

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CAOS E SINCRONIZAÇÃO EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS COM
REALIMENTAÇÃO ATRASADA

GILSON FRANCISCO DE OLIVEIRA JUNIOR

JOÃO PESSOA

2012

GILSON FRANCISCO DE OLIVEIRA JUNIOR

CAOS E SINCRONIZAÇÃO EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS COM
REALIMENTAÇÃO ATRASADA

Dissertação apresentada ao curso de Pós-
Graduação, Universidade Federal da
Paraíba, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Marcos César Santos Oriá

JOÃO PESSOA

2012

O48c *Oliveira Junior, Gilson Francisco de.*
Caos e sincronização em circuitos eletrônicos com
realimentação atrasada / Gilson Francisco de Oliveira Junior.-
João Pessoa, 2012.
111f. : il.
Orientador: Marcos César Santos Oriá
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Circuitos eletrônicos. 3. Dinâmica não-linear.
4. Caos. 5. Sincronismo.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Dedico este trabalho...

Aos meus pais, Gilson e Josefa, por todo amor, apoio e incentivo.

A minha irmã, Joice Coutinho, por todas as brincadeiras e amor.

A minha namorada, Rayana Oliveira, por seu companheirismo, pelas palavras de incentivo e por seu amor.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e por tantas conquistas e vitórias.

Agradeço aos professores Marcos Oriá, Martine Chevrollier e Orlando Di Lorenzo por me orientarem e apoiarem neste projeto.

Agradeço a toda minha família, avós, tios e tias, primos e primas, pelo apoio e incentivo.

Agradeço a meus amigos por sempre estarem ao meu lado.

Agradeço ao pós-doutorando Hugo Cavalcante por toda sua contribuição a realização deste trabalho.

Agradeço ao técnico Manoel Brasileiro pelo suporte, contribuição e ajuda a realização deste projeto.

Agradeço aos professores Luimar Cavalcanti, Itamar Vidal e Thierry Passerat pelo apoio e pelo bom ambiente de trabalho.

Agradeço aos alunos Weliton Soares, Samuel Bezerra, Gabriel Basso, César Xavier, Valdeci Mestre pela amizade e pelas inúmeras discussões que certamente contribuíram em minha formação.

Agradeço a todos que fazem ou fizeram parte do Grupo de Física Atômica, Lasers e Dinâmica Não-Linear pelo convívio.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro, contribuindo assim com minha formação.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Sumário de figuras	vii
Capítulo 1 – Sistemas Dinâmicos.....	1
1.1 – Introdução	1
1.2 – Sistemas dinâmicos	2
1.2.1 – Sistema de Lorenz.....	8
1.2.2 – Acoplamento entre sistemas	12
1.3 – Técnicas de análise de sistemas não-lineares	13
1.3.1 – Métodos lineares	14
1.3.1.1 – Transformada de Fourier.....	14
1.3.1.2 – Função de Correlação	17
1.3.2 – Métodos não-lineares.....	18
1.3.2.1 – Reconstrução de atratores: método das coordenadas atrasadas	18
1.3.2.1.1 – Método dos falsos vizinhos	20
1.3.2.1.2 – Maior expoente de Lyapunov	23
Capítulo 2 – Circuitos eletrônicos regidos por equações não-lineares.....	25
2.1 – Componentes eletrônicos.....	27
2.2 – Sistema de primeira ordem com atraso temporal.....	32
2.2.2 - Resultados	35
2.2.2.2 – Simulações numéricas	36
2.2.3 - Acoplamento de dois circuitos.....	39
2.3 – Sistema de segunda ordem com bombeio externo	42
2.3.1 - Resultados	45
2.3.2 – Dois circuitos acoplados.....	45
Capítulo 3 – Sistema de segunda ordem com atraso temporal.....	49
3.1- Um circuito oscilador não-linear	50
3.1.1 – Resultados Experimentais.....	54
3.1.2 – Simulações numéricas	55
3.1.3 – Análise experimental	58
3.1.3.1 – Espectro de potências: Transformada de Fourier	60

3.1.3.2 – Cálculo do maior expoente de Lyapunov	64
3.2 – Dois circuitos acoplados	68
Capítulo 4 – Eventos Raros.....	75
4.1 – Sincronização dependente do nível de acoplamento	77
4.2 – Adicionando ruído branco ao sistema	83
4.2.1 – Circuitos acoplados com adição de ruído no circuito mestre.....	85
4.2.2 - Circuitos acoplados com adição de ruído no circuito resposta.....	88
Conclusão	91
Apêndice – Filtros LC	92
Referências Bibliográficas	95

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica de circuitos eletrônicos regidos por equações não-lineares. Reproduzimos alguns resultados da literatura para geração de caos em circuitos eletrônicos de baixa frequência e obtivemos sincronismo com o acoplamento de dois circuitos de primeira ordem com atraso. Em etapa seguinte, construímos um sistema original de um oscilador de segunda ordem, tipo LRC, com auto-realimentação atrasada. Caracterizamos os sinais desse sistema para diversos parâmetros e utilizando técnicas de análise de sinais e sistemas, pudemos identificar uma variedade de estados do oscilador, entre estados periódicos e caóticos. Reproduzimos todos os cenários observados através de simulações numéricas. Estudamos como dois osciladores caóticos equivalentes se comportam ao serem acoplados unidirecionalmente, ou seja, o segundo oscilador tem sua dinâmica dirigida através do sinal do primeiro. Utilizando a função de correlação mostramos que o sistema pode sincronizar. Estudamos ainda fenômenos transientes no sinal de erro do acoplamento de dois desses circuitos de segunda ordem. Ou seja, analisando a diferença entre as respostas dos dois osciladores percebemos escapes do estado sincronizado, quando o sinal de erro, por breves momentos, afasta-se muito de seu valor médio. Buscamos caracterizar a frequência desses escapes em função do acoplamento entre os osciladores e com a introdução ruído no sistema.

Abstract

In this work we studied the dynamics of electronic circuits described by nonlinear equations. We first reproduced some results from the literature for chaos generation in low-frequency circuits and we obtained synchronism between two coupled systems each circuit being a time-delay first-order circuit. In a second step, we built an original system of second-order LRC oscillator, with delayed feedback. We characterized the signal of this system for several parameters through usual signal analysis techniques. We were able to identify a variety of states of this oscillator, evolving from periodic to chaotic states. Using numerical simulations we reproduced every observed scenario. We studied how two equivalent chaotic oscillators behave when unidirectional coupling is applied, i.e. when the second oscillator has its dynamics controlled by a signal from the first oscillator. Using the correlation function we showed that the systems are synchronized. We also studied transient phenomena in the error signal of two coupled time-delay second-order circuits. Analyzing the difference between the dynamical variables of these circuits we can observe escapes of synchronization which occur when the error signal, for brief moments, goes far away from its mean value. We try to characterize the amplitude and frequency of these synchronization escapes as a function of a coupling parameter or adding of noise to the coupling signal.

Sumário de figuras

Figura 1: Evolução do volume de condições iniciais no espaço de fases, em que f é a velocidade de cada condição inicial e n é o vetor normal à superfície S do volume de condições iniciais. (a) Superfícies do volume de condições iniciais no tempo t , $S(t)$, e depois de evoluir por um tempo infinitesimal dt , $S(t+dt)$. (b) Volume infinitesimal de condições iniciais com área dA e altura $f \cdot ndt$	4
Figura 2: Pêndulo simples.....	6
Figura 3: Trajetórias de duas condições iniciais, pertencentes a um mesmo conjunto atrator, próximas separadas por $a(t)$	7
Figura 4: Séries temporais do sistema de Lorenz em estado caótico com $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$	9
Figura 5: Simulações tridimensionais sob do atrator estranho de Lorenz com $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$. De vermelho temos o atrator estranho e em azul temos as três projeções bidimensionais que podemos formar com o sistema de Lorenz.	10
Figura 6: Pente de funções deltas e sua Transformada de Fourier.....	16
Figura 7: Trem de pulsos retangulares e sua Transformada de Fourier.	16
Figura 8: Atrator reconstruído em 1-D, 2-D e 3-D a partir de um vetor de coordenadas atrasadas. Ao aumentarmos a dimensão em que visualizamos o sistema vemos se o atrator está bem definido ou se ainda é uma projeção em uma dimensão inferior. Ou seja, pares de pontos vizinhos mais próximos podem (ou não) deixar de serem vizinhos ao aumentarmos a dimensão de imersão em que visualizamos o sistema.	19
Figura 9: Cálculo da dimensão de imersão do sistema de Lorenz através do método dos falsos vizinhos. O eixo vertical representa a fração do número de falsos vizinhos pelo número de vizinhos verdadeiros e o eixo horizontal representa a dimensão de imersão. Neste caso, considerar $D=2$ já é suficiente, pois a fração de falsos vizinhos já se aproxima de zero.	22
Figura 10: Esquema de um resistor (à esquerda), de um capacitor (ao centro) e de um indutor (à direita).	28
Figura 11: Amplificador operacional. Identificação dos pinos (esquerda), representação em diagrama de circuitos (direita).	29
Figura 12: Amplificador operacional com realimentação negativa.	29
Figura 13: Amplificador operacional usado como somador (esquerda) e subtrator (direita).	30
Figura 14: Amplificador operacional usado como tampão (esquerda), amplificador (centro) e inversor (direita).	30
Figura 15: Amplificador operacional usado como integrador. Demonstração da dependência da tensão de saída com a tensão de entrada.	30

Figura 16: Representação de um diodo mostrando seu sentido de polarização.	31
Figura 17: Curva de resposta do diodo para dada diferença de potencial aplicada. Figura retirada de (Boylestad & Nashelsky, 1998).	31
Figura 18: Diagrama do circuito de primeira ordem com atraso temporal.	35
Figura 19: Uma das rotas de bifurcações do sistema. Passando de uma órbita de período T para $2T$, $4T$, multiperiódica, caos e caos. Os eixos das fotos são $x(t-\tau)$ e $x(t)$	36
Figura 20: Uma das rotas de bifurcações do sistema. Passando de uma órbita de período T para $2T$, $4T$, multiperiódica, caos e caos. Simulações numéricas com eixos $x(t-\tau)$ e $x(t)$	39
Figura 21: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos de primeira ordem com atraso temporal.	40
Figura 22: Diagrama do acoplamento bidirecional entre dois circuitos de primeira ordem com atraso temporal.	40
Figura 23: Simulações numéricas (acima) e fotografias da tela de um osciloscópio (abaixo). À esquerda o sistema está acoplado unidirecionalmente e a direita bidirecionalmente.	41
Figura 24: Diagrama de um circuito de segunda ordem com bombeio externo.	43
Figura 25: Fotografia de um circuito de segunda ordem com bombeio externo.	43
Figura 26: Corrente não-linear gerada a partir da Equação 44.	44
Figura 27: Rotas de bifurcação para o caos saindo de um estado de período T , passando por $2T$, $4T$, $8T$, multiperiódico (talvez caos), $6T$, $12T$, multiperiódico, caos, caos. Os eixos das fotografias são V_1 vs V_2	45
Figura 28: Diagrama do segundo circuito de segunda ordem com bombeio externo e como acoplá-lo com o primeiro, $V_{RE} = 470 \Omega$	46
Figura 29: Fotografia de dois circuitos de segunda ordem com bombeio externo de um gerador de senos.	46
Figura 30: Fotografias da tela de um osciloscópio mostrando o estado sincronizado das respostas do sistema. V_{1d} e V_{1r} a esquerda e V_{2d} e V_{2r} a direita.	47
Figura 31: Corrente não-linear gerada a partir da Equação 47.	51
Figura 32: Diagrama de um circuito oscilador não-linear descrito por uma equação diferencial de segunda ordem com atraso temporal.	51
Figura 33: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900\mu s$ e $4*V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.	53
Figura 34: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900\mu s$ e $4*V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.	53

Figura 35: Estados do sistema de segunda ordem com atraso temporal, com eixos $V_2(t)$ vs $V_1(t)$	54
Figura 36: Simulações numéricas para um circuito variando apenas o atraso temporal. Os eixos das simulações são $V_2(t)$ vs. $V_1(t)$	57
Figura 37: Fotografias da tela de um osciloscópio dos diferentes estados analisados.	58
Figura 38: Atratores construídos a partir das aquisições experimentais dos respectivos estados da Figura 45.....	59
Figura 39: Espectro de Potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 20 kHz.	61
Figura 40: Espectro de Potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 7 kHz.	62
Figura 41: Espectro de Potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 700 Hz.	63
Figura 42: Cálculo da dimensão de imersão do circuito para os vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente).	66
Figura 43: Resultados do cálculo da evolução média do logaritmo da distância de duas trajetórias inicialmente próximas para os seis estados da Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente). Os quadros presentes nos gráficos representam as cores das curvas para cada dimensão de imersão.....	67
Figura 44: Diagrama de dois circuitos, de segunda ordem com atraso temporal, acoplados.	68
Figura 45: Fotografia de dois circuitos acoplados.	69
Figura 46: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o sincronismo entre os circuitos para $\varepsilon = 135,135135$ ($R_{RE} = 0,074 \text{ k}\Omega$).....	71
Figura 47: Função de correlação para o acoplamento entre os circuitos com $\varepsilon = 135,135135$ ($R_{RE} = 0,074 \text{ k}\Omega$).....	71
Figura 48: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o acoplamento entre os circuitos para $\varepsilon = 1,3245$ ($R_{RE} = 7,55 \text{ k}\Omega$).....	72
Figura 49: Função de correlação para o acoplamento entre os circuitos com $\varepsilon = 1,3245$ ($R_{RE} = 7,55 \text{ k}\Omega$).....	72
Figura 50: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o sincronismo entre os circuitos para $\varepsilon = 0,4202$ ($R_{RE} = 23,8 \text{ k}\Omega$).....	72
Figura 51: Função de correlação para o acoplamento entre os circuitos com $\varepsilon = 0,4202$ ($R_{RE} = 23,8 \text{ k}\Omega$).....	73
Figura 52: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o “acoplamento” entre os circuitos desacoplados.	73

Figura 53: Função de correlação para o “acoplamento” entre os circuitos desacoplados.	73
Figura 54: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos de segunda ordem com atraso temporal. No diagrama vemos os circuitos mestre e resposta, e o amplificador operacional na função de subtrator gerando o sinal de erro, $V_{1d} - V_{1r}$, que é injetado no circuito resposta para realizar o acoplamento dos sistemas.	78
Figura 55: Histograma (à esquerda) e logaritmo do histograma (à direita) da variável V_{1d}	80
Figura 56: Séries temporais do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis diferentes de acoplamento entre os circuitos mestre e escravo. $\varepsilon=0$ (desacoplados), $\varepsilon=100$ (sincronizados).	80
Figura 57: Logaritmos dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de acoplamento diferentes entre os circuitos mestre e escravo.	81
Figura 58: Largura, δ , dos histogramas do sinal $V_{1d}-V_{1r}$ (Figura 57) para valores diferentes de ε . A largura foi calculada para altura 2 do eixo log(repetições) da Figura 57.	82
Figura 59: Série temporal de ruído branco de um gerador de funções Agilent 33120A.	83
Figura 60: Logaritmo do histograma da Figura 59.	84
Figura 61: Transformada de Fourier de da série temporal da Figura 59.	84
Figura 62: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos descritos por equações diferenciais de segunda ordem com atraso temporal. Ruído branco é injetado no circuito mestre na entrada negativa do amplificador operacional que gera V_{1d}	86
Figura 63: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 111,11$ e $R_3=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito mestre.	86
Figura 64: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 5$ e $R_3=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito mestre.	87
Figura 65: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 1,25$ e $R_3=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito mestre.	87
Figura 66: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos descritos por equações diferenciais de segunda ordem com atraso temporal. Ruído branco injetado no circuito resposta na entrada negativa do amplificador operacional que gera V_{1d}	88
Figura 67: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 100$ e $R_4=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito resposta.	89

Figura 68: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 5$ e $R_4=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito resposta	89
Figura 69: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 1,25$ e $R_4=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito resposta.....	90
Figura 70: Diagrama de 10 filtros LC em série com sinal de entrada $x(t)$ e sinal de saída $y(t)$	93
Figura 71: Amplitude do sinal de saída do filtro LC.	93
Figura 72: Fase do sinal de saída do filtro LC.	93
Figura 73: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900\mu s$ e $4*V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.	94
Figura 74: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900\mu s$ e $4*V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.	94

Capítulo 1 – Sistemas Dinâmicos

1.1 – Introdução

Um sistema é dito dinâmico quando apresenta alguma(s) grandeza(s) que varia(m) no tempo. Essa variação deve ser determinística. Podemos expressar essa variação através de equações diferenciais ordinárias, parciais, com defasagem temporal ou por equações de diferença, por exemplo. (Strogatz, 1994) e (Monteiro, 2011). Uma equação é dita linear quando obedece ao princípio da superposição, ou seja, se $x(t)$ é uma possível solução de um sistema de equações e $y(t)$ é outra possível solução deste sistema, então uma combinação linear do tipo $ax(t) + by(t)$, onde a e b são constantes arbitrárias, é também solução. Caso contrário a equação é dita não-linear. Equações que apresentam termos quadráticos, cúbicos, exponenciais, logarítmicos, por exemplo, são equações não-lineares.

Tipicamente, nos últimos cem anos a Física tem sido estudada usando-se principalmente ferramentas matemáticas da Álgebra Linear. Os principais formalismos da mecânica clássica (Equações de Newton), o eletromagnetismo clássico (Equações de Maxwell) e a mecânica quântica (Equação de Schrödinger) foram utilizados para estudar sistemas lineares ou sistemas linearizados.

Por que então estudar sistemas dinâmicos não-lineares? Porque o mundo real é altamente não-linear. Embora a ciência tenha se dedicado principalmente ao estudo de sistemas lineares, vários trabalhos em dinâmica não-linear foram realizados. Sistemas dinâmicos não-lineares estão presentes em várias áreas da ciência, e podemos citar aqui como exemplos, alguns resultados emblemáticos: na física (Harrison & Biswas, 1986), (Moon & Holmes, 1979), química (Schmitz, Graziani, & Hudson, 1977), biologia (May & Anderson, 1987), engenharia (Haykin & Principe, 1998) e medicina (Radhakrishna, 2000), (Witkowski, 1995).

1.2 – Sistemas dinâmicos

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos e técnicas referentes ao tratamento de sistemas dinâmicos. Vamos apresentar a representação de espaço de fases, discutir dimensionalidade de um sistema e os diversos estados que esse sistema pode ter. Em geral, podemos dividir os sistemas dinâmicos em lineares e não-lineares. Ou seja, em sistemas que, respectivamente, obedecem ao princípio da superposição ou não.

Quanto à evolução temporal, sistemas dinâmicos podem ser contínuos ou discretos. Tempo contínuo é representado pelo conjunto dos números reais, enquanto que tempo discreto é representado pelo conjunto dos números naturais.

Sistemas dinâmicos podem ser autônomos ou não-autônomos. Quando no conjunto de equações que descreve determinado sistema a variável tempo aparece explicitamente dizemos que o sistema é não-autônomo, caso contrário é autônomo.

Podemos representar um sistema não-linear autônomo n-dimensional através das equações de fluxo de suas variáveis dinâmicas:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{1}$$

Para analisarmos determinado sistema, frequentemente recorreremos ao espaço de fases, ou espaço de estados, que é um espaço n-dimensional em que seus eixos são formados pelas variáveis independentes do sistema (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Caracterizamos como variáveis dinâmicas de um sistema autônomo contínuo aquelas para as quais podemos escrever equações de fluxo (equações diferenciais temporais). Dessa forma, o número de equações de primeira ordem que forma um sistema qualquer nos dá diretamente a quantidade de variáveis independentes entre si e assim a dimensão do sistema. Entretanto para sistemas não-autônomos (a variável tempo aparece explicitamente nas equações que regem o sistema) devemos considerar o tempo como uma variável dinâmica para a qual podemos escrever uma equação extra, $\dot{t} = 1$. Assim, sistemas não-autônomos apresentam uma dimensão extra (Hilborn, 1994).

Através das soluções de um sistema podemos criar conjuntos no espaço de fases chamados de atratores, repelentes ou neutros. Atrator é um conjunto A que apresenta três condições:

- A é um conjunto invariante: qualquer condição inicial interna a A evolui para uma solução que permanece interna ao conjunto A .
- A atrai um conjunto aberto de condições iniciais: qualquer condição inicial interna a um conjunto D , que contém A , evolui para uma solução interna ao conjunto A .
- O conjunto A é o conjunto mínimo que obedece as duas condições anteriores.

Repelentes são conjuntos invariantes, como os atratores, porém para qualquer condição inicial fora do conjunto repelente a solução se afasta do mesmo, indo para algum outro atrator próximo ou para o infinito. Conjuntos neutros são aqueles cujas condições iniciais externas ao conjunto nem são atraídas nem repelidas.

Podemos explorar toda a variedade de estados que o sistema pode apresentar no espaço de fase ao variarmos sistematicamente as condições iniciais e os parâmetros de um sistema.

Considere, por exemplo, um volume de condições iniciais em um espaço de fases tridimensional. Dizemos que o sistema é:

- Conservativo – se no decorrer de sua evolução temporal, os pontos do volume de condições iniciais do sistema movem-se no espaço de fase e ainda assim o volume do sistema é conservado.
- Dissipativo – quando o volume de condições iniciais se contrai com o passar do tempo.

Seja $S(t)$ uma superfície de determinado volume $V(t)$ no espaço de fases. Os pontos em S , e em seu interior, são as condições iniciais das trajetórias. Após um intervalo de tempo dt , qual será a nova superfície $S(t+dt)$ e o novo volume $V(t+dt)$ do espaço de fases?

Na Figura 1, \vec{n} é um vetor normal de módulo unitário do volume V , e $\vec{f}(\vec{x})$ é a velocidade instantânea do sistema no ponto \vec{x} . O produto escalar $\vec{f} \cdot \vec{n}$ representa a componente normal da velocidade em \vec{x} .

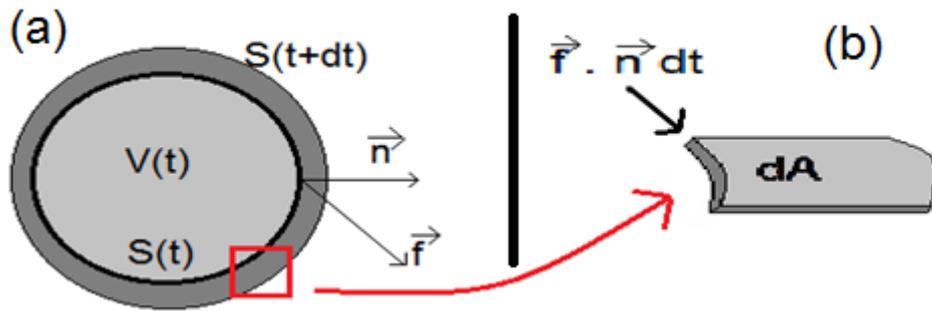


Figura 1: Evolução do volume de condições iniciais no espaço de fases, em que \vec{f} é a velocidade de cada condição inicial e \vec{n} é o vetor normal à superfície S do volume de condições iniciais. (a) Superfícies do volume de condições iniciais no tempo t , $S(t)$, e depois de evoluir por um tempo infinitesimal dt , $S(t+dt)$. (b) Volume infinitesimal de condições iniciais com área dA e altura $\vec{f} \cdot \vec{n} dt$.

Após um intervalo infinitesimal dt a área dA cria um volume infinitesimal $(\vec{f} \cdot \vec{n} dt)dA$. Portanto, o volume $V(t+dt)$ será o volume $V(t)$ mais o criado pela evolução de cada área infinitesimal dA . Integrando sobre todos os pedaços temos:

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n} dt) dA \quad (2)$$

Como o intervalo dt não depende da área dA , podemos escrever:

$$\frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV, \quad (3)$$

onde a última igualdade é obtida pela Teorema da Divergência de Gauss.

Da Equação 3 percebemos que se $dV/dt = 0$, o sistema é conservativo, ou seja:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \quad (4)$$

é nulo. Do mesmo modo, se $dV/dt < 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$ e o sistema é dissipativo; e se $dV/dt > 0$ o sistema é expansivo.

Em sistemas não-lineares contínuos dissipativos podemos esperar alguns tipos de estados dinâmicos de acordo com a dimensionalidade de cada sistema:

- Em sistemas com dimensão 1 os únicos estados possíveis são pontos fixos, estáveis ou instáveis, ou então o sistema diverge para infinito.

- Para sistemas com dimensão igual ou maior que 2 podemos ter, além de pontos fixos, ciclos limites. Ciclos limites são órbitas periódicas no espaço de fase, percorridas pelo sistema. Ciclos limites também podem ser estáveis ou instáveis. Não existe um método sistemático que permita encontrar ciclos limites para sistemas dinâmicos com dimensão maior ou igual a 2.
- Quando temos dimensão 3, podemos obter, além de pontos fixos e ciclos limites, órbitas quasi periódicas confinadas na superfície de um toro ou então caos, que é um comportamento aperiódico, determinístico, porém imprevisível.

Um sistema é dito determinístico quando podemos escrever seu conjunto de equações dinâmicas. Dizemos que sistemas caóticos são imprevisíveis apesar de serem determinísticos, pois quando evoluímos um mesmo sistema com duas condições iniciais próximas e que pertencem a um mesmo conjunto atrator, a distância entre as duas soluções divergirá exponencialmente após um tempo igual ao inverso do maior expoente de Lyapunov do sistema. Expoente de Lyapunov é fator de divergência exponencial das duas soluções.

Para ser chamado de atrator estranho, um conjunto deve, além de obedecer as três condições para ser um atrator, ser sensível às condições iniciais. Ou seja, sistemas em estado caótico apresentam atratores estranhos.

Um exemplo de sistema governado por uma equação não-linear é o pêndulo simples, Figura 2. Embora o pêndulo simples seja descrito por uma equação diferencial de segunda ordem, podemos realizar uma mudança de variáveis e assim obter um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, como apresentado na Equação 5:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \text{sen}\theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (5)$$

onde θ é o ângulo formado entre o eixo vertical e a posição do pêndulo, g é a aceleração gravitacional e l o comprimento do fio que liga o bloco ao ponto de fixação. $\ddot{\theta}$ representa derivada de segunda ordem da variável θ em relação ao

tempo¹. ω é a velocidade angular do pêndulo e $\dot{\omega}$ e $\dot{\theta}$ representam derivadas de primeira ordem, respectivamente, das variáveis ω e θ em relação ao tempo. Dizemos que a Equação 5 é não-linear, por causa do termo $\sin \theta$. A ordem de uma equação diferencial é dada pela derivada de ordem mais alta. Geralmente podemos reduzir uma equação de ordem n a um conjunto de equações de primeira ordem realizando mudanças de variáveis como na Equação 5. No pêndulo simples as variáveis dinâmicas do sistema são ω e θ , por isso o sistema é bidimensional (2-D).

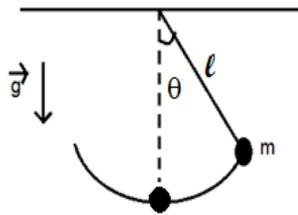


Figura 2: Pêndulo simples.

Algumas equações não-lineares, com a devida aproximação, podem tornar-se lineares. De fato, muitos sistemas não-lineares podem ser tratados como lineares sob determinadas aproximações (técnica de linearização). No caso do pêndulo simples, basta considerar o regime de pequenas oscilações, ou seja, quando o pêndulo oscila em ângulos da ordem ou menores que 1 rad. Nessa aproximação, $\sin \theta \approx \theta$ e assim, a variável θ aparece com expoente 1 em todos os termos da equação que rege o pêndulo. Assim, o pêndulo simples comporta-se como um oscilador harmônico que é um sistema linear muito conhecido, principalmente em mecânica clássica.

Soluções analíticas são desejáveis, pois são válidas para quaisquer condições iniciais e parâmetros. Sistemas dinâmicos geralmente não apresentam soluções analíticas. Assim, métodos numéricos de integração são utilizados em larga escala para resolução de sistemas dinâmicos. Entretanto, integrações numéricas têm a desvantagem de que só valem para um valor de condição inicial e um valor de parâmetro: cada vez que trocamos o valor de uma condição inicial ou parâmetro, devemos refazer toda a integração numérica. Um método bastante utilizado por apresentar bons resultados é o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Deve-se lembrar que todo método de integração apresenta um erro inerente que varia de método para método e depende do valor do passo iterativo utilizado.

¹ É desta forma que escreveremos derivadas temporais no texto desta dissertação.

Outro método de análise é o qualitativo. Através de cálculos mais simples que os utilizados em integrações analíticas, o método qualitativo determina as soluções assintóticas do sistema e a estabilidade das soluções. A desvantagem desse método é a perda do comportamento transiente do sistema longe das regiões de estabilidade (pontos fixos, ciclos limites, por exemplo).

Sistemas dinâmicos, lineares e não-lineares, têm um expoente de Lyapunov para cada variável independente, ou seja, um sistema bidimensional tem dois expoentes de Lyapunov, um sistema tridimensional tem três expoentes e assim por diante. O expoente de Lyapunov pode ser positivo, negativo ou zero.

Após a solução transiente de um sistema evanescer, consideremos duas condições iniciais próximas, pertencentes a um mesmo conjunto atrator estranho, separadas por uma distância $a(t=0)$. Se o sistema está em um estado caótico a distância entre as trajetórias aumentará exponencialmente, $a(t) = a(t=0)e^{\lambda t}$. Uma das duas condições iniciais pode ser vista como a outra mais uma perturbação, de modo que a condição inicial ainda esteja contida no atrator estranho. Qualquer perturbação na condição inicial do sistema o faz exibir uma solução completamente diferente daquela que exibiria sem a perturbação. Por isso, dizemos que sistemas caóticos são imprevisíveis.

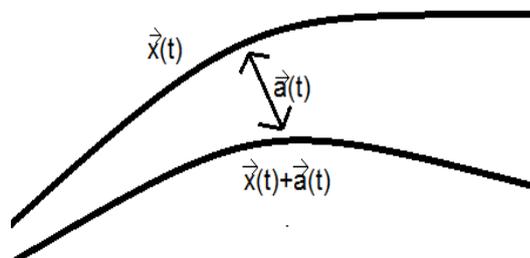


Figura 3: Trajetórias de duas condições iniciais, pertencentes a um mesmo conjunto atrator, próximas separadas por $a(t)$.

Como já foi dito, para exibir comportamento caótico, sistemas dissipativos contínuos devem ser no mínimo tridimensional. Cada dimensão (variável dinâmica) possui um expoente de Lyapunov, porém não é necessário que as três dimensões possuam expoente positivo, apenas um expoente necessita ser positivo para ocorrer caos. De fato, em sistemas tridimensionais apenas um expoente de Lyapunov é positivo e em sistemas quadridimensionais, podemos ter caos com um expoente positivo e podemos ter hipercaos, que é um estado que possui dois expoentes de Lyapunov positivos.

Podemos caracterizar estados de um sistema dinâmico, seja periódico, caótico ou outro calculando a chamada dimensão fractal, D_0 (dimensão da contagem de caixas).

A dimensão fractal é calculada para cada estado dinâmico formado no espaço de fases, podemos recobri-lo com caixas quadradas de tamanhos iguais, de forma a cada caixa ter pelo menos um ponto do atrator em seu interior. Variando o lado da caixa, ε , variamos a quantidade de caixas, $N(\varepsilon)$, necessárias para recobrir o atrator. Então, construindo um gráfico cujo eixo vertical representa $\log(N(\varepsilon))$ e o eixo horizontal, $\log(1/\varepsilon)$, devemos encontrar uma reta e a inclinação dessa reta é a dimensão fractal do sistema. Dessa forma, um ponto fixo possui $D_0 = 0$; um ciclo limite possui $D_0 = 1$; um toro, $D_0 = 2$. Estados caóticos apresentam atratores estranhos e estes possuem dimensão fractal, ou seja, D_0 fracionária.

1.2.1 – Sistema de Lorenz

O sistema não-linear tridimensional mais conhecido é o sistema de Lorenz (Strogatz, 1994), (Hilborn, 1994), (Monteiro, 2011). Lorenz estudava as convecções atmosféricas quando estabeleceu o conjunto de três equações escrito abaixo (Equação 6).

Dentre as inúmeras características desse sistema, podemos citar: não-linearidade, contração do volume do espaço de fase, determinismo do sistema, imprevisibilidade, possibilidade de caos. O sistema de Lorenz é descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{6}$$

O sistema é determinístico, pois conhecemos as equações dinâmicas que o regem.

Os termos cruzados xz e xy são os responsáveis pela não-linearidade do sistema. Ao analisarmos o espaço de fase desse sistema percebemos que o volume do atrator vai a zero e, como consequência, soluções quase-periódicas não podem ser solução desse sistema.

O sistema de Lorenz pode exibir diferentes estados dinâmicos.

Os diferentes estados são exibidos de acordo com a escolha dos valores dos parâmetros do sistema. Podemos ter um ponto fixo, três pontos fixos, ciclos limites ou caos.

Por ser formado por três equações diferenciais de primeira ordem e ser tridimensional, o sistema pode exibir comportamento caótico.

O sistema é dito imprevisível quando caótico, pois apresenta expoente de Lyapunov positivo.

A Figura 4 mostra séries temporais para as três variáveis do sistema de Lorenz que calculamos para os parâmetros $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$, que resulta em um regime caótico. A Figura 5 mostra o atrator estranho de Lorenz e as suas projeções bidimensionais para os mesmos parâmetros da Figura 4.

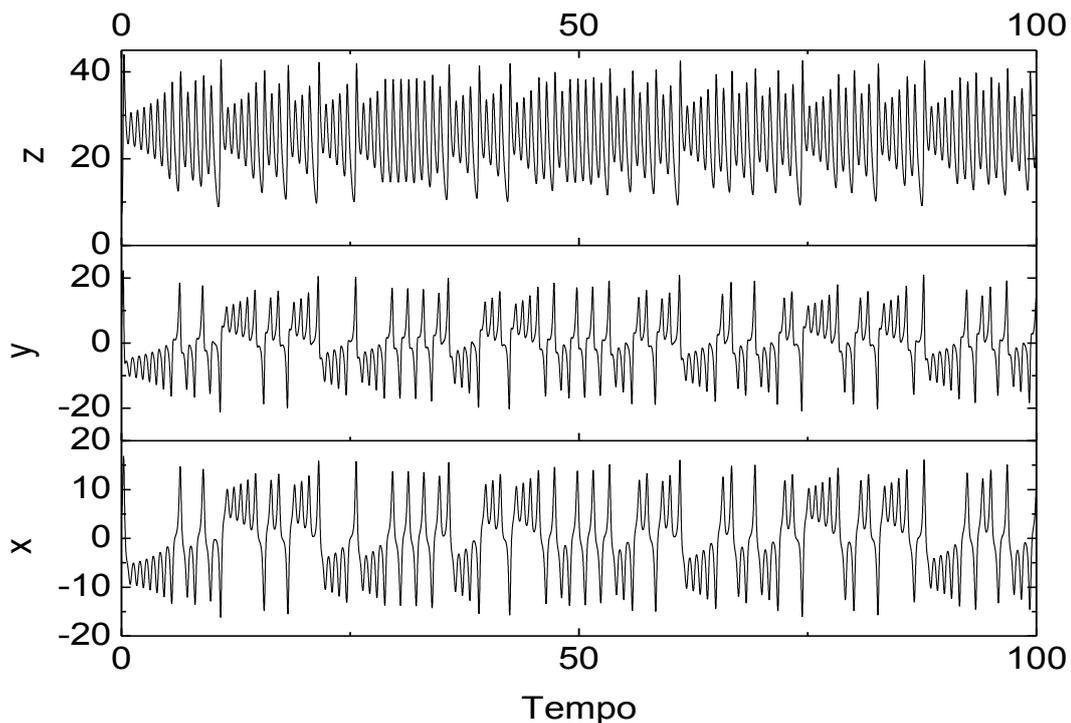


Figura 4: Séries temporais do sistema de Lorenz em estado caótico com $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$.

