

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Dissertação de Mestrado

**UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DO
CAMPO ESCALAR REAL**

Simone Vicente de Oliveira

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Dissertação de Mestrado

**UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DO
CAMPO ESCALAR REAL**

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Laércio Losano, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

João Pessoa, Setembro /2009



Ao Senhor Jesus e minha família.

Agradecimentos

- Ao Prof. Laércio Losano, pela orientação e competência com que conduziu este trabalho.
- A Deus, por ele ter concebido a graça para que eu pudesse concluir este trabalho.
- Aos colegas de sala Alex da Silva, Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos e Victor Ignacio Afonso pela colaboração que recebi durante a fase de preparação deste trabalho.
- Aos colegas de pós-graduação, aos professores e funcionários do Departamento de Física pela convivência durante a minha permanência neste Departamento.
- A UFPB e a CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que diretamente ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho investigamos uma abordagem sobre o comportamento do campo escalar real, defeitos topológicos e não-topológicos, investigamos também suas estabilidades. Para isto, utilizamos o método de Bogomol'nyi, que consiste em encontrar soluções das equações de segunda ordem via equações de primeira ordem, que surgem do processo de minimização da energia. Essas soluções são denominadas BPS.

Estudamos, também, sistemas de dois campos escalares reais acoplados dos quais investigamos as soluções BPS. Nesse contexto, fizemos um estudo sobre o modelo BNRT em que as soluções das equações de movimento foram encontradas utilizando o método das órbitas. Utilizamos, também, o método do fator integrante para tornar as equações diferenciais exatas.

O enfoque principal do nosso trabalho se refere à investigação que fizemos ao estudar uma nova família de modelos que envolve dois campos escalares, e contém o modelo BNRT como um de seus membros (caso $n=2$). Através do fator integrante calculamos as órbitas, e, no caso $n = 3$, fizemos um estudo numérico das soluções topológicas.

Abstract

In this work, we study an approach on real scalar fields, topological defects and non topological defects, study their linear stability. The approach that we have used is the Bogomol'ny method, which finds solutions of second order equations through first order equations, that arise as a minimization process. These solutions are denominated BPS states.

We also study systems of two field escalares coupled real where investigate the solutions BPS. In this context did a study on the model BNRT in which the movement equations solutions, they were found using the orbits method. We use also, the method of the integrant factor to turn the exact equations differentials.

The main focus of our work refers to investigation that we did when studying a models new family that involves two field escalares, and it contains the model BNRT as one of your members(in case $n=2$). Through the integrant factor we calculate the orbits, and in the case $n = 3$ did a study numeric of the solutions topological.

Índice

1	Introdução	7
2	Defeitos Topológicos - Campo Escalar Real	10
2.1	Conceitos Fundamentais	10
2.2	O Método de Bogomol'nyi	14
2.3	Defeito do tipo Kink	16
2.4	Defeito do tipo Lump	19
2.5	Soluções BPS	21
2.6	Estabilidade Linear	24
2.7	Estabilidade das soluções BPS	28
3	Modelos Com dois Campos Escalares Reais	33
3.1	Conceitos Fundamentais	33
3.2	Soluções BPS	34
3.3	O Modelo BNRT	38
3.4	Método das Órbitas	40
3.5	Fator Integrante	43
3.6	Família de Modelos	48
4	Conclusões e Perspectivas	53
A	Notação e Sistema de Unidades	55

B Campos Adimensionais

57

Capítulo 1

Introdução

Campos escalares são os mais simples encontrados na natureza, sua dinâmica e interações são governadas a partir de uma teoria de campos relativística [1]. Uma das maiores importâncias na utilização dos campos escalares no desenvolvimento da física de partícula e campos, está ligado ao fato deles apresentarem o fenômeno da quebra espontânea de simetria[2]. Esse fenômeno é de grande interesse na física pelo seguinte fato: faz surgir massa para as partículas elementares, unifica as interações, e descrevem a presença de estrutura topológica no universo [3].

Os modelos descritos por campos escalares reais num espaço-tempo de $(1+1)D$ também são importantes, pois garantem a presença de soluções topológicas. Essas soluções topológicas são soluções das configurações de campos clássicas para as equações de movimento. O comportamento topológico dessas soluções está associado à maneira como os campos vão para o infinito, ou seja, à sua forma assintótica. Para garantir que essas soluções possuam energia finita, devemos impor que o potencial que descreve a teoria tenha mais de um mínimo e seja limitado inferiormente.

A presença de estrutura topológica é garantida pela presença de uma corrente topológica conservada, que não é a corrente de Noether, pois sua forma depende das dimensões do espaço-tempo do modelo estudado [4]. A corrente topológica mais simples que podemos ter é construída num espaço-tempo de $(1+1)D$, cuja forma usual é dada por $(J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$, onde (ϕ) é o campo escalar real e $(\epsilon^{\mu\nu})$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico.

Para melhor compreensão desse trabalho organizamos ele da seguinte forma.

No capítulo 2, mostraremos como encontrar as equações de movimento para o campo escalar real e, para isso, utilizaremos o método de Bogomol'nyi para buscar as soluções das equações de movimento em segunda ordem. Descrevemos ainda a partir de um potencial conhecido como $(\lambda\phi^4)$ soluções estendidas, tipo kinks e lumps, também conhecidos como defeitos topológicos e não-topológicos. Focalizaremos, ainda, a atenção nas soluções BPS e na estabilidade linear.

No capítulo 3, estudamos uma nova família de modelos com dois campos escalares reais acoplados. Foi feita também uma revisão do modelo BNRT, estudamos o método das órbitas e o método do fator integrante. Calculamos as equações de movimento em que surge grande dificuldade no que se refere a sua integrabilidade. Isto se deve ao fato de que, essas equações de movimento serem não-lineares e acopladas. Para sanar essa dificuldades utilizaremos o método das órbitas tentativa apresentado por Rajaraman [5][11], para desacoplar as equações de movimentos, e o método do fator integrante. Obtivemos as órbitas e algumas soluções topológicas, numericamente.

No capítulo 4, apresentamos as conclusões e comentários referentes à esta dissertação.

Estamos utilizando nesse trabalho, o sistema natural de unidades onde a velocidade da luz (c), e a constante de Plank (\hbar), apresentam valores unitários. As coordenadas do espaço-tempo serão representadas pelo quadri-vetor posição $x^\mu \equiv (x^0, x^1, \dots, x^D)$, com D sendo o número de dimensões espaciais. A métrica do espaço-tempo de Minkowski em $(3+1)D$ dimensões será denotado com tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ tal que $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = \dots = -1$, e $\eta_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$.

$\phi \quad \chi$

Capítulo 2

Defeitos Topológicos - Campo Escalar Real

2.1 Conceitos Fundamentais

Em teoria de campos, defeitos topológicos são soluções clássicas das equações de movimento que possuem uma topologia não trivial, que surgem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria. Como é sabido, topologia é um ramo da matemática que estuda o comportamento assintótico das funções. No caso da teoria de campos, estamos interessados como os campos se comportam no infinito, ou melhor, no seu comportamento assintótico, isto é, como eles vão para os estados de vácuos.

A presença da topologia no sistema é assegurada através da introdução de uma corrente contínua, topológica, conservada que não é a corrente Noether, cuja forma depende da dimensão espaço-temporal do modelo em consideração

[4]. No caso mais simples de apenas duas dimensões, o quadri-vetor corrente topológica pode ser escrito na forma usual $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$, onde ϕ é um campo escalar real. Assim, no espaço-temporal bidimensional, um único campo escalar é suficiente para criar situações de grande interesse em física de partículas e campos.

O nosso objetivo é buscar soluções para as equações de movimento, cuja preocupação está voltada para a presença de defeitos topológicos. Este assunto pode ser visto de forma mais detalhada nas referências [5], [6], [7], [8], [9].

A densidade lagrangeana mais simples que descreve a dinâmica de um campo escalar real ϕ é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que especifica a teoria. Observe que a densidade lagrangeana (2.1) é invariante frente a simetria discreta $\phi \rightarrow -\phi$.

As equações de movimento para essa teoria é dada a partir das equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (2.2)$$

que nesse caso adquire a seguinte forma

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (2.3)$$

No caso da teoria ser definida em um espaço de $(1+1)D$ ou seja, $\phi = \phi(x, t)$ a equação de movimento (2.3) fica

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.4)$$

que é uma equação diferencial parcial em segunda ordem. Dependendo da forma do potencial a equação de movimento (2.4) pode ser não-linear.

Nosso objetivo é encontrar soluções para a equação de movimento (2.4). A solução mais simples que podemos ter, será aquela que satisfaz o caso em que as configurações dos campos sejam constantes, isto é

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (2.5)$$

Evidentemente esse tipo de solução nos leva aos extremos do potencial e ϕ_0 é uma solução trivial. Na verdade, o que queremos é encontrar os mínimos do potencial para, assim, interpretar estas soluções constantes que minimizam o potencial como soluções do vácuo. Portanto, nossa exigência é que o potencial apresente mais de um mínimo e seja limitado inferiormente para a energia do sistema ser finita. Por simplicidade consideramos o potencial $V(\phi)$ como função não negativa do campo escalar real ϕ .

