



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DANIEL DE PAULA FARIAS RODRIGUES

ASPECTOS CLÁSSICOS DA COSMOLOGIA
INFLACIONÁRIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOÃO PESSOA, PB
JULHO/2011

DANIEL DE PAULA FARIAS RODRIGUES

ASPECTOS CLÁSSICOS DA COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Antônio de Sousa Pires

JOÃO PESSOA, PB

JULHO/2011

DANIEL DE PAULA FARIAS RODRIGUES

ASPECTOS CLÁSSICOS DA COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Data de aprovação: __ / __ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Antônio de Sousa Pires

DFIS - UFPB

Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva

DFIS - UFPB

Prof. Dr. Diego Alejandro Cogollo

DFIS - UFCG

*À minha família e a todos aqueles a mim ligados por
sinceros laços de amor e amizade*

Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem a compreensão e paciência de meu orientador, professor Carlos A. de Souza Pires, a quem eu devoto meus mais sinceros agradecimentos. Também sou grato à todos os professores do DPGF que de alguma forma me ajudaram nessa empreitada.

Aos amigos Anderson P. Pinheiro e Altemar Lobão fica aqui marcada minha gratidão por todos os momentos de companheirismo, risos e preocupações compartilhados e sua por generosidade.

Por falar em generosidade, à Suellen agradeço por todo o apoio e carinho a mim dedicados, sempre estando ao meu lado em todos os momentos. Este trabalho também é dedicado a você.

Ao professor do IFCE, Jânio Cléo, agradeço por sua enorme boa vontade em me ajudar com várias correções.

A minha família: Sandra Regina, Lenilton Coelho e Dani, agradeço o apoio que me foi dado durante todo esse tempo e por todo esforço em prol de minha educação.

Não posso esquecer dos colegas da pós-graduação, por todas as conversas, discussões e muitos risos compartilhados. Muito obrigado.

Ao CNPQ agradeço fortemente pelo suporte financeiro.

*The universe whould have expanded in a smooth way form a single point.
As it expanded, it whould have borrowed energy from the gravitational
field, to create matter. As any economist could have predicted, the result of
all that borooowing, was inflation. The universe expanded and borrowed at
an ever-increasing rate. Fortunely, the debt of gravitational energy will not
have to be repaid until the end of the universe.*

—STEPHEN HAWKING (The Beginning of Time)

Resumo

As últimas décadas têm sido de grandes desenvolvimentos na cosmologia desde o advento da inflação cosmológica como solução aos problemas do modelo cosmológico padrão. Sendo um dos principais paradigmas da cosmologia moderna, estudar os aspectos clássicos da teoria inflacionária é o principal objetivo deste trabalho. Antes apresentamos as principais evidências da expansão universal e uma revisão da relatividade geral e do modelo cosmológico padrão, conhecido como a teoria do *big bang*. Em seguida, analisamos os problemas deste modelo como motivação para a posterior introdução da inflação. Modelamos a teoria inflacionária em termos de um campo escalar, encontrando suas equações dinâmicas, e formalizamos a aproximação *slow-roll*, a qual permite encontrar soluções analíticas para as equações do movimento. Discutimos alguns potenciais inflacionários: potenciais caótico, híbrido e natural, relacionando alguns destes com a física de partículas. Concluímos o trabalho apresentando um modelo inflacionário cuja solução é exata.

Palavras-chave: Big Bang, Inflação Cosmológica, Modelos Inflacionários.

Abstract

The last decades have been of major developments in cosmology since the advent of cosmological inflation as a solution to the problems of standard cosmological model. As one of the main paradigms of modern cosmology, to study the classical theory of inflation is the main objective of this work. Before, we present the main evidences of universal expansion and a review of general relativity and the standard cosmological model, known as the *big bang* theory. Then we analyze the problems of this model as motivation for the subsequent introduction of inflation. We model the theory of inflation in terms of a scalar field, finding its dynamical equations and formalize the slow-roll approximation, which allows to find analytical solutions to the equations of motion. We discuss some inflation potentials : chaotic, hybrid and natural potentials, relating some of them with Particle Physics. We conclude the work presenting a inflationary model whose solution its exact.

Keywords: Big Bang, Cosmological Inflation, Inflationary Models.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	viii
INTRODUÇÃO	1
1 ASPECTOS DA COSMOLOGIA MODERNA	4
1.1 Princípio Cosmológico e a CMBR	4
1.2 Um Universo em Expansão	5
1.2.1 Lei de Hubble e Coordenadas Comóveis	5
1.2.2 <i>Redshift</i> Cosmológico	6
2 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	8
2.1 Prelúdio: Fundamentos da Relatividade Geral	8
2.2 Geometria do Modelo FLRW	14
2.3 Tempo Conforme e Horizontes de Partícula	17
2.4 Matéria e a Dinâmica do Modelo de FLRW	19
2.4.1 Universo dominado por radiação	23
2.4.2 Universo dominado por matéria	24
2.5 Introduzindo Λ : Universo de Einstein-De Sitter	25
2.6 Problemas do Modelo Cosmológico Padrão	28
2.6.1 Problema da Planura	28
2.6.2 Problema do Horizonte	29
3 DEFININDO A FASE INFLACIONÁRIA	32
3.1 Solucionando os problemas do MCP	32
3.1.1 Quantificando a inflação	35
3.1.2 Diagrama Conforme	36
3.2 Inflação Como Uma Teoria de Campo Escalar	38
3.2.1 Dinâmica do Campo Escalar	38
3.2.2 Ação de Einstein-Hilbert	41

3.3	Aproximação <i>Slow-Roll</i>	42
4	MODELOS INFLACIONÁRIOS	46
4.1	Classificação dos Modelos	46
4.2	Transições de Fase e Inflação	47
4.2.1	Transições de primeira ordem e a velha inflação	47
4.2.2	Transições de segunda ordem e a nova inflação	49
4.3	Inflação Caótica	50
4.3.1	Potencial quadrático	50
4.3.2	Potencial quártico	55
4.4	Inflação Híbrida	56
4.4.1	Dinâmica	59
4.4.2	Regimes	60
4.5	Inflação Natural	62
4.6	Um Modelo com solução exata	64
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
	Referências Bibliográficas	67

Lista de Figuras

2.1	O transporte paralelo de um vetor na superfície de uma esfera, mostrando a mudança de orientação do vetor. Figura disponível em www.wikipedia.org	13
2.2	Possíveis geometrias do modelo FLRW dependem diretamente da densidade de energia do universo Ω , a qual determina sua curvatura. Disponível em www.wikipedia.org	22
2.3	Evolução ao temporal do fator de escala em um universo de De Sitter [12].	27
2.4	Diagrama conforme que evidencia o problema do horizonte, mostrando a última superfície de espalhamento à direita. O cone de luz maior representa o horizonte atual, o qual engloba dois eventos simultâneos que ocorreram na época da recombinação, mostrando que, nesta época, estavam causalmente desconectados. Adaptado de [17].	30
3.1	Esquema que mostra o raio de Hubble comóvel inicialmente maior que a região colorida que delimita o contato causal. A inflação diminuiu o raio de Hubble, de forma que mesmo após a seu término, o universo observável permanece dentro da região causalmente conexa. Adaptado de [17]	34
3.2	A inflação ao empurrar a origem para $-\infty$ permite que os cones de luz interceptem-se no passado remoto, permitindo o contato causal entre as respectivas regiões. Adaptado de [17].	37
4.1	Esboço do potencial da velha inflação proposta por Guth, onde vemos o tunelamento do inflaton através da barreira, seguido por oscilações do mesmo em torno do mínimo global.	48
4.2	No potencial da nova inflação, não existe o problema da nucleação de bolhas pois neste, o inflaton não encontra nenhuma barreira, onde o conceito de descida suave (<i>slow-roll</i>) é introduzido.	49
4.3	Esboço do potencial caótico (4.4), onde o valor inicial do inflaton é maior que M_{pl} [21].	51

