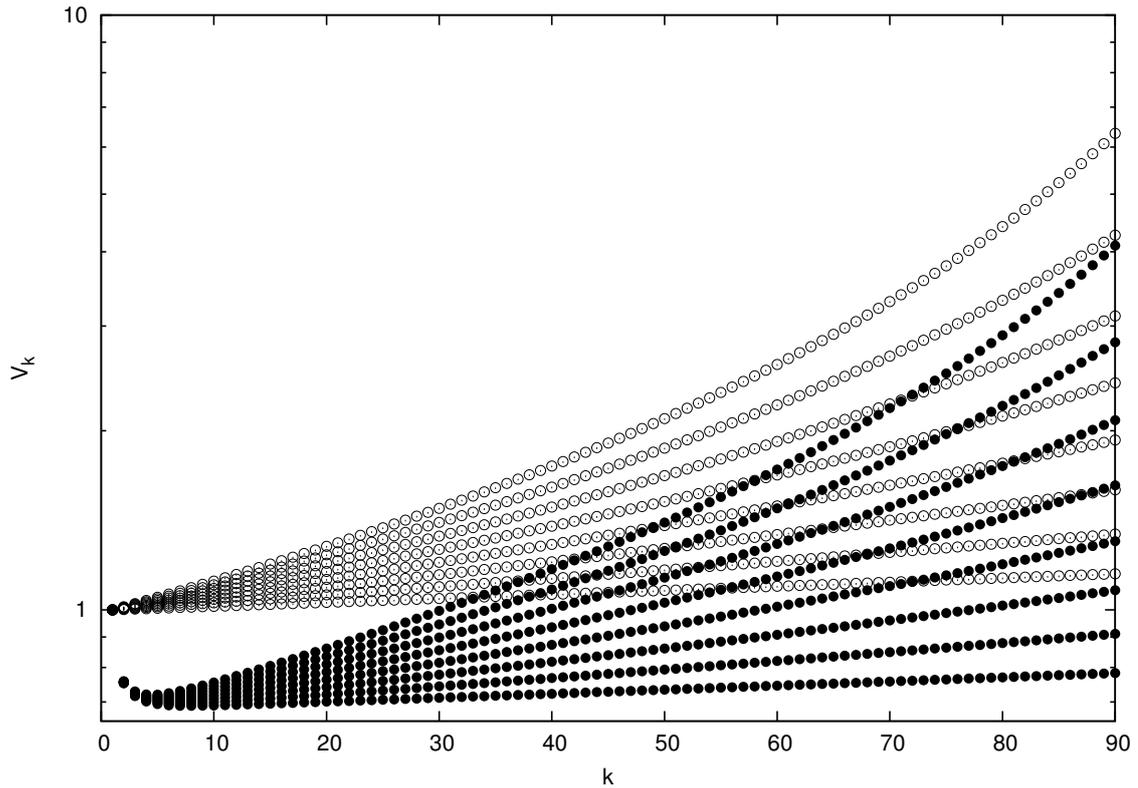


Figura 2.12: Comparação entre dados numéricos (círculos sólidos), fornecidos por integração direta das equações de movimento, e dados analíticos (círculos abertos), obtidos com a aproximação binária, para a variação da amplitude do pulso de velocidade como função de k em cadeias afiladas linearmente para frente. $S = 0.001$ até 0.008 em intervalos de 0.001 de baixo para cima.

$$\frac{R_k}{R_{k+1}} = 1 + \frac{S}{1 - Sk}, \quad (2.43)$$

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = \left(1 + \frac{S}{1 - Sk}\right)^3. \quad (2.44)$$

Substituindo a equação (2.44) em (2.10), obtemos

$$v_k = \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{2}{1 + \left(1 + \frac{S}{1 - Sk'}\right)^{-3}}. \quad (2.45)$$

A partir da equação acima, estuda-se a variação do pulso de velocidade ao longo da cadeia apre-

sentada na figura 2.12. Observamos que a equação (2.45) reproduz qualitativamente o comportamento de v_k quando examinado em conjunto com os resultados numéricos. Todavia, quantitativamente os resultados não são bons. Além disso, nos dados numéricos (círculos sólidos) para os valores iniciais de k ($k \leq 5$) temos que v_k apresenta um decaimento, este comportamento é devido a formação do pulso. Em cadeias monodispersas também temos um comportamento semelhante, em outras palavras, o pulso tem uma largura de cerca de 5 grãos e este é o comprimento em unidade de grãos que o pulso leva para se formar.

Na equação (2.45) não é evidente a dependência da velocidade com k . Por isso, analisamos o seu comportamento de escala através das equações (2.9) e (2.44), temos

$$v_k = \frac{2v_{k-1}}{1 + \left[1 + \frac{S}{1-S(k-1)}\right]^{-3}} \simeq \frac{v_{k-1}}{1 - \frac{3}{2(1+\frac{1}{S}-k)}}. \quad (2.46)$$

Na última passagem usamos o limite $k \ll 1 + 1/S$, isto é, estamos longe do fim da cadeia. Expandimos v_{k-1} em série de Taylor, quando $1 \ll k$ para desconsiderarmos efeitos de borda, e com manipulações temos

$$\begin{aligned} v_k - \frac{3}{2} \left[\frac{v_k}{\left(1 + \frac{1}{S} - k\right)} \right] &\simeq v_k - \frac{dv_k}{dk} \\ - \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{S} - k\right) &\simeq \ln v_k \\ v_k &\simeq \left(1 + \frac{1}{S}\right)^{-3/2} \left(1 - \frac{k}{1 + \frac{1}{S}}\right)^{-3/2} \\ v_k &\sim \left(1 - \frac{k}{1 + \frac{1}{S}}\right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Desde que $k < 1 + 1/S$, essa função cresce com k . Este resultado é esperado, dado que a massa dos grãos diminuem com k .

Os parâmetros μ_k e r_k , para este tipo de cadeia, são obtidos substituindo S por $-S$ nas equações (2.27) e (2.28). Sendo assim, examina-se $v = v(t)$ na figura 2.13. Novamente, captura-se o comportamento qualitativo da velocidade, porém não existe bom ajuste entre os dados numéricos e analíticos. Com respeito ao tempo de residência do pulso nos grãos e o tempo de propagação (não mostrados), a aproximação binária é bem sucedida como nos outros casos [7].

Outra vez usando a simetria esférica dos grãos escrevemos m_k como

$$m_k = [1 - S(k-1)]^3 = (1+S)^3 \left[1 - \frac{k}{1+1/S}\right]^3. \quad (2.48)$$

Consequentemente, nós estendemos a teoria para obter o momento linear e energia cinética empregando

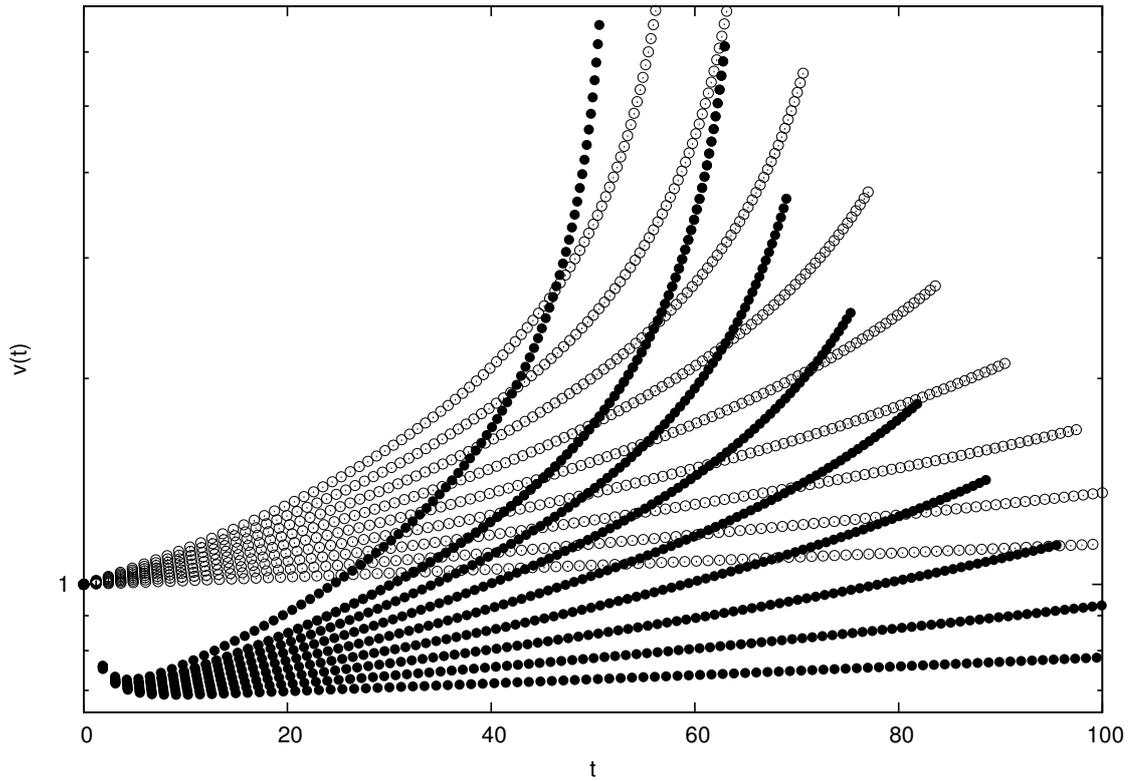


Figura 2.13: Comparação entre dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de velocidade com o tempo para cadeias afiladas linearmente para frente, com $S = 0.001$ até 0.01 de baixo para cima.

as duas últimas equações. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
 P_k &\sim S^3 (1 + 1/S)^3 \left[1 - \frac{k}{1 + 1/S} \right]^{3/2} \\
 &\simeq S^3 (1 + 1/S)^3 \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{1 + 1/S} \right) \right], \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

$$E_k \sim 1. \tag{2.50}$$

Na equação (2.49), usamos o limite $k \ll 1 + 1/S$. Novamente obtemos o desejado, a propagação do momento linear e energia cinética ao longo da cadeia, afilada linearmente para frente, através da teoria analítica. Para finalizar as discussões sobre regras de afilamento e a teoria binária em tal contexto, trataremos a seguir o último caso estudado: o exponencial para frente.

Cadeia afilada exponencialmente

Para cadeias afiladas exponencialmente para frente, apenas precisamos mapear as expressões obtidas para cadeias afiladas para trás e trocar $q \rightarrow -q$ (parâmetro de afilamento). Assim, os raios decrescem

com

$$R_k = \frac{1}{(1+q)^{k-1}}, \quad (2.51)$$

onde $q > 0$ e $R_1 = 1$. A velocidade do grão k , será dada pelas equações (2.36) e (2.35), bastando mudar o sinal de q . Assim, mostramos v_k e $v = v(t)$ nas figuras 2.14 e 2.15, respectivamente. Outra vez, apenas o comportamento qualitativo das velocidades são bem descritas pela aproximação binária. Os tempos relacionados a dinâmica da cadeia, T_k e t (não mostrados), demonstram bom acordo teórico [7].

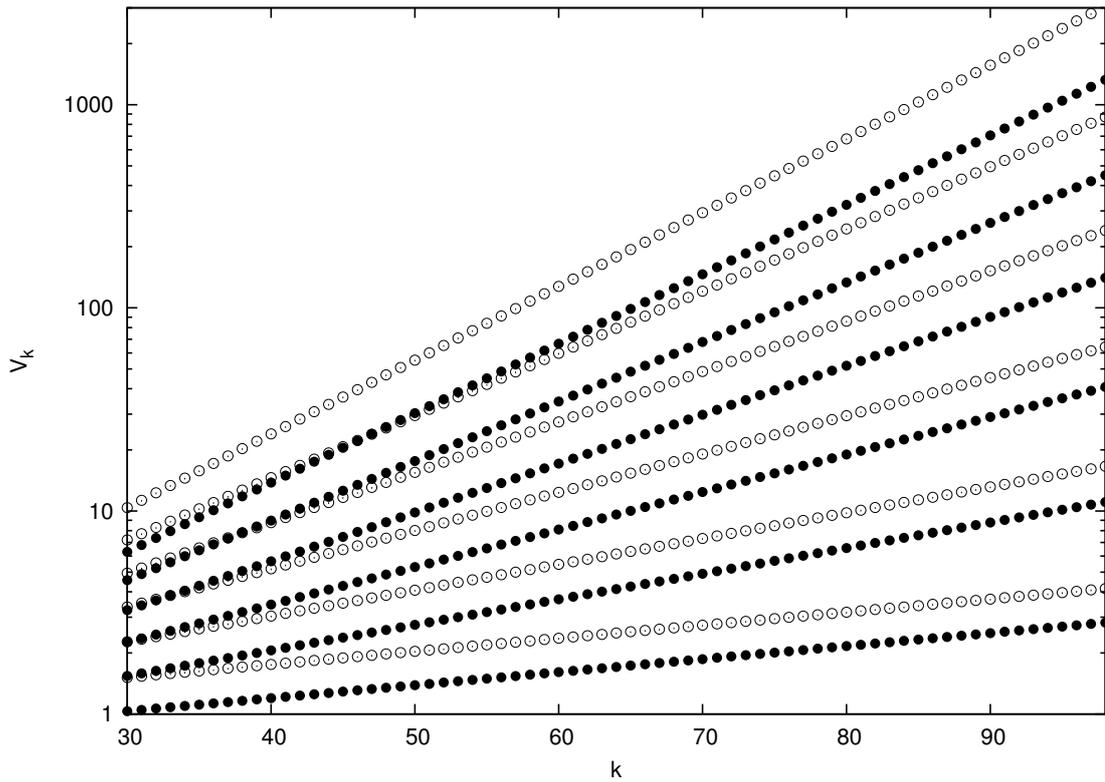


Figura 2.14: Comparação entre dados numéricos (círculos sólidos) e analíticos (círculos abertos) para a variação da amplitude do pulso de velocidade em função de k em cadeias afiladas exponencialmente para frente, com $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de baixo para cima.

Ainda, a massa do k -ésimo grão é obtida da equação (2.33) trocando q por $-q$. Portanto, o momento linear (para todo k , expressão exata) na aproximação binária, será

$$P_k = \left(1 + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^3\right)^{1-k}. \quad (2.52)$$

Para esta cadeia a aproximação binária prevê um decaimento exponencial do momento linear ao invés do crescimento que aparece no afilamento para trás. Por outro lado, quanto a energia cinética, analisando o comportamento assintótico para valores grandes de k , a aproximação binária fornece

$$\ln(E_k) \sim -2k \ln \frac{1}{2} [(1+q)^{3/2} + (1+q)^{-3/2}]. \quad (2.53)$$

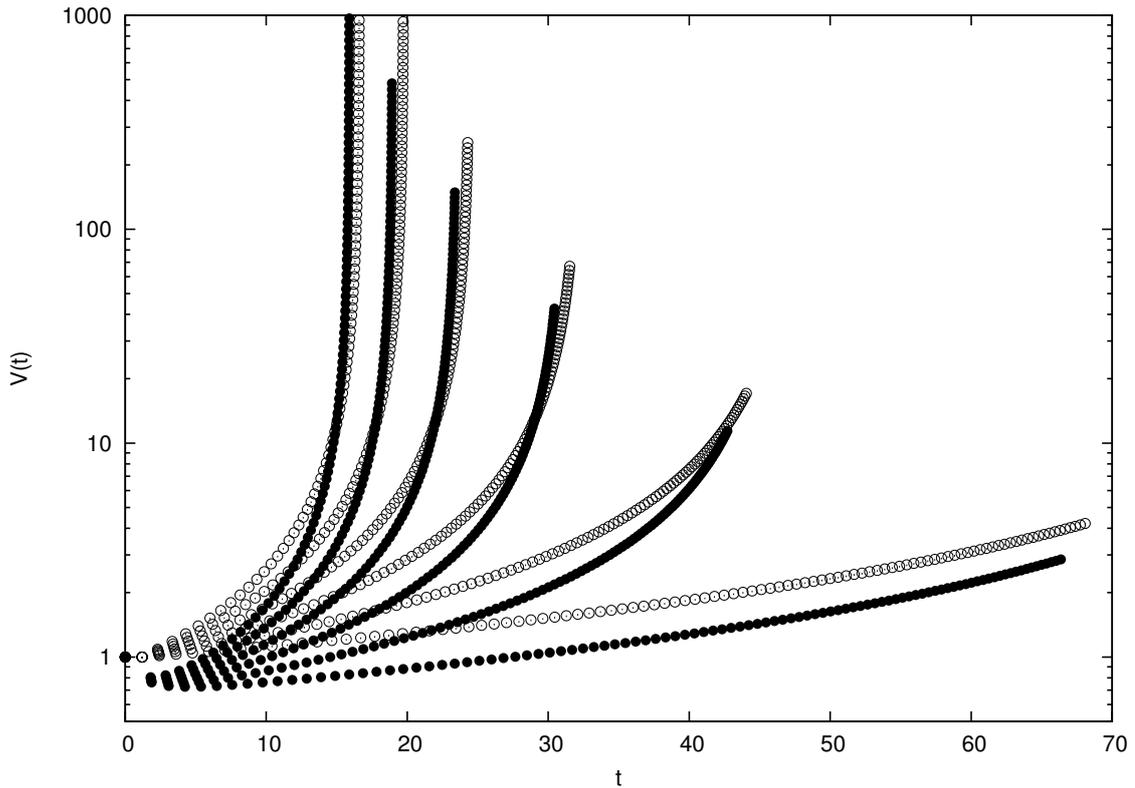


Figura 2.15: Resultados para a amplitude do pulso de velocidade em função do tempo em cadeias afiladas exponencialmente para frente, onde os círculos sólidos correspondem aos dados numéricos enquanto os círculos abertos aos dados analíticos, com $q = 0.01$ até 0.06 em intervalos de 0.01 de baixo para cima.