No caso de configuração estática $\phi = \phi(x)$ a equação de movimento (2.4) toma a seguinte forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.6)$$

que é uma equação diferencial ordinária em segunda ordem, que para ser resolvida necessita de duas condições de contornos, uma imposta ao campo ϕ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi(\pm) = \pm a \quad (2.7)$$

e a outra as derivadas do campo ϕ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0, \quad (2.8)$$

O problema agora é encontrar suas soluções porém antes, vamos introduzir a topologia no sistema, que nesse caso será feito utilizando o pseudo-tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico, que tem o número de índices igual ao número de dimensões do espaço em que a teoria está sendo estudada.

No caso de $(1 + 1)$ dimensões temos as componentes do tensor $\epsilon^{\mu\nu}$, dado por $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$. A topologia aparece no sistema através da presença de uma corrente conservada, que no caso de $(1 + 1)$ dimensão, pode ser escrita como

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (2.9)$$

que obedece $\partial_\mu J_T^\mu = 0$, o que implica na existência de uma carga Q_T dada por

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \phi(\infty) - \phi(-\infty) \quad (2.10)$$

que é conservada, isto é

$$\frac{dQ_T}{dt} = 0. \quad (2.11)$$

Esta carga Q_T conservada chamada carga topológica só depende das propriedades assintóticas do campo ϕ , e só terá valor diferente de zero se $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$. Evidentemente, para soluções constantes Q_T é nula pois $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$. Assim, soluções constantes que minimizam a energia e que, portanto, identificam o setor de vácuo, identificam ainda o setor de carga topológica nula.

Portanto, é interessante procurar soluções que não sejam constantes e que possibilitem a presença de $Q_T \neq 0$, ou seja, soluções que apresentem comportamento especial tal que $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$.

No entanto, para que soluções desse tipo tenham energia finita é necessário

que o campo tenha comportamento assintótico que leve aos mínimos do potencial. Então, só teremos $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$ se o potencial tiver mais de um mínimo isto porque, se o potencial tiver um mínimo teremos necessariamente $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$, igual ao valor que minimiza o potencial.

2.2 O Método de Bogomol'nyi

O Método de Bogomol'nyi foi desenvolvido na década de 70 com o objetivo de encontrar soluções para as equações de movimento em segunda ordem, a partir das equações de primeira ordem para uma configuração estática de campos. O objetivo desse método consiste em escrever a energia do sistema numa forma quadrática, fechada e mínima.

Para ver isso melhor, vamos escrever o tensor energia momento ($T_{\mu\nu}$) totalmente anti-simétrico para o sistema definido em (2.1), que nesse caso, possui a seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - V(\phi) \right]. \quad (2.12)$$

A componente $T_{00}(x, t)$ do tensor energia momento representa a densidade de energia $\epsilon(x, t)$ da configuração

$$T_{00} = \epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \quad (2.13)$$

Portanto, para configurações de campos estáticas, a densidade de energia (2.13) toma a seguinte forma

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.14)$$

Evidentemente, a energia do sistema para configurações estáticas de campos será

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.15)$$

Observe da equação (2.15) que se ϕ é uniforme (solução constante) então ($d\phi/dx = 0$) assim teremos

$$E = V(\phi) \int_{-\infty}^{\infty} dx. \quad (2.16)$$

A única maneira de termos a energia (2.16) finita será quando $V(\phi) = 0$ ou seja, quando $x \rightarrow \pm\infty$, $V(\phi) = V(\bar{\phi}_i = a) = V(\bar{\phi}_j = -a) = 0$ sendo, ($\bar{\phi}_i = a$) e ($\bar{\phi}_j = -a$) os mínimos do potencial.

Portanto para encontrarmos as soluções da equação de movimento (2.6) vamos escrever a energia (2.15) pelo método de Bogomol'nyi, ou seja numa forma quadrática, fechada e mínima.

Assim Bogomol'nyi em [9], escreveu a energia (2.15) na seguinte forma

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right) dx. \quad (2.17)$$

Como o primeiro termo desta integral não pode ser negativo, então a energia mínima será dada por

$$E_B = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx \quad (2.18)$$

com a condição

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (2.19)$$

Note que a equação (2.19) é de primeira ordem e as soluções de (2.19) são

soluções da equação de movimento (2.6). Para mostrar isto explicitamente, diferencie (2.19) em relação a x e use (2.19) no resultado obtido para chegar a equação de movimento (2.6). Neste caso o método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção de equação diferencial de primeira ordem, permite escrever a energia associada a configuração estática de forma simples, fechada e mínima.

2.3 Defeito do tipo Kink

Os modelos de campos escalares são em gerais sofisticados, quando eles apresentam o fenômeno da quebra espontânea de simetria, que surge a partir das interações de quarta ordem.

Já sabemos que para a existência de soluções topológicas $\phi(x)$, é preciso que o potencial apresente mais de um mínimo e seja limitado inferiormente. Quando estas soluções são obtidas num espaço-tempo de $(1+1)D$ chamamos elas de defeito topológico tipo kink [5, 6]. Esse tipo de defeito é originado a partir de uma simetria discreta ($\phi \rightarrow -\phi$), possui energia finita, suas soluções são estáveis e separa duas regiões do espaço onde o campo $\phi(x)$ assume diferentes pontos de mínimos. Quando introduzimos o kink num espaço de $(3+1)D$ ele passa a representar um outro defeito topológico denominado parede de domínio.

Os defeitos topológicos tipo parede de domínio dividem duas regiões distintas em que o sistema do lado direito da parede não se distingue do sistema do lado esquerdo. As soluções das equações de movimento que representam paredes de domínio não possuem energia finita, mas são soluções com energia finita por unidade de área. Existem aplicações dessas soluções tipo kink, em física da matéria condensada.

Para ver de forma explicita essas soluções tipo kink, vamos considerar a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.20)$$

O potencial para essa teoria é o chamado $\lambda\phi^4$, possuindo a seguinte forma (ver figura 2.1)

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2. \quad (2.21)$$

Este potencial é não negativo, apresenta a simetria ($\phi \rightarrow -\phi$), e possui mínimos em ($\phi^2 = a^2$), (λ) é um parâmetro com dimensão de energia e (a) a -dimensional. Por simplicidade consideramos (λ) e (a) reais e positivos.

A equação de movimento para o modelo (2.20) é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange (2.2) e possui a seguinte forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi. \quad (2.22)$$

Novamente, vamos considerar o caso de configurações de campos estáticos $\phi = \phi(x)$, e com isso a equação de movimento se escreve

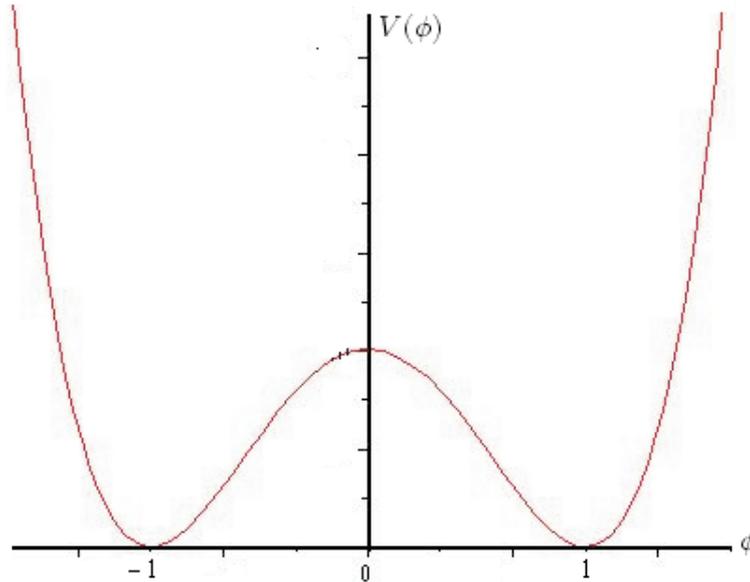
$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2) \phi. \quad (2.23)$$

Usando (2.19) temos a equação de primeira ordem que resolve (2.23) dada por

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp \lambda (\phi^2 - a^2). \quad (2.24)$$

Esta equação é não linear e sua solução é obtida integrando (2.24) ou seja,

$$\int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \mp \int \lambda dx. \quad (2.25)$$

Figura 2.1: Potencial do modelo ϕ^4

Resolvendo a integral acima obtemos

$$\phi_{\pm}(x) = \pm a \tanh[\lambda a(x + x_0)] \quad (2.26)$$

onde x_0 é um ponto qualquer no eixo x . A solução positiva é chamada de kink e a negativa de antikink.

Conforme (2.18), a energia mínima de Bogomol'nyi é dada por

$$E_B = \mp \int_{-\phi(\infty)}^{\phi(\infty)} [\lambda(\phi^2 - a^2)] d\phi, \quad (2.27)$$

ou

$$E_B = \frac{4}{3} \lambda a^3 \quad (2.28)$$

que é realmente finita, tanto para o kink quanto para o antikink. Observe que, quando $(x \rightarrow \pm\infty)$, $(\phi(x) \rightarrow \pm a)$ isto é, $\phi(x)$ vai para os estados de vácuos do potencial.