4.4	O comportamento atrator da solução $\phi = -m/\sqrt{12\pi}$, tomando $M_{pl} = 1$ é exibido. A concentração no centro representa a oscilação do campo escalar em torno do mínimo do potencial [12].	53
4.5	Esboço do potencial do potencial híbrido (4.38). Adaptado de [19]. . . .	58
4.6	Esboço do potencial do potencial (4.63).	63

INTRODUÇÃO

A Cosmologia consiste no estudo do universo como um todo e de sua composição, na tentativa de explicar os detalhes de sua evolução, desde os primórdios até sua atual configuração. No decorrer do século XX, ela passou gradualmente de mero exercício acadêmico para um verdadeiro ramo da ciência, firmando-se no panteão da Física com a teoria do *big bang* (BB), a qual adquiriu o status de modelo cosmológico padrão (MCP) por seu sucesso em prever o espectro de corpo negro e a temperatura da radiação cósmica de fundo (CMBR), a evidência da expansão do universo contida no desvio para o vermelho (*redshift*) da luz emitida por galáxias distantes, além da nucleossíntese de elementos leves. Este sucesso deve-se também ao grandioso desenvolvimento de tecnologias e experimentos, como os satélites *Cosmic Microwave Background Explorer* (COBE) e o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP), possibilitando a confirmação das previsões teóricas e um melhor entendimento do universo. Entretanto, logo verificou-se que esta teoria possui severas limitações, pois não explica o porquê de evidências observacionais indicarem a planura de nosso universo com grande precisão e a grande homogeneidade da CMBR nos extremos do universo observável. Além disso, a ausência de defeitos topológicos também é problemática, pois estes geralmente são um subproduto das transições de fase que ocorreram na evolução universal como consequência de seu arrefecimento em sua evolução.

Deste prisma, o universo atual parece um lugar inacreditavelmente especial, uma vez que é possível sintetizar estes problemas como a necessidade de um extremo ajuste das condições iniciais a que estaria sujeito em seu passado remoto para que se reproduza as evidências empíricas. Na verdade, a discussão sobre este "ajuste fino" tomou grandes proporções, pois qualquer desvio nas constantes fundamentais da natureza impossibilitariam a existência de vida e até do próprio universo como o conhecemos, dividindo a comunidade científica entre os que acham ou não razoável este ajuste e dando margem a diversas tentativas de explicação como o *princípio antrópico* e a existência de um *multiverso*. Outro grande problema do MCP é sua incapacidade de explicar a origem de estruturas em larga escala, como galáxias e aglomerados destas, pois, como veremos, este toma como princípio a homogeneidade do universo. Em

um universo perfeitamente homogêneo, não há a possibilidade de formação de estruturas. Os experimentos apontam a existência de pequenas inomogeneidades no universo primordial como o possível responsável, a qual o modelo padrão não prevê. A necessidade de física além do MCP era premente.

Motivado a sanar estes problemas e com base em previsões da física de partículas, Alan Guth lançou, no início da década de 1980 as bases para o que posteriormente se tornaria um dos maiores paradigmas da cosmologia moderna, a *inflação cosmológica*. Mesmo com alguns defeitos que logo ficaram evidentes, a expansão exponencial do universo presente no período em que a inflação ocorre resolveu vários dos problemas do MCP. Um de seus maiores méritos é a explicação da formação de estruturas como consequência de flutuações quânticas do campo escalar que modela a inflação (inflaton) que culminaram em perturbações na densidade de energia do universo. Desde então, as últimas décadas têm sido de intenso desenvolvimento da teoria inflacionária e de seus inúmeros modelos com as mais diversas motivações, tornando-se uma teoria muito mais geral, geralmente chamada de *cenário inflacionário*.

O objetivo deste trabalho é analisar o MCP e a inflação do ponto de vista clássico e pode ser dividido em duas partes. A primeira é composta pelos dois primeiros capítulos nos quais descrevemos o MCP. No primeiro capítulo, apresentamos as evidências da expansão universal contidas na lei de Hubble e no *redshift* cosmológico. O capítulo seguinte discute inicialmente o contexto em que surge a relatividade geral (RG) e os principais objetos matemáticos de que ela faz uso no contexto da geometria Riemanniana. Em seguida, analisamos a geometria e a cinemática de um universo homogêneo e isotrópico, motivado pelas evidências do capítulo anterior. Munidos das equações de Einstein, a dinâmica deste universo é discutida. Resolvemos as equações de Einstein considerando este universo preenchido preponderantemente com determinados tipos de matéria, dando ênfase ao modelo estático de De Sitter em que só existe a constante cosmológica. Encerramos o capítulo com o estudo dos principais problemas do MCP.

Reservamos a segunda parte ao estudo da teoria inflacionária. O capítulo três apresenta a fase inflacionária como a solução dos problemas do horizonte e da planura, evidenciando o tipo de matéria responsável pela expansão exponencial do universo, onde definimos uma grandeza que mede a quantidade de inflação. Em seguida, tratamos do campo escalar e sua dinâmica através do princípio de mínima ação e, em termos deste princípio, encontramos as equações de Einstein. Por fim, formalizamos a aproximação *slow-roll* proposta por Andrei Linde, que permite encontrar soluções analíticas para as equações do movimento do campo escalar. O capítulo seguinte analisa alguns dos mais famosos modelos inflacionários, evidenciando suas ligações com a física de partículas, fazendo uso das ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior.

Encerramos nosso trabalho apresentando as conclusões e perspectivas futuras.

ASPECTOS DA COSMOLOGIA MODERNA

Este capítulo apresenta algumas das principais características em termos das quais a cosmologia moderna é desenvolvida. Inicialmente, tratamos do princípio cosmológico e sua relação com a radiação cósmica de fundo. A seguir, definindo o observador comóvel, apresentamos as duas evidências da expansão universal: a lei de Hubble, que versa sobre o distanciamento acelerado entre as galáxias, e o resultante desvio para o vermelho (*red-shift* cosmológico) da luz por elas emitidas.

1.1 Princípio Cosmológico e a CMBR

A Cosmologia Moderna edifica-se sobre o *Princípio Cosmológico*, que afirma, quando observado na escala de centenas de megaparsecs¹(Mpc), o universo dotado de duas propriedades de extrema importância: homogeneidade e isotropia. Sendo homogêneo, o universo apresenta as mesmas evidências observacionais para quaisquer pontos nele contidos. Em outras palavras, nos dá a garantia de que as porções do universo são equivalentes; Uma invariância sob translações espaciais. A isotropia implica as leis físicas aplicarem-se de forma indistinta para todas as direções, dotando o universo de uma invariância rotacional.

Evidências dessas propriedades foram descobertas através de estudos sobre a radiação cósmica de fundo (CMBR - *Cosmic Microwave Background Radiation*) que consiste em uma radiação de micro-ondas descoberta em 1964 pelos astrônomos norte-americanos Arno Penzias e Robert Wilson, a qual preenche todo universo com uma energia da ordem de 2,7K. O espectro de corpo negro da CMBR possui precisão nunca antes vista na natureza, segundo medições realizadas entre 1989 e 1996 pelo satélite COBE, através do *Far-Infrared Absolute Spectrophotometer* (FIRAS), pertencentes a NASA [1].

Nos desenvolvimentos a seguir, tomaremos este princípio juntamente com a existência da CMBR como ponto de partida para a descrição do que acredita-se ser a teoria

¹1Mpc = 3,26x10⁶anos – luz

com melhor capacidade preditiva acerca de nosso universo. Como um de seus maiores sucessos creditam-se a predição precisa do espectro de corpo negro da CMBR e sua temperatura. Este modelo é conhecido como modelo cosmológico padrão (MCP) ou ainda, modelo do *Big Bang* quente. Apesar de seu sucesso, o MCP possui sérias limitações, que por sua vez serão as grandes motivações para a introdução dos modelos inflacionários, um dos objetivos deste trabalho.