Com isso, temos para E_k um decaimento semelhante ao encontrado nas cadeias com afilamento exponencial para trás, rever equação (2.41).

Após todos os resultados, vemos que a Teoria Binária aplicada em cadeias afiladas tem êxito para os estudos de algumas grandezas, como o tempo de propagação total e tempo de residência do pulso nos grãos. Este êxito é devido aos limites de integração na expressão (2.17), no cálculo do tempo integramos a compressão entre dois grãos na colisão binária desde zero até a máxima compressão, até este intervalo a presença dos grãos vizinhos tem pequena influência na propagação do pulso. Contudo, em relação às velocidades, embora esta aproximação capture corretamente as tendências de aumento e diminuição, seus valores não estão em bom acordo com os resultados da integração numérica das equações de movimento, equação (2.7). Essa falta de ajuste da velocidade deve-se a presença da terceira partícula durante a suposta colisão binária, ou seja, de duas em duas. Sendo o momento linear e energia cinética funções da velocidade, é fundamental corrigir as expressões analíticas desta grandeza para então estudarmos corretamente as propagações de P_k e E_k . O tratamento para as correções nas velocidades é apresentado a seguir.

2.4 Correção numérico-analítica

Conforme os resultados na seção anterior, é observado que o comportamento qualitativo das variações das amplitudes dos pulsos de velocidade são capturados com sucesso pela aproximação binária. Levando em conta tal fato, pode-se supor que existe uma relação entre os dados numéricos e os oriundos do método analítico. Assim, é possível determinar fatores de correção, aplicá-los nas expressões analíticas existentes e obter os valores corretos das velocidades. Nesta seção, apresentamos nossa proposta de correção para as previsões das velocidades baseada na aproximação binária. Desta forma, estaremos aptos a obter melhores ajustes para os resultados da energia cinética e momento linear. Estas correções são as principais contribuições deste trabalho. Seguiremos a mesma sequência das regras de afilamento mostrados na seção anterior.

2.4.1 Cadeias afiladas para trás (raios crescem)

Cadeia afilada linearmente

Para cadeias afiladas linearmente para trás, no limite de k grande, de acordo com a aproximação binária, a velocidade dos grãos cresce ao longo da cadeia (ou seja, com k) segundo

$$v_{k,b} \simeq Ck^{-3/2}. \quad (2.54)$$

Note que identificamos $v_{k,b}$ como a velocidade dada pela aproximação binária e adiante $v_{k,s}$ a velocidade da simulação, usaremos esta nomenclatura durante toda esta seção. Assumindo que a equação (2.54) é aproximadamente o comportamento real da propagação do pulso, podemos esperar que a velocidade calculada por integração direta das equações de movimento seja da forma

$$v_{k,s} \simeq C'k^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}, \quad (2.55)$$

onde C , C' e ε são constantes. Assim, se argumentarmos que a razão entre essas velocidades como

$$\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}} \simeq \frac{C'}{C}k^\varepsilon, \quad (2.56)$$

para ε pequeno expandimos: $k^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln k} \simeq 1 + \varepsilon \ln k$. Consequentemente, esperamos que a razão entre estas velocidades seja constante (exceto por uma correção logarítmica). Portanto, para esta regra de afilamento, supomos que haja um fator de correção constante que aplicado em $v_{k,b}$ nos dê o valor correto da velocidade, ou seja, $v_{k,s}$. Tal fator, é obtido da proporcionalidade entre os dados numéricos e analíticos.

Cadeia afilada exponencialmente

Para cadeias afiladas exponencialmente, a velocidade aumenta exponencialmente, ver equação (2.36). Logo, esperamos que

$$v_{k,b} = Ae^{\alpha k}, \quad (2.57)$$

$$v_{k,s} = A'e^{(\alpha+\eta)k}. \quad (2.58)$$

onde A, A', α e η não dependem de k e assumimos que η seja pequeno ($\eta k \ll 1$). Portanto, a razão entre as velocidades é

$$\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}} = \frac{A}{A'}e^{-\eta k} \simeq B + Dk, \quad (2.59)$$

onde B e D são independentes de k . Logo, aguardamos um crescimento linear da razão das velocidades com k (a correção é linear ao invés de logarítmica). Entretanto, os coeficientes na equação (2.59) são funções de q , rever equação (2.35).

Felizmente, a dependência de B e D com q é bem descrita por leis de potência⁷, ou seja,

$$B(q) = aq^b \quad \text{e} \quad D(q) = cq^d. \quad (2.60)$$

Da forma apresentada acima, é difícil obter a, b, c e d , pois são equações não lineares. Contudo, linearizamos a equação (2.60) aplicando log em ambos os lados destas equações para obter

$$\log B(q) = \log a + b \log q \quad (2.61)$$

e

$$\log D(q) = \log c + d \log q. \quad (2.62)$$

Então, fazendo uma regressão linear nas equações acima, pode-se determinar a, b, c e d . A velocidade obtida da aproximação binária deve ser corrigida por

$$v_{k,s} = \frac{v_{k,b}}{aq^b + cq^d k}. \quad (2.63)$$

2.4.2 Cadeias afiladas para frente (raios diminuem)

Naturalmente, as correções realizadas para esta direção de afilamento é análoga aos casos anteriores. Dessa forma, faremos os cálculos apenas quando necessário.

⁷É natural usarmos leis de potência para descrevermos B e D , pois tratam-se de funções comuns na física [32], carregam caráter geral e apresentam a propriedade de invariância de escala, $f(\xi x) \propto f(x)$ onde ξ é uma constante. Com a invariância, queremos dizer que seja o grau do afilamento na cadeia, parâmetro q , grande ou pequeno a descrição sugerida continua válida.

Cadeia afilada linearmente

Neste caso, a amplitude da velocidade prevista pela aproximação binária é mostrada na equação (2.47). Igualmente, assumimos que os dados da simulação podem ser descritos por

$$v_{k,s} \sim \left(\Delta + \frac{\Theta k}{1 + 1/S} \right)^{-3/2}, \quad (2.64)$$

onde Δ e Θ são constantes. Sendo assim, a razão $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ é calculada como

$$\begin{aligned} \frac{v_{k,s}}{v_{k,b}} &= \left(\frac{\Delta + \frac{\Theta k}{1+1/S}}{1 - \frac{k}{1+1/S}} \right)^{-3/2} \\ &= \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{1+1/S} \right) \right] \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\Theta k}{\Delta(1+1/S)} \right) \right] \Delta \\ &\sim \text{const.} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Nas expressões acima, usamos o limite $k \ll 1 + \frac{1}{S}$. Em decorrência, o termo principal da razão $\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ é uma constante, que será o fator de correção. Usamos este fator para corrigir os resultados da aproximação binária.

Cadeia afilada exponencialmente

Para este tipo de cadeia, fazemos a mesma análise realizada para cadeias afiladas exponencialmente para trás. Assim, encontramos algo semelhante a equação (2.63), dada por

$$v_{k,s} = \frac{v_{k,b}}{a'q^{b'} + c'q^{d'}k}, \quad (2.66)$$

onde agora obtemos a' , b' , c' e d' .

Dessa maneira, aqui encerramos as discussões do tratamento via teoria binária para o modelo de cadeias afiladas abordadas nessa dissertação. No entanto, para finalizar este capítulo, resta-nos discutir o método numérico empregado para integrar as equações de movimento da cadeia, equação (2.7). Tal método trata-se do Runge-Kutta de quarta ordem.

2.5 Integração numérica: Método de Runge-Kutta de quarta ordem

A equação de movimento que rege a dinâmica da cadeia, é uma equação diferencial de segunda

ordem. Para sua resolução numérica existem inúmeros algoritmos que podem ser utilizados. Dentre estes, destacam-se os Métodos de Passo Único [34], como o Método de Euler, o Trapezoidal⁸ e o Runge-Kutta, o último amplamente utilizado na resolução de equações diferenciais ordinárias. Em todos, o uso do computador como ferramenta auxiliar torna-se extremamente útil. O Runge-Kutta é o método empregado nesta dissertação.

Para facilitar as soluções numéricas de equações diferenciais, pode-se sempre reduzir *uma* equação diferencial de ordem N a um *conjunto* de N equações diferenciais de primeira ordem, acopladas ou interligadas [35]. Assim, ao diminuir o grau das equações, facilita-se a resolução matemática. As N equações diferenciais de primeira ordem, oriundas da equação original de ordem N , devem obrigatoriamente ser resolvidas simultaneamente. O número de equações no conjunto será igual à ordem da equação original [36]. Para reduzir a ordem de uma equação em uma unidade, basta substituir a derivada de menor ordem por uma nova variável. Dessa forma, afirma-se *o problema genérico nas equações diferenciais ordinárias é reduzido ao estudo de um conjunto de N equações diferenciais de primeira ordem acopladas pelas funções y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, tendo a forma geral*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.67)$$

onde as funções f_i do lado direito são conhecidas [35].

A resolução da equação (2.67) através dos métodos de passo único, consiste em obter os valores das variáveis dependentes y_i para valores da variável independente x . Esta ideia é resumida pela seguinte expressão geral, com $y_i = y_i(x_i)$ e $x_{i+1} = x_i + h$,

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i; h) \quad (2.68)$$

na qual a função Φ é que evidencia e define o método [37]. Portanto, *determinar a solução numérica para qualquer equação diferencial é encontrar valores para $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ através de aproximações* [34], feito pelo uso recursivo da equação (2.68). O valor de h é determinado pelo número de subintervalos (n) em que o intervalo $[x_1, x_i]$ é dividido, $h = \frac{|x_i - x_1|}{n}$. Quanto menor o valor de h maior é a precisão na determinação de y_i , porém eleva-se o esforço computacional. Em contra ponto, se n for muito grande, pode-se gerar problemas numéricos (erro de arredondamento).

O método de Runge-Kutta (RK) de quarta ordem é, na prática, o mais utilizado na solução numérica de EDOs [38]. O desenvolvimento do método ocorre a partir da série de Taylor onde se omitem os termos de ordens mais elevadas [37]. No caso do método de quarta ordem, trunca-se a série no termo

⁸O Método de Euler e o Trapezoidal servem apenas como contato inicial para os estudantes em resoluções numéricas de equações diferenciais.

de ordem $O(h^6)$. Sua demonstração é bastante trabalhosa, devido ao número de termos nas séries, por isso nos limitaremos apenas a apresentar as expressões do método e interpretá-las. Assim, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é caracterizado pela seguinte expressão

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (2.69)$$

onde

$$K_1 = f(x_i, y_i), \quad (2.70)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right), \quad (2.71)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right), \quad (2.72)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + K_3). \quad (2.73)$$

K_j ($j = 1, 2, 3, 4$) são derivadas avaliadas entre o intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e a função f é mesma dada na equação (2.67). Comparando as equações (2.68) e (2.69) é fácil de identificar a função Φ . O método, simplesmente, utiliza estimativas da inclinação da função nos pontos extremos do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e dois pontos intermediários [34]. Em outras palavras, usa-se médias ponderadas da inclinação com os pesos 1, 2, 2, 1 para os termos K_1, K_2, K_3, K_4 respectivamente. A precisão bem melhor do método de RK comparativamente aos métodos de Euler e Trapezoidal é consequência do número maior de pontos que são avaliados em cada passo h . O erro local, ou por passo, de truncamento da expressão (2.69) é da ordem $O(h^5)$ e o erro de truncamento global acumulado é $O(h^4)$. Em princípio temos o Runge-Kutta em qualquer ordem. Quanto mais alta a ordem, maior o número de termos na função Φ . Na maioria dos problemas não compensa, em termos de custo benefício, ir além da quarta ordem.

3 *Resultados numéricos e analíticos*

Após a apresentação da metodologia no capítulo anterior, mostramos aqui os resultados numéricos da integração das equações de movimento, usando o Runge-Kutta de quarta ordem, e comparamos com as previsões analíticas da Teoria Binária. Organizamos este capítulo em duas seções. Na primeira seção, apresentamos os dados da integração numérica para a propagação do momento linear e energia cinética e confrontamos com o comportamento esperado da aproximação binária. Na segunda seção, empregamos os métodos de correções para as velocidades e determinamos os fatores de correções. Os gráficos com as variações das amplitudes dos pulsos de velocidade, mostrados na seção 2.3, foram refeitos e verificadas se as correções propostas são eficazes. Utilizando as velocidades corrigidas, apresentamos as propagações do momento linear e energia cinética examinando conjuntamente os dados analíticos e numéricos. Tudo isso, para as quatro regras de afilamento abordadas no capítulo anterior. Seguimos esta ordem de apresentação para as duas seções: cadeia afilada para trás linearmente e exponencialmente, e cadeia afilada para frente, linear e exponencial.

3.1 **Previsões da aproximação binária para o momento linear e energia cinética**

Aqui, estamos interessados em verificar se as previsões da Teoria Binária para as propagações do momento linear e energia cinética, seção 2.3, são coerentes com as soluções numéricas. Neste instante, não aplicamos nenhuma correção nas velocidades. Sendo assim, é de se esperar que apenas as tendências de crescimento e diminuição destas grandezas sejam satisfeitas e não os valores exatos. Por enquanto, nos preocupamos somente com o comportamento qualitativo da variação de P_k e E_k .

3.1.1 Cadeias afiladas para trás (raios crescem)

Cadeia afilada linearmente

Nas cadeias afiladas linearmente para trás, prevemos para o momento linear um crescimento com k segundo a equação (2.29). Dessa forma, em um gráfico de $\ln(P_k)$ contra $\ln(k)$ é esperado um crescimento linear seguindo uma reta de inclinação $\frac{3}{2}$. Um gráfico nestas características é mostrado abaixo para vários valores do parâmetro de afilamento S . No topo da figura 3.1, é posto uma linha contínua arbitrária de inclinação $3/2$. Vemos que o crescimento do P_k é idêntico ao descrito pela equação (2.29). Também, esse comportamento é independente de S , como aguardado.

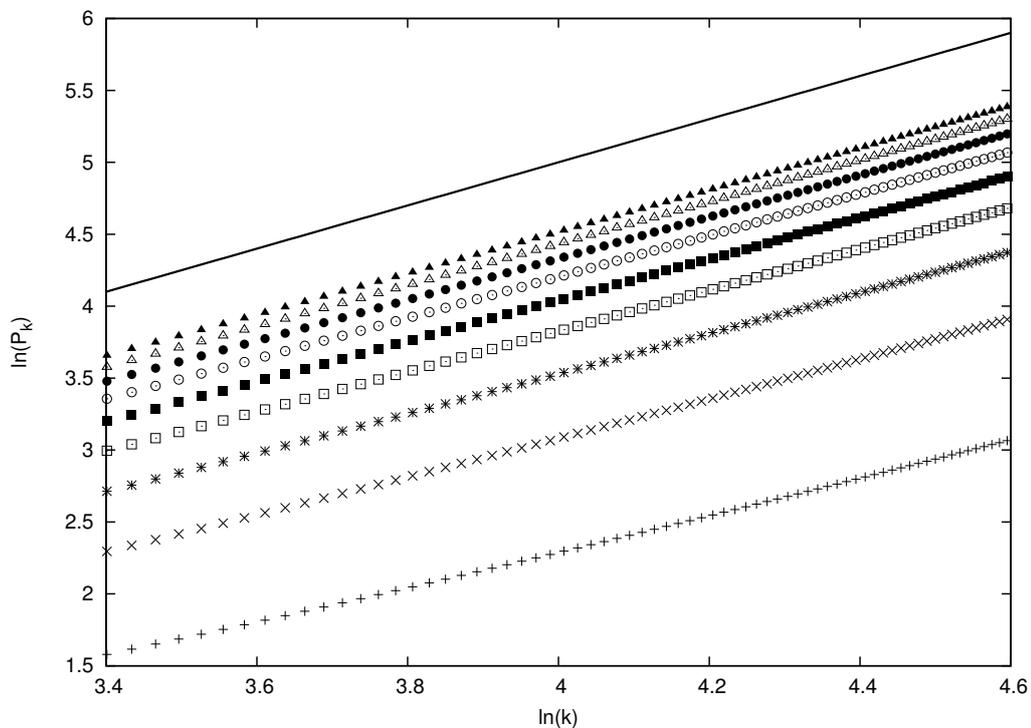


Figura 3.1: O momento linear como função de k para cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de baixo para cima, em intervalos de 0.1 . A linha contínua corresponde a uma reta arbitrária de inclinação $\frac{3}{2}$, como previsto pela teoria binária.

