

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTUDOS SOBRE O COMPORTAMENTO
DE SISTEMAS QUÂNTICOS NO
ESPAÇO-TEMPO DE SAFKO-WITTEN

HERONDY FRANCISCO SANTANA MOTA

JOÃO PESSOA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

ESTUDOS SOBRE O COMPORTAMENTO
DE SISTEMAS QUÂNTICOS NO
ESPAÇO-TEMPO DE SAFKO-WITTEN

Dissertação realizada sob orientação
do Prof. Dr. Valdir B. Bezerra,
apresentada ao Departamento de
Física, em complementação aos re-
quisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

HERONDY FRANCISCO SANTANA MOTA

M917e Mota, Herondy Francisco Santana.
Estudos sobre o comportamento de sistemas quânticos
no espaço-tempo de Safko-Witten / Herondy Francisco
Santana Mota.-- João Pessoa, 2009.
93f. : il.
Orientador: Valdir B. Bezerra
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Espaço-tempo – Safko-Witten. 3. Desvio de
fase. 4. Amplitude de espalhamento. 5. Energia – ponto zero.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às três pessoas que mais amo: minha mãe, irmã e meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- À toda minha família, em especial à minha mãe e irmã por todo apoio e incentivo.
- Ao meu orientador e amigo Valdir Barbosa Bezerra, por ter me aceitado como seu aluno, pela paciência, incentivo, compreensão e por sempre acreditar que eu seria capaz de realizar este trabalho.
- Ao professor Nail Khusnutdinov pela ajuda e pelas discussões que contribuíram bastante para meu aprendizado.
- À todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial ao professor Dr. Eugênio R. Bezerra de Mello pelas diversas discussões produtivas que tivemos, as quais me ajudaram muito neste trabalho.
- Aos meus amigos Rubens Silva e seus filhos Larissa Rodrigues e Erick Silva, Ressalto minha eterna gratidão por terem me acolhido quando da minha chegada em João Pessoa e por sempre terem me tratado como um membro da família.
- Aos amigos de pós graduação Thiago Caramês, Lúcio Fábio, Marco Aurélio, Jansen Formiga, Carlos Bessa e Ferdinande pelos momentos de lazer, descontração e principalmente pelas mais variadas discussões. Tudo isto, de alguma forma, contribuiu para minha formação. Agradeço, também, ao meu amigo Marcos Antônio pela ajuda com as figuras e com algumas partes estruturais desta dissertação.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

- Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba pelo acolhimento e suporte para realização deste trabalho.
- E finalmente, à todos os outros que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação obtemos as soluções das equações de Einstein-Maxwell gerada por uma fonte constituída por um tubo de matéria, em cujo interior existe um campo magnético axial, e no exterior, um campo magnético circular. Estas soluções são particularizadas, de tal modo que o campo magnético externo é tomado como sendo nulo e o interior é pouco intenso (espaço-tempo de Safko-Witten).

Encontramos as soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac bem como o desvio de fase e a amplitude de espalhamento no espaço-tempo de Safko-Witten e mostramos como essas quantidades dependem da estrutura cônica do espaço-tempo exterior ao tubo de matéria e da geometria do campo gravitacional na região interior.

Consideramos um campo escalar com massa, no caso particular em que a solução interior não é levada em conta. Calculamos a energia de ponto zero e mostramos o efeito da conicidade da geometria do espaço-tempo exterior sobre o resultado obtido.

Palavras chaves: espaço-tempo de Safko-Witten, desvio de fase, amplitude de espalhamento e energia de ponto zero.

ABSTRACT

In this dissertation we obtain the solution of the Einstein-Maxwell equations due to a tubular matter source with an axial interior magnetic field and a circular exterior magnetic field. This solution is particularized for the case in which the exterior magnetic field vanishes (Safko-Witten spacetime).

In this background we find the solution of the Klein-Gordon and Dirac equations and analyse the problem concerning the scattering. In these situations the dependence of these quantities with the conicity of the exterior spacetime and on the geometry of the exterior solution is showed up.

We consider a massive scalar field in this background, but not taking into account the internal solution and calculate the ground state energy showing up the dependence of this quantity with the conicity of the geometry exterior spacetime.

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Mecânica Quântica Relativística no Espaço-Tempo Curvo	12
2.1	Teoria da Relatividade Geral	13
2.2	Mecânica Quântica Relativística	17
2.2.1	A equação de Klein-Gordon	18
2.2.2	A equação de Dirac	19
3	O espaço-tempo	22
3.1	Solução Geral	23
3.2	Soluções da equação de Klein-Gordon	28
3.3	Soluções da equação de Dirac	30
4	Espalhamento Quântico no espaço-tempo de Safko-Witten	39
4.1	O formalismo de ondas parciais	39
4.2	Espalhamento escalar no espaço-tempo de Safko-Witten	42
4.3	Espalhamento espinorial no espaço-tempo de Safko-Witten	52
4.3.1	O método	52
4.3.2	Espalhamento cônico	53
5	Energia de ponto zero de um campo escalar massivo no espaço-tempo de Safko-Witten	61
5.1	O procedimento de Regularização e Renormalização	62
5.2	A energia de ponto zero	64

6	Conclusões e Perspectivas	70
A	Notações, definições e cálculos adicionais	72
A.1	Algumas definições	72
A.2	Conexão afim para a métrica geral	73
A.3	Conexão afim e conexão espinorial afim para a métrica externa	74
A.4	Conexão afim e conexão espinorial afim para a métrica interna	75
A.5	Cálculo do comutador para o momento angular total para a métrica interna e externa	75
A.6	Decomposição de Gordon no espaço-tempo curvo	78
B	Funções especiais	80
B.1	Funções de Whittaker e Hipergeométrica	80
B.2	Funções de Bessel	81
B.3	Função Gamma	82
B.4	Função zeta de Riemann	82
C	Cálculos adicionais e definições relacionados a energia de ponto zero.	84
C.1	Expansão de heat kernel	84
C.2	Teorema do argumento	86
C.3	Aplicação do teorema do argumento	87
	Bibliografia	88

Capítulo 1

Introdução

Existem estudos no contexto de uma possível unificação do eletromagnetismo e da gravitação, onde são obtidas soluções cilindricamente simétricas das equações de Einstein-Maxwell. Neste caso, os campos eletromagnético e gravitacional são fontes da geometria [1]. A distribuição de matéria e as configurações usadas para o campo eletromagnético fornecem três possíveis soluções [2]. Duas configurações possuem correntes axial e angular, percorrendo a distribuição de matéria, produzindo, respectivamente, campos magnéticos na direção angular e na direção axial. A terceira configuração envolve uma distribuição de carga gerando um campo elétrico radial. Soluções analíticas são possíveis apenas para as duas primeiras, mas não para a terceira, para a qual existe apenas um tratamento qualitativo [1]. Safko e Witten [2], [3], analisaram alguns modelos geométricos com as duas configurações, nas quais estão presentes campos magnéticos. Em particular, nesta dissertação, escolhemos um modelo geométrico, constituído de um longo cilindro com uma fina camada de matéria, de raios ρ_1 e ρ_2 , e tal que $\rho_1 \approx \rho_2 \equiv \rho_0$, onde um campo magnético axial e um campo magnético angular estão presentes, respectivamente, nas regiões interior e exterior.

Um espaço-tempo com topologia cônica surge quando tomamos o campo magnético exterior, juntamente com a distribuição de matéria por unidade de comprimento, como sendo ambos nulos. Para nossos objetivos, este espaço-tempo

é de fundamental interesse já que queremos estudar como a topologia afeta alguns resultados físicos obtidos aqui, como em problemas relacionados a sistemas quânticos relativísticos, soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac, níveis de energia, amplitude de espalhamento e à energia de ponto zero.

Assim como a métrica original na região exterior ao cilindro de matéria, a métrica interior é bastante complicada, o que torna difícil sua aplicação. Contudo, uma boa aproximação pode ser feita com o intuito de obtermos bons resultados em alguns sistemas físicos analisados nesta dissertação.

O estudo do comportamento de sistemas quânticos interagindo com campos gravitacionais remonta ao início do século passado [4], quando a generalização das equações de Schrödinger e Dirac para espaços-tempos curvos foram discutidos, com a motivação de se construir uma teoria que combinasse mecânica quântica e relatividade geral. Um exemplo desses estudos é o do átomo de hidrogênio interagindo com o campo gravitacional gerado por um buraco negro de Schwarzschild [5, 6]. Como consequência da interação do átomo de hidrogênio com o espaço-tempo com curvatura, existe um desvio nos níveis de energia quando comparado com os níveis obtidos no espaço-tempo plano [6], que está intrinsecamente associado à curvatura do espaço-tempo na localização do átomo. Neste sentido, a obtenção de soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac [7]–[9] levando em conta os espaços-tempo interior e exterior, no caso desta dissertação, é de fundamental importância para mostrar como essas soluções dependem de aspectos locais (geometria) e globais (topologia), associados à métrica interior e exterior, respectivamente.

Um outro problema físico de interesse é o espalhamento “topológico” de uma partícula teste quântica, colocada em uma geometria cônica, que é, portanto, localmente plana. Um estudo dessa natureza foi feito, primeiramente, por Deser e Jackiw [10] utilizando a solução da equação de Schrödinger e posteriormente por Gerbert e Jackiw [11], utilizando soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac para calcular o desvio de fase e a amplitude de espalhamento. Para este fim, foi usada uma expansão em ondas parciais, adaptado para o fato que não existe um potencial

no sentido quântico. Esses cálculos foram realizados em uma geometria cônica (veja também [12, 13]) diferentemente do estudo realizado na presente dissertação, que possui um grau de complexidade maior, tendo em vista que estamos considerando duas diferentes regiões, uma com curvatura e a outra localmente plana. Portanto, o espalhamento é obtido, aqui, considerando que existe um espaço-tempo descrevendo o interior. A existência dessa estrutura interior afeta o desvio de fase e a amplitude de espalhamento. Dada a complexidade das soluções, fomos obrigados a fazer algumas aproximações para que pudéssemos obter uma expressão para a amplitude de espalhamento.

Complementando nosso estudo, um assunto de grande interesse na física moderna é o chamado efeito Casimir. Este efeito, previsto pelo físico holandês Hendrik B. G. Casimir, corresponde à existência de uma atração entre duas placas paralelas, perfeitamente condutoras e eletricamente neutras [14, 15]. A força atrativa, macroscópica, é de origem quântica e já teve sua comprovação experimental, sendo considerado um dos grandes triunfos da teoria quântica de campos. Alguns desenvolvimentos teóricos foram realizados na investigação de estruturas divergentes [16, 17] em espaços-tempo curvos e com condições de fronteira impostas aos campos quânticos [18]–[20].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2, faremos uma breve revisão sobre a relatividade geral e mecânica quântica relativística em espaços planos e curvos. No capítulo 3, obteremos os elementos de linha, com as respectivas aproximações que serão consideradas aqui, que descrevem os espaços-tempo interior e exterior no modelo de Safford-Witten. Em seguida obteremos as soluções para as equações de Klein-Gordon e Dirac.

No capítulo 4, usaremos as soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac para calcularmos o desvio de fase e a amplitude de espalhamento usando o método de expansão em ondas parciais. Veremos de que forma a estrutura interna afeta o resultado em comparação com o caso sem estrutura.

No capítulo 5 obteremos a energia de ponto zero de um campo escalar massivo

no espaço-tempo cônico considerado nesta dissertação. Discutiremos os métodos de regularização e renormalização para subtrair a estrutura divergente.

Finalmente, no capítulo 6, apresentaremos as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Mecânica Quântica Relativística no Espaço-Tempo Curvo

O objetivo deste capítulo é fazer uma revisão de alguns aspectos mais relevantes da teoria da relatividade geral e da mecânica quântica relativística, bem como de sua generalização para espaços-tempo curvos.

A generalização da mecânica quântica relativística para um espaço-tempo curvo qualquer, com métrica $g_{\mu\nu}$ ($\mu\nu = 0, 1, 2, 3$), é desejável sob diferentes pontos de vista.

Primeiro, essa generalização tem importância no entendimento da influência de campos gravitacionais sobre sistemas quânticos relativísticos. Em segundo lugar, essa pode nos fornecer uma melhor compreensão à respeito da estrutura da mecânica quântica, fundamentada em aspectos geométricos e topológicos.

A estrutura de toda essa revisão será necessária para o desenvolvimento de cálculos futuros, envolvendo sistemas quânticos na presença de campos gravitacionais. Deste modo, veremos como esta forma de combinar mecânica quântica e relatividade geral afeta sistemas físicos.

2.1 Teoria da Relatividade Geral

A relatividade geral foi formulada por Albert Einstein em 1915 e apresenta uma nova noção sobre a natureza do espaço e tempo. É considerada uma teoria de difícil compreensão, primeiramente porque quebra alguns conceitos e noções estabelecidos por Newton no contexto da mecânica clássica, e em segundo lugar porque a ferramenta matemática necessária para a formulação da teoria é bastante complexa, quando comparada com aquela exigida na formulação da teoria newtoniana da gravitação.

Einstein, em sua busca para construir uma teoria da gravitação, foi motivado por pelo menos cinco princípios: princípio de Mach, princípio da equivalência, princípio da covariância, princípio gravitacional do acoplamento mínimo e princípio da correspondência. Faremos, nos parágrafos seguintes e na ordem em que foram citados, um breve comentário acerca de cada um desses princípios. Em seguida, usaremos esta abordagem para introduzir as equações mais relevantes da teoria.

Resumidamente, o princípio de Mach sustenta-se em três idéias fundamentais. A primeira é de que a distribuição de matéria determina a geometria. A segunda idéia diz que é impossível falar em geometria em um universo vazio, de forma que se não existe matéria, então, não existe geometria. E por fim, a terceira idéia refere-se ao fato de que, somente um corpo presente em um universo vazio, não possui propriedades inerciais.

Sabemos que o princípio da equivalência se apresenta de duas formas: A chamada forma fraca, que é baseada em experimentos locais, e a forma forte que é verificada através de experimentos não-locais, os quais evidenciam variações relevantes no campo gravitacional. Por questões práticas, comentaremos apenas a forma fraca do princípio da equivalência e deixaremos que o leitor consulte as referências sugeridas para mais detalhes [21]–[23].

Localmente, o princípio da equivalência diz que não existem experimentos que possam distinguir entre um corpo caindo livremente em um campo gravitacional e um movimento uniforme no espaço, na ausência de campo gravitacional. Uma outra versão do princípio, mas ainda local, diz que um sistema uniformemente acelerado

relativamente a um sistema inercial, na relatividade especial, é localmente idêntico a um sistema em repouso em um campo gravitacional.

O princípio da covariância sustenta-se em dois conceitos bem conhecidos da física Newtoniana: o conceito de que todos os observadores inerciais são equivalentes e o conceito de que todas as equações da física devem ser escritas em um formalismo tal que ela seja covariante por transformações de coordenadas. No entanto, com a elaboração da relatividade geral, estes conceitos se tornaram mais gerais de forma que, agora, todos os observadores (inerciais ou não) são equivalentes, sendo que as equações da física devem apresentar-se na forma tensorial, permanecendo covariantes por transformações gerais de coordenadas.

O princípio gravitacional do acoplamento mínimo nos diz como obter equações de campo na relatividade geral a partir das equações que são conhecidas na relatividade especial. Então, devemos entender que nenhum termo será adicionado desnecessariamente na transição da relatividade especial para a relatividade geral. Por exemplo, a lei de conservação:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.1)$$

na sua transição para a relatividade geral, pode ser escrita nas seguintes formas:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

e

$$\nabla_\mu T^{\nu\mu} + g^{\mu\beta} R^\nu_{\mu\rho\alpha} \nabla_\beta T^{\rho\alpha} = 0, \quad (2.3)$$

em que o tensor de Riemann $R^\nu_{\mu\rho\alpha} = 0$ na relatividade especial e ∇_μ é a derivada covariante definida por,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\rho &= \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} V^\nu, \\ \nabla_\mu V_\rho &= \partial_\mu V_\rho - \Gamma^\nu_{\mu\rho} V_\nu. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Porém, o princípio do acoplamento mínimo nos diz para escolhermos a equação (2.2).

O princípio da correspondência estabelece que qualquer nova teoria deve ser consistente com outra teoria anteriormente estabelecida. Desta forma, a relatividade geral deve concordar não só com a relatividade especial na ausência de gravitação, como também com a teoria da gravitação Newtoniana no limite de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades.

Tendo em mente as principais idéias que conduziram Einstein a formulação da relatividade geral, podemos revisar agora o formalismo matemático no qual a teoria se sustenta.

Por definição, espaço e tempo na relatividade geral são representados por uma variedade Riemanniana quadri-dimensional dotada de uma conexão métrica afim e um tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Este tensor métrico deve ser não-singular, com assinatura -2 , e de acordo com o princípio do acoplamento mínimo, deve satisfazer:

$$\nabla_\mu g_{\nu\beta} = 0. \quad (2.5)$$

E ainda, de acordo com o princípio da equivalência, existem classes de curvas privilegiadas, as quais são denominadas de geodésicas. Desta forma, partículas livres viajam ao longo de geodésicas tipo-tempo e raios de luz viajam ao longo de geodésicas tipo-nula. Sendo assim, uma partícula viajando em uma geodésica tipo-tempo terá seu parâmetro de medida τ , chamado de tempo-próprio, definido por:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.6)$$

A equação da geodésica parametrizada com um parâmetro afim τ é dada por,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (2.7)$$

em que $\Gamma_{\nu\beta}^\mu$ é a conexão métrica afim. Para a relatividade geral, temos que esta conexão é igual aos símbolos de Christoffel, o que torna a conexão, uma conexão métrica dada por:

$$\Gamma_{\nu\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\beta}). \quad (2.8)$$

Como consequência da relação acima, temos que a conexão métrica deve ser simétrica, ou seja:

$$\Gamma_{\nu\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\nu}^\mu. \quad (2.9)$$

O tensor de Riemann, o qual esta diretamente ligado ao desvio geodésico ou curvatura do espaço-tempo, é definido por:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta} \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\gamma\nu}, \quad (2.10)$$

em que $\Gamma^\mu_{\nu\beta}$ é a conexão métrica dada por (2.8). Note que o tensor de Riemann acima depende da métrica e sua primeira e segunda derivada. Dentre outras propriedades de simetria, é um tensor anti-simétrico na troca dos dois últimos pares de índices e simétrico pela troca de índices em cada par.

Através do tensor de Riemann podemos definir o tensor de Ricci, fundamental para as equações de campo de Einstein, da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu}, \quad (2.11)$$

o qual é simétrico.

Uma contração do tensor de Ricci fornecerá o escalar de curvatura ou escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura podem ser usados para definir o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.13)$$

o qual também é simétrico e satisfaz a relação,

$$\nabla_\nu G^{\nu\mu} = 0. \quad (2.14)$$

Note que, o fato de o tensor de Riemann ser definido em termos da métrica e suas primeira e segunda derivadas nos lembra as equações de campo da gravitação de Newton, as quais são dadas em termos da segunda derivada do potencial gravitacional. Sendo assim, é razoável esperar que as equações de campo da relatividade geral envolvam o tensor de Riemann. De fato, podemos imaginar a métrica como sendo o potencial gravitacional da teoria Einsteiniana e a conexão afim como sendo a “força” gravitacional.

A equivalência entre massa e energia da relatividade especial, sugere que todas as formas de energia atuam como fontes para o campo gravitacional. Neste sentido, tomaremos o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ como fonte nas equações de campo da relatividade geral. Então, como vimos, pelo princípio do acoplamento mínimo, temos a conservação do tensor energia-momento dado por (2.2).

A equação (2.2) junto com a equação (2.14) sugerem que o tensor energia-momento e o tensor de Einstein são proporcionais. Ou seja,

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

em que κ é uma constante de proporcionalidade. Perceba que a equação acima esta diretamente relacionada com o princípio de Mach, o qual afirma que a matéria ($T^{\mu\nu}$) determina a geometria ($G^{\mu\nu}$). A constante κ pode ser determinada pelo princípio da correspondência, já que as equações de campo da relatividade geral devem reduzir-se à equação de Poisson no limite de campos fracos. Desta forma, κ será dado por:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.16)$$

e, portanto, teremos que as equações de campo da relatividade geral serão dadas por:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

No vácuo, $T^{\mu\nu} = 0$ e então teremos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0.$$

Levantando o índice μ na equação acima e em seguida contraindo com ν teremos $R = 0$. Portanto, no vácuo, teremos:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

2.2 Mecânica Quântica Relativística

A descrição de fenômenos em altas energias requer a investigação de equações relativísticas. Ou seja, equações que sejam invariantes por transformações de Lorentz.

A transição de uma descrição não-relativística para uma descrição relativística implica na mudança de vários conceitos da teoria não-relativística. Este será o assunto de revisão desta seção.

2.2.1 A equação de Klein-Gordon

Sabemos da mecânica quântica usual que a equação de Schrödinger é dada por,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (2.19)$$

em que H é o operador hamiltoniano dado por,

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r), \quad (2.20)$$

e

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla, \quad (2.21)$$

é o operador momento linear. Para obtermos uma equação de onda relativística, consideraremos a relação relativística envolvendo energia e momento, ou seja:

$$p^a = (E, \vec{p}) \quad e \quad p_a = (-E, \vec{p}). \quad (2.22)$$

Desta forma, podemos obter a relação invariante:

$$p^a p_a = -E^2 + \vec{p}^2 = -m^2, \quad (2.23)$$

em que m é a massa de repouso da partícula. Deste modo, substituindo os operadores momento (2.21) e energia

$$E = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.24)$$

na equação (2.23) e em seguida aplicando o operador resultante a uma função $\phi(x)$, teremos a equação:

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.25)$$

em que $\square = \eta^{ab}\partial_a\partial_b$ é o operador D'Alembertiano e η^{ab} é a métrica de Minkowski. A relação (2.25) é conhecida como equação de Klein-Gordon e descreve apenas o movimento de partículas escalares com spin zero.