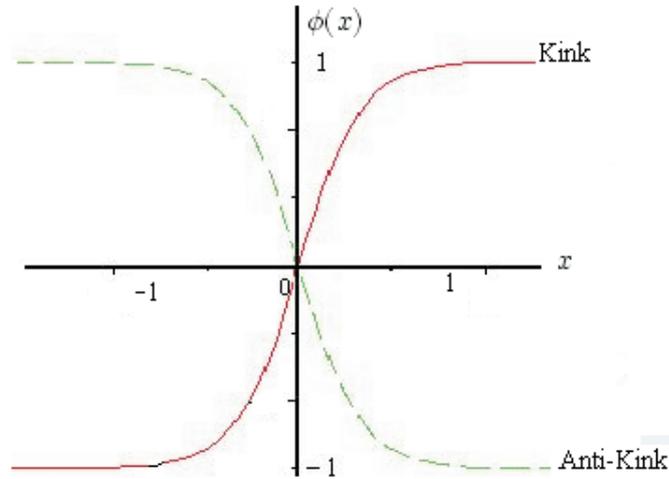


Figura 2.2: Gráfico da Solução Kink e Anti-Kink

2.4 Defeito do tipo Lump

Vamos estudar outro defeito conhecido como lump que apresenta soluções não-topológicas. Este defeito é gerado pelo potencial (ϕ^4) invertido [10]

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.29)$$

Esse potencial não é limitado inferiormente, possuindo uma solução constante dada por $\phi = 0$, que identifica um mínimo local do potencial, com $V(\phi) = 0$. ver Figura 2.2.

A densidade lagrangeana que especifica o defeito tipo lump possui a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.30)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange, podemos escrever a equação de

movimento para configurações estáticas como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi(1 - 2\phi^2). \quad (2.31)$$

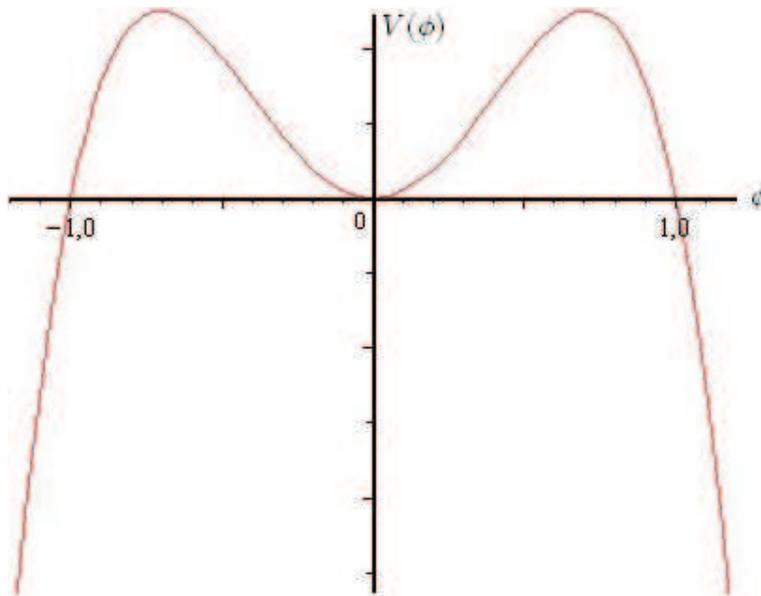


Figura 2.3: Potencial do modelo ϕ^4 invertido

A equação de movimento (2.31) admite as soluções

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \operatorname{sech}(x) \quad (2.32)$$

que são não-topológica, instáveis e conectam o ponto de mínimo local $\phi = 0$ a ele próprio. Estas soluções não-topológicas são conhecidas como lumps e apresentam densidade de energia na forma

$$\epsilon(x) = \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x). \quad (2.33)$$

Na Figura 2.4 mostraremos as soluções tipo Lump e a densidade de energia.

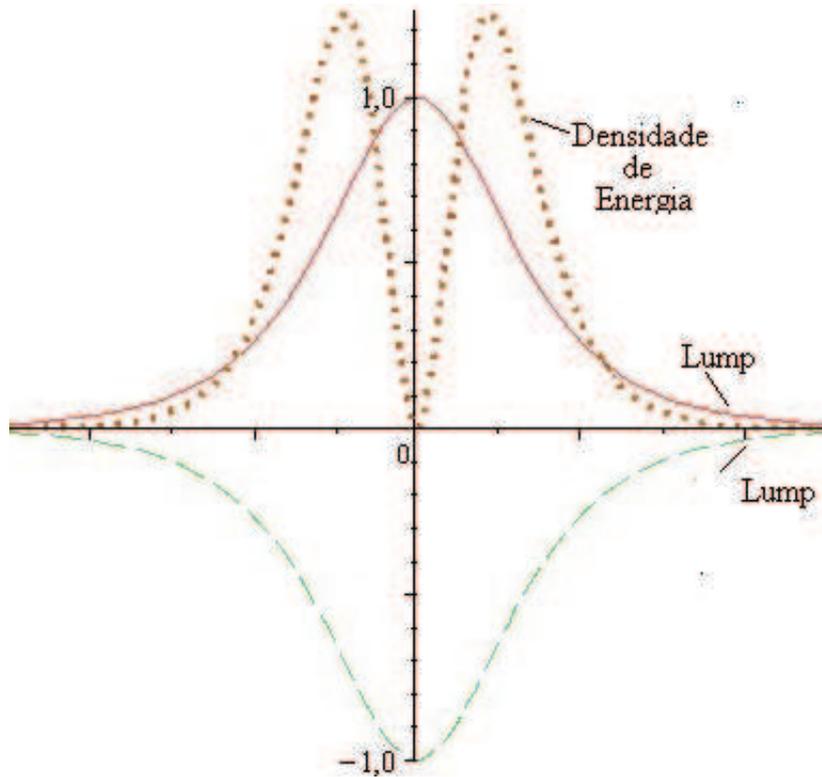


Figura 2.4: Lump e Densidade de Energia

O resultado mostra que a densidade de energia do lump é nula no centro e depois atinge valores máximos. Esse resultado é muito importante por indicar que o defeito tipo lump apresenta uma estrutura interna.

2.5 Soluções BPS

Existe um método alternativo para se investigar a presença de defeitos topológicos. Esse método foi desenvolvido por Bogomol'nyi [9] e com ele

podemos identificar soluções denominadas Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield, ou soluções BPS [9, 18].

A eficiência do método está no reconhecimento de que, para potenciais não-negativos, podemos escrever

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.34)$$

onde a função $W = W(\phi)$ é uma função suave do campo escalar ϕ e $W_\phi = dW/d\phi$. Em termos de $W(\phi)$, a equação de movimento para campos estáticos toma a forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (2.35)$$

que é resolvida pela equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.36)$$

A equação acima como já foi visto é a equação de Bogomolnyi. É fácil verificar que elas resolvem as equações de segunda ordem; para comprovar isso explicitamente façamos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \pm \frac{d}{dx} \left(\frac{dW}{d\phi} \right) = \pm \frac{d^2W}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dW}{d\phi} \frac{d^2W}{d\phi^2},$$

em que na última igualdade utilizamos novamente a equação (2.36)

Para esse modelo podemos escrever a energia para o caso de campos

estáticos em termos do superpotencial $W(\phi)$, como

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Como o primeiro termo desta integral não pode ser negativo, então a energia mínima será dada por

$$E_B = |(W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)])| \equiv |\Delta W|, \quad (2.38)$$

e

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi \quad (2.39)$$

que é a equação de primeira ordem (2.36). Da equação (2.38) observamos que para determinar o valor da energia de qualquer solução só precisamos calcular o superpotencial nos valores assintóticos de $\phi(x)$. Observe que o menor valor da energia se verifica, quando as equações de primeira ordem são satisfeitas. Essa identificação é importante pois mostra que os estados BPS apresentam energia mínima e são linearmente estáveis.

Como exemplo, apliquemos o método de Bogomol'nyi ao modelo ϕ^4 que tem como potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (a^2 - \phi^2)^2 \quad (2.40)$$

Em termos de um superpotencial e sabendo que $W_\phi = \sqrt{2V(\phi)}$, o modelo ϕ^4 se escreve

$$W(\phi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(a^2 \phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right) \quad (2.41)$$

E assim, substituindo (2.41) em (2.39) podemos escrever para este modelo a equação

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a^2 - \phi^2). \quad (2.42)$$

Usando (2.38) e (2.41) a energia do kink se escreve

$$E_B = |W(+a) - W(-a)| = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\lambda}a^3 = \frac{m^3}{3\lambda} \quad (2.43)$$

onde ($m \equiv \sqrt{2\lambda}a$) é a escala de massa do modelo.

Uma característica determinante das soluções BPS é seu caráter topológico. Como vimos, qualquer estado BPS de energia não nula satisfaz $E_B = |\Delta W| = |W(\phi_+) - W(\phi_-)| \neq 0$. Por outro lado, nos modelos da forma $V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2$, a carga topológica pode também ser escrita em termos do superpotencial W_ϕ , pois a corrente pode ser definida usando qualquer função do campo. Em particular, definindo $j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi) = W_\phi \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$, temos que $\rho_T = j_T^0 = dW/dx$ e, então

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_T(x) = W(\bar{\phi}_+) - W(\bar{\phi}_-) = \pm E_B \neq 0. \quad (2.44)$$

Podemos afirmar que, neste tipo de modelo, a carga topológica e a energia das soluções da equação de primeira ordem possuem relação direta. Portanto, soluções que satisfazem o limite de Bogomol'nyi possuem carga topológica não nula e são estáveis, como veremos a seguir.

2.6 Estabilidade Linear

Estudaremos a seguir estabilidade bem específica conhecida como estabilidade linear ou clássica [8]. O que iremos mostrar é que, as soluções da

equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.45)$$

para um espaço de (1+1)D são estáveis. Como já foi visto no caso de campos estáticos, temos que $\phi_s = \phi_s(x)$ e assim a equação (2.45) toma a forma

$$\frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi_s} \quad (2.46)$$

Para analisar a estabilidade de uma solução estática consideramos pequenas perturbações da solução clássica. O fato de tratarmos com pequenas perturbações se traduz na linearização da equação de movimento ao introduzir a solução perturbada.