Com relação a energia cinética, via aproximação binária prevemos uma saturação, equação (2.30). A variação da amplitude do pulso de energia cinética é mostrado na figura 3.2 para alguns valores de S . Observamos para valores grandes de k decaimentos até valores mínimos, como previsto analiticamente. Uma linha horizontal arbitrária (contínua) está no topo da figura para comparar a saturação de E_k . A atenuação do pulso de energia ocorre pois conforme o pulso se propaga parte da energia é deixada nos grãos que estão atrás do pulso. A energia é distribuída ao longo da cadeia que está atrás do pulso. Isso é visível na figura 2.2 onde os grãos após a passagem do pulso apresentam $v_k < 0$, ou seja, são ricocheteados pelos que estão na frente. A energia cinética dos grãos com velocidade negativa é retirada

do pulso de energia. Assim, a energia decai e satura quando há uma compensação entre v_k^2 (decai) e m_k (cresce). A amplitude do pulso de energia cinética em todas as regras de afilamento estudadas diminui.

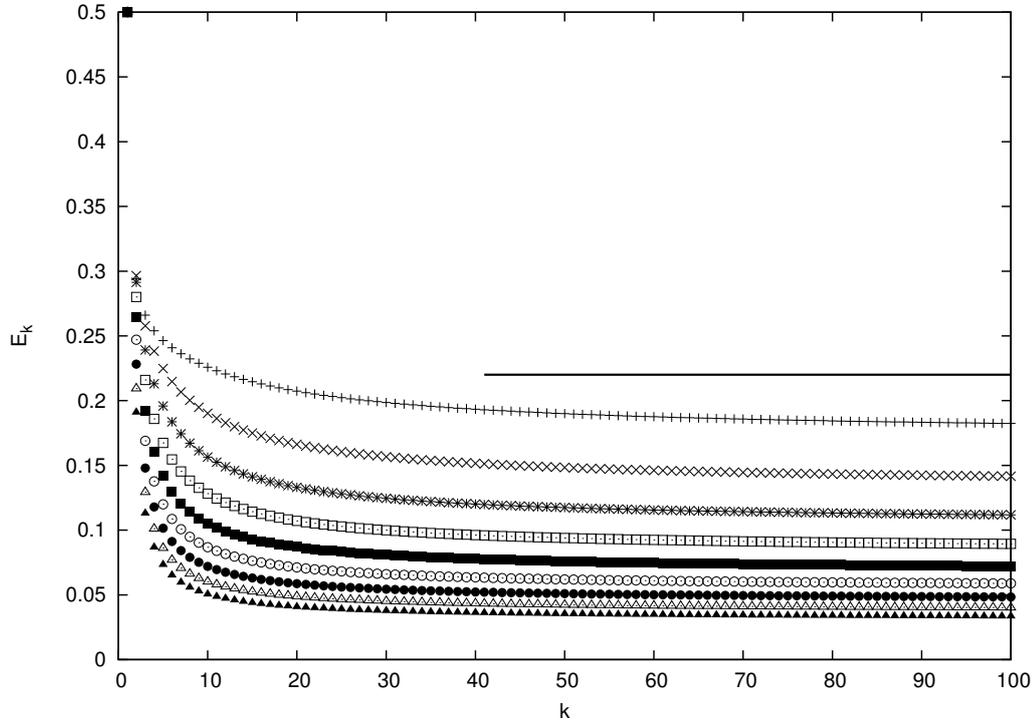


Figura 3.2: E_k em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de cima para baixo, em intervalos de 0.1 . A linha corresponde a uma reta horizontal arbitrária indicando o comportamento assintótico previsto pela aproximação binária.

O decaimento de v_k (rever figura 2.4) não predomina no comportamento de P_k , mas tem forte influência sobre E_k . A grandeza dominante na propagação do momento linear é a massa. Estas duas características são encontradas em todas as quatro regras de afilamento. A potência de v_k na definição $P_k = m_k v_k$ e $E_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2$ explica estes comportamentos. Adiante, temos a cadeia afilada de modo exponencial para frente.

Cadeia afilada exponencialmente

Para o afilamento exponencial para trás, o comportamento de P_k é determinado pela aproximação binária na equação (2.39). Na figura 3.3, é apresentada a propagação do momento linear para alguns valores de q . De acordo com a equação (2.39) o $\ln(P_k)$ cresce linearmente com k , esse crescimento é previsto ocorrer a taxas dependentes de q . Ambos os comportamentos são observados claramente na figura 3.3. Para corroborar as previsões analíticas, foram realizadas as regressões exponenciais dos dados numéricos (o crescimento de P_k é exponencial). As regressões, são linhas perfeitamente coincidentes com os resultados da integração da equação de movimento.

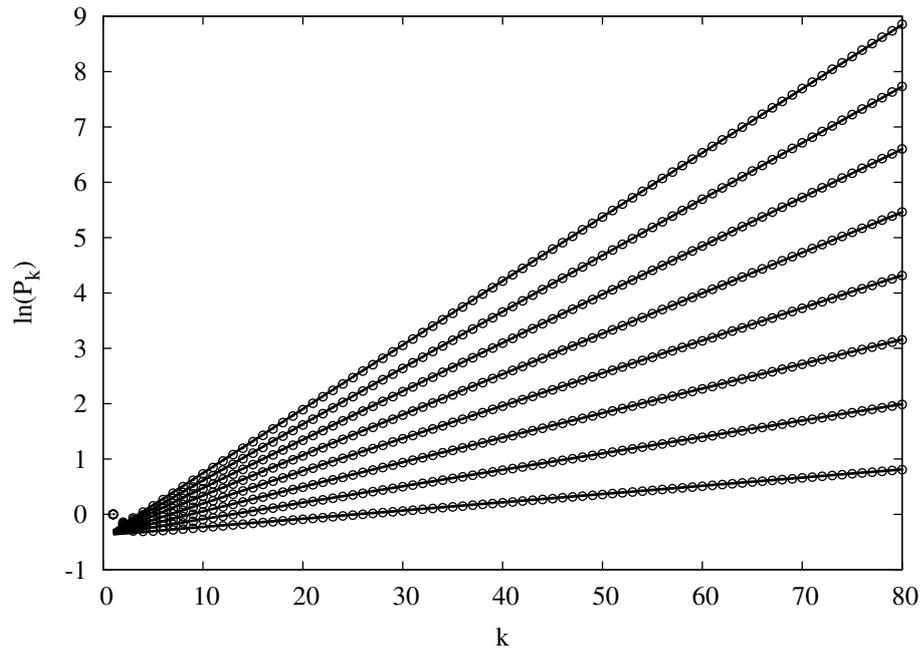


Figura 3.3: P_k em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de baixo para cima, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.

Não obstante, na tabela 3.1, são mostradas as taxas de crescimento exponencial do momento linear, comparando os dados analíticos e numéricos para a dependência com q . Segundo a equação (2.39), a taxa de crescimento de $\ln(P_k)$ para o afilamento abordado aqui é da forma: $-\ln(1 - \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3)$. Na tabela 3.1, são claros excepcionais acordos até a precisão de duas ou três casas decimais. Demonstrando a boa qualidade da aproximação analítica.

q	Taxas de crescimento de P_k	
	binária	numérico
0.01	0.01496	0.01491
0.02	0.02985	0.02972
0.03	0.04465	0.04440
0.04	0.05936	0.05896
0.05	0.07398	0.07340
0.06	0.08851	0.08773
0.07	0.10294	0.10194
0.08	0.11727	0.11605

Tabela 3.1: Taxas de crescimento exponencial de P_k em cadeias afiladas exponencialmente para trás previstas pela Teoria Binária e por integração numérica das equações de movimento.

De maneira semelhante, os resultados numéricos da propagação da energia cinética são apresentados na figura 3.4. Para E_k , a aproximação binária fornece um comportamento assintótico segundo a equação (2.41). Nesta última, são previstos decaimentos lineares do $\ln(E_k)$ em função de k , bem como taxas

de decaimento dependentes de q . Sendo exatamente o comportamento mostrado na figura 3.4. Ainda, regressões exponenciais dos dados numéricos são apresentados na mesma figura. As regressões estão em linhas perfeitamente coincidentes com as soluções numéricas. Corroborando o sucesso do método analítico.

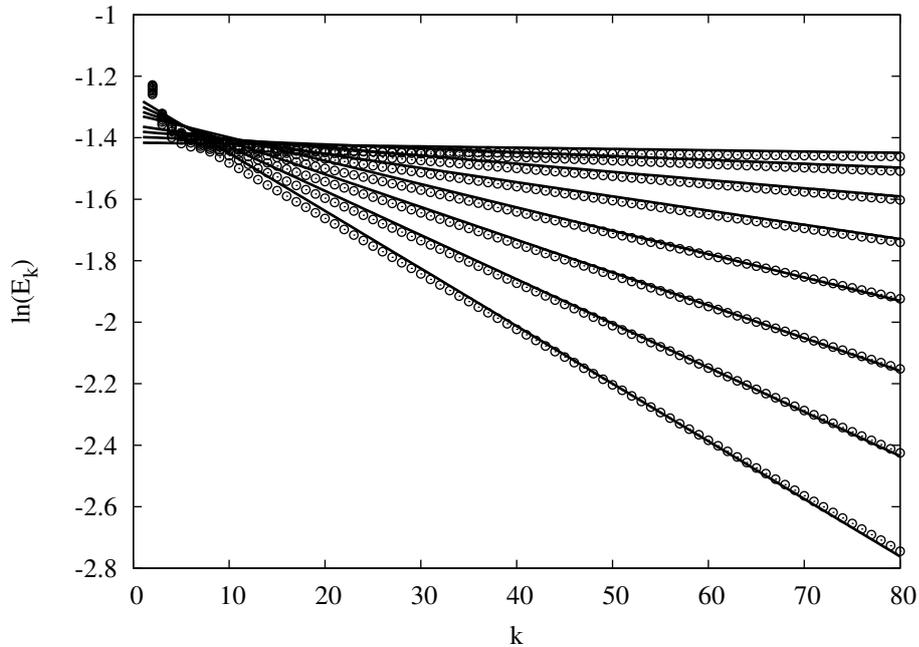


Figura 3.4: O decaimento da amplitude do pulso de $\ln(E_k)$ em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.

Na tabela 3.2, a seguir, estão as taxas de decaimento de $\ln(E_k)$ fornecidas pelas teorias analítica e numérica (obtidas a partir da regressão dos dados, conforme figura 3.4) para o afilamento exponencial para trás. A aproximação binária prevê a taxa de decaimento: $-2\ln\left\{\frac{1}{2}[(1-q)^{3/2} + (1-q)^{-3/2}]\right\}$. Observando a tabela 3.2, mostramos que as taxas de decaimento para a energia cinética apresentam razoável acordo entre a aproximação binária e a integração das equações de movimento. O acordo não é tão bom quanto ao de P_k devido à potência de v_k na definição da energia cinética. Logo, o erro é acentuado.

Em resumo para *cadeias afiladas para trás*, é interessante notar que apesar da velocidade diminuir (em consequência do aumento da massa), como uma lei de potência para a cadeia afilada linearmente ou exponencialmente para a cadeia afilada de modo exponencial, P_k aumenta devido ao domínio da massa. A energia cinética, por outro lado, decai continuamente (caso exponencial) ou satura (caso linear). Com respeito aos parâmetros de afilamento, quando aumentamos q ou S (massas maiores), o momento linear é maior e a energia cinética menor.

Vale atentar para o mencionado, por que para a confecção de um dispositivo “absorvedor” de impac-

q	Taxas de decaimento de $\ln(E_k)$	
	binária	numérico
0.01	-0.00023	-0.00033
0.02	-0.00092	-0.00118
0.03	-0.00209	-0.00259
0.04	-0.00375	-0.00455
0.05	-0.00591	-0.00708
0.06	-0.00860	-0.01017
0.07	-0.01183	-0.01382
0.08	-0.01560	-0.01805

Tabela 3.2: Taxas de decaimento do $\ln(E_k)$ para cadeias afiladas exponencialmente para trás como previstos pela Teoria Binária e os resultados da integração numérica das equações de movimento.

tos (uma importante aplicação dos tipos de sistemas estudados nessa dissertação) a quantidade relevante a ser considerada é o momento linear. Desde que esta é a quantidade a ser transferida para uma “parede”, na extremidade da cadeia, relacionada com o impacto (força). Assim, as cadeias afiladas para *trás* não são indicadas na absorção de choque. Na verdade, fazem o oposto: amplificam as ondas de choque. O que pode ser bom em contextos onde os pulsos são fracos e necessita-se amplificá-los.

3.1.2 Cadeias afiladas para frente (raios diminuem)

Cadeia afilada linearmente

Para cadeias afiladas linearmente para frente, os resultados da integração numérica para a propagação do momento linear estão na figura 3.5. O comportamento segundo a aproximação binária para P_k está na equação (2.49), a qual prevê um decaimento linear com taxas em função do parâmetro de afilamento S . Na figura 3.5, para S pequeno e quando aumentamos o valor de S porém com k não muito grande são realmente mostrados estes comportamentos. Este bom ajuste entre os dados nestes regimes ocorre pela validade da velocidade analítica, equação (2.47), ocorrer quando $k \ll 1 + 1/S$. Na mesma figura são apresentadas as regressões lineares (para $20 \leq k \leq 60$) dos dados numéricos em linhas contínuas. Observa-se que o decaimento é de fato linear para o regime de validade de v_k .

A previsão analítica para o decaimento de P_k é ainda mais relevante quando confrontada com resultados experimentais. Em 2006, F. Melo *et al.* experimentalmente mostraram que a redução da amplitude do pulso de P_k é linear em uma cadeia afilada linearmente para frente¹ [25]. Na ocasião, os autores afirmaram que a cadeia era afilada exponencialmente, mas os raios dos grãos apresentados são mais próximos

¹As cadeias afiladas nesta dissertação e em [25] estão com os eixos dos grãos alinhados, o que pode ser uma dificuldade experimental. O aparato experimental citado colocou os grãos em trilhos no formato de uma escada, outra solução é atravessar um fio bem esticado através dos próprios eixos dos grãos.

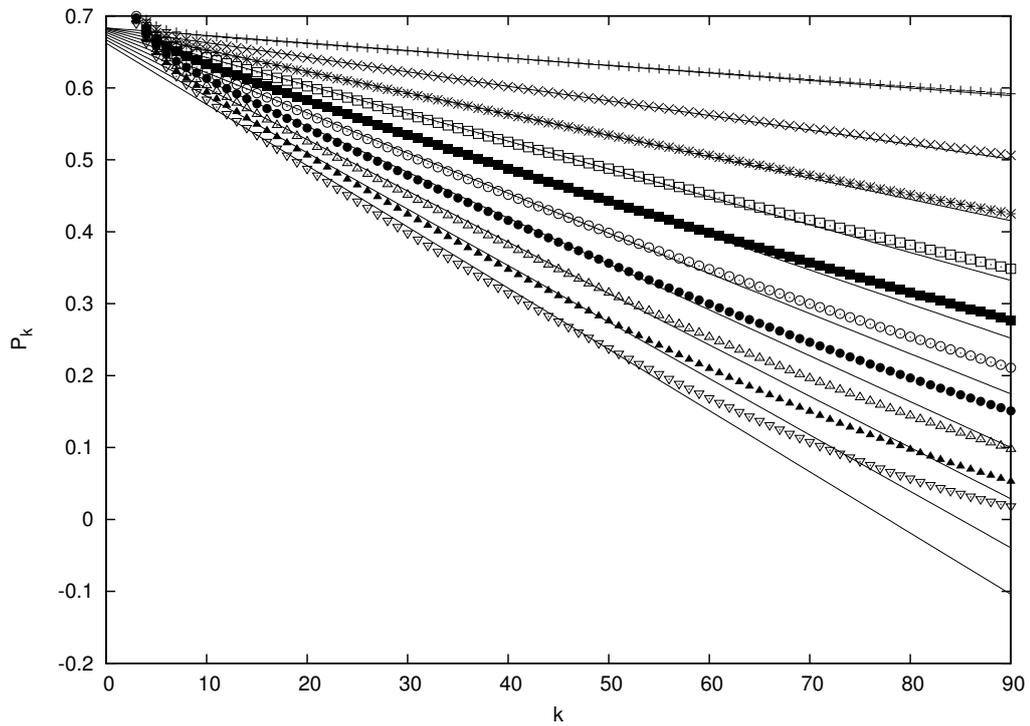


Figura 3.5: P_k em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de cima para baixo, em intervalos de 0.001. As linhas contínuas representam a regressão linear dos dados numéricos.

do afilamento linear. Essa confirmação experimental ressalta a qualidade da nossa aproximação.