1.2 Um Universo em Expansão

1.2.1 Lei de Hubble e Coordenadas Comóveis

Após quase dez anos de observações, Edwin Hubble concluiu, em seu trabalho pioneiro de 1929[2], que a velocidade de afastamento (ou recessão) $v(t)$ de galáxias em relação à terra possui uma relação linear com a sua distância $D(t)$:

$$v(t) = H_0 D(t), \quad (1.1)$$

cujas constante H_0 leva seu nome. A expressão acima possui grande importância pois encerra uma forte evidência da expansão universal, e portanto, tem seu caráter elevado ao patamar de lei, epônima de seu formulador. Agora é conveniente introduzirmos um sistema de referência que, por vezes, é o mais adequado em estudos cosmológicos, no qual as distâncias entre os pontos de um universo que se expande são constantes, conhecido como referencial *comóvel*. Seja $D(t)$ a distância (física) entre pontos distintos do espaço em um certo tempo t tal que seu valor para o tempo atual t_0 é D_0 , definimos o fator de escala

$$a(t) \equiv \frac{D(t)}{D_0}, \quad (1.2)$$

uma função adimensional no tempo. É comum na literatura normalizar o fator de escala atual $a(t_0) = 1$, de forma que uma medida de $a(t)$ em um instante qualquer t faz-se em termos de $a(t_0)$. Em termos destas coordenadas, fazemos

$$D(t) = a(t)\chi, \quad (1.3)$$

onde χ é a distância comóvel. Assim, usando a regra da cadeia, a velocidade de afastamento de uma galáxia fica

$$v(t) = \frac{dD(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} D, \quad (1.4)$$

onde definimos o *fator de Hubble*

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.5)$$

que será de grande valia nos desenvolvimentos posteriores, uma vez que representa a taxa em que o universo se expande. Devemos notar que a constante H_0 definida na expressão 1.1 nada mais é que o valor numérico que o fator de Hubble assume para o tempo atual, o qual segundo medições do WMAP é da ordem de [3]

$$H_0 = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.6)$$

Chamamos atenção para o fato de que no sistema de unidades que usaremos nos desenvolvimentos posteriores, o fator de Hubble possui unidades de tempo^{-1} , e assim uma medida acurada do fator de Hubble é suficiente para estimativas precisas da idade do universo.

1.2.2 Redshift Cosmológico

Em um universo que se expande, o comprimento de onda da luz emitida por uma galáxia distante sofre um aumento, desviando suas linhas espectrais para o vermelho, efeito conhecido como *redshift* cosmológico. Define-se o desvio por

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (1.7)$$

em que λ_{ob} e λ_e são os comprimentos de onda medidos pelo observador e emissor da luz, respectivamente. É comum na literatura encontrar o *redshift* cosmológico associado diretamente ao efeito Doppler

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (1.8)$$

tomando-se o limite em que a velocidade de afastamento da galáxia é muito menor que a velocidade da luz c , que acarreta

$$z = \frac{v}{c}, \quad (1.9)$$

permitindo escrever a lei de Hubble na forma

$$cz = H_0 D(t). \quad (1.10)$$

Segundo [4] e primeiramente notado por [5], a expressão acima só é linear para pequenos desvios ($z \ll 1$), além de em um efeito puramente Doppler haver a possibilidade

do chamado *blueshift*, quando a fonte luminosa e o observador aproximam-se, o que não se verifica ao levar-se em conta apenas efeitos de expansão cosmológica.

É possível harmonizar a expressão (1.10) com grandes desvios no comprimento de onda, o que faremos de acordo com [6]. Como mostraremos quando tratarmos da relatividade geral, a relatividade restrita é válida localmente, e assim, podemos considerar que, dentro de uma pequena região ao redor de um observador comóvel, esta é válida e, portanto, a expressão do *redshift* encontrada a pouco também o é.

Escrevendo a distância $\delta D = a(t)\delta\chi$ da galáxia em relação a um observador como a distância percorrida pela luz por ela emitida, $\delta D = c\delta t$, vemos que sua velocidade é dada por

$$\delta v = \dot{a}\delta\chi = \frac{\dot{a}}{a}\delta D = c\frac{\delta a}{a}. \quad (1.11)$$

Estamos considerando que a relação de Doppler é válida para distâncias infinitesimais, o que é razoável, uma vez que a velocidade de afastamento tende a zero quando a distância é muito pequena. Sendo λ o comprimento de onda inicial, podemos escrever o *redshift* z em termos do comprimento de onda depois de seu desvio $\lambda + \delta\lambda$, o que de acordo com (1.7) e (1.11), resulta em

$$z = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta v}{c} = \frac{\delta a}{a}. \quad (1.12)$$

Integrando esta expressão, obtemos $\lambda \propto a(t)$. Lembrando da relação de De Broglie, sabemos que o *momentum* linear P de um fóton é inversamente proporcional ao seu respectivo comprimento de onda, i.e., $\lambda \propto P^{-1}$, mostrando-nos que, de fato, o *momentum* linear do fóton diminuiu, pois $P \propto a^{-1}(t)$.

Substituindo o resultado acima na definição de *redshift* (1.7), obtemos

$$1 + z = \frac{a(t_{ob})}{a(t_e)}, \quad (1.13)$$

que também pode ser encontrada usando argumentos cinemáticos através da métrica de de um universo de Friedmann, apresentada posteriormente. Portanto, este resultado encontra-se de acordo com a relatividade geral e, consequentemente, com a expansão universal, pois depende explicitamente do fator de escala e permite, por exemplo, que galáxias afastem-se da terra com velocidades superiores à da luz. Embora pareça herético, este resultado é legítimo e em nada fere a relatividade restrita, posto que a velocidade da luz é um limite ao movimento *no* espaço; o aumento da velocidade de recessão das galáxias é (apenas) uma manifestação cinemática da expansão do espaço-tempo.

MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

Iniciamos este capítulo com uma discussão das principais ideias e acontecimentos que culminaram com o surgimento da relatividade geral, revisando o ferramental matemático básico de que ela faz uso, fortemente influenciada por [6, 7, 8, 10, 11]. Em seguida, apresentamos a descrição geométrica de um espaço-tempo que se expande e suas principais características cinemáticas [12]. Obtemos as equações que regem a dinâmica universal através das equações de Einstein, resolvendo-as no caso de um universo preponderantemente preenchido com radiação e matéria [7, 12, 13, 15, 22]. Por fim, apresentamos as consequências imediatas da adição de uma constante cosmológica nas equações de Einstein e nas propriedades de um universo em expansão preenchido somente com esta constante, interpretando-a como uma espécie de energia de vácuo. Nos desenvolvimentos deste capítulo e nos posteriores, usaremos o sistema de unidades em que $c = 1$, onde c é a velocidade da luz. Fixando a notação, adotamos índices gregos representando grandezas no espaço-tempo, variando de zero a três, i.e., $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$, sendo a coordenada zero a temporal. Índices latinos são tais que $i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3$, representando coordenadas espaciais. Adotaremos a convenção de Einstein, de que índices repetidos estão somados.

