**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA**
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

JILVAN LEMOS DE MELO

# QUANTIZAÇÃO DE LANDAU PARA QUADRUPOLO ELÉTRICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOÃO PESSOA, PB
OUTUBRO, 2010

JILVAN LEMOS DE MELO

# QUANTIZAÇÃO DE LANDAU PARA QUADRUPOLO ELÉTRICO

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.*

Orientador:
*Prof. Dr. Claudio Benedito Silva Furtado*

JOÃO PESSOA, PB
OUTUBRO, 2010

M528q Melo, Jilvan Lemos de.
Quantização de Landau para quadrupolo elétrico / Jilvan Lemos de Melo.-- João Pessoa, 2010.
54f. : il.
Orientadora: Claudio Benedito Silva Furtado
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Efeito Aharonov-Bohm. 3. Efeito Aharonov-Casher. 4. Efeito He-McKellar-Wilkens. 5. Níveis de Landau. 6. Momentos elétricos e magnéticos.

UFPB/BC CDU: 53(043)

Universidade Federal da Paraíba (UFPB)
Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN)
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física
Campus I - Jardim Universitário, s/n, Castelo Branco
João Pessoa-PB, Brasil
Caixa Postal 5008, CEP: 58051-900
Fone: (83) 3216-7422, secpos@fisica.ufpb.br

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de **Mestrado** do aluno **Jilvan Lemos de Melo**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos **vinte e dois dias do mês de outubro do ano de dois mil e dez**, às **10:00**, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física da Matéria Condensada, o Sr. **Jilvan Lemos de Melo**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Cláudio Benedito da Silva Furtado* (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *NÃO HÁ* (---), co-orientador, *José Roberto Soares Nascimento* (DF/UFPB) e *Alexandre Manoel de Morais Carvalho* (UEFS). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Cláudio Benedito da Silva Furtado* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Quantização de Landau para Quadrupolos Elétricos*". Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, 22 de outubro de 2010.

Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado
*Orientador -DF/ UFPB*

Prof. Dr. NÃO HÁ
*Co-orientador - ---*

Prof. Dr. José Roberto Soares Nascimento
*DF/UFPB*

Prof. Dr. Alexandre Manoel de Morais Carvalho
*UEFS*

Danilo Wilson Lemos Menezes
*Secretário*

*Á minha esposa, meus pais, irmãos e futuros filhos.*

# Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus todo poderoso, por ter me dado permissão para realização desse trabalho. À Laiz, minha esposa, por todo o apoio, paciência e amor que sempre estavam disponíveis. À Dona Célia, minha mãe, por toda a torcida e todas as orações. Sr. Valdo, meu pai, que sempre se preocupa e procura me dá conselhos. Keu, meu irmão mais novo, que sempre que converso sabe me tirar sorrisos e levantar meu astral. Junior, meu irmão mais velho, por sempre esta do meu lado acreditando em mim. Ao Professor Dr. Cláudio Furtado, meu orientador, por ter me dado toda a base para realização desse trabalho. À todos os colegas, em especial aos colegas da Sala 15( Everton, Fabrício, Tony, Lázaro), Knut, Aníbal e todos os que me ajudaram muito nas discussões em corredores e nos cafezinhos. Por fim, à agencia de fomento(CAPES) que me auxilou financeiramente nesse período de permanência no programa de mestrado.

*Não é o que sou por dentro,*
*mas o que faço que me define.*
—DAVID S. GOYER

# Resumo

Neste trabalho discutimos a importância das fases quânticas usando o Efeito Aharonov-Bohm para partículas carregadas e partículas neutras com momento de dipolo magnético (Efeito Aharonov-Casher) e momento de dipolo elétrico (Efeito He-McKellar-Wilkens), e átomos com momento de quadrupolo elétrico. Tira-se vantagem do estudo inicial de tais sistemas para mostrar a emersão de níveis de Landau na dinâmica de uma partícula em duas situações: quando a partícula está carregada e quando ela é neutra. No caso de uma partícula neutra é considerado que esta possui momento de dipolo elétrico. Além disso é a primeira vez que é abordado um átomo neutro com momento de quadrupolo elétrico.

**Palavras-chave:** Efeito Aharonov-Bohm, Efeito Aharonov-Casher, Efeito He-McKellar-Wilkens, Nívies de Landau, Momentos Elétricos e Magnéticos.

# Abstract

In this work we discuss the importance of the quantum phases using the Aharonov-Bohm Effect for charged particles and neutral particles with magnetic dipole moment(Aharonov-Casher Effect) and electric dipole moment(He-McKellar-Wilkens Effect) and atoms with electric quadrupole moment. It takes advantage of the initial study of such systems to show the emergence of Landau levels in the dynamics of a particle in two situations: when the particle is charged and when it is neutral. In the case of a neutral particle is considered that it possesses electric dipole moment. In addition it is the first time which is approached a neutral atom with electric quadrupole moment.

**Keywords:** Aharonov-Bohm Effect, Aharonov-Casher Effect, He-McKellar-Wilkens Effect, Landau Levels, Electrics and Magnetics Moments.

# Sumário

**Agradecimentos** **ii**

**Resumo** **iv**

**Abstract** **v**

**Lista de Figuras** **vii**

**INTRODUÇÃO** **1**

**1 FASES QUÂNTICAS** **4**
1.1 FASES DINÂMICAS . . . . . 4
1.2 FASES GEOMÉTRICAS . . . . . 5
1.3 FASES TOPOLÓGICAS . . . . . 7

**2 EFEITO AHARONOV-BOHM E ANÁLOGOS** **9**
2.1 EFEITO AHARONOV-BOHM . . . . . 9
2.2 FASE DE BERRY . . . . . 14
2.3 EFEITOS AHARONOV-CASHER E HE-MCKELLAR-WILKENS . . . . . 17
2.3.1 EFEITO AHARONOV-CASHER . . . . . 17
2.3.2 EFEITO HE-MCKELLAR-WILKENS . . . . . 19
2.4 EFEITO AB PARA MOMENTOS DE QUADRUPOLO ELÉTRICO . . . . . 22

**3 NÍVEIS DE LANDAU** **25**
3.1 NÍVEIS DE LANDAU PARA PARTÍCULA CARREGADA . . . . . 25
3.2 NÍVEIS DE LANDAU DE ÁTOMO NEUTRO COM MOMENTO DE DIPOLO ELÉTRICO . . . . . 28

**4 NÍVEIS DE LANDAU DE ÁTOMO NEUTRO COM MOMENTO DE QUADRUPOLO ELÉTRICO** **32**

**CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS** **38**

**Referências** **40**

**A Apêndice 1** **43**

# Lista de Figuras

1.1 Vetor transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado em uma esfera. 6
1.2 O plano de oscilação do pêndulo sofre um giro quando se move ao redor de uma latitude ao longo do dia. . . . . 7

2.1 Experimentos propostos por Aharonov e Bohm (figuras tiradas do artigo [1]) . 10
2.2 Experimento de Young com feixe de partículas carregadas em região com potencial vetor nulo. . . . . 11
2.3 Experimento tipo Young com feixe de partículas carregadas em região com potencial vetor não nulo. . . . . 12
2.4 Anel geométrico com duas junções de tunelamento que foi usado para observar efeito AB elétrico. Figura tirada do artigo [24] . . . . . 13
2.5 Partícula confinada em uma caixa por um potencial $V(\vec{r}-\vec{R})$. . . . . 16

# INTRODUÇÃO

Para estudos de fenômenos físicos utilizando teoria quântica, é necessário à atribuição de uma característica ondulatória para as partículas e nesse contexto entra em cena a função de onda. A função de onda é a representação ondulatória da matéria. Na função de onda existem fatores de fase, que possuem grande importância no estudo desses sistemas. Essas fases são denominadas fases quânticas. As fases quânticas podem ser do tipo dinâmica, a qual depende da velocidade de evolução do sistema e muitas vezes são responsáveis pela dependência temporal de toda função de onda, geométrica, sendo essas dependentes da geometria do espaço dos estados ou topológica, que esta relacionada com a estrutura topológica do espaço de configuração. Apenas das fases não emerge fundamento físico algum, mas dos estudos de interferência de estados interagentes podem aparecer, devido à diferença das fases, importantes efeitos quânticos. Em 1959, Aharonov e Bohm estudaram a importância da fase quântica adquirida por uma partícula carregada ao interagir com um campo magnético[1]. O surpreendente da fase AB é a sua existência, mesmo considerando a dinâmica da partícula em uma região livre de campo magnético, ou seja, região na qual não existe força agindo sobre a partícula. Esse efeito mostrou um significado novo aos potenciais eletromagnéticos, os quais ate então, eram entendidos como artifício matemático. A fase AB pode foi verificada experimentalmente através de experimentos de interferência[2]. Esse efeito é conhecido como Efeito Aharonov-Bohm. Continuando o estudo quântico de dinâmicas com campos eletromagnéticos, em 1984 Aharonov e Casher mostraram que fase semelhante é também adquirida por uma partícula neutra com dipolo magnético permanente interagindo com campo elétrico[3]. O efeito Aharonov-Casher, como ficou conhecido, também foi experimentalmente observado em experimentos de interferência de nêutrons. As fases quânticas citadas acima são do tipo topológica, pois dependem apenas da topologia do espaço. Outra fase topológica presente em dinâmicas eletromagnéticas foi encontrada por He e McKellar, e Wilkens, independentemente, estudando um sistema composto por uma partícula neutra com dipolo elétrico permanente em meio a campo magnético, ao considerar o movimento do dipolo em região livre de forças[4, 5], como nos efeitos AB e AC. Percebendo que também a fase HMW é topológica, nota que se pode construir efeitos semelhantes, aos já comentados, usando transformações que preservem a topologia do espaço, dentre as quais temos a Transformações de dualidade de Heaviside[6], sob a qual as equações de Maxwell são invariantes. Dessa forma o efeito HMW é visto como efeito dual ao efeito AC e surge o efeito AB dual[7],

que é o aparecimento de uma fase quântica topológica para um monopolo magnético em meio a campo elétrico, realizando assim uma descrição unificada dos efeitos acima citados[8]. Em 1995, Chen, mostrou que efeito parecido ao AB ocorre também com átomo neutro possuindo momento de quadrupolo elétrico interagindo com campo magnético[9]. Para configurações de campo e distribuição de cargas especificas é encontrada fase quântica topológica como no AB. Esses efeitos têm grande possibilidade de aplicação em diversas áreas, em especial na área de computação quântica holonômica. Na computação quântica as operações lógicas são feitas usando portas lógicas reversíveis que em muitos casos quando aplicadas, resultam em estados lógicos diferentes dos de entrada apenas por uma fase. O estudo de sistemas físicos utilizando teoria quântica tem outra consequência muito interessante, que é a quantização dos níveis de energia, ou seja, a energia agora assume valores discretos. Para uma partícula carregada em meio a campo magnético constante e homogêneo, os níveis de energia se apresentam quantizados em um valor constante, que esta relacionado com a frequência de oscilação da partícula nas órbitas clássicas. O espectro de energia para o sistema descrito acima foi encontrado por Landau em 1930[10]. Landau também mostrou que esses níveis de energia eram degenerados, ou seja, o sistema poderia ter varias funções de onda que correspondessem à mesma energia. A descrição quântica da dinâmica estudada por Landau auxiliou o estudo de muitos outros fenômenos que têm como base a interação de partículas carregadas com campo magnético. Um exemplo é o *Efeito Hall Quântico*, que é o aparecimento de uma resistência quantizada em uma placa condutora, a qual é atravessada por um campo elétrico ao longo da superfície e por um campo magnético perpendicular a superfície[11]. Em 2001, B. Paredes e colaboradores usando a analogia entre um condensado de Bose-Einstein girando, e um sistema de elétrons interagindo com campo magnético uniforme como nos Níveis de Landau, provou a existência de uma excitação de ânions [1] neste condensado[12]. Marie Ericsson e Erik Sjöqvist no mesmo ano motivados pelo resultado de Paredes, desenvolveram um análogo atômico da Quantização de Landau baseados na interação de partículas neutras com momento de dipolo magnético em meio a campo elétrico[13], como no Efeito AC, prevendo assim um possível Efeito Hall Quântico Atômico usando campos elétricos, o qual pode ser visto em Condensado de Bose-Einstein. Os níveis de energia desenvolvidos por Ericsson e Sjöqvist foram chamados de *Níveis Landau-Aharonov-Casher*. Seguindo a ideia de Ericsson e Sjöqvist em 2006, L. R. Ribeiro, C. Furtado e J. R. Nascimento estudaram a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo, como no Efeito He-McKellar-Wilkens, e demonstraram que para configurações específicas de campos e dipolos tinham quantização similar a dos Níveis de Landau[14]. No mesmo ano Furtado e colaboradores analisaram os Níveis de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido em uma configuração particular de campos elétrico e magnético confinando a partícula neutra no

[1] partículas compostas que surgem em sistemas bidimensionais

plano[15]. Nos capítulos seguintes desse trabalho faremos uma discussão sobre fases, apresentando breves exemplos de fases dinâmicas, geométricas e topológicas(Capítulo 1). No Capitulo 2, estudaremos a dinâmica quântica de partículas carregadas na presença de campo magnético onde mostraremos o Efeito AB, partículas neutras com momentos de dipolo magnético em meio a campo elétrico onde mostraremos o efeito Aharonov-Casher, átomos com dipolo elétrico interagindo com campo magnético onde será mostrado o efeito He-McKellar-Wilkens e para átomos com momento de quadrupolo elétrico sujeito a interação com campo magnético será mostrado o efeito Aharonov-Bohm análogo. No capitulo 3, estudaremos algumas das dinâmicas citadas no capitulo 2, com o objetivo agora de evidenciar a Quantização de Landau. Então apresentaremos a Quantização de Landau tradicional, ou seja, a quantização dos níveis de energia de uma partícula carregada em meio a campo magnético e depois para partículas neutras com dipolo magnético em meio a campo elétrico. No capitulo 4, apresentaremos pela primeira vez na literatura a quantização de Landau, para átomos com momento de quadrupolo elétrico interagindo com campo magnético. Por fim são apresentadas as conclusões e as perspectivas desse trabalho.