Ainda, comparações entre as inclinações das curvas numéricas e analíticas para o decaimento de P_k são mostradas na tabela 3.3, a seguir, onde temos satisfatório acordo, porém não tão bons quanto ao afilamento linear para trás. A diminuição progressiva das massas ao longo da cadeia aumenta a variação das acelerações, gerando maiores erros nas velocidades e refletindo na propagação do momento linear. Vemos que quando aumentamos os valores de S os erros são maiores.

Em relação à propagação da energia cinética, os resultados estão na figura 3.6. O comportamento de E_k segundo a aproximação binária está na equação (2.50), onde é prevista uma saturação. Na figura 3.6, observamos que nos menores valores de S , desprezando efeitos de borda, a energia cinética é aproximadamente constante. Quando aumentamos o valor de S e k não é tão grande, observamos o mesmo resultado. Novamente, a dependência quadrática de E_k com a velocidade acentua os erros.

De posse do exposto, vemos que a descrição analítica para a propagação do momento linear e energia cinética, no afilamento linear para frente, não é tão boa quanto nos casos anteriores (cadeias afiladas para trás). Isso decore da aproximação de escala para a velocidade, equação (2.47). A diminuição das massas ao longo da cadeia também influencia negativamente na obtenção do comportamento qualitativo de P_k e E_k . A variação das acelerações das partículas, neste afilamento, se tornam bruscas e difíceis de serem

S	Taxas de decaimento de P_k	
	binária	numérico
0.001	-0.0015	-0.0010
0.002	-0.0030	-0.0020
0.003	-0.0045	-0.0030
0.004	-0.0060	-0.0039
0.005	-0.0076	-0.0047
0.006	-0.0091	-0.0056
0.007	-0.0106	-0.0064
0.008	-0.0122	-0.0071
0.009	-0.0137	-0.0078
0.01	-0.0153	-0.0085

Tabela 3.3: Coeficiente angular do decaimento linear de P_k para cadeias afiladas linearmente para frente, previsto pela aproximação binária e teoria numérica, para alguns valores do parâmetro de afilamento S .

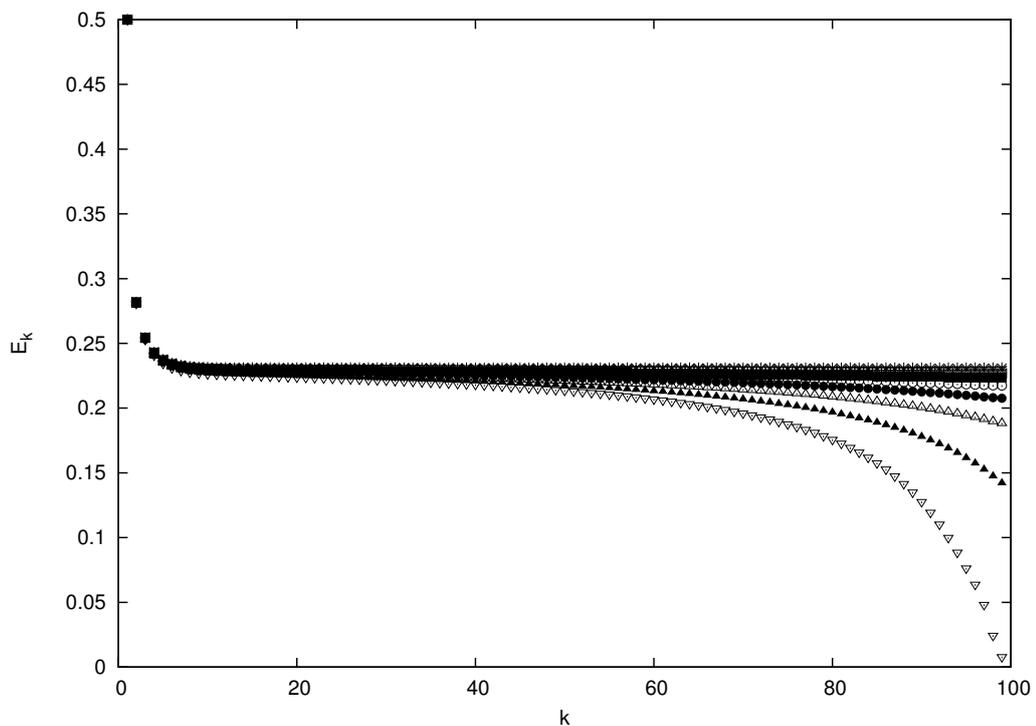


Figura 3.6: A energia cinética como função de k para cadeias afiladas linearmente para frente para $S = 0.001$ até 0.01 , de cima para baixo.

capturadas, naturalmente refletindo nos valores das velocidades, conseqüentemente em P_k e E_k . Contudo, para o regime de validade da velocidade analítica a previsão da Teoria Binária é muito boa. A seguir, trataremos do último caso de afilamento em cadeias granulares estudadas neste trabalho, cadeia afilada de modo exponencial para frente.

Cadeia afilada exponencialmente

Nas cadeias afiladas exponencialmente para frente, os resultados numéricos do momento linear ao longo da cadeia são mostrados na figura 3.7. A aproximação binária prevê um comportamento para P_k segundo a equação (2.52), esta antecipa um decaimento linear para o $\ln(P_k)$, ao invés do crescimento para as cadeias afiladas linearmente para trás. Tal equação prediz que as taxas de decaimento são funções de q . Estes comportamentos são observados perfeitamente na figura 3.7. A regressão exponencial dos dados numéricos são apresentados na mesma figura em linhas contínuas.

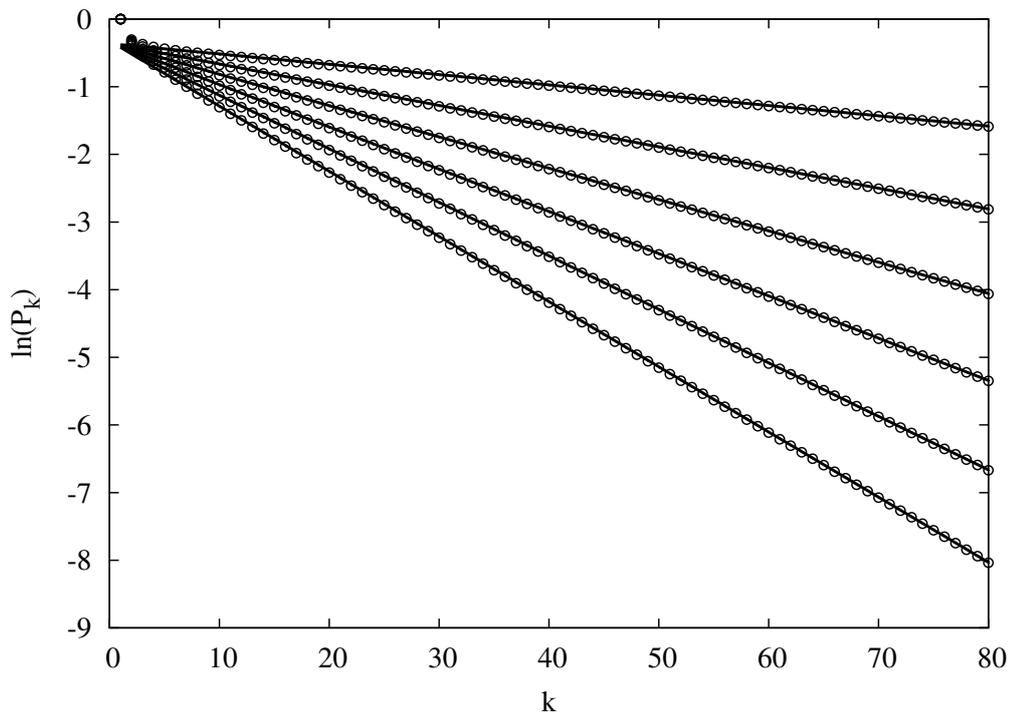


Figura 3.7: O momento linear como função de k em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de baixo para cima, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.

Além disso, compara-se as taxas de decaimento de $\ln(P_k)$, dadas pela aproximação binária da forma $-\ln\left(1 + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^3\right)$, com os da integração numérica das equações de movimento na tabela 3.4, mostrando boa concordância até duas casas decimais. Quando aumentamos os valores de q é natural obtermos erros maiores, nestas condições as acelerações são elevadas.

Acerca da propagação da energia cinética, seu comportamento analítico é descrito pela equação (2.53) para valores grande de k . Nesta equação, E_k decai exponencialmente em taxas dependentes do parâmetro de afilamento q . O mesmo comportamento é visto na figura 3.8 desprezando efeitos de borda. Na mesma figura, são mostradas as regressões exponenciais dos dados numéricos refletindo o êxito da aproximação binária.

q	Taxas de decaimento de $\ln(P_k)$	
	binária	numérica
0.01	-0.0150369	-0.0151371
0.02	-0.030145	-0.0305032
0.03	-0.0453208	-0.0462143
0.04	-0.0605606	-0.0623547
0.05	-0.0758609	-0.0790053
0.06	-0.0912182	-0.0962407

Tabela 3.4: Comparação entre dados numéricos e analíticos das taxas do decaimento de $\ln(P_k)$ em cadeias afiladas exponencialmente para frente para alguns valores de q .

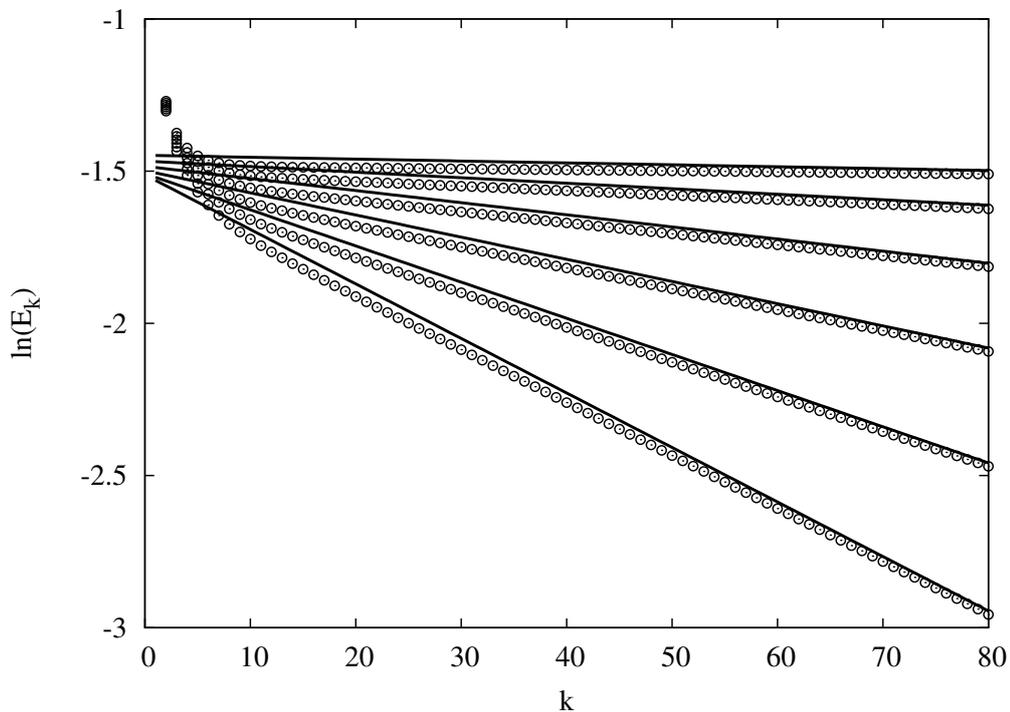


Figura 3.8: O decaimento de E_k em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . As linhas representam a regressão exponencial dos dados numéricos.

Por fim, comparamos na tabela 3.5 as taxas de decaimento para $\ln(E_k)$ em função de q obtidos com a aproximação binária da forma $-2\ln\frac{1}{2}[(1+q)^{3/2} + (1+q)^{-3/2}]$, e a integração das equações de movimento. Nesta tabela, observamos bons acordos para os menores valores de q . Entretanto, os erros se elevam conforme aumentamos q . Outra vez, a dependência quadrática de E_k com a velocidade e as bruscas variações das acelerações dos grãos (devido a diminuição das massas) contribuem para os erros.

Nos gráficos deste afilamento, observamos uma melhor captura dos comportamentos qualitativos pela teoria analítica do que no afilamento linear para frente. Estes melhores resultados são frutos da determinação analítica da velocidade, em cadeias afiladas exponencialmente para frente, ser exata e

q	Taxas de decaimento de $\ln(E_k)$	
	binária	numérico
0.01	-0.00022	-0.00042
0.02	-0.000882	-0.00160
0.03	-0.001965	-0.00375
0.04	-0.003459	-0.00705
0.05	-0.005351	-0.01164
0.06	-0.007630	-0.01768

Tabela 3.5: Taxas de decaimento de $\ln(E_k)$, em cadeias afiladas exponencialmente para frente, para alguns valores de q obtidos com a aproximação binária e a integração das equações de movimento.

válida para qualquer k , ou seja, não se trata de uma aproximação como para as cadeias afiladas linearmente.

Após os resultados para as diferentes regras de afilamento, uma pequena discussão sobre o comportamento do momento linear e energia cinética durante a propagação é necessária. Para a energia cinética, observamos que, em ambas as cadeias afiladas linearmente, passado um curto transiente E_k converge para um valor constante. Por sua vez, ambas as cadeias afiladas exponencialmente diminuem continuamente a energia cinética transmitida no pulso. Portanto, as cadeias afiladas de modo exponencial são mais eficazes em atenuar as energias transmitidas ao sistema. Em qualquer regra de afilamento sempre a amplitude do pulso de energia diminui, apesar das colisões entre os grãos serem perfeitamente elásticas. Isso ocorre devido a uma parte da energia contida no pulso permanecer nos grãos após a passagem do pulso. Nas figuras 2.2 e 2.3 é visível que os grãos atrás do pulso continuam em movimento, as suas energias cinéticas são oriundas da energia contida no pulso. Por outro lado, P_k sendo dominado pelas massas em cadeias granulares, aumenta quando o afilamento ocorre para trás (raios crescem) e diminui quando o afilamento se dá para frente (raios diminuem). Logo, se quisermos construir um absorvedor de choque as cadeias com afilamento na direção da propagação do pulso são mais indicadas. Além disso, como o afilamento exponencial apresenta um decaimento exponencial de P_k é ainda mais eficaz que o afilamento linear onde o decaimento é linear.

Nesta seção vimos que a aproximação binária consegue capturar muito bem o comportamento qualitativo da propagação de P_k e E_k ao longo de cadeias granulares afiladas. Entretanto, na seção 2.3 mostramos que os valores corretos das variações das amplitudes dos pulsos de velocidade não são obtidos utilizando a aproximação binária. Empregaremos a seguir o método de correção para as velocidades proposto neste trabalho.

3.2 Método de correção

Em todas as regras de afilamento, a aplicação do método de correção para as velocidades segue a seguinte ordem: determinação dos fatores de correção através das razões $\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ e apresentação dos dados analíticos para a propagação das amplitudes dos pulsos de velocidade, momento linear e energia cinética. Todos os resultados analíticos são confrontando com resultados numéricos, oriundos da equação (2.7).

3.2.1 Cadeias afiladas para trás

Cadeia afilada linearmente

Nas cadeias afiladas linearmente para trás, o fator de correção, previsto pela equação (2.56), é uma constante (exceto por uma correção logarítmica dependente de k). Este fator é determinado pela razão entre as velocidades obtidas da Teoria Binária e numérica, mostrada na figura abaixo.