A generalização da equação de Klein-Gordon para espaços curvos é feita pela substituição do tensor métrico no espaço plano η^{ab} pelo tensor métrico no espaço curvo $g^{\mu\nu}$ e também pela substituição da derivada parcial ∂_a pela derivada covariante ∇_μ dada por (2.4). Desta forma teremos,

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.26)$$

em que o operador D'Alembertiano generalizado pode ser escrito como:

$$\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu), \quad (2.27)$$

em que g é o determinate do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Portanto,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) - m^2 \right] \phi(x) = 0, \quad (2.28)$$

é a equação de Klein-Gordon no espaço curvo, na ausência de potenciais eletromagnéticos e com acoplamento mínimo [24]–[26].

2.2.2 A equação de Dirac

Uma equação relativística linear tanto na derivada temporal como nas derivadas espaciais foi proposta por Dirac em 1926. Tal equação resulta da seguinte hamiltoniana [24],

$$H = \alpha_i p^i + \beta m \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.29)$$

em que α_i e β são coeficientes constantes, na realidade, matrizes constantes. Para que a hamiltoniana (2.29) esteja de acordo com a relação $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, esses coeficientes devem satisfazer as seguintes relações [27]:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij}, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Os coeficientes mencionados acima são hermitianos e possuem traço nulo. Deste modo, como as matrizes de spin de Pauli possuem as mesmas características, podemos

fazer a seguinte escolha para os coeficientes α_i e β :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

em que,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

são as matrizes de Pauli. Com essas definições podemos reescrever os coeficientes em (2.30) da seguinte forma:

$$\gamma^{(0)} = \beta, \quad \gamma^{(i)} = \beta\alpha_i, \quad (2.33)$$

em que teremos agora,

$$\gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Esses novos coeficientes também satisfazem as relações (2.30). Ou seja,

$$\{\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\} = 2\eta^{ab} \quad (a, b = 0, 1, 2, 3), \quad (2.35)$$

em que η^{ab} é a métrica de Minkowski.

Agora, da equação de autovalor:

$$H\psi = E\psi$$

teremos, utilizando os operadores energia e momento, que:

$$(-i\alpha_i\partial^i + \beta m)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Multiplicando à direita, ambos os lados da equação acima por $(-\beta)$ teremos:

$$(i\beta\alpha_i\partial^i + i\partial_0 - m)\psi = 0$$

e portanto, a equação de Dirac poderá ser escrita na forma:

$$(i\gamma^{(a)}\partial_a - m)\psi(x) = 0, \quad (2.36)$$

em que os $\gamma^{(a)}$'s são dados pelas relações (2.34) e m é a massa de repouso da partícula.

Por outro lado, a equação de Dirac escrita em um espaço-tempo curvo descrito por uma métrica $g_{\mu\nu}$, na ausência de campo eletromagnético, é dada por:

$$[i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu - \Gamma_\mu(x)) - m]\psi(x) = 0, \quad (2.37)$$

em que os γ^μ 's são as matrizes de Dirac generalizadas, as quais satisfazem as relações de anti-comutação:

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = -2g^{\mu\nu}(x), \quad (2.38)$$

onde Γ_μ são as conexões espinoriais afim, que podem ser expressas em termos das tetradas $e^\mu_{(a)}$ e das matrizes de Dirac usuais $\gamma^{(a)}$ da seguinte forma:

$$\Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{4}\gamma^{(a)}\gamma^{(b)}e^\nu_{(a)}(\partial_\mu e_{(b)\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}e_{(b)\sigma}). \quad (2.39)$$

As matrizes de Dirac generalizadas estão conectadas com as matrizes de Dirac no espaço plano através das tetradas,

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_{(a)}(x)\gamma^{(a)}, \quad (2.40)$$

em que $e^\mu_{(a)}$ obedecem a relação,

$$\eta^{ab}e^\mu_{(a)}(x)e^\nu_{(b)}(x) = g^{\mu\nu}(x), \quad (2.41)$$

sendo que $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ são índices do espaço curvo e $a, b = 0, 1, 2, 3$ são índices do espaço plano.

A corrente associada à partícula espinorial é dada pela expressão,

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\psi(x). \quad (2.42)$$

Usando a decomposição de Gordon, podemos reescrever a equação acima como¹,

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \frac{1}{4m}\partial_\nu(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) + \frac{i}{2m}g^{\mu\nu}\bar{\psi}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\psi + \frac{i}{4m}\bar{\psi}\{[\partial_\nu\gamma^\nu, \gamma^\mu] + [\gamma^\nu, \partial_\nu\gamma^\mu]\}\psi \\ &\quad - \frac{i}{2m}\bar{\psi}[\gamma^\nu\Gamma_\nu, \gamma^\mu]\psi, \end{aligned} \quad (2.43)$$

em que $\bar{\psi}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\psi \equiv \bar{\psi}\partial_\nu\psi - (\partial_\nu\bar{\psi})\psi$.

¹Para ver a dedução desta decomposição, veja apêndice A (seção A.6).

Capítulo 3

O espaço-tempo

Modelos de fontes que correspondem a soluções estáticas, cilindricamente simétricas das equações de campo combinadas de Einstein-Maxwell são bem conhecidas. Esses modelos de fontes consistem de distribuições de matéria na presença de campos elétricos e magnéticos. A corrente elétrica na fonte dá origem ao campo magnético, enquanto a distribuição de carga, na mesma fonte, dá origem ao campo elétrico. Neste contexto, os campos gerados pela matéria e as distribuições de carga e corrente são fontes de campo gravitacional. Se nos restringirmos à existência de cargas puntiformes, correntes e matéria como fontes de gravitação, três configurações distintas de soluções serão possíveis para a geometria, a saber, aquela produzida por uma corrente axial, que gera um campo magnético cujas linhas são círculos no plano perpendicular ao eixo; uma corrente angular produzindo um campo magnético paralelo ao eixo e uma distribuição de carga produzindo um campo elétrico radial. Existe solução geral para as duas primeiras e um tratamento qualitativo dos campos para a terceira. Neste capítulo, calcularemos a solução geral para as duas primeiras configurações considerando um modelo geométrico constituído de uma fina camada de matéria de raios ρ_1 e ρ_2 , com $\rho_2 > \rho_1$. Em seguida, encontraremos as soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac levando em consideração certas restrições sobre as métricas. E por fim, exibiremos as correntes espinórias associadas a tais espaços-tempo.

3.1 Solução Geral

Considere, então, o problema de uma longa camada cilíndrica, de raios ρ_1 e ρ_2 , sendo uma camada de matéria infinitesimalmente fina e com densidade de massa fixa ao longo de seu comprimento. Diferentemente da abordagem utilizada originalmente por Safko-Witten [1], usaremos diretamente as equações de campo de Einstein para o cálculo das métricas das duas primeiras configurações já descritas. A forma mais geral do elemento de linha estático com simetria cilíndrica é dada por,

$$ds^2 = -e^{2\gamma(\rho)-2\psi(\rho)}(dt^2 - d\rho^2) + \rho^2 e^{-2\psi(\rho)} d\varphi^2 + e^{2\beta(\rho)+2\psi(\rho)} dz^2, \\ -\infty < t < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (3.1)$$

O tensor energia-momento associado a um campo eletromagnético na presença de um campo gravitacional, cuja geometria é descrita por $g_{\mu\nu}$, é dado por:

$$T^{\mu\nu} = - \left(F^{\mu\lambda} F^\nu_\lambda + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} \right). \quad (3.2)$$

Substituindo o tensor eletromagnético (veja apêndice A) e a métrica (3.1) na equação acima, teremos que:

$$\begin{aligned} T_{00} &= e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} (\mathbf{E}^2 + B_z^2), \\ T_{11} &= -e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} (E_x^2 - E_y^2 - B_z^2), \\ T_{22} &= -\rho^2 e^{2\psi(\rho)} (E_y^2 - E_x^2 - B_z^2), \\ T_{33} &= -e^{2(\psi(\rho)+\mu(\rho))} (B_z^2 - E_x^2 - E_y^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{E}^2 = E_x^2 + E_y^2$. As componentes não-nulas do tensor de Ricci são expressas por¹:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \gamma_{\rho\rho} - \psi_{\rho\rho} - \frac{\psi_\rho}{\rho} + \frac{\gamma_\rho}{\rho} + \gamma_\rho \mu_\rho - \psi_\rho \mu_\rho, \\ R_{11} &= - \left(\gamma_{\rho\rho} - \psi_{\rho\rho} + 2\psi_\rho^2 - \frac{\psi_\rho}{\rho} - \frac{\gamma_\rho}{\rho} + 3\mu_\rho \psi_\rho + \mu_\rho^2 + \mu_{\rho\rho} - \gamma_\rho \mu_\rho \right), \\ R_{22} &= - \left(-\frac{\psi_\rho}{\rho} - \psi_{\rho\rho} + \frac{\mu_\rho}{\rho} - \psi_\rho \mu_\rho \right), \\ R_{33} &= - \left(\psi_{\rho\rho} + \frac{\psi_\rho}{\rho} + \mu_{\rho\rho} + \mu_\rho^2 + \psi_\rho \mu_\rho + \frac{\mu_\rho}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹As conexões são dadas no apêndice A, seção A.2.

em que o índice ρ em μ , γ , ψ indica derivada em relação a esta coordenada. Para o escalar de curvatura teremos,

$$R = -2e^{2(\psi(\rho)-\gamma(\rho))} \left(\gamma_{\rho\rho} - \psi_{\rho\rho} + \psi_{\rho}\mu_{\rho} + \psi_{\rho}^2 + \mu_{\rho}^2 + \mu_{\rho\rho} + \frac{\mu_{\rho}}{\rho} - \frac{\psi_{\rho}}{\rho} \right) \quad (3.5)$$

Pelas equações de Einstein dadas em (2.17), podemos encontrar as equações para $\gamma(\rho)$, $\psi(\rho)$ e $\mu(\rho)$. Deste forma, teremos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} B_z^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= \frac{\gamma_{\rho}}{\rho} + \gamma_{\rho}\mu_{\rho} - 2\psi_{\rho}\mu_{\rho} - \psi_{\rho}^2 - \mu_{\rho}^2 - \mu_{\rho\rho} - \frac{\mu_{\rho}}{\rho}, \\ -B_z^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= \psi_{\rho}^2 - \frac{\gamma_{\rho}}{\rho} + 2\mu_{\rho}\psi_{\rho} - \frac{\mu_{\rho}}{\rho}, \\ -B_z^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= -\psi_{\rho}\mu_{\rho} - \psi_{\rho}^2 - \mu_{\rho}^2 - \mu_{\rho\rho} - \gamma_{\rho\rho}, \\ B_z^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= 2\psi_{\rho\rho} + \frac{2\psi_{\rho}}{\rho} - \gamma_{\rho\rho} - \psi_{\rho}^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que, devido a configuração do problema, $E_x = E_y = E_z = 0$. Do conjunto de equações acima poderemos extrair as seguintes equações:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_{\rho\rho} + \mu_{\rho}^2 + \frac{2\mu_{\rho}^2}{\rho}, \\ 0 &= \gamma_{\rho\rho} - \psi_{\rho\rho} - \frac{\psi_{\rho}}{\rho} + \psi_{\rho}^2 + \mu_{\rho}\psi_{\rho} - \frac{\mu_{\rho}}{\rho}, \\ 0 &= \gamma_{\rho\rho} - 2\psi_{\rho\rho} - \frac{2\psi_{\rho}}{\rho} - 2\mu_{\rho}\psi_{\rho} + \frac{\gamma_{\rho}}{\rho} + \gamma_{\rho}\mu_{\rho} + \frac{\mu_{\rho}}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A solução geral para a primeira das equações acima é,

$$\mu_{\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{(\rho+\rho_0)}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) na última equação em (3.7), teremos:

$$0 = \gamma_{\rho\rho} - 2\psi_{\rho\rho} - \frac{2\psi_{\rho}}{(\rho+\rho_0)} + \frac{\gamma_{\rho}}{(\rho+\rho_0)} + \frac{1}{\rho(\rho+\rho_0)} - \frac{1}{\rho^2}.$$

A solução geral para a equação acima é dada por,

$$\gamma_{\rho} = 2\psi_{\rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{c^2}{(\rho+\rho_0)}, \quad (3.9)$$

em que c é uma constante arbitrária.

Substituindo (3.8) e (3.9) na segunda equação em (3.7) teremos,

$$0 = f_{\rho} + f \left(\frac{1}{(\rho+\rho_0)} - \frac{2}{\rho} \right) + f^2 - \frac{c^2}{(\rho+\rho_0)^2} - \frac{1}{\rho(\rho+\rho_0)} + \frac{2}{\rho^2}, \quad (3.10)$$

em que $f = \psi_\rho$. A equação acima é uma equação generalizada de Ricatti cuja solução geral é dada por,

$$\psi_\rho = \frac{\frac{c}{(\rho+\rho_0)} + 1 - k(\rho + \rho_0)^{-2c} \left[\frac{c\rho}{(\rho+\rho_0)} - 1 \right]}{1 + k(\rho + \rho_0)^{-2c}}, \quad (3.11)$$

onde k é uma constante arbitrária. Integrando as equações (3.8), (3.9) e (3.11), temos:

$$\begin{aligned} \mu &= \ln \left[\frac{(\rho + \rho_0)}{\rho} \right] + n, \\ \gamma &= \ln \left\{ (\rho + \rho_0)^{c^2+2c} [1 + k(\rho + \rho_0)^{-2c}]^2 \rho \right\} + p, \\ \psi &= \ln \left\{ (\rho + \rho_0)^c [1 + k(\rho + \rho_0)^{-2c}]^2 \rho \right\} + q, \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo n , p e q constantes arbitrárias. Substituindo (3.12) em (3.1), temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(\rho + \rho_0)^{2c^2+2c} [1 + k(\rho + \rho_0)^{-2c}]^2 e^{2p-2q} (dt^2 - d\rho^2), \\ &+ (\rho + \rho_0)^{-2c} [1 + k(\rho + \rho_0)^{-2c}]^{-2} e^{-2q} d\varphi^2, \\ &+ (\rho + \rho_0)^{2+2c} [1 + k(\rho + \rho_0)^{-2c}]^2 e^{2q+2n} dz^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que $\rho_0 = -\frac{1}{l}$ é uma constante arbitrária.

Da mesma forma como antes, as componentes do tensor energia-momento associado a um campo magnético angular gerado por uma corrente axial é dado por,

$$\begin{aligned} T_{00} &= e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} B_y^2, \\ T_{11} &= -e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} B_y^2, \\ T_{22} &= e^{-2\psi(\rho)} B_y, \\ T_{33} &= -e^{2(\mu(\rho)+\psi(\rho))} B_y^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando as equações (3.4), (3.5) e (3.14) nas equações de Einstein temos o seguinte conjunto de equações,

$$\begin{aligned} B_y^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= \frac{\gamma_\rho}{\rho} + \gamma_\rho \mu_\rho - 2\psi_\rho \mu_\rho - \psi_\rho^2 - \mu_\rho^2 - \mu_{\rho\rho} - \frac{\mu_\rho}{\rho}, \\ -B_y^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= \psi_\rho^2 - \frac{\gamma_\rho}{\rho} + 2\mu_\rho \psi_\rho - \gamma_\rho \mu_\rho - \frac{\mu_\rho}{\rho}, \\ B_y^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= -2\psi_\rho \mu_\rho - \psi_\rho^2 - \mu_\rho^2 - \mu_{\rho\rho} - \gamma_{\rho\rho}, \\ -B_y^2 e^{2(\gamma(\rho)-\psi(\rho))} &= 2\psi_{\rho\rho} + \frac{2\psi_\rho}{\rho} - \gamma_{\rho\rho} - \psi_\rho^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Do conjunto de equações acima podemos obter as seguintes equações,

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_{\rho\rho} + \mu_\rho^2 + \frac{2\mu_\rho}{\rho}, \\ 0 &= \gamma_{\rho\rho} - \psi_{\rho\rho} - \frac{\psi_\rho}{\rho} + \psi_\rho^2 + \psi_\rho\mu_\rho - \frac{\mu_\rho}{\rho}, \\ 0 &= \gamma_{\rho\rho} + \frac{\gamma_\rho}{\rho} + \gamma_\rho\mu_\rho - \frac{\mu_\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A solução geral para a primeira das equações acima é dado por (3.8). Para a terceira equação teremos,

$$\gamma_\rho = \frac{1}{\rho} + \frac{\delta - 1}{(\rho + \rho_0)}, \quad (3.17)$$

em que δ é uma constante arbitrária. Substituindo (3.8) e (3.17) na segunda equação em (3.16), teremos:

$$f_\rho + f \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho + \rho_0} \right) - f^2 + \frac{\delta - 1}{(\rho + \rho_0)^2} + \frac{1}{\rho(\rho + \rho_0)} = 0, \quad (3.18)$$

em que $f = \psi_\rho$. A equação (3.18) é uma equação generalizada de Ricatti e tem solução geral dada por,

$$\psi_\rho = - \frac{\sqrt{\delta} - \frac{\rho_0}{\rho} + \kappa(\rho + \rho_0)^{-2\sqrt{\delta}}[-\sqrt{\delta} - \frac{\rho_0}{\rho}]}{(\rho + \rho_0)[1 + \kappa(\rho + \rho_0)^{-2\sqrt{\delta}}]}, \quad (3.19)$$

em que κ é uma constante arbitrária. Integrando (3.17) e (3.19), obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \ln \rho + (\delta - 1) \ln(\rho + \rho_0) + a, \\ \psi &= \ln \left[\frac{\rho(\rho + \rho_0)^{\sqrt{\delta}}}{(\rho + \rho_0)[(\rho + \rho_0)^{2\sqrt{\delta}} + \kappa]} \right] + b, \end{aligned} \quad (3.20)$$

em que a e b são constantes arbitrárias. Substituindo (3.8) e (3.20) na equação (3.1) obtemos o seguinte elemento de linha:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - (\rho + \rho_0)^{2(\delta - \sqrt{\delta})} [(\rho + \rho_0)^{2\sqrt{\delta}} + \kappa]^2 e^{2(a-b)} (dt^2 - d\rho^2), \\ &+ (\rho + \rho_0)^{2(1 - \sqrt{\delta})} [(\rho + \rho_0)^{2\sqrt{\delta}} + \kappa]^2 e^{-2b} d\varphi^2, \\ &+ \frac{(\rho + \rho_0)^{2\sqrt{\delta}}}{[(\rho + \rho_0)^{2\sqrt{\delta}} + \kappa]^2} e^{2(n+b)} dz^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nesta dissertação estamos interessados em trabalhar com a métrica (3.21) no limite em que $[2, 3]$, $\kappa = \delta = 0$. Este caso limite torna-se necessário por um lado devido

a grande dificuldade de se trabalhar com esta métrica. Um exemplo disto é quando tentamos resolver a equação de Klein-Gordon ou a equação de Dirac. Infelizmente para estas equações, levando em consideração a métrica (3.21), não é possível obter soluções analíticas. Por outro lado estamos interessados em trabalhar com uma métrica com topologia cônica, e essa simplificação que consiste em fazer $\kappa = \delta = 0$, nos permite obter a estrutura desejada. Então, o caso limite já mencionado fornecerá a métrica, cuja seção $t = z = \text{constante}$ é cônica e é dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -\nu^2(dt^2 - d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (3.22)$$

em que escolhemos $\rho_0 = b = n = 0$. O déficit angular devido à conicidade do espaço-tempo é igual a $\nu = e^a$.

Uma outra situação a ser destacada é a da métrica (3.13). No modelo geométrico com que trabalhamos, escolhemos $c = -1$ nesta métrica. Esta escolha nos fornecerá a seguinte métrica não-singular na origem [2], e válida na região $0 < \rho < \rho_1$:

$$ds^2 = -(1 + k\rho^2)^2 e^{-2q}(dt^2 - d\rho^2) + \rho^2(1 + k\rho^2)^{-2} e^{-2q} d\varphi^2 + (1 + k\rho^2)^2 e^{2q} dz^2, \quad (3.23)$$

em que fizemos $p = n = \rho_0 = 0$. Mais adiante veremos ainda que precisaremos fazer a aproximação $k\rho^2 \ll 1$, para que possamos ter soluções para as equações de Klein-Gordon e Dirac, na região cuja geometria é descrita por (3.23).

No modelo geométrico que estamos considerando, que consiste de um tubo de matéria de raios ρ_1 e ρ_2 e parede muito fina ($\rho_2 \cong \rho_1$), admitiremos que o espaço-tempo que descreve o interior desta geometria é dado pela métrica (3.23). O espaço-tempo que descreve o exterior é dado pela métrica (3.22). Em um modelo mais realista existe uma métrica que descreve o espaço-tempo no tubo de matéria entre ρ_1 e ρ_2 . Porém, neste trabalho consideraremos essa camada de matéria tal que $\rho_2 - \rho_1 \approx 0$, de modo a simplificar os cálculos. Assim procedendo, teremos o resultado qualitativo que nos interessa.