CAPÍTULO 1

# FASES QUÂNTICAS

Nos fenômenos quantum mecânicos, aparecem fatores de fase na função de onda do sistema e essas fases possuem diversas propriedades que as classificam em dinâmicas, geométricas ou topológicas. O primeiro contato que temos com fases na Física é nos estudos iniciais sobre fenômenos oscilatórias, no qual a fase se mostra como um dos parâmetros essenciais para a descrição dessas dinâmicas, inicialmente com o oscilador harmônico simples unidimensional que é descrito tradicionalmente por

$$x(t) = x_0 cos(\phi_0 + \omega t) \tag{1.1}$$

onde $\phi_0 + \omega t$ é a fase do oscilador. Esse é o primeiro contato que temos com o conceito de fase na Física. Logo o conceito de fase é estendido para estudos ondulatórios devido às características oscilatórias desses fenômenos. Então podemos dizer que a fase de algum objeto físico ou sistema físico é caracterizado por um ângulo. Podemos representar essas fases usando funções trigonométricas $sen\phi$, $cos\phi$ ou combinações lineares $asen\phi + bcos\phi$, mas também usando a notação de Euler, $e^{i\phi}$, que equivale à soma das funções trigonométricas apresentadas levando em conta a possibilidade de introdução de números complexos. O fenômeno que trouxe à tona a importância das fases quântica para a Física foi o Efeito Aharonov-Bohm, o qual aparece no sistema de uma partícula carregada em meio a campo magnético. Efeitos semelhantes são encontrados também em sistemas de partículas neutras com momento de dipolo magnético interagindo com campo elétrico, que é o Efeito Aharonov-Casher, conhecido como o recíproco do AB, o efeito He-McKellar-Wilkens que é o AB para partícula neutra com dipolo elétrico em ambiente atravessado por campo magnético e também o AB para átomos neutros com momentos de quadrupolo elétrico em meio a campo magnético.

## 1.1 FASES DINÂMICAS

Para fenômenos quânticos que o hamiltoniano é independente do tempo podemos escrever a função de onda como

$$\Psi(t,\vec{r}) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{r}) \tag{1.2}$$

onde o fator de fase $e^{-iEt/\hbar}$,traz a fase $-Et/\hbar$. Para sistema que o hamiltoniano varia com o tempo, temos que a fase referente à energia é dada por

$$\theta(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_{t_0}^{t} E(t')dt' \tag{1.3}$$

como uma extensão da anterior. Em qualquer das duas formas percebemos que o tempo é o único fator que determina como elas serão. Essas são fases dinâmicas.

## 1.2 FASES GEOMÉTRICAS

A Fase geométrica foi descoberta pela primeira vez em 1956 por S. Pancharatnam com seus estudos sobre fase geometria em óptica[16]. Depois a fase geométrica foi redescoberta, ou melhor, ganhou novamente atenção, com Berry em estudos sobre aparecimento de fases geométricas em dinâmicas quânticas, ficando assim conhecidas como Fases de Berry que serão discutidas mais tarde. Iniciando uma descrição sobre fases geométricas podemos iniciar dizendo que qualquer objeto vetorial que é transportado paralelamente[1] ao longo de um caminho que o faz sair e voltar ao seu ponto inicial pode adquirir um ângulo com relação a sua direção inicial antes do seu movimento. Este ângulo ou essa fase é uma propriedade geométrica, ou seja, ela depende do espaço em que é escrito essa curva, esse caminho ou esse transporte. Para ilustrar o aparecimento dessa fase mostraremos exemplos de nível elementar e também exemplos de fenômenos físicos. O transporte paralelo de um vetor ao longo de um circuito fechado qualquer escrito em uma superfície plana trará o vetor para o ponto inicial com direções e sentidos iguais aos do inicio da trajetória. Isso acontece, pois a superfície em que o vetor foi transportado não tem curvatura. Já se o transporte paralelo de um vetor ao longo de um circuito fechado for feito sobre uma esfera, o que pode ser pensado como a agulha de um compasso transportada em um navio ou viajando de carro na superfície do planeta, que pode ser visualizado na figura (1.1), um vetor que se movimenta em uma trajetória fechada escrita sobre uma esfera. Ele inicia seu movimento sendo transportado paralelamente de um dos polos da esfera, indicado pelo ponto preto, ate a curva que equivale ao equador da esfera, e depois é transportado ao longo do "equador"e logo apos toma a trajetória caminho a seu polo de origem. Após completar o caminho fechado, o vetor se encontra em rotação com respeito à direção que estava apontando quando a viagem começou, ou seja, ele adquire uma fase. Neste exemplo, onde o circuito foi cerca de um oitavo da esfera, o ângulo de rotação é de 90 graus. Caso o caminho fosse, por exemplo, um quarto da esfera, giraria o vetor 180 graus. A razão para essa rotação é puramente geométrica. Na verdade, ela está ligada à Curvatura Intrínseca[2] da esfera. O ângulo de rotação, ou a fase adquirida,

[1] transportado de um ponto a outro por uma curva mantendo constante o ângulo entre ele e o vetor tangente à curva

[2] grandeza escalar relacionada com superfície que indica, dentre outras coisas, se a superfície é plana ou curva

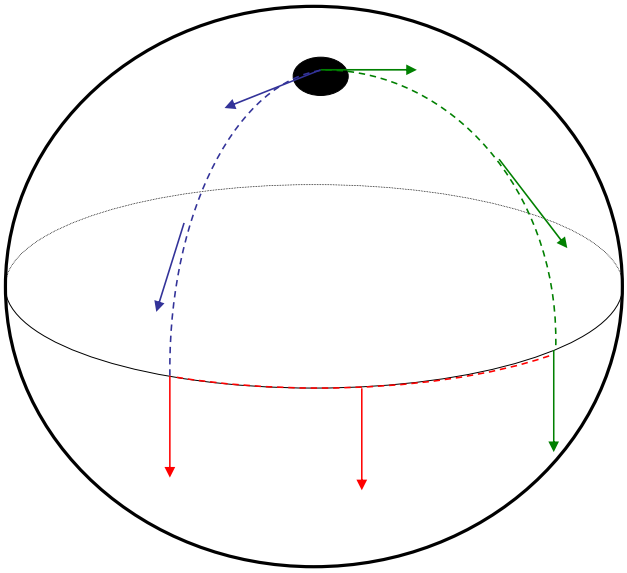

**Figura 1.1** Vetor transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado em uma esfera.

é de fato relacionado com a integral da curvatura da superfície delimitada pelo circuito que é um valor ligado a uma grandeza chamada ângulo sólido[3]. Outro exemplo clássico é o Pêndulo de Foucault[17, 18]. O Pêndulo de Foucault consiste em um pêndulo que sofre uma variação no seu plano de oscilação devido ao movimento do suporte do pêndulo em um caminho fechado sobre uma esfera, como está representado na figura (1.2). O movimento citado anteriormente é causado pelo movimento de rotação da Terra, o plano de oscilação gira com a tal rotação. A explicação usual faz uso da força de Coriollis[4], mas também pode ser escrito como apenas uma fase geométrica. A fase adquirida pelo plano de oscilação depende do caminho adotado, e por isso depende do ângulo sólido que é determinado pela latitude $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ que identifica o caminho seguido pelo suporte do pêndulo. A fase é dada por

$$\Omega = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} sen\theta d\theta d\varphi = 2\pi(1 - sen\phi_0) \tag{1.4}$$

analisando essa fase tendo em mente que a Terra girou de $2\pi$ este resultado indica que o pêndulo realizou uma precessão de um ângulo $2\pi sen\phi_0$. Por exemplo, para uma latitude $\phi_0 = 30$ graus, o plano do pêndulo demora dois dias para voltá-la à situação inicial. No equador não há rotação do plano, devido ao fato que objetos vetoriais transportados paralelamente ao longo de uma geodésica não adquirem fase geométrica. Assim, a orientação do pêndulo sofre transporte paralelo ao longo do trajeto de latitude fixo. O pêndulo de Foucault é um exemplo da mecânica

[3] O ângulo sólido é o ângulo espacial que abarca um objeto visto desde um ponto dado e mede o tamanho aparente desse objeto.

[4] força fictícia causada pela rotação da Terra e pelo movimento do corpo sobre a superfície da Terra

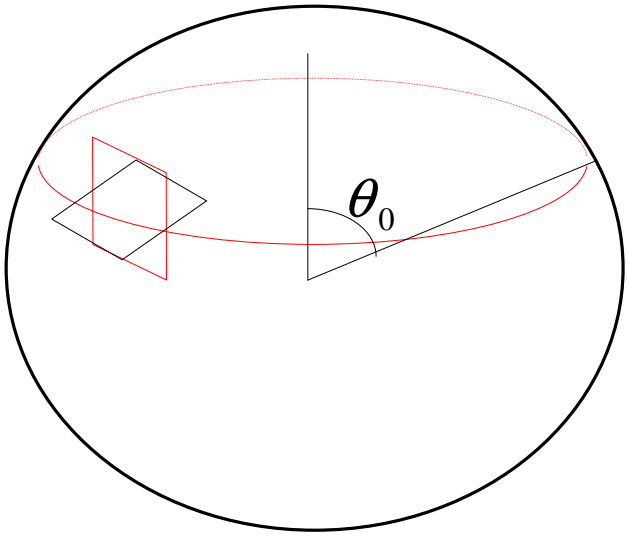


**Figura 1.2** O plano de oscilação do pêndulo sofre um giro quando se move ao redor de uma latitude ao longo do dia.

clássica, que é por vezes utilizado para ilustrar a fase geométrica. Este análogo mecânico da fase de geométrica é conhecido como ângulo Hannay.

## 1.3 FASES TOPOLÓGICAS

A Topologia é uma área da matemática considerada uma extensão da geometria e se preocupa com o estudo de espaços topológicos. Esses espaços são constituídos por um conjunto de elementos e uma coleção de subconjuntos do conjunto anterior que obedece a determinadas propriedades. Essa coleção é chamada topologia do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números complexos. Sendo $\mathbb{C}$ o conjunto do espaço topológico, a topologia nele pode ser a coleção formada por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e o conjunto vazio. O trabalho da topologia é estudar propriedades como compacidade, conexidade, separabilidade, homotopia e homologia, sendo que as de maior importância para nosso estudo serão a conectividade e separabilidade. Maiores informações sobre as outras propriedades são encontradas em [19, 20, 21], como também mais explicações sobre espaços topológicos. Interessa-nos a conectividade e separabilidade devido ao fato de estudarmos fenômenos que ocorrem em regiões separadas que possuem características distintas e mesmo assim interagem, ou seja, essas regiões são elementos de um conjunto maior que permite de alguma forma a sua conexão. E no nosso estudo o efeito dessas ligações são apresentadas por fases quânticas. Interessante deixar claro que todas as fases geométricas

são fases topológicas, pois todo espaço métrico forma uma espaço topológico, mas nem toda fase topológica é uma fase geométrica, devido ao fato de podermos estar estudando espaços não métricos que possuem características distintas, mas que fazem parte do mesmo espaço topológico.

CAPÍTULO 2

# EFEITO AHARONOV-BOHM E ANÁLOGOS

As fases topológicas estão presentes em muitos fenômenos físicos, em especial em fenômenos quânticos, onde fazem emergir informações novas e surpreendentes. Esse é o caso do efeito Aharonov-Bohm.