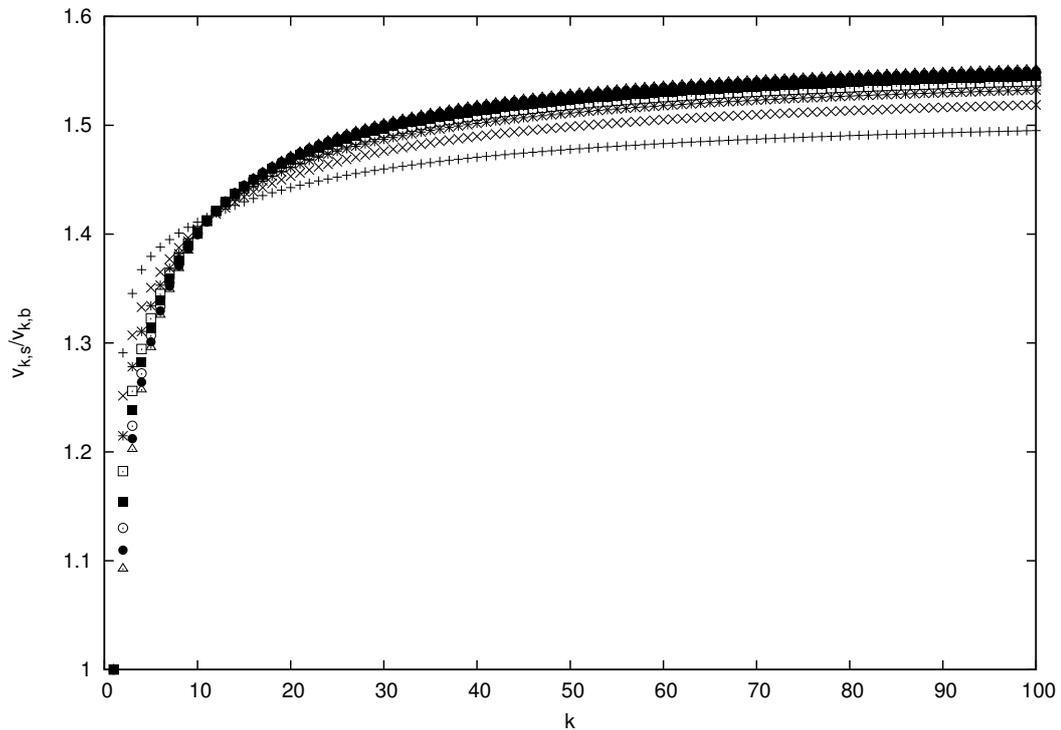


Figura 3.9: $\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de baixo para cima, em intervalos de 0.1 . Estimamos que a razão seja a constante 1.55 .

Realmente na figura 3.9, observamos que $\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ é quase uma constante e independente de S , mostrando que as aproximações na equação (2.56) são coerentes. Por meio de inspeção da figura acima, estimamos²

²Utilizando um pouco de tentativa e erro.

que o fator de correção esteja em torno de 1.55. Empregando tal estimativa para corrigir as velocidades previstas pela aproximação binária, apresentamos na figura 3.10 os valores das velocidades corrigidas. Notamos um excelente ajuste nas velocidades, principalmente no limite de k com valor grande. No entanto, uma observação cuidadosa revela que para os maiores valores de S os resultados convergem um pouco mais (este detalhe influenciará na determinação correta de E_k). Tal fato sobre S não é surpreendente, uma vez que a região de validade de v_b , equação (2.26), é: ambos, k e $Sk \gg 1$. Também, as velocidades decaem devido a inércia aumentar ao longo da cadeia, o pulso desacelera. Em consequência, quando aumentamos S o decaimento é maior.

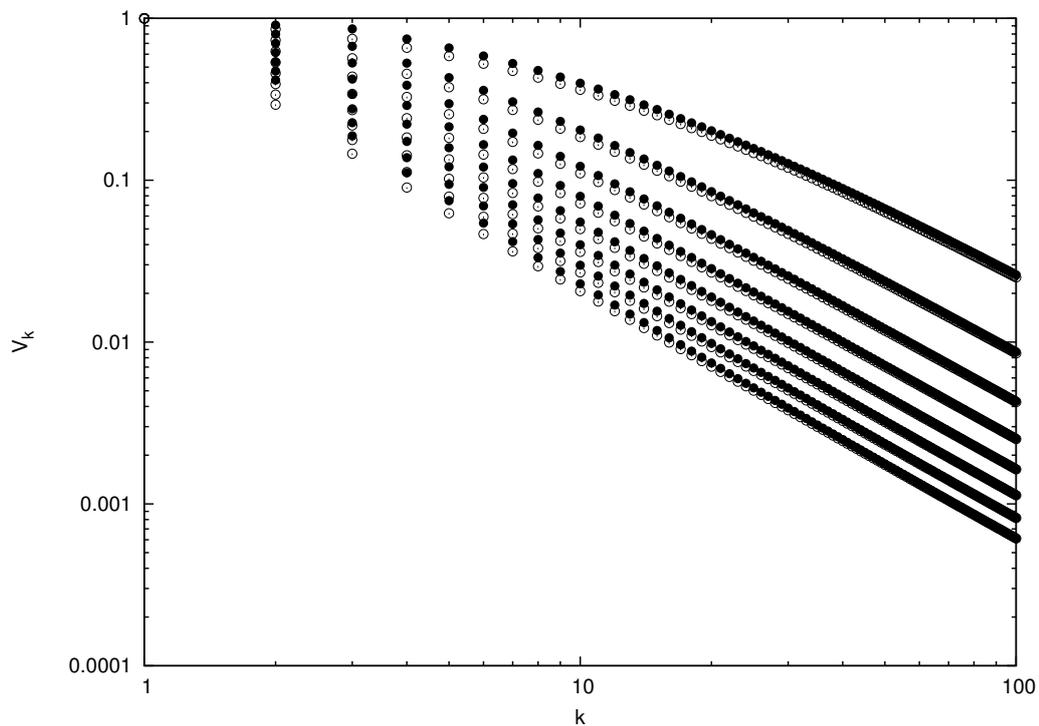


Figura 3.10: Comparações entre as velocidades previstas pela aproximação binária (círculos abertos), corrigida pelo fator 1.55, e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.8 de cima para baixo, em intervalos de 0.1 .

Na figura 3.11, apresentamos a propagação do momento linear com as velocidades analíticas corrigidas. Observamos o êxito para correção realizada em todos os valores de q . Apesar das velocidades na figura 3.10 apresentarem bons ajustes nos valores grandes de k , P_k da aproximação binária mostra excelente acordo ao longo de toda a cadeia. Isto é devido a predominância da massa na determinação do momento linear, que compensa a falta de precisão da velocidade para valores pequenos de k .

Para a propagação da energia cinética, os resultados estão na figura 3.12. Verificamos quando (ambos) k e Sk são grandes as correções são perfeitas. Os melhores ajustes nas velocidades quando aumentamos S , figura 3.10, se tornam acentuados para energia cinética devido a ordem da potência sobre a velocidade. Sendo assim, para os menores valores de S continuamos não obtendo os valores corretos

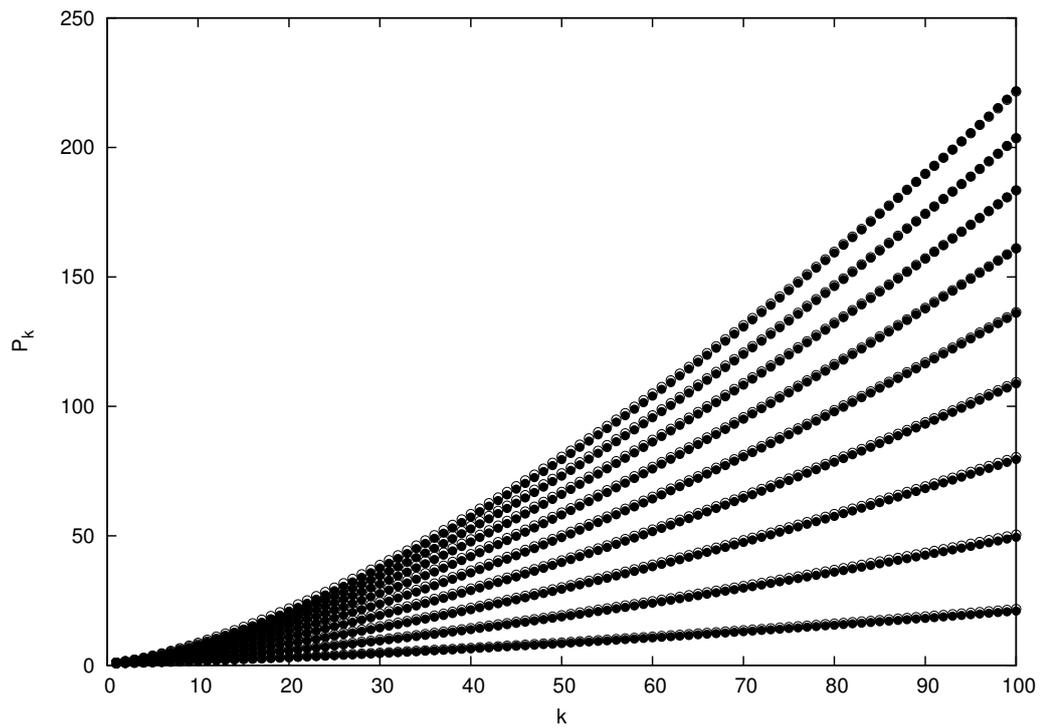


Figura 3.11: Comparação entre P_k fornecido pela aproximação binária após as correções nas velocidades (círculos abertos) e determinado numericamente (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de baixo para cima, em intervalos de 0.1 .

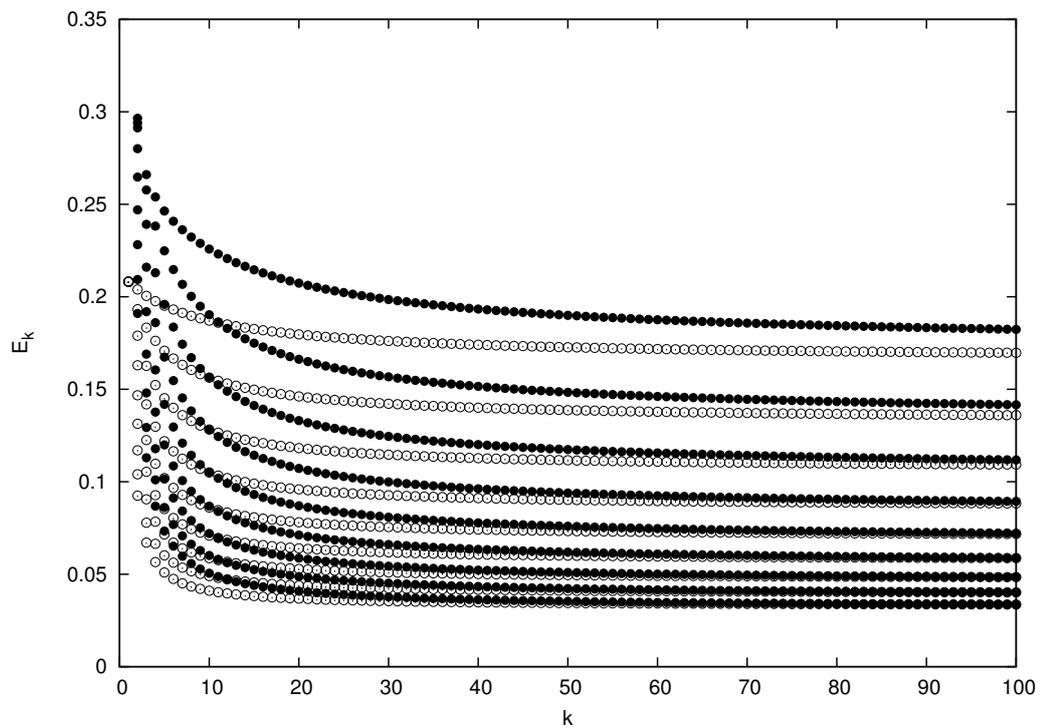


Figura 3.12: O decaimento de E_k , após correções nas velocidades, dado pela aproximação binária (círculos abertos) e por determinação numérica (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para trás com $S = 0.1$ até 0.9 de cima para baixo, em intervalos de 0.1 .

para as amplitudes dos pulsos de energia cinética. Quanto maior for S menor é E_k , pois as velocidades decaem rapidamente neste regime.

Cadeia afilada exponencialmente

Nas cadeias afiladas de modo exponencial para trás, o método de correção para as velocidades supõe uma relação linear com k para $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$, equação (2.59). Essas razões são mostradas na figura 3.13, onde de fato observa-se um crescimento linear com k . Conforme previsto, os crescimentos das razões entre as velocidades são funções do parâmetro de afilamento q .

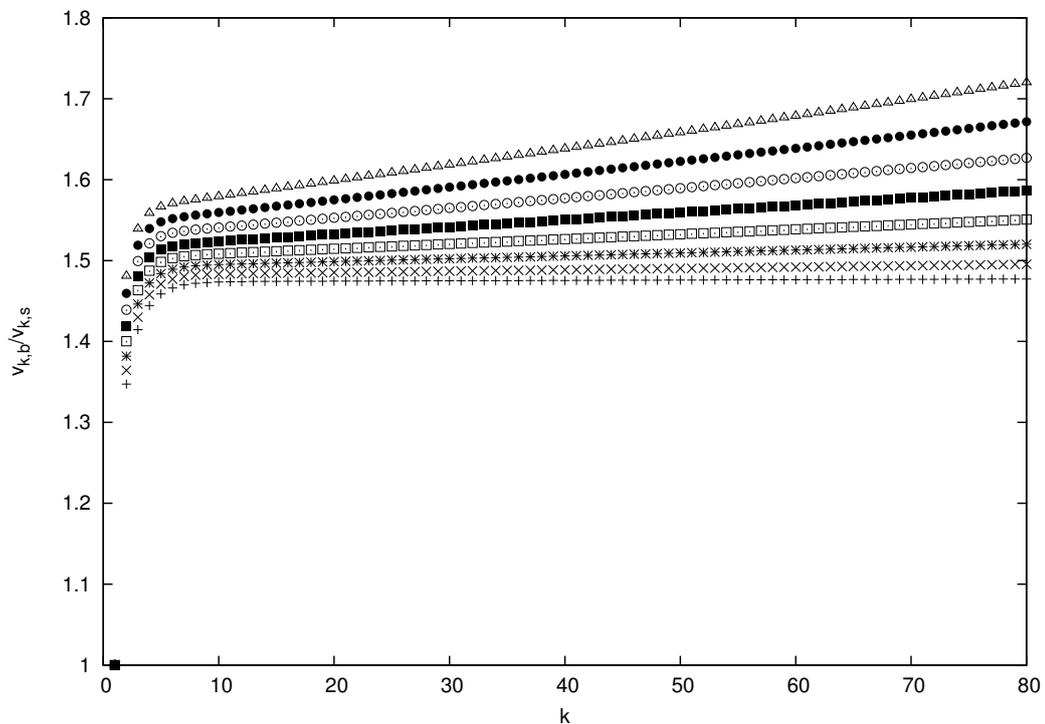


Figura 3.13: $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ em cadeias afiladas exponencialmente para trás com q variando de 0.01 até 0.08 de baixo para cima, em intervalos de 0.01.

Afim de evitar efeitos de borda, fizemos regressões lineares com os dados da figura 3.13 para valores de $k > 20$. Dessa forma, obtemos as constantes $B(q)$ e $D(q)$ determinadas pela equação (2.59). Na tabela 3.6, adiante, apresentamos os valores para estas constantes, com os quais fizemos a regressão linear do $\log B(q)$ em função de $\log(q)$, equação (2.61), mostrada no item (a) da figura 3.14. Igualmente, fizemos para

$D(q)$, equação (2.62), item (b) da mesma figura. A regressão linear de $B(q)$ não aparenta ser boa, o que não importa pois a escala de variação no eixo y é pequena. Deste modo, determinamos os seguintes

fatores de correção:

$$a = 1.64393211, \quad b = 0.0257163, \quad c = 0.212103694 \quad e \quad d = 1.82693. \quad (3.1)$$

q	Regressão linear de $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$	
	B	D
0.01	1.4736	0.000045454
0.02	1.48177	0.000169964
0.03	1.49139	0.000359906
0.04	1.5023	0.000606117
0.05	1.51434	0.000902814
0.06	1.5274	0.00124507
0.07	1.54167	0.00162362
0.08	1.55729	0.00202999

Tabela 3.6: Constantes B e D previstas pela equação (2.59) obtidas da regressão linear de $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ para alguns valores de q .