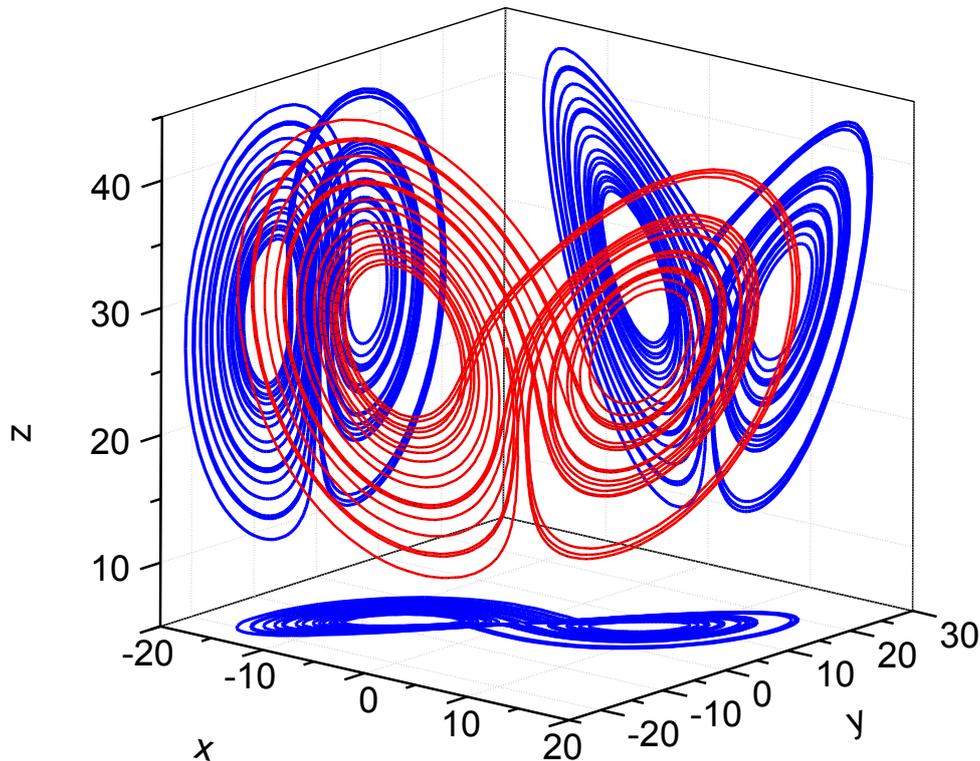


Figura 5: Simulações tridimensionais sob do atrator estranho de Lorenz com $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$. De vermelho temos o atrator estranho e em azul temos as três projeções bidimensionais que podemos formar com o sistema de Lorenz.

O sistema de Lorenz, além de bastante conhecido, serviu de base para inúmeros trabalhos, dentre eles o de Cuomo (Cuomo & Oppenheim, 1993), no qual foi desenvolvido um circuito eletrônico (descrito pelas equações de Lorenz) que é capaz de reproduzir o comportamento caótico já conhecido. Esse sistema foi utilizado em experiências de sincronismo, objeto de estudo da presente dissertação.

Podemos calcular numericamente uma solução para o sistema de Lorenz. Utilizemos o método Runge-Kutta de 4ª ordem por ser simples e ser bastante utilizado em simulações. Toda simulação numérica gera uma solução aproximada, neste caso o erro acumulado na simulação é da ordem h^4 , onde h é o passo da integração: $t_{n+1} = t_n + h$. Para efetuarmos a simulação pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem precisamos conhecer a função e sua condição inicial, além do valor do passo que queremos. O valor do passo deve ser escolhido a cada função ou necessidade pois, considerando a mesma quantidade de pontos a serem calculados,

passos muito pequenos geram séries temporais menores, porém a solução calculada será mais precisa.

Queremos calcular o ponto $x[n+1]$ a partir de $x[n]$. Para isso efetuamos os seguintes cálculos, seja f a derivada temporal de x :

$$\begin{aligned} a &= f(x_n, t_n) \\ b &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{ah}{2}\right) \\ c &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{bh}{2}\right) \\ d &= f(t_n + h, x_n + ch) \end{aligned}$$

Calculados esses parâmetros o próximo x da série será:

$$x_{n+1} = x_n + (a + 2b + 2c + d) \frac{h}{6}$$

Assim as linhas de código que utilizamos para calcular a solução das equações de Lorenz em linguagem de programação C são:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main()
{
    float a,b,c,d,l,m,n,o,p,q,r,s,h,x[50000],y[50000],z[50000],T[50000],f[50000],g[50000],i[50000];
    int t;
    h=0.1;
    x[0]=5;
    y[0]=4;
    z[0]=7;
    T[0]=0;
    FILE *arq;
    arq=fopen("sistlorenz.txt", "w");
    if(!arq)
    {
        printf("erro na abertura do arquivo.");
    }
}
```

```

    exit (1);
}
for(t=0;t<10000;t++)
{
    T[t+1]=T[t]+h;
    f[t]=10*(y[t]-x[t]); g[t]=28*x[t]-y[t]-x[t]*z[t]; i[t]=x[t]*y[t]-(8/3)*z[t]
    a=10*(y[t]-x[t]); l=28*x[t]-y[t]-x[t]*z[t]; p=x[t]*y[t]-(8/3)*z[t];
    b=10*((y[t]+h*l/2)-(x[t]+h*a/2));          m=28*(x[t]+h*a/2)-(y[t]+h*l/2)-(x[t]+h*a/2)*(z[t]+h*p/2);
q=(x[t]+h*a/2)*(y[t]+h*l/2)-(8/3)*(z[t]+h*p/2);
    c=10*((y[t]+h*m/2)-(x[t]+h*b/2));          n=28*(x[t]+h*b/2)-(y[t]+h*m/2)-(x[t]+h*b/2)*(z[t]+h*q/2);
r=(x[t]+h*b/2)*(y[t]+h*m/2)-(8/3)*(z[t]+h*q/2);
    d=10*((y[t]+h*n)-(x[t]+h*c));              o=28*(x[t]+h*c)-(y[t]+h*n)-(x[t]+h*c)*(z[t]+h*s);
s=(x[t]+h*c)*(y[t]+h*n)-(8/3)*(z[t]+h*r);
    x[t+1]=x[t]+(a+2*b+2*c+d)*h/6; y[t+1]=y[t]+(l+2*m+2*n+o)*h/6; z[t+1]=z[t]+(p+2*q+2*r+s)*h/6
    printf("%f,%f\n",T[t],x[t]);
    fprintf(arq,"%f \t %f \t %f \t %f \t %f \t %f \t %f \n", T[t], x[t], f[t], y[t], g[t], z[t], i[t]);
}
getch();
return(0);
}

```

Em vermelho e azul estão os parâmetros de integração de cada variável. Como o sistema de Lorenz é tridimensional utilizamos para x (a, b, c e d), para y (l, m, n e o) e para z (p, q, r e s). Esse algoritmo gera um arquivo (em verde, neste caso sistlorenz.txt) contém as variáveis salvas pelo comando fprintf e pode ser utilizado em programas como Origin[®] e MatLab[®] para gerar os gráficos das variáveis.

1.2.2 – Acoplamento entre sistemas

Dados dois sistemas dinâmicos independentes, ao fazermos com que um deles passe a ter sua dinâmica alterada pelo outro, ou seja, um sistema receba informações do outro e utiliza essas informações para controlar sua própria dinâmica, dizemos que os sistemas estão acoplados. Seja unidirecionalmente (apenas um dos sistemas recebe informações do outro) ou bidirecionalmente (os

dois sistemas recebem informações). O estado estacionário de cada um dos dois sistemas isolados pode, ou não, ser alterado ao acoplarmos os sistemas entre si.

Dependendo de quão semelhantes são os dois sistemas e da intensidade do sinal de informação recebida do outro sistema, as respostas dos mesmos podem variar de totalmente independentes para completamente iguais. Quando as respostas são totalmente independentes dizemos que os sistemas estão descorrelacionados, e quando as respostas são iguais, correlacionados ou sincronizados. Estados intermediários podem ocorrer e sua caracterização é importante para utilização desse tipo de sincronismo.

Desde a década de 90 muitos trabalhos foram realizados mostrando que vários sistemas podem sincronizar entre si. Os primeiros trabalhos, que deram início a essa área de pesquisa, são de Louis Pecora e Thomas Carroll (Pecora & Carroll, 1990), (Carroll & Pecora, 1991). Eles mostraram a possibilidade de sincronismo em sistemas acoplados. Uma das primeiras aplicações do sincronismo foi a comunicação escondida no sinal caótico (Cuomo & Oppenheim, 1993). Desde então foram realizados inúmeros trabalhos de sincronização de sistemas caóticos, dos quais podemos citar sistemas com circuitos eletrônicos (Wagemakers, Buldú, & Sanjuán, 2008) e lasers (Fisher, et al., 2006), (Nixon, et al, 2011).

O sincronismo é discutido no trabalho de (Boccaletti, et al., 2002), onde são apresentados diferentes estados de sincronismo (em fase, em amplitude, quase-sincronismo, antecipado, atrasado, no mesmo instante, entre outros) e os métodos de análise para medirmos o grau de sincronismo entre sistemas, além de discutir o efeito do ruído em medidas experimentais, em que os sinais extraídos apresentam ruído, que pode surgir do próprio sistema e do método de aquisição utilizado.

1.3 – Técnicas de análise de sistemas não-lineares

Para podermos caracterizar corretamente sistemas dinâmicos não-lineares devemos utilizar técnicas matemáticas e estatísticas de análise de sinais.

No Capítulo 3 desta dissertação de mestrado caracterizaremos o sistema não-linear que implementamos em nosso laboratório com as técnicas apresentadas

nesta seção, visando distinguir estados caóticos de periódicos e estados sincronizados de descorrelacionados.

Algumas técnicas de análise de sistemas dinâmicos foram desenvolvidas para estudar sistemas lineares (transformada de Fourier e função de correlação), porém podem ser utilizadas de forma bastante eficiente na análise de sistemas não-lineares. Outras técnicas foram desenvolvidas especialmente para sistemas não-lineares (Cálculo da dimensão de imersão e do maior expoente de Lyapunov).

1.3.1 – Métodos lineares

Através de métodos de linearização podemos realizar um estudo qualitativo de sistemas não-lineares e descobrir se possuem e quais são seus pontos fixos. Também é possível identificar se possuem regiões de biestabilidade ou multiestabilidade, e se possuem ciclos limites.

Sistemas não-lineares em regime caótico apresentam banda de frequência larga e contínua, então realizar esta medida espectral é uma das primeiras análises que fazemos para diferenciar um estado periódico de um caótico. Fazemos isso através da transformada de Fourier de uma série temporal.

Quando possuímos dois sistemas acoplados entre si podemos medir quão parecidas suas respostas são. Essa medida é feita através da função de correlação.

1.3.1.1 – Transformada de Fourier

A técnica de análise de sinais por transformada de Fourier é bastante útil na determinação das frequências de oscilação de sistemas e para realizar ‘misturas’ de sinais: convoluções e multiplicações de sinais (Hilborn, 1994), (Openheim, Willsky, & Nawab, 1996).

Utilizamos a transformada de Fourier para levar um sinal temporal para o domínio de frequência. Se depois fazemos o módulo quadrado do sinal no domínio de frequências, $|F(f)|^2$, chamamos a essa função de espectro de potência.

As expressões para transformada de Fourier para as variáveis tempo e frequência são, respectivamente, a transformada da função temporal,

$$TF(G(t)) = F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (7)$$

e a transformada da função espectral,

$$TF(F(f)) = G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \exp(i2\pi ft) df \quad (8)$$

Podemos determinar se o sistema é periódico, ou não, através da análise do seu espectro de frequências.

Sinais periódicos exibem espectros formados por picos discretos de frequência. Sinais caóticos exibem espectros compostos por picos largos de frequência.

Um sinal periódico é caracterizado por se repetir a cada passagem de tempo T (período do sinal). Assim se $f(t)$ é um sinal periódico, então $G(t) = G(t + T)$.

Podemos representar um sinal periódico através de uma série de Fourier da seguinte forma: $G(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(in2\pi f_0 t)$, onde $C_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} G(t) \exp(-in2\pi f_0 t) dt$.

Assim, a transformada de Fourier F(f) do sinal periódico G(t) é dado por:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(in2\pi f_0 t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (9)$$

Invertendo o somatório com a integral, temos:

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(in2\pi f_0 t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (10)$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi(f - nf_0)t) dt \quad (11)$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0) \quad (12)$$

Assim constatamos que o espectro de um sinal periódico é constituído de impulsos igualmente espaçados por nf_0 .

Um exemplo de sinal periódico é o pente de impulsos (Figura 6), que é dado pela equação.

$$G(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT) \quad (13)$$

Lembrando que o período de um sinal periódico $T = 1/f$, a transformada de Fourier do pente de deltas é:

$$F(f') = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-i2\pi f't) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT)) dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi l \frac{f'}{f}) \quad (14)$$

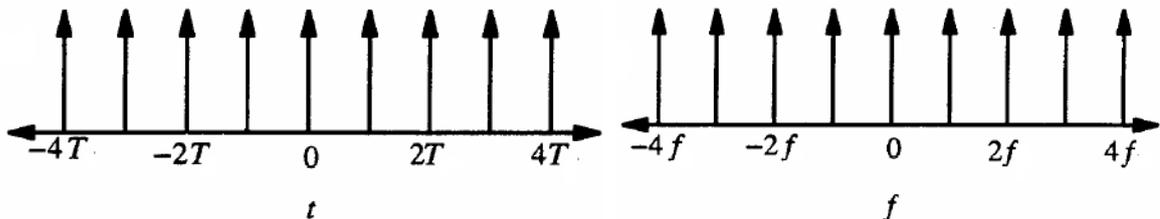


Figura 6: Pente de funções deltas e sua Transformada de Fourier.

Outro exemplo de sinal periódico é o trem de pulsos (Figura 7), que é um sinal periódico.

$$G(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \begin{cases} A, & \text{se } lT - \tau < t < lT + \tau \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (15)$$

Calculando-se a transformada do trem de pulsos encontramos:

$$F(f') = \frac{AT}{\pi f' T} \sin\left(\pi \frac{f'}{f}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi l \frac{f'}{f}) \quad (16)$$

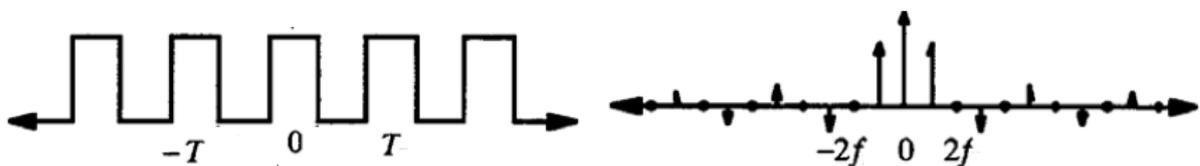


Figura 7: Trem de pulsos retangulares e sua Transformada de Fourier.

Sinais caóticos são aperiódicos, desta forma não apresentam componentes discretas de frequência como os sinais periódicos. Espectros de sinais caóticos são compostos por picos largos de frequência, pois não há um período no sinal que caracterize uma única componente de frequência.

Entretanto a análise de sinais experimentais quando o sistema possui várias frequências de oscilação, ou quando é caótico, é evidentemente um pouco mais complicada devido à presença de ruído, presente em qualquer sistema experimental. Como o ruído contém todas as componentes de frequências possui, portanto um espectro contínuo. Desta forma mistura-se com o sinal do sistema e pode complicar a análise de seu espectro de potências. Ou seja, é preciso na análise de um sinal experimental distinguir as contribuições de ruído da eventual natureza caótica desse sinal.

1.3.1.2 – Função de Correlação

A função de correlação, também conhecida com coeficiente de correlação de Pearson, é uma ferramenta estatística que pode ser utilizada para calcular o grau de acoplamento entre dois sistemas. A função de correlação mede o quão as respostas de dois sistemas, $f(t)$ e $g(t)$, são parecidas.

A função de correlação cruzada, normalizada, entre dois sinais é dada por:

$$C(\Delta t) = \frac{\langle (f(t) - \bar{f})(g(t + \Delta t) - \bar{g}) \rangle}{\sqrt{[\langle (f(t) - \bar{f})^2 \rangle \langle (g(t + \Delta t) - \bar{g})^2 \rangle]}} \quad (17)$$

onde \bar{f} e \bar{g} são as médias das funções f e g . Essa função apresenta valores que vão de 1 a -1.

Quando f é proporcional a g , a função de correlação apresenta valor igual a 1, ou -1 caso as funções sejam opostas. Quando os sinais são completamente independentes a função de correlação apresenta valor igual a zero. Entretanto, alguns pares de funções, como seno e cosseno, exibem correlação igual a zero. Valores intermediários de $|C(\Delta t)|$ ($0 < |C(\Delta t)| < 1$) indicam quão parecidas são as funções f e g , ou seja, ela mede o quanto uma função reproduz a outra.

O Δt da expressão de C definido na Eq. 17 significa uma translação temporal na função g para que ela seja mais parecida possível a função f , assim o máximo da função de correlação ocorre para o Δt que torna os sinais dos sistemas mais parecidos possíveis.

Quando obtemos o valor 1 para a função de correlação dizemos que os sistemas acoplados estão sincronizados, quando obtemos zero, os sistemas estão completamente descorrelacionados.

1.3.2 – Métodos não-lineares

Ao estudar sistemas reais, de modo geral, temos acesso apenas a algumas de suas variáveis, frequentemente a apenas uma. Por isso é necessário desenvolver um método que, baseado na informação dessa única variável, seja capaz de descrever a dinâmica do sistema como um todo.

1.3.2.1 – Reconstrução de atratores: método das coordenadas atrasadas

No trabalho realizado por F. Takens (Takens, 1981) demonstra-se que se D_0 é a dimensão fractal (dimensão da contagem de caixas) do atrator de um sistema não-linear. Então $M \geq 2D_0 + 1$ é a dimensão de imersão² do sistema. A dimensão de imersão é *uma condição suficiente*, mas não é uma condição necessária para que possamos reconstruir o atrator original a partir da série temporal de uma única variável do sistema. Takens considera uma série infinita e sem ruídos e que a dimensão fractal do atrator é conhecida. Entretanto em casos reais, as séries temporais são finitas, apresentam ruído e é desconhecida a dimensão fractal do atrator. Por exemplo, o sistema de Lorenz tem um atrator estranho com dimensão fractal igual a 2,06 (Strogatz, 1994) e assim sua dimensão de imersão, pelo teorema de Takens deveria ser pelo menos 6. Porém utilizando-se dimensão de imersão igual a 3 conseguimos construir um atrator que reproduz as principais características

² Definida na seção 1.3.2.1.1 desta dissertação

do atrator estranho original do sistema de Lorenz: as duas “asas de borboleta” (Figura 5) com centros ocios e volume zero no espaço de fases das coordenadas atrasadas.

Como é apresentado na seção 1.3.2.1.2, a partir do sinal adquirido da possível única variável acessível do sistema, constrói-se um vetor para calcular-se o maior expoente de Lyapunov. A dimensão de imersão nos dá o número mínimo de coordenadas do vetor que é necessário para descrever corretamente a dinâmica do sistema.

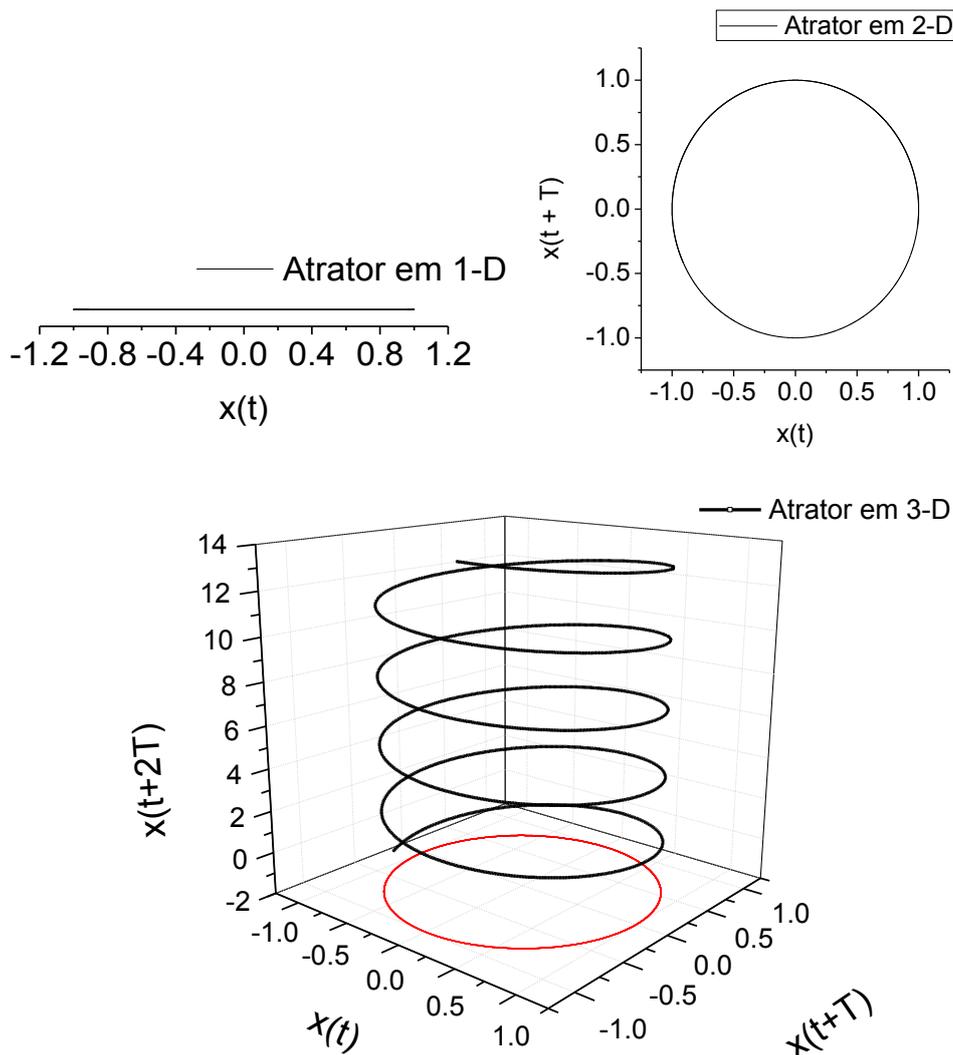


Figura 8: Atrator reconstruído em 1-D, 2-D e 3-D a partir de um vetor de coordenadas atrasadas. Ao aumentarmos a dimensão em que visualizamos o sistema vemos se o atrator está bem definido ou se ainda é uma projeção em uma dimensão inferior. Ou seja, pares de pontos vizinhos mais próximos podem (ou não) deixar de serem vizinhos ao aumentarmos a dimensão de imersão em que visualizamos o sistema.

Ao gerarmos um gráfico utilizando o vetor de coordenadas atrasadas percebemos que ao aumentarmos a sua dimensão (quantidade de coordenadas) o

atrator pode (ou não) ser modificado. Na Figura 11 apresentamos gráficos que mostram como isto pode ocorrer. Quando encontramos um atrator representado por segmento de reta em um gráfico 1-D, não sabemos se este segmento de reta é realmente o atrator reconstruído do sistema ou se é, por exemplo, uma circunferência projetada em um dos eixos. Caso seja uma projeção de circunferência, quase todos os pares de pontos vizinhos mais próximos no gráfico 1-D deixarão de serem vizinhos em um gráfico 2-D, pois os pontos de cada par podem estar dispostos em extremidades opostas da circunferência. Denominamos esses pontos de falsos vizinhos. Da mesma forma, esta circunferência pode ser uma projeção de uma espiral em um gráfico 3-D. Com isso, pares de pontos vizinhos mais próximos em 2-D podem deixar de representar vizinhos mais próximos em 3-D. Assim, verificando se cada par de pontos vizinhos mais próximos em uma dimensão M-D continua sendo um par de pontos vizinhos mais próximos em M+1-D, podemos calcular a fração entre falsos vizinhos e vizinhos verdadeiros para cada dimensão M-D. A dimensão para a qual a fração entre falsos vizinhos e vizinhos verdadeiros se aproximar de zero é denominada de dimensão de imersão do sistema.

1.3.2.1.1 – Método dos falsos vizinhos

O método dos falsos vizinhos é um dos métodos desenvolvidos para o cálculo da dimensão de imersão de um sistema não-linear. Este método foi desenvolvido por Matthew B. Kennel (Kennel, Brown, & Abrabanel, 1992).

Criamos um vetor chamado de vetor de coordenadas atrasadas a partir do sinal da variável do sistema não-linear a que temos acesso. Uma série temporal adquirida experimentalmente ou integrada numericamente é discreta e não contínua temporalmente, pois são compostas por pontos igualmente espaçados temporalmente (essa distância pode ser controlada). Assim podemos trocar $x(t)$ por $x(n)$, visto que os pontos da série são igualmente espaçados, sendo então possível marcar os pontos por um número natural ao invés do valor do tempo em que o ponto foi gerado.

O vetor de coordenadas atrasadas é definido como:

$$y = (x(n), x(n + N), x(n + 2N), \dots, x(n + (M - 1)N)) \quad (18)$$

Esse vetor possui M coordenadas, que são pontos, de uma mesma série temporal, igualmente espaçados por N . A quantidade de coordenadas que utilizamos nos dá a dimensão de imersão M .

Começamos criando um vetor com apenas uma coordenada, $y = [x(n)]$, então encontramos o vizinho mais próximo para cada ponto da série, $y^r = [x^r(n_r)]$. Depois modificamos o vetor de coordenadas atrasadas para que tenha uma coordenada a mais, $y = [x(n), x(n + N)]$, e através de dois critérios (que serão apresentados nesta seção) verificamos se os pontos que havíamos encontrado como vizinhos mais próximos são realmente vizinhos ou se são falsos vizinhos.

Utilizamos dois critérios para definirmos se dois pontos são realmente vizinhos ou não. Basta que um dos critérios afirme que temos um falso vizinho para incluí-lo na contagem dos falsos vizinhos.

Procuramos pelo vizinho mais próximo, $y^r = [x^r(n)]$, de cada ponto da série, $y = [x(n)]$. Através da relação euclidiana para distância em uma dimensão M :

$$R_M^2 = \sum_{k=0}^{M-1} [x(n + kN) - x^r(n_r + kN)]^2 \quad (19)$$

O vizinho $y^r = [x^r(n_r)]$ de $y = [x(n)]$ para o qual R_M for mínimo será o vizinho mais próximo. Então, verificamos R^2 em uma dimensão $M+1$:

$$R_{M+1}^2 = R_M^2 + [x(n + (M - 1)N) - x^r(n_r + (M - 1)kN)]^2 \quad (20)$$

Comparando as distâncias R_M e R_{M+1} entre um ponto e seu vizinho mais próximo temos um primeiro critério para estabelecer se o vizinho é um falso vizinho.

$$\left[\frac{R_{M+1}^2 - R_M^2}{R_M^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{|x(n + (M-1)N) - x^r(n_r + (M-1)N)|}{R_d} > R_{tol} \quad (21)$$

Onde R_{tol} é um parâmetro de controle. Tomando como base (Kennel, Brown, & Abrabanel, 1992), o método apresenta bons resultados para $R_{tol} > 10$.

O segundo critério compara a distância entre dois pontos em $M+1$ dimensões com o tamanho do atrator, dado pelo desvio padrão da série temporal, então se a distância entre os pontos em $M+1$ dimensões for mais de duas vezes maior que o tamanho do atrator, então os pontos são falsos vizinhos. O segundo critério é:

$$\frac{R_{d+1}}{R_a} > 2 \quad (22)$$

onde,

$$R_a^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L [x(n) - \bar{x}]^2 \quad (23)$$

e

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L x(n) \quad (24)$$

Aplicando esse método para o sistema de Lorenz para os mesmos valores de parâmetros utilizados na seção 1.2.1 temos:

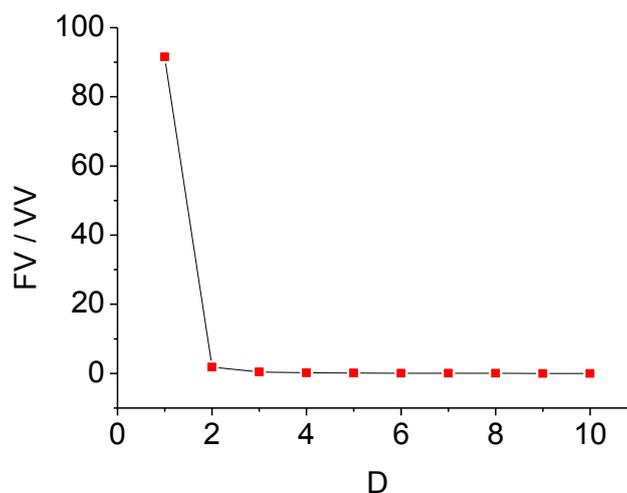


Figura 9: Cálculo da dimensão de imersão do sistema de Lorenz através do método dos falsos vizinhos. O eixo vertical representa a fração do número de falsos vizinhos pelo número de vizinhos verdadeiros e o eixo horizontal representa a dimensão de imersão. Neste caso, considerar $D=2$ já é suficiente, pois a fração de falsos vizinhos já se aproxima de zero.

Para o sistema de Lorenz, como vemos no gráfico anterior a porcentagem de falsos vizinhos se aproxima de zero já para dimensão igual a 2. Isto acontece porque o atrator estranho deste sistema de dimensão fractal igual a 2,06. Utilizando dimensão de imersão igual a 3, se recuperam todas as propriedades topológicas do atrator estranho original.

1.3.2.1.2 – Maior expoente de Lyapunov

Existem vários artigos na literatura sobre o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Citamos: (Stachowiak & Szydowski, 2011), (Wright, 1984), (Brown, 1993), (Eckmann, Kamphorst, Ruelle, & Ciliberto, 1986), (Murison, 2011)

Uma das características de um sistema caótico é ter expoente de Lyapunov positivo. Não é necessário conhecer todo o espectro de Lyapunov de um sistema. Para cada dimensão de um sistema podemos calcular a evolução temporal da diferença, $\delta(t)$, entre as coordenadas da mesma dimensão de duas condições inicialmente próximas como sendo $|\delta(t)| = e^{\lambda t} |\delta_0|$, onde λ é o expoente de Lyapunov associado a uma das dimensões do sistema. Basta apenas conhecermos o maior expoente de Lyapunov do sistema, pois se este for positivo o sistema é caótico. Caso contrário nenhum dos expoentes será positivo e assim sendo, o sistema não está num regime caótico. Calcularemos o maior expoente de Lyapunov baseados no algoritmo de A. Wolf (Wolf, Swift, Swinney, & Vastano, 1985) para caracterizar o sistema apresentado no Capítulo 3.

Após calcularmos a dimensão de imersão do sistema não-linear, criamos um vetor de coordenadas atrasadas com o número de coordenadas igual ao valor da dimensão de imersão, M.

$$y = (x(n), x(n + N), x(n + 2N), \dots, x(n + (M - 1)N)) \quad (25)$$

Para cada ponto, $y = [x(n), \dots, x(n + (M - 1)N)]$, gerado a partir da série adquirida calculamos seu vizinho mais próximo, $y^r = [x^r(n_r), \dots, x^r(n_r + (M - 1)N)]$.

$$R_M^2 = \sum_{k=0}^{M-1} [x(n + kN) - x^r(n_r + kN)]^2 \quad (26)$$

A partir daí fazemos o ponto e seu vizinho mais próximo evoluírem ao mesmo tempo e assim medimos como a distância, entre esses dois pontos, evolui com o passar do tempo.

$$R_M(l) = \sum_{\substack{l=0 \\ n+kN+l < Lmax \\ n_r+kN+l < Lmax}} [\sum_{k=0}^{M-1} [x(n+kN+l) - x^r(n_r+kN+l)]^2]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

onde $Lmax$ é o índice do último ponto da série temporal adquirida. Calcula-se então o logaritmo da distância entre os pontos, $\ln [R_M(l)]$.

Repetindo essa rotina para todos os pontos da série temporal podemos fazer uma média do logaritmo da distância,

$$\frac{1}{A} \sum_n \sum_l \ln [R_M^n(l)] \quad (28)$$

onde A é o número de pares vizinhos mais próximos que encontramos na série. O índice n indica o ponto para o qual calcularemos seu vizinho mais próximo. Na rotina para encontrarmos pares de vizinhos mais próximos na série temporal é necessário fazer $n < n_r$, pois assim evitamos utilizar duas vezes um mesmo par.

Construímos então um gráfico entre a média da distância e o tempo de evolução, l . Se encontrarmos um crescimento que pode ser ajustado por uma reta, sabemos que representa um crescimento exponencial visto que o eixo vertical do gráfico construído é logarítmico. Dessa forma a inclinação da reta fitada do gráfico logarítmico é o maior expoente de Lyapunov. Porém como já foi dito, nos interessa apenas encontrar esse crescimento exponencial, para assim caracterizar o estado estudado como caótico.

No Capítulo 2 é apresentada uma motivação para estudar circuitos eletrônicos descritos por equação não-lineares. Apresentamos também os dois sistemas que serviram de base para montarmos nosso sistema apresentado no Capítulo 3 desta dissertação.

Capítulo 2 – Circuitos eletrônicos regidos por equações não-lineares

Neste capítulo apresentamos dois sistemas não-lineares constituídos por circuitos eletrônicos e que nos serviram de base para montagem de um sistema original que estudamos nesse programa de Mestrado.

Nossa primeira motivação para estudar sistemas não-lineares foi a possível utilização destes em comunicação. Na literatura existem diversos artigos que tratam de comunicação com sistemas não-lineares (Argyris, et al., 2005), (Wagemakers, Buldú, & Sanjuán, 2008), (Jr., Romero, & Neto, 2008). A primeira proposta de aplicação de osciladores caóticos para ocultação de mensagens foi realizada com ‘circuitos de Lorenz’ (Cuomo & Oppenheim, 1993), que se baseou no trabalho sobre sincronismo de sistemas não-lineares de L. Pecora (Pecora & Carroll, 1990).

Pecora demonstrou que dois sistemas não-lineares idênticos acoplados entre si podem sincronizar. Ele demonstrou teoricamente (através do sistema de Lorenz e do sistema de Rosler) e experimentalmente, com o circuito apresentado em (Newcomb & Sathyan, 1983) modificado, a sincronização entre sistemas em estado caótico. Considerando um sistema n -dimensional, $\dot{u} = f(u)$, podemos subdividi-lo em dois subsistemas, $[u=(v,w)]$.

$$\text{Assim, } \dot{u} = f(u) = \begin{cases} \dot{v} = g(v, w) = g(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)) \\ \dot{w} = h(v, w) = h(f(u_{m+1}), f(u_{m+2}), \dots, f(u_n)) \end{cases}, \text{ onde } m <$$

n . Podemos criar um outro subsistema, w' idêntico ao w . Porém a função h' terá

$$\text{variáveis } v \text{ e } w'. \dot{u}' = f(u') = \begin{cases} \dot{v} = g(v, w') = g(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)) \\ \dot{w}' = h'(v, w') = h'(f(u'_{m+1}), f(u'_{m+2}), \dots, f(u'_n)) \end{cases}. \text{ Ou}$$

seja, o subsistema w' funciona como parte de outro sistema n -dimensional, u' que recebe informações do primeiro.

Examinando a diferença $\Delta w = w - w'$ percebemos que se esta for zero os subsistemas, w e w' , estão sincronizados. Pecora mostrou que isto só acontece quando os expoentes de Lyapunov do subsistema w forem todos negativos.

Em (Cuomo & Oppenheim, 1993) os autores acoplaram dois circuitos eletrônicos, onde cada um obedece ao conjunto de equações de Lorenz e operam em regime caótico, independentemente. Mostraram que é possível sincronizar os circuitos eletrônicos e que é possível estabelecer comunicação escondendo a mensagem no sinal caótico do circuito mensageiro. A mensagem deve ter baixa intensidade em relação ao sinal do circuito mensageiro (menos de 10% da intensidade) e sua banda de frequência deve estar contida na banda de frequência de oscilação do sistema. Desta forma, a mensagem fica escondida no sinal caótico enviado ao segundo circuito. O fato importante para o sucesso dessa técnica é que este circuito receptor vai sincronizar apenas com o sinal caótico do primeiro e desta forma ao subtrairmos o sinal enviado (sinal caótico + mensagem) pelo sinal sincronizado no segundo circuito nos restará apenas a mensagem. A mensagem tem que ter baixa intensidade para não modificar o sinal caótico enviado e assim não ser “visível” e também não pode ter intensidade baixa demais para não ser confundida com o ruído que é inerente a sistemas reais. A comunicação estabelecida por Cuomo e Oppenheim é unidirecional: um sistema envia informação. O segundo apenas recebe.

Escolhemos trabalhar com circuitos eletrônicos devido a relativa simplicidade e ao baixo custo dos componentes comparados a montagem de sistemas óticos com laser de diodo (Fisher, et al., 2006), (Nixon, et al., 2011), (Argyris, et al., 2005).

Nossa primeira tentativa de realizar sincronização para estabelecer comunicação entre circuitos eletrônicos foi baseada no trabalho de D.V. Senthilkumar (Senthilkumar, et al., 2010). Nesse trabalho são utilizados circuitos eletrônicos, em que cada circuito é descrito por apenas uma equação diferencial. Com apenas uma equação o sistema só poderia apresentar pontos fixos ou divergir. Porém existe na equação de cada circuito um termo com variável atrasada temporal. Sistemas descritos por equações com atraso podem assumir qualquer comportamento dinâmico (Farmer, 1982).

Em (Senthilkumar, et al., 2010) dois circuitos são acoplados e sincronizados em fase, ou seja, as amplitudes das tensões dos circuitos estão descorrelacionadas,

mas suas fases estão sincronizadas. Nós buscamos estabelecer a sincronização completa nesse sistema, ou seja, fazer com que os dois circuitos exibissem a mesma resposta. Porém não conseguimos estabelecer sincronização completa, o que dificultou as tentativas de estabelecer comunicação através desse sistema. Outro problema para estabelecer comunicação está descrito em um trabalho de (Ponomarenko & Prokhorov, 2002) que afirma ser possível decodificar um sinal criptografado sem necessariamente se conhecer o circuito utilizado. Apenas é necessário que o circuito utilizado para esconder a mensagem seja regido por uma equação diferencial de primeira ordem, o que é o caso do circuito de Senthikulmar.

Buscamos então outro sistema simples, mas que com ele pudéssemos estabelecer comunicação mais segura através de sinais caóticos. Resolvemos utilizar um circuito que reproduzisse um oscilador harmônico com um termo não-linear e com alimentação externa por um gerador de funções. Baseamos-nos no modelo de circuito estudado em (Gonçalves & Neto, 2011). O circuito reproduz um oscilador harmônico e é descrito por uma equação diferencial de segunda ordem com alimentação externa. A alimentação externa é feita com um sinal sinusoidal, um termo com a variável tempo explícita. Dessa forma a variável tempo comporta-se como uma variável dinâmica do sistema, tornando-o tridimensional. Com isso, o sistema pode operar em regime caótico (Hilborn, 1994).

Utilizamos dois destes circuitos, idênticos, acoplados para estudos de sincronização. Os dois sistemas utilizam componentes eletrônicos simples como resistores, capacitores, diodos, indutores e/ou amplificadores operacionais.

Nas duas últimas seções deste capítulo apresentaremos em mais detalhes esses dois sistemas, mostrando alguns dos estados que podem assumir e mostrando resultados do acoplamento desses sistemas.

2.1 – Componentes eletrônicos

Nesta seção tratamos de algumas características dos componentes eletrônicos utilizados nos circuitos estudados nessa Dissertação.

São resistores, capacitores, indutores, amplificadores operacionais e diodos.

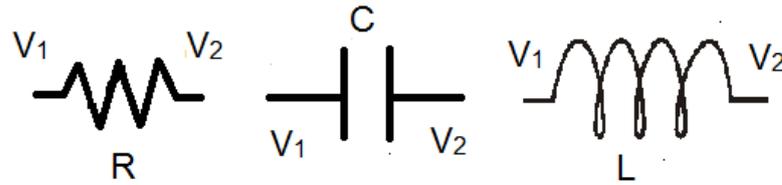


Figura 10: Esquema de um resistor (à esquerda), de um capacitor (ao centro) e de um indutor (à direita).

Resistor (Figura 10, esquerda) é um componente capaz de transformar energia elétrica em energia térmica, através do efeito Joule, $P = Ri^2$, onde P é a potência dissipada, R é a resistência e i a corrente. Entre os terminais de um resistor existe uma diferença de potencial, $V_2 - V_1$, medida em volts (V) que é relacionada com a corrente que o atravessa e com sua resistência através da equação linear entre i e $V_2 - V_1$:

$$R = \frac{V_2 - V_1}{i} \quad (29)$$

Capacitor (Figura 10, centro) é um componente capaz de acumular carga elétrica, q , medida em Coulombs (C). Entre seus terminais também existe uma diferença de potencial, que depende da carga armazenada em seu interior e da sua capacitância, C . A variação da carga elétrica com a passar do tempo gera uma corrente elétrica. Assim:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d(V_b - V_a)}{dt}, \quad (30)$$

como a capacitância C é constante, fica fora da derivada.

O indutor (Figura 10, direita) armazena energia na forma de campo magnético. A relação entre sua indutância e a diferença de potencial entre seus terminais é dada pela equação linear:

$$V_2 - V_1 = L \frac{di}{dt} \quad (31)$$

Amplificadores operacionais são muito utilizados em circuitos eletrônicos devido à variedade de funções que pode desempenhar. Nos circuitos apresentados

nos Capítulos 2 e 3, os utilizamos como subtrator, inversor, integrador, somador, entre outros.

Utilizamos amplificadores operacionais do modelo 741 (Figura 11). Este modelo apresenta oito pinos, dos quais utilizamos apenas 5. Especificamente utilizamos os pinos 2, 3, 4, 6 e 7. Chamamos o pino 2 de entrada negativa e o 3 de entrada positiva, são os pinos em que introduzimos sinais. Os pinos 4 e 7 servem para alimentação do amplificador, tensão negativa no 4 e positiva no 7. O pino 6 é a saída, o sinal resposta.

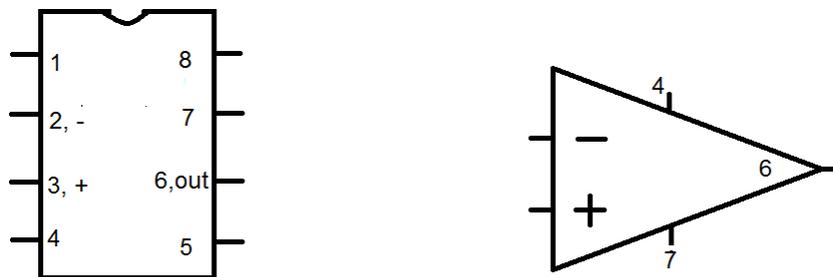


Figura 11: Amplificador operacional. Identificação dos pinos (esquerda), representação em diagrama de circuitos (direita).

Em geral, podemos relacionar a tensão de saída com as tensões de entrada, positiva e negativa, da seguinte forma:

$$V_{out} = G(V_+ - V_-) \quad (32)$$

onde G é o ganho de malha aberta.

Podemos utilizar a tensão de saída para a reinjetarmos na entrada negativa, pino 2, a isto damos o nome de realimentação de negativa, Figura 12. A tensão do pino de entrada 2 (entrada -) é dita V_- e a tensão do pino de entrada 3 (entrada +) é dita V_+ .

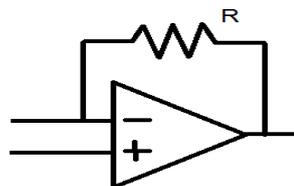


Figura 12: Amplificador operacional com realimentação negativa.

Quando implementamos a realimentação negativa em amplificadores operacionais, geralmente suas estruturas internas trabalham para que as tensões nas entradas negativa e positiva se igualem e assim podemos utilizar uma nova regra, dita regra de ouro:

$$V_+ = V_- \tag{33}$$

Uma característica importante de amplificadores operacionais é que não há entrada de corrente nos pinos 2 e 3.

A seguir apresentamos as várias montagens para os amplificadores operacionais utilizadas nos circuitos estudados nesta dissertação, relacionando as tensões de entrada com a de saída. Apresentamos montagens para amplificadores operacionais como somador (Figura 13, esquerda), como subtrator (Figura 13, direita), como tampão (Figura 14, esquerda), amplificador (Figura 14, centro), inversor (Figura 14, direita) e integrador não-inversor (Figura 15).

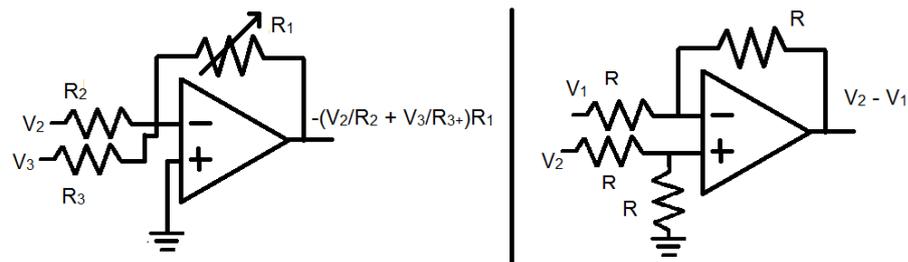


Figura 13: Amplificador operacional usado como somador (esquerda) e subtrator (direita).

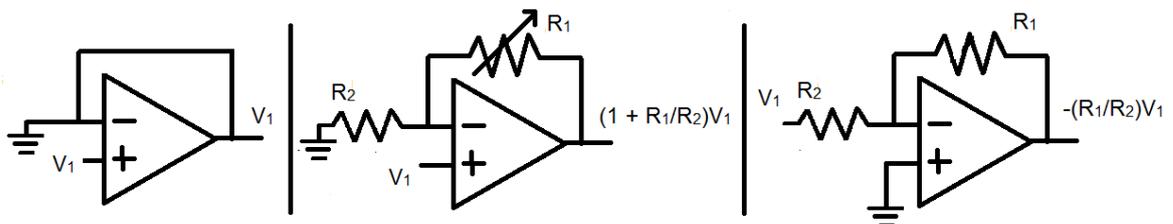


Figura 14: Amplificador operacional usado como tampão (esquerda), amplificador (centro) e inversor (direita).

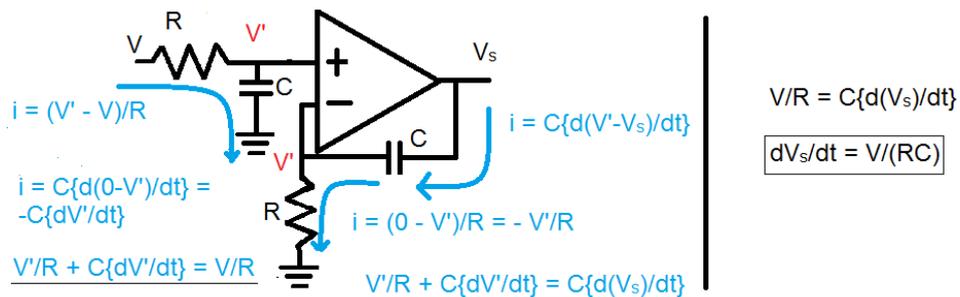


Figura 15: Amplificador operacional usado como integrador. Demonstração da dependência da tensão de saída com a tensão de entrada.

Diodos, Figura 16, são componentes eletrônicos que permitem a passagem de corrente elétrica em apenas um sentido. O seu funcionamento é aqui detalhado devido o seu importante papel no circuito, garantindo a natureza não-linear do sinal de saída do sistema.

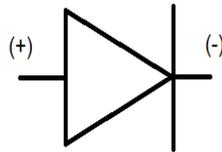


Figura 16: Representação de um diodo mostrando seu sentido de polarização.

Na Figura 16, (+) representa o terminal com maior tensão e (-) o terminal com menor tensão. Diodos funcionam como chaves, pois só permite passagem de corrente quando é aplicado um limiar de tensão entre seus terminais (Figura 17). A partir desse limiar podemos aumentar o nível de corrente elétrica que atravessa o diodo e tensão entre os terminais do diodo permanece constante. Desta forma, podemos utilizar pares opostos de diodos em circuitos eletrônicos para gerar correntes lineares por partes, ou seja, correntes não lineares. Fazendo com que o circuito seja regido por uma equação não-linear.

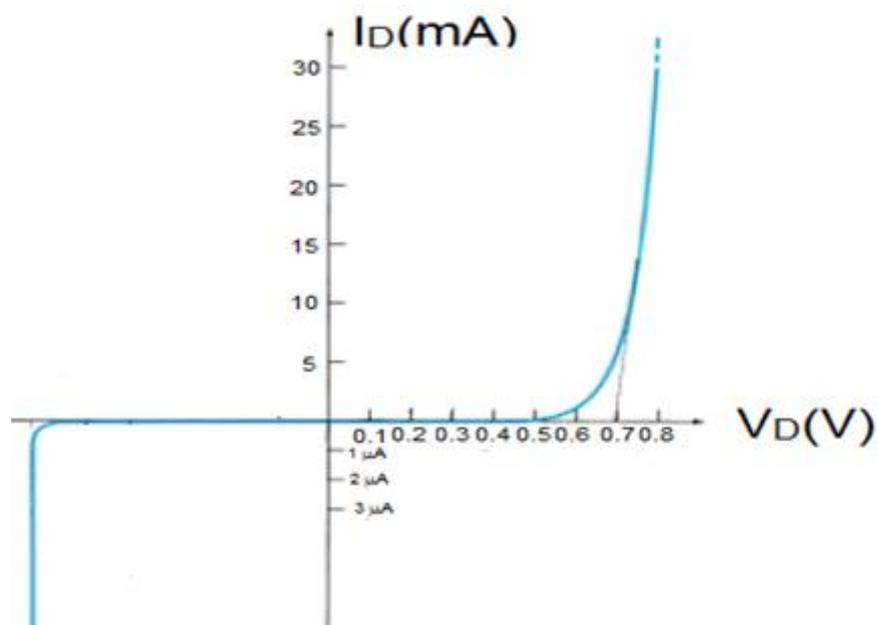


Figura 17: Curva de resposta do diodo para dada diferença de potencial aplicada. Figura retirada de (Boylestad & Nashelsky, 1998).

2.2 – Sistema de primeira ordem com atraso temporal

Para se estudar comunicação através de circuitos eletrônicos caóticos precisamos de um circuito modelo. Dentre vários existentes na literatura resolvemos estudar circuitos descritos por equações diferenciais com termos de atraso temporal. Sistemas com atraso temporal são importantes para tornar modelos mais realistas para diversos sistemas concretos. Por exemplo, um modelo realista de evolução de população deve levar em consideração o período de gestação, assim como a disseminação de uma doença, que depende do tempo de incubação (do vírus ou bactéria responsável) em um indivíduo até que ele possa transmitir a doença para outros indivíduos. Na natureza, como os fenômenos não são instantâneos, devemos levar em consideração os tempos de atraso entre uma causa e o surgimento de seu efeito. Existem modelos com tempo de atraso variável ou fixo. Resolvemos estudar inicialmente um sistema com tempo de atraso fixo.

Sistemas com atraso temporal podem exibir qualquer comportamento dinâmico, pois o atraso gera infinitas dimensões ao sistema (Farmer, 1982). Para calcular uma solução de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, precisamos apenas de uma condição inicial, por isso dizemos que o sistema tem dimensão 1. O oscilador harmônico é regido por uma equação diferencial de 2ª ordem e precisa de duas condições iniciais para se calcular a solução de sua equação e assim dizemos que tem dimensão 2. Para equações diferenciais com termos atrasados não é suficiente conhecer suas condições iniciais, é necessário conhecer sua função história. A função história é responsável pela memória do sistema, ou seja, o sistema evolui de acordo com seu atual estado e com seu estado passado. A função história é contínua e é válida apenas para $-\tau < t < 0$, ou seja, quando “iniciamos” o sistema devemos conhecer respostas sobre o mesmo que aconteceram para tempos anteriores a $t=0$. Chamamos τ de tempo de atraso do sistema, ou seja, diz a duração do passado do sistema que devemos conhecer para calcular a sua evolução temporal. Existem alguns métodos para o cálculo dessa função história. Como podemos relacionar a dimensão de um sistema com a quantidade de condições iniciais necessárias para calcular sua solução, equações com termos atrasados têm, a priori, dimensão infinita, pois a função história (durante $-\tau < t < 0$)

funciona como condição inicial e por ser contínua, possui infinitos pontos (infinitas condições iniciais).

O modelo de sistema com atraso que escolhemos é de uma equação diferencial de primeira ordem e serve de base para vários sistemas:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bF[x(t - \tau)] \quad (34)$$

onde a e b são parâmetros constantes positivos. A função $F(x)$ é responsável pela não-linearidade do sistema.

Portanto, dependendo de F temos vários exemplos de estudo desse sistema:

(i) O famoso sistema biológico Mackey-Glass (Mackey & Glass, 1977), citado em vários artigos como (Namajunas, Pyragas, & Tamasevicius, 1995) e (Wagemakers, Buldú, & Sanjuán, 2008), é descrito pela equação:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b \frac{Ax(t-\tau)}{1+x^m(t-\tau)} \quad (35)$$

(ii) Outro modelo baseado na Equação 34 é estudado em (Lu & He, 1996) e (Senthikulmar, Lakshamanan, & Kurths, 2005). O termo não-linear (neste caso linear por partes) F é dado por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{4}{3} \\ -1.5Ax - 2.0, & -\frac{4}{3} < x \leq -0.8 \\ Ax, & -0.8 < x \leq 0.8 \\ -1.5Ax + 2.0, & 0.8 < x \leq \frac{4}{3} \\ 0, & x > \frac{4}{3} \end{cases} \quad (36)$$

O sistema que escolhemos foi estudado em (Senthilkumar, et al., 2010) e é descrito por:

$$R_0 C_0 \dot{x} = -x + b * f[x(t - \tau)] \quad (37)$$

Onde,

$$f(x) = Af' - Bx \quad (38)$$

e,

$$f' = \begin{cases} -0.7, & x < -0.7 \\ x, & -0.7 < x < 0.7 \\ +0.7, & x \geq 0.7 \end{cases} \quad (39)$$

onde $b=1,2$, $A=5,2$ e $B=3,5$.

A partir dessa equação diferencial foi construído um circuito eletrônico cuja variável dinâmica do sistema, sua tensão de saída do filtro R_0C_0 reproduz a dinâmica dessa equação. Como o sistema é descrito apenas por uma equação diferencial de primeira ordem que depende do passado, possuindo desta forma infinitas dimensões, pode apresentar a princípio qualquer estado dinâmico, como ponto fixo, ciclo limite ou caos.

O circuito obedecendo as Equações 37-39 (Figura 18) é formado por duas partes essenciais, uma linha de indutores e capacitores (filtros LC^3), e outra formada pelos diodos D_1 e D_2 , que são responsáveis pela não-linearidade do sistema, uma vez que diodos só permitem passagem de corrente quando atinge uma voltagem de aproximadamente 0,7 V entre seus terminais. Controlando as tensões V_1 e V_2 (Figura 18), podemos ajustar o nível de corte da função f' , Equação 39. Como diodos polarizados só permitem passagem de corrente em uma direção utilizam-se dois diodos em sentidos opostos para se obter oscilação da variável dinâmica do sistema. Da forma como os diodos estão dispostos no circuito eles não conduzem corrente quando a tensão de saída do resistor R_1 está entre $-0,7$ V e $0,7$ V. Assim essa tensão pode variar continuamente entre esses valores. Quando a tensão aproxima-se de -0.7 V (ou de 0.7 V) um dos diodos passa a conduzir corrente elétrica e devido a sua curva de transmissão, Figura 17, a tensão de saída de R_1 não ultrapassa esses valores. Note que, para valores de tensão acima desse limiar a condutividade é praticamente 'infinita'.

Desse modo a tensão que chega ao resto do circuito é linear por partes, mas o sistema, como um todo, é regido por uma equação não-linear (Equações 37-39). O filtro LC tem função de retardo no sinal, ou seja, se na entrada temos um sinal $x(t)$

³ Ver Apêndice Filtros LC

na saída teremos um sinal $x(t-\tau)$, onde τ é o tempo de atraso do sinal gerado pelo filtro LC e é igual a \sqrt{LC} para cada filtro.

A figura abaixo mostra o diagrama do circuito eletrônico utilizado nesse trabalho.

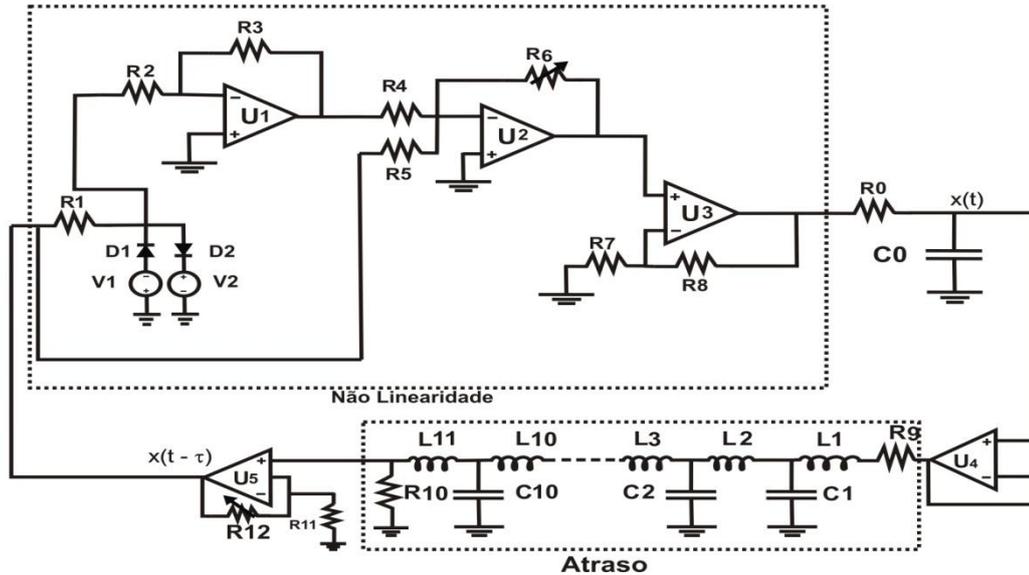


Figura 18: Diagrama do circuito de primeira ordem com atraso temporal.

Este circuito é composto de resistores, capacitores, indutores, diodos e amplificadores operacionais. Os valores dos componentes que utilizamos são: $R_1=1$ k Ω , $R_2=R_3=10$ Ω , $R_4=2$ k Ω , $R_5=3,0$ k Ω , $R_6=10,4$ k Ω (potenciômetro), $R_7=1$ k Ω , $R_8=5$ k Ω (potenciômetro), $R_9=R_{10}=1$ k Ω , $R_{11}=10$ k Ω , $R_{12}=20$ k Ω (potenciômetro), $R_0= 1.86$ k Ω , $C_0=100$ nF, $L_i=12$ mH ($i = 1; 2; \dots; 11$), $C_i=470$ nF ($i = 1; 2; \dots; 10$), diodos $D_1=D_2$ (modelo 2N4148) e os amplificadores operacionais são do modelo 741.

2.2.2 - Resultados

Medindo os sinais $x(t)$ e $x(t-\tau)$ no circuito e observando-os através de um osciloscópio, podemos obter diferentes estados dinâmicos do sistema. Na Figura 19 vemos fotografias da tela do osciloscópio mostrando estados periódicos e caóticos do sistema. Os eixos das figuras são $x(t-\tau)$ e $x(t)$, horizontal e vertical. As fotografias

mostram uma das rotas de bifurcação para o caos que o sistema exibe, no caso, a rota de dobramentos de período.

Variamos o estado dinâmico do circuito modificando parâmetros do sistema. Particularmente controlando as resistências dos potenciômetros R_6 e R_8 do circuito. A primeira das fotografias exibe uma órbita de período T , a segunda tem o período dobrado $2T$, depois $4T$, depois multiperiódica, e as duas últimas são caóticas. Experimentalmente é uma tarefa difícil obter-se a órbita de período $8T$. Obter órbita $16T$ é então muito mais difícil. De fato a obtenção desses dobramentos de período é observada em poucos experimentos. Isso deve-se, entre outras fatores, à presença de ruído, inerente aos experimentos, assim como pela imprecisão dos componentes.

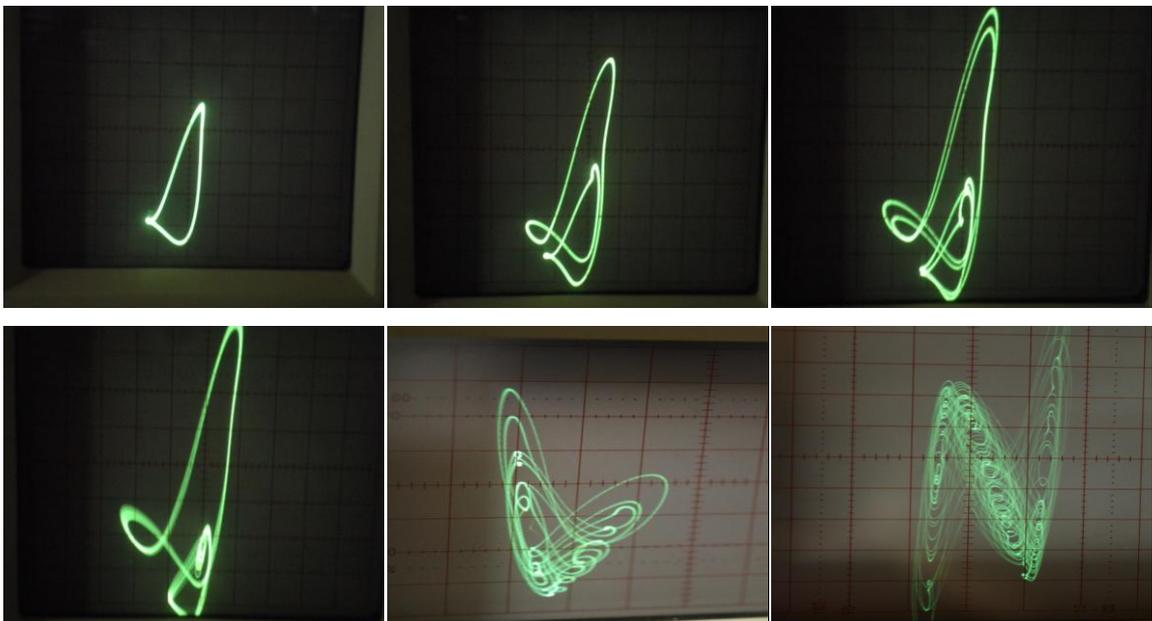


Figura 19: Uma das rotas de bifurcações do sistema. Passando de uma órbita de período T para $2T$, $4T$, multiperiódica, caos e caos. Os eixos das fotos são $x(t-\tau)$ e $x(t)$.

2.2.2.2 – Simulações numéricas

Podemos também analisar numericamente o sistema dado pelas Equações 37-39, resolvendo essa equação diferencial com atraso que rege nosso circuito. Escolhemos utilizar a rotina `dde23` do MatLab[®] desenvolvida por L. Shampine (Thompson & Shampine, 2000), (Shampine & Thompson, 2000).

Seja a equação diferencial com atraso temporal:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_k)) \quad (40)$$

Temos que f pode depender do tempo t , da variável dinâmica no instante t ($x(t)$) como equações diferenciais ordinárias, mas também da variável dinâmica em tempos passados ($x(t-\tau)$). Consideremos apenas tempos de atraso, τ , constantes. Para resolver esse tipo de equação não precisamos apenas de uma condição inicial, precisamos da história da função para $-\tau < t < 0$, como discutido anteriormente.

Shampine utiliza para simular equações diferenciais com atraso temporal um método de integração que pode ser considerado uma extensão do método de Runge-Kutta com interpolações de Hermite (Bogacki & Shampine, 1989).

A seguir explicitamos as linhas de código para efetuar a simulação numérica da Equação 37. Essa rotina foi construída baseada no exemplo 7 de (Thompson & Shampine, 2000):