## 2.1 EFEITO AHARONOV-BOHM

Demonstrado pela primeira vez em 1959, por Aharonov e Bohm[1], o efeito Aharonov-Bohm, como foi chamado, consiste na aquisição de uma fase quântica por uma partícula carregada em uma região livre de campo magnético. Nessa região não há campo magnético, mas a região possui potencial vetor não nulo. A presença desse potencial vetor influência a partícula de forma tal que apenas é percebida quando feito estudo quântico dessa dinâmica. Essa influência é apresentada na forma de uma fase quântica que surge na função de onda da partícula. Aharonov e Bohm propuseram experimentos que evidenciariam esse efeito nos quais supunham uma partícula carregada dentro de uma câmara de Faraday[1], ou um feixe coerente de elétrons dividido em duas partes e que cada parte é inserida em um tubo cilíndrico de metal, como mostrado na parte esquerda da Figura (2.1) e também com um feixe de elétrons que é dividido e suas partes passam por lados opostos de um solenóide, evitando-o, como mostra a parte direita da Figura (2.1). Nos dois casos feixes são coerentes antes de se dividirem e depois devido às interações que o são impostas em cada um dos caminhos diferentes que lhes são dados, fases diferentes são adquiridas, implicando assim em um aparecimento de uma fase quando os feixes se combinarem novamente. Pode-se estudar esse efeito fazendo um feixe de elétrons atravessarem um anteparo com duas fendas em um experimento tipo Young levando em conta agora a presença de um potencial $V(\vec{r},t)$ qualquer atrás do anteparo. A difração do feixe produz uma figura de interferência (Figura (2.2)). Um deslocamento na figura de interferência será visto, como mostrado na Figura (2.3), se entre as fendas e por trás delas, concentrarmos um campo magnético, de tal modo que este seja nulo na região da trajetória do feixe de elétrons depois de difratado pelas duas fendas. Podemos consegui-lo com o uso de um solenoide longo de dimensões transversais de ordem menor que a das fendas. Assim, uma corrente estacionária no solenoide gera um fluxo $\Phi$ dado

[1] câmara que serve de blindagem para campos externos, foi elaborada pelo cientista Inglês Michael Faraday, em 1836

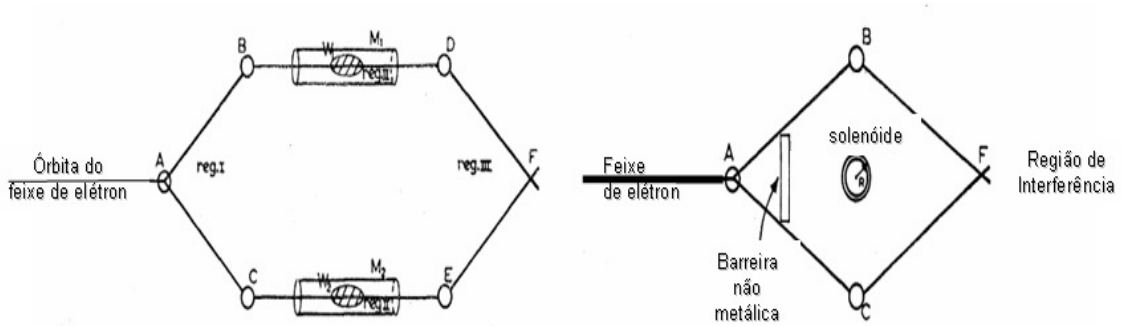


**Figura 2.1** Experimentos propostos por Aharonov e Bohm (figuras tiradas do artigo [1])

pela expressão:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{2.1}$$

onde $C$ é qualquer circuito envolvendo o solenoide. Embora o campo de magnético $\vec{B}$ exista apenas na região dentro do solenoide, o potencial vetor $\vec{A}$, que satisfaz a expressão acima, deve existir não só dentro com também fora do solenoide, qualquer que seja o gauge, pois $\Phi$ definido por (2.1) fica invariante sob transformações de gauge. Transformações de gauge ou de calibre são transformações que deixam invariantes os campos eletromagnéticos, para exemplos vide apêndice desse trabalho. Com isso Aharonov e Bohm propuseram mostrar que mesmo à partícula estando em uma região sem campo magnético, ou seja, região na qual a parte magnética da força de Lorentz

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \tag{2.2}$$

é nula, temos ainda um efeito que não pode ser visto classicamente. Isso implica um significado quântico especial para o potencial vetor eletromagnético que ultrapassa o papel usualmente de artifício matemático, que é apresentado devido às transformações de calibre. Podemos agora então explicitar esse efeito no estudo da dinâmica quântica de uma partícula carregada. Para o sistema de uma partícula com carga $q$ em uma região com potencial vetor $\vec{A}$, estático e outro potencial $V(\vec{r},t)$ qualquer, temos o hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\hat{A}\right)^2 + V(\vec{r},t) \tag{2.3}$$

dado pelo acoplamento mínimo, o qual é mostrado no apêndice desse trabalho, e é proposto de tal forma que a interação do campo magnético com a carga da partícula é dada apenas pelo

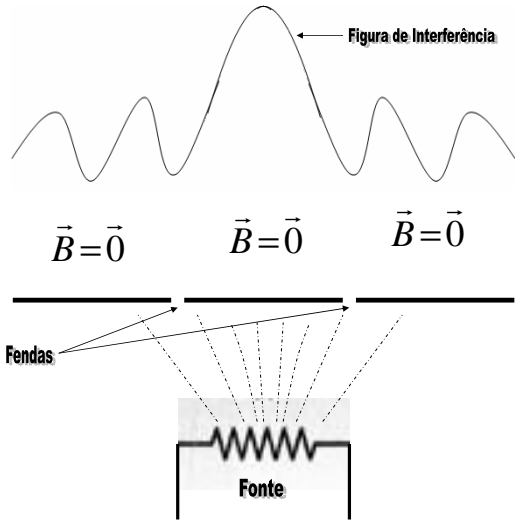


**Figura 2.2** Experimento de Young com feixe de partículas carregadas em região com potencial vetor nulo.

segundo termo entre parênteses do hamiltoniano, sendo então $V(\vec{r},t)$ independente do campo magnético ou do potencial vetor. Para o nosso estudo $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\vec{0}$ na região em que a partícula viaja. No entanto como falado antes, $\vec{A}\neq\vec{0}$ nessa região e a partícula não é influenciada pela força dada em (2.2). A equação de Schrödinger dependente do tempo para essa dinâmica é

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{2.4}$$

podemos escrever a função de onda como

$$\Psi(\vec{r},t)=e^{ig}\Psi'(\vec{r},t), \tag{2.5}$$

sendo

$$g\equiv\frac{q}{\hbar c}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'. \tag{2.6}$$

Ao substituirmos (2.5) em (2.4), obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi'(\vec{r},t)+V(\vec{r},t)\Psi'=i\hbar\frac{\partial\Psi'(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{2.7}$$

equação de Schrödinger sem a presença do potencial vetor, ou seja, a influência de $\vec{A}$ é responsável pelo aparecimento de uma fase quântica $g$ na função de onda. Se considerarmos o potencial vetor com a forma

$$\vec{A}=\frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\phi}, \tag{2.8}$$

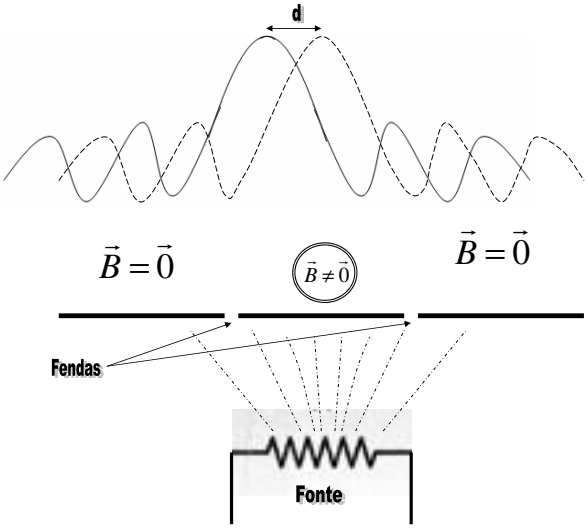


**Figura 2.3** Experimento tipo Young com feixe de partículas carregadas em região com potencial vetor não nulo.

que produz o campo magnético que necessitamos, constante, uniforme e paralelo ao eixo do solenoide, podemos calcular a fase $g$ adquirida pelas partículas da seguinte forma

$$g = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar c}\int d\phi$$

onde o resultado da integral defina de 0 a $\pi$, refere-se a partículas que passaram pela primeira fenda e o resultado da integral definida de $-\pi$ a 0, refere-se a partículas que passaram pela segunda fenda, ou seja,

$$g = \pm\frac{q\Phi}{2\hbar c}$$

Assim temos que a presença de um potencial vetor em uma região tem influência sobre uma partícula carregada mesmo que nessa região não seja observado campo magnético e essa influência é percebida devido ao aparecimento de uma fase quântica na função de onda da partícula dada por

$$S_{AB} = \frac{1}{\hbar c}\oint q\vec{A}\cdot d\vec{r} = \frac{q\Phi}{\hbar c} \tag{2.9}$$

que é a diferença de fase entre as partículas de viajam pelos lados distintos do solenoide. A equação acima é encontrada utilizando a definição (2.8), mas podemos chegar em (2.9) de uma forma mais geral tomando conhecimento do teorema de Stokes de forma que

$$S_{AB} = \frac{1}{\hbar c}\oint q\vec{A}\cdot d\vec{r} = \frac{q}{\hbar c}\int_{Sup.}(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\hbar c}\int_{Sup.}\vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{q\Phi}{\hbar c} \tag{2.10}$$

O efeito Aharonov-Bohm foi verificado pelo experimento realizado por R. G. Chambers em 1960[2], no qual utilizou um whisker de ferro magnetizado, colocado à sombra de uma fibra

de quartzo metalizada, formando o centro de um biprisma óptico eletrônico. H. A. Fowler, L. Marton, J. A. Simpson e J. A. Suddeth em 1961[22], também observaram o efeito AB, utilizando também o whisker, com configuração tal, que aumentava a resolução do experimento. E em 1986[23], foi à vez de Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki e Junji Endo de observar o efeito AB, utilizando um ferromagnético toroidal coberto com uma camada de supercondutor para confinar o campo. O efeito AB também pode ocorrer devido à interação da carga da partícula com o potencial escalar elétrico. Neste caso a fase adquirida pela função de onda dependerá do potencial escalar elétrico. Para isso é necessário construir uma situação em que o potencial eletrostático varie em dois caminhos de uma partícula, como no experimento sugerido por Aharonov e Bohm para os caminhos nos quais existem cilindros metálicos (lado esquerdo da figura(2.1), através das regiões de campo elétrico nulo. Como no caso do campo magnético, a ausência de um campo elétrico significa que, classicamente, não haveria efeito, mas a fase adquirida pela função de onda mostra o contrário. Fazendo processo parecido com o feito para o AB magnético temos que a fase adquirida será

$$S_{Elet.} = -\frac{q}{\hbar}\int_0^T \varphi(t)dt \tag{2.11}$$

sendo $\varphi$ o potencial escalar e $T$ o tempo que a partícula fica sujeita a interação com o potencial, que é o período que ela fica no dentro do cilindro. Caso assumirmos que o potencial dentro do cilindro é constante $\varphi(t) = V$, encontramos

$$S_{Elet.} = -\frac{qVT}{\hbar} \tag{2.12}$$

Para comprovação desse efeito, o efeito AB elétrico, uma experiência diferente da citada acima foi proposta. A experiência envolvia um anel geométrico com duas pequenas junções de tunelamento(vide figura (2.4)). Entre as metades do anel foi posto uma tensão $V$ relativa. Essa situação resultou em uma fase de AB, da forma apresentada acima, e foi observado experimentalmente em 1998[24].

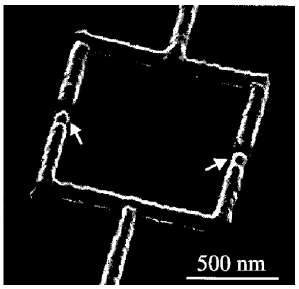


**Figura 2.4** Anel geométrico com duas junções de tunelamento que foi usado para observar efeito AB elétrico. Figura tirada do artigo [24]

## 2.2 FASE DE BERRY

Em 1984, Berry[25], mostrou que o efeito AB é um caso específico de Fases de Berry ou Geométricas, ou seja, fases adquiridas por sistemas quando evoluem segundo o Teorema Adiabático[2]. A Fase de Berry para sistemas quânticos é obtida estudando a evolução desses sistemas, o qual é dado pela Equação de Schröndiger dependente do tempo

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.13}$$

onde $\hat{H}$ é o hamiltoniano do sistema, é o operador que determina a dinâmica do sistema e $\Psi$ é a função de onda, ou seja, o estado quântico do sistema que depende do tempo e da posição e pode ser escrito de forma expandida $\Psi = \sum_n c_n\Psi_n$. Podemos também usar a equação de Schröndiger independente do tempo

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \tag{2.14}$$

desde que tomemos o hamiltoniano independente do tempo e que

$$\Psi_n = \psi_n e^{-\frac{iE_n}{\hbar}} \tag{2.15}$$

sendo $\psi$ a função de onda independente do tempo e $E_n$ a energia do sistema no nível $n$. Assumiremos que podemos tomar a evolução de um sistema quântico com hamiltoniano dependente do tempo utilizando a equação (2.14) e fazendo todos os termos dependentes do tempo, assim temos

$$\hat{H}(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t) \tag{2.16}$$

Definiremos a partir daqui $\Psi(t) \equiv \Psi$ para todas as grandezas, com o intuito que as equações não fiquem sobrecarregadas. Faremos uma expansão na função de onda em seus estados de auto valores possíveis, de forma que

$$\Psi = \sum_n c_n\Psi_n = \sum_n c_n\psi_n e^{i\theta_n} \tag{2.17}$$

onde $\theta_n = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n dt'$ e $c_n$ é o coeficiente da combinação linear. Podemos encontrar $c_n$ substituindo (2.17) em (2.14),

$$\hat{H}\sum_n c_n\psi_n e^{i\theta_n} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_n c_n\psi_n e^{i\theta_n}\right]$$

fazendo a aplicação do hamiltoniano do lado esquerdo e a derivação do lado direito da equação acima e as simplificações necessárias, temos

$$\sum_n \frac{\partial c_n}{\partial t}\psi_n e^{i\theta_n} = -\sum_n c_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t}e^{i\theta_n} \tag{2.18}$$

[2]que diz:"Se um sistema que esta inicialmente no estado $|n>$ do hamiltoniano $H^i$, na transição adiabática de $H^i$ para $H^f$, ele será levado para o estado $|n>$ do hamiltoniano $H^f$"

precisamos tirar do somatório o termo que possui a derivada do coeficiente, para isso fazemos o produto interno de (2.18) com $\psi_m$ e usar a propriedade de ortonormalidade das funções

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -c_m < \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t} > - \sum_{n \neq m} c_n < \psi_m | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} > e^{i(\theta_n - \theta_m)} \tag{2.19}$$

para melhor escrevermos o termo para $n \neq m$ podemos utilizar (2.16), fazendo a derivada temporal e o produto interno com o estado $\psi_m$ como anteriormente, o que resulta em

$$< \psi_m | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} > = \frac{< \psi_m | \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} | \psi_n >}{(E_n - E_m)} \tag{2.20}$$

utilizando o Teorema Adiabático, o qual assume a variação do hamiltoniano com o tempo, pequena ou desprezível, obtemos então para $n \neq m$

$$< \psi_m | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} > \approx 0 \tag{2.21}$$

resultando em

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -c_m < \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t} >$$

que possui como solução

$$c_m = c_m(0) e^{i\gamma_m} \tag{2.22}$$

onde

$$\gamma_m = i \int_0^t < \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t'} > dt'. \tag{2.23}$$