3.2 Soluções da equação de Klein-Gordon

Com o objetivo de estudar o comportamento de partículas escalares, iremos resolver a equação de Klein-Gordon nas geometrias descritas pelas métricas (3.22) e (3.23), que correspondem às soluções externa [7] e interna ao tubo de matéria, respectivamente. Desta forma, devido à simetria do problema, uma vez que o tubo é infinitamente longo, consideraremos a partícula livre na direção z , e portanto, a análise efetiva do comportamento da partícula restringe-se ao plano $(\rho - \varphi)$. Então, substituindo a métrica externa (3.22) em (2.28), teremos:

$$g^{tt}\partial_t\partial_t\phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\rho\rho}\partial_\rho\phi] + g^{\varphi\varphi}\partial_\varphi\partial_\varphi\phi - m^2\phi = 0.$$

Podemos usar o seguinte Ansatz na equação acima,

$$\phi(x) = e^{-iEt}e^{in\varphi}R(\rho), \quad (3.24)$$

o que resultará na seguinte equação diferencial para $R(\rho)$:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (\omega^2 - \frac{\gamma^2}{\rho^2})R = 0, \quad (3.25)$$

em que $\omega^2 = E^2 - M^2$, $M = \nu m$ e $\gamma = \nu n$. A solução geral para a equação acima é dada por,

$$R_{ext}(\rho) = AJ_\gamma(\omega\rho) + BN_\gamma(\omega\rho), \quad (3.26)$$

em que A e B são constantes arbitrárias e $J_\gamma(\omega\rho)$ e $N_\gamma(\omega\rho)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente. Portanto, teremos:

$$\phi_{ext}(x) = e^{-iEt}e^{in\varphi}(AJ_\gamma(\omega\rho) + BN_\gamma(\omega\rho)). \quad (3.27)$$

Seguindo o mesmo procedimento, teremos para a métrica interna a seguinte equação diferencial,

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + [E^2 - (1 + k\rho^2)^2M^2 - \rho^{-2}(1 + k\rho^2)^4n^2]R = 0, \quad (3.28)$$

em que agora, $M = e^{-q}m$. Infelizmente, a equação acima não apresenta solução exata. Contudo, como dissemos antes, podemos fazer a aproximação $k\rho^2 \ll 1$. Com

esta aproximação, obteremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + [\omega^2 - 4kn^2 - 2kM^2\rho^2 - n^2\rho^{-2}]R = 0, \quad (3.29)$$

em que $\omega^2 = E^2 - M^2$. A solução geral, não-singular, para a equação acima é:

$$R_{int}(\rho) = \frac{C}{\rho} M_n \left(\frac{\omega^2 - 4kn^2}{8kM^2}, \frac{n}{2}, \sqrt{2k}M\rho^2 \right), \quad (3.30)$$

em que $M_n(\beta, \mu, \rho)$ é a função Whittaker e C é uma constante arbitrária. A equação (3.30) também pode ser escrita da seguinte forma (veja apêndice B):

$$R_{int}(\rho) = D \text{Exp} \left(-\frac{\tau\rho^2}{2} \right) \rho^n F(\rho), \quad (3.31)$$

em que,

$$F(\rho) = {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu - \beta, 2\mu + 1, \tau\rho^2 \right), \quad (3.32)$$

é a função hipergeométrica degenerada e $D = \sqrt{(\sqrt{2k}M)^{n+1}C}$, $\mu = \frac{n}{2}$, $\beta = \frac{\omega^2 - 4kn^2}{8kM^2}$, $\tau = \sqrt{2k}M$. Teremos, então, que:

$$\phi_{int}(x) = e^{-iEt} e^{in\varphi} \frac{C}{\rho} M_n \left(\frac{\omega^2 - 4kn^2}{8kM^2}, \frac{n}{2}, \sqrt{2k}M\rho^2 \right). \quad (3.33)$$

Devemos agora impor condições de continuidade às soluções (3.26) e (3.30) e às suas primeiras derivadas em $\rho_1 \approx \rho_2 = \rho_0$, pois estamos considerando a casca cilíndrica extremamente fina, de modo que podemos desprezar o campo gravitacional em seu interior. Então²,

$$R_{int}(\rho_0) = R_{ext}(\rho_0), \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{d\rho} R_{int}(\rho_0) = \frac{d}{d\rho} R_{ext}(\rho_0). \quad (3.35)$$

Assim, teremos as seguintes equações,

$$AJ_\gamma(\omega\rho_0) + BN_\gamma(\omega\rho_0) = G_n(\rho_0), \quad (3.36)$$

$$AJ'_\gamma(\omega\rho_0) + BN'_\gamma(\omega\rho_0) = G'_n(\rho_0), \quad (3.37)$$

²Veja que, agora, estamos adotando a letra ρ_0 para delimitar uma fronteira, diferentemente do caso em que a usamos como sendo uma constante arbitrária $\rho_0 = -\frac{1}{l}$.

em que $G_n(\rho_0) = R_{ext}(\rho_0)$. A solução para o sistema é dada por,

$$A = \frac{N'_\gamma(\omega\rho_0)G_n(\rho_0) - N_\gamma(\omega\rho_0)G'_n(\rho_0)}{J_\gamma(\omega\rho_0)N'_\gamma(\omega\rho_0) - J'_\gamma(\omega\rho_0)N_\gamma(\omega\rho_0)}, \quad (3.38)$$

$$B = \frac{J_\gamma(\omega\rho_0)G'_n(\rho_0) - J'_\gamma(\omega\rho_0)G_n(\rho_0)}{J_\gamma(\omega\rho_0)N'_\gamma(\omega\rho_0) - J'_\gamma(\omega\rho_0)N_\gamma(\omega\rho_0)}, \quad (3.39)$$

em que a “linha” indica a derivada com relação a ρ . Vale a pena chamar a atenção para o fato de que os coeficientes A e B carregam informações sobre a estrutura do espaço-tempo interior ao tubo de matéria. Portanto, a solução na região exterior ao tubo de matéria é dada pela equação (3.27), com os coeficientes A e B dados por (3.38) e (3.39), respectivamente.

3.3 Soluções da equação de Dirac

Resolveremos, agora, a equação de Dirac levando em consideração as métricas (3.22) e (3.23). Então, primeiramente, iremos considerar para a métrica (3.22), o seguinte conjunto de tétradas [8]:

$$e^\mu_{(a)} = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-a} \cos \varphi & e^{-a} \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\rho^{-1} \sin \varphi & \rho^{-1} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

As matrizes de Dirac no espaço curvo e as matrizes de Dirac no espaço plano estão relacionadas de acordo com a relação (2.40). Ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= e^{-a} \gamma^{(0)}, \\ \gamma^1 &= e^{-a} \gamma^{(\rho)}, \\ \gamma^2 &= \rho^{-1} \gamma^{(\varphi)}, \\ \gamma^3 &= \gamma^{(z)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que,

$$\begin{pmatrix} \gamma^{(\rho)} \\ \gamma^{(\varphi)} \\ \gamma^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{(1)} \\ \gamma^{(2)} \\ \gamma^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Desta forma, a equação de Dirac (2.37) na região exterior é dada por,

$$\left\{ ie^{-a}\gamma^{(0)}\partial_t + i\gamma^{(\rho)} \left[e^{-a}\partial_\rho - \frac{(1-e^{-a})}{2\rho} \right] + \frac{i}{\rho}\gamma^{(\varphi)}\partial_\varphi - m \right\} \psi(\rho) = 0, \quad (3.43)$$

em que $\gamma^\mu \Gamma_\mu = -\frac{1}{2\rho}(1-e^{-a})\gamma^{(\rho)}$ (veja apêndice A).

Antes de resolvermos a equação acima, devemos ter em mente uma questão importante a respeito de como procederemos. Desta forma, devemos lembrar que para termos soluções nas variáveis z e φ que são auto-estados simultâneos da hamiltoniana (2.29) e do operador momento angular total $J_z = -i\partial_\varphi + \frac{1}{2}\Sigma_z$, as seguintes relações devem ser verificadas; $[H, p_z] = [H, J_z] = 0$. De fato, este comutador é nulo tanto levando em consideração a métrica interna como levando em consideração a métrica externa (veja apêndice A). Sendo assim, podemos lançar mão do seguinte Ansatz,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} f_1(\rho) \\ -if_2(\rho)e^{i\varphi} \\ f_3(\rho) \\ -if_4(\rho)e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{-iEt}e^{il\varphi}, \quad (3.44)$$

em que $l = n - \frac{1}{2}$. Substituindo a equação acima em (3.43), teremos as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{df_1}{d\rho} - \frac{l_1}{\rho}e^a f_1 = (me^a + E)f_2, \quad \frac{df_2}{d\rho} + \frac{l_2}{\rho}e^a f_2 = (me^a - E)f_1, \quad (3.45)$$

em que $l_1 = (e^a n - \frac{1}{2})$ e $l_2 = (e^a n + \frac{1}{2})$. Desta forma teremos,

$$\frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_1}{d\rho} + \left(\omega^2 - \frac{(e^a n - \frac{1}{2})^2}{\rho^2} \right) f_1 = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_2}{d\rho} + \left(\omega^2 - \frac{(e^a n + \frac{1}{2})^2}{\rho^2} \right) f_2 = 0, \quad (3.47)$$

em que $\omega = \sqrt{E^2 - e^{2a}m^2}$. As soluções para as equações acima são dadas por,

$$\begin{aligned} f_1(\rho) &= A_1 J_{e^{an-\frac{1}{2}}}(\sqrt{E^2 - e^{2a}m^2}\rho) + B_1 N_{e^{an-\frac{1}{2}}}(\sqrt{E^2 - e^{2a}m^2}\rho), \\ f_2(\rho) &= A_2 J_{e^{an+\frac{1}{2}}}(\sqrt{E^2 - e^{2a}m^2}\rho) + B_2 N_{e^{an+\frac{1}{2}}}(\sqrt{E^2 - e^{2a}m^2}\rho), \end{aligned} \quad (3.48)$$

em que A_1, B_1, A_2 e B_2 são constantes arbitrárias e $J_{e^{an-\frac{1}{2}}}(\omega\rho)$ e $N_{e^{an-\frac{1}{2}}}(\omega\rho)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies. As componentes de (3.44) estão relacionadas da seguinte forma,

$$f_1(\rho) = \frac{(E + me^a)}{(E - me^a)} f_3(\rho), \quad f_2(\rho) = f_4(\rho). \quad (3.49)$$

Podemos calcular, também, a corrente espinorial associada à métrica exterior, cuja a expressão é dada pela equação (2.43). Neste caso teremos as seguintes quantidades não-nulas [7],

$$\begin{aligned} \sigma^{10} &= \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^0] = ie^{-2a} \gamma^{(\rho)} \gamma^{(0)}, \\ \sigma^{20} &= \frac{i}{2} [\gamma^2, \gamma^0] = \frac{i}{\rho} e^{-a} \gamma^{(\varphi)} \gamma^{(0)}, \\ \sigma^{30} &= \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^0] = ie^{-a} \gamma^{(3)} \gamma^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{21} &= \frac{i}{2} [\gamma^2, \gamma^1] = \frac{ie^{-a}}{2\rho} [\gamma^{(\varphi)} \gamma^{(\rho)}], \\ \sigma^{31} &= \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^1] = \frac{ie^{-a}}{2} [\gamma^{(3)} \gamma^{(\rho)}], \\ \sigma^{32} &= \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^2] = \frac{i}{2\rho} [\gamma^{(3)} \gamma^{(\varphi)}], \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} [\partial_\nu \gamma^\nu, \gamma^0] &= \frac{2e^{-a}}{\rho} \gamma^{(0)} \gamma^{(\rho)}, \\ [\gamma^\nu \Gamma_\nu, \gamma^0] &= \frac{e^{-a}}{\rho} (1 - e^{-a}) \gamma^{(0)} \gamma^{(\rho)}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} [\partial_\nu \gamma^\nu, \gamma^2] &= -\frac{1}{\rho^2} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}], \\ [\gamma^\nu, \partial_\nu \gamma^2] &= \frac{1}{\rho^2} (1 - e^{-a}) [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}], \\ [\gamma^\nu \Gamma_\nu, \gamma^2] &= -\frac{1}{2\rho^2} (1 - e^{-a}) [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}], \\ [\gamma^\nu \Gamma_\nu, \gamma^3] &= -\frac{1}{2\rho} (1 - e^{-a}) [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(3)}]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Portanto, substituindo as relações acima em (3.44) teremos:

$$\begin{aligned}
j^0 &= \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} + j_{conv}^0, \\
j^1 &= -\partial_t P_\rho + (\nabla \times \vec{\mathbf{M}})_\rho + j_{conv}^1, \\
j^\varphi &= -\partial_t + (\nabla \times \vec{\mathbf{M}})_\varphi + \frac{(e^a - 1)}{\rho} M_z + j_{conv}^\varphi, \\
j^3 &= -\partial_t P_z + (\nabla \times \vec{\mathbf{M}})_z + j_{conv}^3,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

em que $j^0 = j^t$, $j^1 = j^\rho$, $j^\varphi = \rho j^2$, $j^3 = j^z$. As quantidades $\vec{\mathbf{P}}$, $\vec{\mathbf{M}}$ e j_{conv}^μ são dadas por,

$$\begin{aligned}
j_{conv}^0 &= \frac{i}{2m} g^{00} \bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \psi, \\
j_{conv}^1 &= \frac{i}{2m} g^{11} \bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_1 \psi, \\
j_{conv}^2 &= \frac{i}{2m} g^{22} \bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_2 \psi, \\
j_{conv}^3 &= \frac{i}{2m} g^{33} \bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_3 \psi,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
P_\rho &= \frac{i}{2m} e^{-2a} \bar{\psi} \gamma^{(0)} \gamma^{(\rho)} \psi, \\
P_\varphi &= \frac{i}{2m} e^{-a} \bar{\psi} \gamma^{(0)} \gamma^{(\varphi)} \psi, \\
P_z &= \frac{i}{2m} e^{-a} \bar{\psi} \gamma^{(0)} \gamma^{(3)} \psi,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
M_\rho &= \frac{i}{4m} \bar{\psi} [\gamma^{(\varphi)}, \gamma^{(3)}] \psi, \\
M_\varphi &= \frac{i e^{-a}}{4m} \bar{\psi} [\gamma^{(3)}, \gamma^{(\rho)}] \psi, \\
M_z &= \frac{i e^{-a}}{4m} \bar{\psi} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}] \psi,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

que correspondem, respectivamente, à corrente convectiva, à polarização e à magnetização.

Agora, iremos resolver a equação de Dirac no espaço-tempo dado pela métrica

(3.23). Para isto, iremos escolher o seguinte conjunto de tétradas,

$$e^\mu_{(a)} = \begin{pmatrix} (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^q \cos \varphi & (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^q \sin \varphi & 0 \\ 0 & -(1 + \kappa\rho^2)\rho^{-1}e^q \sin \varphi & (1 + \kappa\rho^2)\rho^{-1}e^q \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^{-p} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Neste caso, as matrizes generalizadas de Dirac são relacionadas com as matrizes de Dirac no espaço-tempo plano pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^q\gamma^{(0)} \cong (1 - \kappa\rho^2)e^q\gamma^{(0)}, \\ \gamma^1 &= (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^q\gamma^{(\rho)} \cong (1 - \kappa\rho^2)e^q\gamma^{(\rho)}, \\ \gamma^2 &= (1 + \kappa\rho^2)e^q\rho^{-1}\gamma^{(\varphi)}, \\ \gamma^3 &= (1 + \kappa\rho^2)^{-1}e^{-q}\gamma^{(z)} \cong (1 - \kappa\rho^2)e^{-q}\gamma^{(z)}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

em que $\gamma^{(\rho)}$ e $\gamma^{(\varphi)}$ são dados por (3.42). Desta forma, usando o Ansatz (3.44), a equação de Dirac na região interior pode ser escrita na forma,

$$[(1 + k\rho^2)^{-1}e^q\gamma^{(0)}E + i(1 + k\rho^2)^{-1}e^q\gamma^{(\rho)}\partial_\rho + i(1 + k\rho^2)\rho^{-1}e^q\gamma^{(\varphi)}\partial_\varphi - m]\psi = 0. \quad (3.60)$$

Multiplicando ambos os lados por $(1 + k\rho^2)e^{-q}$, teremos:

$$[\gamma^{(0)}E + i\gamma^{(\rho)}\partial_\rho + i(1 + k\rho^2)^2\rho^{-1}\gamma^{(\varphi)}\partial_\varphi - (1 + k\rho^2)e^{-q}m]\psi = 0, \quad (3.61)$$

em que $\gamma^\mu\Gamma_\mu = 0$, na aproximação considerada (veja apêndice A). Portanto, teremos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\rho} - l(1 + \kappa\rho^2)^2\rho^{-1}f_1 &= [M(1 + \kappa\rho^2) + E]f_2, \\ \frac{df_2}{d\rho} + l(1 + \kappa\rho^2)^2\rho^{-1}f_2 &= [M(1 + \kappa\rho^2) - E]f_1, \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que $M = e^{-q}m$. Então, desacoplando as equações dadas em (3.62), obteremos as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{d^2f_1}{d\rho^2} + [\rho^{-1} + 2\alpha_1\rho] \frac{df_1}{d\rho} + [\lambda_1 - l^2\rho^{-2} - 2M^2k\rho^2]f_1 = 0, \quad (3.63)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + [\rho^{-1} + 2\alpha_2 \rho] \frac{df_2}{d\rho} + [\lambda_2 - (l+1)^2 \rho^{-2} - 2M^2 k \rho^2] f_2 = 0. \quad (3.64)$$

A solução geral, regular na origem, para as equações acima são:

$$f_1^{int}(\rho) = \frac{C_1}{\rho} \text{Exp} \left(-\frac{\alpha_1}{2} \rho^2 \right) M \left[\frac{\lambda_1 - 2\alpha_1}{4\sqrt{2M^2 k + \alpha_1^2}}, \frac{l}{2}, \sqrt{2M^2 k + \alpha_1^2} \rho^2 \right], \quad (3.65)$$

$$f_2^{int}(\rho) = \frac{C_2}{\rho} \text{Exp} \left(-\frac{\alpha_2}{2} \rho^2 \right) M \left[\frac{\lambda_2 - 2\alpha_2}{4\sqrt{2M^2 k + \alpha_2^2}}, \frac{(l+1)}{2}, \sqrt{2M^2 k + \alpha_2^2} \rho^2 \right], \quad (3.66)$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e $M_l(\beta, \mu, \rho)$ é a função de Whittaker. As constantes α_1 , α_2 , λ_1 e λ_2 são dadas por,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{kE}{(E+M)}, \\ \alpha_2 &= \frac{kE}{(E-M)}, \\ \lambda_1 &= -4kl(l+1) - 2\alpha_1 l + (E^2 - M^2), \\ \lambda_2 &= 2k(l+1) \frac{M}{(E-M)} - 2k[2l^2 - (5l+1)] + (E^2 - M^2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Lembrando ainda que $l = n - \frac{1}{2}$, as soluções (3.65) e (3.66) podem ser reescritas como (veja apêndice B),

$$f_1^{int}(\rho) = D_1 \text{Exp} \left(-\frac{(\alpha_1 + \tau_1)}{2} \rho^2 \right) \rho^l F_1(\rho), \quad (3.68)$$

$$f_2^{int}(\rho) = D_2 \text{Exp} \left(-\frac{(\alpha_2 + \tau_2)}{2} \rho^2 \right) \rho^{(l+1)} F_2(\rho), \quad (3.69)$$

em que,

$$F_1(\rho) = {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu_1 - \beta_1, (l+1), \tau_1 \rho^2 \right), \quad (3.70)$$

$$F_2(\rho) = {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu_2 - \beta_2, (l+2), \tau_2 \rho^2 \right), \quad (3.71)$$

são funções hipergeométricas degeneradas. As constantes β_1 , β_2 , μ_1 , μ_2 , τ_1 e τ_2 são

dadas por,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\lambda_1 - 2\alpha_1}{4\sqrt{2M^2k + \alpha_1^2}}, \\
\beta_2 &= \frac{\lambda_2 - 2\alpha_2}{4\sqrt{2M^2k + \alpha_2^2}}, \\
\mu_1 &= \frac{l}{2}, \\
\mu_2 &= \frac{(l+1)}{2}, \\
\tau_1 &= \sqrt{2M^2k + \alpha_1^2}, \\
\tau_2 &= \sqrt{2M^2k + \alpha_2^2}.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

As componentes radiais estão relacionadas da seguinte forma,

$$f_1 = \frac{[E + M(1 + k\rho^2)]}{[E - M(1 + k\rho^2)]} f_3, \quad f_2 = f_4. \tag{3.73}$$

Para o cálculo da corrente espinorial dada por (2.43), teremos as seguintes quantidades não-nulas:

$$\begin{aligned}
\sigma^{10} = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^0] &= i(1 + k\rho^2)^{-2} e^{2q} \gamma^{(\rho)} \gamma^{(0)}, \\
\sigma^{20} = \frac{i}{2} [\gamma^2, \gamma^0] &= i\rho^{-1} e^{2q} \gamma^{(\varphi)} \gamma^{(0)}, \\
\sigma^{30} = \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^0] &= i(1 + k\rho^2)^{-2} \gamma^{(3)} \gamma^{(0)},
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{21} = \frac{i}{2} [\gamma^2, \gamma^1] &= i\rho^{-1} e^{2q} \gamma^{(\varphi)} \gamma^{(\rho)}, \\
\sigma^{31} = \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^1] &= i(1 + k\rho^2)^{-2} \gamma^{(3)} \gamma^{(\rho)}, \\
\sigma^{32} = \frac{i}{2} [\gamma^3, \gamma^2] &= i\rho^{-1} \gamma^{(3)} \gamma^{(\varphi)},
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_\nu \gamma^\nu, \gamma^0] &\approx -(2k\rho + \rho - 1) e^{2q} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(0)}], \\
[\gamma^\nu, \partial_\nu \gamma^0] &\approx -2k\rho e^{2q} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(0)}], \\
[\gamma^\nu, \partial_\nu \gamma^1] &\approx -(1 + k\rho^2)^2 \rho^{-1} e^{2q} [\gamma^{(\varphi)}, \gamma^{(\rho)}],
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_\nu \gamma^\nu, \gamma^2] &\approx -(4k + \rho^{-2}) e^{2q} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}], \\
[\gamma^\nu, \partial_\nu \gamma^2] &\approx 4k e^{2q} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}],
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
[\partial_\nu \gamma^\nu, \gamma^3] &\approx -(2k\rho + \rho^{-1}) [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(3)}], \\
[\gamma^\nu, \partial_\nu \gamma^3] &\approx -2k\rho [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(3)}].
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Portanto, substituindo as relações acima em (2.43) teremos:

$$\begin{aligned}
j^0 &\approx (1 - 2k\rho^2) \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} + 2k\rho^2 \partial_\varphi P_\varphi + j_{conv}^0, \\
j^1 &\approx -(1 - 2k\rho^2)^{-2} \partial_t P_\rho + (1 - 2k\rho) (\nabla \times \vec{\mathbf{M}})_\rho, \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi M_z + \frac{(1 + 2k\rho^2)}{\rho} M_z + j_{conv}^1, \\
j^\varphi &\approx -\partial_t P_\varphi + (\nabla \times \vec{\mathbf{M}})_\varphi + j_{conv}^\varphi, \\
j^3 &\approx -(1 - 2k\rho^2) \partial_t P_z + (\nabla \times \vec{\mathbf{M}})_z - 2k\rho^2 \partial_\rho M_\varphi + j_{conv}^3,
\end{aligned} \tag{3.79}$$

em que $j^0 = j^t$, $j^1 = j^\rho$, $\rho j^2 = j^\varphi$ e $j^3 = j^z$. Os termos J_{conv}^μ são dados pelas relações (3.55), só que agora levando em consideração a métrica interna. As quantidades $\vec{\mathbf{P}}$ e $\vec{\mathbf{M}}$ são dadas por,

$$\begin{aligned}
P_\rho &= \frac{ie^{2q}}{2m} \bar{\psi} \gamma^{(0)} \gamma^{(\rho)} \psi, \\
P_\varphi &= \frac{ie^{2q}}{2m} \bar{\psi} \gamma^{(0)} \gamma^{(\varphi)} \psi, \\
P_z &= \frac{i}{2m} \bar{\psi} \gamma^{(0)} \gamma^{(3)} \psi,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
M_\rho &= \frac{i}{4m} \bar{\psi} [\gamma^{(\varphi)}, \gamma^{(3)}], \\
M_\varphi &= \frac{i}{4m} \bar{\psi} [\gamma^{(3)}, \gamma^{(\rho)}], \\
M_z &= \frac{ie^{2q}}{4m} \bar{\psi} [\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\varphi)}].
\end{aligned} \tag{3.81}$$

As condições de continuidade para as soluções e suas primeiras derivadas (3.48) e (3.65) e (3.49) e (3.66), são:

$$\begin{aligned}
f_j^{(int)}(\rho_0) &= f_j^{(ext)}(\rho_0), \\
\frac{d}{d\rho} f_j^{(int)}(\rho_0) &= \frac{d}{d\rho} f_j^{(ext)}(\rho_0),
\end{aligned} \tag{3.82}$$

em que $j = 1, 2$. Do sistema de equações que surge das relações acima obtemos,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{N'_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G_l(\rho_0) - N_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G'_l(\rho_0)}{J_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N'_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0) - J'_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)}, \\
B_1 &= \frac{J_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G'_l(\rho_0) - J'_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G_l(\rho_0)}{J_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N'_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0) - J'_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N_{\gamma-\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

e também,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{N'_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G_{(l+1)}(\rho_0) - N_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G'_{(l+1)}(\rho_0)}{J_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N'_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0) - J'_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)}, \\
B_2 &= \frac{J_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G'_{(l+1)}(\rho_0) - J'_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)G_{(l+1)}(\rho_0)}{J_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N'_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0) - J'_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)N_{\gamma+\frac{1}{2}}(\omega\rho_0)},
\end{aligned} \tag{3.84}$$

em que $\gamma = e^a n$, $\omega = \sqrt{E^2 - e^{2a} m^2}$ e $G_l(\rho_0) = f_1^{(int)}(\rho_0)$, $G_{(l+1)}(\rho_0) = f_2^{(int)}(\rho_0)$.