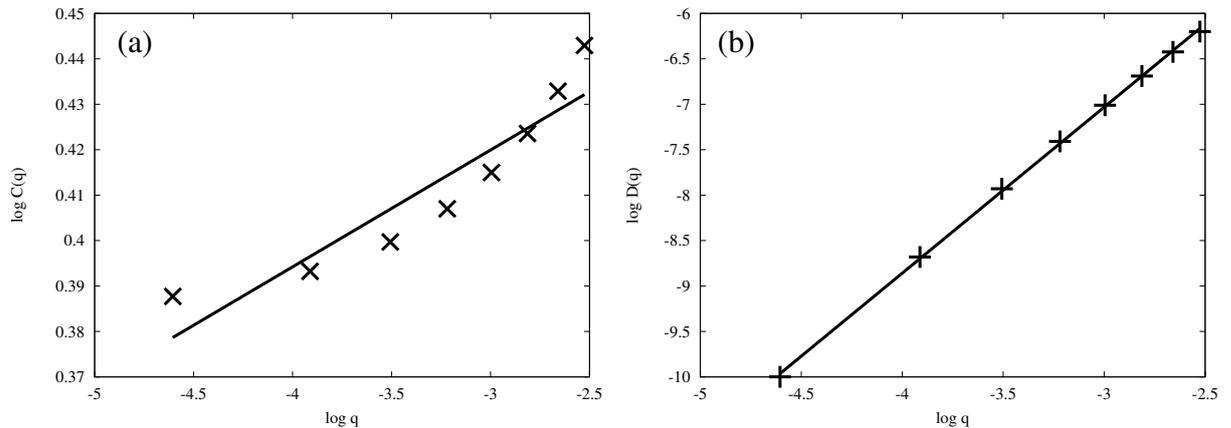


Figura 3.14: Regressão linear de $B(q)$ (item a) e $D(q)$ (item b) determinados pelas equações (2.61) e (2.62), respectivamente, para os valores da tabela 3.6. Encontramos $a = 1.64393211$, $b = 0.0257163$, $c = 0.212103694$ e $d = 1.82693$.

Empregando os valores de a , b , c e d na equação (2.63), encontramos as velocidades analíticas corrigidas e confrontamos com os dados numéricos na figura 3.15. Observamos que as soluções estão em excelente acordo para todos os parâmetros de afilamento estudados. A precisão é tão boa, que é difícil distinguir os resultados de ambas as teorias. As correções nas velocidades para esta regra de afilamento é melhor do que no caso anterior, ver figura 3.10, pois na velocidade analítica aqui não é feita nenhuma aproximação, equação (2.36), ao contrário da velocidade no afilamento linear, equação (2.26). Outra observação, como esperado, quando aumentamos os valores de q a velocidade decai mais rápido devido à massa dos grãos também ser maior.

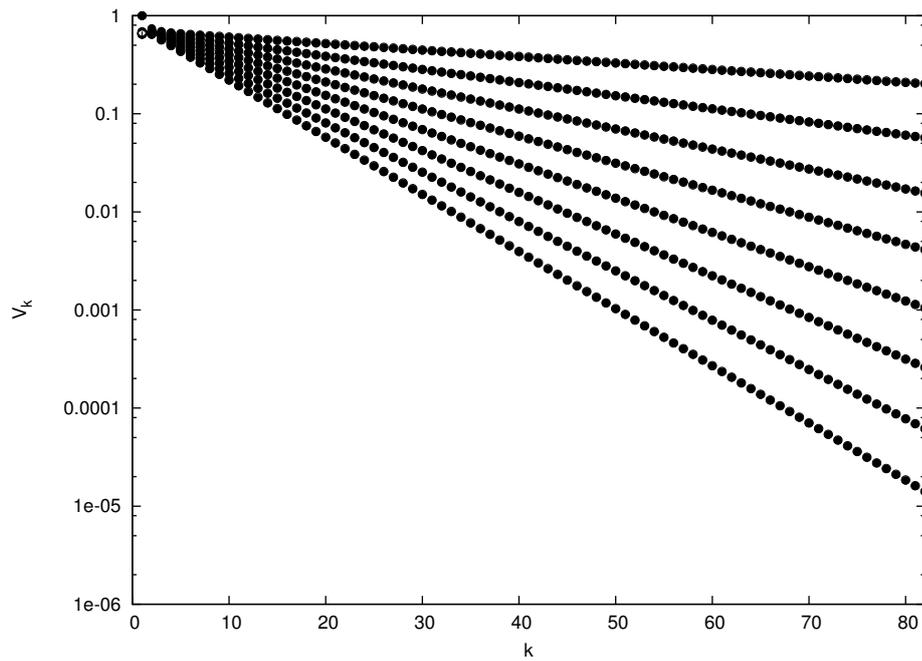


Figura 3.15: Comparações entre as velocidades previstas pela aproximação binária (círculos abertos), equação (2.63), e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de cima para baixo, em intervalos de 0.01. O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os dados.

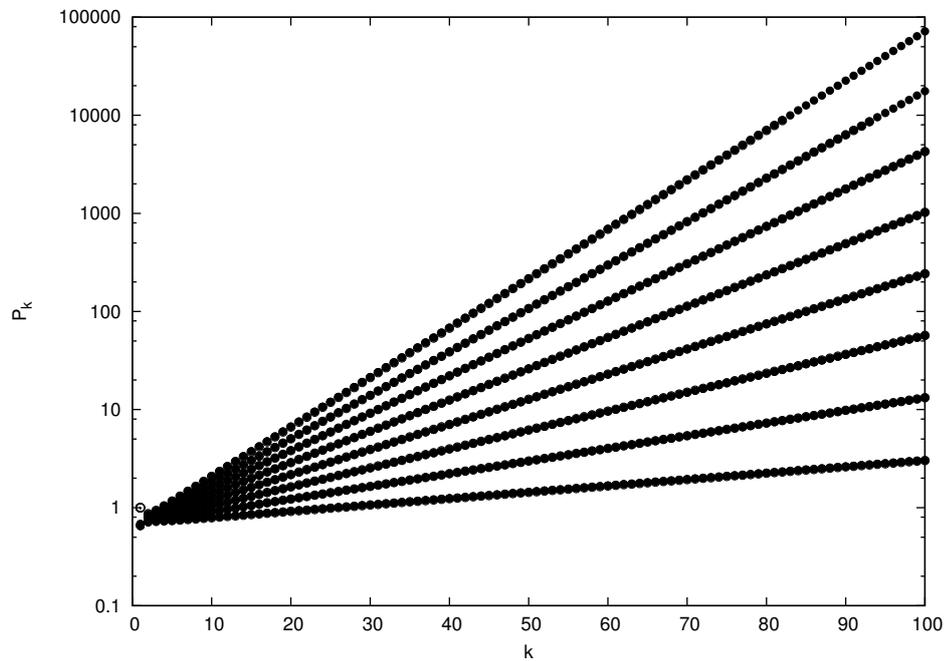


Figura 3.16: P_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de baixo para cima, em intervalos de 0.01. Os círculos abertos são os dados analíticos e os círculos sólidos os numéricos. O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os dados.

Após as correções nas velocidades, podemos estudar corretamente a propagação do momento linear e energia cinética ao longo da cadeia. O comportamento da amplitude do pulso de P_k está na figura 3.16, onde notamos perfeitos ajustes entre os resultados numérico e analítico. Outra vez, o comportamento da massa é dominante na propagação de P_k . Quando aumentamos q , temos crescimentos maiores para o momento linear.

Em relação à propagação da energia cinética, comparamos sua propagação na figura 3.17. Desprezando efeitos de borda, observamos bons ajustes. Novamente, a dependência quadrática da velocidade influencia na obtenção precisa dos seus valores. O decaimento da velocidade predomina na propagação de E_k .

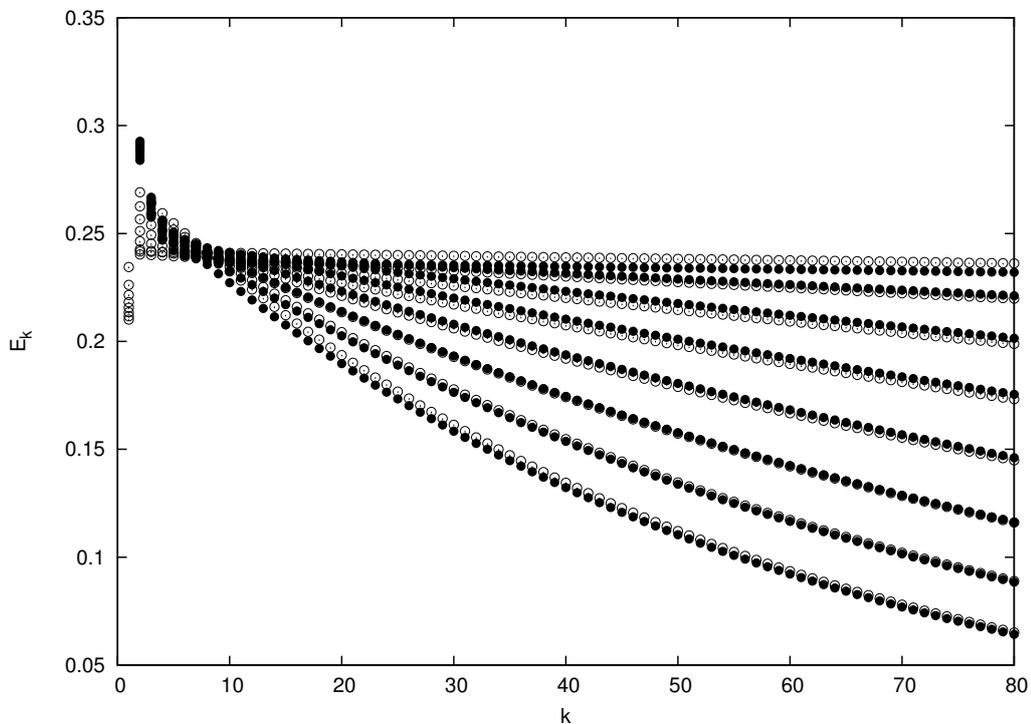


Figura 3.17: O decaimento de E_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas exponencialmente para trás com $q = 0.01$ até 0.08 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . Os círculos abertos correspondem aos dados analíticos e os círculos sólidos aos numéricos.

A seguir, serão abordadas os fatores de correção nas velocidades e a propagação da energia cinética e momento linear nas cadeias afiladas para frente.

3.2.2 Cadeias afiladas para frente

Cadeia afilada linearmente

Nas cadeias afiladas linearmente para frente o fator de correção é esperado ser uma constante, conforme discutido na subseção 2.4.2. Analisamos a razão $\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ na figura 3.18, abaixo, para alguns valores

do parâmetro de afilamento S e estimamos³ que o fator de correção para a velocidade seja 1.47. Na figura 3.19 utilizamos este fator nas velocidades analíticas e comparamos com as soluções numéricas. Observamos que as velocidades estão em excelente acordo, exceto quando aumentamos S onde existem pequenos desvios. Como ao longo da cadeia os grãos estão diminuindo de raio (massa), as acelerações são elevadas e a Teoria Binária não capture as variações bruscas em v_k para os maiores valores de S e k . A validade da equação (2.47), $k \ll 1 + 1/S$, também é decisivo para este resultado. Como consequência da direção de afilamento as amplitudes dos pulsos de velocidade crescem durante a propagação, o pulso é acelerado.

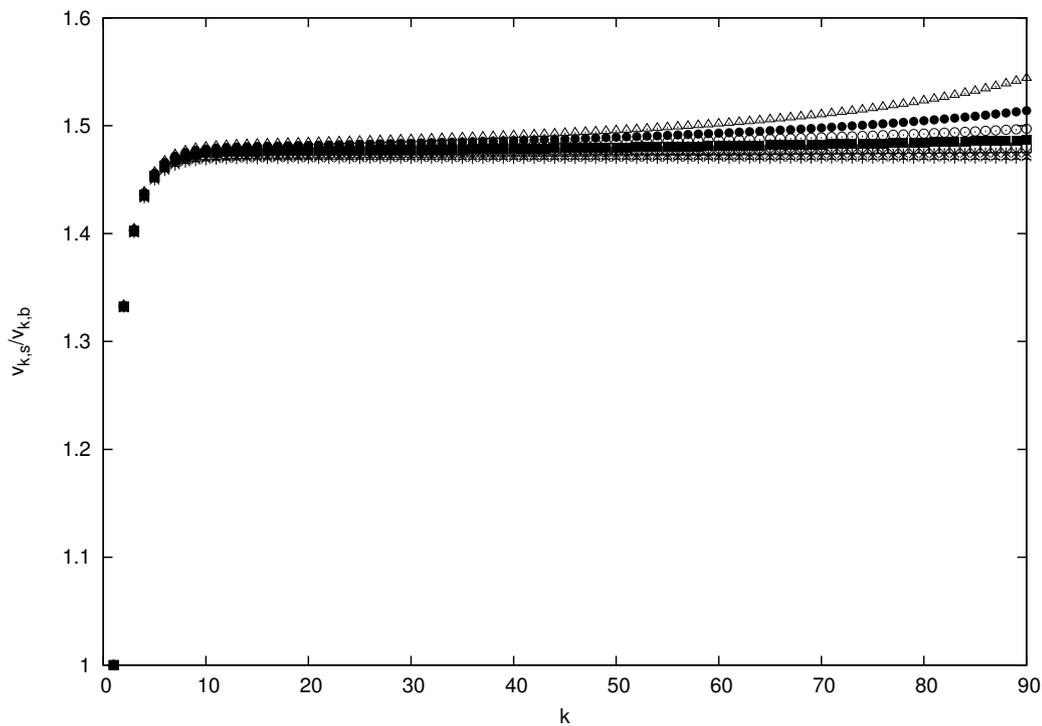


Figura 3.18: $\frac{v_{k,s}}{v_{k,b}}$ em cadeias afiladas linearmente para frente com S variando de 0.001 até 0.008 de baixo para cima, em intervalos de 0.001. Estimamos que a razão seja a constante 1.47.

Com respeito ao comportamento de P_k , apresentamos as comparações na figura 3.20. Verificamos que os desvios de v_k refletem, sem surpresas, na propagação do momento linear. Quando aumentamos S , não obtemos os valores corretos de P_k . Conforme analisado anteriormente, a diminuição da massa ao longo da cadeia sobrepõe o aumento da velocidade, determinando o decaimento de P_k . Para os maiores valores de S ocorrem decaimentos maiores.

Adiante, temos a propagação da energia cinética na figura 3.21. Os erros em v_k se pronunciam em E_k , sem surpreender, devido a $E_k \propto v_k^2$. É aguardado não capturarmos quantitativamente a energia cinética, com excessão em valores suficientemente pequenos de S como 0.001 (em destaque na figura

³Tal como para cadeias afiladas linearmente para trás, empregamos tentativas e erros.

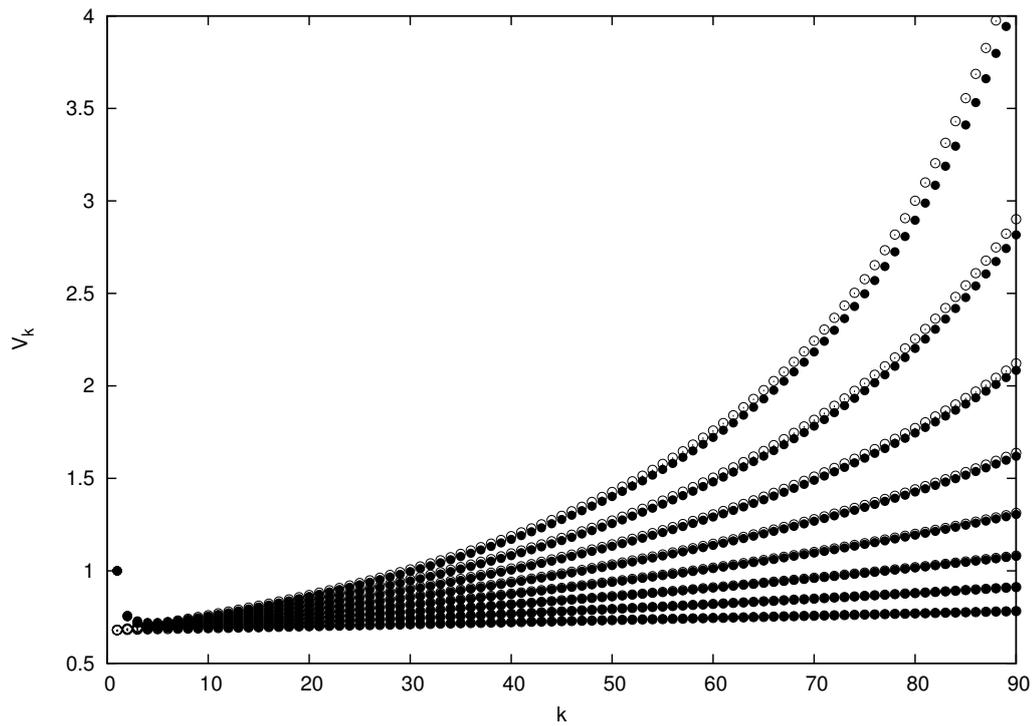


Figura 3.19: v_k , corrigida pelo fator 1.47 (círculos abertos) e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de baixo para cima, em intervalos de 0.001. O melhor acordo está em S com valor pequeno.