Admitiremos que a equação de movimento (2.45) suporte uma solução estática ϕ_s mais uma perturbação pequena $\eta(x, t)$ na forma

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t). \quad (2.47)$$

A perturbação considerada é dependente do tempo, já que o nosso interesse é acompanhar sua evolução temporal e comprovar se a solução é estável ou não.

Substituindo (2.47) na equação de movimento (2.45) obtemos

$$\frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi_s + \eta} = 0. \quad (2.48)$$

Para o caso de configuração estática, a equação (2.48) se escreve

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi_s + \eta} = 0. \quad (2.49)$$

Expandindo e série de Taylor ($dV/d\phi$) e considerando apenas potência primeira de η temos

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{dV}{d\phi_s} + \frac{d^2V}{d\phi_s^2}\eta. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.49) resulta

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi_s} + \frac{d^2V}{d\phi_s^2}\eta = 0. \quad (2.51)$$

A equação de movimento no caso estático a partir de (2.45) é

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi_s} = 0, \quad (2.52)$$

que substituindo na equação (2.51) encontramos

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{d^2V}{d\phi_s^2}\eta = 0. \quad (2.53)$$

A equação (2.53) pode ser escrita como

$$\left[-\frac{d^2}{\partial x^2} + \frac{d^2V}{d\phi_s^2} \right] \eta = -\frac{d^2\eta}{dt^2} \quad (2.54)$$

Podemos escrever a solução da equação acima como

$$\eta(x, t) = \rho(x)T(t), \quad (2.55)$$

que substituindo na equação (2.54) obtém-se

$$\frac{1}{\rho(x)} \left[-\frac{d^2}{\partial x^2} + \frac{d^2V}{d\phi_s^2} \right] \rho(x) = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2} \quad (2.56)$$

Igualando cada termo da equação acima a uma constante de desacoplamento

w^2 temos

$$\left[-\frac{d^2}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right] \rho(x) = w^2 \rho(x) \quad (2.57)$$

e

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -w_n^2 T(t) \quad (2.58)$$

Observe que a equação (2.58) é do tipo oscilador harmônico simples cuja solução se escreve

$$T_n(t) = T_0 e^{\pm i w_n t}, \quad (2.59)$$

ou

$$T_n(t) = T_0 \cos(w_n t). \quad (2.60)$$

Observe de (2.58) que se ($w_n^2 < 0$) significa que (w_n) é imaginário, neste caso a solução (2.60) ficaria do tipo ($T_n(t) = T_0 \cos(\text{imaginário}) = T_0 \cosh(w_n t)$) que não é mais limitada, e cresce indefinidamente ou seja, ($i w_n$) diverge para tempo grande e com isso a solução ϕ_s seria instável. Então para garantir a estabilidade da solução ($\phi_s(x) = \text{estável}$) não podemos ter ($w_n^2 < 0$), dessa forma a estabilidade será garantida sempre que ($w_n^2 \geq 0$), com ($w_n^2 = 0$) denominado de *modo zero*.

Analisaremos agora o comportamento de (w_n) a partir da equação (2.57), que descreve o comportamento da parte espacial de ($\rho(x)$). Então se fizermos

$$\mathcal{U}(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s(x)}. \quad (2.61)$$

em (2.57) encontramos

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{U}(x) \right] \rho(x) = w^2 \rho(x) \quad (2.62)$$

e se chamarmos

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{U}(x), \quad (2.63)$$

a equação (2.62) se escreve

$$\hat{H}\rho_n(x) = w_n^2\rho_n(x) \quad (2.64)$$

Observe que a equação (2.64) é do tipo "Schroedinger" em que $\hat{H} = \hat{H}(\phi_s)$ é um operador que foi definido em (2.63) com w^2 sendo seus autos-valores e $\rho_n(x)$ suas autos-funções.

Por outro lado veja que, como procuramos soluções estáveis, então a perturbação ($\eta(x, t) = \rho(x) \cos(w_n t)$) não pode crescer indefinidamente e, portanto os valores negativos de (w_n) não são aceitáveis pois $\phi_s(x)$ seria instável. Desta restrição temos que o problema da estabilidade linear das soluções estáticas em sistema de um campo escalar real, se resume à análise do problema mecânico quântico definido pelo operador \hat{H} da seguinte forma

"se \hat{H} é um operador não negativo, ou seja, seus autos valores são todos maiores ou iguais a zero, então a solução $\phi_{cl} = \phi_s$ resulta linearmente estável".

2.7 Estabilidade das soluções BPS

Vamos analisar a estabilidade das soluções que minimizam a energia do sistema, ou seja, que identificam o limite de Bogomol'nyi.

No caso dos modelos limitado inferiormente que admitem a forma,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.65)$$

as equações de movimento são para configurações de campos estáticas

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (2.66)$$

que é resolvida pela equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.67)$$

Comparando a equação de movimento (2.66) com a equação (2.46) temos

$$\frac{dV}{d\phi_s} = W_{\phi\phi} W_\phi \quad (2.68)$$

que derivando novamente em função de (ϕ) encontramos

$$\frac{d^2V}{d\phi_s^2} = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}. \quad (2.69)$$

Igualando as equações (2.69) com (2.61) produzimos

$$\mathcal{U}(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}. \quad (2.70)$$

Agora substituindo (2.70) em (2.63) o operador \hat{H} toma a forma

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + (W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}) \Big|_{\phi_s(x)}. \quad (2.71)$$

Este operador apresenta a bem conhecida estrutura dos hamiltonianos fatoráveis da mecânica quântica supersimétrica [13][14], que pode ser fatorado como um produto de dois operadores de criação $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{A}}^\dagger$ na seguinte forma

$$\hat{H}(\phi_s) = \hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}}, \quad (2.72)$$

que são definidos como

$$\hat{\mathcal{A}} = -\frac{d}{dx} \pm (W_{\phi\phi}) \Big|_{\phi_s(x)} \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{A}}^\dagger = -\frac{d}{dx} \pm (W_{\phi\phi}) \Big|_{\phi_s(x)} \quad (2.73)$$

onde $\hat{\mathcal{A}}^\dagger$ é o adjunto de $\hat{\mathcal{A}}$ e os sinais (+) e (-) correspondem com os sinais opostos (-) e (+) respectivamente na equação de primeira ordem (2.67).

Portanto, o fato de \hat{H} ser um produto de dois operadores mutuamente adjuntos assegura automaticamente sua positividade, e isto provaremos a seguir. Substituindo (2.72) em (2.64) temos

$$(\hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}})\rho_n(x) = w_n^2 \rho_n(x). \quad (2.74)$$

Sendo $\rho_n(x)$ as auto-funções associadas do operador \hat{H} para diferentes autovalores, então são elas ortogonais e podem ser normalizadas, pois estamos considerando o espaço das funções contínuas e quadrado integrável no intervalo de $(-\infty)$ a $(+\infty)$. Com isso, podemos definir

$$\delta_{nm} = \langle \rho_n | \rho_m \rangle. \quad (2.75)$$

e o operador identidade

$$I = \sum_m |\rho_m \rangle \langle \rho_m|. \quad (2.76)$$

Calculamos os valores esperados do operador $\hat{H}\phi_s = \hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}}$ num auto-estado $\rho_n(x)$, partir da equação (2.74)

$$\langle \rho_n | \hat{H} | \rho_n \rangle = \langle \rho_n | w_n^2 | \rho_n \rangle. \quad (2.77)$$

Introduzindo o operador identidade (2.76) na equação (2.77) encontramos

$$\langle \rho_n | \rho_n \rangle w_n^2 = \langle \rho_n | \hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}} | \rho_n \rangle, \quad (2.78)$$

logo

$$\delta_{nn} w_n^2 = \langle \rho_n | \hat{\mathcal{A}}^\dagger I \hat{\mathcal{A}} | \rho_n \rangle, \quad (2.79)$$

e com isso obtemos

$$\begin{aligned} w_n^2 &= \sum_m \langle \rho_n | \hat{\mathcal{A}}^\dagger | \rho_m \rangle \langle \rho_m | \hat{\mathcal{A}} | \rho_n \rangle \\ &= \sum_m \left(\langle \rho_m | \hat{\mathcal{A}}^\dagger | \rho_n \rangle \right)^* \langle \rho_n | \hat{\mathcal{A}} | \rho_m \rangle \\ &= \sum_m \left| \langle \rho_n | \hat{\mathcal{A}} | \rho_m \rangle \right|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

ou seja ($w_n^2 \geq 0$). O resultado obtido mostra que para qualquer auto estado $|\rho_n\rangle$ do operador (\hat{H}) o seu auto valor correspondente (w_n^2) sempre será maior ou igual a zero. Logo concluimos que, sistemas de um campo escalar real descrito por potenciais limitados inferiormente, admitem soluções estáticas que minimizam a energia e são linearmente estáveis (estados BPS).