Capítulo 4

Espalhamento Quântico no espaço-tempo de Safko-Witten

Neste capítulo, trataremos do problema de espalhamento de uma partícula teste no espaço-tempo de Safko-Witten [10, 11]. Devemos lembrar, então, que a região exterior ao tubo de matéria tem topologia cônica. A região interior não é localmente plana, pois, a curvatura é diferente de zero. Assim, esperamos que o desvio de fase, bem como a amplitude de espalhamento, carreguem informações acerca da estrutura interna e também da externa. De fato, mostraremos que isto é verdade tanto para o espalhamento de uma partícula escalar como para uma partícula espinorial. Para isto, usaremos o formalismo de ondas parciais levando em consideração o fato que não existe um potencial no sentido usual da mecânica quântica. Na seção seguinte, faremos uma breve revisão sobre o formalismo de ondas parciais para que em seguida possamos aplicar esses resultados aos nossos objetivos.

4.1 O formalismo de ondas parciais

O método de ondas parciais é baseado na expansão da função $\phi(\rho, \theta)$ em termos dos auto-estados do momento angular. Em mecânica quântica, o fato de que os operadores $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$ comutam com o operador hamiltoniano do sistema físico considerado, nos diz

que estados correspondentes a diferentes valores do momento angular tomarão parte, independentemente, no processo de espalhamento. Portanto, é conveniente escrever a onda incidente, que descreve a partícula incidente, como uma superposição de ondas parciais, cada uma correspondendo a diferentes valores do momento angular. Desta forma, a expansão mencionada deve ser feita de tal modo que satisfaça a condição assintótica [28],

$$\phi(\rho, \varphi)_{\rho \rightarrow \infty} \longrightarrow e^{i\omega \cos \varphi} + \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\varphi) e^{i\omega \rho}, \quad (4.1)$$

em que $f(\varphi)$ é a amplitude de espalhamento. A equação (4.1) é constituída de uma onda incidente $\phi_{inc} = e^{i\omega \cos \varphi}$ e de uma onda devido ao espalhamento $\phi_{esp} = \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\varphi) e^{i\omega \rho}$.

Vamos considerar, agora, uma solução do tipo (3.27), constituída das funções de Bessel. Ou seja,

$$\phi(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n R_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad (4.2)$$

em que R_n é uma combinação das funções de Bessel como em (3.26). A expressão assintótica ($\rho \rightarrow \infty$) para as funções de Bessel são dadas por [30],

$$\begin{aligned} J_n(\omega \rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\omega \rho \pi}} \cos \left(\omega \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \\ N_n(\omega \rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\omega \rho \pi}} \sin \left(\omega \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Desta forma, podemos expandir a onda incidente em (4.1) em termos da expressão (4.2), já que esta última constitui um conjunto completo e ortonormal de autofunções. Sendo assim,

$$e^{i\omega \rho \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n R_n(\rho) e^{in\varphi}. \quad (4.4)$$

Usando as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi &= 2\pi \delta_{nm}, \\ \int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi &= i^n \pi J_n(z), \end{aligned} \quad (4.5)$$

obtemos de (4.4) a relação:

$$d_n R_n(\rho) = i^n J_n(z). \quad (4.6)$$

Portanto, (4.4) será dada por:

$$e^{i\omega\rho\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\omega\rho) e^{in\varphi}. \quad (4.7)$$

Por outro lado, também podemos expandir a amplitude de espalhamento em termos da solução angular $e^{in\varphi}$. Ou seja,

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) e (4.8) em (4.1), obteremos:

$$\phi(\rho, \varphi)_{\rho \rightarrow \infty} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi\omega\rho}} [S_n e^{i(\omega\rho - \frac{\pi}{4})} + (-1)^n e^{-i(\omega\rho - \frac{\pi}{4})}], \quad (4.9)$$

em que $S_n = (1 + i\sqrt{2\pi\omega}f_n)$. Note que o fluxo de ondas incidentes é proporcional a

$$|(-1)^n e^{-i(\omega\rho - \frac{\pi}{4})}|^2 = 1. \quad (4.10)$$

O fluxo de ondas espalhadas será proporcional a

$$|S_n e^{i(\omega\rho - \frac{\pi}{4})}|^2 = |S_n|^2. \quad (4.11)$$

Pela conservação do fluxo, teremos que (4.10) e (4.11) devem ser iguais. Ou seja,

$$\begin{aligned} |S_n|^2 &= 1, \\ |S_n| &= 1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Da relação acima, concluímos que o máximo que teremos é uma mudança na fase da onda espalhada. Portanto, a função de onda para grandes distâncias, como resultado do espalhamento, sofre mudança apenas na fase da onda espalhada. Sendo assim, podemos expressar S_n em termos de um parâmetro real δ_n fazendo a seguinte escolha:

$$S_n = e^{2i\delta_n}, \quad (4.13)$$

em que δ_n é chamado de desvio de fase. Desta forma, teremos:

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_n} &= 1 + \sqrt{-2\pi\omega}f_n, \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{-2\pi\omega}}(e^{2i\delta_n} - 1). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da relação (4.8) obtemos,

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{-2\pi\omega}} (e^{2i\delta_n} - 1) e^{in\varphi}. \quad (4.15)$$

Comparando as equações (4.2) e (4.9) no limite assintótico ($\rho \rightarrow \infty$) temos,

$$c_n = i^n e^{i\delta_n}. \quad (4.16)$$

Portanto, substituindo (4.16) em (4.2), temos:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{i\delta_n} R_n(\rho) e^{in\varphi}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\delta_n + \frac{n\pi}{2})} R_n(\rho) e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A equação acima, no limite assintótico considerado, obedece a (4.1).

4.2 Espalhamento escalar no espaço-tempo de Safko-Witten

Diferentemente da mecânica quântica não-relativística, o problema de espalhamento em um certo campo gravitacional não envolve um potencial do tipo usual. Contudo, existe uma formulação de espalhamento quântico associado a uma simetria planar, o qual pode ser aplicado a um espaço-tempo com topologia cônica [10, 11]. Então, convenientemente, podemos reescrever a solução (3.26) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} R_{ext}(\rho) &= (-1)^{\frac{(n-|n|)}{2}} (A J_{|\gamma|}(\omega\rho) + B N_{|\gamma|}(\omega\rho)), \\ &= (-1)^{\frac{(n-|n|)}{2}} \bar{R}_{|\gamma|}(\omega\rho). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Desta forma, escolhendo $A = \cos b_n$ e $B = -\sin b_n$, temos:

$$\bar{R}_{|\gamma|}(\omega\rho) = (\cos b_n J_{|\gamma|}(\omega\rho) - \sin b_n N_{|\gamma|}(\omega\rho)). \quad (4.19)$$

Então, de (4.3) concluímos que:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{|\gamma|}(\omega\rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\rho}} \left[\cos b_n \cos \left(\omega\rho - \frac{|\gamma|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin b_n \sin \left(\omega\rho - \frac{|\gamma|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\rho}} \cos \left(\omega\rho - \frac{|\gamma|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + b_n \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo a equação acima em (4.18) temos,

$$\begin{aligned} R_{ext}(\omega\rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\rho}} \cos\left(\omega\rho - \frac{|\gamma|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + b_n + \frac{(|n| - n)\pi}{2}\right), \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\rho}} \cos\left(\omega\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + b_n + \frac{(|n| - |\gamma|)\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

No caso de existência de espalhamento, a solução $R_{ext}(\omega\rho)$ terá a seguinte forma assintótica,

$$R_{ext}(\omega\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\rho}} \cos\left(\omega\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n\right). \quad (4.22)$$

Comparando (4.21) e (4.22), temos que o desvio de fase é dado por:

$$\begin{aligned} \delta_n &= b_n - \frac{|n|\pi}{2}(\nu - 1), \\ &= b_n - \frac{|n|}{2}\bar{\omega}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde usamos que $\nu = e^a$ e $\bar{\omega} = \pi(\nu - 1)$.

A amplitude de espalhamento dada por (4.15), toma a seguinte forma:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-2\omega\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{2i(b_n - \frac{|n|\bar{\omega}}{2})} - 1) e^{in\varphi}, \quad (4.24)$$

em que b_n é dado pela razão entre as expressões (3.38) e (3.39), ou seja:

$$\tan b_n = \frac{J_\gamma(\omega\rho_0)G'_n(\rho_0) - J'_\gamma(\omega\rho_0)G_n(\rho_0)}{N'_\gamma(\omega\rho_0)G_n(\rho_0) - N_\gamma(\omega\rho_0)G'_n(\rho_0)}. \quad (4.25)$$

A soma em (4.24) é difícil de ser efetuada porque o coeficiente b_n em (4.25) não tem uma forma simples. Contudo, podemos simplificar o cálculo usando a aproximação $\rho_0 \ll 1$. Para este caso, fizemos uma análise numérica, a qual está representada na figura 4.1. Desta análise numérica, concluímos que para $n \neq 0$, teremos $\tan b_n \approx 0$ e portanto $b_n \approx N\pi$, sendo N um número inteiro. Levando em conta este resultado, obteremos de (4.24) que:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-2\omega\pi}} (e^{2ib_0} - 1) + \frac{1}{\sqrt{-2\omega\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\frac{|n|\bar{\omega}}{2}} - 1) e^{in\varphi}. \quad (4.26)$$

Note que a equação (4.26) carrega uma parte da amplitude de espalhamento devido à estrutura interna (métrica interior) e uma outra parte devido a conicidade do

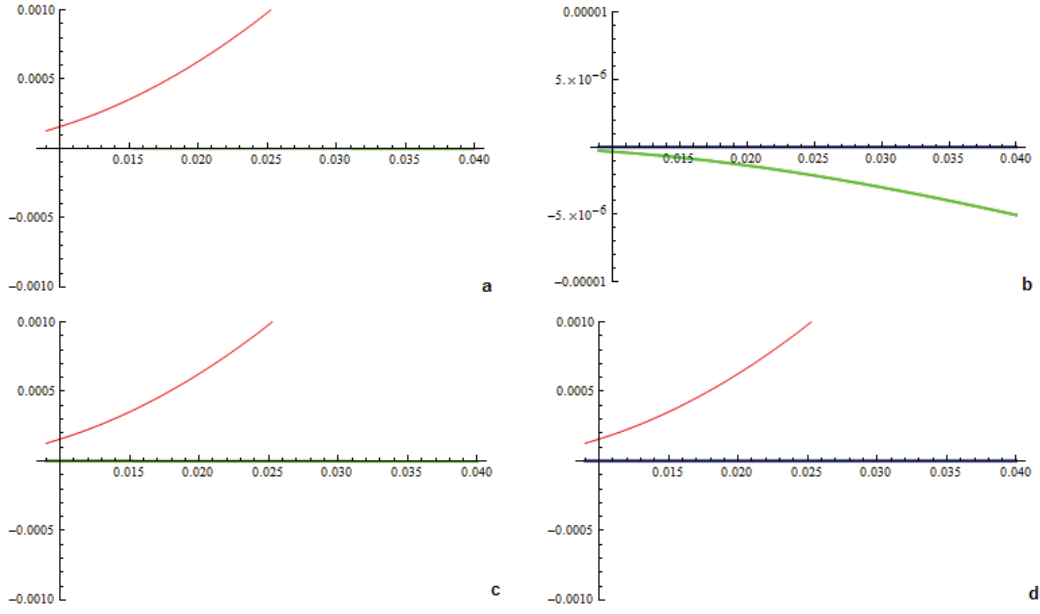


Figura 4.1: Gráfico da função $\tan b_n(\rho_0)$ para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ indicados pelas curvas de cores vermelha, verde e azul respectivamente. **a** - Gráfico para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ juntos. **b** - Gráfico para $n = 1$ e $n = 2$. **c** - Gráfico para $n = 0$ e $n = 1$. **d** - Gráfico para $n = 0$ e $n = 2$. Para obtermos esses resultados, consideramos $\nu = 1.0099$. O eixo horizontal corresponde a ρ_0 .

espaço-tempo (métrica exterior). Esta última foi obtida por Gerbert e Jackiw [11], no estudo de partículas relativísticas no espaço-tempo cônico. Para tentarmos interpretar melhor estas duas contribuições da amplitude de espalhamento, consideremos a solução (4.18) de uma outra forma

$$\begin{aligned} R_{ext}(\omega\rho) &= (\cos b_0 J_0(\omega\rho) - \sin b_0 N_0(\omega\rho)) - J_0(\omega\rho) + (-1)^{\frac{(n-|n|)}{2}} J_{|\gamma|}(\omega\rho), \\ R_{ext}(\omega\rho) &= R_0^{(1)} + R_0^{(2)} + R_\gamma, \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que,

$$\begin{aligned} R_0^{(1)}(\rho) &= -J_0(\omega\rho), \\ R_0^{(2)}(\rho) &= (\cos b_0 J_0(\omega\rho) - \sin b_0 N_0(\omega\rho)), \\ R_\gamma(\rho) &= (-1)^{\frac{(n-|n|)}{2}} J_{|\gamma|}(\omega\rho), \end{aligned} \quad (4.28)$$

sendo que levamos em conta a aproximação $\rho_0 \ll 1$ e também adicionamos e subtraímos a função de Bessel $J_0(\omega\rho)$. Note, então, que no limite assintótico $\rho \rightarrow \infty$,

teremos uma parte da solução (4.27) não espalhada associada a $R_0^{(1)}$, uma parte espalhada, devido a estrutura interna, associada a $R_0^{(2)}$ e finalmente uma parte espalhada, devido a topologia do espaço-tempo, associada a R_γ . As expressões para essas amplitudes são dadas respectivamente por,

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &= 0, \\ f_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{-2\omega\pi}}(e^{2ib_0} - 1), \\ f_\gamma(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{-2\omega\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\frac{|n|\bar{\omega}}{2}} - 1)e^{in\varphi}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

que somadas correspondem à amplitude de espalhamento total dada por (4.26).

A terceira expressão para a amplitude de espalhamento em (4.29), compatível com a condição (4.1), não é bem comportada. Como veremos, tal amplitude fornece contribuições do tipo delta devido ao fato de que o espaço-tempo cônico não é assintoticamente euclidiano e, portanto, a partícula teste nunca sai do domínio da “interação” deste espaço-tempo. Deste modo, redefiniremos esta amplitude de espalhamento de tal modo que tenhamos uma nova amplitude, bem comportada e satisfazendo uma nova condição assintótica. Faremos isto removendo as contribuições do tipo delta para a função de onda incidente.

De forma a efetuarmos uma regularização, reescreveremos f_γ do seguinte modo:

$$\sqrt{-2\omega\pi}f_\gamma(\varphi) = h_1 + h_2, \quad (4.30)$$

em que,

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i(n\varphi - |n|\bar{\omega})}, \\ h_2 &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Podemos inserir um fator convergente ϵ na segunda relação em (4.31) da seguinte forma,

$$h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{in(\varphi+i\epsilon)} + e^{-in(\varphi-i\epsilon)}) - 1 = \frac{1}{1 - e^{i(\varphi+i\epsilon)}} + \frac{1}{1 - e^{-i(\varphi-i\epsilon)}} - 1. \quad (4.32)$$

Veja que se tivermos na relação acima φ igual a zero (ou igual a $2\pi n$), o parâmetro ϵ não poderá ser eliminado, pois de outro modo teremos uma divergência. Por outro lado, se φ não assumir esses valores, a relação (4.32) se anulará. Sendo assim, podemos fazer:

$$h_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - 2\pi n). \quad (4.33)$$

Podemos adotar o mesmo procedimento de regularização para a primeira expressão em (4.31), ou seja:

$$h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{in(\varphi_- + i\epsilon)} + e^{-in(\varphi_+ - i\epsilon)}) - 1, \quad (4.34)$$

em que $\varphi_{\pm} = \varphi \pm \bar{\omega}$. Deste modo, podemos ainda reescrever (4.34) na seguinte forma:

$$h_1 = \frac{1}{2}(h_1 + h_1^*) + \frac{1}{2}(h_1 - h_1^*). \quad (4.35)$$

Da relação acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h_1 + h_1^*) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi_- + i\epsilon)} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi_+ + i\epsilon)}, \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\varphi_- - 2\pi n) + \delta(\varphi_+ - 2\pi n)). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por outro lado, usando o procedimento adotado em (4.32), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h_1 - h_1^*) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{i(\varphi_- + i\epsilon)}} - \frac{1}{1 - e^{-i(\varphi_- - i\epsilon)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi_+ + i\epsilon)}} + \frac{1}{1 - e^{-i(\varphi_+ - i\epsilon)}} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2i} \frac{\sin \varphi_+}{\sin^2 \left(\frac{\varphi_+}{2} \right)} - \frac{1}{2i} \frac{\sin \varphi_-}{\sin^2 \left(\frac{\varphi_-}{2} \right)} \right], \\ &= \frac{i \sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.33), (4.36) e (4.37) na amplitude de espalhamento f_{γ} , temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi\omega} f_{\gamma}(\varphi) &= -i\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\varphi_- - 2\pi n) + \delta(\varphi_+ - 2\pi n) - 2\delta(\varphi - 2\pi n)), \\ &\quad + \frac{\sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A amplitude de espalhamento total tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi\omega} f(\varphi) &= -i\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\varphi_- - 2\pi n) + \delta(\varphi_+ - 2\pi n) - 2\delta(\varphi - 2\pi n)) \\ &\quad - i(e^{2ib_0} - 1) + \frac{\sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} - \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Podemos agora definir uma nova amplitude correspondente à contribuição da conicidade do espaço-tempo exterior, através da seguinte expressão:

$$\bar{f}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \left[\frac{\sin\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega} - \cos\varphi} \right]. \quad (4.40)$$

A amplitude de espalhamento acima, sem funções delta, obdecerá a seguinte condição assintótica

$$\phi(\rho \rightarrow \infty, \varphi) = \bar{\phi}_{inc} + \bar{\phi}_{esp}, \quad (4.41)$$

em que $\bar{\phi}_{inc}$ é a parte da função de onda incidente e $\bar{\phi}_{esp}$ é a parte da função de onda espalhada dada por,

$$\bar{\phi}_{esp}(\rho \rightarrow \infty, \varphi) \longrightarrow \sqrt{\frac{i}{\rho}} \bar{f}(\varphi) e^{i\omega\rho}. \quad (4.42)$$

Mostraremos uma expressão para a função de onda incidente mais adiante. Agora, veremos primeiramente a consistência da expressão assintótica (4.42). Para isto, considere (4.17), levando em conta o desvio de fase (4.23). Com isso obtemos,

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(b_n - \frac{|n|\bar{\omega}}{2} + \frac{n\pi}{2})} (-1)^{\frac{(n-|n|)}{2}} (\cos b_n J_{|\gamma|} - \sin b_n N_{|\gamma|}) e^{in\varphi}, \\ &= e^{ib_0} (\cos b_0 J_0(\omega\rho) - \sin b_0 N_0(\omega\rho)) - J_0(\omega\rho) \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{|n|}{2}(\bar{\omega}-\pi)} J_{|\gamma|}(\omega\rho) e^{in\varphi}, \\ &= \phi_0^{(1)}(\rho, \varphi) + \phi_0^{(2)}(\rho, \varphi) + \phi_\gamma(\rho, \varphi), \end{aligned} \quad (4.43)$$

em que,

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)}(\rho, \varphi) &= -J_0(\omega\rho), \\ \phi_0(\rho, \varphi) &= e^{ib_0} (\cos b_0 J_0(\omega\rho) - \sin b_0 N_0(\omega\rho)), \\ \phi_\gamma(\rho, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{|n|}{2}(\bar{\omega}-\pi)} J_{|\gamma|}(\omega\rho) e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

As expressões acima estão associadas, respectivamente, às amplitudes de espalhamento $f_0^{(1)}$, $f_0^{(2)}$ e $f_\gamma(\varphi)$ em (4.29).