2.1 Prelúdio: Fundamentos da Relatividade Geral

Cristalizada no pensamento científico do século XIX, a visão newtoniana atribuía aos conceitos de tempo e espaço um caráter absoluto para quaisquer referenciais que observassem um mesmo fenômeno físico, sendo estes referenciais relacionados pelas transformações de Galilei. Entre outros, o físico neerlandês Hendrik Lorentz constatou, entretanto, que as equações de Maxwell do eletromagnetismo não eram compatíveis com estas leis de transformação e, portanto, com a própria visão newtoniana. Uma vez que nas equações do eletromagnetismo não havia especificidade acerca do referencial em que se media a velocidade da luz, Lorentz e o francês Henri Poincaré, filósofo da Ciência e físico, propuseram a existência do *éter*, um referencial absoluto em que as equa-

ções do eletromagnetismo eram válidas. Este referencial privilegiado comportava-se como um fluido que permeava todo o espaço cuja relação com os demais observadores dava-se por meio do conjunto de equações que compunham as transformações de Lorentz.

Ainda que matematicamente coerente, não havia qualquer evidência experimental que desse suporte à teoria do éter, levada ao consequente descrédito até por seus idealizadores, no início do século XX. Coube a Albert Einstein, em seu seminal trabalho de 1905¹, dar-lhe o golpe de misericórdia. Nesse, Einstein impôs à velocidade da luz o caráter de constante universal, possuindo o mesmo valor (no vácuo) independente do movimento de sua fonte; um limite imposto pelo próprio universo para os objetos que nele se deslocam, culminando com a redefinição do conceito de causalidade.

Foi além, mostrando a equivalência entre massa e energia e que a invariância das equações de Maxwell por transformações de Lorentz não tinha qualquer relação com o éter e suas possíveis distorções; para objetos que se deslocavam com velocidades próximas à da luz, o próprio espaço (e não o éter) contraía-se na direção do movimento na perspectiva de observadores externos ou, equivalentemente, o tempo em si passava mais lentamente para observadores em repouso em relação a estes mesmos objetos.

A *Teoria da Relatividade Restrita* (RR), como ficou conhecida *a posteriori*, abalou em definitivo o pensamento newtoniano, sepultando a ideia de referenciais privilegiados e tempo absoluto, uma vez que a simultaneidade de eventos estava intimamente ligada a quem os observava. Entretanto, como o próprio nome sugere, a RR possuía limitações; restringia-se somente à classe dos referenciais inerciais e na ausência de forças gravitacionais.

Na busca por uma maneira de incorporar a gravitação à RR, influenciado pelo experimento realizado por Galileu Galilei no início do século XVII (que mostrou ser a aceleração sofrida por um objeto em queda livre na presença de um campo gravitacional independe da massa do corpo, culminando na igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional do mesmo, segundo as leis de Newton), Einstein, em 1907, fez uso de seu célebre experimento mental, *o elevador de Einstein*, para enunciar o princípio de equivalência (fraco) entre referenciais uniformemente acelerados e campos de gravitação constantes. Igualmente fortes foram as influências das ideias de simetria e da validade das leis físicas, independentemente de sistemas de coordenadas (princípio da *covariância geral*) em suas conjecturas, as quais indicaram-lhe a Análise Tensorial e a Geometria Diferencial como ferramental adequado a sua empreitada.

Tais ideias levaram-no às primeiras tentativas de geometrização do campo gravitacional em 1913 mas foi somente em 1916 que enunciou o Princípio da Relatividade

¹Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento.

Geral sintetizado na equação tensorial $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, onde G é a constante da gravitação universal. Trataremos dos pormenores desta equação adiante.

A geometria utilizada pela relatividade geral (RG) é a geometria riemanniana (mais precisamente, pseudo-riemanniana),² a qual possui enormes diferenças da geometria euclidiana usual. Mostraremos os principais objetos matemáticos que surgem nesse contexto e suas principais propriedades, para isso partindo do movimento de partículas sujeitas apenas a forças de gravitação.

Na RG, o princípio de equivalência manifesta-se na identificação do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como o campo gravitacional³, que aliado à igualdade entre as massas inercial e gravitacional, permite tratar o movimento destes corpos a partir de um ponto de vista puramente geométrico. Podemos dizer que os corpos descrevem (por inércia) curvas características da geometria do espaço-tempo. Estas curvas, chamadas de *geodésicas*, são a generalização do conceito de distância mínima entre dois pontos, que, no caso euclidiano, é uma linha reta.

Matematicamente, a geodésica é definida como sendo a curva que extremiza a integral $S = \int ds$, com ds o elemento de linha infinitesimal. Nesse contexto, dizemos que, no espaço-tempo, uma partícula livre move-se numa geodésica *tipo-tempo* ($ds^2 > 0$) e que a luz move-se numa geodésica *nula* ($ds^2 = 0$). Uma geodésica *tipo-espaço* ($ds^2 < 0$) não pode representar fisicamente a evolução de um corpo no espaço-tempo pois, nesta, o movimento ocorre a velocidades maiores que a da luz, violando o princípio da causalidade estabelecido na RR.

Desejamos, agora, encontrar a equação que descreve o movimento deste corpo que gravita livremente e, para isso, devemos manipular a integral acima, tornando-a a ação que descreve este sistema, obtendo

$$S = -mc \int ds, \quad (2.1)$$

onde m é a massa do corpo e o sinal negativo surge a fim de tornar o valor da integral um mínimo. Do princípio de mínima ação, para que S seja estacionária, sua variação δS deve anular-se. Antes de variar a ação, é preciso encontrar a variação $\delta(ds)$ como segue:

$$\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) = \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu), \quad (2.2)$$

tal que

$$2\delta(ds) = 2g_{\mu\nu}dx^\mu \delta(dx^\nu) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} dx^\mu dx^\nu \delta x^\sigma. \quad (2.3)$$

²Tal denominação deve-se a liberdade existente na assinatura do tensor métrico utilizado em RG.

³Também chamado apropriadamente de campo de *inércia-gravitação*.

Substituindo a expressão acima na variação da ação, encontramos

$$\delta S = -mc \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d(\delta x^\nu)}{ds} \right] ds \quad (2.4)$$

e, integrando por partes o segundo termo, surge um termo de superfície, que por sua vez, anula-se nos extremos, resultando

$$\delta S = -mc \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\sigma - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\nu \right] ds. \quad (2.5)$$

Notando que os índices estão somados, podemos fazer $\nu = \sigma$ no segundo termo, colocando δx^σ em evidência. Como a ação deve extremizar-se para quaisquer δx^σ , o integrando é nulo. Desenvolvendo o segundo termo, temos

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.6)$$

onde podemos notar que somente a parte simétrica do primeiro termo entre parênteses contrai-se com o tensor simétrico em evidência. Usando $g^{\mu\lambda}$ e simetrizando o tensor

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) \quad (2.7)$$

obtemos a equação desejada, também conhecida como *equação geodésica*,

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (2.8)$$

cujas curvas que a satisfazem são as já citadas geodésicas.

Desta equação, podemos introduzir um dos mais importantes objetos geométricos que surgem na RG, no âmbito da geometria de Riemann, o chamado *símbolo de Christoffel de segunda espécie*

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (2.9)$$

objeto simétrico em relação aos índices inferiores ($\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$), cuja lei de transformação evidência seu caráter não-tensorial, como se pode verificar.

Uma das formas de enunciar o princípio da equivalência é afirmar que existem referenciais (localmente) inerciais em que o campo gravitacional é nulo⁴, o que implica a nulidade dos símbolos de Christoffel nestes referenciais, devendo os coeficientes do tensor métrico serem constantes, tendo em vista a definição acima. Portanto, é sempre possível escolher em caráter local um tal sistema de coordenadas em que a métrica

⁴Esta é a forma *forte* do princípio.

assume a assinatura do espaço de Minkowski (pseudo-Euclidiano), onde a física é localmente invariante por transformações de Lorentz.