```
function sol = circuit
    tau=1.232; %tau = tempo de atraso%
    tfim=200;
    opts = ddeset('Events',@circuito);
    sol = dde23(@circuitf,tau,-1,[0,tfim],opts);
    while sol.x(end) < tfim
        fprintf('Restart at %5.1f.\n',sol.x(end));
        sol = dde23(@circuitf,tau,sol,[sol.x(end),tfim],opts);
    end
    figure(1)
    npontos=3000; %quantidade de pontos no intervalo (t0,tfim)
    t=linspace(3,tfim,npontos);
    ygraf=deval(sol,t)
    ygraf_lag=deval(sol,t-tau);
    plot(ygraf(1000:3000),ygraf_lag(1000:3000));

    xlabel('x(t-tau)');
    ylabel('x(t)');

    %-----
    % Nested functions
    %

    function yp = circuitf(t,y,Z)

        b1 = 1.2;
        b2 = 1.1;
```

```

A = 5.2;
B = 3.5;
xstar = 0.7;
Fstar_x = -xstar;

ylag=Z;

if (ylag >= -xstar & ylag <= xstar)
    Fstar_x=ylag;
elseif ylag < -xstar
    Fstar_x = -xstar;
elseif ylag > xstar
    Fstar_x = xstar;
end
Fx = A*Fstar_x - B*ylag;
yp = -y + b1*Fx;
end

%-----

function [value,isterminal,direction] =
circuito(t,y,Z,state)