Agora, considere a seguinte representação de integral de contorno para a função de onda $\phi_\gamma(\rho, \varphi)$:

$$\phi_\gamma(\rho, \varphi) = \int_C dz e^{-i\omega\rho \cos(z \pm \frac{\varphi}{\nu})} F(z), \quad (4.45)$$

em que C é o contorno de integração e $F(z)$ é uma função peso a ser determinada. Da mesma forma que $\phi_\gamma(\rho, \varphi)$, a representação integral (4.45) também é solução da equação de Klein-Gordon na forma,

$$(\rho \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \nu^2 \partial_\varphi + \omega \rho^2) \phi(\rho, \varphi) = 0. \quad (4.46)$$

Usaremos, agora, a seguinte representação de Schläfli para a função de Bessel $J_n(x)$,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-ix \sin z + inz}, \quad (4.47)$$

em que o contorno de integração C vai de $-\pi + i\infty$ até o eixo real em $-\pi$, passando ao longo deste eixo até π e em seguida indo para $\pi + i\infty$ (veja figura 4.2). Substituindo (4.47) em $\phi_\gamma(\rho, \varphi)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_\gamma(\rho, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{|n|}{2}(\bar{\omega}-\pi)} e^{in\varphi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-i\omega \rho \sin z + i|\gamma|z} \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-i\omega \rho \sin z} F(z, \varphi), \end{aligned} \quad (4.48)$$

em que a função peso $F(z, \varphi)$ é dada por,

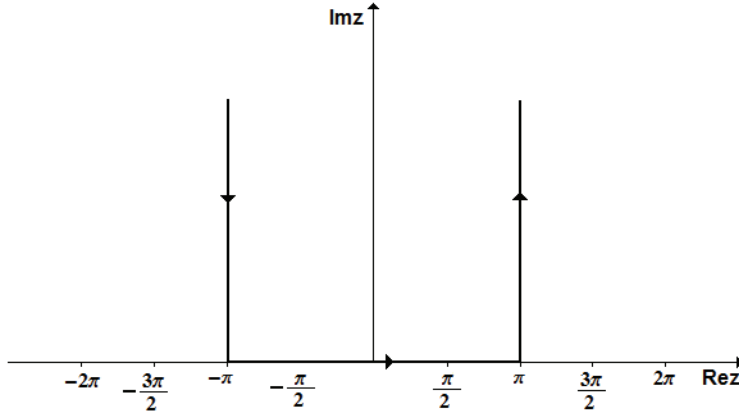


Figura 4.2: Contorno de integração para a representação de Schläfli.

$$\begin{aligned} F(z, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i|n|(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{2}-\nu z)} e^{in\varphi}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-i|n|(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{2}-\nu z-\varphi-i\epsilon)} + e^{-i|n|(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{2}-\nu z+\varphi-i\epsilon)} \right) - 1, \\ &= \frac{1}{2i} \tan \frac{1}{2} \left(\nu z - \frac{\nu\pi}{2} + i\epsilon + \varphi \right) + \frac{1}{2i} \tan \frac{1}{2} \left(\nu z - \frac{\nu\pi}{2} + i\epsilon - \varphi \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Substituindo (4.49) na integral em (4.48), temos:

$$\phi_\gamma(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_C dz e^{-i\omega\rho \sin z} \left[\tan \frac{1}{2} \left(\nu z - \frac{\nu\pi}{2} + i\epsilon + \varphi \right) + \tan \frac{1}{2} \left(\nu z - \frac{\nu\pi}{2} + i\epsilon - \varphi \right) \right]. \quad (4.50)$$

Fazendo a mudança de variável $z \rightarrow z + \frac{\pi}{2} - i\epsilon$ na integral acima e em seguida fazendo $z \rightarrow -z$ apenas no segundo termo, temos:

$$\phi_\gamma(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_{C_1} dz e^{-i\omega\rho \cos z} \tan \frac{1}{2} (\nu z + \varphi) + \frac{1}{4\pi i} \int_{C_2} dz e^{-i\omega\rho \cos z} \tan \frac{1}{2} (\nu z - \varphi), \quad (4.51)$$

em que os contornos C_1 e C_2 estão mostrados na figura 4.3. Veja que temos a liberdade de transladar esses contornos. Desta forma, podemos deslocar o contorno superior de $\frac{\pi}{2}$ para a direita e da mesma forma o contorno inferior para a esquerda (veja a figura 4.3). Uma última mudança de variáveis $z \rightarrow z - \frac{\varphi}{\nu}$ nos fornecerá a expressão para (4.45), que possa ser escrita na forma:

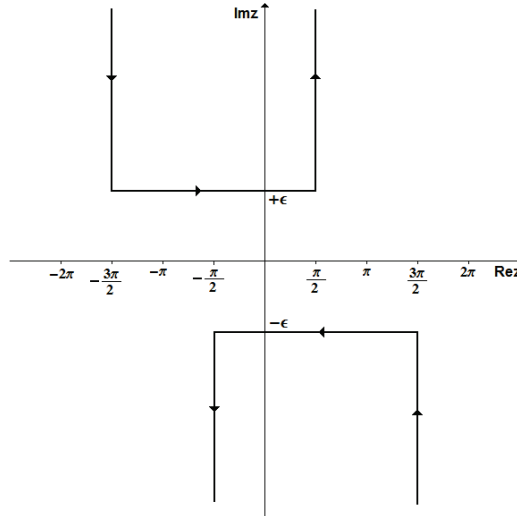


Figura 4.3: Novo contorno de integração para (4.51). O contorno C_1 está mostrado na parte superior do gráfico e o contorno C_2 na parte inferior.

$$\phi_\gamma(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_C dz e^{-i\omega\rho \cos(z - \frac{\varphi}{\nu})} \tan \left(\frac{\nu z}{2} \right), \quad (4.52)$$

em que o contorno C pode ser visto na figura 4.4. Podemos agora, separar a relação acima em duas partes. Uma parte correspondendo a onda incidente e outra parte correspondendo a onda espalhada, a qual fornece a amplitude de espalhamento (4.40).

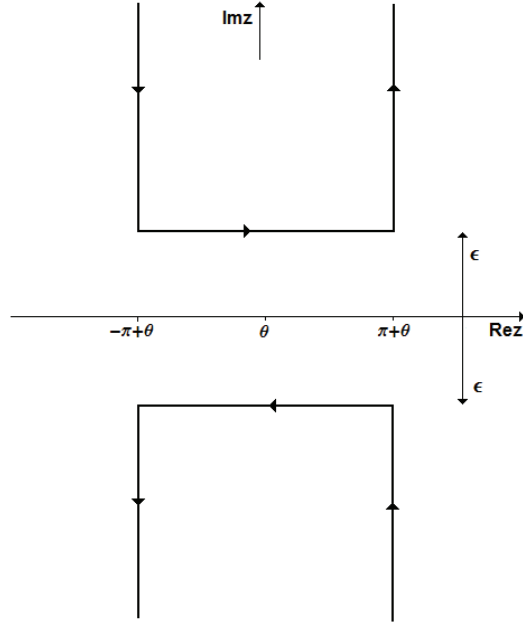


Figura 4.4: Contorno de integração para (4.52). $\theta = \frac{\varphi}{\nu}$

Esta divisão é efetuada reexpressando o contorno como a soma das linhas verticais de $\pm i\infty$ e $\mp i\infty$ junto com o cortorno fechado em volta dos pólos de $\tan\left(\frac{\nu z}{2}\right)$ (figura 4.5). As contribuições das linhas verticais na figura 4.5 fornecem a parte espalhada da função de onda. Ou seja,

$$\bar{\phi}_{esp}(\rho, \varphi) = \chi\left(\rho + \frac{\varphi}{2} + \frac{\nu\pi}{2}\right) - \chi\left(\rho, \frac{\varphi}{2} - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad (4.53)$$

em que fizemos a mudança $iy + \pi = z - \frac{\varphi}{\nu}$ para a integral $\pm i\infty$ e a mudança $iy - \pi = z - \frac{\varphi}{\nu}$ para a integral de $\mp i\infty$. Desta forma,

$$\chi(\rho, \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\omega\rho \cosh y} \tan\left(\frac{i\nu y}{2} + \xi\right), \quad (4.54)$$

em que $\xi = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\nu\pi}{2}$. Para $\rho \rightarrow \infty$, a integral (4.54) fica dada na forma,

$$\begin{aligned} \chi(\rho \rightarrow \infty, \xi) &\longrightarrow \frac{1}{4\pi} e^{i\omega\rho \tan\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\frac{\omega\rho}{2} y^2}, \\ &= \sqrt{\frac{i}{8\pi\omega\rho}} e^{i\omega\rho \tan\xi}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

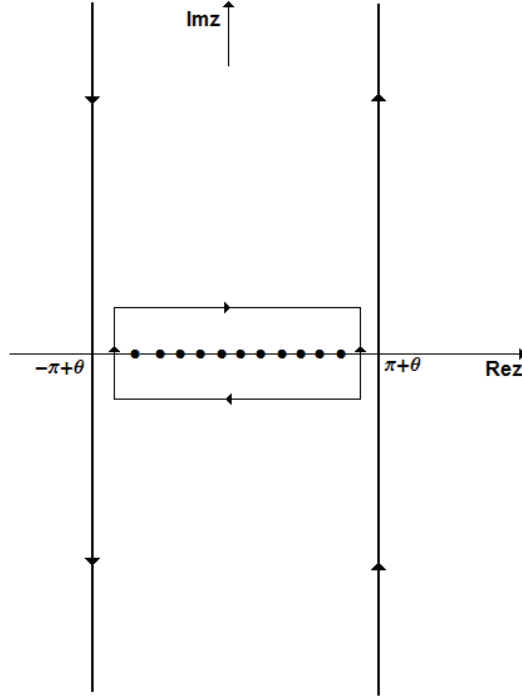


Figura 4.5: Contorno de integração sem o parâmetro de regularização ϵ . $\theta = \frac{\varphi}{\nu}$

De (4.53) e (4.55), temos:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{esp}(\rho \rightarrow \infty, \varphi) &\longrightarrow \sqrt{\frac{i}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}} \left[\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\nu\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \right] e^{i\omega\rho}, \\ &= \sqrt{\frac{i}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \frac{\sin\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega} - \cos\varphi} e^{i\omega\rho}.\end{aligned}\quad (4.56)$$

A equação acima é a função de onda espalhada cuja amplitude de espalhamento é realmente dada por (4.40). A contribuição do contorno fechado determina a função de onda incidente de (4.41) em termos dos pólos da função $\tan\left(\frac{\nu z}{2}\right)$ nos pontos $z = (2j + 1)\frac{\pi}{\nu}$, no intervalo $(-\pi + \frac{\varphi}{\nu}, \pi + \frac{\varphi}{\nu})$. Então, pelo teorema do argumento (veja apêndice), teremos:

$$\phi_{inc}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\nu} \sum_j e^{-i\omega\rho \cos\left(\frac{\varphi_j}{\nu}\right)}, \quad (4.57)$$

em que $\varphi_j = \varphi - (2j + 1)\pi$ e o somatório em j abrange todos os pólos no intervalo considerado.

4.3 Espalhamento espinorial no espaço-tempo de Saffo-Witten

4.3.1 O método

Iniciaremos considerando a solução da equação de Dirac, em coordenadas cilíndricas, no espaço de Minkowski em $(2+1)$ -dim. Para energias positivas, a solução de ondas parciais com momento angular $(n + \frac{1}{2})$ é dada por:

$$\psi_n(\rho, \varphi) e^{-iEt} = e^{in\varphi} u_n(\rho, \varphi) e^{-iEt}, \quad (4.58)$$

em que,

$$u_n(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} J_n(\omega\rho) \\ -i\sqrt{E-m} J_{n+1}(\omega\rho) e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

e n é um número inteiro. A expansão em ondas parciais é semelhante a (4.17), porém com $\delta_n = 0$. Então, temos:

$$\Psi_n(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\varphi_0} \psi_n(\rho, \varphi), \quad (4.60)$$

em que φ_0 é uma fase que pode ser tomada igual a zero.

Por outro lado, para determinarmos o desvio de fase e a amplitude de espalhamento em um espaço-tempo cônico, deveremos considerar a solução na forma geral:

$$\psi_n(\rho, \varphi) = e^{in\varphi} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} R_n^{(1)}(\omega\rho) \\ -i\sqrt{E-m} R_n^{(2)}(\omega\rho) e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

A expressão assintótica para a solução acima,

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(\omega\rho)_{\rho \rightarrow \infty} &\longrightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi\omega\rho}} \cos\left(\omega\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n^{(1)}\right), \\ R_n^{(2)}(\omega\rho)_{\rho \rightarrow \infty} &\longrightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi\omega\rho}} \cos\left(\omega\rho - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \delta_n^{(2)}\right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

determinará a mudança de fase δ_n . Gerbert e Jackiw mostraram que, para o caso sem estrutura interna, $\delta_n^{(1)} = \delta_n^{(2)} = \delta_n$. O caso com estrutura, o qual estamos resolvendo

envolve uma sutileza para que isto seja verdade, como veremos mais adiante. A expansão da função de onda, em termos de ondas parciais, para uma certa mudança de fase, δ_n , é:

$$\Psi_n(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\delta_n + \frac{n\pi}{2})} \psi_n(\rho, \varphi), \quad (4.63)$$

em que fizemos $\varphi_0 = 0$. A relação acima define a amplitude de espalhamento $f(\varphi)$ via a decomposição,

$$\Psi_n = \Psi_{inc} + \Psi_{esp}, \quad (4.64)$$

em que,

$$\Psi_{esp}(\rho, \varphi)_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\varphi) \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ -i\sqrt{E-m}e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i\omega\rho}. \quad (4.65)$$

Considerando a função de onda incidente como ondas planas do tipo,

$$\Psi_{inc}(\rho) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ -i\sqrt{E-m}e^{i\varphi_0} \end{pmatrix} e^{i\omega\rho} \quad (4.66)$$

acharemos a expressão para a amplitude de espalhamento dada por (4.15).

4.3.2 Espalhamento cônico

Para exibirmos uma solução que nos permita calcular a amplitude de espalhamento, considere as equações (3.46) e (3.47). Podemos redefinir as quantidades l_1 e l_2 como sendo,

$$\begin{aligned} l_1 &= \epsilon_n \left(ne^a - \frac{1}{2} \right), \\ l_2 &= \epsilon_n \left(ne^a + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

As redefinições acima não mudam as equações diferenciais (3.46) e (3.47), pois $\epsilon_n = 1$ se $n \geq 0$ ou $\epsilon_n = -1$ se $n < 0$ e portanto $\epsilon_n^2 = 1$. As soluções das equações diferenciais, agora são dadas por:

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(\rho) &= (\epsilon_n)^n (A_1 J_{\epsilon_n(\zeta\nu)}(\omega\rho) + B_1 N_{\epsilon_n(\zeta\nu)}(\omega\rho)), \\ R_n^{(2)}(\rho) &= (\epsilon_n)^{n+1} (A_2 J_{\epsilon_n(\zeta\nu+1)}(\omega\rho) + B_2 N_{\epsilon_n(\zeta\nu+1)}(\omega\rho)). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Note que no caso das equações (3.46) e (3.47) consideramos n como sendo semi-inteiro (veja apendice A), diferentemente do caso da seção (4.3.1) em que n é inteiro. De forma a mantermos uma coerência com a seção (4.3.1) faremos $n \rightarrow n + \frac{1}{2}$ sendo, agora, n um inteiro. Então,

$$\begin{aligned} (n + \frac{1}{2})e^a - \frac{1}{2} &= e^a(n + \frac{(1 - e^{-a})}{2}) = \zeta\nu, \\ (n + \frac{1}{2})e^a + \frac{1}{2} &= e^a(n + \frac{(1 - e^{-a})}{2}) = \zeta\nu + 1, \end{aligned} \quad (4.69)$$

em que $\zeta = (n + \frac{(1 - e^{-a})}{2})$ está relacionado com a ordem das funções de Bessel na solução (4.68) e $\nu = e^a$. Analogamente ao caso escalar, podemos determinar o desvio de fase. Então, fazendo uma análise por partes, considerando $n > 0$ e $n < 0$, chegaremos as seguintes expressões para as mudanças de fase:

$$\begin{aligned} \delta_n^{(1)} &= -\frac{\pi}{2}\epsilon_n(\nu\zeta - n) + b_n^{(1)}, \\ \delta_n^{(2)} &= -\frac{\pi}{2}\epsilon_n(\nu\zeta - n) + b_n^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

em que levamos em consideração as expressões assintóticas em (4.62). As constantes $b_n^{(1)}$ e $b_n^{(2)}$ estão relacionadas à estrutura interna pelas relações $\tan b_n^{(1)} = \frac{B_1}{A_1}$ e $\tan b_n^{(2)} = \frac{B_2}{A_1}$. Ou de outra forma, $A_{1,2} = \cos b_n^{(1),(2)}$ e $B_{1,2} = \sin b_n^{(1),(2)}$.

Podemos fazer uma análise numérica desses coeficientes, assim como fizemos para o caso escalar. Através das figuras 4.6–4.8, podemos perceber que os únicos valores relevantes são para $n = 0$ em ambas as componentes da solução radial $b_0^{(1)}$ e $b_0^{(2)}$. Podemos notar, também, através da análise numérica expressa no gráficos, que $b_0^{(1)} \approx b_0^{(2)}$. Para $n \neq 0$, teremos $b_n^{(1)} \approx b_n^{(2)} \approx N\pi$. Portanto, a amplitude de espalhamento é dada por:

$$\sqrt{-2\omega\rho}F(\varphi) = (e^{i(2b_0 - \frac{\omega}{2})} - 1) - (e^{-i\frac{\omega}{2}} - 1) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-i\epsilon_n\omega(n + \frac{1}{2})} - 1)e^{in\varphi}. \quad (4.71)$$

Podemos perceber que a amplitude de espalhamento acima possui uma parte que é devido à estrutura interna e uma outras duas partes referentes à conicidade do espaço-tempo exterior. Sendo assim, reescrevendo a solução (4.61) da seguinte forma:

$$\psi_n(\rho, \varphi) = \psi_0(\omega\rho) + \bar{\psi}_0(\omega\rho) + \bar{\psi}_n(\omega\rho), \quad (4.72)$$

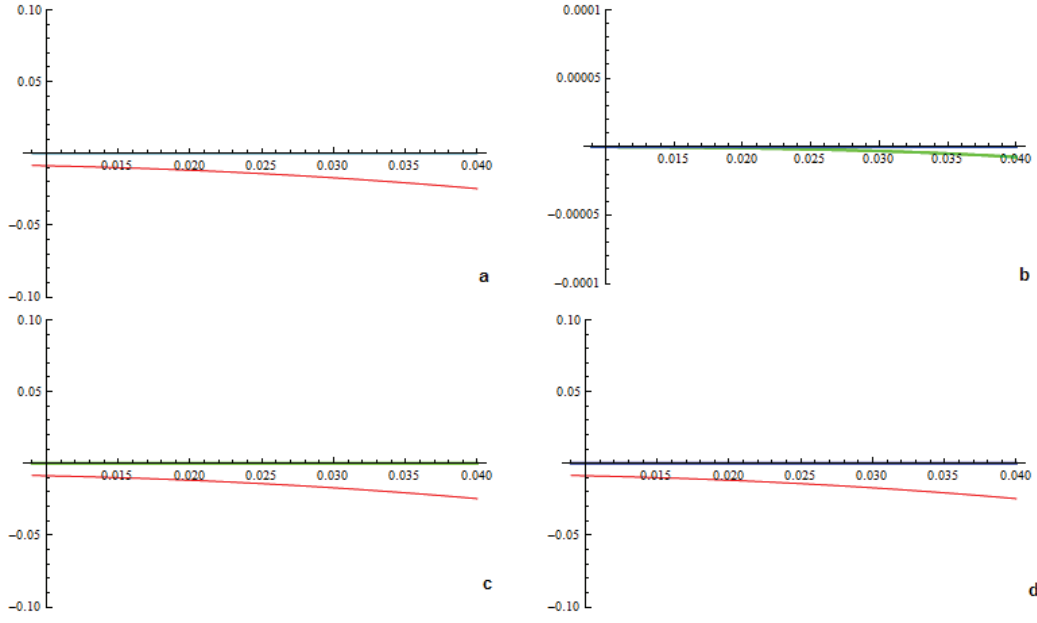


Figura 4.6: Gráfico da função $\tan b_n^{(1)}(\rho_0)$ para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ indicados pelas curvas de cores vermelha, verde e azul respectivamente. **a** - Gráfico para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ juntos. **b** - Gráfico para $n = 1$ e $n = 2$. **c** - Gráfico para $n = 0$ e $n = 1$. **d** - Gráfico para $n = 0$ e $n = 2$. Para obtermos esses resultados, consideramos $\nu = 1.0099$.

em que,

$$\psi_0(\omega\rho) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}R_0^{(1)}(\omega\rho) \\ -i\sqrt{E-m}R_0^{(2)}(\omega\rho)e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\bar{\psi}_0(\omega\rho) = - \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}J_{(\frac{\omega}{2})}(\omega\rho) \\ -i\sqrt{E-m}J_{(\frac{\omega}{2}+1)}(\omega\rho)e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\bar{\psi}_n(\omega\rho) = e^{in\varphi} \begin{pmatrix} (\epsilon_n)^n \sqrt{E+m}J_{\epsilon_n(\zeta e^a)}(\omega\rho) \\ -i(\epsilon_n)^{n+1} \sqrt{E-m}J_{\epsilon_n(\zeta e^a+1)}(\omega\rho)e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

em que $R_0^{(1)}(\omega\rho)$ e $R_0^{(2)}(\omega\rho)$ são dados por (4.62). Podemos, então, interpretar ψ_0 como sendo a parte associada à estrutura interna. A amplitude de espalhamento associado a $\bar{\psi}_0$ é dada pelo segundo termo na soma em (4.71) e $\bar{\psi}_n(\omega\rho)$ gera uma amplitude de espalhamento para uma geometria sem estrutura. Temos, então, as

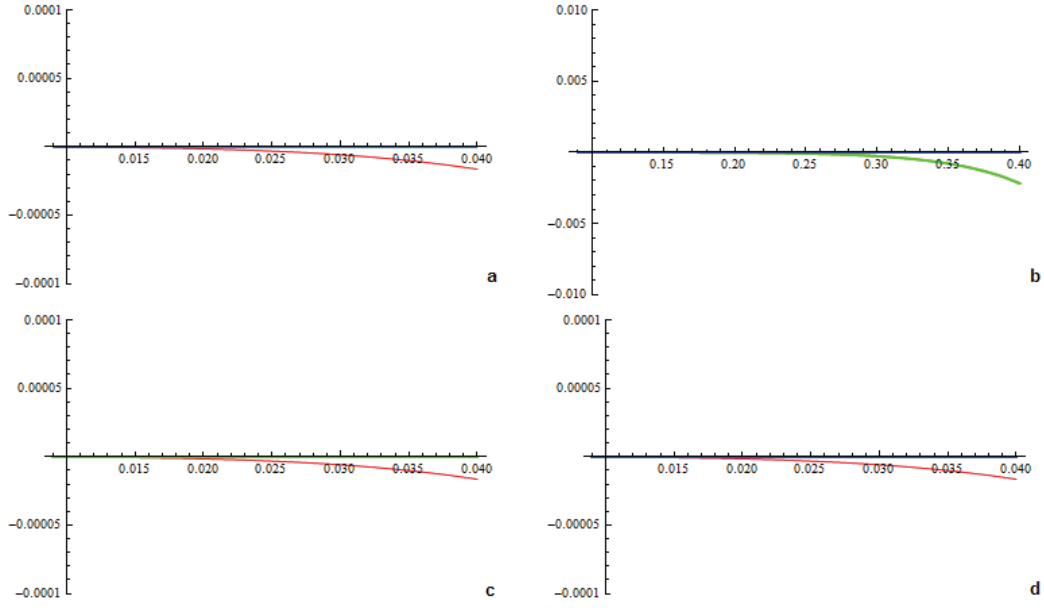


Figura 4.7: Gráfico da função $\tan b_n^{(1)}(\rho_0)$ para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ indicados pelas curvas de cores vermelha, verde e azul respectivamente. **a** - Gráfico para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ juntos. **b** - Gráfico para $n = 1$ e $n = 2$. **c** - Gráfico para $n = 0$ e $n = 1$. **d** - Gráfico para $n = 0$ e $n = 2$. Para obtermos esses resultados, consideramos $\nu = 1.0099$.