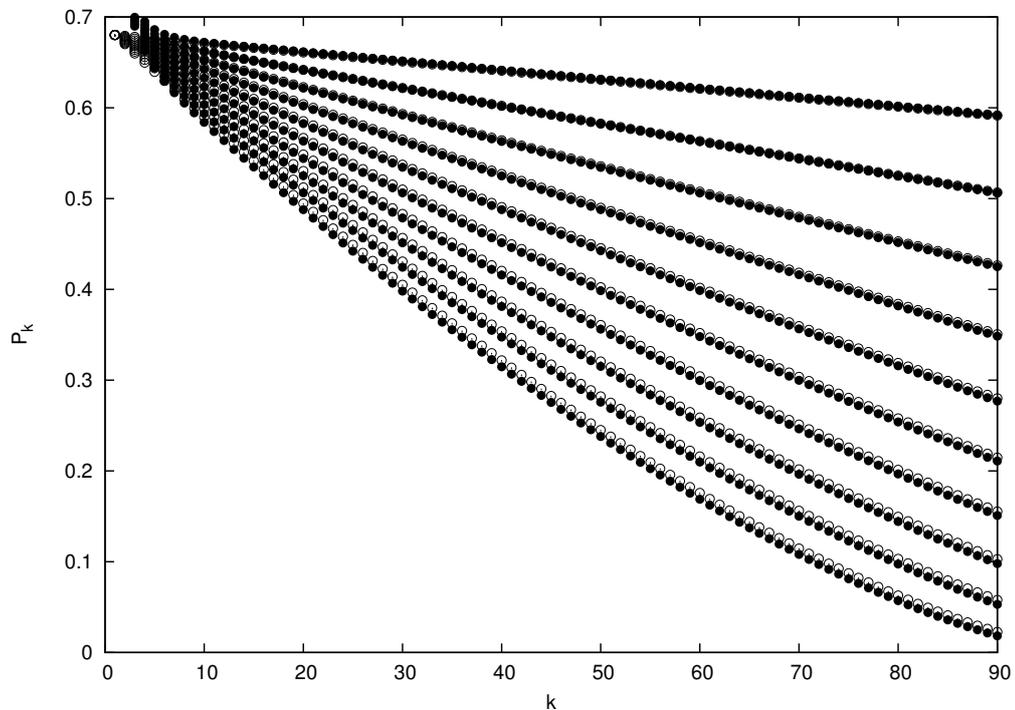


Figura 3.20: P_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de cima para baixo, em intervalos de 0.001. Os círculos abertos são os dados analíticos e os círculos sólidos os numéricos. Como em v_k , para S com valor pequeno as teorias concordam bem.

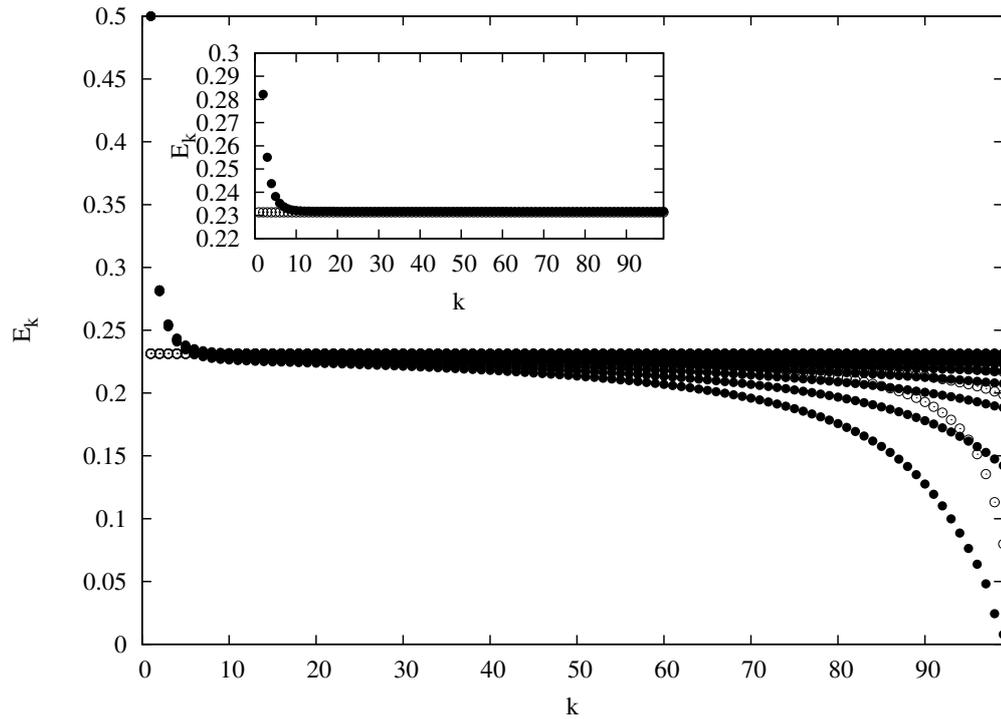


Figura 3.21: O decaimento de E_k em cadeias afiladas linearmente para frente com $S = 0.001$ até 0.01 de cima para baixo, com intervalos de 0.001. Os círculos abertos correspondem aos dados analíticos e os círculos sólidos aos numéricos. Em destaque está a comparação para $S = 0.001$, onde temos excelente acordo.

3.21). Por fim, vamos discutir o último modo de afilamento nas cadeias estudadas nesta dissertação, o caso exponencial para frente.

Cadeia afilada exponencialmente

Nas cadeias afiladas exponencialmente para frente, os fatores de correção são obtidos de maneira idêntica ao afilamento exponencial para trás. Semelhante a equação (2.59), é previsto que a razão $v_{k,b}/v_{k,s}$ apresente uma dependência linear com k e que as constantes (taxas de crescimento) dessa relação linear sejam funções de q . As razões entre as velocidades estão na figura 3.22 onde é visto o comportamento aguardado para $v_{k,b}/v_{k,s}$. Na tabela 3.7 são mostrados os valores de B' e D' para alguns valores de q . Conforme discutido na subseção 2.3.2, o afilamento para frente impõe limitações nos comprimentos das cadeias. Logo, restringimos nosso estudo ao valor máximo de $q = 0.06$.

Uma vez determinados B' e D' , usam-se relações semelhantes as equações (2.61) e (2.62) em regressões lineares e determina-se os fatores de correção. Estes procedimentos são apresentados na figura 3.23, onde obtemos as seguintes constantes de correção:

$$a' = 1.271724686, \quad b' = -0.0333648, \quad c' = 12.278134531 \quad \text{e} \quad d' = 2.59475. \quad (3.2)$$

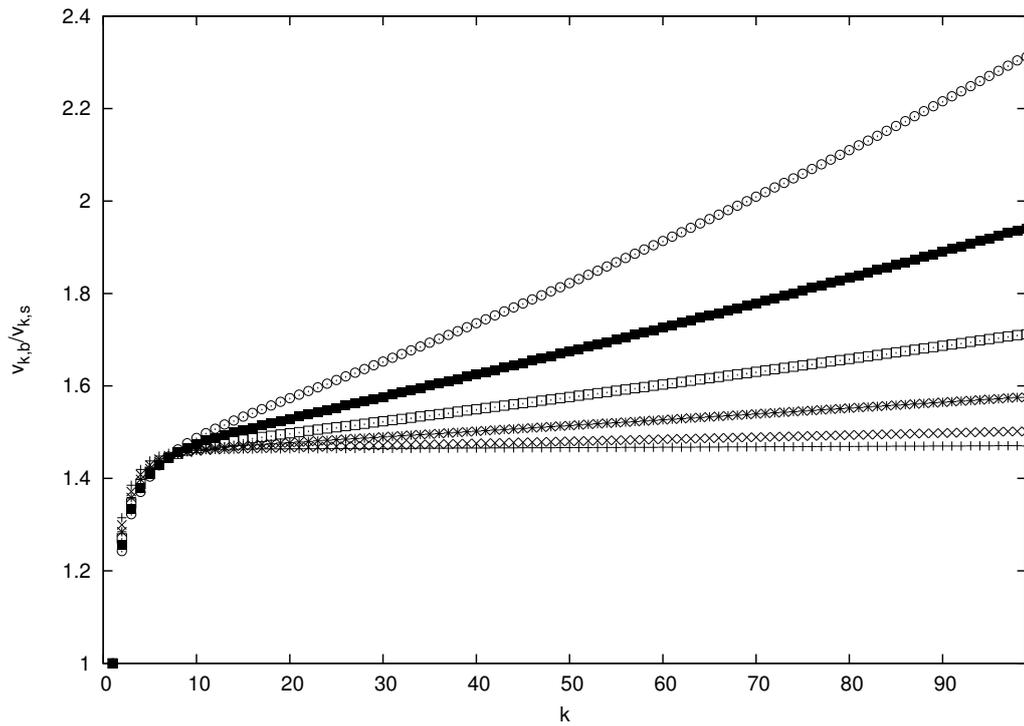


Figura 3.22: $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ em cadeias afiladas exponencialmente para frente com q variando de 0.01 até 0.06 de baixo para cima, em intervalos de 0.01.

q	Regressão linear de $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$	
	B'	D'
0.01	1.46219	0.0000868558
0.02	1.45778	0.000448324
0.03	1.45183	0.0012501
0.04	1.44005	0.00272328
0.05	1.41365	0.00522771
0.06	1.35541	0.00935746

Tabela 3.7: Constantes B' e D' , previstas de modo idêntico a equação (2.59), obtidas com a regressão linear de $\frac{v_{k,b}}{v_{k,s}}$ para alguns valores de q em cadeias afiladas exponencialmente para frente.

A regressão linear de $B(q)$ no item (a) da figura 3.23 não parece satisfatória, porém a variação no eixo y é pequena. Se aumentarmos a escala em y , todos os pontos incidiram sob a reta.

Com os valores nas expressões (3.2), usa-se a equação (2.66) para corrigir os valores das velocidades analíticas. Assim, compara-se seus resultados com os resultados numéricos para v_k na figura 3.24, onde observamos que o acordo entre as duas teorias é excelente, mostrando a eficácia do método de correção. Os resultados são bons a ponto de termos dificuldade para distinguir as soluções analíticas e numéricas. Devido a direção do afilamento, as amplitudes de v_k aumentam durante sua propagação na cadeia.

Para o momento linear os resultados estão na figura 3.25. Vemos que o sucesso na correção das

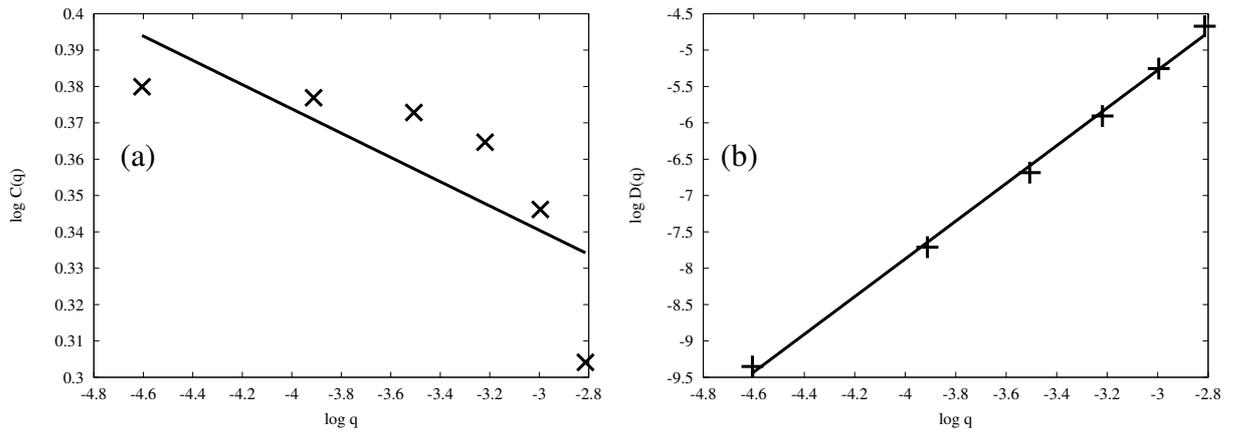


Figura 3.23: Regressão linear de $B'(q)$ (item a) e $D'(q)$ (item b), previstas de modo igual as equações (2.61) e (2.62), respectivamente, para os valores mostrados na tabela 3.7. Encontramos $a' = 1.271724686$, $b' = -0.0333648$, $c' = 12.278134531$ e $d' = 2.59475$.

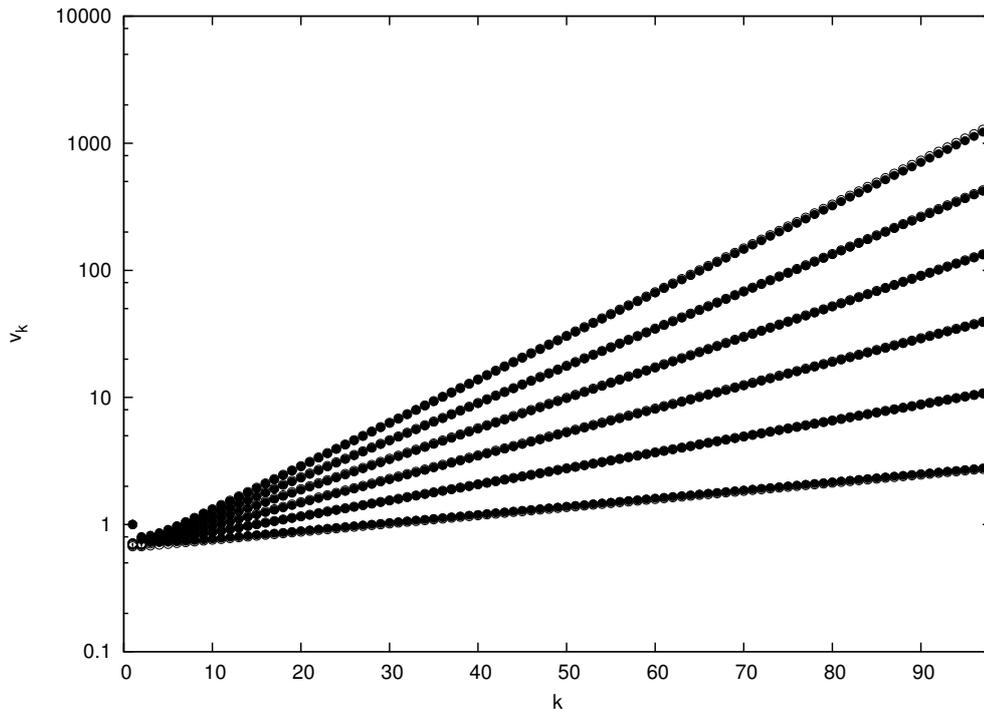


Figura 3.24: Comparações entre as velocidades analíticas (círculos abertos), equação (2.66), e dados numéricos (círculos sólidos) em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de baixo para cima, em intervalos de 0.01 . O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os resultados.

velocidades reflete, também, na captura de P_k . Não é fácil diferenciar as soluções da aproximação binária e os da integração da equação de movimento. O decaimento da massa dos grãos domina o comportamento de P_k e quando aumentamos q temos decaimentos maiores.