Calcularemos o auto-estado correspondente ao auto valor ($\omega_0 = 0$), designado de *modo zero*. Então

$$(\hat{\mathcal{A}}^\dagger \hat{\mathcal{A}}) \rho_0(x) = 0 \rho_0(x) \Rightarrow \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{U}(x) \right] \rho_0(x) = 0 \quad (2.81)$$

Todavia derivando em relação a x a equação de movimento em segunda ordem (2.46) obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{dV_\phi}{d\phi} \left(\frac{d\phi}{dx} \right), \quad (2.82)$$

e assim teremos

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2} \right] \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{U}(x) \right] \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0. \quad (2.83)$$

E, finalmente comparando (2.83) com (2.81), observamos que o *modo zero* da solução $\rho_0(x)$ para um campo escalar real é dado por

$$\rho_0(x) = \frac{d\phi}{dx}. \quad (2.84)$$

Onde o modo zero representa o auto-estado correspondente ao auto-valor $w_0 = 0$.

Capítulo 3

Modelos Com dois Campos

Escalares Reais

3.1 Conceitos Fundamentais

Contrário ao que acontece nos sistemas com um único campo escalar, nos sistemas com dois campos escalares acoplados aparece como uma questão central, o problema da integrabilidade das equações de movimento. Isto é devido à dificuldade de se tratar com equações diferenciais de segunda ordem não lineares e acopladas [15, 16]. Felizmente, de maneira análoga ao caso de modelos com um único campo, esta dificuldade pode ser bastante reduzida quando tratamos uma classe específica de sistemas com dois campos. Para esses sistemas, as equações de movimento acopladas são resolvidas por equações diferenciais de primeira ordem, também acopladas, cujas soluções são configurações estáveis (tipo BPS), que minimizam a energia do sistema

[17]. Mesmo assim, temos ainda dificuldades para desacoplar as equações de movimentos.

Em meados de 1970 Rajaraman [5] desenvolveu um método que veio a contribuir bastante na obtenção das soluções para as equações de movimento em segunda ordem para alguns modelos de dois campos, conhecido como método das órbitas tentativas que abordaremos com mais detalhes na seção (3.4).

3.2 Soluções BPS

De maneira análoga ao que foi feito com um único campo, iremos aplicar de forma mais geral o método de Bogomol'nyi para o caso de dois campos escalares reais acoplados ϕ e χ , submetido porém a uma classe especial de potencial $V(\phi, \chi)$ positivo definido que especifica o modelo dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(W_\phi)^2 + \left(\frac{1}{2}W_\chi\right)^2. \quad (3.1)$$

Evidentemente para um sistema desse tipo a densidade lagrangeana possui a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi). \quad (3.2)$$

As equações de movimento para os campos ϕ e χ são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \chi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} &= 0, \end{aligned}$$

são:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial^\mu \phi + W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi} &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \chi + W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Num espaço tempo de (1+1)D as equações de movimento acima possui a seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

ou em termo do potencial $V(\phi, \chi)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \chi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Observe que este sistema de equações diferenciais acopladas em segunda ordem são em gerais não lineares, devido à forma do potencial.

Para o caso de configurações estáticas de campos, o sistema de equações acima se reduzem as seguintes equações

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi} \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi} \quad (3.7)$$

ou

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi} \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi}. \quad (3.9)$$

De maneira análoga ao que foi feito para o caso de um único campo, as soluções dependentes do tempo para o sistema de dois campos podem ser obtidas aplicando um "boost" de Lorents $x \rightarrow \gamma(x - vt)$, com $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

As equações de movimentos (3.6) e (3.7), são resolvidas pelas equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi, \quad \frac{d\chi}{dx} = W_\chi. \quad (3.10)$$

ou seja, da mesma forma que nos modelos com um campo, as soluções de (3.10) são também solução de (3.6) e (3.7). Consequentemente estas soluções identificam o limite de energia mínima ou energia de Bogomol'nyi E_B , e seu valor só depende da estrutura topológica das soluções. Para ver isso melhor, escreveremos de forma explícita a energia do sistema para configuração de campos estáticas

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right]. \quad (3.11)$$

Substituindo o potencial (3.1) em (3.11) obtemos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + (W_\phi)^2 + (W_\chi)^2 \right]. \quad (3.12)$$

Utilizando o método de Bogomol'nyi, a equação (3.12) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2dx \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como cada termo da primeira integral (3.13) é positivo definido, então a

energia mínima E_B para configuração estática será satisfeita quando

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi &= 0 \\ \frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi &= 0,\end{aligned}\tag{3.14}$$

e com isso E_B será dado por

$$\begin{aligned}E_B &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] \\ &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{dW}{dx} \right] \\ &= \Delta W(\phi, \chi),\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde finalmente escrevemos

$$E_B \equiv |\Delta W(\phi, \chi)| = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \tag{3.16}$$

Observe que o valor da energia mínima obtida em (3.16) não depende das características locais das soluções, mas dos seus valores assintóticos, ou seja, dos zeros de $V(\phi, \chi)$. Então estas configurações de campos são denominados, estados BPS ou E_{BPS}

$$E_{BPS} \equiv |\Delta W(\phi, \chi)|. \tag{3.17}$$

Evidentemente, para resolver as equações de movimentos (3.14), precisamos impor as condições de contornos aos campos e as derivadas. Isto será feito para assegurar que tenhamos um sistema com energia finita. Assim

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi(\pm) = a_{1,2}, \tag{3.18}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi(x) \equiv \chi(\pm) = b_{1,2}, \quad (3.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0, \quad (3.20)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\chi}{dx} \right) = 0, \quad (3.21)$$

onde $v_1 = (a_1, b_1)$, e $v_2 = (a_2, b_2)$ são os pontos de mínimos do potencial $V(\phi, \chi)$.

3.3 O Modelo BNRT

Iremos agora procurar soluções topológicas do tipo BPS focalizando nossa atenção no modelo BNRT [21], que tem como super-potencial

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2. \quad (3.22)$$

O potencial advindo do superpotencial acima é

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 + r(\phi^2 - 1)\chi^2 + 2r^2\chi^2\phi^2 + \frac{1}{2}r^2\chi^4. \quad (3.23)$$

Para esse modelo, podemos escrever as equações de primeira ordem (3.10) como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (3.24)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\phi\chi. \quad (3.25)$$

Observe que o sistema de equações diferenciais acima é não linear e suas

soluções topológicas não-triviais são obtidas conectando dois estados de vácuo distintos. Cada par de vácuo conectados por essas soluções das equações de movimento em primeira ordem dadas em (3.10) constitui um setor topológico. A energia BPS (3.17) das soluções das equações de movimentos em primeira ordem depende apenas da diferença de potencial calculado nos valores assintóticos dessas soluções, isto é, nos vácuos. Isto mostra que cada setor topológico possui sua própria energia.

Então os estados de vácuos para essa teoria é definido como

$$(\bar{\phi} = \pm 1, \bar{\chi} = 0), \quad \left(\bar{\phi} = 0, \bar{\chi} = \pm \sqrt{\frac{1}{r}} \right) \quad (3.26)$$

sendo ($r > 0$). E no caso da constante (r) ser ($r < 0$) temos

$$(\bar{\phi} = \pm 1, \bar{\chi} = 0). \quad (3.27)$$

Portanto, para as configurações de vácuo acima podemos escrever os setores topológicos com sua respectivas energias para ($r > 0$) como:

- 1°) Um setor BPS, $\rightarrow (\pm 1, 0) \rightarrow E_{BPS} = 4$,
- 2°) Quatro setores BPS, $\rightarrow (\pm 1, \pm 1/\sqrt{r}) \rightarrow E_{BPS} = 2$
- 3°) Um setor não BPS, $\rightarrow (0, \pm 1/\sqrt{r}) \rightarrow E_{BPS} = 0$.

Um fato importante observar é que, o setor $(0, \pm 1/\sqrt{r})$ não possui defeitos topológicos do tipo BPS conectando os vácuos, visto que a energia de Bogomol'nyi para esse setor é nula, entretanto existem soluções não BPS [21]. As soluções para o modelo BNRT que iremos encontrar serão nos setores em que $E_{BPS} \neq 0$. Consequentemente a obtenção das soluções tipo defeitos nos setores topológicos serão feitas através do conhecido *método das órbitas*.

3.4 Método das Órbitas

Como já foi abordado na introdução, o método das órbitas foi desenvolvido por Rajaraman [5] com o objetivo de desacoplar as equações de movimentos para alguns modelos de dois campos, e conseqüentemente encontrar as suas soluções.

Tal método tem como objetivo principal encontrar uma curva chamada *órbita tentativa* no espaço das configurações dos campos, observando as condições de contorno requerida pelo problema, e sendo compatível com as equações de movimento. Essa órbita permite desacoplar as equações com o objetivo de encontrar suas soluções.

Como todo método propostos para resolver equações diferenciais possui suas limitações aqui também encontramos algumas, e uma delas foi apontado pelo próprio autor as quais estão diretamente associadas ao fato de que as equações de movimento são de segunda ordem, dificultando assim a verificação se a órbita tentativa é compatível ou não.

Algumas dificuldades encontradas ao trabalhar com as equações de segunda ordem são contornadas[11], quando utilizamos esse métodos para investigar soluções topológicas nos setores BPS das equações de primeira ordem

Nas seções seguintes mostraremos através de vários exemplos que este método torna-se eficiente quando o aplicamos em sistemas em que as equações de movimentos de segunda ordem são resolvidas a partir das equações em primeira ordem. Mostraremos também que em algumas situações é possível encontrar um fator integrante para as equações de primeira ordem[12], o que nos possibilita obter todas as soluções BPS do sistema.