Os símbolos de Christoffel também são importantes na generalização do conceito de derivada de um vetor de componentes A^μ em espaços curvos, a *derivada covariante*

$$\nabla_\rho A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu A^\sigma, \quad (2.10)$$

que pode ser estendida para tensores de ordem superior ⁵

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = \\ \partial_\rho T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu_1} T^{\sigma \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} + \dots + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu_n} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \sigma}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \\ - \Gamma_{\rho\nu_1}^\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\sigma \nu_2 \dots \nu_m} - \dots - \Gamma_{\rho\nu_m}^\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_m \dots \sigma}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para entender o significado da derivada covariante, devemos estudar o transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva arbitrária. Uma vez que na geometria Euclidiana o conceito de paralelismo de curvas é válido em todo o espaço, podemos dizer que um vetor A^μ é transportado paralelamente ao longo de uma curva $x^\sigma(\lambda)$, onde λ é um parâmetro ao longo da curva, quando $dA^\mu/d\lambda = 0$. Se, por exemplo, transportarmos paralelamente um vetor na superfície de uma esfera seguindo um caminho fechado conforme a figura a seguir, ao chegar novamente no ponto de partida, o vetor mudou sua orientação. Em espaços curvos, a noção de paralelismo não é global.

Entretanto, é possível definir localmente o transporte paralelo de um vetor *ao longo de uma curva* em um espaço curvo, exigindo que a derivada covariante nessa anule-se, i.e.

$$\frac{DA^\mu}{D\lambda} \equiv \frac{dx^\rho}{d\lambda} \nabla_\rho A^\mu = \frac{dA^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} A^\sigma = 0. \quad (2.12)$$

Fica clara a importância das últimas definições quando entendemos que é exatamente a noção de transportar paralelamente um vetor $A^\mu = dx^\mu/d\lambda$ tangente a uma certa curva $x^\mu(\lambda)$, de forma que esse coincida com o vetor localmente tangente definido sobre a mesma, que permite a definição das curvas geodésicas em termos do *parâmetro afim* λ que satisfaz:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.13)$$

conhecida como *equação geodésica*. Outro objeto geométrico surge através da solução da equação (2.10), que só ocorre quando é satisfeita a condição de integrabilidade⁶ $R_{\beta\alpha\sigma}^\mu A^\beta = 0$, onde

$$R_{\beta\alpha\sigma}^\mu \equiv \frac{\partial \Gamma_{\beta\sigma}^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \Gamma_{\sigma\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho; \quad (2.14)$$

⁵Os sinais negativos surgem da derivada covariante para índices covariantes.

⁶Que equivale a calcular o comutador entre derivadas covariantes de um vetor A^β .

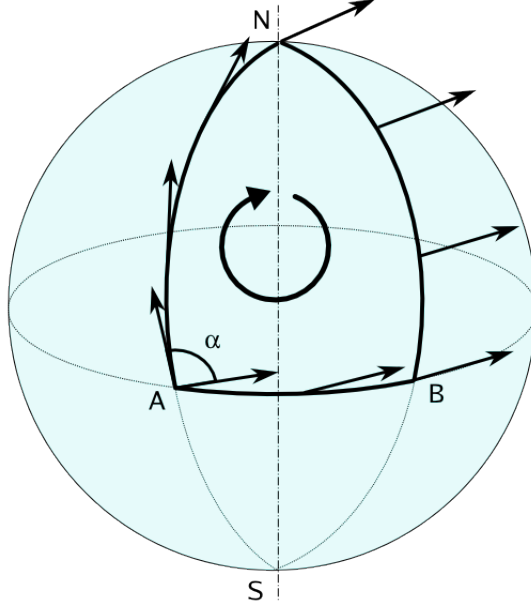


Figura 2.1 O transporte paralelo de um vetor na superfície de uma esfera, mostrando a mudança de orientação do vetor. Figura disponível em www.wikipedia.org

o *tensor de Riemann*, também conhecido como *tensor de curvatura*. Recebe este último porque dele podemos determinar se o espaço-tempo é ou não plano. Se a condição acima é satisfeita para qualquer vetor em um certo espaço, temos $R^\mu_{\beta\alpha\sigma} = 0$ para quaisquer sistemas de coordenadas (pois é tensor), de forma que o transporte paralelo leva a um único vetor independentemente do caminho escolhido, o que só ocorre em espaços Euclidianos.

Baixando o índice superior usando o tensor métrico ($R^\mu_{\beta\alpha\sigma} = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\beta\alpha\sigma}$), podemos verificar as seguintes propriedades:

- Simetria por troca de pares e antissimetria pelas trocas $\lambda \rightarrow \beta$ e $\alpha \rightarrow \sigma$:

$$R_{\lambda\beta\alpha\sigma} = R_{\alpha\sigma\lambda\beta} = -R_{\sigma\alpha\lambda\beta} = -R_{\alpha\sigma\beta\lambda}; \quad (2.15)$$

- Soma de permutações cíclicas dos três últimos índices é nula:

$$R_{\lambda\beta\alpha\sigma} + R_{\lambda\sigma\beta\alpha} + R_{\lambda\alpha\sigma\beta} = 0; \quad (2.16)$$

- Satisfaz a identidade de Bianchi⁷

$$\nabla_\rho R_{\lambda\beta\alpha\sigma} + \nabla_\lambda R_{\rho\beta\alpha\sigma} + \nabla_\beta R_{\lambda\rho\alpha\sigma} = 0. \quad (2.17)$$

⁷Esta pode ser mais facilmente verificada em um referencial em que os $\Gamma = 0$ e utilizando a propriedade cíclica.

Através da contração do tensor de curvatura com o tensor métrico, obtemos o chamado *tensor de Ricci*

$$R_{\alpha\sigma} = g^{\lambda\beta} R_{\lambda\beta\alpha\sigma}, \quad (2.18)$$

que, como se pode observar da propriedade de antissimetria, é o único tensor de segunda ordem simétrico que pode se obter dessa forma. Ainda das propriedades de simetria, podemos observar que existe somente um escalar obtido através de contrações do tensor métrico com o de curvatura, o *escalar de curvatura*

$$R = g^{\lambda\beta} g^{\alpha\sigma} R_{\lambda\beta\alpha\sigma}. \quad (2.19)$$

A partir da identidade de Bianchi, realizando duas contrações sucessivas, encontramos o *tensor de Einstein* $G_{\rho\sigma}$ da equação

$$\nabla^\rho G_{\rho\sigma} = \nabla^\rho \left(R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} R \right) = 0. \quad (2.20)$$

Como já dito, a ideia de Einstein de geometrizar o campo gravitacional o levou a postular que a matéria, ao interagir com o espaço, curva-o, definindo sua geometria. Equivalentemente o espaço (no ato da interação) diz a matéria como nele se mover; propostas que encerram o *Princípio da Relatividade Geral* manifesto na equação:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

em que o lado esquerdo desta equação, como se sabe, está relacionado com a geometria do espaço-tempo, enquanto o lado direito carrega a informação referente ao conteúdo de matéria, representado pelo tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$.

2.2 Geometria do Modelo FLRW

Alexander Friedmann, matemático e cosmólogo russo, em seus estudos sobre espaços com curvatura constante, sugere, entre 1922 e 1924, a possibilidade teórica de espaços homogêneos e isotrópicos em expansão como solução das equações de Einstein. Em 1927, o astrônomo George Lemaître, natural da Bélgica, encontra, independentemente, os mesmos resultados que Friedmann, os quais ganham grande entusiasmo dois anos mais tarde com o anúncio das descobertas de Hubble. O estudo cosmológico do modelo proposto por estes cientistas ficou conhecido como cosmologia de Friedmann-Lemaître. Assumida a possibilidade de um universo que comporte o princípio cosmológico, Howard Robertson e Arthur Walker derivaram, em 1930, o

elemento de linha que o descreve, conhecido como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), o qual deduziremos a seguir.