Temos a função de onda do sistema dado por

$$\Psi = \sum_n c_n(0) e^{i\gamma_n} e^{i\theta_n} \psi_n \tag{2.24}$$

Com o objetivo de encontrar um resultado generalizado, vamos assumir $\psi_n(t) = \psi_n(R_1(t), ..., R_m(t))$, onde $R_m(t)$ são parâmetros que variam com tempo, podendo ser por exemplo um campo magnético variável ou um campo elétrico variável. Dessa forma ficamos com

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t'} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial t'} + ... + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_m} \frac{\partial R_m}{\partial t'} = \nabla_R \psi_n \cdot \frac{\partial R}{\partial t'} \tag{2.25}$$

onde $\nabla_R$ é o gradiente com respeito aos parâmetros. E substituindo (2.25) em (2.23), obtemos

$$\gamma_m = i \int_{R(0)}^{R(t)} < \psi_m | \nabla_R \psi_n > \cdot dR \tag{2.26}$$

Assumindo processos cíclicos para os parâmetros $R$, conseguimos

$$\gamma_m = i \oint < \psi_m | \nabla_R \psi_n > \cdot dR \tag{2.27}$$

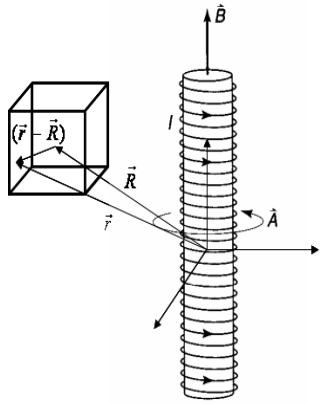


**Figura 2.5** Partícula confinada em uma caixa por um potencial $V(\vec{r}-\vec{R})$.

Essa é a chamada *Fase de Berry*. Não necessariamente o resultado da expressão acima é nulo, ou seja, nem sempre a autofunção inicial é igual à autofunção final, mesmo que os parâmetros iniciais e finais da sua evolução sejam iguais. Podemos utilizar ideia parecida com do primeiro experimento que Aharonov e Bohm propuseram em seu artigo, a câmara de Faraday, para evidenciar que a fase AB é uma fase de Berry. Iniciemos tomando uma partícula carregada confinada em uma caixa por um potencial $V(\vec{r}-\vec{R})$, onde $\vec{R}$ e $\vec{r}$, são os vetores posição da caixa e da partícula, respectivamente, relativo à origem do referencial, situado em um solenoide, como mostra a Figura (2.5). É interessante o sistema com a partícula confinada para que tenhamos $\vec{R}$ como o nosso parâmetro. Utilizando (2.3) para o caso presente, temos

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{q}{c}\hat{A}\right)^2+V(\vec{r}-\vec{R})\right]\psi_n=E_n\psi_n \tag{2.28}$$

Assumindo $\psi_n=e^{ig}\psi'_n$, como feito em (2.6), obtemos

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r}-\vec{R})\right]\psi'_n=E_n\psi'_n \tag{2.29}$$

A Equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula sujeito apenas ao potencial $V(\vec{r}-\vec{R})$. Sendo assim temos que $\psi'_n=\psi'_n(\vec{r}-\vec{R})$ e que podemos escrever

$$\nabla_R\psi_n \;=\; \nabla_R(e^{ig}\psi'_n)=-i\frac{q}{\hbar c}\vec{A}e^{ig}\psi'_n+e^{ig}\nabla_R\psi'_n \tag{2.30}$$

Fazendo o produto interno de $\psi_n$ com (2.30), obtemos

$$<\psi_n|\nabla_R\psi_n> \;=\; -i\frac{q}{\hbar c}\vec{A} \tag{2.31}$$

substituindo (2.31) em (2.27), resulta em

$$\gamma_m=i\oint -i\frac{q}{\hbar c}\vec{A}\cdot d\vec{R}=\frac{q}{\hbar c}\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\hbar c}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=\frac{q\Phi}{\hbar c} \tag{2.32}$$

Obtemos assim que a fase que a partícula adquire fazendo uma evolução adiabática e cíclica no parâmetro $\vec{R}$ é igual à fase adquirida pela partícula no efeito AB.

## 2.3 EFEITOS AHARONOV-CASHER E HE-MCKELLAR-WILKENS

O efeito AB apresentou e abriu a discussão sobre a importância do potencial vetor eletromagnético em efeitos físicos que ate então não eram vistos e trouxe a tona aspectos interessantes sobre as fases quânticas. Então estudos sobre o aparecimento de Fases Quânticas em outros sistemas eletromagnéticos, além do que apresenta o efeito AB, chamaram a atenção. Os primeiros sistemas foram os compostos por partículas neutras em meio a campos magnético e/ou elétrico.

### 2.3.1 EFEITO AHARONOV-CASHER

Em 1984, Aharonov e Casher fizeram o estudo da dinâmica de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético em meio a campo elétrico. O procedimento feito foi derivar da langrangeana de uma partícula carregada em campo magnético, uma lagrangiana efetiva e assim predisseram o aparecimento de uma fase quântica na descrição quântica de uma partícula neutra[3]. Esse efeito chamado *Efeito Aharonov-Casher* (AC) é considerado o efeito recíproco do Aharonov-Bohm. No sistema em que esse efeito ocorre à partícula neutra que possui momento de dipolo magnético interage com um campo elétrico, mas nenhuma força é aplicada sobre ela, ou seja, a interação dipolo magnético campo elétrico não dá origem à força alguma, como no AB. Para o estudo dessa dinâmica tomaremos inicialmente um outro caminho, diferente do que Aharonov e Casher assumiram. Não derivaremos a lagrangiana do sistema em questão a partir da lagrangiana do efeito AB. Usaremos a forma da interação de momento campo magnético já conhecido. Assim para uma partícula com momento magnético $\vec{\mu}$ interagindo com um campo magnético $\vec{B}'$ temos

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \vec{\mu}\cdot\vec{B}' \tag{2.33}$$

o qual apresenta o termo de interação com a mesma forma que tem o potencial de um dipolo magnético interagindo com um campo magnético. O problema é que não temos campo magnético no laboratório ($\vec{B} = \vec{0}$), o que pode ser resolvido assumindo a transformação

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E} \tag{2.34}$$

com $\vec{B} = \vec{0}$. Essa transformação relaciona o campo elétrico $\vec{E}$ que temos no laboratório com o campo magnético $\vec{B}'$ sentido pelo momento de dipolo no referencial dele. A relação (2.34) é a transformação de Lorentz para os campos eletromagnéticos, considerando a partícula não relativística, mas veloz o bastante para que desprezemos apenas a partir dos termos de ordem dois em $v/c$. A consideração dessa transformação é melhor explicada no apêndice desse trabalho. Dessa forma estamos no referencial do laboratório[3] onde existe apenas o campo elétrico $\vec{E}$, já no referencial da partícula temos $\vec{B}'$ e $\vec{E}'$, mas apenas há interação da partícula com $\vec{B}'$ devido

[3] O referencial tal qual percebemos os campo sem linha, segundo as transformações

à ausência de carga elétrica ou dipolo elétrico, em fim, de múltiplos elétricos. A lagrangiana resultante da substituição de (2.34) em (2.33) é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot(\vec{\mu}\times\vec{E}) \tag{2.35}$$

a qual tem o termo de interação agora explicitamente dependente do campo elétrico $\vec{E}$. A equação de movimento da partícula é encontrada utilizando a Equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana dada em (2.35) de forma que obtemos

$$\begin{aligned} \nabla L - \frac{d}{dt}(\nabla_v L) = 0 & \\ \nabla\left[\frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot(\vec{\mu}\times\vec{E})\right] - \frac{d}{dt}\left[m\vec{v} + \frac{1}{c^2}(\vec{\mu}\times\vec{E})\right] &= 0 \\ \frac{1}{c^2}\left[\nabla(\vec{v}\cdot\vec{\mu}\times\vec{E}) - \frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{E} - \vec{\mu}\times\frac{d\vec{E}}{dt}\right] &= m\ddot{\vec{r}} \end{aligned}$$

onde $\nabla_v = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\hat{e}_i$. Com o objetivo de encontrar a equação do movimento com a força escrita de forma conveniente, usaremos $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{\mu}\times\vec{E}) = (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{v}\times\vec{E})]$ e também $\frac{d\vec{E}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{E}$. O que deixa explicito um termo muito parecido com a parte magnética da força de Lorentz e um outro termo referente à lei de Ampere. A equação de movimento fica escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{c^2}\left\{(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{\mu}\times\vec{E})] - \frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{E} - \vec{\mu}\times\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E}\right]\right\} = m\ddot{\vec{r}}$$

fazendo uso da lei de Ampere[4] com $\vec{B} = \vec{0}$, como já dito, e também $\vec{J} = \vec{0}$ que implica no $\vec{E}$ estático, obtemos

$$\frac{1}{c^2}\left\{(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{\mu}\times\vec{E}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{\mu}\times\vec{E})] - \frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{E} - \vec{\mu}\times(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E}\right\} = m\ddot{\vec{r}}$$

Para simplificar o nosso problema assumiremos que $\vec{\mu}$ é livre de torque. Isso pode ser conseguido tomando sua direção constante, ou seja, ele é antiparalelo ao campo magnético efetivo sentido por ele. Dessa consideração temos $(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{\mu}\times\vec{E}) - \vec{\mu}\times(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{E} = \vec{0}$ o que resulta em

$$\frac{1}{c^2}\left\{\vec{v}\times[\nabla\times(\vec{\mu}\times\vec{E})] - \frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{E}\right\} = m\ddot{\vec{r}}$$

e assumiremos também a sua estaticidade, ou seja, o momento magnético também não varia temporalmente. O que traz por consequência a eliminação do termo $\frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{E} = \vec{0}$, resultando que a equação de movimento fica escrita da forma

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{v}\times\left[\nabla\times(\frac{1}{c^2}\vec{\mu}\times\vec{E})\right] \tag{2.36}$$

[4] é a lei que relaciona o campo magnético sobre um laço com a corrente elétrica que passa através do laço

Essa é a equação de movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético interagindo com um campo elétrico. Comparando (2.36) com as equações (2.2) e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e visualizar que, matematicamente, esse sistema é equivalente a um sistema de uma partícula com carga $q_{AC}$ sujeito a um potencial vetor $\vec{A}_{AC} = \frac{1}{q_{AC}c^2}\vec{\mu} \times \vec{E}$. Ou seja, podemos definir um campo magnético efetivo $\vec{B}_{AC}$, proveniente do potencial vetor efetivo $\vec{A}_{AC}$, que interage com uma carga efetiva $q_{AC}$, que descreva a dinâmica de um momento de dipolo magnético em meio a um campo elétrico. Dessa forma temos o mesmo cenário estudado no efeito AB e assim existe a possibilidade de usarmos a discussão anteriormente feita para dedução da Fase AB(2.9) e encontrar a Fase Quântica que a partícula neutra com momento de dipolo magnético adquire

$$\begin{aligned} S_{AC} &= \frac{1}{\hbar}\oint (q)\vec{A}_{AC} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{1}{\hbar c^2}\oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \tag{2.37}$$

que é valido se a partícula estiver livre de forças, ou seja, $m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$, trazendo como consequência

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \left[\nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E})\right] &= \vec{0} \\ \nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) &= \vec{0} \end{aligned} \tag{2.38}$$

A equação (2.37) pode ser resolvida e melhor apresentada se assumirmos que $\vec{E}$ é produzido por uma distribuição linear de cargas, tal qual possua $\lambda_e$ como densidade linear de cargas. O que obtemos é

$$S_{AC} = \frac{1}{\hbar c^2}\oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda_e \mu}{\hbar c^2} \tag{2.39}$$

O aparecimento dessa Fase Quântica ficou conhecido como Efeito Aharonov-Casher e é considerado o efeito recíproco ao Aharonov-Bohm. O Efeito AC foi observado experimentalmente por Cimmino e seus colaboradores em 1989, através de um interferômetro de nêutrons contendo um sistema de eletrodo a vácuo [27], por K. Sangster e seus colaboradores em 1993[28] e em 1995, A. G. Sinclair se juntou ao grupo de Sangster e observou novamente o efeito agora com maior precisão[29].