Para utilizar o método das órbitas precisamos seguir alguns passos são eles:

1°) Determinamos os mínimos do potencial $V(\phi, \chi)$, os quais são os pontos críticos do super potencial $W(\phi, \chi)$ ou seja ($W_\phi = W_\chi = 0$), digamos (a_1, b_1) , (a_2, b_2) ;

2°) Os pares de mínimos selecionados (a_i, b_i) , (a_j, b_j) formam um setor topológico. No entanto seleciona-se um par de mínimos que possua energia de Bogomol'nyi diferente de zero, ou seja, $\Delta W_{ij} \equiv |W(a_i, b_i) - W(a_j, b_j)| \neq 0$, o que define um setor BPS.

3°) A órbita escolhida $F(\phi, \chi) = 0$ tem que ser coerente com os mínimos escolhidos, ou seja $\{F(a_i, b_i) = F(a_j, b_j) = 0\}$.

4°) Testa-se a compatibilidade da órbita com as equações de primeira ordem, por diferenciação com respeito a x .

$$\frac{dF}{dx} \equiv F_\phi \frac{d\phi}{dx} + F_\chi \frac{d\chi}{dx} = 0 \quad (3.28)$$

do qual se obtém

$$G(\phi, \chi) \equiv F_\phi W_\phi + F_\chi W_\chi = 0. \quad (3.29)$$

Portanto, $F(\phi, \chi) = 0$ é uma órbita se todo par (ϕ, χ) que a resolve, também resolve $G(\phi, \chi) = 0$. Tendo uma órbita podemos usá-la para desacoplar e, com isso, resolver as equações de primeira ordem. De maneira geral dizemos que uma órbita é boa, quando ela passa pelas equações de primeira ordem. Assim, vemos que uma curva é uma órbita quando ela resolve as equações de primeira ordem consistentemente.

Consideremos em primeiro lugar o caso em que $r < 0$, o qual representa o potencial $V(\phi, \chi)$ cujos mínimos são dados por $v_{1,2} = (\mp 1, 0)$, que representam o setor topológico BPS com energia $|\Delta W| = 4/3$. Para esse setor uma órbita corresponde a escolha de $\chi = 0$ conectando os vácuos ± 1 . Ao

aplicarmos essa escolha a equação de movimento (3.24) e (3.25) temos

$$\frac{d\phi}{dx} = 1 - \phi^2, \quad (3.30)$$

cujo par de soluções é

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \pm \tanh(x) \\ \chi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por outro lado, podemos escolher outra órbita tentativa que conecta os mínimos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ na forma

$$r\chi^2 = \alpha(1 - \phi^2). \quad (3.32)$$

Diferenciando com relação a x ambos os lados da equação (3.32) e substituindo as equações de primeira ordem (3.24) e (3.25) obtém-se a relação: $\alpha = 1 - 2r$. Agora substituindo a órbita (3.32) na equação (3.24) obtemos

$$\frac{d\phi}{(1 - \phi^2)} = (2r)dx, \quad (3.33)$$

que integrando fornece a solução para o campo ϕ dado por

$$\phi(x) = \pm \tanh(2rx). \quad (3.34)$$

E, substituindo (3.34) na órbita (3.32) encontramos o valor para o campo χ dado por

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{(1 - 2r)}{r}} \operatorname{sech}(2rx), \quad (3.35)$$

onde para que a solução acima seja real temos que ter: $0 < r < 1/2$.

Por outro lado, podemos utilizar a órbita

$$\phi + r\chi^2 = 1 \quad (3.36)$$

que conecta os mínimos $(1, 0)$ e $(0, \pm 1/\sqrt{r})$. Diferenciando com relação a x ambos os lados da equação (3.36) e substituindo as equações de primeira ordem (3.24) e (3.25) obtém-se a relação $r = 1/4$. Agora, substituindo a órbita (3.36) na equação (3.24) obtemos

$$\frac{d\phi}{(1-\phi)\phi} = dx, \quad (3.37)$$

que integrando fornece a solução para o campo ϕ

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{x}{2} \right) \right]. \quad (3.38)$$

E, substituindo (3.38) na órbita (3.36), obtemos o valor para o campo χ

$$\chi(x) = \pm \sqrt{2 \left(1 - \tanh \left(\frac{x}{2} \right) \right)}. \quad (3.39)$$

3.5 Fator Integrante

Equação diferencial é uma ferramenta matemática utilizada em quase todos os campos da física. Existem vários métodos bem conhecidos para resolver equações diferenciais. Quando tratamos com equações diferenciais

de primeira ordem, e se ela pode ser escrita na forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

dizemos que a equação é *separável*, e sua solução é obtida por integração direta. Porém, uma equação da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (3.40)$$

pode ser integrada diretamente, se o lado esquerdo da equação corresponde á diferencial total dv de alguma função $v(x, y)$, com

$$M(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad N(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3.41)$$

Observe que podemos integrar a equação acima para obter $v(x, y) = C$, sendo C uma constante dependente das condições de contorno. Equação desse tipo dizemos ser *exata*.

Uma condição necessária e suficiente para que a equação (3.40) seja exata é que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3.42)$$

Existem vários casos em que a equação (3.40) pode não ser exata, porém, é possível mostrar que, para equações de primeira ordem, sempre existe uma função $q(x, y)$, chamado de *fator integrante*, que possibilita escrever a equação *exata* na forma

$$q(x, y)M(x, y)dx + q(x, y)N(x, y)dy = 0,$$

com a condição

$$\frac{\partial(qN)}{\partial x} = \frac{\partial(qM)}{\partial y}. \quad (3.43)$$

ou

$$q \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial q}{\partial x} = q \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (3.44)$$

Nota-se que o fato de sempre existir um fator integrante não implica dizer que exista um método geral para encontrá-lo, isto é, cada caso deverá ser analisado de forma particular.

Como exemplo considere o modelo BNRT cujas equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2) \quad (3.45)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi = \pm(-2r\phi\chi). \quad (3.46)$$

Agora veja que podemos escrever a relação

$$\frac{d\phi}{d\chi} = -\frac{(1 - \phi^2 - r\chi^2)}{2r\phi\chi} = -\frac{M}{N}, \quad (3.47)$$

onde

$$M(\phi, \chi) = (1 - \phi^2 - r\chi^2) \text{ e } N(\phi, \chi) = 2r\phi\chi. \quad (3.48)$$

Então, para o modelo considerado a equação (3.41) se torna

$$\frac{\partial v}{\partial \chi} = qM(\phi, \chi) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial \phi} = qN(\phi, \chi) \quad (3.49)$$

que integrando fornece a solução $v(\phi, \chi) = C$.

Diferenciando a solução $v(\phi, \chi) = C$ e substituindo (3.41), encontramos

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial v}{\partial \chi} d\chi = 0 \\ qM d\phi + qN d\chi &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para termos a equação diferencial (3.50) exata exigimos que

$$\frac{\partial(qN)}{\partial \chi} = \frac{\partial(qM)}{\partial \phi}. \quad (3.51)$$

ou seja,

$$q \frac{\partial N}{\partial \chi} + N \frac{\partial q}{\partial \chi} = q \frac{\partial M}{\partial \phi} + M \frac{\partial q}{\partial \phi}. \quad (3.52)$$

Observe que se o fator integrante q depender somente do campo χ então $q = q(\chi)$, e com isso a equação (3.52) fica

$$q \frac{\partial N}{\partial \chi} + N \frac{\partial q}{\partial \chi} = q \frac{\partial M}{\partial \phi}. \quad (3.53)$$

Resolvendo as derivadas acima e usando (3.48) encontramos

$$q(r+1) = -r\chi \frac{dq}{d\chi} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\chi}{\chi}, \quad (3.54)$$

onde $\gamma = r/r+1$. Evidentemente, calculando a integral em (3.54) temos o fator integrante dado por

$$q(\chi) = C\chi^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.55)$$

no qual C é uma constante de integração.

Substituindo (3.48) e (3.55) nas equações (3.49) encontramos

$$\frac{\partial v}{\partial \chi} = C\chi^{-\frac{1}{\gamma}}(1 - \phi^2 - r\chi^2) \quad (3.56)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = C\chi^{-\frac{1}{r}}(2r\phi\chi). \quad (3.57)$$

Integrando a equação (3.56) encontramos

$$v(\phi, \chi) = rC\chi^{-\frac{1}{r}}\phi^2 - rC\chi^{-\frac{1}{r}} - C\frac{r^2}{2r-1}\chi^{2-\frac{1}{r}} + f(\phi). \quad (3.58)$$

Portanto, derivando (3.58) em relação a ϕ obtemos (3.47), logo $f(\phi) = 0$.

E com isso encontramos

$$v(\phi, \chi) = -rC(1 - \phi^2)\chi^{-\frac{1}{r}} - r^2C\frac{\chi^{-\frac{1}{r}+2}}{2r-1}. \quad (3.59)$$

De onde fazendo $v(\phi, \chi) = cte$ temos todas as órbitas dada por:

$$1 - \phi^2 + \frac{r}{2r-1}\chi^2 = D\chi^{\frac{1}{r}}, \quad (3.60)$$

onde D é uma constante.