    x = 0.7;
    value = Z + x;
    isterminal = 1;
    direction = 0;
end % exam7e

%-----

end % exam7

```

No código numérico acima, a parte em vermelho gera o plot dos sinais $x(t-\tau)$ e $x(t)$, horizontal e vertical respectivamente. Ou seja, $x(t-\tau)$ em função de $x(t)$. A parte em azul é a definição da equação que será calculada. Como na equação existe o termo, Fx , que depende da variável atrasada, $ylag$, precisamos de uma função que ‘diga’ ao programa quando ele deve modificar a equação (linhas marrons).

Utilizando esse algoritmo realizamos algumas simulações numéricas variando-se o tempo de atraso que é adimensional. Na simulação a variável tempo (t , experimentalmente medida em segundos) foi substituída por uma variável tempo adimensional (t') relacionadas pela constante de tempo R_oC_o : $t = t'.R_oC_o$. Além disso, só realizamos o plot das variáveis depois de um transiente $t = 1000$. Desta forma obtemos apenas o ‘regime estacionário’ do circuito.

Utilizando os valores de τ indicados em cada simulação da Figura 20, obtemos uma das rotas de bifurcação do sistema em que partimos de um regime de período T com $\tau=1,1$ para um regime com período $2T$ ($\tau=1,151$), $4T$ ($\tau=1,232$), multiperíódico ($\tau=1,25$), caos ($\tau=2,0$) e caos ($\tau=2,5$). Vemos através dessas simulações figuras semelhantes às experimentais da seção 2.2.2, as quais foram obtidas quando variamos um dos potenciômetros (funciona como resistor variável) do sistema.

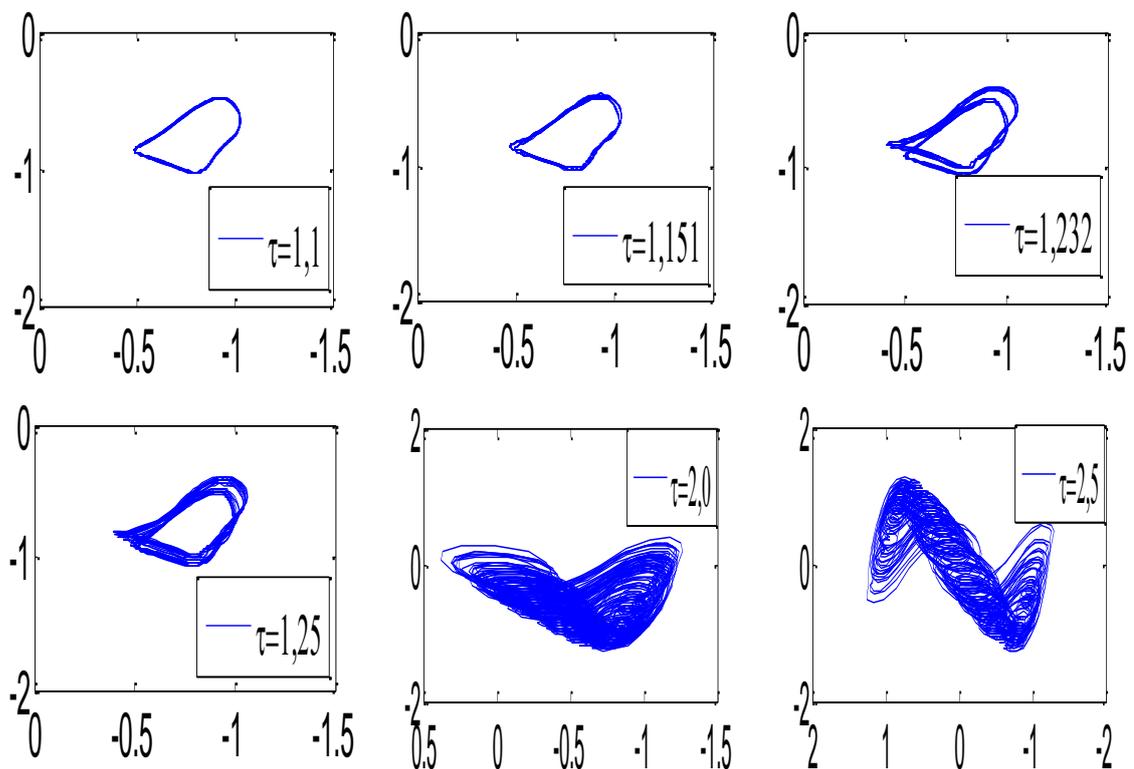


Figura 20: Uma das rotas de bifurcações do sistema. Passando de uma órbita de período T para $2T$, $4T$, multiperíódica, caos e caos. Simulações numéricas com eixos $x(t-\tau)$ e $x(t)$.

2.2.3 - Acoplamento de dois circuitos

Após comparar os estados do sistema, obtidos experimentalmente e numericamente, pudemos acoplar dois circuitos idênticos para sincronizá-los. Chamamos de idênticos dois circuitos descritos pela mesma equação e cujos componentes possuem valores nominais iguais. Nas Figuras 21 e 22 temos os

diagramas para fazer o acoplamento unidirecional (apenas um circuito recebe informações do outro) e o bidirecional (cada circuito recebe informações do outro).

O acoplamento é feito através de um sinal de erro criado através do bloco A (Figuras 21 e 22) e do bloco B (Figura 22), os quais realizam a subtração entre o sinal x do primeiro circuito e o sinal y do segundo circuito e depois amplificam o sinal de erro para podermos controlar a intensidade do acoplamento. Utilizamos o mesmo fator multiplicativo nos dois sinais de erro.

Nas Figuras 21 e 22, temos os circuitos representados em blocos. NL1 e NL2 são os blocos responsáveis pela não-linearidade dos circuitos, enquanto que os blocos ATRASOs são responsáveis por gerar a variável atrasada de cada circuito.

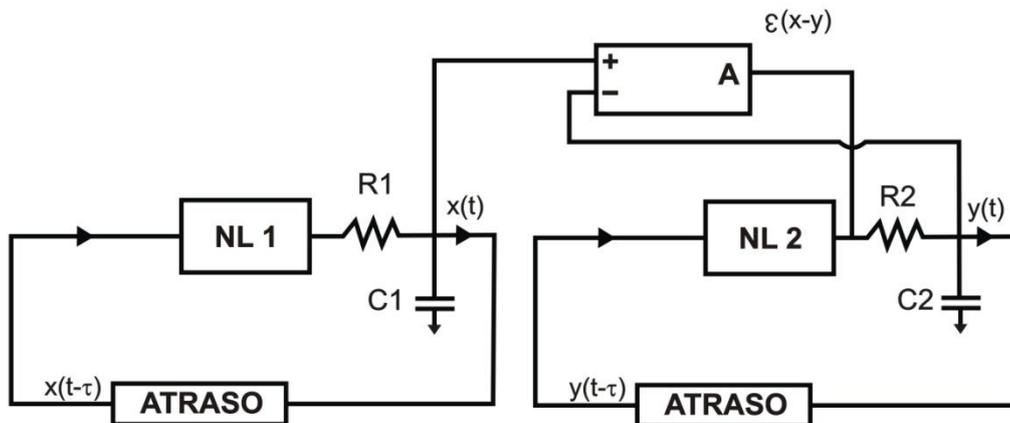


Figura 21: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos de primeira ordem com atraso temporal.

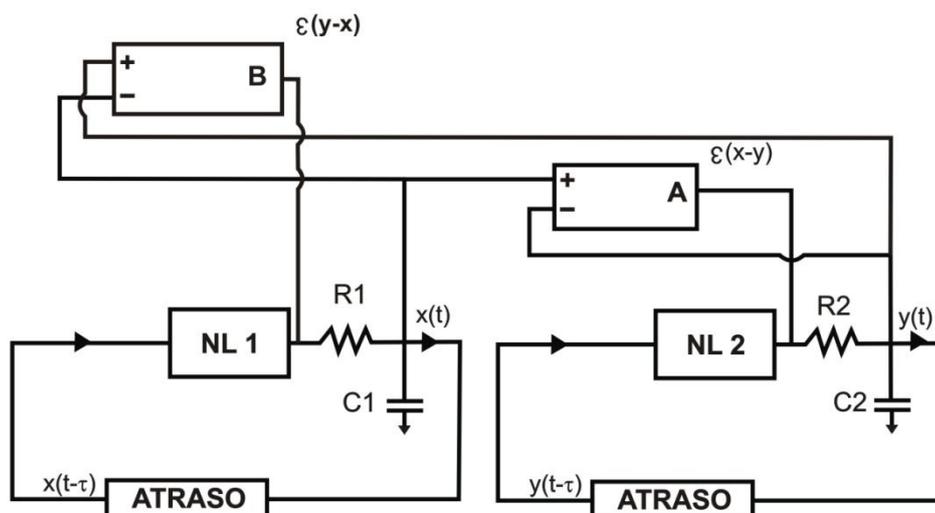


Figura 22: Diagrama do acoplamento bidirecional entre dois circuitos de primeira ordem com atraso temporal.

O sistema de equações que descreve a dinâmica dos dois circuitos acoplados unidirecionalmente está na Equação 41, e bidirecionalmente na Equação 42. Se desconsiderarmos o termo $\varepsilon(y - x)$ da equação para \dot{x} na Equação 42, os sistemas de equações para os acoplamentos unidirecional e bidirecional são os mesmos.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + b * f[x(t - \tau)] \\ \dot{y} &= -y + b * f[y(t - \tau)] + \varepsilon(x - y)\end{aligned}\quad (41)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + b * f[x(t - \tau)] + \varepsilon(y - x) \\ \dot{y} &= -y + b * f[y(t - \tau)] + \varepsilon(x - y)\end{aligned}\quad (42)$$

É importante ressaltar que a nomenclatura x e y apenas foi usada para diferenciar o sinal do primeiro circuito do sinal do segundo. x e y correspondem a variável de mesma natureza e são medidos nas mesmas posições em seus respectivos circuitos, na saída do filtro R_0C_0 .

Na Figura 23 estão apresentados os gráficos numérico e experimental das variáveis x e y , horizontal e vertical respectivamente. Para a mesma intensidade de acoplamento o sistema bidirecional está mais próximo do sincronismo do que o sistema unidirecional. Os dois circuitos operavam em regime caótico de forma independente (ou seja, quando estão desacoplados) e verificamos que eles operam nesse regime caótico quando fazemos o acoplamento e sincronismo entre eles.

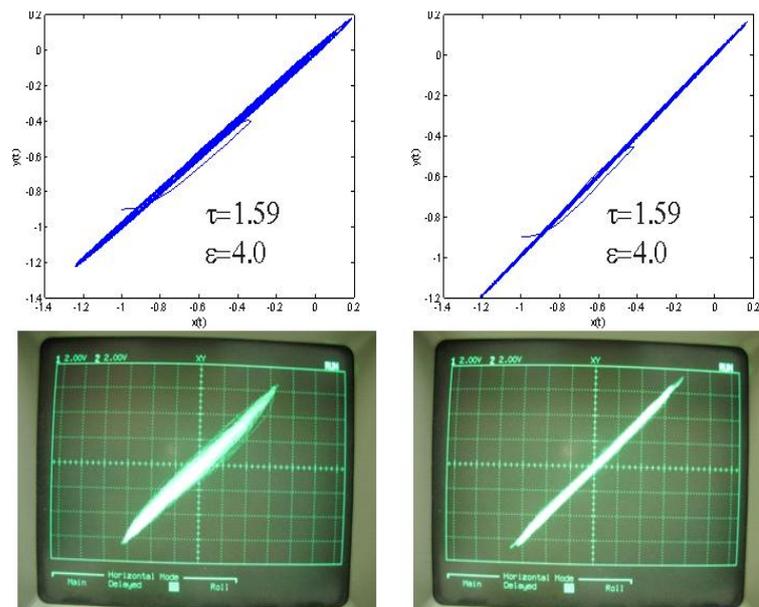


Figura 23: Simulações numéricas (acima) e fotografias da tela de um osciloscópio (abaixo). À esquerda o sistema está acoplado unidirecionalmente e a direita bidirecionalmente.

O sistema está completamente sincronizado quando obtemos uma linha diagonal fina, porém obtemos apenas algo muito próximo. Não foi atingido o sincronismo completo, pois a voltagem gerada pelo amplificador operacional que dá o sinal de erro já estava saturando os amplificadores, sendo assim não podemos aumentar o grau de sincronismo além do apresentado na Figura 23.

2.3 – Sistema de segunda ordem com bombeio externo

Depois de estudarmos um sistema descrito por uma equação diferencial de primeira ordem com atraso temporal decidimos estudar um sistema descrito por uma equação diferencial de segunda ordem. Escolhemos um circuito eletrônico que simula um oscilador harmônico e que possui um termo não-linear. Para a realização prática desse circuito nos baseamos no circuito apresentado em (Gonçalves & Neto, 2011).

A equação de 2ª ordem que rege o circuito esquematizado na Figura 24 pode ser transformada em duas equações diferenciais de primeira ordem. A seguir temos o conjunto de equações do circuito mestre, designados pelo subíndice d:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1d} &= -\frac{V_{1d}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2d})}{C_1} - \frac{V}{C_1} \text{sen}(\omega t) \\ \dot{V}_{2d} &= \frac{V_{1d}}{R_2 C_2} \\ t &= 1 \end{aligned} \tag{43}$$

A equação mede a variação temporal da tensão V_2 do circuito e é calculada no ponto S indicado no circuito (Figura 24), ao que atribuímos tensão 0 V. V_1 e V_2 são as tensões nas saídas dos dois amplificadores operacionais do circuito e estão ligados entre si. V_1 é a derivada de V_2 .

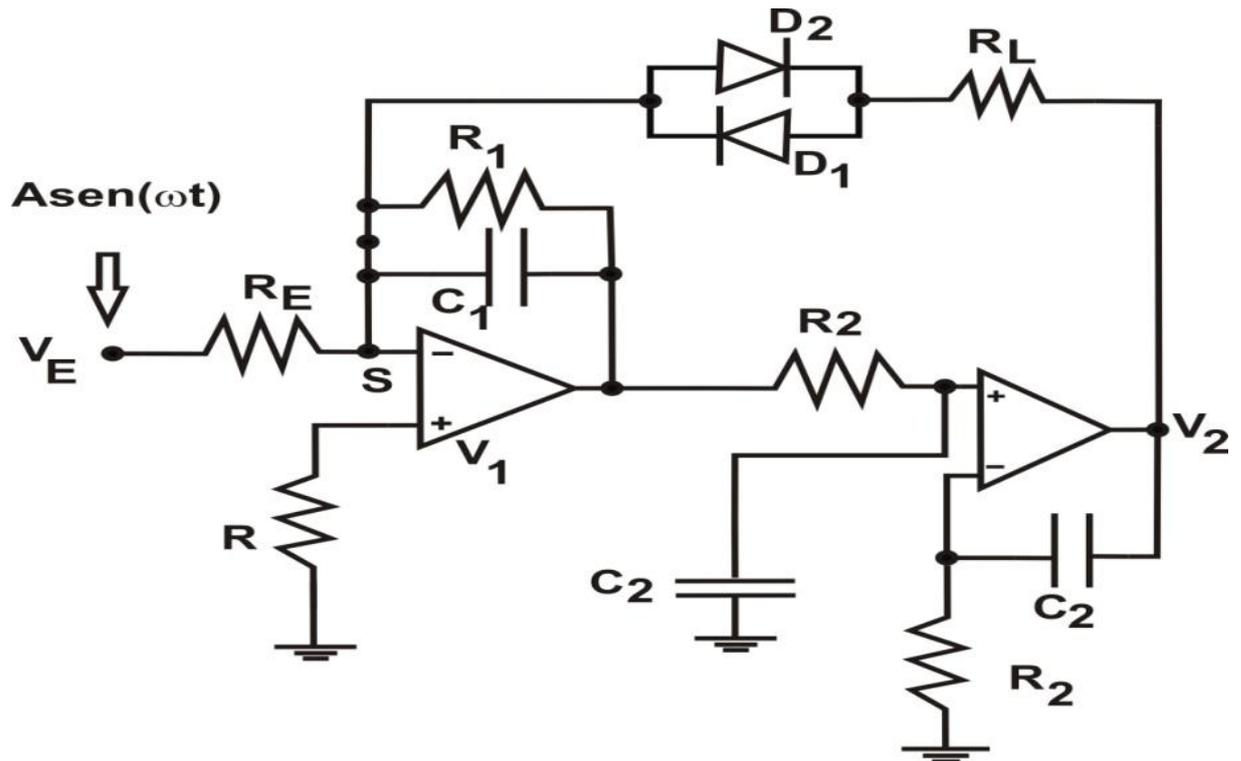


Figura 24: Diagrama de um circuito de segunda ordem com bombeio externo.

Na Figura 25 temos uma fotografia do circuito montado no nosso laboratório. Vemos então como o sistema é simples, embora as fontes de alimentação não estejam apresentadas, assim como não aparece o gerador de funções, responsável pelo bombeio externo.

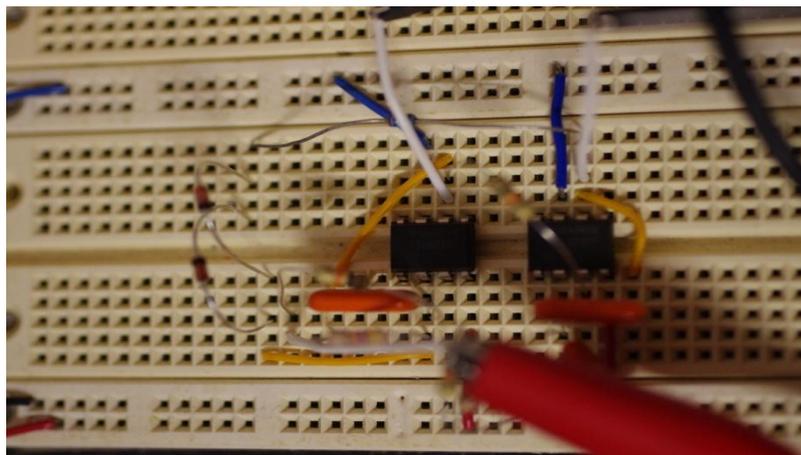


Figura 25: Fotografia de um circuito de segunda ordem com bombeio externo.

Os valores dos componentes do circuito são: $R_1 = 47 \text{ k}\Omega$, $R = R_2 = R_E = 10 \text{ k}\Omega$, $R_L = 0,51 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 10 \text{ nF}$, $D_1 = D_2 : 2\text{N}4148$ e os amplificadores operacionais são do tipo 741.

Para excitar o sistema utilizamos uma onda tipo seno e como no argumento do seno a variável tempo aparece explicitamente, nosso sistema é dependente do tempo e, portanto, não autônomo. Portanto, como a variável tempo aparece explicitamente na equação devemos tratá-la como as outras variáveis do sistema escrevendo para tanto uma equação diferencial de primeira ordem para o tempo (Hilborn, 1994), (Strogatz, 1994). Dessa forma, o sistema ganha uma dimensão a mais e torna-se tridimensional. Com isso ele pode apresentar comportamento caótico e não apenas periódico, como seria o caso se não houvesse a excitação externa, por um termo que depende explicitamente do tempo.

Como naquele da seção anterior, neste circuito os diodos também são os responsáveis pela não-linearidade do sistema, pois geram uma corrente linear por partes (ou não linear). A corrente não-linear $I(V_2)$ é dada por:

$$I(V_{2d}) = \begin{cases} \frac{(-0.7-V_{2d})}{R_L}, & \text{se } V_{2d} < -0.7 \\ 0, & \text{se } -0.7 < V_{2d} < 0.7 \\ \frac{(-0.7-V_{2d})}{R_L}, & \text{se } V_{2d} > 0.7 \end{cases} \quad (44)$$

O que nos resulta na resposta de corrente apresentada na Figura 26.

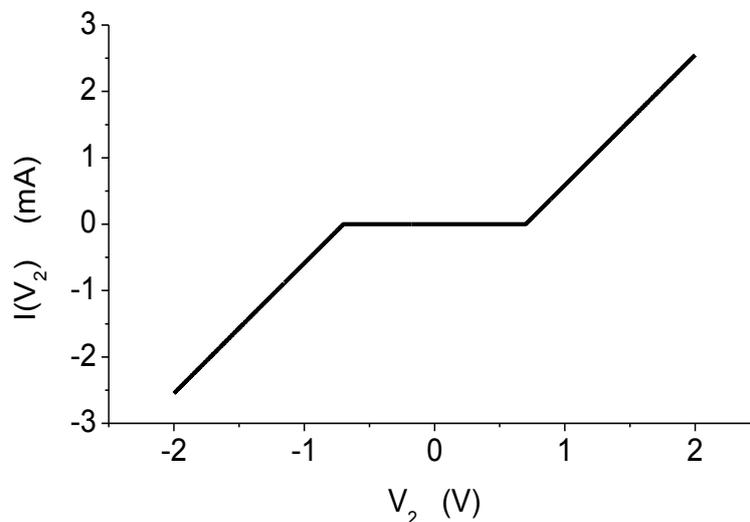


Figura 26: Corrente não-linear gerada a partir da Equação 44.

2.3.1 - Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados que obtemos ao estudar o circuito descrito por uma equação de segunda ordem com bombeio externo.

Podemos apresentar os estados dinâmicos do sistema através dos sinais de V_1 e V_2 . A Figura 27 é formada por fotografias da tela do osciloscópio, revelando duas rotas de bifurcações que se sucedem. Podemos obtê-las fixando-se a frequência do seno de excitação externa em 2 kHz e variando-se sua amplitude. Partimos de uma órbita de período T , passamos para uma órbita de período $2T$, $4T$, $8T$, multiperíódica (talvez caos), $6T$, $12T$, multiperíódica, caos e caos. A análise quantitativa de estados dinâmicos para determinar se estes são periódicos ou caóticos será feita na seção 3.1.3.

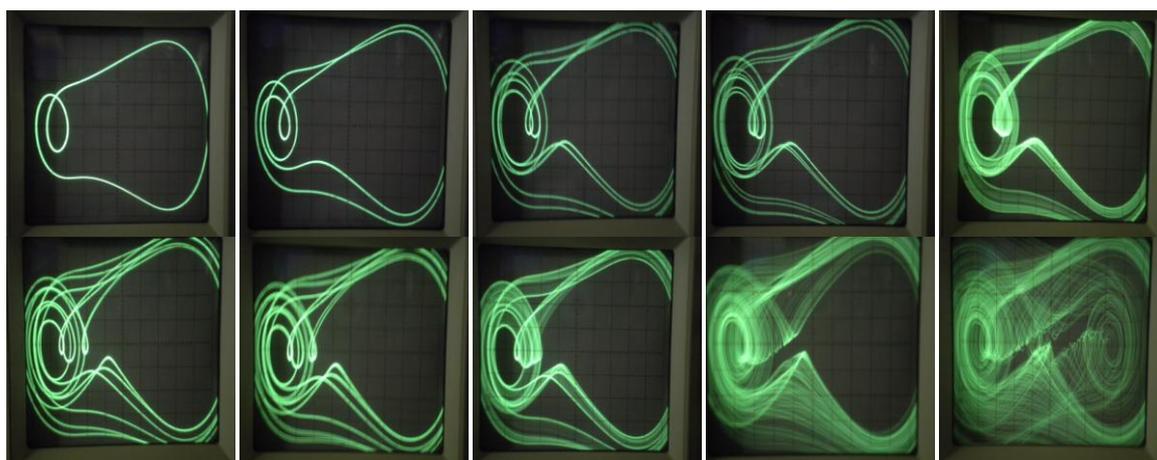


Figura 27: Rotas de bifurcação para o caos saindo de um estado de período T , passando por $2T$, $4T$, $8T$, multiperíódico (talvez caos), $6T$, $12T$, multiperíódico, caos, caos. Os eixos das fotografias são V_1 vs V_2 .

2.3.2 – Dois circuitos acoplados

Depois da observação de vários estados dinâmicos de um circuito, acoplamos dois circuitos por um sinal de erro, como podemos ver no diagrama da Figura 28 que mostra o segundo circuito, circuito resposta, com o amplificador operacional que gera o sinal de erro entre as tensões V_1 dos dois circuitos e introduz esse sinal no circuito resposta.

A equação do circuito resposta, que é idêntica à equação do circuito mestre, Equação 43, diferindo pelo termo de acoplamento do sistema, $(V_{1d} - V_{1r})/(R_{RE}C_1)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1r} &= -\frac{V_{1r}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2r})}{C_1} - \frac{V}{C_1} \text{sen}(\omega t) + \frac{(V_{1d} - V_{1r})}{R_{RE} C_1} \\ \dot{V}_{2r} &= \frac{V_{1r}}{R_2 C_2} \\ t &= 1 \end{aligned} \quad (45)$$

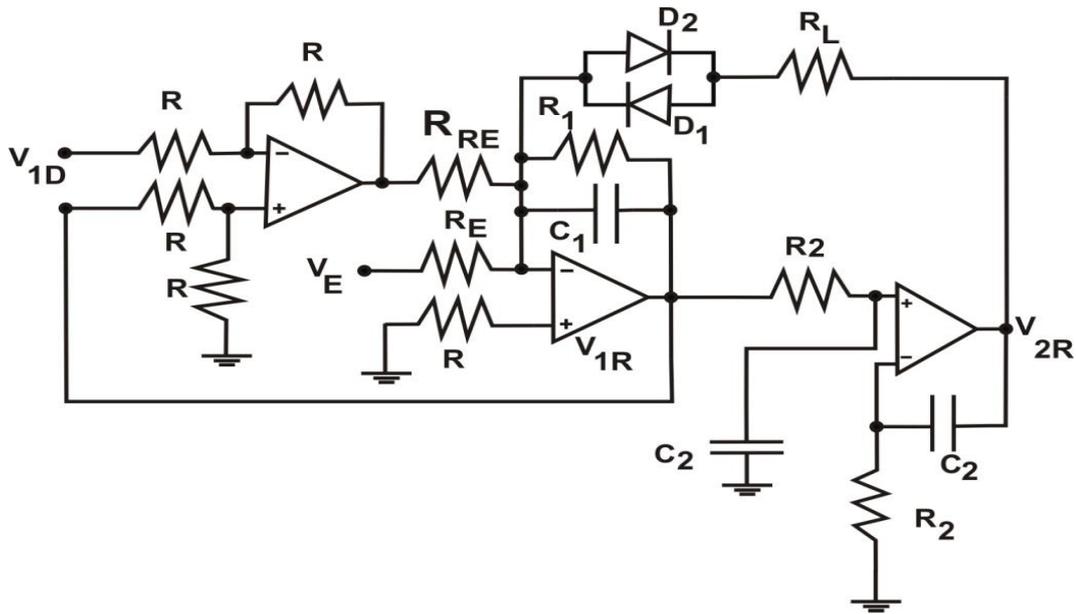


Figura 28: Diagrama do segundo circuito de segunda ordem com bombeio externo e como acoplá-lo com o primeiro, $V_{RE} = 470 \Omega$.

Na Figura 29 temos a fotografia da montagem dos dois circuitos acoplados.

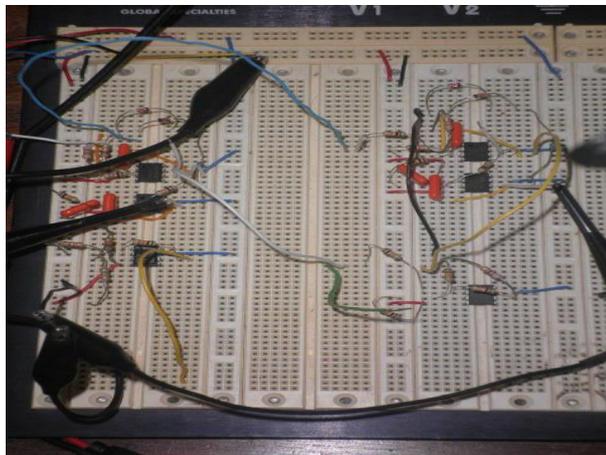


Figura 29: Fotografia de dois circuitos de segunda ordem com bombeio externo de um gerador de senos.

Na Figura 30 temos as fotografias da tela de um osciloscópio mostrando o estado de sincronismo entre os dois circuitos. Os eixos da fotografia da esquerda são V_{1d} e V_{1r} , horizontal e vertical, respectivamente e os eixos da direita são V_{2d} e V_{2r} . O subíndice d simboliza o primeiro circuito, circuito mensageiro ou mestre, e o subíndice r simboliza o segundo circuito, circuito resposta ou escravo. Os dois circuitos operavam em regime caótico de forma independente (ou seja, quando estão desacoplados) e verificamos que eles operam nesse regime caótico quando fazemos o acoplamento e sincronismo entre eles.

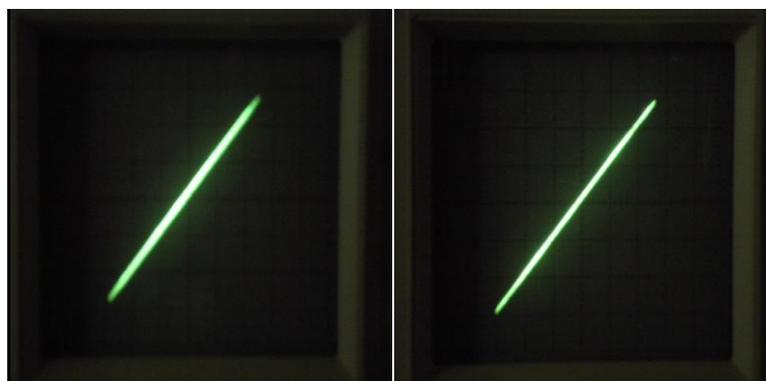


Figura 30: Fotografias da tela de um osciloscópio mostrando o estado sincronizado das respostas do sistema. V_{1d} e V_{1r} a esquerda e V_{2d} e V_{2r} a direita.

Com isso temos dois sistemas diferentes formados por circuitos eletrônicos simples e que podem exibir comportamento caótico: um descrito por uma equação diferencial de primeira ordem e com atraso temporal e outro descrito por uma equação diferencial de segunda ordem com bombeio externo.

Estabelecemos também sincronização ao acoplarmos dois circuitos idênticos.

No Capítulo 3, implementamos um circuito eletrônico descrito por uma equação diferencial de segunda ordem e com atraso temporal e o caracterizamos. Observamos e analisamos diversos estados dinâmicos exibidos por este circuito.

Capítulo 3 – Sistema de segunda ordem com atraso temporal

Neste capítulo, apresentaremos o sistema que implantamos para nossos estudos em dinâmica não-linear. Utilizamos um circuito eletrônico original descrito por uma equação não-linear, diferencial ordinária de segunda ordem com atraso temporal.

Escolhemos estudar este circuito, pois ele é relativamente simples, descrito por equações equivalentes as de um oscilador harmônico. Porém, ao contrário do apresentado em (Gonçalves & Neto, 2011) nosso circuito é autônomo (não utiliza força externa) com realimentação atrasada.

Como este circuito é descrito por uma equação de segunda ordem podemos explorar métodos para estabelecer comunicação, unidirecional ou bidirecional, entre osciladores não-lineares em regime caótico. A motivação dessa escolha vem do fato que mensagens escondidas em sinais caóticos em sistemas descritos por equações de segunda ordem são, em princípio, mais difíceis de serem decifradas (Ponomarenko & Prokhorov, 2002).

Podemos estudar acoplamento entre vários circuitos idênticos e analisar a natureza desses acoplamentos, determinando quantos circuitos podemos acoplar, de que forma e se existe algum tipo de sincronização entre os vários circuitos.

Um dos objetivos deste trabalho com sistemas acoplados é estudar a estatística de possíveis eventos raros que ocorrem quando a sincronização entre dois circuitos é perdida por um breve instante de tempo (o sistema busca, momentaneamente, outros ciclos limites) e depois retorna a seu estado inicial de sincronismo. Resultados preliminares desses estudos estão apresentados no próximo Capítulo 4 dessa dissertação.

Caracterizamos nosso circuito através de medidas diretas de sinais, observando a saída de circuitos em um osciloscópio e usando simulações

numéricas. Análises mais quantitativas são obtidas através do estudo do espectro de potência a partir da transformada de Fourier e do cálculo do maior expoente de Lyapunov para mostrarmos que o sistema apresenta estados de oscilação caóticos.

Estudamos também o acoplamento entre dois circuitos idênticos, caracterizando o sincronismo entre eles através da função de correlação.

3.1- Um circuito oscilador não-linear

Um sistema não-linear descrito por uma equação com atraso temporal pode apresentar qualquer tipo de estado dinâmico (Farmer, 1982). Porém com a motivação inicial de possíveis estudos de comunicação segura através de sistemas caóticos resolvemos estudar um circuito descrito por uma equação de segunda ordem. Esta pode ser dividida em um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem com atraso temporal.

$$\begin{aligned}\dot{V}_{1d} &= -\frac{V_{1d}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2d})}{C_1} - \frac{V_{2d}(t-\tau)}{R_E C_1} \\ \dot{V}_{2d} &= \frac{V_{1d}}{R_2 C_2}\end{aligned}\quad (46)$$

Onde o termo $I(V_{2d})$ que representa a corrente linear por partes, tornando o sistema desta forma não-linear, é dado por:

$$I(V_{2d}) = \begin{cases} \frac{(-0.7-V_{2d})}{R_L}, & \text{se } V_{2d} < -0.7 \\ 0, & \text{se } -0.7 < V_{2d} < 0.7 \\ \frac{(+0.7-V_{2d})}{R_L}, & \text{se } V_{2d} > 0.7 \end{cases}\quad (47)$$

Essa corrente $I(V_{2d})$ está representada na Figura 31.

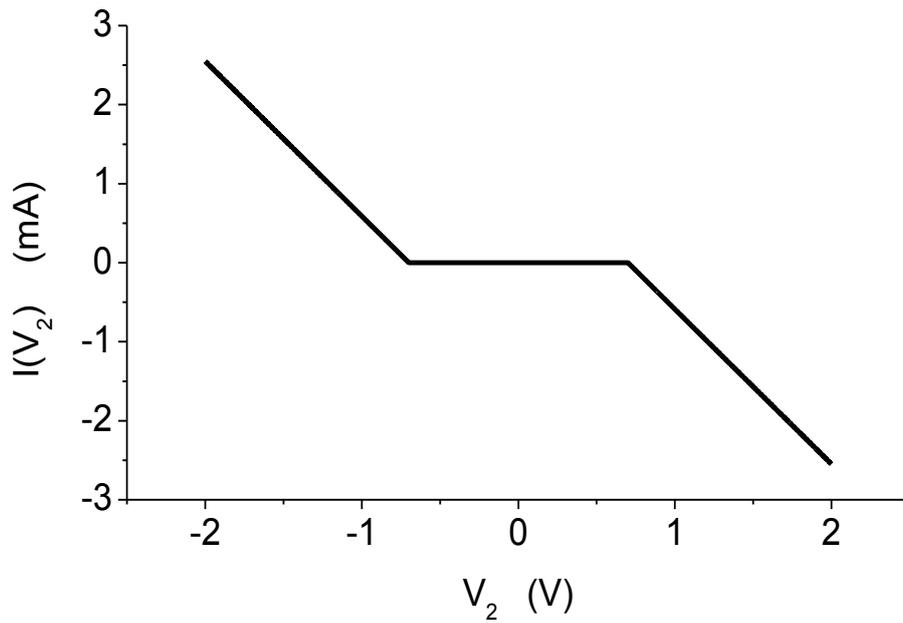


Figura 31: Corrente não-linear gerada a partir da Equação 47.

As variáveis dinâmicas apresentadas na Equação 46 representam as tensões de saída, V_1 e V_2 dos amplificadores operacionais 1 e 2 da Figura 32, onde apresentamos o diagrama do circuito de segunda ordem com atraso temporal.

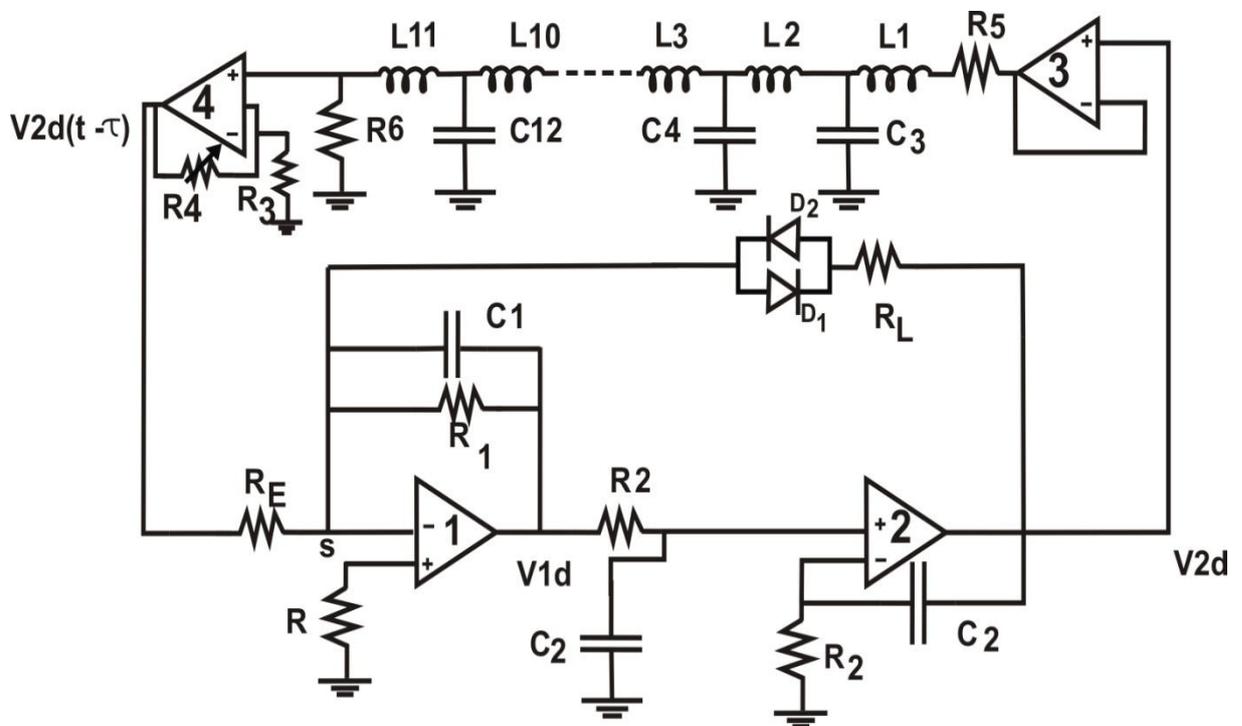


Figura 32: Diagrama de um circuito oscilador não-linear descrito por uma equação diferencial de segunda ordem com atraso temporal.

Nosso circuito é composto por resistores, capacitores, indutores, diodos e amplificadores operacionais em configuração que são descritos pelas Equações 46-47. Os valores dos componentes utilizados no circuito são: $R_1 = 47 \text{ k}\Omega$, $R = R_2 = R_E = 10 \text{ k}\Omega$, $R_L = 0,51 \text{ k}\Omega$, $R_5 = R_6 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_4 \leq 20 \text{ k}\Omega$ (potenciômetro), $L_i = 12 \text{ mH}$ ($i = 1; 2; \dots; 11$), $C_i = 470 \text{ nF}$ ($i = 3; 4; \dots; 12$), $C_1 = C_2 = 10 \text{ nF}$, $D_1 = D_2 : 2N4148$ e os amplificadores operacionais são do modelo 741.

Como naqueles circuitos das Seções 2.2 e 2.3, os diodos, D_1 e D_2 , são os responsáveis pela não-linearidade do sistema, pois geram a corrente linear por partes apresentada na Figura 31, uma vez que só permitem a passagem de corrente quando a diferença de potencial entre seus terminais é maior que $|0,7 \text{ V}|$, caso contrário a corrente é nula.

Escrevemos a equação para o circuito da Figura 32 analisando a corrente que atravessa a entrada negativa do amplificador operacional 1.

Como já foi discutido na Seção 2.2, a linha de indutores e capacitores (filtro LC) gera o termo de atraso, $V_2(t-\tau)$, com isso o sistema tem infinitas dimensões e assim pode apresentar qualquer tipo de comportamento dinâmico: ponto fixo, ciclo limite ou caos (Farmer, 1982).

A linha de filtros LC⁴ do circuito (Figura 32) que é responsável por gerar a variável atrasada é formada inicialmente por um amplificador operacional funcionando como um tampão para evitar que os filtros LC interfiram na parte anterior do circuito. Depois do tampão temos um resistor para gerar a corrente que vai alimentar os indutores e capacitores. No final temos outro amplificador operacional que funciona como amplificador, pois o sinal de saída é menos intenso que o de entrada, devido aos filtros LC que não funcionam simplesmente como retardadores, funcionando também como atenuadores do sinal.

Adquirindo uma série experimental contendo o sinal entrada $V_{2d}(t)$ e o de saída $V_{2d}(t-\tau)$ podemos medir o valor efetivo do tempo de atraso do circuito sem precisar medir o valor exato da indutância de cada indutor e da capacitância de cada capacitor, uma vez que na prática os componentes eletrônicos apresentam valores que diferem dos valores nominais de capacitância e indutância dentro de uma margem de erro estabelecido pelo fornecedor dos componentes.

⁴ Mais detalhes sobre o filtro LC são apresentados no Apêndice desta dissertação.

As Figuras 33 e 34 mostram os sinais experimentais $V_2(t)$ e $V_2(t-\tau)$ em função do tempo. Essas séries temporais foram adquiridas experimentalmente para verificar qual o efeito real dos filtros LC no sinal $V_2(t)$.

O sinal $V_2(t)$ foi medido após o amplificador tampão (Figura 32), e o sinal atrasado $V_2(t-\tau)$ foi medido na entrada do amplificador 4 (Figura 32). Nas Figuras 33 e 34 temos as séries temporais de dois estados dinâmicos diferentes do sistema, em que o sinal $V_2(t-\tau)$ foi multiplicado por um fator 4 para ter uma amplitude similar a de $V_2(t)$ e este foi transladado temporalmente em $900 \mu\text{s}$, da mesma ordem do tempo de atraso dado por $\tau = 10\sqrt{LC} = 10(10 \cdot 10^{-3} \cdot 470 \cdot 10^{-9})^{\frac{1}{2}} = 685,56 \mu\text{s}$. Nessas figuras vemos que o efeito de atraso dos filtros LC é acompanhado de atenuação e uma pequena distorção embora a fase do sinal de entrada seja preservada.

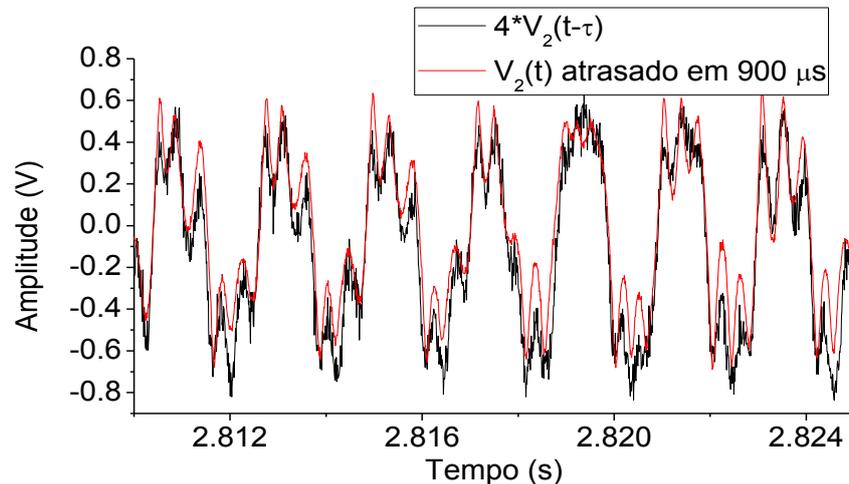


Figura 33: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900 \mu\text{s}$ e $4 \cdot V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.

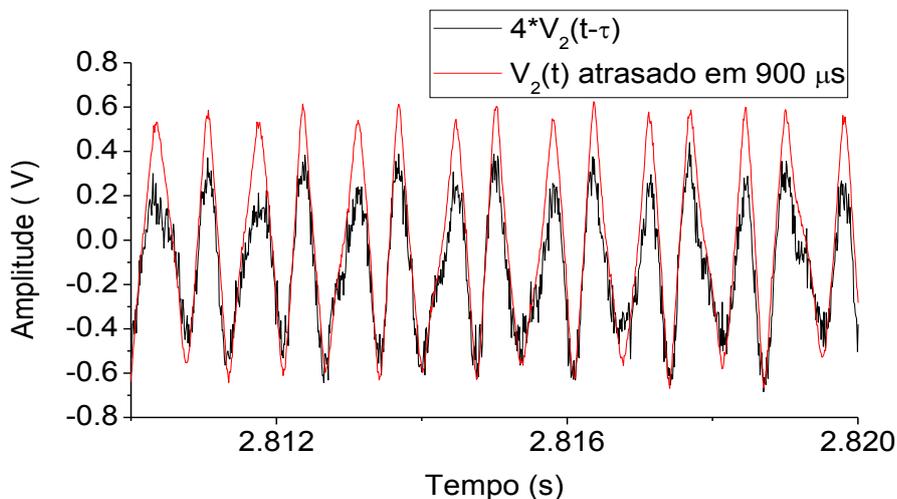


Figura 34: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900 \mu\text{s}$ e $4 \cdot V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.

Podemos modificar o estado dinâmico do sistema de diversas formas, dentre elas, variando-se o ganho da variável atrasada $V_2(t-\tau)$ ou variando-se o tempo de atraso, τ . Variamos o ganho da variável atrasada $V_2(t-\tau)$ regulando-se o valor do potenciômetro R_4 ou o valor do resistor R_E . Variamos o tempo de atraso, τ , colocando/retirando filtros LC ou modificando o valor dos capacitores e indutores.

3.1.1 – Resultados Experimentais

Montamos nosso circuito autônomo para verificar experimentalmente a existência de estados caóticos. Mesmo sendo descrito por uma equação diferencial de segunda ordem, que permite apenas soluções do tipo pontos fixos ou periódicas, esperamos obter soluções caóticas, pois existe um termo composto por uma variável atrasada em nosso sistema (Farmer, 1982).

Mantendo o tempo de atraso do circuito fixo em $900 \mu\text{s}$ e variando o ganho da variável atrasada através do potenciômetro R_4 ou do resistor R_3 , obtemos diversos estados dinâmicos do sistema, dentre eles os apresentados na Figura 35:

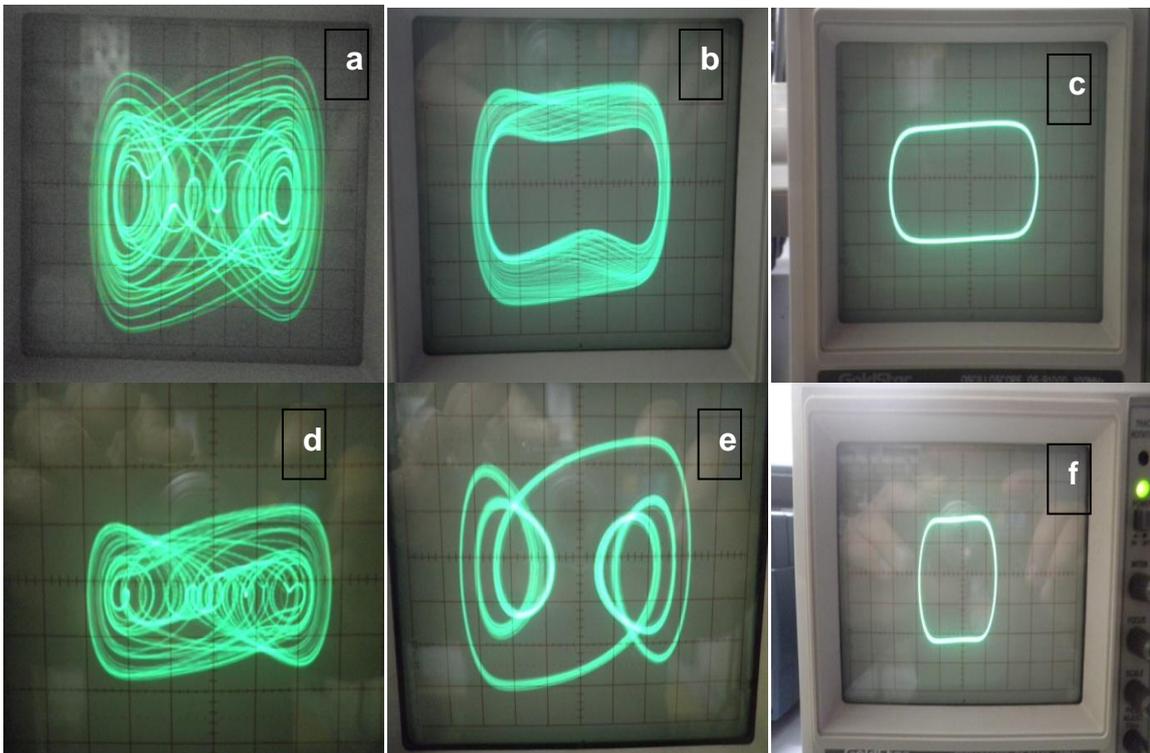


Figura 35: Estados do sistema de segunda ordem com atraso temporal, com eixos $V_2(t)$ vs $V_1(t)$.

Observando-se os estados da Figura 35 percebemos que os presentes nas fotos 35.c, 35.e, 35.f são periódicas, enquanto que os presentes em 35.a, 35.b, 35.d têm um comportamento mais complexo. Entretanto não é possível dizer, apenas observando-se as fotografias, se nestes o comportamento é caótico ou periódico.

Na Seção 3.1.3, utilizando-se outros seis estados dinâmicos do sistema, são feitas duas análises para cada série temporal adquirida, a transformada de Fourier e o cálculo do maior expoente de Lyapunov, para determinar se determinado estado é caótico ou periódico. Antes, porém apresentamos na seção seguinte resultados de simulações numéricas das Equações 46-47.

3.1.2 – Simulações numéricas

Podemos comparar os resultados experimentais da Seção anterior com simulações numéricas. Veremos que os resultados numéricos corroboram os experimentais, pois exibem a mesma variedade de estados dinâmicos observados experimentalmente.

Nossas simulações foram feitas mantendo-se fixos todos os parâmetros das Equações 46-47 e variando-se apenas o tempo de atraso, τ . Para realizamos nossas simulações numéricas, utilizamos uma variável tempo adimensional. Normalizamos o tempo (medido em segundos) pela escala de tempo dada pelo produto R_2C_2 .

As linhas de código utilizadas para realizar as simulações numéricas da Equação 46 está escrito para o MatLab[®] e foi baseado, como na Seção 2.2, no exemplo 7 de (Thompson & Shampine, 2000), pois a equação depende do valor de uma das variáveis.