### 2.3.2 EFEITO HE-MCKELLAR-WILKENS

Em 1993, Xiao-Gang He e Bruce H. J. McKellar estudaram a dinâmica relativística de uma partícula neutra de spin 1/2 com momento de dipolo elétrico[4] e encontraram uma equivalência dessa dinâmica com a estudada por Aharonov e Casher, que foi apresentada na seção anterior. Nesse estudo predisseram a possibilidade de um efeito dual ao AC, sendo necessário assumir a existência dos monopolos magnéticos de Dirac. Um ano depois, Martins Wilkens também demonstrou a equivalência entre os sistemas estudados por He e McKellar e Aharonov e Casher,

mas no limite não relativístico, assumindo correções de primeira ordem nas transformações de Lorentz para os campos magnético e elétrico[5], como feito na seção anterior para a dinâmica AC. Esse efeito ficou conhecido como *Efeito He-McKellar-Wilkens*(HMW). Apresentaremos o estudo da dinâmica da partícula com momento de dipolo elétrico e de que forma ela adquiri a fase quântica. Para uma partícula com momento de dipolo elétrico $\vec{d}$ interagindo com um campo elétrico $\vec{E}'$ temos

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \vec{d}\cdot\vec{E}' \tag{2.40}$$

sendo o segundo termo do lado direito o termo de interação entre o dipolo elétrico e o campo elétrico sentido por ele, pois estamos assumindo correções de primeira ordem nas transformações de Lorentz para os campos magnético e elétrico, como feito na seção anterior e para mais explicações vide apêndice. A transformação de usaremos é

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B} \tag{2.41}$$

mas com $\vec{E} = \vec{0}$, pois assumiremos que para o referencial do laboratório existe apenas o campo magnético $\vec{B}$, já no referencial da partícula temos $\vec{B}'$ e $\vec{E}'$, mas apenas há interação da partícula com $\vec{E}'$ devido à ausência de momentos magnéticos. A lagrangiana resultante é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{c}\vec{v}\cdot(\vec{d}\times\vec{B}) \tag{2.42}$$

que possui o termo de interação agora explicitamente dependente de $\vec{B}$. A equação de movimento da partícula é encontrada utilizando a equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana dada em (2.42) e obtemos a equação com a seguinte forma

$$\frac{1}{c}\left[\nabla[\vec{v}\cdot(\vec{d}\times\vec{B})] - \dot{\vec{d}}\times\vec{B} - \vec{d}\times\frac{d\vec{B}}{dt}\right] = m\ddot{\vec{r}}$$

onde utilizaremos por conveniência a relação $\nabla[\vec{v}\cdot(\vec{d}\times\vec{B})] = (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{d}\times\vec{B}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{d}\times\vec{B})]$, que deixa explicito o termo parecido matematicamente com (2.2), o qual será necessário para considerações futuras. Usaremos também $\frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{B}$ que através da Lei de Faraday e da nossa consideração sobre $\vec{E}$, resulta em $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ e a equação de movimento fica escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{c}\left\{(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{d}\times\vec{B}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{d}\times\vec{B})] - \dot{\vec{d}}\times\vec{B} - \vec{d}\times(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}\right\} = m\ddot{\vec{r}}$$

onde $\dot{\vec{d}}$ é a derivada temporal total do momento de dipolo elétrico. A partir daqui assumiremos também que $\vec{d}$ é constante em sua direção, ou seja, ele não esta sujeito a torque causado pelo campo elétrico $\vec{E}'$ sentido por ele. Essa consideração tem como consequência $(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{d}\times\vec{B}) - \vec{d}\times(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B} = \vec{0}$, resultando em

$$\frac{1}{c}\left\{\vec{v}\times[\nabla\times(\vec{d}\times\vec{B})] - \dot{\vec{d}}\times\vec{B}\right\} = m\ddot{\vec{r}}$$

se assumirmos $\dot{\vec{d}} \times \vec{B} = \vec{0}$, o que pode ser encontrado fazendo $\vec{d}$ não variar seu modulo com o tempo, surge como resultado

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{v} \times \left[ \nabla \times (\frac{1}{c}\vec{d} \times \vec{B}) \right] \tag{2.43}$$

Essa é a equação de movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente interagindo com um campo magnético. Podemos fazer uma comparação de (2.43) com as equações (2.2) e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e essa comparação nos permite dizer que esse sistema é equivalente ao sistema de uma partícula com carga $q$ sujeito a um potencial vetor $\vec{A}_{HMW} = \frac{1}{q}(\frac{1}{c}\vec{d} \times \vec{B})$, o que nos possibilita estender essa discussão para encontrar uma equivalência com a Fase AB(2.9) e adquirir a Fase Quântica que a partícula neutra com momento de dipolo elétrico adquire

$$\begin{aligned} S_{HMW} &= \frac{1}{\hbar} \oint (q)\vec{A}_{HMW} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{1}{\hbar c} \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \tag{2.44}$$

A fase acima descrita é valida apenas se a dinâmica estudada for livre, ou seja, $m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ o que resulta em

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \left[ \nabla \times (\frac{1}{c}\vec{d} \times \vec{B}) \right] &= \vec{0} \\ \nabla \times (\vec{d} \times \vec{B}) &= \vec{0} \end{aligned} \tag{2.45}$$

A equação (2.44) pode ser resolvida e melhor apresentada se assumirmos que $\vec{B}$ é produzido por uma distribuição linear de monopolos magnéticos, tal qual possua $\lambda_m$ como densidade linear de monopolos magnéticos. O que resultado dessa consideração é

$$S_{HMW} = \frac{1}{\hbar c} \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda_m d}{\hbar c} \tag{2.46}$$

O aparecimento dessa Fase Quântica ficou conhecido como Efeito He-McKellar-Wilkens[4, 5] e é considerado o efeito dual ao Aharonov-Casher devido à possibilidade de encontrá-los fazendo uma simples mudança de densidade de monopolos magnéticos por monopolos elétricos e momento de dipolo elétrico por magnético. Um experimento para testar esse efeito foi sugerido por Haiping Wein, Rushan Han e X. Wein, em 1995 usando um campo elétrico não uniforme e campo magnético uniforme simultaneamente[30]. Em 1999, Dowling, Williams e Franson discutiram relações de dualidade eletromagnética entre os efeitos Aharonov-Bohm, Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkens, permitindo assim uma descrição unificada de todos os três fenômenos e também propõem dois sistemas experimentais para a medição da fase de He-McKellar-Wilkens[8].

## 2.4 EFEITO AB PARA MOMENTOS DE QUADRUPOLO ELÉTRICO

Feito os estudos para a interação de partícula carregada com campo magnético e partícula neutra possuindo dipolos magnético e elétrico com campos elétrico e magnético, respectivamente, em 1994, Chia-Chu Chen, demonstrou o aparecimento de uma fase quântica na descrição de um momento de quadrupolo elétrico interagindo com campo magnético[9]. Esse aparecimento é similar ao efeito AB. Para início deste estudo devemos novamente encontrar a lagrangiana do sistema, agora para um átomo com momento de múltiplo interagindo com um campo elétrico. A energia potencial de uma distribuição de carga em ambiente com potencial elétrico é escrita da seguinte forma

$$U = q\phi - \vec{d}\cdot\nabla\phi + \sum_i\sum_j Q_{ij}\partial_i\partial_j\phi \tag{2.47}$$

onde $q$, $\vec{d}$ e $Q_{ij}$, são os momentos de monopolo, dipolo e quadrupolo da distribuição de cargas estudada, respectivamente e $j$ =1, 2 e 3. Considerando um caso mais específico tal que os momentos de monopolo e dipolo são nulos, restando apenas o de quadrupolo e sabendo que $\nabla\phi = -\vec{E}' \rightarrow \partial_j\phi = -E'_j$. Obtemos a lagrangiana do sistema dada por

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \sum_i\sum_j Q_{ij}\partial_i E'_j \tag{2.48}$$

sendo o segundo termo o termo de interação. Pela transformação (2.41), onde $E'_j$ são as componentes do campo elétrico sentido pelo quadrupolo. E $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são os campos medidos e sentidos pelo observador no laboratório. Assumiremos que $\vec{E} = \vec{0}$ e definiremos $Q_i = \sum_j Q_{ij}\partial_j$, o que resulta em

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \vec{v}\cdot(\vec{Q}\times\vec{B}) \tag{2.49}$$

Essa então é a lagrangiana da dinâmica de átomo neutro com momento de quadrupolo elétrico em meio a campo magnético, ficando explícito a relação entre o campo magnético e o momento de quadrupolo, representado pelo vetor $\vec{Q}$ definido anteriormente. Para encontrar a equação de movimento, o caminho é a resolução da equação de Euler-Lagrange

$$m\ddot{\vec{r}} = \left\{\nabla(\vec{v}\cdot\vec{Q}\times\vec{B}) - \frac{d}{dt}\left[\vec{Q}\times\vec{B}\right]\right\} \tag{2.50}$$

Substituindo $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{Q}\times\vec{B}) = (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{Q}\times\vec{B}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})]$, temos

$$m\ddot{\vec{r}} = \left\{(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{Q}\times\vec{B}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})] - \frac{d\vec{Q}}{dt}\times\vec{B} - \vec{Q}\times\frac{d\vec{B}}{dt}\right\}$$

e escrevendo $\dfrac{d\vec{B}}{dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{B}$ e também lembrando que $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$, devido ao fato de $\vec{E} = 0$, obtemos

$$m\ddot{\vec{r}} = \left\{(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{Q}\times\vec{B}) + \vec{v}\times[\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})] - \frac{d\vec{Q}}{dt}\times\vec{B} - \vec{Q}\times(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}\right\}$$

assumindo $(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{Q}\times\vec{B})-\vec{Q}\times(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}=\vec{0}$, sabendo a propriedade anti-simétrica de permutação dos produtos vetoriais e considerando $\dfrac{d\vec{Q}}{dt}\times\vec{B}=\vec{0}$, que pode ser encontrado tomando $\vec{Q}$ estático, temos

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{v}\times[\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})] \tag{2.51}$$

essa é a equação de movimento de uma distribuição de carga com momento de quadrupolo $Q_{ij}$ representado pelo vetor $\vec{Q}$, o qual possui componentes $Q_j=\sum_i Q_{ij}\partial_i$, interagindo com um campo magnético $\vec{B}$. A força resultante sobre o quadrupolo é $\vec{v}\times[\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})]$ que possui forma parecida a da parte magnética da força de Lorentz (Eq. (2.2)). O que resulta na observação que o sistema estudado equivale a dinâmica uma partícula com carga $q$ em meio a campo magnético $\vec{B}_{ef}=\dfrac{1}{q}[\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})]$, o que nos mostra um potencial vetor dado por $\vec{A}_{ef}=\dfrac{1}{q}(\vec{Q}\times\vec{B})$. Para que verificar o aparecimento de uma fase quântica ou um efeito parecido com o AB, devemos fazer o estudo para o caso em que o quadrupolo esta livre de forças, o que pode ser encontrado fazendo

$$\nabla\times(\vec{Q}\times\vec{B})=\vec{0} \tag{2.52}$$

que pode ser simplificado se utilizada a notação de tensores

$$\varepsilon_{kij}\partial_i(\varepsilon_{jlm}Q_lB_m)=0,$$

a definição do vetor $\vec{Q}$ e a relação do tensor anti-simétrico de Levi-Civita

$$(\delta_{km}\delta_{il}-\delta_{kl}\delta_{im})Q_{lp}\partial_i\partial_pB_m=0,$$

a equação de Maxwell $\nabla\cdot\vec{B}=0\rightarrow\partial_iB_i=0$, resultando em

$$Q_{ip}\partial_i\partial_pB_k-Q_{kp}\partial_i\partial_pB_i=0$$

e por fim obtemos

$$Q_{ip}\partial_i\partial_p\vec{B}=\vec{0} \tag{2.53}$$

Essa é a condição para que tenhamos força resultante nula. Sendo assim, podemos obter uma dinâmica livre utilizando, por exemplo, um campo magnético constante $\vec{B}=B_0\hat{k}$, que para o aparecimento fase não é uma boa escolha, ou para o caso de um quadrupolo elétrico diagonal

$$Q_{ip}=\begin{matrix}0, & i\neq p\\ K_i, & i=p\end{matrix}\quad\text{tal que}\quad\sum_{i=1}^{3}K_i=0 \tag{2.54}$$

que tem como resultado a condição dado por

$$K_i\partial_i{}^2\vec{B}=\vec{0} \tag{2.55}$$

ou seja, para que essa condição seja satisfeita as componentes de $\vec{B}$ podem ter dependência linear ou bi linear com as coordenadas, que assim satisfará a condição de dinâmica livre para o

quadrupolo diagonal. Sendo assim temos um sistema que classicamente é livre, como no caso da partícula carregada em ambiente sem campos magnético ou elétrico, mas que quanticamente é influenciado pelo potencial vetor através da aquisição de uma fase quântica. O mesmo acontece com o quadrupolo interagindo com campo magnético que por analogia com a fase $S_{AB}$ adquirida pela partícula carregada no efeito AB, o quadrupolo adquire uma fase

$$S_Q = q \oint \vec{A}_{ef} \cdot d\vec{r}$$

considerando que agora estamos tratando de uma partícula com carga $q$ sujeito a um potencial vetor $\vec{A}_{ef}$, que tendo a sua fórmula substituída na fase, obtêm-se

$$S_Q = \oint (\vec{Q} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \tag{2.56}$$

A equação acima expressa a fase quântica tipo AB que um momento de quadrupolo elétrico adquire quando sujeito a um campo magnético que satisfaz a condição de dinâmica livre(2.53).

CAPÍTULO 3

# NÍVEIS DE LANDAU

A Quantização de Landau[10] é um fenômeno que possui grande importância nos sistemas dinâmicos quânticos e que foi inicialmente visto na dinâmica quântica de uma partícula carregada em meio a campo magnético constante e uniforme, mas também pode ser evidenciada em sistema de partícula neutra com momento de dipolo elétrico em meio a campos magnéticos.