Particularmente, para $D = 0$ obtemos as órbitas:

$$r\chi^2 = \pm(1 - 2r)(1 - \phi^2), \quad (3.61)$$

e para $D = r^2$ com $r = 1/4$, obtemos as órbitas:

$$r\chi^2 = \pm(1 \pm \phi). \quad (3.62)$$

3.6 Família de Modelos

Nesta seção, apresentaremos, de forma resumida, uma generalização para o modelo BNRT. O que iremos mostrar são as soluções analítica para as equações de movimento para o caso $n = 1$, soluções numéricas para o caso $n = 3$, e no caso $n = 2$ não há soluções para as equações de movimento.

De forma geral, o potencial para esse modelo possui a seguinte forma

$$V_n(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (3.63)$$

e, conseqüentemente, o superpotencial $W(\phi, \chi)$ se escreve

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^n. \quad (3.64)$$

Para esse modelo, as equações de movimento fornece

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^n), \quad (3.65)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm(-n r \phi \chi^{n-1}). \quad (3.66)$$

Observe das equações de movimentos (3.65) e (3.66) que:

1°) Se $n = 2$, reproduzimos o modelo BNRT padrão já estudado nas seções anteriores.

2°) Se $n = 1$, as equações de movimento (3.65) e (3.66) produz

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi), \quad (3.67)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm(-r\phi). \quad (3.68)$$

Para esse caso, os estado de vácuo é representado por

$$\bar{\phi} = 0, \quad \bar{\chi} = \frac{1}{r}. \quad (3.69)$$

Portanto, não é interessante, pois não possui nenhum setor topológico.

3°) Se $n = 3$, as equações de movimento (3.65) e (3.66) fornece

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^3), \quad (3.70)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm(-3r\phi\chi^2). \quad (3.71)$$

Para esse caso, os estados de vácuo são representado por

$$\bar{\phi} = 0, \quad \bar{\chi} = \left(\frac{1}{r}\right)^3. \quad (3.72)$$

e

$$\bar{\chi} = 0, \quad \bar{\phi} = \pm 1, \quad (3.73)$$

onde neste caso temos três setores topológicos. O fator integrante que deixa as equações diferenciais (3.45) e (3.46) exatas é

$$q(\chi) = C \chi^{1-n} e^{-\frac{2}{nr(2-n)}\chi^{2-n}}, \quad (3.74)$$

onde C é uma constante e $n \neq 2$.

As equações (3.48) para esse caso fornece

$$M(\phi, \chi) = (1 - \phi^2 - r\chi^n) \text{ e, } N(\phi, \chi) = nr\phi\chi^{n-1}. \quad (3.75)$$

Substituindo (3.74) e (3.75) nas equações (3.49), encontramos

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = C \chi^{1-n} e^{-\frac{2}{nr(2-n)}\chi^{2-n}} (1 - \phi^2 - r\chi^n), \quad (3.76)$$

que integrando obtemos

$$v(\phi, \chi) = \int C \chi^{1-n} e^{-\frac{2}{nr(2-n)}\chi^{2-n}} (nr \phi \chi^{n-1}) d\chi + f(\phi), \quad (3.77)$$

com $f(\phi) = 0$. Resolvendo as integrais acima, encontramos

$$v(\phi, \chi) = -C \frac{nr}{2} e^{-\frac{2}{nr(2-n)}\chi^{2-n}} (1 - \phi^2) - C r \int \chi e^{-\frac{2}{nr(2-n)}\chi^{2-n}} d\chi, \quad (3.78)$$

Estudaremos a seguir alguns valores de n que satisfazem a equação acima:

1°) $n = 1$ nesse caso, a última integral possui solução analítica e, com isso, a equação (3.78) produz

$$v(\phi, \chi) = -C \frac{r}{2} e^{-\frac{2}{r}\chi} (1 - \phi^2) + \frac{C r^2}{4} (r + 2\chi) e^{-\frac{2}{r}\chi} = D, \quad (3.79)$$

onde D é uma constante. Escrevemos de forma geral a órbita que desacopla as equações de movimento (3.67) e (3.68) como

$$\phi^2 + r \chi = 1 - \frac{r^2}{2} + \frac{2}{r} D e^{-\frac{2}{r}\chi}. \quad (3.80)$$

No caso de $D = 0$, a órbita (3.80) toma a forma

$$r \chi = 1 - \frac{r^2}{2} - \phi^2, \quad (3.81)$$

que substituindo na equação de movimento (3.67) e (3.68) fornece

$$\phi(x) = \pm \frac{r^2}{2} x \quad (3.82)$$

e,

$$\chi(x) = \mp \frac{r^3}{4} x^2. \quad (3.83)$$

Note que as soluções acima não são topológicas pois elas não conectam dois estados de vácuo.

2°) $n = 2$ trata-se do modelo BNRT já estudado anteriormente.

3°) $n = 3$ neste caso a equação (3.78) resulta nas órbitas

$$\phi^2 - \frac{2}{9r} \left(\frac{1}{3}\chi + \frac{1}{2}r\chi^2 \right) = 1 + \frac{4}{27r} e^{-\frac{2}{3r}\chi^{-1}} E_i \left(1, -\frac{2}{3r}\chi^{-1} \right) + C e^{-\frac{2}{3r}\chi^{-1}}, \quad (3.84)$$

onde

$$E_i(a, Z) = Z^{(a-1)} \Gamma(1-a, Z), \quad a=\text{constante}. \quad (3.85)$$

A figura (3.1) representa o comportamento das órbitas fornecida pela equação (3.84) que conectam os setores topológicos.

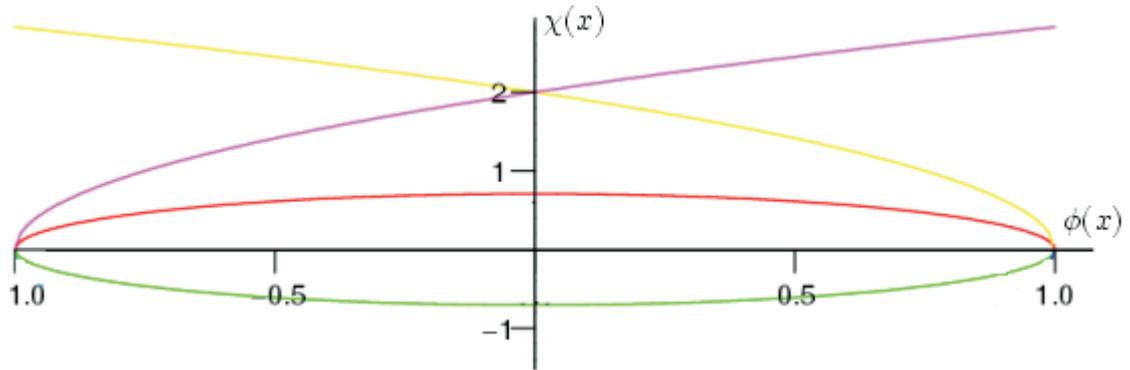
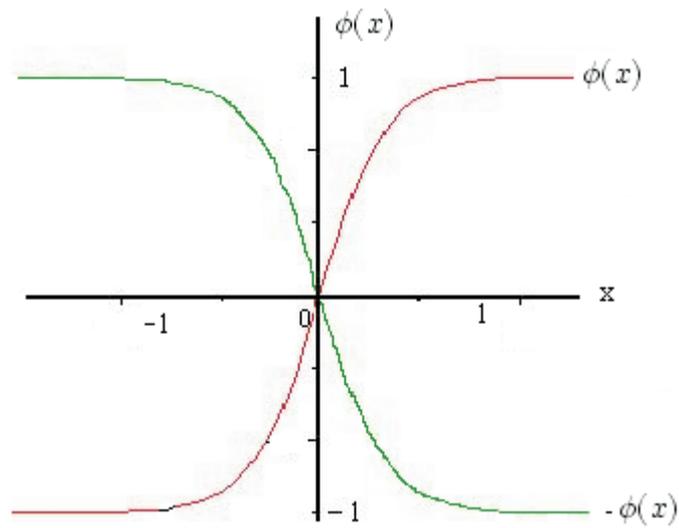
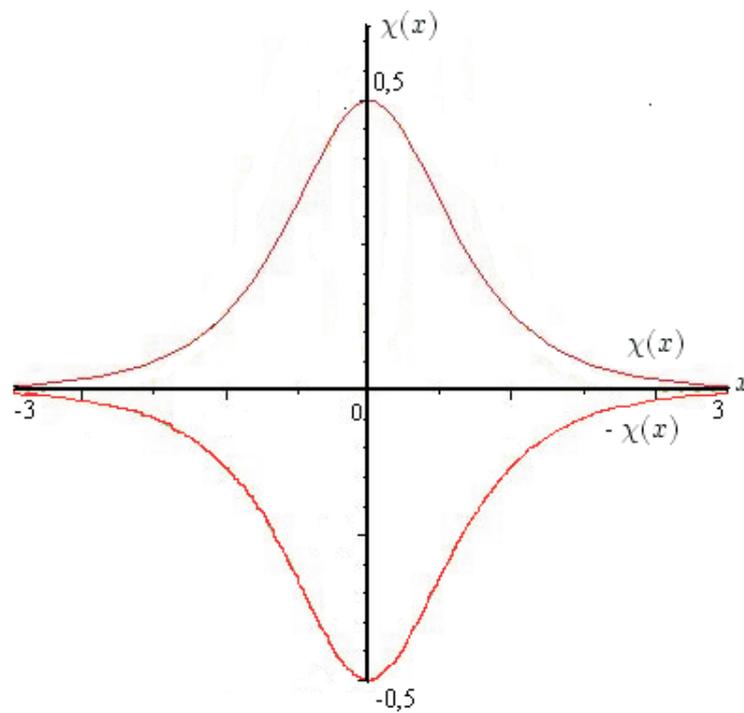


Figura 3.1: Comportamento das órbitas (3.84)

Os gráficos seguintes são as soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ para os setores topológicos que conectam os mínimos $(-1, 0)$ com $(1, 0)$ e $(0, (1/r)^{1/3})$ com $(1, 0)$.