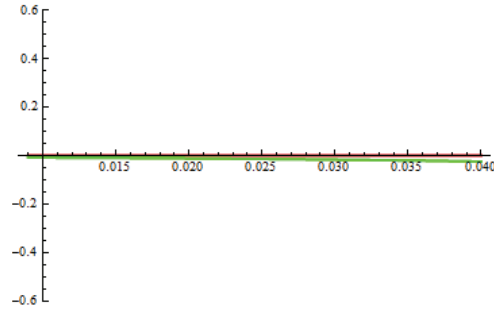


Figura 4.8: Comparação dos gráficos de $\tan b_n^{(1)}(\rho_0)$ e $\tan b_n^{(2)}(\rho_0)$ para $n = 0$.

seguintes amplitudes:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-2\omega\rho}F_0 &= (e^{2ib_0} - 1)e^{-i\frac{\omega}{2}}, \\
 \bar{F}_0 &= -(e^{-i\frac{\omega}{2}} - 1), \\
 \sqrt{-2\omega\rho}\bar{F}_n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-i\epsilon_n\omega(n+\frac{1}{2})} - 1)e^{in\varphi}.
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Podemos agora, trabalhar com a última expressão acima. Procederemos da mesma

forma que para o caso escalar. Então, podemos, novamente, fazer a seguinte divisão:

$$\sqrt{-2\omega\rho}\bar{F}_n = \bar{h}_1 + \bar{h}_2, \quad (4.77)$$

em que,

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\epsilon_n\omega(n+\frac{1}{2})}, \\ \bar{h}_2 &= e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

A segunda expressão acima é dada, como vimos, por (4.33). Tratemos, então, da primeira expressão, que pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\epsilon_n\frac{\bar{\omega}}{2}} e^{in(\varphi-\epsilon_n\bar{\omega})}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}} e^{in(\varphi_++i\epsilon)} + e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}} e^{-in(\varphi_++i\epsilon)} \right] - e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}} e^{in(\varphi_++i\epsilon)} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}} e^{i(n\varphi_++i\epsilon)}, \\ &\quad + \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi-\bar{\omega})}} - \frac{e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi+\bar{\omega})}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}} \delta(\varphi - \bar{\omega} - 2\pi n) + e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}} \delta(\varphi + \bar{\omega} - 2\pi n)] \\ &\quad + \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi-\bar{\omega})}} - \frac{e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi+\bar{\omega})}}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

e então, de (4.76), temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= - \frac{i\pi}{\sqrt{2\omega\rho}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}} \delta(\varphi - \bar{\omega} - 2\pi n) + e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}} \delta(\varphi + \bar{\omega} - 2\pi n)] \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2\omega\rho}} \left[\frac{e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi+\bar{\omega})}} - \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi-\bar{\omega})}} \right]. \end{aligned} \quad (4.81)$$

A amplitude de espalhamento total (4.70) é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= - \frac{i}{\sqrt{2\omega\rho}} (e^{2ib_0} - 1) e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2\omega\rho}} \left[\frac{e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi+\bar{\omega})}} - \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi-\bar{\omega})}} \right] \\ &\quad - \frac{i\pi}{\sqrt{2\omega\rho}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}} \delta(\varphi - \bar{\omega} - 2\pi n) + e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}} \delta(\varphi + \bar{\omega} - 2\pi n)]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Vamos considerar a contribuição para a amplitude de espalhamento, determinada pela conicidade do espaço-tempo exterior, dada por:

$$F_\nu(\varphi) = \frac{i}{\sqrt{2\omega\rho}} \left[\frac{e^{i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi+\bar{\omega})}} - \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2}}}{1 - e^{i(\varphi-\bar{\omega})}} \right]. \quad (4.83)$$

Esta amplitude de espalhamento, obedecerá a nova condição assintótica,

$$\Psi_\nu(\rho \rightarrow \infty, \varphi) = \bar{\Psi}_{inc} + \bar{\Psi}_{esp}, \quad (4.84)$$

em que $\bar{\Psi}_{inc}$ é a parte da função de onda incidente e $\bar{\Psi}_{esp}$ parte da função de onda espalhada. A condição assintótica para a função de onda espalhada é dada por (4.65) só que agora com a amplitude (4.83). Mais adiante veremos uma expressão para a função de onda incidente. Antes disso, considere (4.63) levando em conta o desvio de fase (4.70). Com isso, temos:

$$\Psi(\rho, \varphi) = \Psi_0 + \bar{\Psi}_1 + \Psi_\nu, \quad (4.85)$$

em que,

$$\bar{\Psi}_0 = e^{-i(\frac{\epsilon_n \bar{\omega}}{4} - b_0)} \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} R_0^{(1)}(\omega\rho) \\ -i\sqrt{E - m} R_0^{(2)}(\omega\rho) e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

$$\Psi_\nu = -e^{-i\frac{\epsilon_n \bar{\omega}}{4}} \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} J_{(\frac{\bar{\omega}}{2})}(\omega\rho) \\ -i\sqrt{E - m} J_{(\frac{\bar{\omega}}{2}+1)}(\omega\rho) e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

$$\Psi_\nu = e^{-i(\frac{\epsilon_n \bar{\omega}}{2} + \frac{\epsilon_n \bar{\omega}}{4} - \frac{n\pi}{2} - n\varphi)} \begin{pmatrix} (\epsilon_n)^n \sqrt{E + m} J_{\epsilon_n(\zeta e^a)}(\omega\rho) \\ -i(\epsilon_n)^{n+1} \sqrt{E - m} J_{\epsilon_n(\zeta e^a+1)}(\omega\rho) e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

As expressões acima estão associadas, respectivamente, às amplitudes F_0 , $\bar{F}_0$ e $\bar{F}_n$.

Usando a representação de Schlöfli (4.47) para as compoenetes de (4.88), teremos as seguintes funções peso,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\epsilon_n)^n e^{i\epsilon_n(\frac{\bar{\omega}z}{2\pi} - \frac{\bar{\omega}}{4})} e^{-in(\frac{\bar{\omega}\epsilon_n}{2} - \frac{\pi}{2} - \nu z \epsilon_n - \varphi)}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [e^{i(\frac{\bar{\omega}z}{2\pi} - \frac{\bar{\omega}}{4})} e^{-in(\frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{\pi}{2} - \nu z - \varphi - i\epsilon)} + e^{-i(\frac{\bar{\omega}z}{2\pi} - \frac{\bar{\omega}}{4})} e^{in(-\frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{\pi}{2} + \nu z - \varphi + i\epsilon)} e^{in\pi}] \\ &\quad - e^{-i(\frac{\bar{\omega}z}{2\pi} - \frac{\bar{\omega}}{4})}, \\ &= \frac{e^{i(\frac{\bar{\omega}z}{2\pi} - \frac{\bar{\omega}}{4})}}{1 - e^{-i(\frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{\pi}{2} - \nu z - \varphi - i\epsilon)}} - \frac{e^{-i(\frac{\bar{\omega}z}{2\pi} - \frac{\bar{\omega}}{4})}}{1 - e^{i(\frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{\pi}{2} - \nu z + \varphi + i\epsilon)}}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Procedendo da mesma forma para a componente inferior, temos:

$$\Omega_2 = \frac{e^{i((\frac{\bar{\omega}}{2\pi}+1)z-\frac{\bar{\omega}}{4})}}{1 - e^{-i(\frac{\bar{\omega}}{2}-\frac{\pi}{2}-\nu z-\varphi-i\epsilon)}} - \frac{e^{-i((\frac{\bar{\omega}}{2\pi}+1)-\frac{\bar{\omega}}{4})}}{1 - e^{i(\frac{\bar{\omega}}{2}-\frac{\pi}{2}-\nu z+\varphi+i\epsilon)}}. \quad (4.90)$$

Portanto, como antes, devemos fazer a mudança de variável $z \rightarrow z + \frac{\pi}{2} - i\epsilon$. Neste caso, obtemos:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{C_1} dz e^{-i\omega \rho \cos z} \frac{e^{i\frac{\bar{\omega}z}{2\pi}}}{1 - e^{i(\nu z + \varphi + \pi)}} + \int_{C_2} dz e^{-i\omega \rho \cos z} \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}z}{2\pi}}}{1 - e^{i(\varphi + \nu z - \pi)}} \right], \quad (4.91)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{C_1} dz e^{-i\omega \rho \cos z} \frac{e^{i(\frac{\bar{\omega}}{2\pi}+1)z}}{1 - e^{i(\nu z + \varphi + \pi)}} + \int_{C_2} dz e^{-i\omega \rho \cos z} \frac{e^{-i(\frac{\bar{\omega}}{2\pi}+1)z}}{1 - e^{i(\varphi + \nu z - \pi)}} \right], \quad (4.92)$$

em que fizemos a mudança $z \rightarrow -z$ no segundo termo das somas em Ω_1 e Ω_2 para as integrais acima (veja figura 4.3). Veja que podemos deslocar o contorno superior, da figura, de $\frac{\pi}{2}$ para a direita e de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda no contorno inferior (veja figura 4.4). Em seguida $z \rightarrow z - \frac{\varphi}{\nu}$. Então,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-i\omega \rho \cos(z - \frac{\varphi}{\nu})} \frac{e^{i\frac{\bar{\omega}z}{2\pi}(z - \frac{\varphi}{\nu})}}{1 + e^{i\nu z}}, \quad (4.93)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-i\omega \rho \cos(z - \frac{\varphi}{\nu})} \frac{e^{i(\frac{\bar{\omega}}{2\pi}+1)(z - \frac{\varphi}{\nu})}}{1 + e^{i\nu z}}, \quad (4.94)$$

em que o contorno C está mostrado na figura 4.5. A nova definição (4.84) é feita pela soma das linhas verticais de $\pm\infty$, $\mp\infty$ mais o contorno fechado em torno dos polos $\frac{(2n+1)l\pi}{\nu}$. Desta forma as somas das linhas verticais fornecem a função de onda espalhada. Então, de (4.93):

$$\bar{I}_1^{(esp)} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\omega \rho \cosh y} \frac{e^{i\frac{\bar{\omega}z}{2\pi}(iy + \pi)}}{1 - e^{i(i\nu y + \varphi + \bar{\omega})}} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\omega \rho \cosh y} \frac{e^{i\frac{\bar{\omega}z}{2\pi}(iy - \pi)}}{1 - e^{i(i\nu y + \varphi - \bar{\omega})}}, \quad (4.95)$$

em que fizemos a mudança $iy + \pi = z - \frac{\varphi}{\nu}$ para a integral da esquerda e a mudança $iy - \pi = z - \frac{\varphi}{\nu}$ para a integral da direita. Da integral (4.55) teremos,

$$\bar{I}_1^{(esp)}(\rho \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{i}{\rho}} \frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}} \left[\frac{e^{i\frac{\bar{\omega}}{2\pi}}}{1 - e^{i(\varphi + \bar{\omega})}} - \frac{e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2\pi}}}{1 - e^{i(\varphi - \bar{\omega})}} \right] e^{i\omega \rho}. \quad (4.96)$$

A relação acima é compatível com a amplitude (4.83). Para (4.94) teremos $\bar{I}_2^{(esp)}(\rho \rightarrow \infty) = -\bar{I}_1^{(esp)}(\rho \rightarrow \infty)$. De (4.88), com $\bar{I}_2^{(esp)}$ e $\bar{I}_1^{(esp)}$ acharemos a função de onda espalhada (4.65). A contribuição do contorno fechado determina a função de onda

incidente em (4.84) em termos dos pólos $z = \frac{(2j\pi+1)}{\nu}$ no intervalo $(-\pi + \frac{\varphi}{\nu}, \pi + \frac{\varphi}{\nu})$.

Desta forma, pelo teorema do argumento:

$$\bar{\Psi}_{inc} = \frac{1}{\nu} \sum_j e^{-i\omega\rho\cos\frac{\varphi_j}{\nu}} e^{-i\frac{\bar{\omega}}{2\pi\nu}\varphi_j} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ -i\sqrt{E-m}e^{i\frac{\bar{\omega}}{\pi\nu}(\varphi-(2n+1)\pi)} \end{pmatrix}, \quad (4.97)$$

em que $\varphi_j = \varphi - (2j+1)\pi$. O somatório em j é restrito ao intervalo $(-\pi + \frac{\varphi}{\nu}, \pi + \frac{\varphi}{\nu})$.

Capítulo 5

Energia de ponto zero de um campo escalar massivo no espaço-tempo de Safko-Witten

O efeito Casimir em sua forma mais simples corresponde a existência de uma força atrativa entre duas placas planas condutoras, paralelas, eletricamente neutras, e separadas por uma certa distância. Essa força é devido a alteração no vácuo quântico do campo eletromagnético. Desta forma, esta força entre as placas é um efeito puramente quântico já que não existe força eletromagnética entre as placas descarregadas. Este efeito não surge apenas devido a presença de uma fronteira material, mas também em espaços-tempo com topologia não-trivial.

O efeito Casimir tem como origem a modificação no espectro de frequências do campo eletromagnético em consequência da imposição de condições de contorno associada à presença de placas metálicas. Este efeito também se manifesta no espaço-tempo Riemanniano com topologia não-euclidiana quando condições de fronteira são impostas ao sistema físico.

Um campo gravitacional também pode dar origem ao efeito Casimir devido a geometria e/ou topologia desse campo. Este fenômeno tem sido objeto de investigações recentes [34, 35].

Neste capítulo iremos calcular a energia de ponto zero induzida pela presença do campo gravitacional que estamos considerando nesta dissertação. Para isto vamos utilizar um procedimento para regularizar e renormalizar a expressão para esta energia.

5.1 O procedimento de Regularização e Renormalização

Nesta seção veremos o procedimento de regularização e renormalização formulado em teoria de campos sob a influência de condições de fronteira. Existem diferentes formas de proceder à regularização e renormalização, porém, iremos adotar o método de regularização através do uso da função zeta de Riemann para calcular a energia de ponto zero em $(2 + 1)$ -dim.

A energia de ponto zero de um campo escalar massivo é dada por,

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{(n)} (\omega_{(n)} + m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.1)$$

em que os $\omega_{(n)}$ são os auto-valores associado ao operador de Laplace modificado pelo acoplamento com o escalar de curvatura, ou seja:

$$(\nabla - \xi R)\phi_{(n)}(x) = \omega_{(n)}\phi_{(n)}(x). \quad (5.2)$$

A energia de ponto zero é divergente e devido a isto teremos que usar o método de regularização da função zeta. Para isto, vamos considerar a energia de ponto zero do campo escalar massivo da seguinte forma:

$$E_0(s) = \frac{1}{2} M^{2s} \zeta\left(s - \frac{1}{2}\right) \quad \Re s > \frac{3}{2}, \quad (5.3)$$

em que o parâmetro M , com dimensão de massa, foi introduzido de forma a fornecer a dimensão correta de energia e,

$$\zeta\left(s - \frac{1}{2}\right) = \sum_{(n)} (\omega_{(n)} + m^2)^{\frac{1}{2}-s}, \quad (5.4)$$

é a função zeta associada ao operador (5.2). Esta função coincide com a soma do lado direito da equação (5.1) apenas para $\Re s > \frac{d}{p}$ (sendo d a dimensão da variedade e p a ordem do operador diferencial). Assumiremos que o campo ϕ existe em um grande volume, e está submetido às condições de fronteira de Dirichlet, de forma que os autovalores sejam discretos. Veremos que a influência desta fronteira é completamente separada das contribuições devido ao espaço-tempo.

As divergências da energia de ponto zero, dadas (5.1), são completamente determinadas pelos primeiros coeficientes de heat Kernel (veja apêndice C). Então, a função zeta pode ser expressa por

$$\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} K(t). \quad (5.5)$$

A equação acima, juntamente com a expansão assintótica $t \rightarrow 0$ de $K(t)$,

$$K(t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{n \geq 0} B_n t^n, \quad (5.6)$$

correspondente ao operador (5.2), determinam a parte divergente da energia de ponto zero. Esta divergência pode ser expressa em termos dos quatro primeiros coeficientes.

Desta forma, teremos a seguinte expressão:

$$E_0^{(div)} = \left(\frac{M}{m}\right)^{2s} \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} B_0 m^3 + \frac{\Gamma(s - 1)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} B_{\frac{1}{2}} m^2 + B_1 m + B_{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \right\}. \quad (5.7)$$

Calcularemos mais adiante os coeficientes acima para o espaço-tempo considerado no capítulo 3, porém, levando em conta apenas o espaço-tempo exterior à fonte. Usando esses coeficientes, a renormalização da energia de ponto zero poderá ser feita através da condição,

$$E_0^{(ren)} = \lim_{s \rightarrow 0} (E_0 - E_0^{(div)}). \quad (5.8)$$

A energia de ponto zero definida deste modo obedece a condição $E_0^{(ren)} \rightarrow 0$ para $m \rightarrow \infty$. Isto nos diz que a expansão de heat Kernel (5.6) é uma expansão assintótica para massa grande.

5.2 A energia de ponto zero

Nosso interesse agora é encontrar uma representação integral para a função zeta (5.4). Sendo assim, pelo teorema do argumento (veja apêndice C), teremos a seguinte representação em termos da integral de contorno [16, 17],

$$\zeta(s - \frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i} (\omega^2 + m^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \phi(\rho_0), \quad (5.9)$$

em que o contorno C é percorrido no sentido anti-horário e envolve todos os pólos de $\phi(\rho_0)$ no eixo real positivo (veja figura 5.1). A solução regular na origem para a

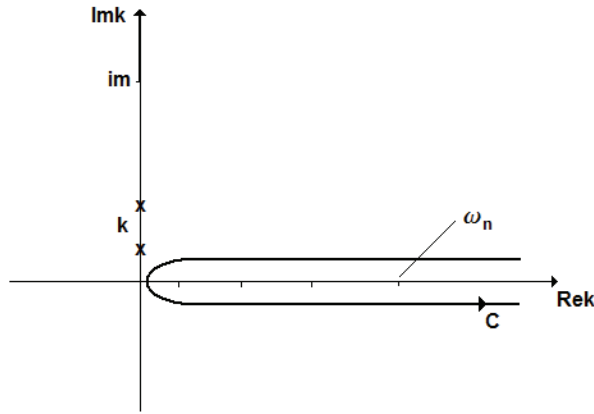


Figura 5.1: Plano complexo- κ .

equação (5.2), levando em conta a métrica externa, é:

$$R(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\omega\rho}{2}} J_\gamma(\omega\rho), \quad (5.10)$$

em que $\omega^2 = E_0^2 - m^2$, $\gamma = n\nu$ e $\xi = 0$ (acoplamento mínimo).