## 3.1 NÍVEIS DE LANDAU PARA PARTÍCULA CARREGADA

A descrição quântica da dinâmica de uma partícula carregada em meio a campo magnético foi feita pela primeira vez por Landau em 1930. Ele mostrou que os níveis de energia da partícula são discretos, espaçados por quantidade constante de energia e que são infinitamente degenerados. O estudo quântico da dinâmica de uma partícula com carga $q$ em meio a campo magnético é feito a partir do seu hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{q}{c}\hat{A}\right)^2$$

encontrado através do acoplamento mínimo, como mostrado no apêndice deste trabalho. No nosso caso para campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k}$, podemos assumir o gauge de Landau, que consiste em $\hat{A}_x = 0$, $\hat{A}_y = -B_0\hat{x}$ e $\hat{A}_z = 0$. Assumindo também que $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$, ou seja $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$, permite-nos adotar a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{3.1}$$

considerando a função de onda $\Psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\vec{r})$ onde $E$ e a energia total da partícula. A equação de Schrödinger para esse sistema é

$$\frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + \frac{q}{c}B_0\hat{x})^2 + \hat{p}_z^2\right]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \tag{3.2}$$

Devido a não dependência do hamiltoniano com os operadores $\hat{y}$ e $\hat{z}$, que tem por consequência a comutação de $[\hat{p}_y,\hat{H}] = 0$ e $[\hat{p}_z,\hat{H}] = 0$, usando a representação de coordenadas[1], onde o operador momento é descrito por $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$. A comutação de $\hat{p}_y$ e $\hat{p}_z$ com $\hat{H}$ implica na conservação dos autovalores dos momentos. Então podemos escrever

$$\psi(x,y,z) = e^{\frac{i}{\hbar}(k_y y + k_z z)} f(x) \tag{3.3}$$

[1] representação na qual as coordenadas são operadores multiplicativos e o momento é operador diferencial

Sendo $k_y$ e $k_z$ os auto valores dos operadores $\hat{p}_y$ e $\hat{p}_z$, respectivamente e podem assumir valores de $-\infty$ á $+\infty$. Substituindo (3.3) em (3.2), obtemos

$$\frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2+(k_y+\frac{q}{c}B_0\hat{x})^2+k_z^2\right]f(x)=Ef(x) \tag{3.4}$$

o qual podemos escrever da forma

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}-x_0)^2\right]f(x)=E'f(x) \tag{3.5}$$

onde $\omega=\dfrac{qB_0}{mc}$, $x_0=-\dfrac{k_yc}{qB_0}$ e $E'=E-\dfrac{k^2{}_z}{2m}$. A partir daqui é conveniente definirmos os *operadores levantamento* $\hat{a}_x^\dagger$ e *abaixamento* $\hat{a}_x$, definidos da forma

$$\hat{a}_x^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}'-\frac{i\hat{p}_x}{m\omega}\right) \tag{3.6}$$

e

$$\hat{a}_x=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}'+\frac{i\hat{p}_x}{m\omega}\right) \tag{3.7}$$

onde o operador $\hat{x}'=\hat{x}-x_0$. Na mecânica clássica, o movimento das partículas no plano perpendicular ao campo magnético localiza-se em um circulo ao redor de um ponto fixo. A quantidade $x_0$, que é conservada no caso quântico, corresponde à coordenada $x$ clássica do centro do circulo. Os operadores levantamento e abaixamento possuem relação de comutação $[\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger]=1$ e utilizando (3.6) e (3.7) em (3.5), temos a equação de Schrödinger escrita da seguinte forma

$$\omega\hbar\left[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\frac{1}{2}\right]f(x')=E'f(x') \tag{3.8}$$

Os operadores $\hat{a}_x^\dagger$ e $\hat{a}_x$ quando aplicados em auto estados do operador hamiltoniano tem a propriedade de elevar ou diminuir, respectivamente, a energia do auto estado em $\omega\hbar$. Ou seja,

$$\hat{H}\hat{a}_x^\dagger f(x')=\omega\hbar\left[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\frac{1}{2}\right]\hat{a}_x^\dagger f(x')=\hat{a}_x^\dagger\left[\omega\hbar+\hat{H}\right]f(x')=\left[E'+\omega\hbar\right]\hat{a}_x^\dagger f(x') \tag{3.9}$$

$$\hat{H}\hat{a}_x f(x')=\omega\hbar\left[\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger-\frac{1}{2}\right]\hat{a}_x f(x')=\hat{a}_x\left[-\omega\hbar+\hat{H}\right]f(x')=\left[E'-\omega\hbar\right]\hat{a}_x f(x') \tag{3.10}$$

Assim percebemos que quando $\hat{a}_x$ é aplicado no estado fundamental do sistema, $\hat{H}f_0(x')=E_0'f_0(x')$, o resultado é zero, devido ao fato de não existir auto estado do operador hamiltoniano com auto valores menores que $E_0'$. Desta forma podemos usando (3.7),

$$\hat{a}_x f_0(x')=0\Rightarrow f_0(x')=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x'^2} \tag{3.11}$$

onde $f_0(x')$ é normalizado e aplicando $\hat{H}$ no estado fundamental encontramos a energia fundamental do sistema, ou seja,

$$\hat{H}f_0(x')=E_0'f_0(x')=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\frac{1}{2}\right)f_0(x')\Rightarrow E_0'=\frac{\hbar\omega}{2} \tag{3.12}$$

Podemos dessa forma analisar a aplicação $\hat{a}_x^\dagger$ no estado fundamental e escrever

$$f_n(x') = C_n(\hat{a}_x^\dagger)^n f_0(x') \tag{3.13}$$

onde $C_n$ é uma constante de normalização, $n$ é o numero de vezes que foi aplicado $\hat{a}_x^\dagger$ no estado fundamental e $f_n(x')$ é o enésimo estado do sistema. Como visto em (3.9) a cada aplicação do $\hat{a}_x^\dagger$ aumentamos em $\hbar\omega$ a energia do sistema, então

$$E' = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3.14}$$

esses níveis de energia são os chamados *Níveis de Landau*. Podemos também definir $\hat{N} = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x$ como *Operador Número* e escrever $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$, onde $\hat{N} f_n(x') = n f_n(x')$. Agora falta apenas descobrirmos a constante de normalização de (3.13) para termos os auto estados do sistema para o enésimo estado, sendo assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x')|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |C_n(\hat{a}_x^\dagger)^n f_0(x')|^2 dx = 1$$

onde encontramos então

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \tag{3.15}$$

resultando em

$$f_n(x') = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_x^\dagger)^n f_0(x')$$

e escrevendo $\hat{a}_x^\dagger = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{d}{dx} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$, o que é uma outra forma de escrever (3.6),temos

$$(\hat{a}_x^\dagger)^n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n}} \left[ e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x'^2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx'} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x'^2} \right]^n$$

realizando uma mudança de variável, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x'$, temos

$$(\hat{a}_x^\dagger)^n e^{-\xi^2/2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n}} \left[ e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d}{d\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right]^n e^{-\xi^2/2}$$

encontramos

$$f_n(x') = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \tag{3.16}$$

onde $H_n(\xi)$ é a função de Hermite. Obtemos assim as auto funções da seguinte forma

$$\Psi_n(\xi, y, z) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} e^{\frac{i}{\hbar}(k_y y + k_z z)} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \tag{3.17}$$

e os auto valores

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{{k_z}^2}{2m} \tag{3.18}$$

Observando a forma dos autovalores(3.18), percebemos que não depende da quantidade $p_y$, o qual assume valores contínuos, como já citado, o que resulta nos níveis de energia serem degenerados continuamente, ou seja, possui uma degenerescência infinita. No entanto, o grau de degenerescência torna-se finito se o movimento no plano xy for restrito a uma área $S = L_x L_y$. O confinamento da partícula torna $p_y$ discreto, devido as condições de contorno nos limites de confinamento. O número, agora discreto, de valores possíveis de $p_y$ em um intervalo $\Delta p_y$ é $\frac{L_y}{2\pi\hbar}\Delta p_y$. Todos os valores de $p_y$ são admissíveis para os quais o centro da órbita esteja dentro de $S$(negligenciamos o raio da órbita em comparação com a largura $L_x$). Da condição $0 < x_0 < L_x$ temos $\Delta p_y = \frac{eB_0 L_x}{c}$. Daqui o número de estado (para um dado $n$ e $p_z$) é $\frac{eB_0 S}{2\pi\hbar c}$. Se a região de movimento é também restrita na direção z, em uma largura $L_z$, o número de valores possíveis de $p_z$ no intervalo de $\Delta p_z$ é $\frac{L_z}{2\pi\hbar}\Delta p_z$ e o número de estados neste intervalo é $\frac{eB_0 V \Delta p_z}{4\pi^2\hbar^2 c}$. Então podemos ter níveis de Landau degenerados infinitamente ou com degenerescência finita dependendo das restrições impostas ao sistema. Todos esses efeitos mostrados são somente observados quando a energia de separação dos níveis for muito maior que energia térmica média, ou seja, os níveis de Landau são vistos apenas se $kT << \hbar\omega$. Caso essa condição não seja satisfeita qualquer pequena variação da energia térmica do sistema, ocasionará em um aumento de energia no sistema sem podermos ver em nível ele esta. Podem satisfazer essa condição em sistemas com temperaturas baixas e/ou campos magnéticos fortes.

## 3.2 NÍVEIS DE LANDAU DE ÁTOMO NEUTRO COM MOMENTO DE DIPOLO ELÉTRICO

Os níveis de Landau foram mostrados para o sistema composto por partícula carregada em meio a campo magnético constante e uniforme. No entanto esse efeito não esta presente apenas a essa dinâmica. Podemos também observá-la no estudo de partículas neutras, em especial, com dipolo elétrico atravessado por campo magnético. Para o estudo quântico da dinâmica de um dipolo magnético $\vec{\mu}$ em meio a campo elétrico $\vec{E}$ utilizaremos a lagrangiana (2.35) encontrada no capítulo anterior, que tem a forma

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot(\vec{\mu}\times\vec{E})$$

a partir dela encontraremos o hamiltoniano para o sistema obtendo $\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial v}$

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{1}{c^2}(\vec{\mu}\times\vec{E}) \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m}\left[\vec{p} - \frac{1}{c^2}(\vec{\mu}\times\vec{E})\right] \tag{3.19}$$

e usando a Transformada de Legendre

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{1}{c^2}\vec{\mu}\times\vec{E}\right)^2 + \frac{i\hbar}{mc^2}\left[\nabla\cdot(\vec{\mu}\times\vec{E})\right]$$

consideraremos o caso em que $\nabla \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) = 0$, resultando em

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{1}{c^2}\vec{\mu} \times \vec{E}\right)^2 \tag{3.20}$$

Por conveniência utilizaremos a partir daqui o *Sistema Natural de Unidades*[2] e levaremos (3.20) para o sistema quântico transformando observáveis em operadores, encontrando

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \mu \hat{A}_{AC}\right)^2 \tag{3.21}$$

onde , $\mu$ é o magnitude do momento de dipolo magnético da partícula e $\vec{A}_{AC} = \vec{n} \times \vec{E}$, uma definição formada pela equivalência da (3.21) com (3.1). $\vec{n}$ é o vetor unitário que indica a direção do momento magnético, que em nosso caso utilizaremos $\vec{n} = \hat{z}$. Vamos utilizar o campo elétrico dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho_e}{2} r \hat{r} \tag{3.22}$$

em coordenadas cilíndricas, onde $\rho_e$ é uma densidade de carga uniforme, pois para esse campo obtemos $\vec{A}_{AC}$, que satisfaz a condição $\vec{B}_{AC} = \nabla \times \vec{A}_{AC}$ constante e uniforme, ou seja,

$$\vec{A}_{AC} = \hat{z} \times \frac{\rho_e}{2} r \hat{r} = \frac{\rho_e}{2} r \hat{\phi} \tag{3.23}$$

e

$$\vec{B}_{AC} = \nabla \times \vec{A}_{AC} = \rho_e \hat{z} \tag{3.24}$$

Observa-se que para o nosso caso o campo magnético é constante e uniforme, como no caso da secção anterior. Percebendo que $\frac{\partial \hat{A}_{AC}}{\partial t} = 0$, ou seja $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$, permite-nos adotar a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{3.25}$$

considerando a função de onda $\Psi(\vec{r},t) = e^{-iEt}\psi(\vec{r})$ onde $E$ e a energia total da partícula com momento magnético. A equação de Schrödinger em coordenadas cilíndricas para esse sistema é

$$\hat{H}\psi = E\psi = -\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - i\mu\rho_e \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\mu^2 \rho_e^2}{4} r^2 \psi\right] \tag{3.26}$$

observando a conservação do momento de $z$, devido a ausência de $z$ no hamiltoniano, podemos tomar $\psi(\vec{r}) = e^{ik_z z} f(r,\phi)$ e $E' = E - \frac{k_z^2}{2m}$, temos

$$E'f = -\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right] - \frac{i\omega}{2}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{m\omega^2}{8} r^2 f + \frac{\omega}{2} f \tag{3.27}$$

[2] o sistema no qual cinco constantes fundamentais da Física são tomadas como a unidade, dentre as cinco temos $c = \hbar = 1$

tendo definido $\omega = \sigma\frac{|\mu\rho_e|}{m}$, onde $\sigma = \pm 1$ e esta relacionado com o sentido do momento angular da partícula. Tomaremos

$$f(r,\phi) = e^{il\phi}R(r) \tag{3.28}$$

devido a ausência da coordenada $\phi$ na equação, o que nos mostra a conservação do seu momento angular $l$. Substituindo (3.28) em (3.27) e fazendo manipulações, obtemos

$$-2mE' = \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{l^2}{r^2} - ml\omega - \frac{m^2\omega^2}{4}r^2 - m\omega\right]R$$

fazendo a substituição de variável $\xi = \frac{m\omega}{2\sigma}r^2$ em (3.29), conseguimos