```
function sol = mm2o_dde
% exam7, exam7f, exam7e 7of tutorial.
% reproduzimos as figuras 3 do artigo
tau=6.45;
tfim=20;
ganho=1;
opts = ddeset('RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-9,'Events',@exam7e);
sol = dde23(@exam7f,tau,[1.0, -1.0],[0, tfim],opts);
while sol.x(end) < tfim
    fprintf('Restart at %5.1f.\n',sol.x(end));
    sol = dde23(@exam7f,tau,sol,[sol.x(end), tfim],opts);
end
```

```

end

%
figure(1);
plot(sol.x, sol.y(1,:), sol.x, sol.y(2,:)); %séries temporais

y1=sol.y(1,:);
y2=sol.y(2,:);
title('um circuito');
xlabel('tempo');
ylabel('y1(t) & y2(t)');

figure(2);
plot(sol.y(2,:), sol.y(1,:));
title('um circuito');
xlabel('y2(t)');
ylabel('y1(t)');

save circ_usp_g1.mat ganho tau sol;

%=====
%=====
function yp = exam7f(t,y,Z)
xstar = 0.7;
R1=47E3;
R2=10E3;
RL=510;
RE=10E3;
C1=12E-9;
C2=12E-9;
ganho=1.0;
a1 = (R2*C2)/(R1*C1);
a2=(R2*C2)/C1;
a3=ganho*(R2*C2)/(C1*RE);
%
ID = 0.0;
V2 = y(2);
ylag = Z(:,1);
%v
if ( V2 < -xstar)
    ID = (-0.7-y(2))/RL;
elseif (V2 > xstar)
    ID = (+0.7-y(2))/RL;
end
%
yp = [ -a1*y(1) + a2*ID - a3*ylag(2)
      y(1) ];

%=====
function [value,isterminal,direction] = exam7e(t,y,Z)
xstar = 0.7;
value = [y(2) + xstar; y(2) - xstar];
isterminal = [1;1];
direction = [0;0];

```

As simulações numéricas para um único circuito apresentadas nos gráficos da Figura 36 são formadas pelos valores de V_2 , eixos horizontal, e de V_1 , eixo vertical. O valor do tempo de atraso normalizado está rotulado em cada simulação. Na Figura 36 temos estados dinâmicos equivalentes aos da Figura 35.

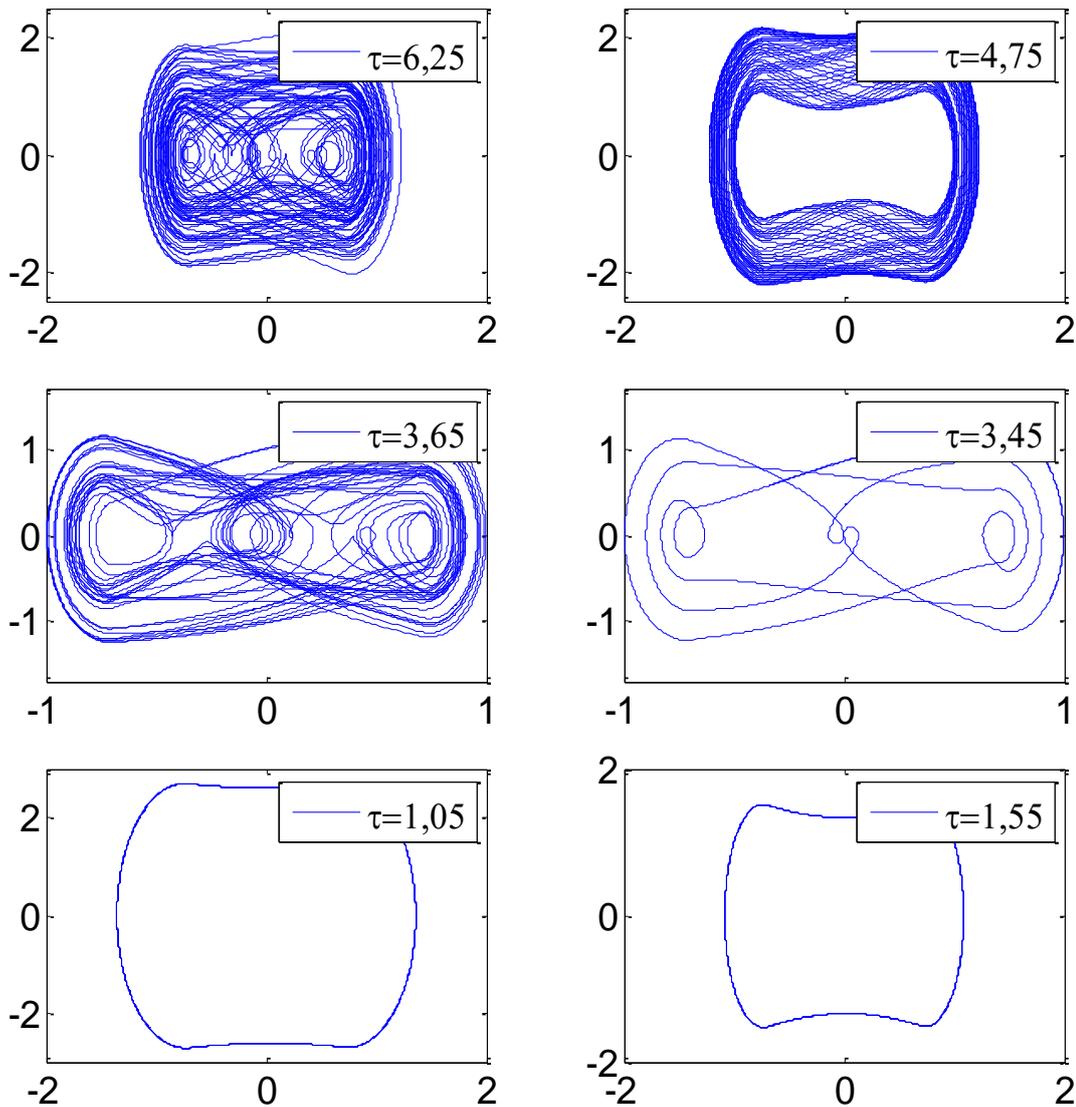


Figura 36: Simulações numéricas para um circuito variando apenas o atraso temporal. Os eixos das simulações são $V_2(t)$ vs. $V_1(t)$.

Ainda não é possível identificar se um estado é periódico ou caótico observando-se apenas uma fotografia de um sistema experimental (Figura 35) ou o gráfico de uma simulação (Figura 36). É necessário utilizar métodos quantitativos de análise. Por exemplo, utilizando-se o espectro de potências dado pela transformada de Fourier de séries temporais adquiridas de nosso experimento e o cálculo do maior expoente de Lyapunov.

Realizamos essas duas análises para diversos estados do nosso sistema. Obter o espectro de Fourier de um série experimental é simples e comum em laboratórios de pesquisa. Porém, essa técnica nem sempre é precisa na detecção de estados caóticos. A presença de ruído introduz incertezas na análise de aquisições experimentais de um osciloscópio digital. Calculando-se o maior expoente de Lyapunov temos uma medida quantitativa de que o sistema é realmente caótico ou não.

3.1.3 – Análise experimental

Nesta seção vamos utilizar duas técnicas para determinar se dado estado é periódico ou caótico. Na subseção 3.1.3.1 utilizamos a Transformada de Fourier e na subseção 3.1.3.2 utilizamos o cálculo do maior expoente de Lyapunov.

Na Figura 37 temos imagens das órbitas de diferentes estados do sistema, que podem ser periódicos ou caóticos, e que foram analisados:

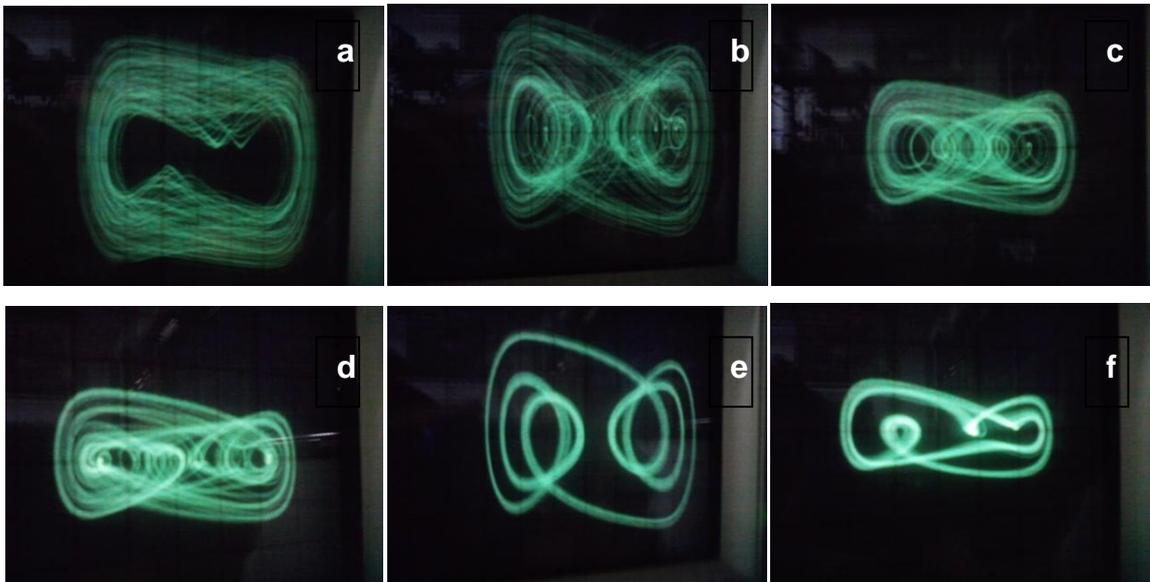


Figura 37: Fotografias da tela de um osciloscópio dos diferentes estados analisados.

Quando adquirimos algum sinal, devemos tomar cuidado com a taxa de amostragem, pois o valor dessa taxa depende do período de oscilação do sinal. Se for utilizada uma taxa muito baixa não será possível recuperar corretamente a forma

do sinal adquirido e se for alta, a aquisição terá pontos muito próximos temporalmente e assim os efeitos do ruído comprometerão a qualidade do sinal obtido após a aquisição. Na Figura 38 temos os mesmos atratores da Figura 37 obtidos ao fazermos um gráfico entre as variáveis V_2 vs V_1 a partir de séries experimentais adquiridas dos circuitos através de um osciloscópio digital. As aquisições das séries experimentais foram realizadas a uma taxa de 50 mil amostragens por segundo. Fizemos aquisições a essa taxa, pois a faixa de frequências de oscilação do sistema se estende até aproximadamente 12 kHz. Sabemos pelo Teorema de Nyquist (Openheim, Willsky, & Nawab, 1996) que para adquirir corretamente séries experimentais devemos usar uma taxa de aquisição ao menos duas vezes maior que a maior frequência de oscilação do sistema. No caso utilizamos uma taxa cerca de duas vezes maior que a mínima necessária para obtermos maior resolução nos sinais adquiridos. Entretanto a taxa de aquisição não pode ser muito elevada, pois nesse caso o sinal adquirido será distorcido por ruído.

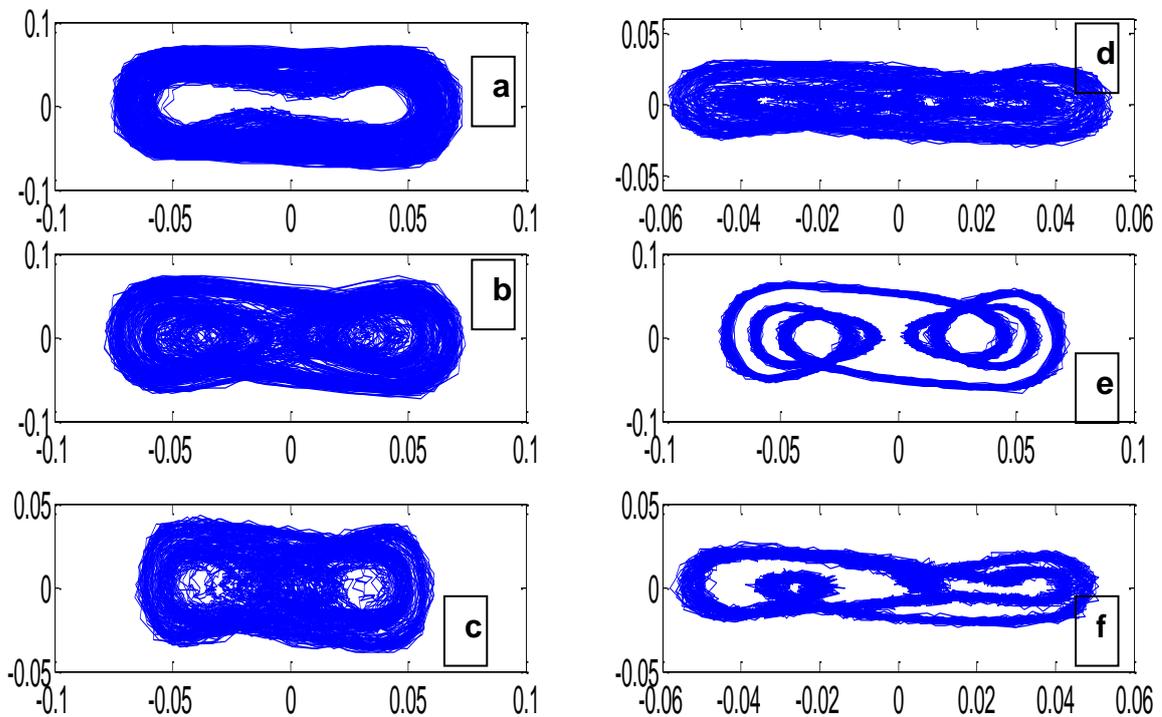


Figura 38: Atratores construídos a partir das aquisições experimentais dos respectivos estados da Figura 45.

Nas seções 3.1.3.1 e 3.1.3.2, analisaremos se estados são periódicos ou caóticos.

3.1.3.1 – Espectro de potências: Transformada de Fourier

Como visto na seção 1.3.1.1, através da transformada de Fourier podemos identificar se um sistema está, ou não, em regime periódico. Buscando reconhecer estados caóticos de nosso sistema, utilizamos essa técnica para analisar os sinais experimentais que adquirimos de nosso circuito. Através da transformada de Fourier, descobrimos qual a faixa de frequências de oscilação do sistema e se possui apenas componentes discretas de frequência (estado periódico) ou se possui bandas largas de frequência (estado caótico).

Como utilizamos séries temporais experimentais para essa análise, temos nelas a presença de ruído que é representado por uma faixa contínua em todo o espectro de frequências que localiza-se em torno de 0 dB como podemos ver na Figura 39. O eixo vertical na Figura 39 representa $20\log(|Y|)$, medido em dB, onde Y é a transformada de Fourier. O eixo horizontal representa as frequências.

Primeiro analisamos o espectro em uma escala de frequências grande o suficiente para que este, a partir de determinada frequência, seja formado apenas pelo ruído, o que nos dá a certeza de que adquirimos corretamente as séries. Analisamos em seguida se acima do nível de ruído o espectro é composto apenas por picos discretos, que caracterizam as frequências de oscilação do sistema; ou por bandas largas de frequências, nesse caso garantindo que a banda inteira está acima do nível de ruído.

Na Figura 39, temos os espectros de potências dos seis estados exibidos na Figura 37, truncados em 20 kHz. Nos espectros 39.e e 39.f observamos picos discretos de frequência, caracterizando os estados como periódicos. Nos espectros 39.a, b e c observamos picos largos que indicam estados caóticos, entretanto é necessário reduzirmos a faixa de observação de frequências para podermos ter certeza que os picos largos são contínuos, e não constituídos por picos discretos muito próximos.

O espectro 39.d apresenta picos discretos de frequências em cima de um pico largo, dificultando a definição do estado entre periódico ou caótico. Com exceção do espectro da Figura 39.e, que apresenta picos discretos aproximadamente na frequência de 15 kHz, todos os espectros da Figura 39 a partir

de 12 kHz são formados apenas por uma barra larga em torno de 0 dB que representa o ruído. Desta forma garantimos que as séries experimentais foram adquiridas corretamente, pois os espectros decaem até o nível de ruído.

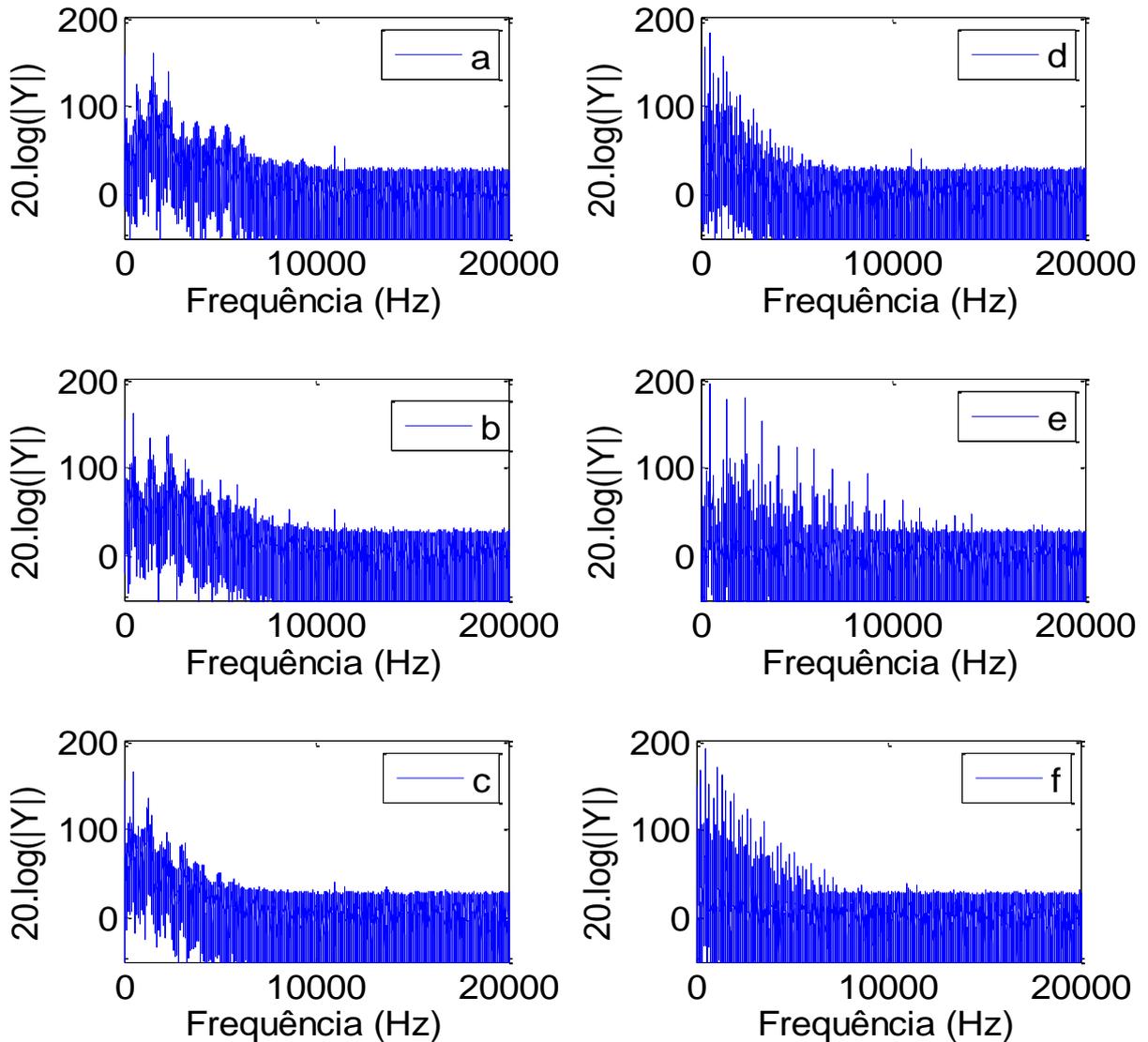


Figura 39: Espectro de Potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 20 kHz.

Depois de identificarmos que as séries estão corretamente adquiridas, analisamos e ampliamos as imagens (Figuras 40 e 41) para se ter certeza que os espectros com picos largos são realmente largos, caracterizando estados caóticos ou se na verdade são compostos por inúmeros picos discretos, caracterizando estados periódicos.

Na Figura 40 temos os espectros de potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 7 kHz.

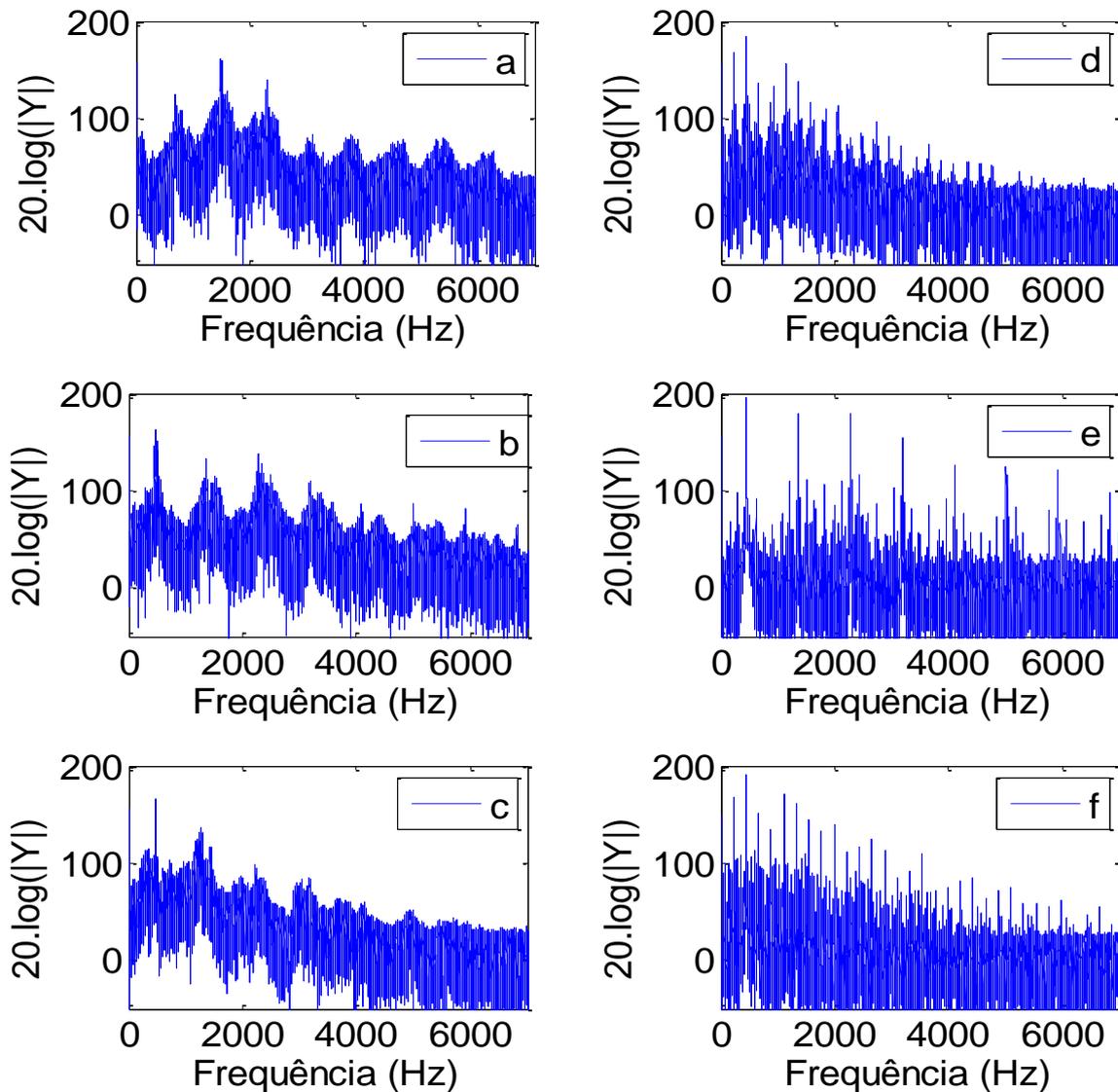


Figura 40: Espectro de Potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 7 kHz.

Percebemos nos espectros 40.a, b e c que os picos largos continuam acima do nível de ruído que vemos na Figura 39, indicando que os mesmos devem ser contínuos. Os espectros 40.e e f estão no mesmo nível do ruído e são formados por alguns picos discretos. O espectro 40.d continua exibindo um pico largo acima do nível de ruído e picos discretos em cima do pico largo, indicando um estado de caos fraco.

Na Figura 41 temos os espectros de potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 700 Hz.

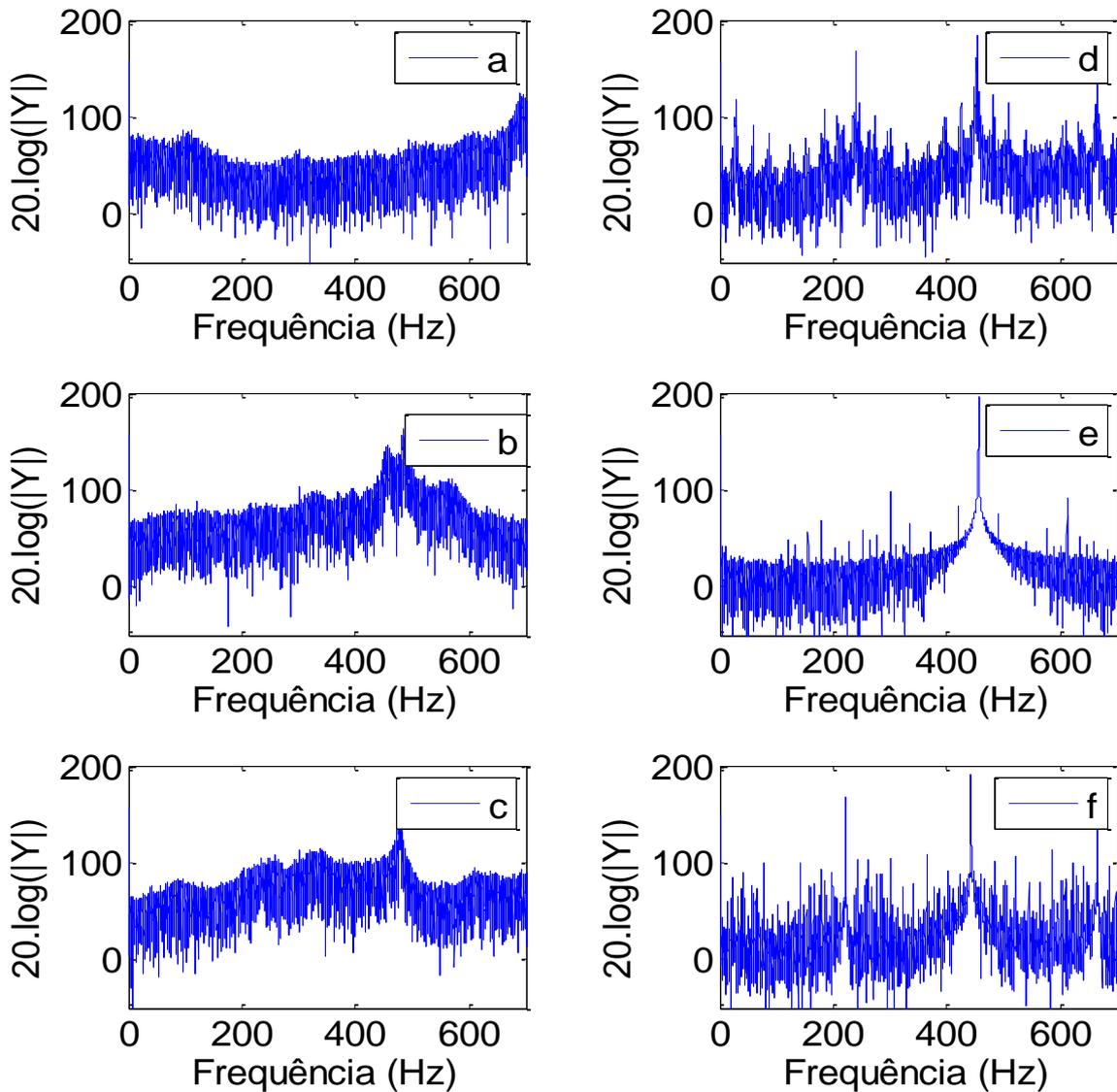


Figura 41: Espectro de Potência dos vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente) truncados em 700 Hz.

Nos espectros a, b e c da Figura 41 confirmamos que os picos são contínuos, ou seja, esses espectros são formados por sinais de estados caóticos.

O espectro 41.d representa um meio termo entre um pico largo acima do nível de ruído e um espectro formado por vários picos discretos, o que dificulta sua caracterização entre periódico e caótico. Os espectros 41.e e f são periódicos, pois são formados por vários picos discretos de frequência.

A seguir temos as linhas de código (escritas para MatLab[®]) utilizadas para calcular o espectro de potência dos sinais do circuito.