Para o estudo da métrica de espaços homogêneos e isotrópicos, consideraremos a geometria do espaço Euclidiano tridimensional como a geometria numa hipersuperfície imersa em um espaço Euclidiano de quatro dimensões [8] com coordenadas (μ, x, y, z) . Isotropia implica em simetria esférica, de forma que estas hipersuperfícies são hiperesferas de raio a que satisfazem

$$\mu^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (2.22)$$

Supondo a constante, podemos fazer

$$\mu d\mu = -(x dx + y dy + z dz). \quad (2.23)$$

Resolvendo (2.22) para μ e substituindo em (2.23), obtemos

$$d\mu^2 = \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (2.24)$$

O elemento de linha neste espaço tem a forma $ds^2 = d\mu^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, onde a variação da coordenada μ é dada por (2.24)

$$ds^2 = \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2} + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.25)$$

Esta é a métrica ou distância entre dois pontos nesta 3-esfera imersa num espaço Euclidiano quadridimensional. Em um espaço Euclidiano $(n + 1)$ -dimensional, uma hiperesfera de n dimensões é uma n -esfera. Podemos usar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e relacioná-las com as coordenadas cartesianas através de $(x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta)$ e, então, reescrever a métrica em termos destas. Para isso, devemos observar que, da equação da 2-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

$$x dx + y dy + z dz = r dr \quad (2.26)$$

e que a métrica euclidiana 3-dimensional dl nessas coordenadas fica

$$dl = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.27)$$

A substituição de (2.26) e (2.27) em (2.25) nos leva à expressão desejada

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.28)$$

Faremos a seguir uma mudança de coordenadas que relaciona r ao raio da 3-esfera

$$R = \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \quad (2.29)$$

e definindo o parâmetro $k = |a|^2/a^2$, chegamos a seguinte forma da métrica

$$ds^2 = |a|^2 \left[\frac{dR^2}{1 - kR^2} + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.30)$$

Esta é a forma do elemento de linha de uma superfície esférica tridimensional descrita somente em termos de suas variáveis intrínsecas, não fazendo menção ao espaço de dimensão superior que a contém. Para chegar à forma adequada da métrica de um universo homogêneo e isotrópico, devemos, primeiramente, inserir o tempo como variável e identificar a constante a com o fator de escala $a(t)$ mencionado anteriormente. Finalmente, utilizando a assinatura $(+, -, -, -)$, obtemos

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dR^2}{1 - kR^2} + R^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.31)$$

em que a constante k assume o papel de curvatura do espaço e $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. A expressão (2.31) mostra que existem somente três possíveis geometrias para um universo que comporta o princípio cosmológico, dependendo do valor da curvatura: *Esférica* ($k = 1$), *Hiperbólica* ($k = -1$) ou ainda *Plana* ($k = 0$).

Para uma melhor visualização desse fato, definimos a nova coordenada espacial χ , muito útil para várias aplicações [12], através de

$$d\chi^2 = \frac{dR^2}{1 - kR^2} \quad (2.32)$$

e reescrevemos (2.31) na forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + f_k^2(\chi) d\Omega^2 \right]. \quad (2.33)$$

em que $f_k(\chi)$ é uma função que depende de k .

Geometria Esférica ($k = 1$): O caso em que a curvatura espacial k é positiva descreve um universo *fechado* e, portanto, *finito* em que $f_1(\chi) = \sin\chi$ [vide (2.32)]. A parte espacial da métrica descreve uma superfície esférica tridimensional, em que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que π . Nesta superfície, duas linhas paralelas cruzam-se nos pólos. Temos, portanto

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2 \right]. \quad (2.34)$$

Geometria Plana ($k = 0$): Nesse caso, a parte espacial da métrica descreve um universo plano, cuja geometria é a de um espaço euclidiano tridimensional usual, pois

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.35)$$

com $f_0(\chi) = \chi$. A fim de evitar confusão, é importante ressaltar o fato de que este elemento de linha é *espacialmente plano* ainda que o *espaço-tempo* quadri-dimensional seja

curvo, visto que o fator de escala que descreve a expansão ou contração do universo, só afeta a parte espacial da métrica. São fortes os indícios observacionais do WMAP de que nosso universo é, em excelente aproximação, plano [14].

Geometria Hiperbólica ($k = -1$): Valores negativos de curvatura implicam num espaço *aberto*, e portanto *ilimitado*. Neste espaço, linhas paralelas afastam-se indefinidamente de forma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° . Com $f_{-1}(\chi) = \sinh\chi$, a métrica assume a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2 \right]. \quad (2.36)$$

A definição de intervalo $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ nos permite encontrar a forma matricial do *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

objeto que contém todas as informações sobre a respectiva geometria. Da propriedade $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$, encontramos a forma matricial inversa. Definida a geometria, partiremos para a descrição dos aspectos cinemáticos e dinâmicos do movimento de corpos no universo em questão, objeto da seção a seguir.

2.3 Tempo Conforme e Horizontes de Partícula

Em várias aplicações, é conveniente escrever a métrica FLRW fatorando o fator de escala. Para isso, definindo o *tempo conforme* relacionando-o com o tempo físico através de $dt = a(\eta)d\eta$, ou equivalentemente

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.38)$$

Em termos deste, a métrica (2.33) fica

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\chi^2 + f_k(\eta)d\Omega^2 \right] \quad (2.39)$$

$$\equiv a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j \right], \quad (2.40)$$

onde a métrica espacial γ_{ij} obedece $\gamma_{ik}\gamma^{kj} = \delta_j^i$. Nesta forma, notamos que os coefici-

entes métricos são o produto do fator de escala com determinado coeficiente

$$\begin{aligned} g_{00} &= a^2(\eta); \\ g_{0j} &= 0; \\ g_{ij} &= -a^2(\eta)\gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

e que, no caso de um espaço plano, a métrica é conformemente igual a de Minkowsky $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, i.e. $g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}$ ⁸. A partir de (2.40), podemos traçar as trajetórias (também conhecidas como *linhas de mundo*) de partículas no plano (η, χ) , compondo os chamados *diagramas conformes*, os quais serão muito úteis nos estudos sobre a inflação, mais adiante. Para isso, desconsideraremos a parte angular da métrica devido à isotropia espacial e, em seguida, lembrando que a luz move-se em geoésicas nulas ($ds^2 = 0$), obtemos, após integração,

$$\chi(\eta) = \pm\eta + C, \quad (2.42)$$

uma relação linear entre as coordenadas, em que C é uma constante. Dessa forma as possíveis trajetórias luminosas no plano (η, χ) são as bissetrizes dos eixos coordenados, definindo o chamado *cone de luz*. Neste, eventos causalmente conectados estão entre ou, no máximo, sob as trajetórias da luz.

A fim de provar o caráter geodésico das linhas de mundo, na equação geodésica (2.13) podemos escolher o parâmetro afim como sendo o tempo t , observando que somente a componente temporal desta equação é não nula devido a constância das coordenadas espaciais no referencial comóvel e assim

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x^0}{dt^2} + \Gamma_{00}^0 \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{d^2x^0}{dt^2} + \frac{1}{a(\eta)} \frac{da(\eta)}{d\eta} \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde, usando a definição do tempo conforme além do coeficiente puramente temporal dos símbolos de Christoffel, calculado a partir de (2.9), a equação acima reduz-se a

$$\frac{d^2x^0}{d\eta^2} = \frac{d^2\eta}{d\eta^2} = 0, \quad (2.44)$$

que é identicamente satisfeita, como queríamos demonstrar. Voltando ao deslocamento de fótons no universo de FLRW, temos

$$0 = dt^2 - \frac{a^2(t)dr^2}{1 - kr} \implies \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'}}. \quad (2.45)$$

⁸Chamamos atenção para que não haja confusão entre o tempo conforme η e a métrica de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$.