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \frac{\sigma E'}{\omega} + \frac{\sigma(l+1)}{2} - \frac{l^2}{4\xi}\right)R = 0 \tag{3.29}$$

e estudando a solução para $\xi \to 0$

$$\xi R'' + R' - \frac{l^2}{4\xi}R = 0 \tag{3.30}$$

que é dada por

$$R_{(\xi\to 0)} = \xi^{|l|/2} \tag{3.31}$$

e também para $\xi \to +\infty$

$$\xi R'' - \frac{\xi}{4}R = 0 \tag{3.32}$$

que é dada por

$$R_{(\xi\to +\infty)} = e^{-\xi/2} \tag{3.33}$$

podemos escrever

$$R(\xi) = e^{-\xi/2}\xi^{|l|/2}\zeta(\xi) \tag{3.34}$$

que substituindo em (3.29), resulta em

$$\xi\zeta'' + (|l|+1-\xi)\zeta' + \left(\beta - \frac{|l|+1}{2}\right)\zeta = 0 \tag{3.35}$$

onde $\beta = \frac{E'}{\omega} + \frac{\sigma(l-1)}{2}$, restando a equação conhecida como Equação Hipergeométrica Confluente e tem como solução

$$\zeta(\xi) = F\left[-\left(\beta - \frac{|l|+1}{2}\right), |l|+1, \xi\right] \tag{3.36}$$

Como existe a necessidade de que a nossa solução seja finita, ou seja, a nossa função de onda seja normalizada, necessitamos que

$$\beta - \frac{|l|+1}{2} = n$$

para $n = 0, 1, 2, ...$, o que nos mostra a forma dos autovalores de energia radiais, que é dada por

$$E' = \left( n + \frac{|l|}{2} - \frac{\sigma l}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega \tag{3.37}$$

Os autovalores encontrados acima possuem a mesma forma dos autovalores encontradas na seção anterior, ou seja, possui um valor de energia fundamental e os outros níveis de energia crescem em múltiplos inteiros de $\omega$, ocasionando assim em níveis de energia análogos a níveis de Landau. A energia total do sistema é dada por

$$E = \omega \left( n + \frac{1}{2} + \frac{|l|}{2} - \frac{\sigma l}{2} + \frac{\sigma}{2} \right) + \frac{k_z^2}{2m} \tag{3.38}$$

e obtemos a função de onda normalizada com a forma seguinte

$$\Psi(\xi, \phi, z, t) = (m\omega)^{\frac{|l|+1}{2}} \frac{(|l|+n)!}{2^{|l|} n! |l|!} e^{-iEt} e^{ik_z z} e^{il\phi} e^{-\xi/2} \xi^{|l|/2} F\left[-n, |l|+1, \xi\right] \tag{3.39}$$

De forma análoga aos níveis de Landau para partícula carregada, como apresentado na seção anterior, os níveis de energia são infinitamente degenerados, devido à simetria translacional do campo magnético, os níveis de energia encontrados também são infinitamente degenerados. É importante observar que os níveis de energia são dependentes de sigma. Devido a isso, os níveis dependem da direção do eixo de revolução. Os autovalores são independentes do centro da órbita, mas dependem do sentido de rotação.

CAPÍTULO 4

# NÍVEIS DE LANDAU DE ÁTOMO NEUTRO COM MOMENTO DE QUADRUPOLO ELÉTRICO

A quantização de Landau, até então apresentada na dinâmica de partícula carregada e partícula com momento de dipolo magnético, é um efeito quântico importante na descrição de muitos fenômenos, como por exemplo, o efeito Hall quântico[11], que consiste na dinâmica de um elétron em meio a campos magnético e elétrico. A quantização de Landau também é usada para descrição de fenômenos coletivos, como condensado de Bose-Einstein girante[12], que consiste na analogia da dinâmica de elétrons em campo magnético com a dinâmica de partículas compostas presentes em condensados de Bose-Einstein. É interessante encontrar sistema que possuam níveis de energia, análogos aos Níveis de Landau, devido as propriedades desses níveis já serem bem estudadas. O objetivo deste capítulo é descrever a dinâmica quântica de um momento de quadrupolo elétrico em meio a campo magnético, com configuração tal que evidencie seus níveis de energia análogos aos níveis de Landau. Para início dessa descrição tomemos a lagrangiana do sistema escrita da seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \sum_{ij} Q_{ij}\partial_i E'_j \tag{4.1}$$

como em (2.48). O segundo termo é o termo de interação que depende do campo elétrico sentido pelo quadrupolo. Considerando a transformação (2.41) para o caso em que somente o campo magnético está presente, ou seja, $\vec{E} = \vec{0}$ e para melhorar a notação, usamos a definição $Q_j = \sum_i Q_{ij}\partial_i$, obtendo assim

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{c}\vec{v}\cdot(\vec{Q}\times\vec{B}) \tag{4.2}$$

deixando o termo de interação agora escrito em função do campo magnético produzido no laboratório. O momento conjugado é encontrado através da definição

$$\vec{P} = \nabla_v L = m\vec{v} + \frac{1}{c}(\vec{Q}\times\vec{B}) \tag{4.3}$$

onde $\nabla_v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\hat{e}_i$. O hamiltoniano do sistema encontrado utilizando a transformação de Legendre

$$H(\vec{p}) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L,$$

resultando em

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - \frac{1}{c}(\vec{Q}\times\vec{B})\right]^2 - \frac{1}{mc}[\vec{P}\cdot(\vec{Q}\times\vec{B})]. \tag{4.4}$$

Aqui, continuaremos a utilizar o Sistema Natural de Unidades e definiremos $\vec{A}_{eff} = (\vec{Q}\times\vec{B})$, devido a equivalência entre esse sistema e o sistema composto por uma partícula carregada em meio a campo magnético, tal que $\nabla\cdot\vec{A}_{eff} = 0$ similar a o gauge de Columb. E a partir daqui iniciaremos a busca da configuração que necessitamos para obter níveis de energia análogos aos níveis de Landau. Devido a definição de $\vec{A}_{eff}$, que pode ser feita buscando uma equivalência entre a dinâmica partícula carregada-campo magnético com quadrupolo-campo magnético, podemos encontrar um $\vec{B}_{eff}$ que se satisfazer a propriedade de constante e uniforme, encontraremos os níveis de Landau análogos. Dessa forma utilizaremos campos que satisfaçam $\vec{B}_{eff} = \nabla\times\vec{A}_{eff} = b_e\hat{z}$, no qual $b_e$ é uma constante. Em busca das configurações de campos que satisfaçam a condição de $\vec{B}_{eff}$ constante e uniforme que utilizaremos como primeira configuração de campo magnético dada por

$$\vec{B} = \Phi xz\hat{i} \tag{4.5}$$

onde $\Phi$ é fluxo magnético. Fazendo a substituição de (4.5) na definição de $\vec{A}_{eff}$, encontramos

$$\vec{A}_{eff} = \vec{Q}\times\vec{B} = q_3\Phi x\hat{j} \tag{4.6}$$

onde $q_j = Q_{1j} + Q_{2j} + Q_{3j}$, esta relacionado com o momento de quadrupolo e $\dfrac{\partial q_3}{\partial y} = 0$ para que a condição $\nabla\cdot\vec{A}_{eff} = \nabla\cdot(\vec{Q}\times\vec{B}) = 0$ seja satisfeita. O hamiltoniano do sistema fica dado da seguinte forma

$$H = \frac{1}{2m}\left[\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2 - 2q_3\Phi x\hat{P}_y + (q_3\Phi)^2x^2\right] \tag{4.7}$$

e a equação de Schrödinger é dada por

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2iq_3x\Phi\frac{\partial}{\partial y} - (q_3\Phi)^2x^2\right]\psi = E\psi \tag{4.8}$$

Devido a simetria do hamiltoniano com os momentos, $[H,\hat{P}_y] = [H,\hat{P}_z] = 0$ podemos escrever a função de onda da seguinte forma

$$\psi(x,y,z) = \exp i(k_y y + k_z z)f(x) \tag{4.9}$$

onde $k_y$ e $k_z$ são autovalores dos momentos $\hat{P}_y$ e $\hat{P}_z$, respectivamente, e podem assumir valores entre $-\infty$ e $\infty$. $f(x)$ é uma função somente de $x$. O resultado da substituição de (4.9) em (4.8) é

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k_y^2}{2m} - \frac{q_3k_y\Phi x}{m} + \frac{1}{2m}(q_3\Phi)^2x^2\right]f(x) = \left[E - \frac{k_z^2}{2m}\right]f(x) \tag{4.10}$$

onde podemos por conveniência definir $x_0 = \frac{k_y}{\Phi q_3}$,$w = \frac{\Phi q_3}{m}$ and $E' = E - \frac{k_z^2}{2m}$, resultando em

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{mw^2}{2}(x-x_0)^2\right] f(x) = E' f(x) \tag{4.11}$$

Com essa simplificação e também definindo $x' = x - x_0$ obtemos a equação de Schrödinger como a do oscilador harmônico unidimensional,

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} + \frac{1}{2}mw^2x'^2\right] f(x') = E' f(x') \tag{4.12}$$

o qual possui autovalores e auto funções, dadas por

$$E_n = w(n+\frac{1}{2}) + \frac{k_z^2}{2m} \qquad n = 0,1,2,... \tag{4.13}$$

$$\psi(\beta,y,z) = \frac{1}{\pi^{1/4}a^{1/2}\sqrt{2^n n!}} e^{i(k_y y + k_z z) - \frac{\beta^2}{2}} H_n(\beta) \tag{4.14}$$

onde $\beta = \frac{x-x_0}{a}$, $a = \sqrt{\frac{1}{mw}}$ e $H_n$ é a Função de Hermite. Observando que (4.13) não contem dependência com $k_y$, o qual pode assumir valores contínuos, temos que os níveis de energia são continuamente degenerados, isto é, para qualquer valor de energia podemos ter infinitas funções de onda que descrevem a dinâmica quântica do quadrupolo elétrico. Para essa configuração de campo magnético encontramos uns problemas devido à possibilidade de conseguir um campo dessa forma. O problema aparece quando feito o divergência desse campo

$$\nabla \cdot \vec{B} = z\Phi \tag{4.15}$$

mostrando que para conseguir um campo assim precisamos assumir a existência de monopolos magnéticos. Sendo assim é importante deixar claro que para essa configuração a consideração fundamental é assumir a existência de monopolos magnéticos. Buscando agora uma configuração de campo de não precise de monopolos magnéticos temos

$$\vec{B} = \Phi y^2 \hat{k} \tag{4.16}$$

onde $\Phi$ é o fluxo magnético. Com $\vec{B}$ escrito por (4.16), encotramos

$$\vec{A}_{eff} = \vec{Q} \times \vec{B} = 2q_2 \Phi y \hat{i} \tag{4.17}$$

onde $\frac{\partial q_2}{\partial x} = 0$ devido à condição $\nabla \cdot \vec{A}_{eff} = 0$. O hamiltoniano do sistema fica dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left[\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2 - \frac{4q_2\Phi}{c} y \hat{P}_x + \left(\frac{2q_2\Phi}{c}\right)^2 y^2\right] \tag{4.18}$$

resultando na equação de Schrödinger dada por

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 4iq_2 y\Phi\frac{\partial}{\partial x} - (2q_2\Phi)^2 y^2\right]\psi = E\psi \tag{4.19}$$

Observando a simetria indicada pela ausência dos variáveis $y$ e $z$ no hamiltoniano, podemos escrever a dependência dessas variáveis na função de onda da seguinte forma

$$\psi(x,y,z) = \exp i(k_x x + k_z z) f(y) \tag{4.20}$$

onde $k_x$ e $k_z$ são os autovalores dos momentos $\hat{P}_x$ e $\hat{P}_z$, respectivamente, e podem assumir qualquer valor de $-\infty$ à $\infty$ e $f(y)$ é uma função que dependem apenas de $y$. Substituindo (4.20) em (4.19) encontramos

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{k_x^2}{2m} - \frac{2q_2 k_x \Phi y}{m} + \frac{1}{2m}(2q_2\Phi)^2 y^2\right] f(y) = \left[E - \frac{k_z^2}{2m}\right] f(y) \tag{4.21}$$

onde podemos definir $y_0 = \dfrac{k_x}{2\Phi q_2}$,$w = \dfrac{2\Phi q_2}{m}$ e $E' = E - \dfrac{k_z^2}{2m}$, resultando em

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{mw^2}{2}(y-y_0)^2\right] f(y) = E' f(y) \tag{4.22}$$

que é uma equação parecida com a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico, se fizermos $y' = y - y_0$,

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dy'^2} + \frac{1}{2}mw^2 y'^2\right] f(y') = E' f(y') \tag{4.23}$$

encontrando assim autovalores e autofunções dadas por

$$E_n = w(n+\frac{1}{2}) + \frac{k_z^2}{2m} \qquad n = 0,1,2,... \tag{4.24}$$

$$\psi(x,\beta,z) = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{1/2}\sqrt{2^n n!}} e^{i(k_x x + k_z z) - \frac{\beta^2}{2}} H_n(\beta) \tag{4.25}$$

onde $\beta = \dfrac{y-y_0}{a}$, $a = \sqrt{\dfrac{1}{mw}}$ e $H_n$ é a função de Hermite. Devido a não dependência da energia como $k_x$ como mostrada em (4.24), os níveis de energia são continuamente degenerados. E muito interessante é que encontramos esses níveis de energia com uma configuração de campo que pode ser encontrada não necessitando de monopolos magnéticos. Outra configuração que pode ser usada para termos níveis de Landau na dinâmica de quadrupolo em campo magnético é o campo magnético escrito por

$$\vec{B} = \Phi\rho^2 \hat{k} \tag{4.26}$$

onde $\Phi$ é o fluxo magnético . Tal que encontramos

$$\vec{A}_{eff} = \vec{Q} \times \vec{B} = -2\Phi q_1 \rho \hat{\theta} \tag{4.27}$$

onde $\dfrac{\partial q_1}{\partial \theta} = 0$ devido ao similar gauge de Coulomb que definimos no inicio. O hamiltoniano do sistema é

$$H = -\frac{1}{2m}\left[\nabla^2 + 4iq_1\Phi\frac{\partial}{\partial\theta} - (2q_1\Phi)^2\rho^2\right] \tag{4.28}$$

levando à equação de Schröndiger dado por

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+4iq_1\Phi\frac{\partial}{\partial\theta}-(2q_1\Phi)^2\rho^2\right]\psi=E\psi \tag{4.29}$$