Admitindo que a solução (5.10) obedece as condições de contorno de Dirichlet em $\rho = \rho_0$, teremos que:

$$\sqrt{\frac{\pi\omega\rho}{2}} J_\gamma(\omega\rho_0) = 0, \quad (5.11)$$

e deste modo $\omega = \omega_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots$) são os autovalores discretos. Sendo assim, a energia de ponto zero pode ser reescrita como,

$$E_0 = \frac{1}{2} M^{2s} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega_{n,i}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}-s}. \quad (5.12)$$

Como já vimos, o somatório em n pode ser reescrito como uma integral do tipo (5.9), ou seja:

$$\zeta(s - \frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i} (\omega^2 + m^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln J_n(\omega \rho_0). \quad (5.13)$$

É importante chamar a atenção para o fato de que temos liberdade para modificar a função dentro do logaritmo por qualquer outra função que seja analítica no interior do contorno C , e isso não mudará o resultado da integral. Sendo assim, iremos fazer uso disto e introduzir o fator $\omega^{-n\nu}$. Então, obteremos o seguinte resultado:

$$\zeta(s - \frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i} (\omega^2 + m^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln[\omega^{-n\nu} J_{n\nu}(\omega \rho_0)]. \quad (5.14)$$

A razão para isto é que iremos deslocar o contorno de integração para o eixo imaginário. Desta forma, este novo contorno envolverá o ponto $\omega = 0$. Sem o fator adicional, a integral ficaria proporcional a $\frac{\partial}{\partial \omega} \ln J_{n\nu}(\omega \rho_0) \approx \frac{n\nu}{\omega}$, que claramente tem um pólo justamente em $\omega = 0$, o que fornece uma contribuição extra. Portanto, o fator adicional deixa o ponto $\omega = 0$ regular. Então, usando a relação:

$$J_\mu(\kappa e^{i\frac{\pi}{2}}) = e^{i\mu\frac{\pi}{2}} I_\mu(\kappa), \quad (5.15)$$

temos que,

$$\zeta(s - \frac{1}{2}) = -\frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_m^{\infty} d\kappa (\kappa^2 - m^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln[\kappa^{-n\nu} I_{n\nu}(\kappa \rho_0)], \quad (5.16)$$

na qual $I_{n\nu}(\kappa \rho_0)$ é a função de Bessel modificada e $d_{n>0} = 2$, $d_0 = 1$ é a multiplicidade do momento angular. De (5.16) a energia de ponto zero terá a seguinte expressão:

$$E_0 = -M^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_m^{\infty} d\kappa (\kappa^2 - m^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln[\kappa^{-n\nu} I_{n\nu}(\kappa \rho_0)]. \quad (5.17)$$

Podemos calcular a energia usando a seguinte expansão uniforme para a função de Bessel para $n \rightarrow \infty$:

$$I_{n\nu}(n\nu z) = \sqrt{\frac{t}{2\pi n\nu}} e^{n\nu \eta(z)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{(n\nu)^k} \right\}, \quad (5.18)$$

em que $t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $\eta(z) = \sqrt{1+z^2} + \ln\left(\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right)$ e $z = \frac{\kappa\rho_0}{n\nu}$. As funções $u_k(t)$ são dadas no apêndice B. Substituindo (5.18) em (5.17) teremos¹,

$$\begin{aligned}
E_0(s) = & -M^{2s} \frac{\cos(\pi s)}{2\pi} \rho_0 m^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[\frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1 - \frac{n\nu}{b} \Gamma(s - \frac{1}{2}) \right] - \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{2b} Z(0, s - \frac{1}{2}) \right. \\
& - \frac{1}{4b^2 \sqrt{\pi}} \left[\Gamma(s) Z(0, s) - \frac{10}{3} \frac{\Gamma(s+1)}{b^2} Z(2, s+1) \right] - \frac{1}{8b^3} \left[\Gamma(s + \frac{1}{2}) Z(0, s + \frac{1}{2}) \right. \\
& - \frac{6}{b^2} \Gamma(s + \frac{3}{2}) Z(2, s + \frac{3}{2}) + \frac{5}{2b^4} \Gamma(s + \frac{5}{2}) Z(4, s + \frac{5}{2}) \left. \right] - \frac{1}{96b^4 \sqrt{\pi}} [25\Gamma(s+1)Z(0, s+1) \\
& - \frac{1062}{5b^2} \Gamma(s+2)Z(2, s+2) + \frac{884}{5b^4} \Gamma(s+3)Z(4, s+3) \\
& \left. - \frac{1768}{63b^6} \Gamma(s+4)Z(6, s+4) \right] + \dots \left. \right\}, \tag{5.19}
\end{aligned}$$

em que ${}_2F_1[-\frac{1}{2}, s-1; \frac{1}{2}; -(\frac{n\nu}{b})^2]$ é a função hipergeométrica, $Z(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n\nu)^p [1 + (\frac{n\nu}{b})^2]^{-q}$ e $b = m\rho_0$. Podemos, agora, realizar a continuação analítica de (5.19) para $s \rightarrow 0$. Sendo assim, considere a parte de (5.19) contendo a função hipergeométrica:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[\frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1 - \frac{n\nu}{b} \Gamma(s - \frac{1}{2}) \right] \\
&= \frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1 - \frac{n\nu}{b} \Gamma(s - \frac{1}{2}) \right]. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Usando a continuação analítica da função hipergeométrica, teremos:

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, s-1; \frac{1}{2}; -\left(\frac{n\nu}{b}\right)^2\right) &= \frac{n\nu}{b} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s-1)} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-s)} \left(1 + \left(\frac{n\nu}{b}\right)^2\right)^{1-s} \\
&\times {}_2F_1\left(1, s-1; s + \frac{1}{2}; \frac{1}{1 + \left(\frac{n\nu}{b}\right)^2}\right). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

O primeiro termo no lado direito da expressão acima cancela o segundo termo no somatório em (5.20). Então, de (5.20) teremos:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-s)} \left(1 + \left(\frac{n\nu}{b}\right)^2\right)^{1-s} \\
&\times {}_2F_1\left(1, s-1; s + \frac{1}{2}; \frac{1}{1 + \left(\frac{n\nu}{b}\right)^2}\right). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

¹Para este cálculo, algumas propriedades das funções especiais podem ser encontrados no apêndice B.

Usando a expansão em série para a função hipergeométrica, teremos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{n\nu}{b}\right)^2\right)^{-k+1-s} \frac{\Gamma(s-1+k)}{\Gamma(s+\frac{1}{2}+k)}, \\ &= \frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s-1+k)}{\Gamma(s+\frac{1}{2}+k)} \left(\frac{\nu}{b}\right)^{-2k+2-2s} \zeta_{EH} \left(k+s-1, \frac{b}{\nu}\right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

no qual,

$$\zeta_{EH}(r, c) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + c^2)^{-r}, \quad (5.24)$$

é a função de Epstein-Hurwitz. A expansão convergente de (5.24) para valores grandes do parâmetro c é dada por:

$$\zeta(r, c) = -\frac{c^{-2r}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(r-\frac{1}{2})}{2\Gamma(r)} c^{-2r+1} + \frac{2\pi^r c^{-r+\frac{1}{2}}}{\Gamma(r)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}(2\pi nc). \quad (5.25)$$

Para a soma em (5.23), o primeiro termo da expressão acima é dado por:

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s-1+k)}{\Gamma(s+\frac{1}{2}+k)} \left(\frac{\nu}{b}\right)^{-2k+2-2s} \left(-\frac{c^{-2r}}{2}\right) = -\frac{\Gamma(s-1)}{\sqrt{\pi}}, \quad (5.26)$$

em que $c = \frac{b}{\nu}$ e $r = k + s - 1$. Usamos também a soma convergente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s-1+k)}{\Gamma(s+k+\frac{1}{2})} = 2 \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}. \quad (5.27)$$

Para o segundo termo de (5.25), temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s-1+k)}{\Gamma(s+\frac{1}{2}+k)} \left(\frac{\nu}{b}\right)^{-2k+2-2s} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(k+s-\frac{3}{2})}{\Gamma(k+s-1)} \left(\frac{b}{\nu}\right)^{-2k+3-2s} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-s)} \frac{b}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+s-\frac{3}{2})}{\Gamma(k+s+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{b}{2\nu} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(s-\frac{3}{2})(s-\frac{1}{2})} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \frac{b}{\nu}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

no qual usamos a relação:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+s-\frac{3}{2})}{\Gamma(k+s+\frac{1}{2})} = \frac{2}{(2s-3)}. \quad (5.29)$$

Para o terceiro termo de (5.25), temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{k+s-1}}{\Gamma(s+\frac{1}{2}+k)} \left(\frac{b}{\nu}\right)^{k+s-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+s-\frac{3}{2}} K_{k+s-\frac{3}{2}} \Big|_{s \rightarrow 0} \\ &= -\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{b}{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi b}{\nu}\right)^k}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-\frac{3}{2}} K_{k-\frac{3}{2}}(2\pi nc). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Mas, usando a representação integral da função de Bessel modificada

$$K_{k-\frac{3}{2}}(2\pi nc) = \int_0^\infty dt \cosh \left[\left(k - \frac{3}{2} \right) t \right] e^{-2\pi c \cosh t}, \quad (5.31)$$

e substituindo em (5.30), obteremos:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt [\ln(1 - e^{-\pi c e^{-t}}) e^{-t} + \ln(1 - e^{-\pi c e^t}) e^t], \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \ln(1 - e^{-\pi c x}), \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{b}{\nu}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

em que fizemos a mudança de variável $x = e^{\pm t}$. Usamos também as seguintes expressões:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(\pi cn)^k}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \cosh \left[\left(k - \frac{3}{2} \right) t \right] \Big|_{s \rightarrow 0} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi nc} (e^{\pi n c e^t - t} + e^{\pi n c e^{-t} + t}) + O\left(\frac{1}{c}\right), \quad (5.33)$$

e

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1} e^{-\pi n c e^{\pm t}} = \ln(1 - e^{-\pi c n e^{\pm t}}), \quad (5.34)$$

lembrando que $c = \frac{b}{\nu}$. Portanto, $Y(0)$ obtida de (5.23) é dada por,

$$Y(0) = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{b}{\nu} - \frac{\sqrt{\pi} \nu}{3b}. \quad (5.35)$$

As séries $Z(p, q)$ em (5.19) podem ser expressas em termos de (5.24) seguido do uso da expressão (5.25). Desta forma, as séries relevantes são:

$$\begin{aligned} Z(4, s + \frac{5}{2}) &= \frac{b^5 \sqrt{\pi}}{\nu} \left[\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s + \frac{1}{2})} - 2 \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s + \frac{3}{2})} + \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(s + \frac{5}{2})} \right], \\ Z(2, s + \frac{3}{2}) &= \frac{b^3 \sqrt{\pi}}{\nu} \left[\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s + \frac{1}{2})} - \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s + \frac{3}{2})} \right], \\ Z(2, s + 1) &= \frac{b^3 \sqrt{\pi}}{\nu} \left[\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)} \right], \\ Z(0, s - \frac{1}{2}) &= \frac{b \sqrt{\pi}}{\nu} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})}, \\ Z(0, s + \frac{1}{2}) &= \frac{b \sqrt{\pi}}{\nu} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s + \frac{1}{2})}, \\ Z(0, s) &= \frac{b \sqrt{\pi}}{\nu} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Substituindo (5.36) e (5.35) em (5.19) teremos, portanto, o seguinte resultado:

$$E_0(s) = \left(\frac{M}{m}\right)^{2s} \frac{1}{8\pi} \left[-\frac{2\pi\rho_0^2}{3\nu} m^3 - \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\rho_0\Gamma(s-1)}{\nu\Gamma(s-\frac{1}{2})} m^2 + \frac{\pi}{3} \left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) m + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(s)}{32\rho_0\nu\Gamma(s-\frac{1}{2})} \right] + \frac{1}{\rho_0} O\left(\frac{1}{\rho_0 m}\right). \quad (5.37)$$

Comparando a equação acima com (5.8), obteremos os coeficientes de heat Kernel que são dados por:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\pi\rho_0^2}{\nu}, \\ B_{\frac{1}{2}} &= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\rho_0}{\nu}, \\ B_1 &= \frac{\pi}{3} \left(\nu + \frac{1}{\nu}\right), \\ B_{\frac{3}{2}} &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{32\rho_0\nu}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Levando em conta a estrutura geral dos coeficientes,

$$B_r = \int_{\partial V} c_r dS + \int_V a_r dV, \quad (5.39)$$

poderemos representar B_1 como,

$$B_1 = \frac{2\pi}{3\nu} + \frac{\pi}{3} \left(\nu - \frac{1}{\nu}\right). \quad (5.40)$$

Nesta representação, o primeiro termo na expressão acima e todos os outros coeficientes são devido a fronteira em $\rho = \rho_0$. Eles são bem conhecidos [32]. O segundo termo é independente de fronteira. É conhecido como o termo Kac topológico [33] é um resultado da singularidade cônica. Substituindo os coeficientes (5.38) em (5.7), teremos:

$$E_0^{(ren)} = 0, \quad (5.41)$$

Neste cálculo, os parâmetros considerados são a intensidade do campo magnético e a massa do campo escalar.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação reobtivemos as soluções cilindricamente simétricas das equações de Einstein-Maxwell que foram encontradas por Safko e Witten nos anos setenta do século passado, usando as condições de Rainich. Para nosso interesse, fizemos algumas aproximações nas métricas que descrevem os espaços-tempo interior e exterior ao modelo geométrico considerado. A métrica exterior foi particularizada e obtivemos uma geometria com topologia cônica, e portanto, localmente plana.

Por outro lado, para a métrica que descreve o espaço-tempo interior, assumimos como aproximação um campo magnético muito fraco, tal que $\kappa\rho^2 \ll 1$. Esta aproximação, juntamente com a primeira, nos permitiram obter as soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac em ambas as regiões. Vimos que essas soluções carregam informações a respeito das métricas interior e exterior. É importante salientar que a solução exterior carrega informação não apenas da topologia da métrica exterior, mas também da estrutura geométrica que descreve o espaço-tempo interior.

Descrevemos, também, como tratar problemas de espalhamento quântico no espaço-tempo considerado. Para este problema, foi utilizado o método de expansão em ondas parciais para as funções de onda escalar e espinorial. Obtivemos, e mostramos, como o desvio de fase e a amplitude de espalhamento são afetados pela estrutura interior. Algumas aproximações foram necessárias e os gráficos mostrados, justificam que tais aproximações são boas. Vale lembrar também, que parte da amplitude de

espalhamento mostrou-se ter uma estrutura divergente, pois é proporcional à função delta. Com o intuito de resolvermos este problema, mostramos um modo de deslocar a parte com as funções delta para a função de onda incidente. Deste modo, redefinimos a expressão (4.1) para a função de onda incidente e para a amplitude de espalhamento.

Por fim, utilizamos alguns métodos conhecidos para o cálculo da energia de ponto zero de um campo escalar massivo no espaço-tempo de safko-Witten com topologia cônica, sem considerar a estrutura interna. Usamos uma técnica de regularização através da função zeta de Riemann e em seguida subtraímos a estrutura divergente, dada pelos coeficientes de heat Kernel da energia de ponto zero. Desta forma, vimos que a energia de ponto zero se anula para uma massa muito grande do campo quântico.

Como parte desses cálculos, reobtivemos os coeficientes de heat Kernel. Esses coeficientes são devido à fronteira do cilindro em $\rho = \rho_0$, o qual foi introduzido de forma a fornecer auto-valores discretos, e ao termo de Kac.

Os resultados obtidos podem ser generalizados no sentido de considerarmos os espaços-tempo exterior e interior sem aproximações no caso dos estudos em mecânica quântica relativística, bem como, no caso do cálculo da energia de ponto zero, considerando a estrutura interna com a aproximação que foi adotada nesta dissertação no estudo das soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac.

Apêndice A

Notações, definições e cálculos adicionais

A.1 Algumas definições

Durante todo este trabalho, adotamos para a métrica a assinatura $(-1, 1, 1, 1)$. As constantes $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, $\hbar$ e c foram consideradas todas iguais a 1 (Sistema de Unidades Naturais). As notações usadas para a métrica e para as derivadas parciais foram:

$$\begin{aligned}(g^{tt}, g^{\rho\rho}, g^{\varphi\varphi}, g^{zz}) &= (g^{00}, g^{11}, g^{22}, g^{33}), \\ (\partial_t, \partial_\rho, \partial_\varphi, \partial_z) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{A.1}$$

A definição do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é dado por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.\tag{A.2}$$

Suas componentes covariantes serão:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.\tag{A.3}$$

Existe uma outra definição para as matrizes de Dirac $\gamma^{(a)}$, de forma que a simetria do problema seja melhor evidenciada. Esta definição é dada por:

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Além da téttrade $e_{(a)}^\mu$, usamos também as seguintes definições de téttrade para as métricas externa e interna, respectivamente:

$$e_{(a)\mu} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^a \cos \varphi & \rho \sin \varphi & 0 \\ 0 & -e^a \sin \varphi & -\rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

e

$$e_{(b)\mu} = \begin{pmatrix} e^{-q}(1 + \kappa\rho^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-q}(1 + \kappa\rho^2) \cos \varphi & e^{-q}\rho(1 + \kappa\rho^2)^{-1} \sin \varphi & 0 \\ 0 & -e^{-q}(1 + \kappa\rho^2) \sin \varphi & -e^{-q}\rho(1 + \kappa\rho^2)^{-1} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^q(1 + \kappa\rho^2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Conexão afim para a métrica geral

Podemos calcular as componentes da conexão afim associada à métrica geral (3.1), usando a lagrangiana. Desta forma, considere a lagrangiana associada a esta métrica geral dada por:

$$L = \left(\frac{ds}{d\tau^2} \right)^2 = e^{2(\gamma(\rho) - \psi(\rho))} (-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + \rho^2 e^{-2\psi(\rho)} \dot{\varphi}^2 + e^{2(\psi(\rho) + \mu(\rho))} \dot{z}^2. \quad (\text{A.8})$$

Desta forma, para a componente t temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{t}} L &= -2e^{2(\gamma(\rho) - \psi(\rho))} \dot{t}, \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{t}} L \right) &= -4(\gamma_\rho - \psi_\rho) e^{2(\gamma(\rho) - \psi(\rho))} \dot{\rho} \dot{t} - 2e^{2(\gamma(\rho) - \psi(\rho))} \ddot{t}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Usando as equações de Euler-Lagrange e em seguida comparando com a equação da geodésica (2.7), temos as seguintes componentes não-nulas:

$$\Gamma_{\rho t}^t = \Gamma_{t\rho}^t = (\gamma_\rho - \psi_\rho). \quad (\text{A.10})$$

Procedendo da mesma forma para as outras componentes, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{t\rho}^t &= \Gamma_{tt}^\rho = \Gamma_{\rho\rho}^\rho, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\rho &= -\rho(1 - \rho\psi_\rho)e^{-2\gamma}, \\ \Gamma_{zz}^\rho &= -e^{4\psi+2\mu-2\gamma}(\psi_\gamma + \mu_\rho), \\ \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi &= \Gamma_{\rho\varphi}^\varphi = \frac{1}{\rho} - \psi_\rho, \\ \Gamma_{z\rho}^z &= \Gamma_{\rho z}^z = \psi_\rho + \mu_\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Conexão afim e conexão espinorial afim para a métrica externa

Usando a lagrangiana para a métrica externa temos as seguintes componentes não-nulas da conexão afim:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^\rho &= -e^{-2a}\rho, \\ \Gamma_{\rho\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi = \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A única componente não-nula da conexão espinorial é $\Gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma^{(2)}\gamma^{(1)}(1 - e^{-a})$. Desta forma, temos:

$$\gamma^\mu\Gamma_\mu = -\frac{1}{2\rho}(1 - e^{-a})\gamma^{(\rho)}. \quad (\text{A.13})$$

A.4 Conexão afim e conexão espinorial afim para a métrica interna

Da mesma forma que antes, as componentes não-nulas da conexão afim são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho t}^t &= \Gamma_{t\rho}^t = \frac{2\kappa\rho}{(1+\kappa\rho^2)} \approx 2\rho\kappa, \\
\Gamma_{\rho\rho}^\rho &= \Gamma_{tt}^\rho = 2\rho\kappa(1+\kappa\rho^2)^{-1} \approx 2\rho\kappa, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^\rho &= (1+\kappa\rho^2)^{-5}[2\kappa\rho^3 - \rho(1+\kappa\rho^2)] \approx -\rho(1-6\kappa\rho^2), \\
\Gamma_{zz}^\rho &= -2\kappa\rho(1+\kappa\rho^2)^{-1}e^{4q} \approx -2\kappa\rho e^{4q}, \\
\Gamma_{\rho\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi = \frac{1}{\rho} - 2\kappa\rho(1+\kappa\rho^2)^{-1} \approx \rho^{-1}(1-2\kappa\rho^2), \\
\Gamma_{\rho z}^z &= \Gamma_{z\rho}^z = 2\kappa\rho(1+\kappa\rho^2)^{-1} \approx 2\kappa\rho.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Para a conexão espinorial, teremos as seguintes componentes não-nulas:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \kappa\rho(\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\cos\varphi + \gamma^{(0)}\gamma^{(2)}\sin\varphi), \\
\Gamma_2 &= 2\kappa\rho^2\gamma^{(2)}\gamma^{(1)}, \\
\Gamma_3 &= e^{2q}\kappa\rho(\gamma^{(1)}\gamma^{(3)}\cos\varphi + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)}\sin\varphi).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

E portanto teremos:

$$\gamma^\mu\Gamma_\mu \approx 0, \tag{A.16}$$

na aproximação $\kappa\rho^2 \ll 1$.

A.5 Cálculo do comutador para o momento angular total para a métrica interna e externa

Na equação de Dirac, para acharmos uma solução angular incluindo o spin, devemos verificar se o momento angular total comuta com a Hamiltoniana do sistema.

Desta forma, a Hamiltonia para a métrica interna é:

$$H = -i\gamma_0(\gamma^1\partial_\rho + \gamma^2\partial_\varphi + \gamma_z^\partial) + m\gamma^0, \tag{A.17}$$

em que os γ^μ 's são dados por (3.59). Então,

$$[H, J_z] = [H, L_z] + \frac{1}{2} [H, \Sigma_z], \quad (\text{A.18})$$

em que $J_z = L_z + \frac{1}{2}\Sigma_z$ é o momento angular total e $L_z = -i\partial_\varphi$. Usando uma função teste $f(x)$, podemos verificar que:

$$[H, L_z] = \gamma_{(0)}(\gamma^{(\varphi)}\partial_\rho - (1 + \kappa\rho^2)^2\rho^{-1}\gamma^{(\rho)}\partial_\varphi). \quad (\text{A.19})$$

Para calcularmos $\frac{1}{2}[H, \Sigma_z]$, devemos considerar primeiramente as relações:

$$\bar{\gamma}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

em que $i = 1, 2, 3$. Desta forma, teremos:

$$-\bar{\gamma}_5\Sigma_i = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \alpha_i, \quad (\text{A.21})$$

$$-\Sigma_i\bar{\gamma}_5 = -\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \alpha_i, \quad (\text{A.22})$$

$$-\bar{\gamma}_5\alpha_i = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \Sigma_i, \quad (\text{A.23})$$

$$-\alpha_i\bar{\gamma}_5 = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \Sigma_i, \quad (\text{A.24})$$

$$-\beta\Sigma_i = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

$$-\Sigma_i\beta = -\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Estas relações nos permitem concluir que:

$$[\beta, \Sigma_i] = [\tilde{\gamma}_5, \alpha_i] = [\tilde{\gamma}_5, \Sigma_i] = 0. \quad (\text{A.27})$$

Além disso,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = i\epsilon^{ijk}\sigma_k, \quad (\text{A.28})$$

no qual ϵ^{ijk} é o tensor de Levi-Civita.