Na expressão acima, o lado esquerdo mostra que podemos entender o tempo conforme como um relógio cuja medida diminui com o aumento do universo, de forma que a distância comóvel por unidade de tempo conforme é constante, o que também se vê de (2.42). Já o lado direito mostra que o tempo conforme define a máxima distância comóvel percorrida pela luz de um tempo inicial t_i até um instante qualquer; o *horizonte de partícula*

$$\chi_p(\eta) \equiv \int_0^{\eta} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}, \quad (2.46)$$

fixa, portanto, o chamado *universo observável*⁹, desde que η seja bem definido quando $t \rightarrow 0$. A expressão acima é finita para qualquer tempo e, de fato, mesmo que $a(t)$ seja tal que $1/a(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0$, esta é integrável [?]. Em termos de distancia física $d_p = a\chi_p$, temos

$$d_p = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.47)$$

2.4 Matéria e a Dinâmica do Modelo de FLRW

Manifesto nas propriedades de isotropia e homogeneidade, o princípio cosmológico exige que o conteúdo de matéria universal seja descrito como um *fluido perfeito*, para o qual assume-se um tensor energia-momentum

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p, \quad (2.48)$$

em que ρ é a densidade de energia do universo, p é a pressão e u_μ é a 4-velocidade. No referencial comóvel em relação ao fluido, este 4-vetor possui coordenadas $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, de forma que a forma matricial do tensor energia-momentum fica

$$T^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

e, usando $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}T^\alpha{}_\nu$, encontramos $T_{00} = a^2\rho$ e $T_{ij} = -a^2p\gamma_{ij}$.

Desejamos encontrar as equações de Einstein para um universo descrito por (2.37), cujo respectivo conteúdo de matéria obedece (2.49). Portanto, devemos encontrar as equações que regem a dinâmica desse conteúdo em um universo (ou *background*) de

⁹A superfície que encerra o volume no qual eventos conectam-se de forma causal em que χ_p é o raio.

FLRW. Nesse sentido, devemos calcular as componentes dos símbolos de Christoffel; os coeficientes não nulos são:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{a} \left(\frac{da}{d\eta} \right); \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{a} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \gamma_{ij} \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{a} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \delta_j^i, \quad (2.50)$$

que nos levam ao coeficientes não nulos do tensor de Ricci e ao escalar de curvatura

$$R_{00} = 3 \left[\frac{1}{a} \left(\frac{d^2a}{d\eta^2} \right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 \right]; \quad (2.51)$$

$$R_{ij} = \left(\frac{1}{a^2} \right) \left[\frac{1}{a} \left(\frac{d^2a}{d\eta^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 + 2k \right] g_{ij}; \quad (2.52)$$

$$R = \frac{6}{a^2} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{d^2a}{d\eta^2} \right) + k \right]. \quad (2.53)$$

A componente temporal das equações de Einstein $R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00}$ resulta

$$\left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} a^4 - ka^2. \quad (2.54)$$

Já a componente espacial $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$ é tal que

$$\left[\frac{2}{a} \left(\frac{d^2a}{d\eta^2} \right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 + k \right] g_{ij} = -8\pi Ga^2 p g_{ij}. \quad (2.55)$$

Antes de discutir as equações (2.54) e (2.55), vamos escrevê-las em sua forma usual em termos da coordenada t e, com esse intuito, devemos encontrar uma relação entre $a(t)$ e $a(\tau)$ como segue

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{da(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{da(\eta)}{d\eta} \frac{1}{a(\eta)}, \quad (2.56)$$

de onde achamos a relação com o fator de Hubble $H = a' / a^2$, em que a linha representa a derivada em função do tempo conforme. Depois de algumas manipulações, obtemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}; \quad (2.57)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.58)$$

comumente conhecidas, respectivamente, como primeira e segunda *Equações de Friedmann*, que descrevem a dinâmica do universo de FLRW em termos do fator de escala. Usando a definição do parâmetro de Hubble, podemos reescrever a primeira destas equações na forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.59)$$

e, resolvendo para k , obtemos

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) \rho - 1. \quad (2.60)$$

Vamos definir agora dois parâmetros cosmológicos de grande importância; a *densidade crítica de energia* para um universo *plano* ($k = 0$)

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.61)$$

e o *parâmetro de densidade*

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.62)$$

Em termos destes, a equação (2.60) fica

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \Omega - 1, \quad (2.63)$$

evidenciando uma relação direta entre a expansão universal, a densidade relativa de energia do universo e sua curvatura. Assim, conseguimos classificar a geometria do universo em termos da densidade de matéria nele contida:

$$\Omega > 1 \implies k > 0, \quad \text{universo fechado}; \quad (2.64)$$

$$\Omega = 1 \implies k = 0, \quad \text{universo plano}; \quad (2.65)$$

$$\Omega < 1 \implies k < 0, \quad \text{universo aberto}; \quad (2.66)$$

possibilidades que reunimos na figura a seguir.

A segunda equação de Friedmann é conhecida como *equação da aceleração*. Para uma expansão acelerada do universo, temos $\ddot{a} > 0$, de forma que $(\rho + 3p) < 0$. Já uma expansão desacelerada $\ddot{a} < 0$, implica $(\rho + 3p) > 0$ ¹⁰. Como veremos a seguir, os tipos de matéria que consideraremos enquadram-se no segundo tipo; uma contradição à evidência encontrada na lei de Hubble de que o universo está em expansão acelerada! Como veremos mais adiante, este é o ponto de partida para a retomada das ideias acerca da existência de uma constante cosmológica.

Nesse contexto, definiremos mais um parâmetro largamente utilizado em Cosmologia, o qual permite uma maneira alternativa de quantificar a taxa de expansão universal. Expandindo em série de Taylor o fator de escala em torno do tempo atual:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots \quad (2.67)$$

e dividindo pelo fator de escala atual $a(t_0)$, temos

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2[t - t_0]^2 + \dots \quad (2.68)$$

¹⁰Esta condição é conhecida como *condição forte de energia*.

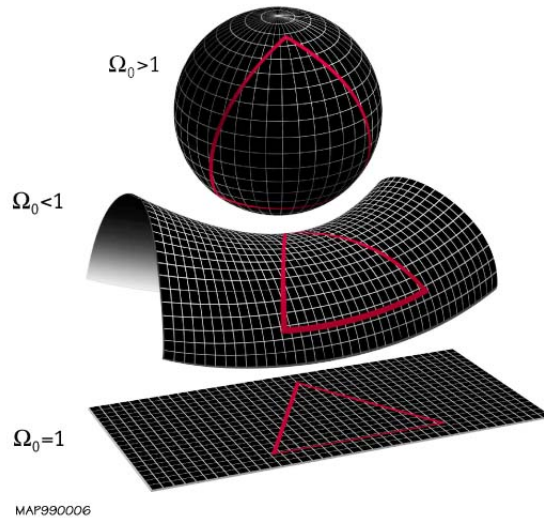


Figura 2.2 Possíveis geometrias do modelo FLRW dependem diretamente da densidade de energia do universo Ω , a qual determina sua curvatura. Disponível em www.wikipedia.org

em que q_0 é o *parâmetro de desaceleração*

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (2.69)$$

A evolução temporal da matéria-energia é governada pela conservação do tensor energia-momentum $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, de cuja componente temporal resulta a *equação da continuidade*, também chamada de *equação dos fluidos*

$$\begin{aligned} \nabla_0 T^0_0 &= \frac{d\rho}{d\eta} + 3(\rho + p) \frac{1}{a} \left(\frac{da}{d\eta} \right) = \\ &= \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Para resolver as equações de Friedmann, é necessário estabelecer uma relação entre pressão e densidade de energia, objetivo alcançado através de uma *equação de estado*. A densidade de energia, em geral, possui contribuições de vários tipos de componentes numa descrição realística de um certo período do universo, mas consideraremos a seguir, somente as seguintes possibilidades, desprezando as demais contribuições: *Radiação*, que devido a efeitos relativísticos exerce pressão, e matéria não relativística incoerente, que não exerce pressão, também conhecida como *poeira* ou simplesmente *matéria*.