```

clear all
format long e
dados=csvread('2.csv',0,0);
tempo=dados(:,1);
v1=dados(:,2);
    ponto_final=length(tempo);
tempo_curto=tempo(1:ponto_final);
v1_curto=v1(1:ponto_final);
% ftrans_v1 -> faz a transformada de fourier de v1
y=v1;
N=ponto_final; % numero de pontos
fs=1/(tempo(2)-tempo(1)); % taxa de amostragem
Y=fftshift(fft(y));
f=[-1:2/N:1-1/N]*fs/2; % frequencias de Y
yinv=ifft(fftshift(Y)); % faz a fft inversa para testar
figure(1);
subplot(211);
plot(tempo_curto,y);
title('medida direta de v1');
subplot(212);
plot(tempo_curto,yinv);
title('v1=inversa da FT de v1 medido');
figure(2);
plot(f,abs(Y));
axis([-50000 50000 0 1000]);
title('Transf. Fourier');
figure(3);
plot(f,log(abs(Y)));
axis([-100000 100000 -3 10]);

```

Através do método da transformada de Fourier identificamos estados periódicos do sistema e também identificamos prováveis estados caóticos. Desta forma devemos utilizar outro método de análise para determinar quantitativamente se um estado do sistema é periódico ou caótico. O cálculo do maior expoente de Lyapunov é o método que utilizamos a seguir. Na próxima seção fazemos uma pequena apresentação dessa técnica de análise.

3.1.3.2 – Cálculo do maior expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov mede a convergência, ou a divergência, de trajetórias inicialmente próximas, durante suas evoluções temporais. Um sistema não-linear tem um expoente de Lyapunov para cada uma de suas variáveis dinâmicas, entretanto, como dito na seção 1.3.2.1, precisamos apenas calcular o maior expoente, pois se este for positivo o sistema está em regime caótico e, caso contrário, temos regime não caótico.

Quando trabalhamos com sistemas reais nem sempre temos acesso a todas as suas variáveis e, portanto foi necessário desenvolver um método que possa extrair, de uma única variável acessível do sistema, todas as informações dinâmicas

do mesmo (Takens, 1981). Através das séries experimentais adquiridas, criamos um vetor que pode ser composto por uma ou várias coordenadas (Kennel, Brown, & Abrabanel, 1992). Essas coordenadas são os pontos das séries adquiridas e são igualmente espaçadas temporalmente. Dessa forma devemos calcular primeiro a dimensão de imersão do sistema (número de coordenadas do vetor gerado a partir das séries temporais) para saber o tamanho mínimo que devemos aplicar ao vetor.

Na Figura 42 temos um gráfico mostrando o resultado do cálculo da dimensão de imersão do sistema para cada um dos seis estados da Figura 45. Como a dimensão de imersão é definida sendo a qual a razão entre falsos e verdadeiros vizinhos mais próximos vai a zero, podemos afirmar que considerar a dimensão de imersão sendo 3 ou 4 para todos os seis estados é aceitável. Embora sistemas com termos que dependem do passado possuam dimensão infinita, seus atratores geralmente não necessitam da mesma quantidade de dimensões para serem caracterizados. A dimensão de imersão nos diz a dimensão mínima que devemos utilizar para caracterizar o atrator e não a dimensão do sistema.

Calculada a dimensão de imersão para cada estado do sistema, podemos calcular o maior expoente de Lyapunov para cada estado do sistema e assim afirmar, quantitativamente, se determinado estado do sistema é periódico ou caótico. Note que nós não estamos interessados em definir qual é o valor do expoente, mas apenas seu sinal. Se este for positivo nosso sistema esta em regime caótico, caso contrário, não. Realizamos o cálculo do maior expoente de Lyapunov (Wolf, Swift, Swinney, & Vastano, 1985) para dimensões de imersão 3, 4, 5 e 6. Calculamos como duas trajetórias inicialmente próximas evoluem (se afastando, aproximando ou mantendo à mesma distância). Realizamos esse cálculo através de todos os vetores gerados a partir das séries adquiridas e após isso fazemos a média do logaritmo da distância entre duas trajetórias inicialmente próximas.

Na Figura 43 temos os gráficos para cada um dos seis estados da Figura 37. Na vertical temos a média do logaritmo da distância, e na horizontal o tempo de evolução da distância. Cada gráfico apresenta o resultado para as dimensões de imersão 3, 4, 5 e 6 e uma legenda mostrando a cor de cada curva no gráfico referente a cada dimensão de imersão. Nas Figuras 43.a, b e c percebemos que a média da evolução da distância entre duas trajetórias inicialmente próximas cresce rapidamente e que após isso a evolução satura. A distância para de crescer quando

atinge aproximadamente o tamanho do atrator estranho, caso contrário este não existiria. Em cada uma dessas evoluções podemos ajustar uma reta cujo coeficiente angular é positivo, pois são gráficos monolog. Uma reta interpolada nessa escala representa na verdade uma curva exponencial e o coeficiente angular dessa reta é exatamente o maior expoente de Lyapunov. Como os maiores expoentes de Lyapunov são positivos nesses três primeiros gráficos, temos que os três estados (a, b e c) são caóticos. Em 43.e e f, a distância média não cresce, ou seja, permanecem praticamente constantes durante o tempo de evolução da distância. Assim podemos concluir que os estados 'e' e 'f' são periódicos. Comparado com os estados das Figuras 43.a, b e c, percebemos que o estado 43.d apresenta um crescimento lento e pequeno da distância, indicando que este é um estado periódico, ou talvez quasi-periódico.

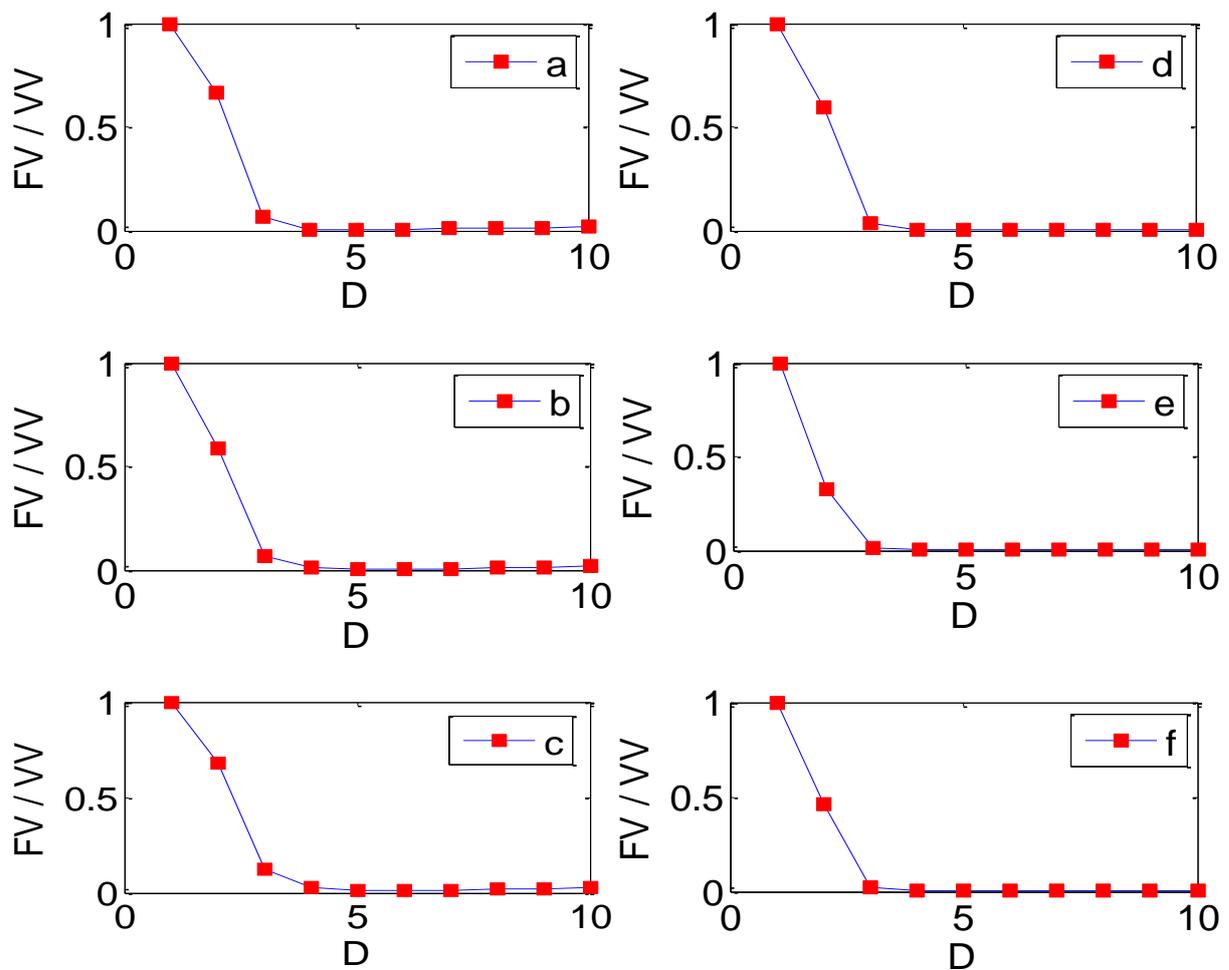


Figura 42: Cálculo da dimensão de imersão do circuito para os vários estados apresentados na Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente).

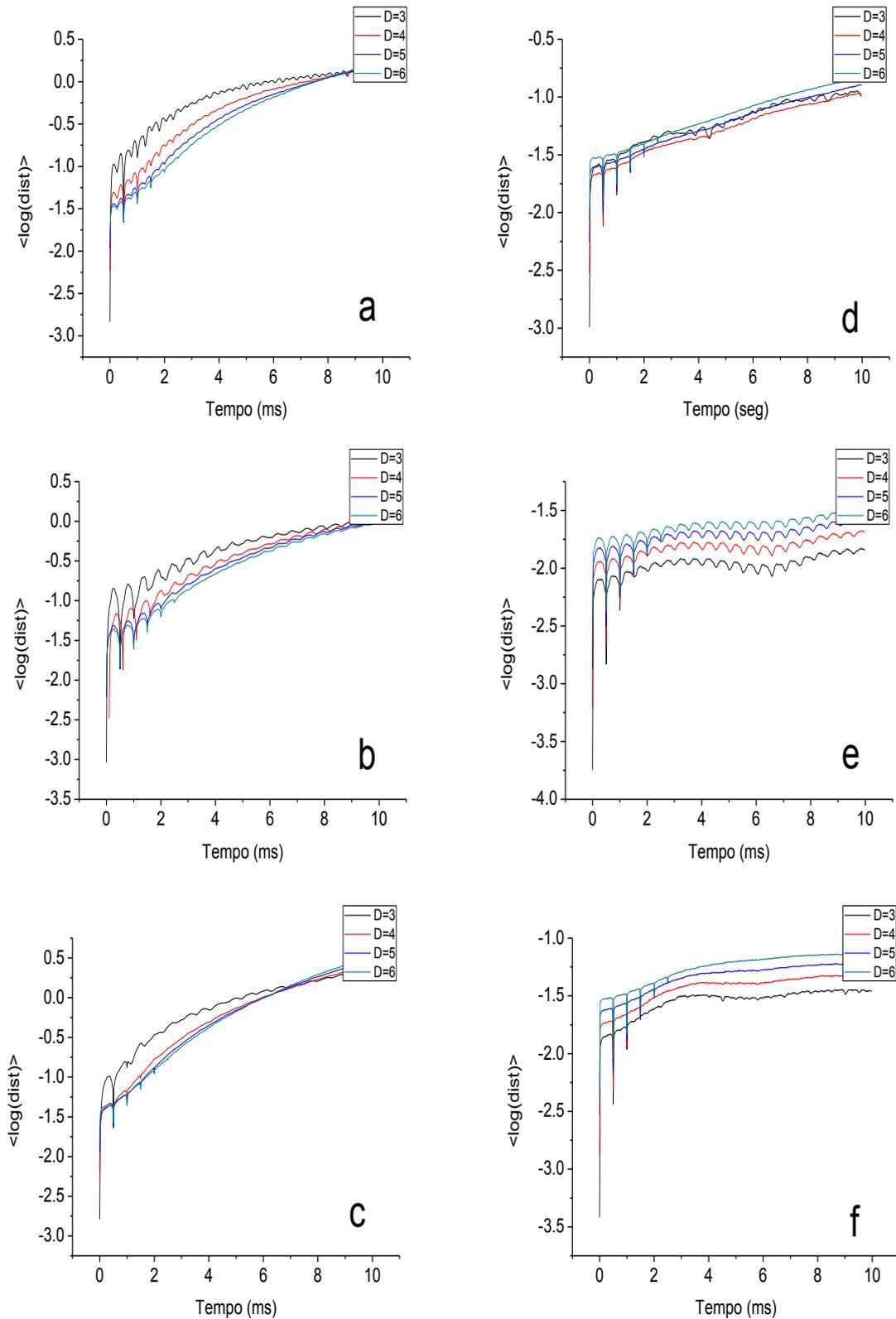


Figura 43: Resultados do cálculo da evolução média do logaritmo da distância de duas trajetórias inicialmente próximas para os seis estados da Figura 37 (a, b, c, d, e, f, respectivamente). Os quadros presentes nos gráficos representam as cores das curvas para cada dimensão de imersão.

3.2 – Dois circuitos acoplados

Após termos caracterizado nosso circuito de segunda ordem com atraso temporal, resolvemos estudar o acoplamento entre dois destes circuitos, procurando sincronização entre eles.

Utilizamos inicialmente um acoplamento unidirecional via sinal de erro, ou seja, o sinal do segundo circuito, dito escravo (ou circuito resposta) é corrigido pela subtração dos sinais V_1 dos dois sistemas. O conjunto de equações dinâmicas para o circuito escravo é idêntica ao conjunto de equação do circuito mestre, contendo a mais apenas o termo de subtração dos sinais dos sistemas:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{1r} &= -\frac{V_{1r}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2r})}{C_1} - \frac{V_{2r}(t-\tau)}{R_E C_1} + \frac{(V_{1d} - V_{1r})}{R_{RE} C_1} \\ \dot{V}_{2r} &= \frac{V_{1r}}{R_2 C_2}\end{aligned}\quad (48)$$

Na Figura 44 apresentamos o diagrama de acoplamento, por sinal de erro, entre dois circuitos de segunda ordem com atraso temporal.

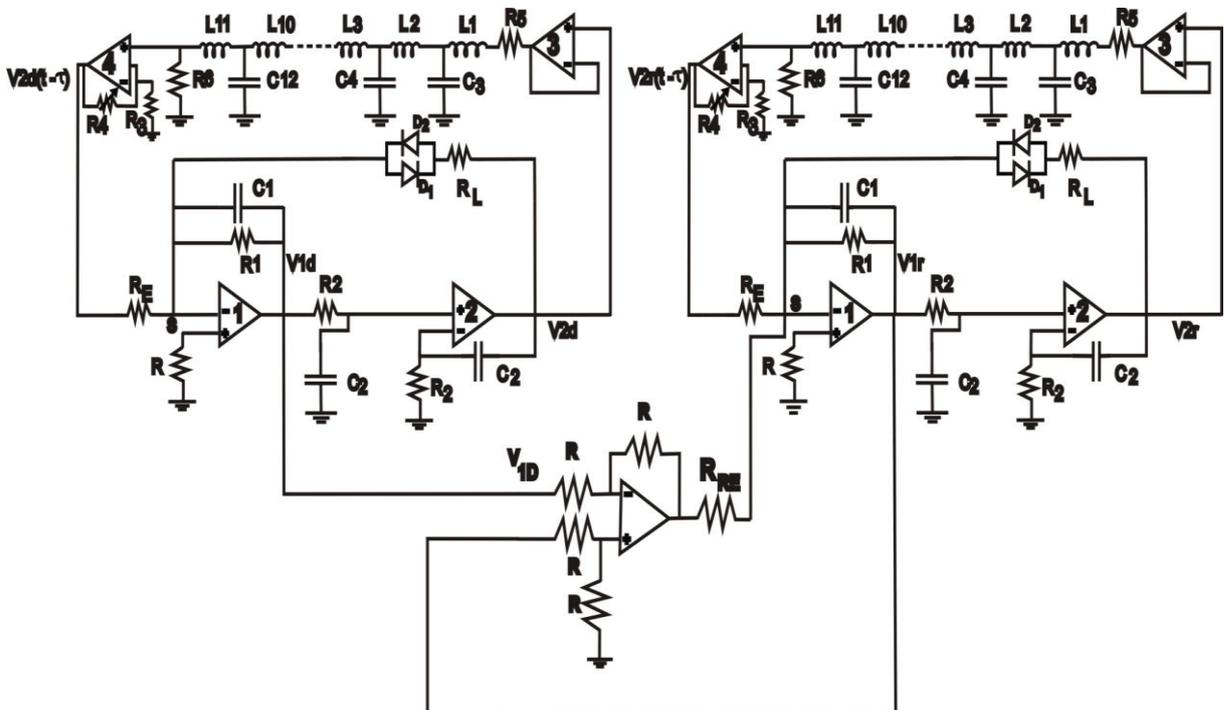


Figura 44: Diagrama de dois circuitos, de segunda ordem com atraso temporal, acoplados.

Na Figura 45 mostramos a fotografia dos circuitos acoplados, na qual distinguimos as duas linhas de filtros LC nas partes superior e inferior da imagem (tubos pretos e blocos marrons), e no centro temos os amplificadores operacionais (retângulos pretos): os dois da esquerda geram os sinais V_1 e V_2 do circuito resposta, os dois da direita geram os sinais V_1 e V_2 do circuito mestre, e o central gera o sinal de erro que acopla os sistemas.

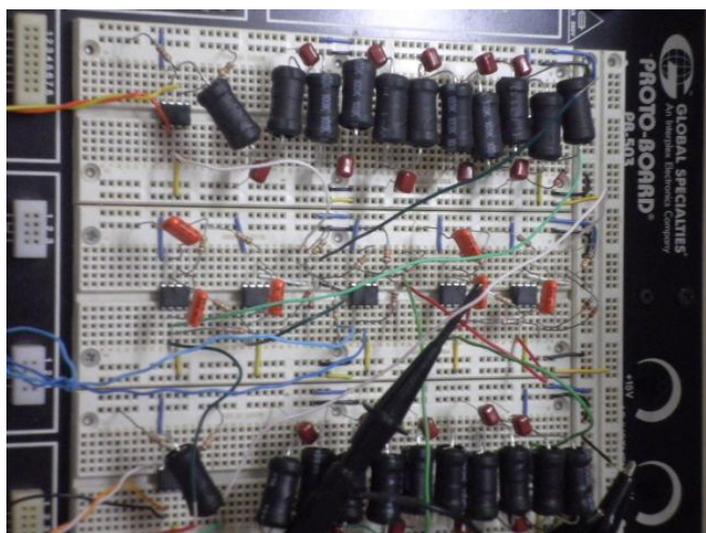


Figura 45: Fotografia de dois circuitos acoplados.

Quando obtemos uma reta diagonal num gráfico entre duas variáveis, significa que as duas possuem os mesmos valores e ao mesmo tempo. Quando uma das variáveis possui resposta diferente da outra ou quando possui resposta igual a da outra variável, sendo que transladada temporalmente, não obtemos mais uma reta diagonal em um gráfico bidimensional dessas duas variáveis.

Podemos quantificar o grau de sincronismo do sistema através da função de correlação, onde vemos que com o aumento da diferença entre dois sinais o valor da correlação entre eles diminui, ou seja, a reta diagonal em um gráfico entre dois sinais se transforma em outras figuras mais largas.

A seguir temos as linhas de código que utilizamos para calcular a função de correlação entre dois sistemas utilizando o software MatLab®.

```
% sinal
% faz a leitura do arquivo de dados 'arq.csv'
% e atribui os dados a variáveis: tempo, v1d, v1r
clear all
format long e
dados=csvread('2.csv',0,0);
```

```

tempo=dados(:,1); %o tempo sempre é a primeira coluna do arquivo%
v1r=dados(:,2); %se v1r for a segunda coluna do arquivo%
v1d=dados(:,3); %se v1d for a terceira coluna do arquivo%

% corr_v1d_v1r
% faz a correlação entre v1d e v1r
%
corrsinal=xcorr(v1d,v1r,'coeff');
% ajuste da escala de tempo - muda para ter tempo negativo e positivo
% e duplica o tamanho pois a correlação é 2*N-1 onde N=ponto_final
zera_tempo=tempo -tempo (1);
tempo_novo=[zera_tempo-zera_tempo(ponto_final)
            zera_tempo(1:ponto_final-1)];