Com as relações acima poderemos obter o seguinte resultado:

$$\frac{1}{2} [H, \Sigma_z] = -\gamma_{(0)}\gamma^{(\varphi)}\partial_\rho + (1 + \kappa\rho^2)^2\rho^{-1}\gamma_{(0)}\gamma^{(\rho)}\partial_\varphi. \quad (\text{A.29})$$

De (A.19) e (A.28), concluíremos que:

$$[H, J_z] = 0. \quad (\text{A.30})$$

Para a métrica externa, teremos que a hamiltonia terá a mesma forma de (A.17) só que com as matrizes generalizadas de Dirac dadas por (3.41). Então, podemos obter que:

$$[H, L_z] = \gamma_{(0)}(\gamma^{(\varphi)}\partial_\rho - e^a\rho^{-1}\gamma^{(\rho)}\partial_\varphi), \quad (\text{A.31})$$

e

$$\frac{1}{2} [H, \Sigma_i] = -\gamma_{(0)}\gamma^{(\varphi)}\partial_\rho + e^a\rho^{-1}\gamma_{(0)}\gamma^{(\rho)}\partial_\varphi. \quad (\text{A.32})$$

Portanto,

$$[H, J_z] = 0. \quad (\text{A.33})$$

Teremos, em seguida, a seguinte equação de autovalores:

$$J_z\phi(\varphi) = m\phi(\varphi), \quad (\text{A.34})$$

em que $m = n + \frac{1}{2}$ é semi-inteiro e n é inteiro. A expressão acima constitui um conjunto de quatro equações. Sua solução é dada por,

$$\begin{aligned} \phi_1(\varphi) &= \phi_3(\varphi) = e^{(m-\frac{1}{2})\varphi}, \\ \phi_2(\varphi) &= \phi_4(\varphi) = e^{(m+\frac{1}{2})\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

em que $\phi_{1,2,3,4}(\varphi)$ são as componentes de $\phi(\varphi)$.

A.6 Decomposição de Gordon no espaço-tempo curvo

Para acharmos a decomposição de Gordon (2.43), devemos considerar primeiramente a equação conjugada de (2.37). Sendo assim,

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - i\gamma^\mu \Gamma_\mu \psi - m\psi]^\dagger = i(\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \psi^\dagger \Gamma_\mu^\dagger \gamma^{\mu\dagger}) - m\psi^\dagger = 0. \quad (\text{A.36})$$

Multiplicando à esquerda por γ^0 , temos:

$$\begin{aligned} i(\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - \psi^\dagger \Gamma_\mu^\dagger \gamma^0 \gamma_0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0) - m\psi^\dagger \gamma^0 &= 0, \\ i\nabla_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

em que usamos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^\mu, \\ \nabla_\mu (\psi^\dagger \psi) &= \partial_\mu (\psi^\dagger \psi) \longrightarrow \psi^\dagger \Gamma_\mu^\dagger \psi = -\psi^\dagger \Gamma_\mu \psi, \\ \gamma^0 \gamma_0 &= 1, \\ \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^0 \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Além disso, temos as seguintes definições de derivada covariante:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi(x) &= \partial_\mu \psi(x) - \Gamma_\mu \psi(x), \\ \nabla_\mu \bar{\psi}(x) &= \partial_\mu \bar{\psi}(x) + \bar{\psi}(x) \Gamma_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Agora, somando (2.37) e (A.37), teremos:

$$\bar{\psi} a_\nu \gamma^\nu (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi + [-i(\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu - m\bar{\psi}] a_\nu \gamma^\nu \psi = 0, \quad (\text{A.40})$$

em que multiplicamos $\bar{\psi} a_\nu \gamma^\nu$ à direita de (2.40) e $-a_\nu \gamma^\nu \psi$ à esquerda de (A.37). O quadrivetor a_μ é arbitrário e ajudará em nossos cálculos. Então, de (A.40) temos:

$$2m\bar{\psi} a_\nu \gamma^\nu \psi = i\bar{\psi} a_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi) - i(\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu a_\nu \gamma^\nu \psi. \quad (\text{A.41})$$

Considere, então, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi) &= a_\mu \left[\frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) + \frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) \right] (\nabla_\mu \psi), \\ &= a^\mu (\nabla_\mu \psi) - i a_\nu \sigma^{\nu\mu} (\nabla_\mu \psi). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Da mesma forma,

$$(\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\nu a_\nu = (\nabla_\mu \bar{\psi}) a^\mu - i(\nabla_\mu \bar{\psi}) \sigma^{\mu\nu} a_\nu, \quad (\text{A.43})$$

em que usamos $-\sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\nu\mu} = \frac{i}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]$ e $2g^{\nu\mu} = \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$. Assim,

$$2m\bar{\psi}a_\nu\gamma^\nu\psi = i\bar{\psi}a^\mu(\nabla_\mu\psi) + \bar{\psi}a_\nu\sigma^{\nu\mu}(\nabla_\mu\psi) - i(\nabla_\mu\bar{\psi})a^\mu\psi - (\nabla_\mu\bar{\psi})\sigma^{\mu\nu}a_\nu\psi. \quad (\text{A.44})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}a^\mu(\nabla_\mu\psi) - i(\nabla_\mu\bar{\psi})a^\mu\psi &= ia_\mu(\bar{\psi}(\partial^\mu\psi) - i(\partial^\mu\bar{\psi})\psi + i\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi - i\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi), \\ &= ia_\mu(\bar{\psi}(\partial^\mu\psi) - i(\partial^\mu\bar{\psi})\psi), \\ &= ia_\mu\bar{\psi}\overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu\psi = ia_\mu g^{\mu\nu}\bar{\psi}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\psi. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu\bar{\psi})\sigma^{\nu\mu}a_\nu\psi + \bar{\psi}a_\nu\sigma^{\nu\mu}(\nabla_\mu\psi) &= a_\nu \left\{ -\partial_\nu(\bar{\psi}\sigma^{\nu\mu}\psi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}([\partial_\nu\gamma^\nu, \gamma^\mu] \right. \\ &\quad \left. + [\gamma^\nu, \partial_\nu\gamma^\mu])\psi - i\bar{\psi}[\gamma^\nu\Gamma_\nu, \gamma^\mu]\psi \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

E então, de (A.44) temos:

$$\begin{aligned} j^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \frac{1}{2m}\partial_\nu(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}) + \frac{i}{2m}g^{\mu\nu}\bar{\psi}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\psi + \frac{i}{4m}\bar{\psi}\{[\partial_\nu\gamma^\nu, \gamma^\mu] + [\gamma^\nu, \partial_\nu\gamma^\mu]\}\psi \\ &\quad - \frac{i}{2m}\bar{\psi}[\gamma^\nu\Gamma_\nu, \gamma^\mu]\psi. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Apêndice B

Funções especiais

B.1 Funções de Whittaker e Hipergeométrica

Destacaremos aqui alguns aspectos, os quais usamos durante o trabalho, das funções de Whittaker e Hipergeométrica confluyente, bem como a relação entre essas duas funções. A função hipergeométrica confluyente ${}_1F_1 = {}_1F_1(a; b; z)$ é uma série em z , a qual se torna um polinômio de grau m em z quando temos[30] $b \neq -n$ e $a = -m$, motivo pelo qual escolhemos apenas $|n|$ na solução das equações de Klein-Gordon e Dirac para a métrica interna. A função Whittaker $W_{k,\mu}(z)$ se relaciona com a função hipergeométrica confluyente da seguinte forma:

$$W_{k,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2}+\mu} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z\right). \quad (\text{B.1})$$

Um outro tipo de função hipergeométrica, a qual é conhecida como uma série de Gauss, é designada por ${}_2F_1(a, b; c; z)$. Esta série, usamos no cálculo da energia de ponto zero e é dada por:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{B.2})$$

em que $\Gamma(c)$ é a função gamma. Uma fórmula de transformação linear para esta função hipergeométrica, também usada no cálculo da energia de ponto zero, é dada

por:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} {}_2F_1\left(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}\right) \\ &+ (1-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1\left(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Uma representação integral útil nos cálculos é dado por:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Funções de Bessel

As funções de Bessel $J_\nu(z)$ e $N_\nu(z)$, soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac para a métrica externa, obedecem às seguintes propriedades:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z), \quad (\text{B.5})$$

em que n é inteiro. Além dessa propriedade, temos também a extensão para argumentos complexos usado no cálculo da energia de ponto zero dada pela equação (5.15). Duas representações integrais da função de Bessel $J_\nu(z)$ foram usadas neste trabalho: A representação de Schlöfli e a equação (4.5). Expansões assintóticas para argumentos grandes, tanto para $J_\nu(z)$ quanto para $N_\nu(z)$, são dadas por (4.3). As funções $u_n(t)$, da expansão assintótica (5.18), são dadas por:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1(t) &= \frac{(3t - 5t^3)}{24}, \\ u_2(t) &= \frac{(81t^2 - 462t^4 + 385t^6)}{1152}, \\ u_3(t) &= \frac{(30375t^3 - 369603t^5 + 349922430t^8 - 446185740t^{10} + 185910725t^{12})}{39813120}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

que são os coeficientes apenas até $n = 3$.

B.3 Função Gamma

Para a função gamma, usamos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n!, & n - \text{inteiro}, \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \\ \Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z) &= \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Vale lembrar, também, os seguintes valores para a função gamma:

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(3/2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \\ \Gamma(7/2) &= \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.\end{aligned}\tag{B.8}$$

B.4 Função zeta de Riemann

A função zeta de Riemann desempenha um importante papel em problemas de regularização em teoria de campos, tal como discutimos neste trabalho. Esta função é definida por:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},\tag{B.9}$$

em que $z = x + iy$ é um número complexo. A função zeta é analítica no semi-plano $x = \Re(z) > 1$. Sua analiticidade pode ser estendida a todo o plano complexo, exceto no ponto $z = 1$. Os zeros desta função e alguns valores especiais são dados por:

$$\begin{aligned}\zeta(-2n) &= 0, & n - \text{inteiro positivo}, \\ \zeta(0) &= -\frac{1}{2}, \\ \zeta(1) &= \infty, \\ \zeta'(0) &= -\frac{1}{2}\ln 2\pi, \\ \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6}, \\ \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}.\end{aligned}\tag{B.10}$$

A equação funcional de Riemann para todo o plano complexo z exceto para $z = 1$ é dado por:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\Gamma(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right). \quad (\text{B.11})$$

Apêndice C

Cálculos adicionais e definições relacionados a energia de ponto zero.

C.1 Expansão de heat kernel

A expansão de heat kernel é uma ferramenta matemática frequentemente usada para tratar divergências da energia do vácuo. Esse tratamento é válido apenas para operadores elípticos e operadores pseudo-diferenciais. Existe, também, uma extensão para operadores de primeira ordem usada quando se trabalha com soluções da equação de Dirac.

No caso de uma variedade com fronteira ∂M , devemos impor condições sobre a mesma. Em geral são usadas condições de fronteira de Dirichlet e Neumann. Então, considere λ_j e $\phi_j(x)$ como sendo os autovalores e autofunções associados a um operador P . O heat Kernel local é definido como,

$$K(x, y|t) = \sum_j \phi_j(x) \phi_j^*(y) e^{-t\lambda_j}, \quad (\text{C.1})$$

que vale para operadores com autovalores discretos ou contínuos. O heat Kernel

global é obtido tomando o traço do heat Kernel local, ou seja:

$$K(t) = \text{Tr}K(x, y|t) = \sum_j e^{-t\lambda_j}, \quad (\text{C.2})$$

em que o traço é dado por $\text{Tr}K(x, y|t) = \int dx K(x, x|t)$.

Considere, então, a seguinte equação de auto-valores:

$$H\phi_j(x) = \lambda_j\phi_j(x), \quad (\text{C.3})$$

em que H é o operador Hamiltoniano e λ_j são os autovalores associados a este operador. Desta forma, a função zeta associada a Hamiltoniana H é definida como,

$$\zeta(s) = \sum_j \lambda_j^{-s}. \quad (\text{C.4})$$

A função zeta acima pode ser expressa como uma integral do heat Kernel $K(t)$. Portanto,

$$A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-tA}, \quad (\text{C.5})$$

em que $\Re s > 0$, e $\Re A > 0$. Então, de (C.2) e (C.4), a equação (C.5) ficará:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t). \quad (\text{C.6})$$

A equação acima é bem comportada para $t \rightarrow \infty$ e, portanto, possíveis singularidades aparecem apenas quando tomamos o limite $t \rightarrow 0$ no integrando. Então, uma expansão para $K(t)$ neste limite será dado por [18], [29]

$$K(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0,1/2,1,\dots} a_n t^n, \quad (\text{C.7})$$

em que d é a dimensão da variedade. A série (C.7) é uma expansão assintótica para $t \rightarrow 0$ e não é convergente em geral. Os coeficientes a_n são chamados de coeficientes de heat Kernel. A estrutura destes coeficientes pode ser melhor expresso, através de uma função teste $f(x)$, como a seguinte integral:

$$a_n(f) = \int_M dx f(x) a_n(x, x) + \int_{\partial M} dS_x f(x) b_n(x), \quad (\text{C.8})$$

em que $a_n(x, x)$ são os coeficientes de heat kernel local e $b_n(x)$ são contribuições dependentes da fronteira.

C.2 Teorema do argumento

Seja $f(x)$ uma função analítica no contorno C e dentro de C , exceto em um número finito de pólos. Seja $g(x)$ uma função analítica dentro e no contorno C . A função $g(x)$ tem, por hipótese, n zeros dados por $z_1, z_2, \dots, z_n$ e m pólos $p_1, p_2, \dots, p_m$, com multiplicidades dadas, respectivamente, por $r_1, r_2, \dots, r_n$ e $s_1, s_2, \dots, s_m$.

Pelo teorema fundamental dos resíduos, temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dx \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} = \sum \text{Res} \left[\frac{f(x)g'(x)}{g(x)} \right]. \quad (\text{C.9})$$

As singularidades de $\frac{f(x)g'(x)}{g(x)}$ que estão dentro do contorno C , são dadas apenas pelos zeros e pelos pólos de $g(x)$.

Na vizinhança do ponto z_i , podemos escrever:

$$\begin{aligned} g(x) &= A(x - z_i)^{r_i} + B(x - z_i)^{r_i+1} + \dots, \\ g'(x) &= Ar_i(x - z_i)^{r_i-1} + B(r_i + 1)(x - z_i)^{r_i} + \dots, \\ f(x) &= f(z_i) + (x - z_i)f'(z_i) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Então, o resíduo de $\frac{f(x)g'(x)}{g(x)}$ no ponto $x = z_i$ é dado por,

$$\text{Res} \left[\frac{f(x)g'(x)}{g(x)} \right] \Big|_{x=z_i} = \lim_{x \rightarrow z_i} (x - z_i) \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} = r_i f(z_i). \quad (\text{C.11})$$

Por outro lado, nas proximidades do pólo p_j de $g(x)$, temos:

$$\begin{aligned} g(x) &= C(x - p_j)^{-s_j} + D(x - p_j)^{-s_j+1} + \dots, \\ g'(x) &= -Cs_j(x - p_j)^{-s_j-1} + D(-s_j + 1)(x - p_j)^{-s_j} + \dots, \\ f(x) &= f(p_j) + f'(p_j)(x - p_j) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

O resíduo de $\frac{f(x)g'(x)}{g(x)}$ no ponto $x = p_j$ é dado por:

$$\text{Res} \left[\frac{f(x)g'(x)}{g(x)} \right] \Big|_{x=p_j} = \lim_{x \rightarrow p_j} (x - p_j) \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} = -s_j f(p_j). \quad (\text{C.13})$$

Substituindo (C.11) e (C.13) em (C.9) e somando em todos os índices i e j , obtemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dx \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^n r_i f(z_i) - \sum_{j=1}^m s_j f(p_j), \quad (\text{C.14})$$

que é o teorema do argumento.

C.3 Aplicação do teorema do argumento

Usando o teorema do argumento, podemos transformar a soma em (C.4) na seguinte integral de contorno:

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz (z^2 + m^2)^{-s} \frac{\partial}{\partial z} \ln \phi(z), \quad (\text{C.15})$$

em que $\phi(z)$ é a autofunção do operador Hamiltoniano dado em (C.3), $\phi(\lambda) = 0$ e $\lambda = z^2 + m^2$. O contorno C começa em $i\epsilon + \infty$, corta o eixo real próximo ao zero e vai para $-i\epsilon + \infty$. A função $f(z) = \sqrt{z^2 + m^2}$ é definida em todo o plano complexo com dois cortes $z = \pm iy$, $y > m$. Então, temos os seguintes cortes para a função $f(z)$ ($y > m, \epsilon > 0$):

$$f(z) = \begin{cases} +i\sqrt{z^2 + m^2}, & z = iy + \epsilon \\ -i\sqrt{z^2 + m^2}, & z = iy - \epsilon \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

e

$$f(z) = \begin{cases} -i\sqrt{z^2 + m^2}, & z = -iy + \epsilon \\ +i\sqrt{z^2 + m^2}, & z = -iy - \epsilon \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

A mudança $z \rightarrow i\kappa$ desloca o contorno para o eixo imaginário de forma a obtermos:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^m d\kappa (i\sqrt{\kappa^2 - m^2})^{-2s} \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln \phi(i\kappa) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-m}^{-\infty} d\kappa (-i\sqrt{\kappa^2 - m^2})^{-2s} \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln \phi(i\kappa), \\ \zeta(s) &= \frac{\cos(\pi s)}{\pi} \int_m^{\infty} d\kappa (\sqrt{\kappa^2 - m^2})^{-2s} \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln \phi(i\kappa). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

em que $\phi(i\kappa) = \phi(-i\kappa)$.

Bibliografia

- [1] *An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962), Chap. 9.
- [2] J. L. Safko and L. Witten, Phys. Rev. D **5**, 2 (1972).
- [3] J. L. Safko and L. Witten, J. Math. Phys. **12**, 257 (1971).
- [4] V. Fock, Z. Phys. **53**, 592 (1928); E. Schrödinger, Physical B, 899 (1932); W. Pauli, Ann. Phys.. (Lpz) **18**, 337 (1933).
- [5] J. Audretsch and G. Schäffer, Gen. Rel. Grav. **9**, 243 (1978); **9**, 489 (1978).
- [6] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **44**, 1559 (1980).
- [7] V. B. Bezerra, Class. Quantum Grav. **8**, 1939-1945 (1991).
- [8] V. B. Bezerra, Class. Quantum Grav. **9**, 2505-2513 (1992).
- [9] V. B. Bezerra and I. G. Araújo, Class. Quantum. Grav. **11**, 1599-1606 (1994).
- [10] S. Deser and R. Jackiw *Commun. Math. Phys.* **118**, 495-509 (1988).
- [11] P. de Souza Gerbert and R. Jackiw *Commun. Math. Phys.* **124**, 229-260 (1989).
- [12] J. Spinelly and V. B. Bezerra, Class. Quantum. Grav. **25**, 205016 (2008).
- [13] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello and V. B. Bezerra, Class. Quantum. Grav. **18**, 1555-1566 (2001).
- [14] M. V. C. Pinto, C. Farina e A. C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fis. **22**, 1 (2000).

- [15] J.J. Passos Sobrinho e A.C Tort, Rev. Bras. Ens. Fis. 23, 4 (2001).
- [16] M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten and S. Leseduarte, Phys. Rev D **56**, 4896 (1997).
- [17] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko and S. Zerbibi, *Zeta Regularization Techniques with Applications* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [18] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, New developments in the Casimir effect, Phys. Rep. **353**, 1-205 (2001).
- [19] N. R. Khusnutdinov and M. Bordag, Phys. Rev. D **59**, 064017 (1999).
- [20] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra and N. R. Khusnutdinov, J. Math. Phys. 42, 2 (2001).
- [21] R. D’Inverno: *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press (1992).
- [22] R. M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [23] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler: *Gravitation*, (1970).
- [24] W. Greiner: *Relativistic Quantum Mechanics*, Third Edition, Springer (2000).
- [25] N.D. Birrel and P. C. W. Davies: *Quantum Filds in Curved Space*, Cambridge University Press (1982).
- [26] S. A. Fulling: *Aspects of Quantum Filds Theory in Curved Space-Time*, Cambridge University Press (1989).
- [27] J. D. Bjorken and S. D. Drell: *Relativistic Quantum Mechanics*, Macgraw-Hill Book Company (1964).
- [28] J. M. F. Bassalo: *Eletrodinâmica Quântica*, Editora Livraria da Física, segunda edição, São Paulo (2006)).

- [29] P.B. Gilkey, Invariance Theory, The Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem, 2nd Edition, CTC Press, Boca Raton, 1995.
- [30] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1972); I. N. Sneddon *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry* (Longman Group, New York, 1980).
- [31] G. Arfken, *Mathematical Mehtods for Physicists*, Academic Press, New York (1970), segunda edição, p. 410.
- [32] G. Kennedy, R. Critchley, and J. S. Dowker, Ann. Phys. (N.Y) 125, 346 (1980).
- [33] M. Kac, Am. Math. Soc. Trans. 73, 1 (1966).
- [34] A. A. Saharian and M. R. Setare, Phys. Lett. **B659**, 367 (2003).
- [35] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, Class. Quantum Grav. 23, 4673 (2006).
- [36] G. A. Marques, V. B. Bezerra, Class. Quantum Grav. **19**, 985 (2002).