Além disso, na figura 3.26 são mostradas as propagações das energias cinéticas em função de k , onde

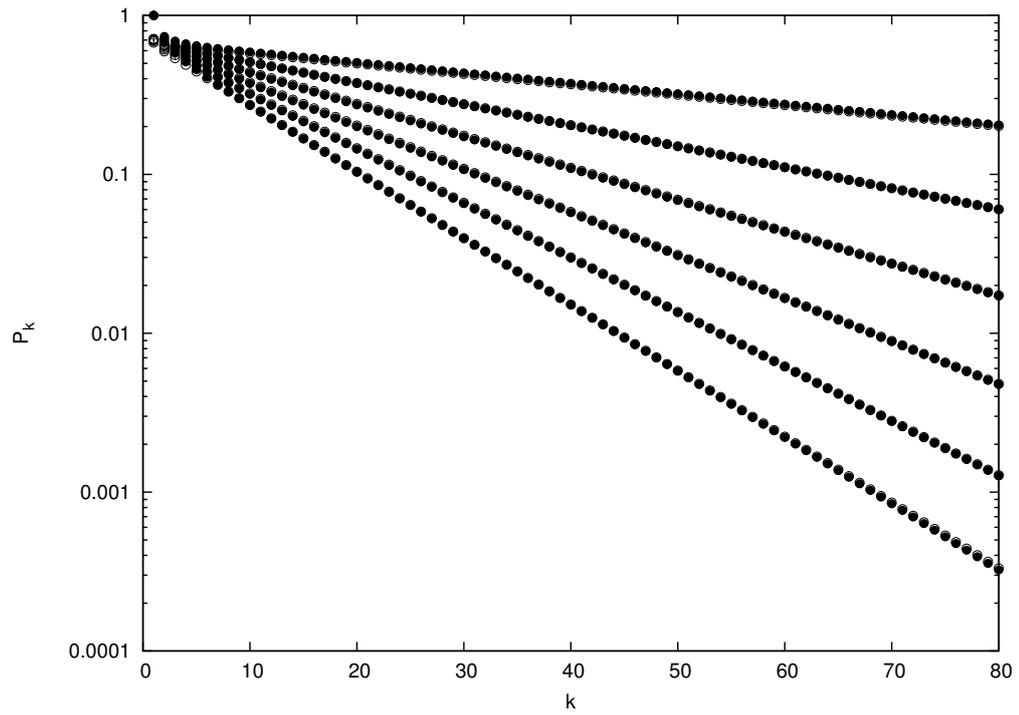


Figura 3.25: P_k , após as correções nas velocidades, em cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 . Os círculos abertos são dados analíticos e os círculos sólidos os numéricos. O excelente acordo entre as teorias dificulta a distinção entre os resultados.

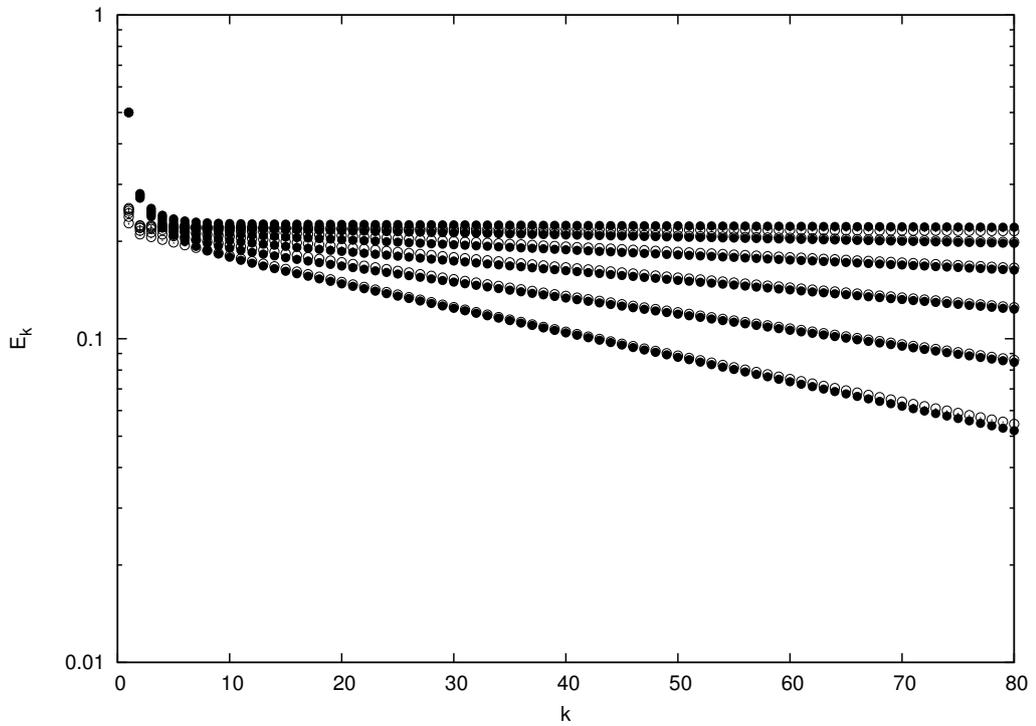


Figura 3.26: O decaimento de E_k , após correções nas velocidades, para cadeias afiladas exponencialmente para frente com $q = 0.01$ até 0.06 de cima para baixo, em intervalos de 0.01 .

temos um bom ajuste. Notamos alguma perda de precisão devido a dependência quadrática da energia cinética com a velocidade. Esta mesma dependência influencia no decaimento de E_k .

De tal maneira, observamos que as correções propostas neste trabalho, seguindo a aproximação binária para as amplitudes dos pulsos de velocidade, são muito satisfatórias. Após as correções, os dados numéricos e analíticos das velocidades apresentam significativa convergência para todas as regras de afilamento estudadas. Em destaque para os afilamentos exponenciais, onde a sobreposição dos dados dificulta sua distinção, figuras 3.15 e 3.24. As velocidades para as regras de afilamento linear, são obtidas de aproximações do comportamento assintótico, porém os resultados demonstram que tais aproximações são adequadas, figuras 3.10 e 3.19. Assim, os bons resultados das velocidades se refletem na excelente determinação de P_k , em todos os casos. O cenário menos sólido diz respeito a captura das amplitudes de E_k , onde os suaves desvios nas velocidades são acentuados pela potência quadrática da energia cinética em relação a v_k . Contudo, para os regimes de validade das velocidades analíticas conseguimos bons resultados para a propagação de E_k .

Adiante, faremos nossas considerações finais na forma de um breve resumo ressaltando a relevância do trabalho, a contribuição para área do conhecimento em que está inserido, os pontos fortes em que as correções e extensões da aproximação binária são bem sucedidas e, para finalizar, as perspectivas futuras.

4 *Considerações Finais*

Nesta dissertação, estudamos a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas de grãos esféricos que interagem segundo o potencial de Hertz. Estivemos particularmente interessados em estudar analiticamente tais propagações através de aproximações binárias. Nesta aproximação, é suposto que a transferência de energia ao longo das cadeias ocorre via colisões de duas em duas partículas. Entretanto, anteriormente apenas o comportamento qualitativo das velocidades, em cadeias afiladas, tinha sido obtido com a aproximação binária [7]. Devido a dependência do momento linear e energia cinética em relação à velocidade, desenvolvemos um método numérico-analítico para correção das amplitudes nos pulsos de velocidade obtidos com a aproximação binária. Esta correção é uma importante contribuição deste trabalho. Após as correções, estivemos aptos a estudar de modo analítico a propagação do momento linear e energia cinética em cadeias afiladas. Os resultados foram confrontados com os resultados da integração direta das equações de movimento, onde utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Estudamos quatro regras de afilamento: exponencial para trás, linear para trás, exponencial para frente e linear para frente.

A aproximação utilizada neste trabalho, aproximação binária, vem se desenvolvendo como uma eficaz Teoria Analítica para o estudo da propagação de pulsos em cadeias granulares. Reconhecemos que nossa aproximação enquanto prevê com alta precisão algumas grandezas cinéticas da propagação do pulso, em particular as grandezas temporais como tempo de residência do pulso em cada grão e tempo de propagação, não é inicialmente tão precisa para as grandezas dinâmicas, como P_k e E_k . Desta maneira, as correções nas velocidades se mostraram fundamentais.

Além disso, desde que cadeias afiladas são frequentemente analisadas para a absorção de choque mecânico, é importante entendermos os comportamentos de P_k e E_k . Seu entendimento será mais eficaz se alcançarmos uma previsibilidade analítica. Esta última, é mais interessante que conclusões numéricas e experimentais, pois ultrapassam limitações inerentes a estes estudos. Logo, este trabalho vai ao encontro desta necessidade, uma vez que as correções fornecidas aqui para a extensão da aproximação binária

conduz a expressões analíticas. Esta é a força deste trabalho.

Também, as correções propostas funcionam muito bem em quase todos os casos, sendo o cenário mais fraco a energia cinética em cadeias afiladas linearmente para frente. Todavia, notamos que a maior parte da literatura que conhecemos, com exceção dos experimentos de Melo *et al.* [25], foca em cadeias afiladas exponencialmente. Sendo estas as que obtivemos os melhores resultados.

A seguir, temos um resumo das correções para as velocidades determinadas com a aproximação binária, $v_{k,b}$, para as quatro regras de afilamento estudadas:

- Cadeias afiladas linearmente para trás,

$$v_{k,s} = 1.55v_{k,b}. \quad (4.1)$$

- Cadeias afiladas exponencialmente para trás com parâmetro de afilamento q ,

$$v_{k,s} = \frac{v_{k,b}}{1.64393211q^{0.0257163} + 0.212103694q^{1.82693}k}. \quad (4.2)$$

- Cadeias afiladas linearmente para frente,

$$v_{k,s} = 1.47v_{k,b}. \quad (4.3)$$

- Cadeias afiladas exponencialmente para frente com parâmetro de afilamento q ,

$$v_{k,s} = \frac{v_{k,b}}{1.271724686q^{-0.0333648} + 12.278134531q^{2.59475}k}. \quad (4.4)$$

Não obstante, demonstramos que realmente utilizando cadeias granulares afiladas pode-se atenuar pulsos de momento linear. O que tornam os sistemas granulares, excelentes candidatos a matéria prima na produção de absorvedores de impactos. Em especial, as cadeias afiladas exponencialmente para frente são as mais indicadas para este propósito, haja visto o decaimento exponencial de P_k , contrapondo ao decaimento linear no afilamento linear para frente. Este último, comprovado experimentalmente por F. Melo *et al.* [25], concordando perfeitamente com a previsão da aproximação binária. Por sua vez, a energia cinética pode saturar para os afilamentos lineares ou ser atenuada pelos afilamentos exponenciais. De tal modo, a Teoria Binária se mostra uma crescente e eficaz teoria analítica para o tratamento da propagação de pulsos em cadeias granulares.

Por fim, os trabalhos futuros serão a extensão da propagação de P_k e E_k via aproximação binária para outras configurações de cadeia granulares. Em destaque, para cadeias afiladas decoradas e, ainda, somadas a pré-compressão. Nestas cadeias, a atenuação das grandezas dinâmicas podem ocorrer por quantidades menores de grãos (cadeias curtas). Logo, mais eficazes na absorção de impactos.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Lopez , A. Vercik e E. J. X. Costa, *Meios granulares e experimentos simples para a sala de aula*, Rev. Bras. Ens. Fís. **30**, n. 1, 1308 (2008).
- [2] J. DURAN, *Sands, powders and grains: an introduction to the physics of granular materials*, Springer, New York (2000).
- [3] P. J. Wang, J. H. Xia, Y. D. Li e C. S. Liu, *Crossover in the power-law behavior of confined energy in a composite granular chain*, Phys. Rev. E **76**, 041305 (2007).
- [4] Laboratório de Meios Granulares. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. Disponível em: <<http://www.isel.pt/fisica/Investigacao/Laboratorios/LabMeiosGranulares.html>>. Acesso em 28 de Maio de 2011.
- [5] Heinrich M. Jaeger, Sidney R. Nagel, and Robert P. Behringer, *The Physics of Granular Materials*, Physics Today **49**, 32 April (1996).
- [6] J. P. Rino, *Materiais granulares*, Física na Escola **2**, n. 1 (2001).
- [7] U. Harbola, A. Rosas, M. Esposito e K. Lindenberg, *Pulse propagation in tapered granular chains: An analytic study*, Phys. Rev. E **80**, 031303 (2009).
- [8] V. F. Nesterenko, *Dynamics of Heterogeneous Materials*, Springer, New York (2001).
- [9] J. Hong, Phys. Rev. Lett. **94**, 108001 (2005).
- [10] V. F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **25**, 733 (1983).
- [11] V. F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **24**, 733 (1984).
- [12] A. N. Lazaridi e V. F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **26**, 405 (1985).
- [13] A. Rosas e K. Lindenberg, *Pulse dynamics in a chain of granules with friction*, Phys. Rev. E **68**, 041304 (2003).
- [14] M. Manciu, S. Sen, e A. J. Hurd, Physica D (Amsterdam) **157**, 226 (2001).
- [15] M. Manciu, S. Sen, e A. J. Hurd, *The propagation and backscattering of soliton-like pulses in a chain of quartz beads and related problems. (I). Propagation*, Physica A **274**, 588 (1999).
- [16] Felicia S. Manciu e Surajit Sen, *Secondary solitary wave fomation in systems with generalized Hertz interactions*, Phys. Rev. E **66**, 016616 (2002).
- [17] M. Manciu, S. Sen, e A. J. Hurd, *The propagation and backscattering of soliton-like pulses in a chain of quartz beads and related problems. (II). Backscattering*, Physica A **274**, 607 (1999).
- [18] S. Job, F. Melo, A. Sokolow e S. Sen, *How Hertzian Solitary Waves Interact with Boundaries in a 1D Granular Medium*, Phys. Rev. Lett. **94**, 178002 (2005).

- [19] A. Sokolow, M. Nakagawa, J. H. Agui e S. Sen, *Absorption of short duration pulses by small, scalable, tapered granular chains*, Appl. Phys. Lett. **87**, 254104 (2005).
- [20] R. Doney e S. Sen, *Decorated, tapered and highly nonlinear granular chain*, Phys. Rev. Lett. **97**, 155502 (2006).
- [21] R. Doney e S. Sen, *Impulse absorption by tapered horizontal alignments of elastic spheres*, Phys. Rev. Lett. E **72**, 041304 (2005).
- [22] A. Rosas e Katja Lindenberg, *Pulse velocity in a granular chain*, Phys. Rev. Lett. E **69**, 037601 (2004).
- [23] U. Harbola, A. Rosas, A. H. Romero, M. Esposito e Katja Lindenberg, *Pulse propagation in decorated granular chains: an analytic approach*, Phys. Rev. Lett. E **80**, 051302 (2009).
- [24] U. Harbola, A. Rosas, A. H. Romero e Katja Lindenberg, *Pulse propagation in randomly decorated chains*, Phys. Rev. Lett. E **82**, 01106 (2010).
- [25] F. Melo, S. Job, F. Santibanez e F. Tapia, *Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain*, Phys. Rev. Lett. E **73**, 041305 (2006).
- [26] A. Rosas, A. H. Romero, V. F. Nesterenko e Katja Lindenberg *Short-pulse dynamics in strongly nonlinear dissipative granular chains*, Phys. Rev. E **78**, 051303 (2008).
- [27] C. M. Donahue, C. M. Hrenya e R. H. Davis *Stokes's Cradle: Newton's Cradle with liquid coating*, Phys. Rev. Lett. **105**, 034501 (2010).
- [28] I. L. D. Pinto, A. Rosas, A. H. Romero e Katja Lindenberg *Pulse propagation in a chain of o-rings with and without precompression*, Phys. Rev. E **82**, 031308 (2010).
- [29] H. Hertz e J. Reine Angew. Math. **92**, 156 (1881).
- [30] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Addison-Wesley, MA, (1959).
- [31] R. L. Doney, J. H. Agui e S. Sen, *Energy partition and impulse dispersion in the decorated, tapered, strongly nonlinear granular alignment: A system with many potential applications*, J. Appl. Phys. **106**, 064905 (2009).
- [32] I. Gleria, R. Matsushita e S. Silva, *Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência*, Rev. Bras. Ens. Fís. **26**, n. 2, 108 (2004).
- [33] H. L. Guidorizzi, *Um curso de cálculo*, vol 3, 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994.
- [34] M. Ricci e Raimundo P. C. P., *Resolução numérica de equações diferenciais: Problema do Valor Inicial*, In: SEMINÁRIO DE DINÂMICA ORBITAL I, 2008, São José dos Campos.
- [35] Numerical Recipes in C: The art of scientific computing: banco de dados. Disponível em <<http://www.nr.com>>. Acesso em 01 Jun. 2008.
- [36] D. Sperandio, J. T. Mendes e L. H. M. Silva, *Cálculo Numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. São Paulo: Prentice Hall.
- [37] M. A. Ruggiero e V. L. R. Lopes, *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: Makron Books.
- [38] G. Baratto, *Soluções de Equações diferenciais ordinárias usando métodos numéricos*, notas de aula, 2007.