%m
figure(1);
subplot(211);
plot(tempo_curto,v1d);
title('v1d');
subplot(212);
plot(tempo_curto,v1r);
title('v1r');
%
figure(2);
plot(corrsinal);
%axis([-20000 20000 0 150]);
title('correlação entre v1d e v1r');
figure(3);
plot(tempo_novo, corrsinal);
%axis([-20000 20000 0 150]);
title('correlação entre v1d e v1r');

```

Para caracterizarmos o grau de acoplamento do sistema adquirimos algumas séries experimentais, a fim de calcularmos a função de correlação entre os sinais. Mantivemos os parâmetros do sistema constantes (cada circuito operava em regime caótico quando desacoplados) e apenas variamos o valor do resistor R_{RE} para modificarmos o acoplamento entre os circuitos. Estes permanecem caóticos quando acoplados.

Em particular, apresentamos nas Figuras 46, 48, 50 e 52 fotografias da tela de um osciloscópio cujos eixos são formados pelas variáveis V_1 e V_2 , horizontal e vertical, mostrando estados que vão desde o sincronizado (Fig. 46) ao descorrelacionado (Fig. 52).

Nas Figuras 47, 49, 51 e 53 temos os resultados do cálculo da função de correlação para os estados mostrados nas Figuras 46, 48, 50 e 52 respectivamente. Em todas as situações, a função de correlação apresenta um pico, seu valor oscila e após algumas oscilações o seu máximo é praticamente zero, o que mostra que as funções são mais parecidas quando medidas ao mesmo tempo. Não é preciso

efetuar translação temporal em qualquer uma das séries para que sejam mais parecidas. Quanto mais próximo de 1 for o máximo da função de correlação mais sincronizado o sistema está e quanto mais próximo de zero for mais descorrelacionado os circuitos estão. Valores negativos indicam apenas que um sinal é o oposto do outro. Comparando as fotografias com suas respectivas correlações percebemos que à medida que temos figuras mais largas, menor é o pico de correlação do sistema.

A seguir temos a comparação entre fotografias e função de correlação mostrando alguns estados de acoplamento do sistema. O fator de acoplamento ε é definido como $\varepsilon = \frac{R_2}{R_{RE}} = \frac{10k\Omega}{R_{RE}}$.

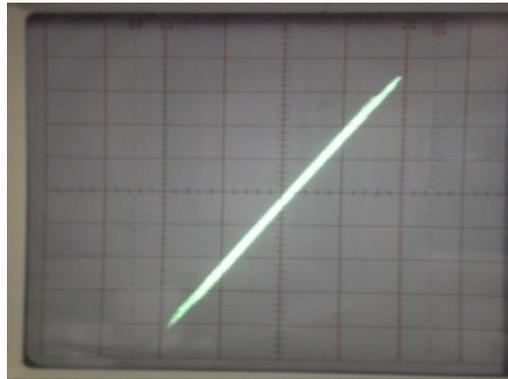


Figura 46: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o sincronismo entre os circuitos para $\varepsilon = 135,135135$ ($R_{RE} = 0,074 \text{ k}\Omega$).

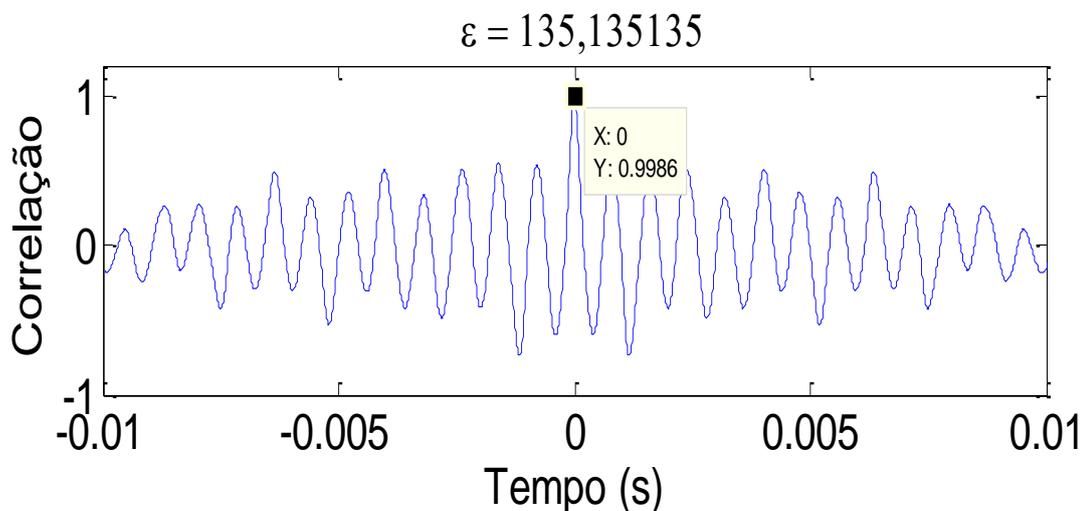


Figura 47: Função de correlação para o acoplamento entre os circuitos com $\varepsilon = 135,135135$ ($R_{RE} = 0,074 \text{ k}\Omega$).

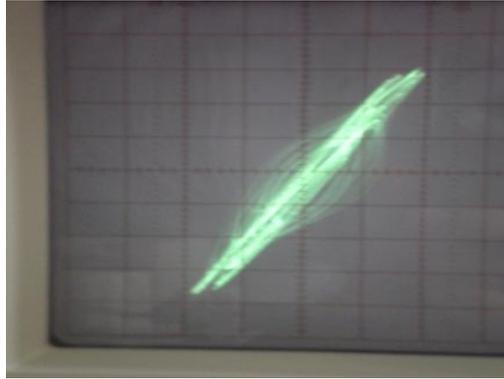


Figura 48: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o acoplamento entre os circuitos para $\varepsilon = 1,3245$ ($R_{RE} = 7,55 \text{ k}\Omega$).

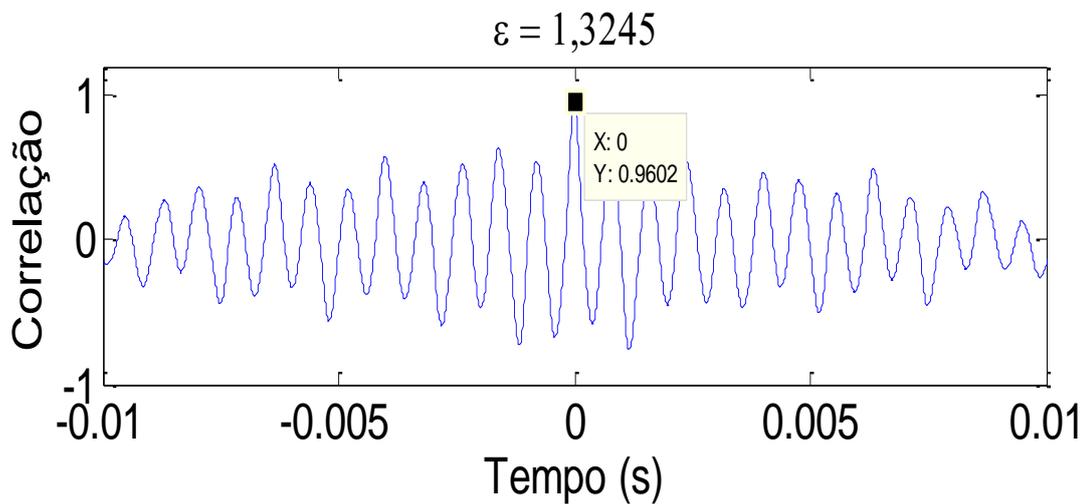


Figura 49: Função de correlação para o acoplamento entre os circuitos com $\varepsilon = 1,3245$ ($R_{RE} = 7,55 \text{ k}\Omega$).

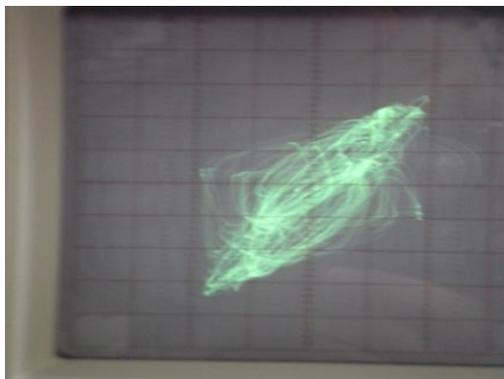


Figura 50: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o sincronismo entre os circuitos para $\varepsilon = 0,4202$ ($R_{RE} = 23,8 \text{ k}\Omega$).

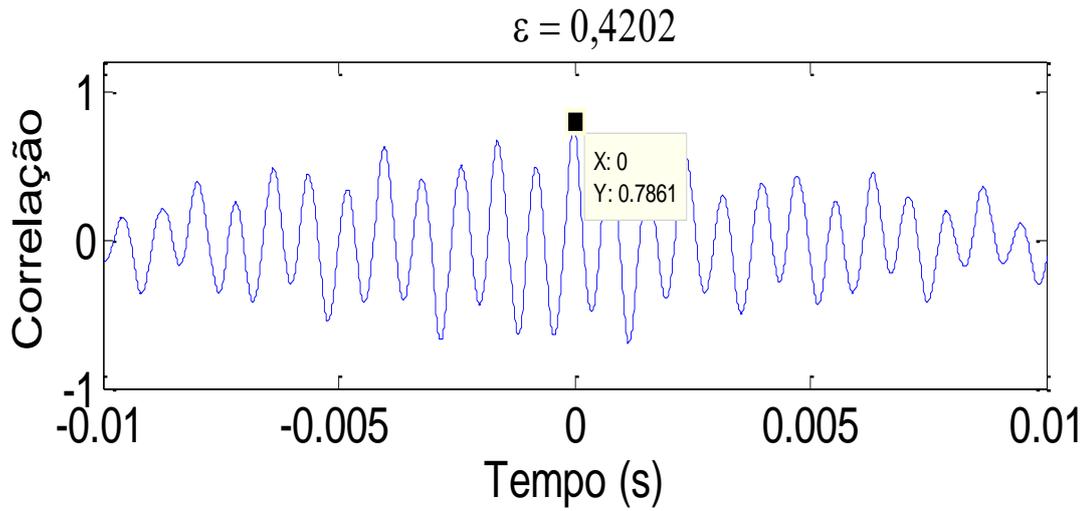


Figura 51: Função de correlação para o acoplamento entre os circuitos com $\varepsilon = 0,4202$ ($R_{RE} = 23,8 \text{ k}\Omega$).

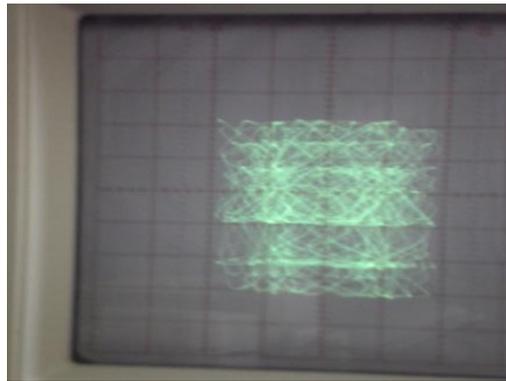


Figura 52: Fotografia da tela de um osciloscópio mostrando o “acoplamento” entre os circuitos desacoplados.

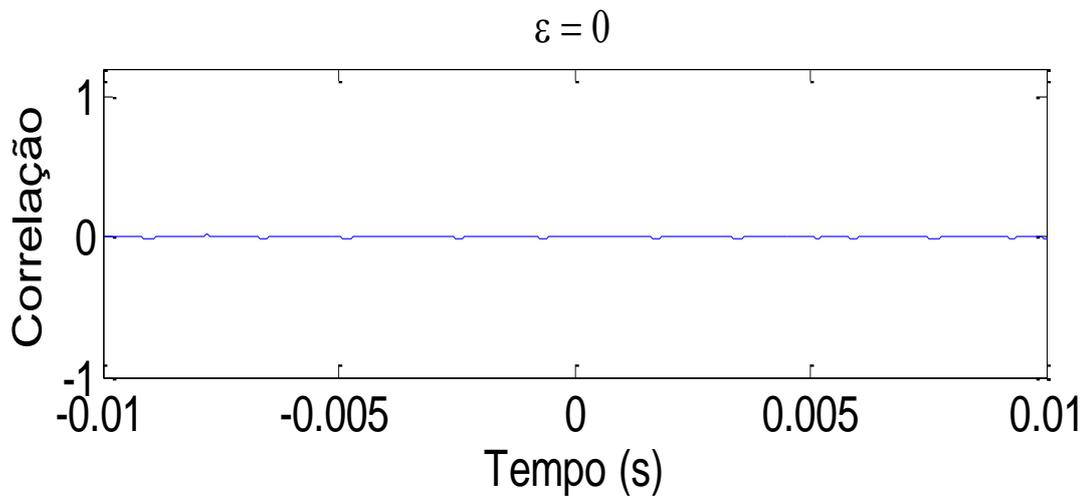


Figura 53: Função de correlação para o “acoplamento” entre os circuitos desacoplados.

Assim mostramos que, através do acoplamento unidirecional, podemos controlar o grau de sincronismo entre os circuitos desde o estado descorrelacionado, passando por estados intermediários de correlação até o estado sincronizado.

Neste Capítulo 3 exibimos o circuito eletrônico descrito por uma equação diferencial de segunda ordem com atraso temporal que implementamos e caracterizamos. Através de técnicas de análise como transformada de Fourier e cálculo do maior expoente de Lyapunov caracterizamos diversos estados dinâmicos do nosso sistema, identificando-os alguns destes como caóticos.

No Capítulo 4 estudamos séries temporais do sinal de erro $V_{1d} - V_{1r}$, construindo histogramas dessas séries, para conhecermos suas distribuições de voltagens. Introduzimos também ruído branco no sistema para estudarmos como este é modificado, seja ajudando ou prejudicando o nível de sincronismo entre os circuitos.

Capítulo 4 – Eventos Raros

Quando estudamos o acoplamento entre sistemas dinâmicos não-lineares em regime caótico, procuramos, por exemplo, obter sincronização entre eles (seja de fase, completa, atrasada) (Boccaletti, & et al, 2002). No capítulo anterior analisamos o sincronismo entre dois circuitos eletrônicos descritos por equações diferenciais de segunda ordem com atraso temporal. Entretanto quando estamos próximos ao estado de completa sincronização percebemos que a diferença entre sinais das mesmas variáveis dos sistemas pode assumir, com probabilidade diferente de zero e por um breve instante de tempo, um valor muito maior que sua média e logo após voltar ao comportamento anterior a essa fuga.

Vários trabalhos foram realizados estudando a ocorrência dessas fugas de sincronismo em diferentes sistemas (Ying, & et al, 2011), (Venkataramani, & et al, 1996), (Gauthier & Bienfang, 1996). Essas fugas do “estado estacionário” de sincronismo aumentam, à medida que reduzimos o fator de acoplamento, entre outros fatores. Estudar esse tipo de comportamento é importante na tentativa de entender diversos sistemas dissipativos (Venkataramani, & et al, 1996) e hamiltonianos (Giardina, & et al, 2011); oscilações nas bolsas de valores (Krawiecki, Hołyst, & Helbing, 2002); emissão de lasers acoplados (Flunkert, & et al, 2009), etc.

Neste capítulo vamos apresentar resultados preliminares de nossos estudos sobre eventos raros no sinal de erro entre as variáveis de um circuito ‘mestre’ (*drive*) e de um circuito ‘resposta’ (*response*), causados pela diminuição do acoplamento entre eles ou por adição de ruído branco no sistema.

Para medir o sincronismo entre dois circuitos, podemos fazê-lo através da definição de uma função de erro e estudando a série temporal dessa variável diferença entre os circuitos, podendo assim medir-se diretamente o grau de dessincronismo do sistema.

Seguimos aqui o procedimento de (Gauthier & Bienfang, 1996) que utiliza uma mudança de variáveis dos circuitos eletrônicos para medir o acoplamento entre os dois sistemas acoplados. A ideia é fazer uma mudança de base, ao invés de visualizarmos diretamente as variáveis V_d e V_r , dos circuitos mestre (d) e resposta (r), respectivamente, definindo-se $v_{\perp}=(V_d - V_r)/2$ como um vetor ortogonal e $v_{\parallel}=(V_d + V_r)/2$ como vetor paralelo. A condição de sincronização é dada por $v_{\perp}=0$, quando não existe diferença entre V_d e V_r . Como proposto por H. Fujisaka (Fujisaka, 1983), a estabilidade da sincronização pode ser medida através do cálculo dos expoentes de Lyapunov do vetor ortogonal. Porém Gauthier mostrou que esse critério falha quando o vetor ortogonal apresenta fugas, caracterizando o estado denominado por Gauthier de *attractor bubbling* (Gauthier & Bienfang, 1996).

A maior parte dos fenômenos da natureza que foram estudados pelo homem, segue uma lei normal de distribuição, descrita por uma equação gaussiana:

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right),$$

onde x é a variável, σ é o desvio padrão e μ é o valor de x no centro da distribuição. A forma da distribuição gaussiana é a de uma curva em forma de sino, em que valores de x que ocorrem dentro da distância de $\pm\sigma$ do centro da distribuição correspondem a cerca de 66% dos eventos enquanto que valores de $x > 3\sigma$ (ou seja, que estão nas caudas da distribuição) representam menos de 1% dos eventos.

Entretanto vários fenômenos, como a ocorrência de terremotos, desviam desse comportamento normal, apresentam, por exemplo, um comportamento denominado de leis de potência (Wikipedia), (Sanchez, Lopez, Rodriguez, & Matias, 2004). Ou seja, as caudas das distribuições não decaem exponencialmente, decaem de acordo com alguma lei de escala. Dessa forma valores distantes do centro da distribuição são mais importantes do que no caso da distribuição normal. Duas características importantes de leis de potência são: (i) a invariância de escala, em que se temos uma distribuição $f(x) = ax^k$, onde a é uma constante e k a potência da distribuição, podemos implementar um fator de escala c na distribuição e esta sofrerá apenas um escalonamento do tipo $f(cx) = a(cx)^k = c^k f(x)$ e (ii) a universalidade, em que vários fenômenos diferentes apresentam a mesma potência da distribuição como podemos encontrar na termodinâmica, quando estudamos transições de fases. A esses expoentes das distribuições damos o nome de expoentes críticos.

Várias teorias foram desenvolvidas para tratar de eventos raros, dentre elas podemos citar a teoria das caudas longas (Wikipedia), em que a distribuição de valores apresenta muitos eventos em suas caudas longas diferentemente da distribuição normal.

Podemos também citar a teoria do Cisne negro, descrita por Nassim Nicholas Taleb no seu livro *Fooled By Randomness* (Iludido pelo acaso) de 2004 que trata de eventos financeiros. Nessa teoria Taleb trata de eventos raríssimos, difíceis de prever, mais que provocam enormes efeitos.

4.1 – Sincronização dependente do nível de acoplamento

Para realizarmos nossos estudos sobre possíveis eventos raros (ou *attractor bubbling*) e sobre distribuições de voltagens, procurando por comportamentos não-gaussianos, em sistemas dinâmicos não-lineares utilizamos o mesmo sistema apresentado no Capítulo 3: um circuito eletrônico de segunda ordem com atraso temporal. Realizamos um acoplamento unidirecional entre dois destes circuitos. Eles são regidos pelo mesmo conjunto de equações com a única diferença de um termo de acoplamento presente apenas no circuito resposta (ou escravo), como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{2d} &= \frac{V_{1d}}{R_2 C_2} \\
 \dot{V}_{1d} &= -\frac{V_{1d}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2d})}{C_1} - \frac{V_{2d}(t-\tau)}{R_E C_1} \\
 \dot{V}_{2r} &= \frac{V_{1r}}{R_2 C_2} \\
 \dot{V}_{1r} &= -\frac{V_{1r}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2r})}{C_1} - \frac{V_{2r}(t-\tau)}{R_E C_1} + \frac{V_{1d} - V_{1r}}{R_{RE} C_1}
 \end{aligned} \tag{49}$$

Onde o termo $I(V_{2j})$, com $j = d$ ou r , responsável pela não-linearidade do sistema, é dado pela expressão:

$$I(V_{2j}) = \begin{cases} \frac{(-0.7 - V_{2j})}{R_L}, & \text{se } V_{2j} < -0.7 \\ 0, & \text{se } -0.7 < V_{2j} < 0.7 \\ \frac{(+0.7 - V_{2j})}{R_L}, & \text{se } V_{2j} > 0.7 \end{cases} \quad (50)$$

Realizamos o acoplamento unidirecional entre os circuitos realimentando o circuito resposta através de um sinal de erro gerado por um amplificador operacional que atua como subtrator. Esse sinal de erro é adicionado na entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_{1r} . Ou seja, injetamos um sinal proporcional a $(V_{1d} - V_{1r})$, na terceira parcela da Equação 49.

Na Figura 54 apresentamos o diagrama de acoplamento unidirecional entre dois circuitos eletrônicos de segunda ordem com atraso temporal. Neste diagrama vemos o circuito mestre denotado pelo subíndice d e o circuito resposta, pelo subíndice r e o amplificador operacional na configuração de subtrator cujas entradas são os sinais V_{1d} e V_{1r} e sua resposta de saída é $V_{1r} - V_{1d}$.

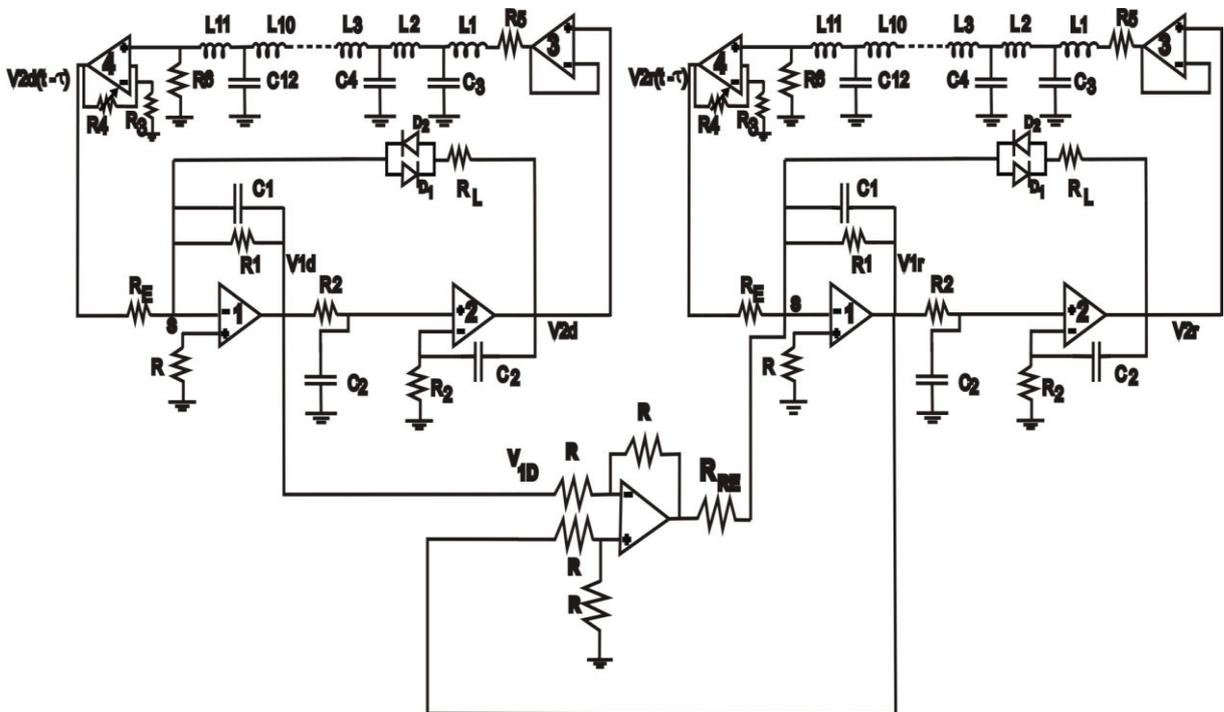


Figura 54: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos de segunda ordem com atraso temporal. No diagrama vemos os circuitos mestre e resposta, e o amplificador operacional na função de subtrator gerando o sinal de erro, $V_{1d} - V_{1r}$, que é injetado no circuito resposta para realizar o acoplamento dos sistemas.

Realizamos nossos estudos através de medidas do sinal de erro gerado pelo subtrator a partir das variáveis V_1 dos dois circuitos, mestre e resposta. O resistor R_{RE} acopla a saída do amplificador operacional que gera o sinal $V_{1d}-V_{1r}$ na entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_{1r} e assim o ganho desse acoplamento. Desta forma, variamos o valor do resistor R_{RE} , para observarmos o comportamento do sinal de erro em função do nível de acoplamento entre os circuitos.

Como vimos no Capítulo 3, o sistema oscila em banda de baixas frequências, menores que 12 kHz. Pelo Teorema de Nyquist (Openheim, Willsky, & Nawab, 1996), precisamos de uma taxa de amostragem de pelo menos o dobro da frequência máxima de oscilação de um sistema, no caso do circuito aqui tratado de 12 kHz, o que nos dá uma taxa mínima de 25 mil amostragens por segundo. Como procuramos fenômenos transientes (eventos raros) que acontecem em tempos muito curtos adquirimos séries temporais experimentais a uma taxa de 100 mil amostragens por segundo, quatro vezes maior que a mínima necessária. Desta forma obtemos maior resolução em nossas séries experimentais adquiridas.

Durante a aquisição de séries temporais, garantimos que os dois circuitos operavam em regime caótico de forma independente (ou seja, quando estão desacoplados) e verificamos que eles operam nesse regime caótico quando fazemos o acoplamento e sincronismo entre eles.

Em nossas medidas adquirimos tanto o sinal de erro $V_{1d} - V_{1r}$ quanto o sinal V_{1d} para garantirmos que o circuito mestre continua caótico e não é afetado pelo acoplamento ou pela variação do fator de acoplamento. Na Figura 55 temos o histograma e o logaritmo do histograma do sinal V_{1d} . Ao variarmos o acoplamento entre os circuitos observamos que apenas o circuito resposta é afetado, assim o mestre permanece inalterado. Vemos neste histograma (Figura 55) que o sinal V_{1d} , como esperado para um estado caótico, apresenta uma distribuição de voltagens não-gaussiana (como seria o caso com ruído branco) por ser determinístico e não estocástico. Na Figura 56 estão apresentadas séries temporais do sinal de erro $V_{1d}-V_{1r}$, adquiridos para vários níveis de acoplamento, ε , entre os dois circuitos, mestre e resposta. O nível de acoplamento, ε , entre os circuitos é dado pela seguinte relação

$$\varepsilon = \frac{R_2}{R_{RE}} = \frac{10 \text{ k}\Omega}{R_{RE}}.$$

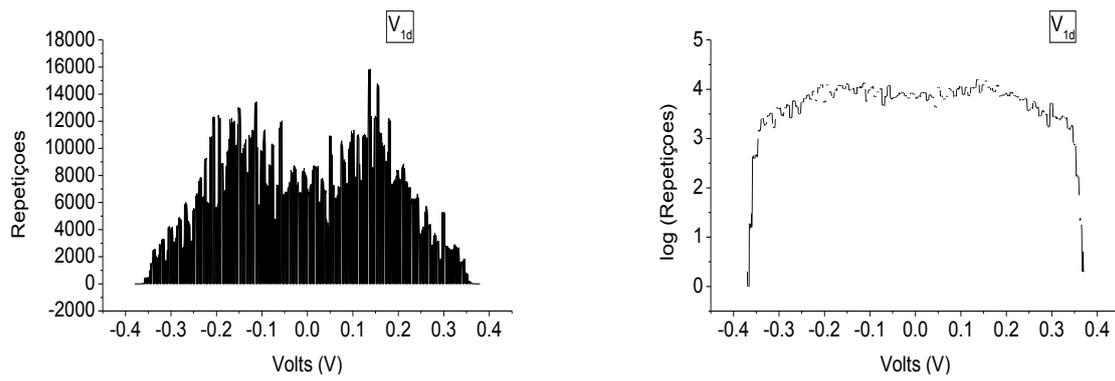


Figura 55: Histograma (à esquerda) e logaritmo do histograma (à direita) da variável V_{1d} .

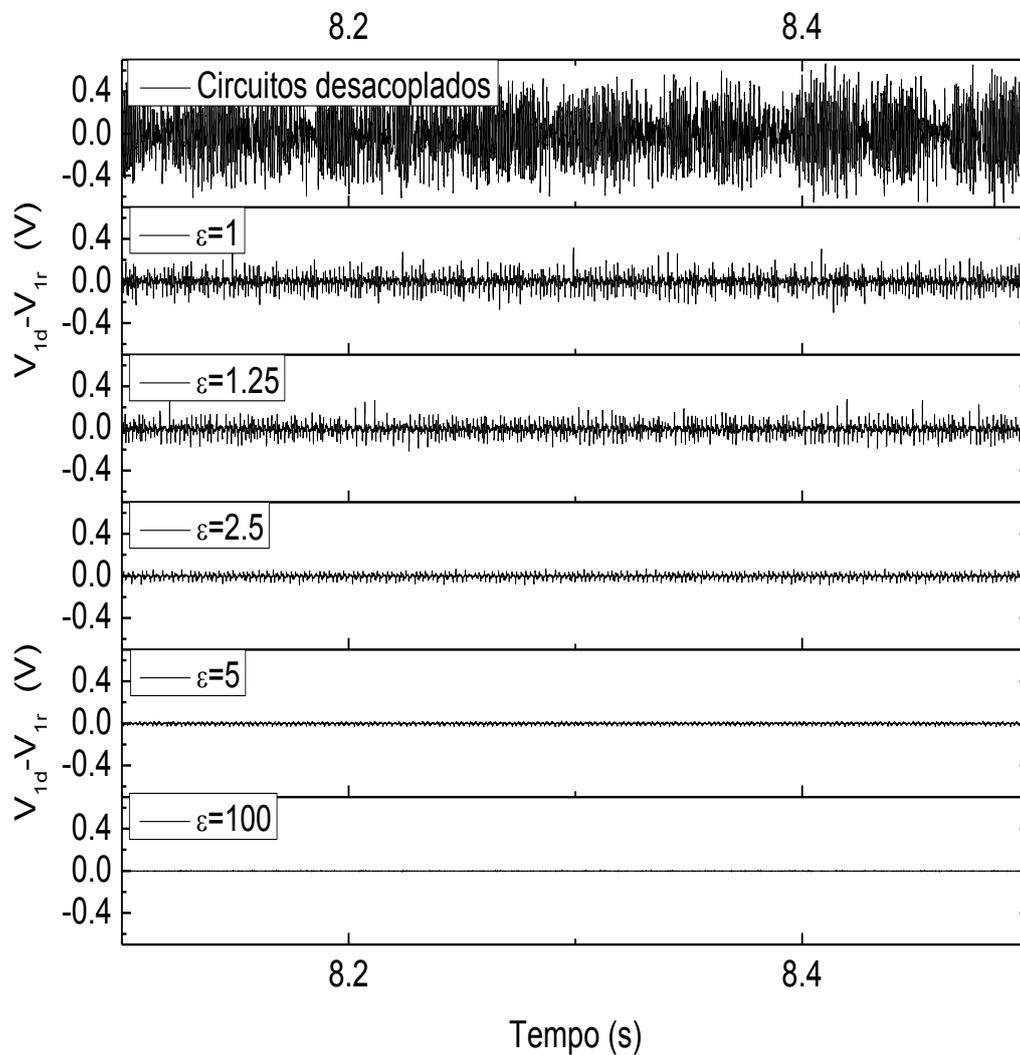


Figura 56: Séries temporais do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis diferentes de acoplamento entre os circuitos mestre e escravo. $\varepsilon=0$ (desacoplados), $\varepsilon=100$ (sincronizados).

Na Figura 57 apresentamos gráficos para os logaritmos dos histogramas do sinal de erro $V_{1d} - V_{1r}$, construídos a partir das séries temporais apresentadas na Figura 56.

Quando os circuitos estão sincronizados, $V_{1d} - V_{1r}$ aproxima-se de 0 V, indicando que os dois circuitos exibem o mesmo comportamento. Quando o sistema está desacoplado os circuitos oscilam independentes um do outro. Assim, o vetor ortogonal pode assumir qualquer valor no intervalo de voltagens [$V_{1dmin} - V_{1rmax}$; $V_{1dmax} - V_{1dmin}$].

Como esperado, com a redução do nível de acoplamento, a distribuição de voltagens do sinal de erro torna-se mais larga. Estados intermediários de acoplamento entre o estado sincronizado e o estado desacoplado apresentam distribuições de voltagens que são uma combinação das distribuições gaussiana (estado sincronizado) e supergaussiana (estado desacoplado).

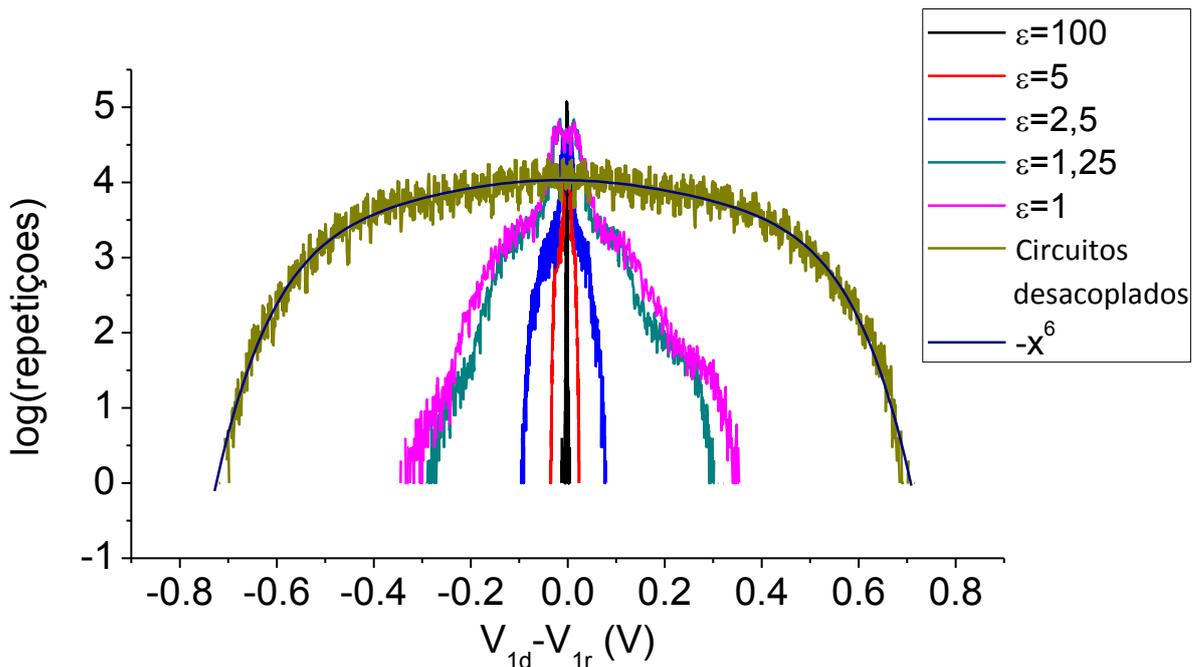


Figura 57: Logaritmos dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de acoplamento diferentes entre os circuitos mestre e escravo.

Quando os circuitos estão desacoplados, podemos ver que o sinal de erro apresenta uma distribuição de voltagens a qual denominamos supergaussiana, pois obtemos no gráfico logarítmico (como na Figura 57) uma dependência $(V_{1d} - V_{1r})^6$, diferindo portanto de uma distribuição gaussiana “normal” que possui dependência quadrática nessa escala. O tamanho do intervalo de valores que o sinal de erro $V_{1d} -$

V_{1r} pode assumir é praticamente o dobro do assumido por V_{1d} . A largura total esperada é dada pela soma da largura das curvas dos dois circuitos, quando estão desacoplados.

No caso sincronizado $\varepsilon > 80$, obtemos uma distribuição gaussiana para o sinal $V_{1d} - V_{1r}$. Percebemos, a partir da Figura 58, que a distribuição de voltagens do sinal de diferença entre os circuitos alarga-se mais para $\varepsilon < 2,5$. Além disso, observamos que o pico pronunciado apresenta uma depressão central que pode ser entendido como uma tentativa do amplificador operacional que gera o sinal de diferença entre os circuitos sempre estar corrigindo o circuito resposta para o mesmo se aproximar do circuito mestre. Para $\varepsilon > 5$ percebemos que existe uma combinação de distribuições, próximo na região central percebemos uma distribuição de largura menor com um pico pronunciado.

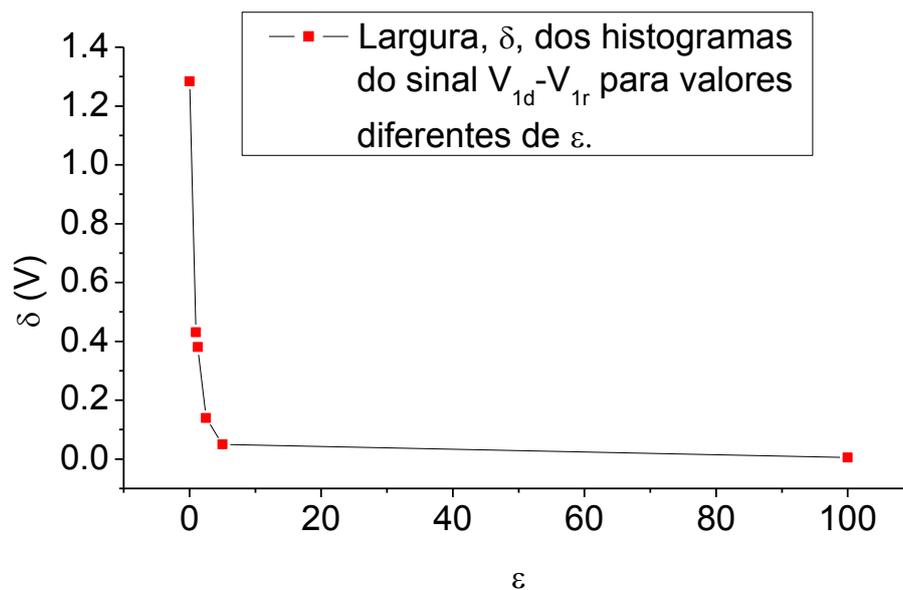


Figura 58: Largura, δ , dos histogramas do sinal $V_{1d}-V_{1r}$ (Figura 57) para valores diferentes de ε . A largura foi calculada para altura 2 do eixo log(repetições) da Figura 57.

Em resumo, em nossos estudos através da análise de histogramas construídos a partir de séries temporais experimentais concluímos que o sinal de erro $V_{1d}-V_{1r}$ escapa da distribuição de voltagens gaussiana, mas não apresentam distribuição de voltagens descrita por lei de potência. Em nossos estudos encontramos então uma combinação de uma distribuição gaussiana com uma supergaussiana para o sinal de erro. Também não observamos eventos importantes nas caudas das distribuições apresentadas na Figura 57, como por exemplo, o *attractor bubbling* (Gauthier & Bienfang, 1996).

4.2 – Adicionando ruído branco ao sistema

Existem vários trabalhos na literatura que abordam efeitos da adição de ruído (branco ou colorido) em sistemas dinâmicos determinísticos (Wang, Lai, & Zheng, 2009). Efeitos induzidos por ruído podem ser surpreendentes. Por exemplo, se dois sistemas dinâmicos caóticos idênticos estão desacoplados eles estão descorrelacionados, porém se introduzimos o mesmo ruído em ambos os sistemas, podemos, em algumas circunstâncias, gerar sincronização de fase (Zhou & Kurths, 2002) ou sincronização completa (Gao, & et al, 2003), (Uchida, McAllister, & Roy, 2004). Além disso, podemos gerar caos induzido por ruído (Lai, & et al, 2003), ou seja, o sistema apresenta uma órbita periódica estável e uma órbita caótica instável que só é acessível através da adição de ruído. Outro fenômeno que podemos encontrar ao adicionarmos ruído em sistemas dinâmicos é a ressonância estocástica (Gammaitoni, & et al, 1998) em que sinais fracos podem ser amplificados.

Motivados por tais resultados resolvemos estudar como o ruído influencia o estado de acoplamento entre os circuitos acoplados unidirecionalmente. Para tanto, injetamos ruído branco em um circuito por vez: (i) inicialmente apenas no circuito mestre; (ii) depois apenas no circuito resposta. Nos dois casos o ruído foi injetado na entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_1 .

Para ter certeza que o ruído injetado no sistema é ruído branco adquirimos uma série temporal, apresentada na Figura 59.

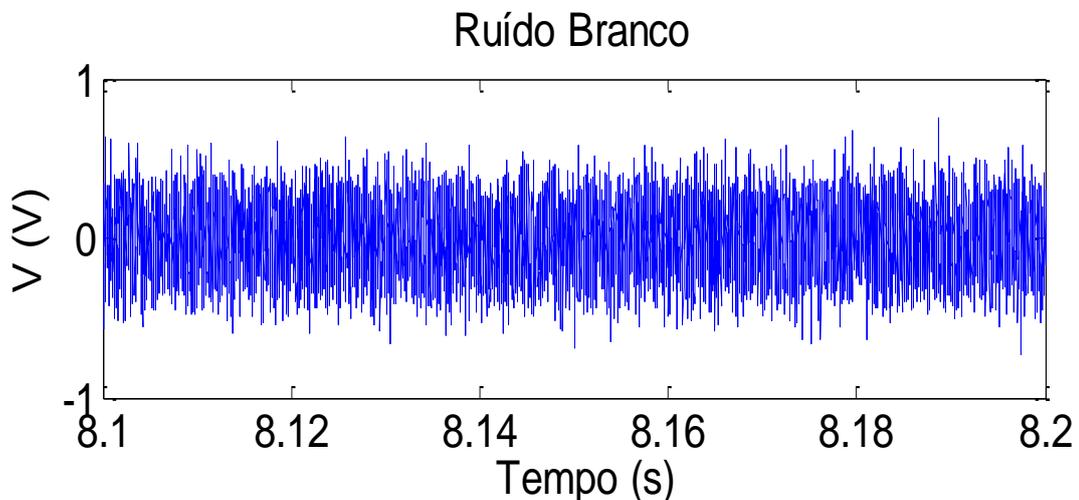


Figura 59: Série temporal de ruído branco de um gerador de funções Agilent 33120A.

Podemos calcular o logaritmo do histograma da série temporal da Figura 59 e visualizar sua distribuição na Figura 60, onde verificamos que sua distribuição é gaussiana através de um ajuste por uma função quadrática. Também calculamos a transformada de Fourier do sinal adquirido, apresentada na Figura 61. Podemos verificar então que, como ruído branco, ele possui um espectro de Fourier uniforme e composto por um espectro contínuo de componentes de frequência.

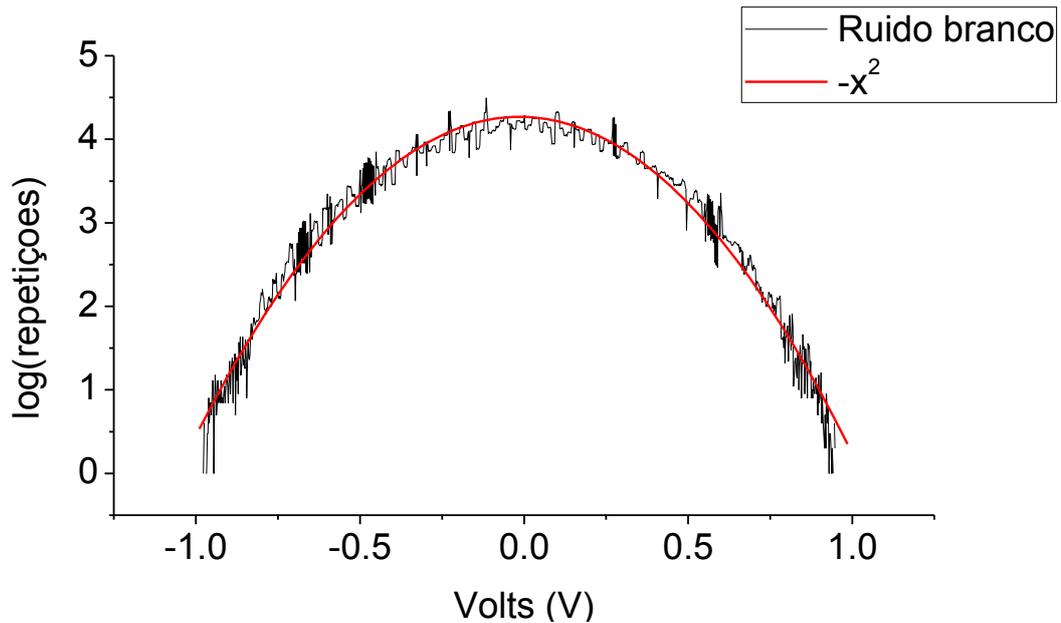


Figura 60: Logaritmo do histograma da Figura 59.

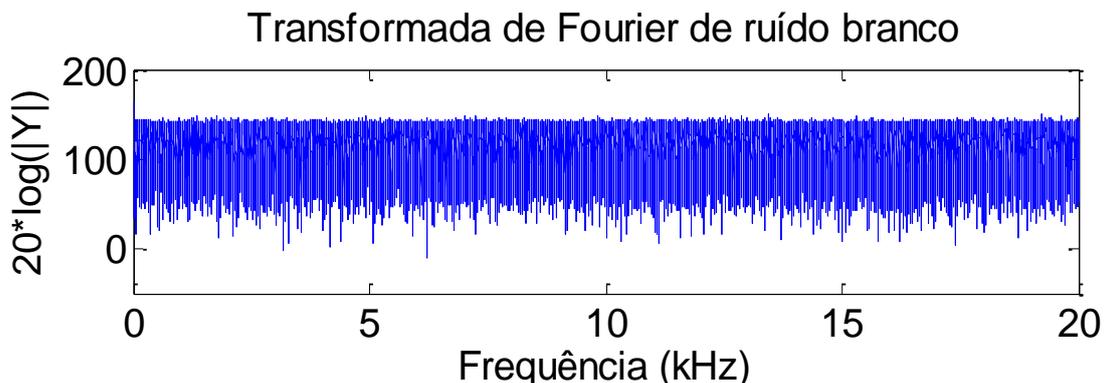


Figura 61: Transformada de Fourier de da série temporal da Figura 59.

Após caracterizar o tipo de ruído gerado por nossa fonte (gerador de funções Agilent), adicionamos esse sinal em nosso sistema de duas formas diferentes: na entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_{1d} e depois apenas na entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_{1r} . Para tanto, estudamos o sinal de diferença entre os circuitos mestre e resposta. Através das séries temporais experimentais adquiridas construímos um gráfico da distribuição de

voltagens do sinal de diferença. Desta forma, identificamos como o ruído afeta o sistema ao modificar a distribuição de voltagens do sinal de diferença na comparação com o caso sem adição de ruído, seja, alargando ou estreitando a distribuição de voltagens, por exemplo.

4.2.1 – Circuitos acoplados com adição de ruído no circuito mestre

Nesta seção mostramos medidas do sinal de erro $V_{1d} - V_{1r}$ entre dois circuitos quando adicionamos ruído branco, V_{rms} ⁵, na entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_{1d} . Adquirimos séries temporais experimentais do sinal $V_{1d}-V_{1r}$ para diferentes níveis de acoplamento entre os circuitos e diferentes níveis de ruído injetado no sistema.

Introduzimos ruído em nosso sistema a fim de caracterizarmos sua influência no vetor ortogonal, seja alargando ou diminuindo sua distribuição de valores.

Dessa forma o conjunto de equações que regem o sistema com dois circuitos acoplados e com adição de ruído é:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2d} &= \frac{V_{1d}}{R_2 C_2} \\ \dot{V}_{1d} &= \frac{-V_{1d}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2d})}{C_1} - \frac{V_{2d}(t-\tau)}{R_E C_1} - \frac{V_{rms}}{R_3 C_1} \\ \dot{V}_{2r} &= \frac{V_{1r}}{R_2 C_2} \\ \dot{V}_{1r} &= \frac{-V_{1r}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2r})}{C_1} - \frac{V_{2r}(t-\tau)}{R_E C_1} + \frac{V_{1d}-V_{1r}}{R_{RE} C_1} \end{aligned} \quad (51)$$

Utilizamos um resistor $R_3=10k\Omega$ para injetarmos o ruído branco no circuito mestre. Na Figura 62 apresentamos o diagrama de acoplamento unidirecional entre dois circuitos mostrando como o ruído foi adicionado ao sistema.