Figura 3.2: Gráfico da Solução $\phi(x)$ para $r = 1/27$ Figura 3.3: Gráfico da Solução $\chi(x)$ para $r = 1/27$

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Uma parte dos estudos aqui realizados são de revisões de atividades já desenvolvidas. Algumas são antigas, realizadas por pesquisadores de outros grupos e outras, mais recentes, divulgadas em trabalhos desenvolvidos pelo nosso grupo.

Nosso objetivo fundamental foi o de estabelecer o problema de maneira clara e direta. Os exemplos estudados foram introduzidos tanto para ilustrar os conceitos básicos envolvidos no problema como para estabelecer novas possibilidades de estudos.

Nesta dissertação investigamos diversos modelos descritos por um ou dois campos escalares. A principal investigação consiste em procurar por estados BPS. Isto é, por soluções topológicas que resolvam as equações de primeira ordem. Estas soluções minimizam a energia de Bogomol'nyi, que é dada em termos do superpotencial, e do valor assintótico das configurações do campo que resolvem as equações de movimento.

Para o caso de teorias de campo envolvendo dois ou mais campos escalares, o problema matemático relacionado à integrabilidade das equações

de movimento é muito mais difícil do que o caso de um único campo, por se tratar com equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Por outro lado, essas teorias apresentam estruturas de vácuo muito ricas, o que possibilita a existência de vários setores topológicos no espaço de configurações.

O ponto crucial do nosso trabalho se refere ao capítulo 3, quando apresentamos um estudo sobre uma nova família de modelos que envolve dois campos escalares e contém o modelo BNRT como um de seus membros. Encontramos as soluções numéricas para o campo $\chi(x)$ e $\phi(x)$ para algum setor topológico dessa nova família. Acreditamos que esses resultados são de suma importância pois eles podem proporcionar novas direções de estudo em teorias de campos.

Apêndice A

Notação e Sistema de Unidades

Para desenvolver esse estudo, trabalharemos no sistema natural de unidades;

$$c = 1, \hbar = 1 \tag{A.1}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, \hbar é a constante de Plank. Destas constantes podemos relacionar as seguintes dimensões

$$\hbar = 1 \Rightarrow [t] = [E]^{-1} \tag{A.2}$$

$$c = 1 \Rightarrow [L] = [t] = [E]^{-1} \tag{A.3}$$

onde $[L]$, $[t]$, $[E]$, são respectivamente a dimensão do espaço, do tempo, e da energia. Olhando para a relação momento energia relativística no sistema natural de unidades

$$E^2 = m^2 + P^2, \tag{A.4}$$

onde m e P são respectivamente a massa e o momento. Desta maneira, a massa e o momento também têm dimensão de energia. Assim, no sistema

natural de unidades escrevemos todas as grandezas em termos da dimensão de energia. Por outro lado, a notação que iremos usar é tal que

$$g^{\mu\nu} = \text{dig}(1, -1, -1, -1) \quad (\text{A.5})$$

$$x^\mu = (x^0 = t, x^i) \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_\mu = \left(\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (\text{A.7})$$

onde x^0 representa o tempo e x^i as coordenadas espaciais. Também vamos utilizar a convenção de Einstein onde produto de elemento com índice repetidos representam uma soma no índice, caso ele se encontre uma vez no lado superior e uma vez no lado inferior

Apêndice B

Campos Adimensionais

A ação para campos escalares em $(3 + 1)D$ dimensões que possui a forma

$$S = \int dx^4 \partial_\mu \phi \partial^\mu - V[\phi], \quad (\text{B.1})$$

é adimensional, pois tem a mesma dimensão da constante de Plank, logo podemos concluir que a dimensão do campo escalar é de inverso de energia $[E]^{-1}$ no sistema natural de unidades. Nesta dissertação, estamos a procura por soluções BPS, logo podemos trabalhar no sistema de campo adimensional. Nesta seção, vamos desenvolver o "procedimento" para adimensionalizar os campos.

Seja o potencial do modelo $\lambda\phi^4$ que é dado por

$$V[\phi] = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2, \quad (\text{B.2})$$

que pode ser escrito em termos do superpotencial $W = \lambda a^2 \phi - \frac{1}{3}\lambda \phi^3$ da seguinte maneira $V[\phi] = \frac{1}{2}W_\phi^2$, onde os vácuos são $\pm a$ e λ um parâmetro pequeno. Assim, as equações de primeira ordem para configurações estáticas

em (1+1)D dimensões são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\lambda(a^2 - \phi^2), \quad (\text{B.3})$$

que reescrita no sistema de campos adimensionais, isto é, o campo para $\phi \rightarrow a\phi$ e a coordenada $x \rightarrow (\lambda a)^{-1}x$,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2). \quad (\text{B.4})$$

Assim o potencial fica dado da seguinte maneira

$$V[\phi] = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (\text{B.5})$$

Olhando para as soluções de $\lambda\phi^4$; $\phi(x) = \pm a \tanh(\lambda ax)$, e utilizando as mesmas "transformações" ($\phi \rightarrow a\phi, x \rightarrow (\lambda a)^{-1}x$) obtemos as soluções para campos adimensionais como sendo $\phi(x) = \pm \tanh(x)$. Para retornar para campos com dimensão basta utilizar o inverso das "transformações" ($\phi \rightarrow (1/a)\phi, x \rightarrow \lambda ax$).

Referências Bibliográficas

- [1] M. Gomes, "*Teoria Quântica dos Campos*" (Edusp, São Paulo, 2002).
- [2] S. Coleman, "*Aspects of Symmetry*" (Cambridge, Cambridge, 1985).
- [3] A. Vilenkin, E.P.S Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge, Cambridge, 1994)
- [4] D. Bazeia, "*Topological Solitons. In Concise Encyclopedia of Supersymmetry*". S.Duply, W. Siegel, J. Bagger (Keuver, Dordrecht, 2004).
- [5] R. Rajaraman, "*Solitons and Instantons*" (North-holland, Amsterdam, 1982).
- [6] C. Rebbi, G. Soliani, "*Solitons and Particles*" (World Scientific, Singapore, 1984).
- [7] R. Rajaraman, Phys. Report. **21**, 227 (1975).
- [8] R. Jackiw, Phys. Rev. **49**, 681 (1977).
- [9] E. B. Bogomol'nyi, J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1977).
- [10] C. A. G. Almeida, D. Bazeia, L. Losano and J. M. Malbouisson, Phys. Rev. D **69**, 067702(2004).

- [11] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, and R. F. Ribeiro Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 (2002).
- [12] A. Alonso Izquierdo, M.A. Gonzales Leon and J. Mateos Guilarte, Phys. Rev. D **65**, 085012 (2002)
- [13] A. Khare, F. Cooper, U. Sukhatme, Phys. Rept. **251**, 267 (1995).
- [14] G. Junker, “*Supersymmetric Methods in Quantum Statistical Physics*” (Springer, Berlin, 1996).
- [15] E. Weinberg, R. Rajaraman, Phys. Rev. D **11**, 2950 (1975).
- [16] C. Montonen, Nucl. Phys. B **112**, 349 (1976).
- [17] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208**, 84 (1995).
- [18] M. K. Prasad, C. H. Somerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [19] M. A. Lohe, Phys. Rev. D. **20**, 3120 (1979).
- [20] E. Damany, B. Horowitz, J. A. Krumhans, Phys. Rev. Lett. B. **38**, 778 (1977).
- [21] D. Bazeia, J.R.S. Nascimento, R. F. Ribeiro, D. Toledo, J. Phys. A (1997).
- [22] R. M. Deleonards, S. E. Trullinger, Phys. Rev. A. **20**, 2225 (1979).
- [23] S. Theodorakis, Phys. Rev. D. **69**, 125004 (1999).
- [24] A. S. Inácio, “*Defeitos Topológicos em Modelos de Campos Escalares*” (Dissertação de Mestrado, UFPB, João Pessoa, 2003).
- [25] D. Bazeia, A. S. Inácio, L. Losano, J. Mod. Phys. A. **19**, 575 (2004).

-
- [26] A. Vilenkin, E. P. S. Sllard, “*Cosmic Strings and other Topological Defectos*” (Cambridge, Cambridge, 1994).
- [27] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).
- [28] A. Salam, J. Goldstone, S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [29] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **12**, 132 (1964).
- [30] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [31] A. Salam, “*Proceedings of the Enghth Nobel Simposium*” (N. Svartholm, 1968).
- [32] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [33] G. ’t Hooft, Nucl. Phys. B. **35**, 173 (1971).
- [34] P. S. West, “*Introduction of Supersymmetry and Supergravity*” (World Scientific Publishing, 1990).
- [35] D. Bazeia, J. Menezes, M. M. Santos, Phys. Lett. B. **521**, 418 (2001).
- [36] D. Bazeia, J. Menezes, M. M. Santos, Nucl. Phys. B. **636**, 132 (2002).
- [37] D. Bazeia, M. M. Santos, Phys.Lett. A. **217**, 28 (1996).
- [38] D. C. M. Filho, Matemática Universitária **31**, 143 (2001).