Devido a simetria do hamiltoniano com os momentos, $[H,\hat{P}_\theta]=[H,\hat{P}_z]=0$ nós podemos escrever

$$\psi(\rho,\theta,z)=\exp i(l\theta+k_z z)f(\rho) \tag{4.30}$$

onde $l$ e $k_z$ são autovalores dos momentos $\hat{P}_\theta$ e $\hat{P}_z$, respectivamente, que pode assumir valores de $-\infty$ à $\infty$ e $f(\rho)$ é uma função somente de $\rho$. O resultado da substituição de (4.30) em (4.29) é

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{l^2}{\rho^2}-(2q_1\Phi)^2\rho^2\right]f(\rho)=\left[-2mE+4lq_1\Phi+k_z^2\right]f(\rho)$$

que realizando algumas manipulações obtemos

$$\frac{d^2f}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}-\left[\frac{l^2}{\rho^2}+\beta^2\rho^2\right]f(\rho)=\gamma f(\rho) \tag{4.31}$$

onde $\beta=2q_1\Phi$ e $\gamma=-2mE+2l\beta+k_z^2$. Agora, usamos a seguinte mudança de variável $\xi=\beta\rho^2$

$$\xi\frac{d^2f}{d\xi^2}+\frac{df}{d\xi}-\left[\frac{l^2}{4\xi}+\frac{1}{4}\xi+\frac{\gamma}{4\beta}\right]f(\xi)=0 \tag{4.32}$$

Para um estudo assimptótico, nós temos que para $\xi\to\infty$,

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}-\frac{1}{4}f(\xi)=0$$

e para $\xi\to 0$

$$\xi^2\frac{d^2f}{d\xi^2}+\xi\frac{df}{d\xi}-\frac{l^2}{4}f(\xi)=0$$

o que resulta em

$$f(\xi)=\xi^{\frac{|l|}{2}}e^{-\frac{1}{2}\xi}g(\xi) \tag{4.33}$$

Ficando a nossa equação dada da seguinte forma

$$\xi\frac{d^2g}{d\xi^2}+(|l|+1-\xi)\frac{dg}{d\xi}-\left[\frac{1}{2}(l+1)+\frac{\gamma}{4\beta}\right]g(\xi)=0 \tag{4.34}$$

que tem como solução a função citada na seção anterior, a função Hipergeométrica confluente, dada por

$$g(\xi)=F[a,c;\beta\xi] \tag{4.35}$$

onde $a=\frac{1}{2}\left(|l|+1+\frac{\gamma}{4\beta}\right)$ e $c=|l|+1$. Devido a sua forma assimptótica e a necessidade de nossa solução ser normalizada temos que

$$\frac{1}{2}\left(|l|+1+\frac{\gamma}{4\beta}\right)=-n \tag{4.36}$$

para $n = 0, 1, 2, 3...$, que nos dá os autovalores escritos da seguite forma

$$E_n = \frac{4\beta}{m}\left[n + \frac{1}{2} + \frac{|l|}{2} + \frac{l}{4} + \frac{k_z^2}{8\beta}\right] \tag{4.37}$$

e auto funções escritas da seguinte forma

$$\Psi(\xi, \theta, z, t) = A_n e^{-iEt} e^{i(l\theta + k_z z)} \xi^{\frac{|l|}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi} F[-n, |l| + 1, \beta\xi] \tag{4.38}$$

onde $A_n$ é a constante de normalização da nossa função. Se definirmos $\omega \equiv \frac{4\beta}{m}$ teremos os níveis desse sistema equivalentes aos níveis de Landau. As configurações apresentadas para os campos magnéticos podem ser usados para qualquer configuração de quadrupolos, levando em consideração as condições apresentadas pelo gauge de Coulomb definido. E caso assuma $Q_{ij}$ constante, podemos usar qualquer configuração apresentada e estudada acima.

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Estudamos nessa dissertação, efeitos quânticos que surgem em sistemas eletromagnéticos quando configurados de diversas formas. Por exemplo, o sistema composto por uma partícula carregada em ambiente dotado de campo magnético é um dos sistemas que nós possibilitou evidenciar o efeito Aharonov-Bohm, que ocorre devido ao potencial vetor eletromagnético assumir um significado físico quando estudado na teoria quântica, e a Quantização de Landau, que nos mostra a discretização e quantização dos níveis de energia do sistema. Demonstramos também que a dinâmica de um momento de dipolo magnético atravessado por campo elétrico também apresenta um equivalente efeito AB, o efeito Aharonov-Casher, que ocorre desde que não haja torque no dipolo magnético, fazendo com que a dinâmica do dipolo seja bidimensional. A quantização de Landau também foi evidenciada para o sistema dipolo magnético-campo elétrico utilizando a consideração de ausência de torque para o dipolo e campo elétrico tal que possibilitasse a descrição da dinâmica em duas dimensões. Estendemos o estudo, descrevendo o efeito AB para momento de dipolo elétrico interagindo com campo magnético, o efeito He-McKellar-Wilkens. O qual também se mostrou desde que a ausência de torque estivesse presente e a dinâmica pudesse ser estudada bidimensionalmente. Por fim foi demonstramos pela primeira vez o surgimento de níveis de Landau da dinâmica do momento de quadrupolo elétrico em campo magnético. Os níveis de Landau surgem quando adotamos configurações específicas de campos magnéticos, dentre elas temos a possibilidade de campo magnético oriundos de monopolos magnéticos. Importante condição que utilizamos para os campos utilizados trouxessem como consequência a quantização de Landau foi à condição de equivalência matemática entre as equações de Schrödinger de partícula carregada e de momento de quadrupolo elétrico. De tal forma que o campo magnético equivalente seria constante e uniforme como na quantização de Landau para a partícula carregada. Esse nosso trabalho foi baseado no trabalho que evidenciava o efeito AB para momento de quadrupolo elétrico em ambiente atravessa por campo elétrico e magnético. Do mesmo jeito, outros trabalhos também nos mostram outras possibilidades de extensão do trabalho produzido nessa dissertação. Baseado nas referencias [32, 33] planejamos estudar a dinâmica de átomos neutros com momento de quadrupolo elétrico e momento de dipolo magnético, observando as possibilidades e buscando mostrar o aparecimento de fases quânticas ou efeitos quânticos que por ventura venham a aparecer. Baseados em trabalhos como [36, 37], etc, poderemos estudar o sistema de quadrupolo em

espaços com defeitos topológicos, analisando as consequências das variações na configuração inicial, estudada nessa dissertação. A possibilidade de estudos levando em conta a presença de torque nos sistemas abordados aqui, são também de grande interesse, devido ao fato de deixarmos o sistema mais livre para interações que nos tragam mais liberdades e ate novidades. É de extrema importância fazer a extensão desses estudos para os casos relativísticos, baseado em [38, 39], pois traria a possibilidade de intercambia esses estudos como trabalhos com o grafeno e possivelmente com computação quântica. E por fim como última perspectiva a ser listada, temos o objetivo de fazer estudos sobre computação quântica holonômica[40] e tentar utilizar os estudos sobre fases quânticas nessas dinâmicas para desenvolver trabalhos nessa área.

# Referências Bibliográficas


[1] Y. Aharonov, and D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Field*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **115**, 485 (1959).

[2] R.G. Chambers, *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux*, Phys. Rev. Lett. **5**, 3 (1960).

[3] Y. Aharonov and A. Casher, *Topological Quantum Effects for Neutral Particles*, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984).

[4] H. Wei, R. Han and X. Wei, *Topological Phase due to Electric Dipole Moment and Magnetic monople Interaction*, Phys. Rev. A **47**, 3424 (1983).

[5] M. Wilkens, *Quantum Phase of a Moving Dipole*, Phys. Rev. Lett. **72**, 5 (1994).

[6] O. Heaviside.*Electromagnetic Theory* (London 1893); Electrical Papers, London, 1 (1892);. Phyl. Trans. Roy. Soc. A, **183**, p. 423, (1893).

[7] C. Furtado and G. Duarte.*Dual Aharonov-Bohm Effect*, Phys. Scr., **71**, p. 7, (2005).

[8] J. P. Dowling, C. P. Williams e J. D. Franson, *Maxwell Duality, Lorentz Invariance, and Topological Phase* Phys. Rev. Lett. **83**, 2486 (1999).

[9] Chia-Chu Chen, *Topological Quantum Phase and Multipole Moment of Neutral Particles*, Phys. Rev. A **51**, 3 (1995).

[10] L. D. Landau, *Paramagnetism of Metals*, Z. Phys. **64**, 629 (1930).

[11] K. v. Klitzing, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494-497 (1980).

[12] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac e P. Zoller, *1/2-Anyons in Small Atomic Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **87**,(2001).

[13] M. Ericsson e E. Sjöqvist, *Towards a Quantum Hall Effect for Atoms Using Electric Fields*, Phys. Rev. A **65**,(2001).

[14] L. R. Ribeiro, Claudio Furtado e J. R. Nascimento, *Landau Levels Analog to Electric Dipole*, Phys. Lett. A **348**, 135-140 (2006).

[15] C. Furtado, J. R. Nascimento e L. R. Ribeiro, *Landau Quantization of Neutral Particles in an External Field*, Phys.Lett. A **358**, 336-338 (2006).

[16] S. Pancharatnam, *Generalized Theory of Interference, and Its Applications. Part I. Coherent Pencils*. Proc. Indian Acad. Sci. A **44**, (1956).

[17] M. L. Foucault, *Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule*, C. R. Acad. Sci. Hebd Seances Acad. Sci. D **32**, 135 (1851).

[18] J. v. Bergmann e H. v. Bergmann, *Foucault Pendulum Through Basic Geometry*, Am. J. Phys. **75**, 888-892 (2007).

[19] D. Andrade e N. L. M. Garcia, *Introdução à Topologia Geral*, http://www.dma.uem.br/kit.

[20] A. C. de Souza, *Topologia Geral em Varios Ângulos*, http://topologia-geral.ourproject.org/.

[21] J. McCleary, *A First Course in Topology: Continuity and Dimension*,.

[22] H. A. Fowler, L. Marton, J. A. Simpson e J. A. Suddeth, *Electron Interferometer Studies of Iron Whiskers*, Journal Of App. Phys. **32**, 6 (1961).

[23] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki e J. Endo, *Evidence for Aharonov-Bohm Effect With Magnetic Field Completely Shielded from Electric Wave*, Phys. Rev. Let. **56**, 8 (1986).

[24] A. V. Oudenaarden, M. H. Devoret, Y. V. Nazarov e J. E. Mooij, *Magneto-Electric Aharonov-Bohm Effect in Metal Rings*, Nature **391**, 768 (1995).

[25] M. V. Berry, *Quantal Phase Factores Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. R. Lond. A **392**, 45 (1984).

[26] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall 1995).

[27] A. Cimmino, G. I. Opat e A. G. Klein, *Observation of The Topological Aharonov-Casher Phase Shift by Neutron Interferometry*, Phys. Rev. Lett. **63** 4 (1989).

[28] K. Sangster, E. A. Hinds, S. M. Barnett e E. Riis, *Measurement of the Aharonov-Casher Phase in an Atomic System*, Phys. Rev. Lett **71**, 22 (1993).

[29] K. Sangster, E. A. Hinds, S. M. Barnett, E. Riis e A. G. Sinclair, *Aharonov-Casher Phase in an Atomic System*, Phys. Rev. A **51**, 3 (1995).

[30] H. Wei, R. Han, X. Wei,*Quantum Phase of Induced Dipoles Moving in a Magnetic Field* Phys. Rev. Lett. **75**, 11 (1995).

[31] L. D. Landau e E. M. Lifschitz. . *Quantum mechanics - Nonrelativistic theory*, 3ed Vol.3 (Pergamon Press 1977).

[32] C. Furtado e C. A. de L. Ribeiro, *Quantum Dynamics of Magnetic and Electric Dipoles and the Geometric Phase* Phys. Rev. A **69**,(2004).

[33] J. K. Pachos, *Quantum Phases of Electric Dipole Ensembles in Atom Chips*, Phys. Lett. A **344**, 441 (2005).

[34] M. Berry, *Anticipations of the Geometric Phase*, Phys. Today, pg. 34, (Dezembro de 1990).

[35] A. M. Fischer, V. L. Campo Jr, M. E. Portnoi e R. A. Römer, *Exciton Storage in a Nanoscale Aharonov-Bohm Ring with Electric Field Tuning*, Phys. Rev. Lett. **102**, (2009).

[36] K. Bakke, L. R. Ribeiro, c. Furtado e J. R. Nascimento, *Landau Quantizationo for a Neutral Particle in the Presence of Topological Defects*, Int. J. of Modern Phys. D, **19**, 85-96 (2010).

[37] L. R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado e J. R. Nascimento *Landau Analog Levels for Dipoles in Non-Commutative Space and Phase Space*,Eur. Phys. J. C, **56**, 597-606 (2008).

[38] Bakke, K.; Furtado, C., *Relativistic Landau quantization for a neutral particle*,Phys. Rev. A **80**(2009).

[39] K. Bakke e C. Furtado *Relativistic Landau-Aharonov-Casher Quantization in Topological Defects Space-Time*, Int. J. of Mod. Phys. D **19**, No. 1, 85-96 (2010).

[40] K. Bakke, C. Furtado e S. Sergeenkov, *Holonomic quantum computation associated with a defect structure of conical graphene*, EPL **87**, 3 (2009).

APÊNDICE A

# Apêndice 1