Quando adicionado no circuito mestre o ruído interfere nos dois circuitos, embora que de modos diferentes, posto que o circuito resposta recebe informações do sinal V_{1d} modificado pela adição de ruído no circuito mestre e não o próprio sinal de ruído. Assim o circuito resposta tenta sincronizar com o sinal modificado e não com V_{1d} original como no caso sem ruído.

⁵ V_{rms} corresponde ao desvio-padrão do sinal de ruído experimental.

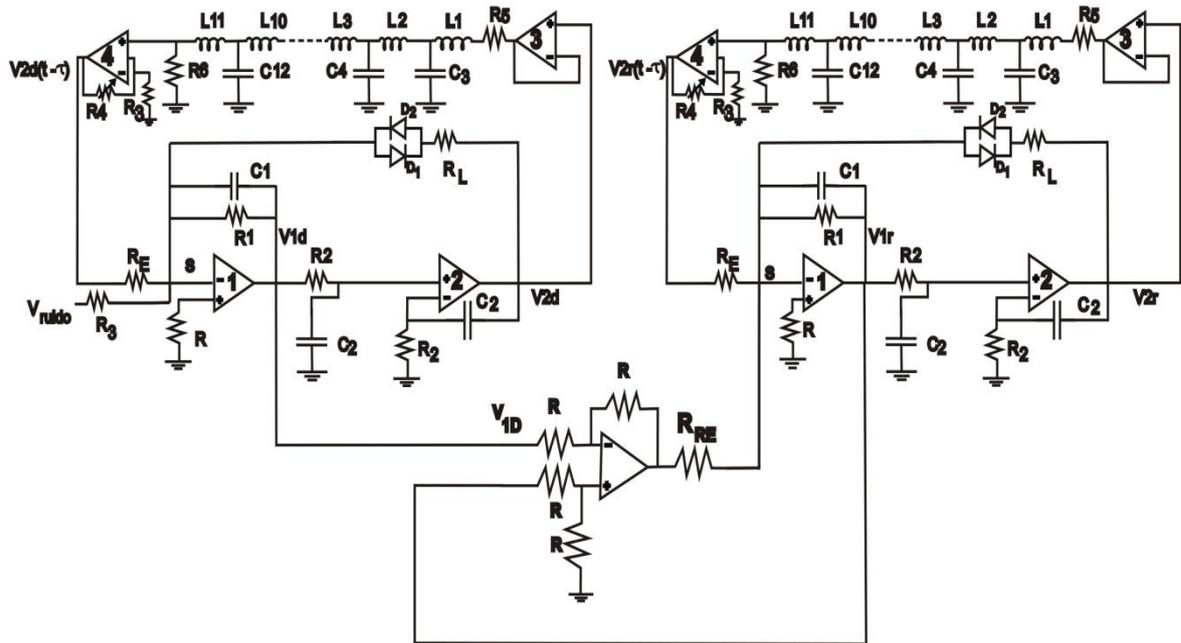


Figura 62: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos descritos por equações diferenciais de segunda ordem com atraso temporal. Ruído branco é injetado no circuito mestre na entrada negativa do amplificador operacional que gera V_{1d} .

Nas Figuras 63, 64 e 65 apresentamos os logaritmos dos histogramas que construímos a partir de séries temporais adquiridas do sinal de diferença entre os circuitos mestre e resposta. Os níveis de ruído injetado no sistema, V_{rms} , são de 0 V, 0,35 V, 1,4 V e 7 V. Na Figuras 63 o nível de acoplamento entre os circuitos é $\varepsilon = 111,11$, enquanto que na Figura 64 temos $\varepsilon = 5$ e, na Figura 65, $\varepsilon = 1,25$

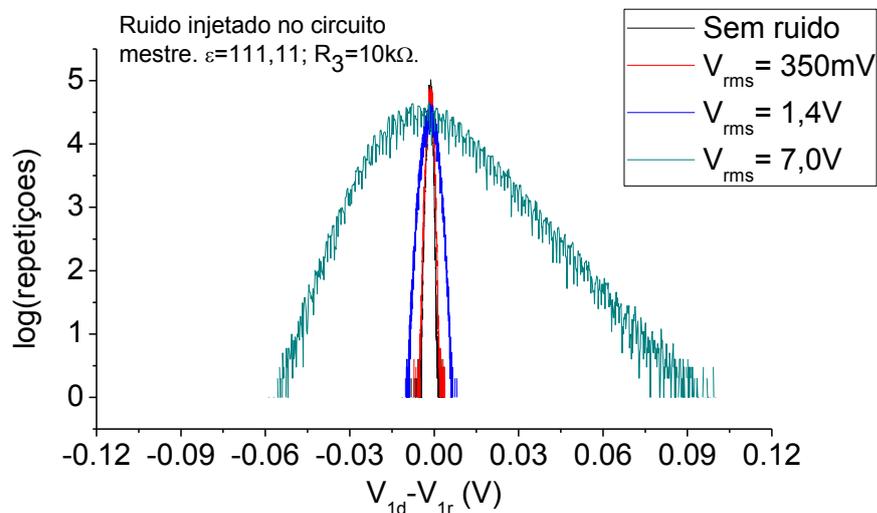


Figura 63: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 111,11$ e $R_3=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito mestre.

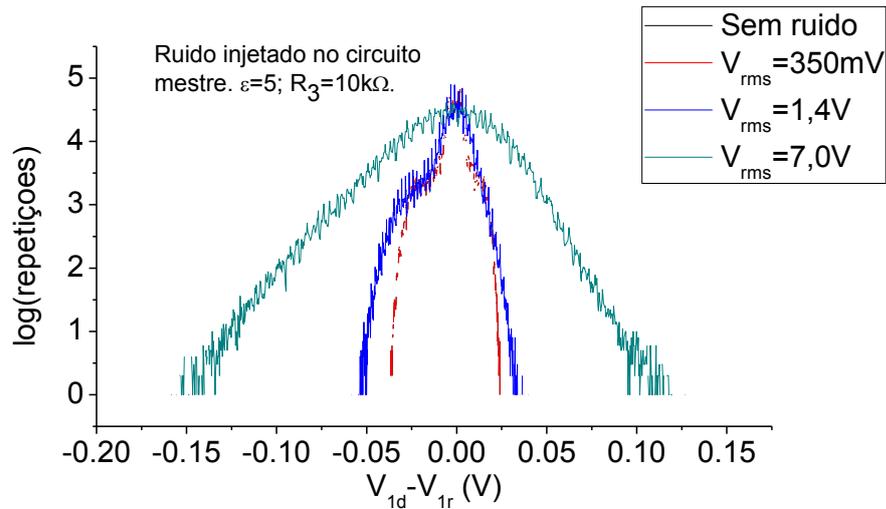


Figura 64: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 5$ e $R_3=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito mestre.

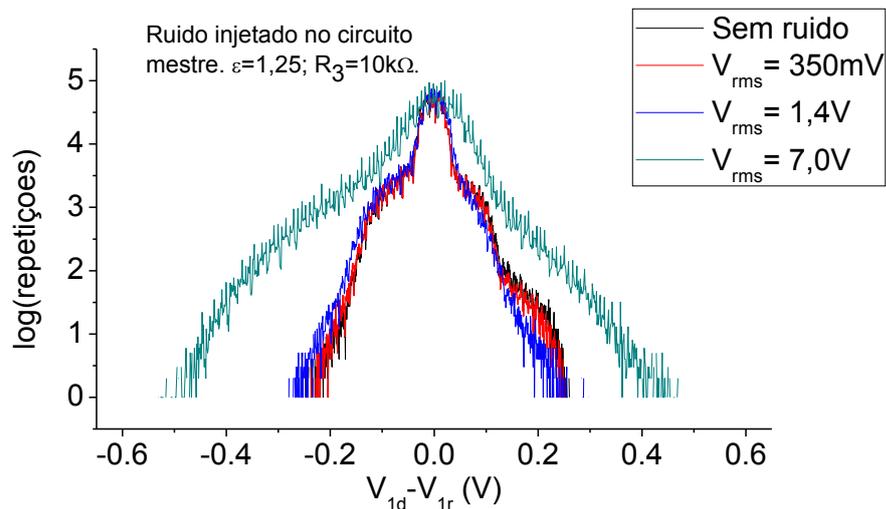


Figura 65: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 1,25$ e $R_3=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito mestre.

Ao injetarmos ruído no sistema obtivemos o comportamento esperado de alargamento do vetor ortogonal. Talvez, o local de injeção de ruído e seu nível sejam essenciais para observarmos eventos raros no sistema ou aumento da sincronização entre os circuitos. Variar o local de adição de ruído no sistema altera o conjunto de equações do sistema, ou seja, uma variável pode ser mais sensível do que outra a influência de ruído. Como vemos para $V_{rms}=10V$, o sistema sofre uma dessincronização acentuada (Figuras 63, 64 e 65). Na Figura 65 observamos um leve estreitamento, indicando uma possível sensibilidade ao nível de ruído aplicado ao sistema.

4.2.2 - Circuitos acoplados com adição de ruído no circuito resposta

Estudando a influência da injeção de ruído branco, V_{rms} , em nosso sistema, resolvemos adicioná-lo no circuito resposta. Diferente do caso apresentado na seção anterior, o circuito mestre permanece inalterado tanto com a variação do nível de acoplamento quanto com a adição de ruído em diferentes escalas no circuito resposta. O conjunto de equações que regem os circuitos está descrito na Equação 52. O resistor de entrada do ruído no circuito resposta é $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$. O ruído foi adicionado na entrada negativa do amplificador operacional que gera V_{1r} .

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2d} &= \frac{V_{1d}}{R_2 C_2} \\ \dot{V}_{1d} &= \frac{-V_{1d}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2d})}{C_1} - \frac{V_{2d}(t-\tau)}{R_E C_1} \\ \dot{V}_{2r} &= \frac{V_{1r}}{R_2 C_2} \\ \dot{V}_{1r} &= \frac{-V_{1r}}{R_1 C_1} + \frac{I(V_{2r})}{C_1} - \frac{V_{2r}(t-\tau)}{R_E C_1} + \frac{V_{1d} - V_{1r}}{R_{RE} C_1} - \frac{V_{rms}}{R_4 C_1} \end{aligned} \quad (52)$$

Na Figura 66 temos o diagrama do sistema acoplado unidirecionalmente com ruído branco adicionado apenas no circuito resposta.

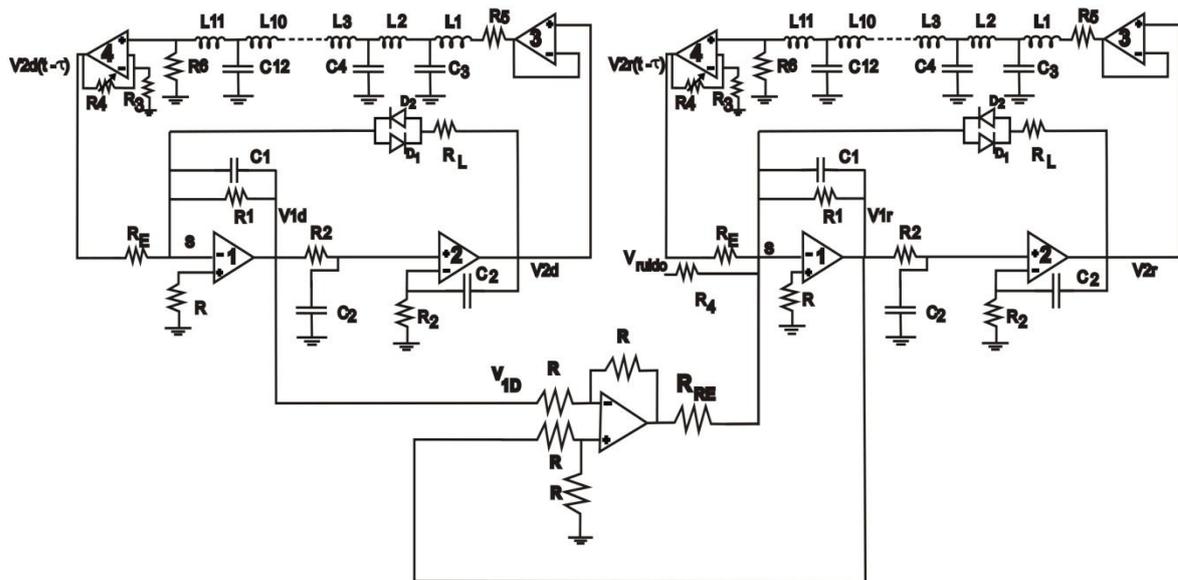


Figura 66: Diagrama do acoplamento unidirecional entre dois circuitos descritos por equações diferenciais de segunda ordem com atraso temporal. Ruído branco injetado no circuito resposta na entrada negativa do amplificador operacional que gera V_{1d} .

Adicionamos diferentes níveis de ruído, V_{rms} , no sistema: 0 V, 0,35 V, 1,4 V e 7 V. Nas Figuras 67, 66 e 69 temos os logaritmos dos histogramas que construímos a partir de séries temporais adquiridas de $V_{1d} - V_{1r}$. Utilizamos níveis de acoplamento iguais a $\varepsilon = 100$, $\varepsilon = 5$ e $\varepsilon = 1,25$, respectivamente.

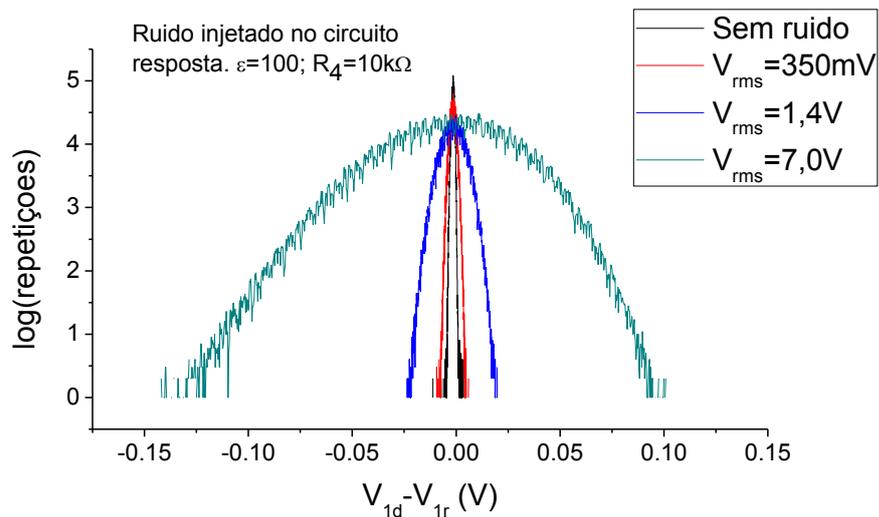


Figura 67: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 100$ e $R_4=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito resposta.

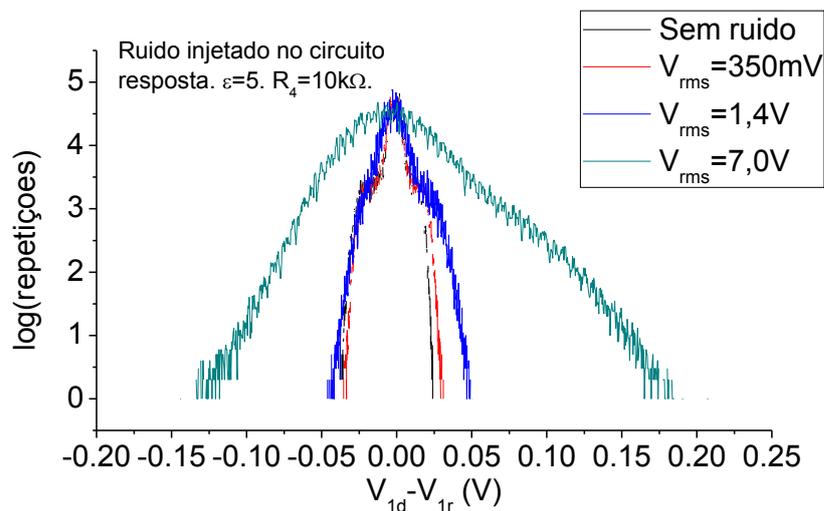


Figura 68: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 5$ e $R_4=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito resposta

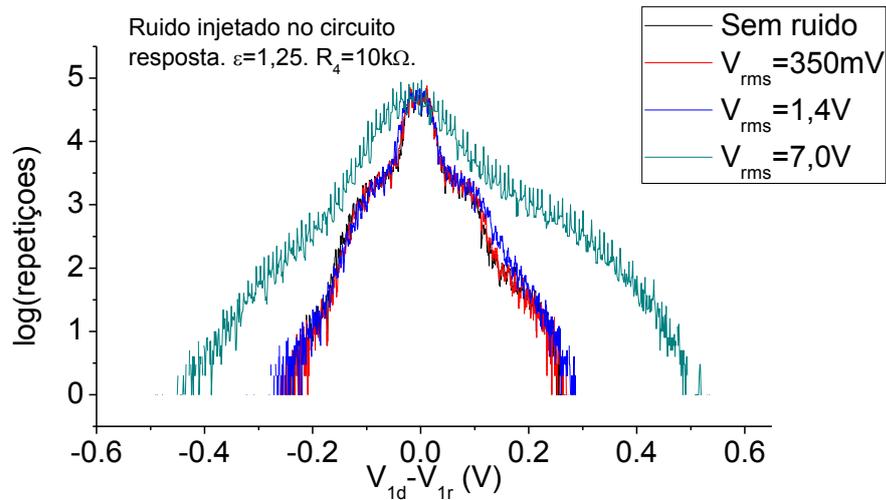


Figura 69: Logaritmo dos histogramas do vetor ortogonal ($V_{1d} - V_{1r}$) para níveis de ruído branco diferentes. $\varepsilon = 1,25$ e $R_4=10k\Omega$. Ruído branco injetado no circuito resposta.

Quando a adição de ruído ocorre apenas no circuito resposta, apenas este é afetado dificultando a sincronização com o circuito mestre. Podemos entender que o sinal de ruído destrói ou distorce o sinal de diferença entre os circuitos que chega ao circuito resposta, uma vez que os dois sinais são somados através das suas correntes que chegam à entrada negativa do amplificador operacional que gera o sinal V_{1r} . Desta forma o sincronismo do circuito resposta com o circuito mestre torna-se mais difícil. De modo geral temos que para $V_{rms} = 7\text{ V}$ em todos os casos o vetor ortogonal apresenta um alargamento acentuado em sua distribuição de voltagens. Para $V_{rms} = 0,35\text{V}$ observamos um pequeno alargamento no sinal de diferença quando $\varepsilon > 80$. Quando $V_{rms} = 1,4\text{ V}$ o alargamento do vetor ortogonal desaparece para $\varepsilon < 1,25$. Embora a Figura 65, caso do ruído injetado no circuito mestre, indique uma sensível redução em sua distribuição de voltagens.

Podemos entender esses comportamentos apenas como a competição entre a corrente gerada pelo sinal de erro que chega ao circuito resposta e a corrente gerada pela adição de ruído no sistema, embora quando injetado no circuito mestre seja enviado indiretamente ao circuito resposta.

Por fim, tentamos estabelecer sincronização entre dois circuitos desacoplados através da injeção do mesmo nível de ruído branco em ambos circuitos. Embora simulações feitas indiquem este efeito sob certas circunstâncias, não conseguimos implementá-lo experimentalmente. Talvez por este efeito ser sensível à assimetria entre os vários componentes dos dois sistemas, problema que tentaremos resolver em breve.

Conclusão

Neste trabalho de Mestrado fomos capazes de caracterizar o comportamento dinâmico de um circuito eletrônico descrito por uma equação diferencial de segunda ordem com realimentação atrasada. Mostramos que temos um sistema autônomo que pode operar em regime caótico, e com isso eventualmente poderemos estudar comunicação segura. Ao acoplarmos unidirecionalmente dois destes circuitos mostramos que o sistema pode exibir sincronismo.

Nesta dissertação apresentamos nossos resultados preliminares do estudo sobre eventos raros, em que buscamos fenômenos transientes que diferem muito da média. Com as medidas apresentadas no Capítulo 4 concluímos que o sinal de erro entre variáveis de tensão dos circuitos mestre e resposta apresentam distribuição de voltagens não-gaussiana. Entretanto, não encontramos uma distribuição de voltagens com lei de potência ou valores distantes da média, com alta frequência. O ruído branco que injetamos em nosso sistema só afetou o seu funcionamento quando adicionado com grande amplitude, tornando o sinal de erro entre os circuitos muito largo em relação ao caso sem ruído. Não conseguimos observar um estreitamento na distribuição de voltagens do sinal de erro ou alargamento de suas caudas ao injetarmos ruído no sistema, como previsto em simulações numéricas.

Apêndice – Filtros LC

Em nossos estudos trabalhamos com circuitos eletrônicos e queremos implementar em nosso sistema uma variável com atraso temporal, digamos $x(t-\tau)$ onde τ é o tempo de atraso. Com esse fim, poderíamos, por exemplo, usar um fio de comprimento L , longo o suficiente para que o sinal atravessasse-o depois de τ segundos e assim o tenhamos na saída do fio o sinal $x(t-\tau)$ ao invés de $x(t)$. Ou seja, o atraso é devido ao tempo de propagação. Entretanto sinais eletrônicos atravessam um fio coaxial a velocidades da ordem da luz no vácuo (3×10^8 m/s). Utilizando como base o circuito apresentado no Capítulo 3 desta dissertação, descrito pela equação de segunda ordem com atraso temporal:

$$\frac{d^2V_2}{dt^2} + \frac{1}{R_1C_1} \frac{dV_2}{dt} - \frac{1}{R_2C_2C_1} I(V_2) = -\frac{1}{R_2C_2R_EC_1} V_2(t - \tau)$$

que oscila numa banda de frequência de 0 a 12 kHz e possui tempo de resposta (tempo característico de amortecimento), t_r , dado pelo produto R_1C_1 , o inverso do fator que multiplica $\frac{dV_2}{dt}$. Com os valores de componentes apresentados no Capítulo 3 temos $t_r = R_1C_1 = 47 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9} \text{s} = 0,47$ ms. Assim podemos calcular o comprimento L do fio para que o sinal demore o tempo $\tau = t_r$ para percorrer o comprimento $L = c t_r = 141$ km. Utilizar um fio com 141 km de comprimento para circuitos eletrônicos é inviável, assim sendo precisamos de outro método para gerar atraso temporal.

Um filtro ideal que gera atraso deve ter uma função de transferência com duas importantes características:

- onde a amplitude tenha atenuação constante (se possível igual 0) para que nenhuma componente de frequência seja privilegiada ou atenuada pelo filtro.
- a fase seja expressa por uma equação de primeiro grau com derivada negativa, pois podemos definir o tempo de atraso de um filtro qualquer através da expressão $\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$, onde τ é o tempo de atraso

e ϕ é a fase adicionada ao sinal injetado no filtro e ν é a frequência do sinal injetado.

Podemos então usar, como tentativa de dispositivo que gera atraso temporal, filtros LC, que são formados por capacitores e indutores. Na Figura 70 temos o diagrama do filtro LC. Em nosso circuito utilizamos dez filtros LC em série para gerar um tempo de atraso desejável para a variável V_2 do nosso sistema.

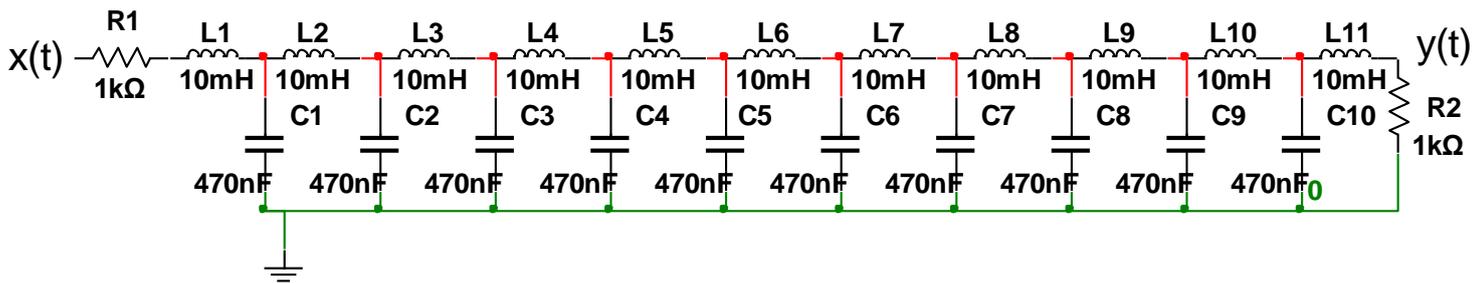


Figura 70: Diagrama de 10 filtros LC em série com sinal de entrada $x(t)$ e sinal de saída $y(t)$.

Utilizamos o programa Multisim[®] 10.0 para obter a função de transferência da linha de atraso. Utilizando a função de análise AC do Multisim[®] identificamos a amplitude (Figura 71) e a fase (Figura 72) do sinal de saída do filtro LC (Figura 70), tanto analisando a amplitude quanto a fase do sinal de saída.

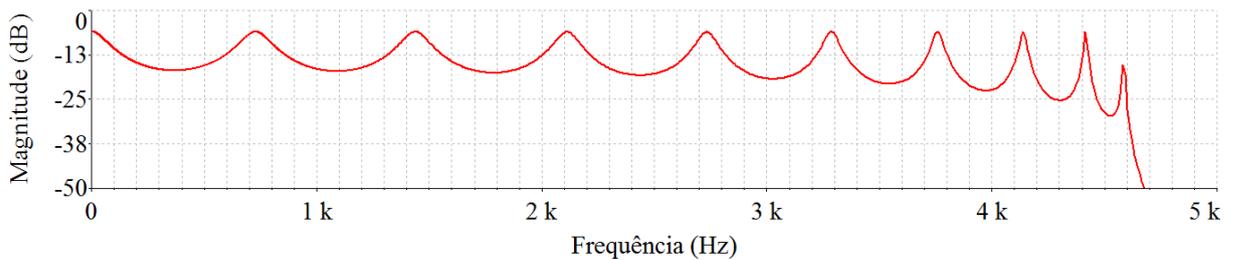


Figura 71: Amplitude do sinal de saída do filtro LC.

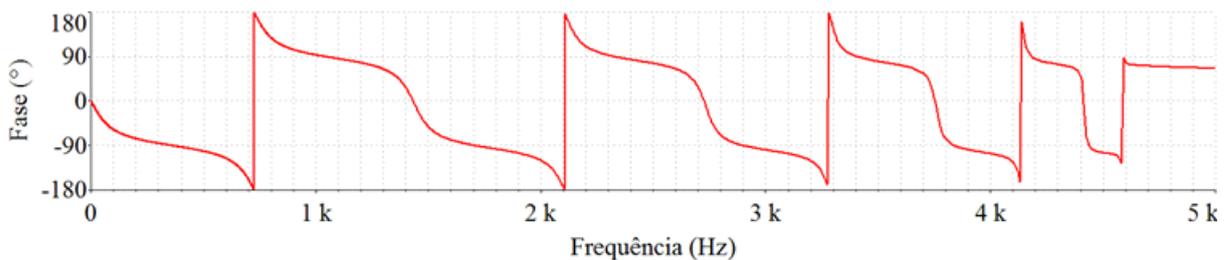


Figura 72: Fase do sinal de saída do filtro LC.

Através da Figura 71 constatamos que o filtro LC impede a transmissão de sinais com frequências maiores que 4,6 kHz uma vez que um sinal com frequência 4,6 kHz recebe um ganho de -30 dB, ou seja, tem sua voltagem atenuada 31,62 vezes. Na Figura 72 não encontramos uma reta como desejado para um filtro ideal de atraso, mas podemos aproximar em algumas janelas de frequência a função de transferência como retas. Entre 100 e 600 Hz, 850 Hz e 1,35 kHz, 1,55 a 2 kHz, por exemplo. E as inclinações dessas várias retas são iguais.

Vemos nas Figuras 73 e 74 que para duas formas de ondas diferentes, o filtro LC atenuou consideravelmente os sinais de entrada, mas quando amplificamos o sinal de saída e o deslocamos temporalmente percebemos que o filtro LC pode ser utilizado como filtro de atraso. Percebemos também que depois que amplificamos o sinal de saída do filtro LC não conseguimos recuperar exatamente o sinal de entrada, pois as componentes de frequência acima de 4,6 kHz foram completamente suprimidas (ver Figura 71).

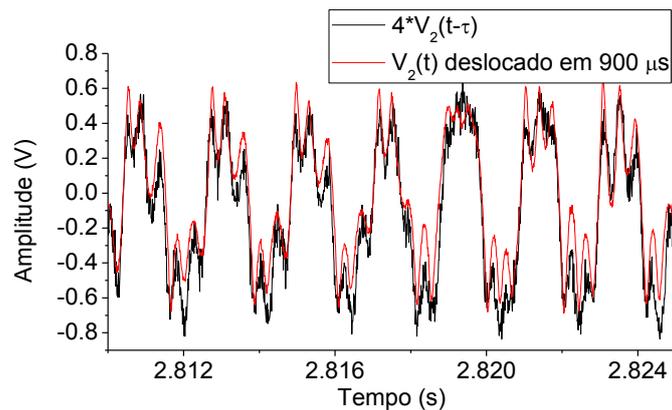


Figura 73: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900\mu\text{s}$ e $4*V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.

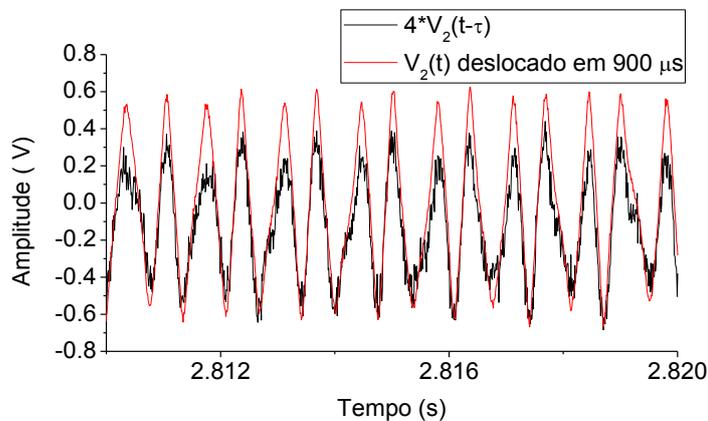


Figura 74: Séries temporais de $V_2(t)$ deslocado em $900\mu\text{s}$ e $4*V_2(t-\tau)$, mostrando a relação entre o sinal de saída e de entrada no filtro LC.

Referências Bibliográficas

- (s.d.). Acesso em 01 de 06 de 2012, disponível em Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Power_law
- (s.d.). Acesso em 01 de 06 de 2012, disponível em Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Long_Tail
- (s.d.). Acesso em 2012 de 06 de 01, disponível em Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Gutenberg-Richter_law
- Argyris, A., Syvridis, D., Larger, L., Annovazzi-Lodi, V., Colet, P., Fischer, I., et al. (2005). Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, pp. 343-346.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., & Zhou, C. (2002). The Synchronization of Chaotic Systems. *Physics Reports*, 366, pp. 1-101.
- Bogacki, P., & Shampine, L. F. (1989). A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas. *Appl. Math. Lett.* 2, pp. 321-325.
- Boylestad, R., & Nashelsky, L. (1998). *Electronic devices and circuits theory - 7ª Edição*. Prentice Hall.
- Brown, R. (1993). Calculating Lyapunov exponents for short and/or noisy data sets. *Physical Review E*, vol.47, pp. 3962-3969.
- Carroll, T. L., & Pecora, L. M. (1991). Synchronizing Chaotic Circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol.38, pp. 453-456.
- Cuomo, K. M., & Oppenheim, A. V. (1993). Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications. *Physical Review Letters*, vol. 71, pp. 65-68.
- Eckmann, J., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., & Ciliberto, S. (1986). Lyapunov exponents from time series. *Physical Review A*, vo.34, pp. 4971-4979.
- Farmer, J. D. (1982). Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica 4D*, pp. 366-393.
- Feigenbaum, M. (1983). Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D*.
- Fisher, I., Vicente, R., Buldú, J. M., Peil, M., Mirasso, C. R., Torrent, C., et al. (2006). Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying. *Physical Review Letters*, vol. 97, 123902.
- Flunkert, V., D'Huys, O., Danckaert, J., Fischer, I., & Schöll, E. (2009). Bubbling in delay-coupled lasers. *Physical Review E*, 79, 065201, pp. 1-4.
- Fraser, A., & Swinney, H. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A* 33, pp. 1134-1140.
- Fujisaka, H. &. (1983). *Prog. Theo. Phys.* 69.
- Gammaitoni, L., Hanggi, P., Jung, P., & Marchesoni, F. (1998). Stochastic resonance. *Reviews Modern Physics* 70, pp. 223–287.

- Gao, J., Lu, H., He, D., Stone, L., & Zheng, Z. (2003). Unexpected correspondence between noise-induced and master-slave complete synchronizations. *PHYSICAL REVIEW E* 68 , p. 037202.
- Gauthier, D. J., & Bienfang, J. C. (1996). Intermittent Loss of Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators: Toward a New Criterion for High-Quality Synchronization. *Physical Review Letters*, 77 , pp. 1751-1754.
- Giardina, C., Kurchany, J., Lecomte, V., & Tailleur, J. (2011). Simulating rare events in dynamical processes. *arXiv:1106.4929v2* , pp. 1-37.
- Gonçalves, C., & Neto, L. G. (2011). Electrical implementation of a complete synchronization dynamic system. *Journal of Physics: COnference Series* 285, 012013 .
- Harrison, R., & Biswas, D. (1986). Chaos in light. *Nature* 321 , p. 504.
- Haykin, S., & Principe, J. C. (1998). Making sense of a complex world. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 15, n. 3 , pp. 66-81.
- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50 , pp. 69-77.
- Hilborn, R. C. (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics*. New York - Oxford: Oxford University Press.
- Jr., J. C., Romero, M. A., & Neto, L. G. (2008). Chaotic Communication Based on the Particle-in-a-Box Electronic Circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* , pp. 1108-1115.
- Kennel, M. B., Brown, R., & Abrabanel, H. B. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, vol. 43 , pp. 3403-3411.
- Krawiecki, A., Hołyst, J. A., & Helbing, D. (2002). Volatility Clustering and Scaling for Financial Time Series due to Attractor Bubbling. *Physical Review Letters*, 89, 158701 , pp. 1-4.
- Lai, Y.-C., Liu, Z., Billings, L., & Schwartz, I. B. (2003). Noise-induced unstable dimension variability and transition to chaos in random dynamical systems. *PHYSICAL REVIEW E* 67 , p. 026210.
- Lu, H., & He, Z. (1996). Chaotic behavior in first-order autonomous continuous-time systems with delay. *IEEE Trans. Circuits Systems I: Fund. Th. Appl.* 43 , pp. 700-702.
- Mackey, M. C., & Glass, L. (1977). Oscillation and chaos in physiological control system. *Science* 197 , pp. 287-289.
- May, R., & Anderson, R. (1987). Transmission dynamics of HIV infection. *Nature* 326 , p. 137.
- Monteiro, L. H. (2011). *Sistemas Dinâmicos - 3ª edição*. São Paulo: Livraria da Física.
- Moon, F., & Holmes, P. (1979). A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration* 65 , p. 275.

- Murison, M. A. (07 de dezembro de 2011). *Notes on how to numerically calculate the maximum lyapunov exponent*. Fonte: <http://www.murison.alpheratz.net/papers/Notes/LyapCalc/LyapCalc.pdf>
- Namajunas, A., Pyragas, K., & Tamasevicius, A. (1995). An electronic analog of the Mackey-Glass system. *Physics Letters A* 201 , pp. 42-46.
- Newcomb, R. W., & Sathyan, S. (1983). An RC op amp chaos generator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 30 , pp. 54-56.
- Nixon, M., Friedman, M., Ronen, E., Friesem, A. A., Davidson, N., & Kanter, I. (2011). Synchronized cluster formation in coupled laser networks. *Physical Review Letters*, vol. 106, 223901 .
- Openheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems, Second Edition*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.
- Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, vol. 64 , pp. 821-824.
- Ponomarenko, V. I., & Prokhorov, M. D. (2002). Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system. *Physical Review E*, 66, 026215 , pp. 1-7.
- Radhakrishna, R. K. (2000). Nonlinear measures of heart rate time series: Influence of posture and controlled breathing. *Autonomic Neuroscience: Basic and Clinical*, v.83 , pp. 148–158.
- Sanchez, A. D., Lopez, J. M., Rodriguez, M. A., & Matias, M. A. (2004). Rare Events and Scale-Invariant Dynamics of Perturbations in Delayed Chaotic Systems. *Physical Review Letters* 92 , p. 204101.
- Schmitz, R., Graziani, K., & Hudson, J. (1977). Experimental evidence of chaotic states in the Belousov-Zhabotinskii reaction. *The Journal of Chemical Physics* 67 , p. 3040.
- Schwartz, I. B., & Shaw, L. B. (2007). Isochronal synchronization of delay-coupled systems. *Physical Review E*, vol. 75, 046207 .
- Senthikulmar, D. V., Lakshamanan, M., & Kurths, J. (2005). Bifurcations and chaos in time delayed piecewise linear dynamical systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 15 , pp. 2895-2912.
- Senthilkumar, D., & Lakshmanan, M. (2005). Transition from anticipatory to lag synchronization via complete synchronization in time-delay systems. *Physical Review E*, vol.71, 016211 , pp. 1-10.
- Senthilkumar, D., Lakshamanan, M., & Kurths, J. (2006). Phase synchronization in time-delay systems. *Physical Review E*, vol. 74, 035205 .
- Senthilkumar, D., Lakshmanan, M., & Kurths, J. (2006). Phase synchronization in time-delay systems. *Physical Review E*, vol. 74, 035205 .
- Senthilkumar, D., Srinivasan, K., Murali, K., Lakshamanan, M., & Kurths, J. (2010). Experimental confirmation of chaotic phase synchronization in coupled time-delayed electronic circuits. *Physical Review E*, vol.82, 065201 .

- Shampine, L. F., & Thompson, S. (9 de Fevereiro de 2000). *Solving DDEs in MatLab - Manuscript*. Acesso em 25 de Dezembro de 2010, disponível em <http://www.radford.edu/~thompson/webddes>
- Sodré, P. U. (s.d.). *Transformada de Fourier*. Acesso em 08 de dezembro de 2011, disponível em <http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pdfs/tfourier.pdf>
- Stachowiak, T., & Szydlowski, M. (2011). A differential algorithm for the Lyapunov spectrum. *Physica D 240* , pp. 1221-1227.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books.
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractor in turbulence. *Lectures Notes in Mathematics 898* , p. 366.
- Thompson, S., & Shampine, L. F. (23 de Março de 2000). *Solving Delay Differential Equations with dde23*. Acesso em 25 de Dezembro de 2010, disponível em <http://www.radford.edu/~thompson/webddes>
- Uchida, A., McAllister, R., & Roy, R. (2004). Consistency of Nonlinear System Response to Complex Drive Signals. *Physical Review Letters 93* , p. 244102.
- Venkataramani, S. C., Hunt, B. R., Ott, E., Gauthier, D. J., & Bienfang, J. C. (1996). Transitions to bubbling of chaotic systems. . *Physical Review Letters, 77* , pp. 5361-5364.
- Wagemakers, A., Buldú, J., & Sanjuán, M. (2008). Experimental demonstration of bidirectional chaotic communication by means of isochronal synchronization. *EPL, 81, 40005* .
- Wang, Y., Lai, Y.-C., & Zheng, Z. (2009). Onset of colored-noise-induced synchronization in chaotic systems. *PHYSICAL REVIEW E 79* , p. 056210.
- Wikipedia. (s.d.). *Transformada de Fourier*. Acesso em 08 de dezembro de 2011, disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier
- Witkowski, F. X. (1995). Evidence for determinism in ventricular fibrillation. *Physical Review Letters, v.75, n.6* , pp. 1230-1233.
- Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., & Vastano, J. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D, vol. 16* , pp. 285-317.
- Wright, J. (1984). Method for calculating a Lyapunov exponent. *Physical Review A, vol. 29* , pp. 2924-2927.
- Ying, L. H., Zhuang, Z., Heller, E. J., & Kaplan, L. (2011). Linear and nonlinear rogue waves statistics in the presence of random currents. *Nonlinearity, 24* , pp. 67-87.
- Zamora-Munt, J., Masoller, C., & Garcia-Ojalvo, J. (2010). Crowd synchrony and Quorum sensing in delay-coupled lasers. *Physical Review Letters, vol. 105, 264101* .
- Zhou, C., & Kurths, J. (2002). Noise-Induced Phase Synchronization and Synchronization Transitions in Chaotic Oscillators. *Physical Review Letters 88* , p. 230602.