Essas possibilidades justificam-se na proposta do *Big Bang* quente; o universo em diferentes etapas de sua evolução encontrava-se em fases específicas em que, inicialmente mais denso e quente, era dominado por radiação. A expansão universal permi-

tiu que as temperaturas diminuíssem, estabelecendo as condições necessárias à formação de estruturas, onde a densidade de energia passa a ser dominada por um fluido perfeito que exerce pressão nula.

Supondo uma equação de estado genérica $p = \omega\rho$, com ω constante, podemos encontrar as soluções desejadas substituindo esta em (2.70), e, em seguida, realizando uma integração no tempo, que resulta

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.71)$$

permitindo-nos encontrar a evolução temporal da densidade de energia dada a equação de estado. A seguir, analisaremos o universo dominado por cada um dos tipos de matéria citados, fazendo uso da equação resultante da substituição de (2.55) em (2.54)

$$a'' + ka = \frac{4\pi G}{3}a^3(\rho - 3p), \quad (2.72)$$

pois nos interessa relacionar a evolução do fator de escala com a equação de estado e a geometria universal.

2.4.1 Universo dominado por radiação

Seguindo a cronologia do *Big Bang*, começamos pela radiação que satisfaz a equação de estado $\omega = 1/3$, tal que (2.72) fica

$$a'' + ka^2 = 0. \quad (2.73)$$

Esta equação possuiu soluções específicas dependendo da curvatura do universo

$$a(\eta) = C \begin{cases} \eta, & k = 0 \\ \sinh(\eta), & k = -1 \\ \sin(\eta), & k = 1 \end{cases} \quad (2.74)$$

onde a constante C foi definida tomando $a(\eta = 0) = 0$. Da definição de tempo conforme, podemos encontrar o tempo físico integrando as expressões acima

$$t(\eta) = C \begin{cases} \eta^2/2, & k = 0 \\ \cosh(\eta) - 1, & k = -1 \\ 1 - \sin(\eta), & k = 1 \end{cases} \quad (2.75)$$

destas expressões, ou ainda de (2.71), podemos observar que no caso para nós mais importante, o de um universo plano, temos

$$\rho \propto a^{-4}, \quad (2.76)$$

que, substituída na equação de Friedmann, resulta $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$ e, assim, a densidade de energia evolui no tempo segundo $\rho(t) \propto t^{-2}$. Encontrada a dependência do fator de escala no tempo, é fácil encontrar os demais parâmetros

$$\left\{ \begin{array}{l} t \propto 1/2H \\ \chi_p \propto t^{1/2}, \\ q \propto 1/2t \end{array} \right. \quad (2.77)$$

2.4.2 Universo dominado por matéria

A matéria não-relativística, por sua vez, exerce pressão nula, implicando $\omega = 0$ e

$$\rho \propto a^{-3}, \quad (2.78)$$

mostrando que a densidade de energia diminui com o aumento do volume do universo, resultado bastante intuitivo. A equação (2.72) assume a forma

$$a'' + ka = \text{const.} \quad (2.79)$$

que, por sua vez, dependendo da curvatura possui as seguintes soluções

$$a(\eta) = C \left\{ \begin{array}{ll} \eta^2, & k = 0 \\ \cosh(\eta) - 1, & k = -1 \\ 1 - \cos(\eta), & k = 1 \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Uma integração das últimas expressões nos leva, como há pouco, às relações entre o tempo físico e o conforme

$$t(\eta) = C \left\{ \begin{array}{ll} \eta^3/3, & k = 0 \\ \sinh(\eta) - \eta, & k = -1 \\ \eta - \sin(\eta), & k = 1 \end{array} \right. \quad (2.81)$$

levando-nos a $a(t) \propto t^{2/3}$, que acarreta $\rho \propto t^{-2}$, resultado curioso, em que a queda da densidade no tempo permanece a mesma. Com esses dados, encontramos para o caso plano

$$\left\{ \begin{array}{l} t \propto 2/3H \\ \chi_p \propto t^{1/3} \\ q \propto 1/3t \end{array} \right. \quad (2.82)$$

A seguir, apresentamos uma tabela sintetizando os resultados para os tipos de conteúdo estudados acima para $k = 0$:

Conteúdo	ω	$\rho(a)$	$\rho(t)$	$a(\eta)$	$a(t)$	χ_p	t	q
Matéria	0	a^{-3}	t^{-2}	η^2	$t^{2/3}$	$t^{1/3}$	$2/3H$	$1/3t$
Radiação	1/3	a^{-4}	t^{-2}	η	$t^{1/2}$	$t^{1/2}$	$1/2H$	$1/2t$

2.5 Introduzindo Λ : Universo de Einstein-De Sitter

Na época em que deduziu o conjunto de equações (2.21), Einstein entrou em um grande dilema, uma vez que a solução destas equações, como vimos, descrevem universos dinâmicos devido ao caráter estritamente atrativo da interação gravitacional; fatos que entraram em confronto direto com a crença filosófica vigente acerca da estaticidade do universo. Para balancear a curvatura gerada pela matéria e permitir uma solução estática, homogênea e esférica, Einstein propôs a adição da *constante cosmológica* Λ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.83)$$

a qual definiu *a posteriori* como seu "maior erro", após os trabalhos de Hubble e Friedmann. De fato, a presença de uma constante cosmológica não garante estabilidade ao universo, uma vez que mínimas perturbações na densidade de energia resultam em um universo que se expande indefinidamente, como veremos posteriormente, ou ainda em um *Big Crouch*, em que o universo colapsa sobre si.

Entretanto, ainda que geometricamente represente apenas uma constante de integração, a constante cosmológica tem recebido grande atenção da comunidade científica, sendo interpretada como uma espécie de energia de vácuo. Tal interpretação mostrou uma severa discrepância de várias ordens de grandeza entre os valores previstos pela Física de Partículas e a Cosmologia, ainda que ambas indiquem uma constante cosmológica positiva [12], gerando o *problema da constante cosmológica*.

Em vista de sua impotência, estudaremos as principais implicações da adição da constante Λ na descrição do universo, a começar pelas equações de Friedmann ¹¹

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (2.84)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.85)$$

Definindo a densidade de energia ρ_Λ e a razão entre esta e a densidade crítica para um universo plano,

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}; \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.86)$$

¹¹No sistema que utilizamos, Λ possui unidades de $(tempo)^{-2} = (comprimento)^{-2}$.

podemos reescrever a primeira equação de forma que

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.87)$$

onde reservamos a Ω estritamente as contribuições dos vários tipos de matéria, permitindo-nos classificar a geometria do universo da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Omega + \Omega_\Lambda &> 1 \quad , \quad \text{fechado}; \\ \Omega + \Omega_\Lambda &= 1 \quad , \quad \text{plano}; \\ \Omega + \Omega_\Lambda &< 1 \quad , \quad \text{aberto}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Meses após a apresentação das equações de Einstein, o astrônomo holandês Williem de Sitter apresentou soluções para estas equações, considerando um universo preenchido apenas pela constante cosmológica, conhecido como *universo de De Sitter*, do qual trataremos algumas das propriedades. Para uma descrição mais completa, vide [12, 13].

Nesse contexto, a constante cosmológica pode ser entendida como um fluido perfeito e, considerando-o não-interagente com os demais constituintes universais, possui sua própria equação de estado. Logo, sua respectiva equação da continuidade mostra que esse fluido exerce uma pressão *negativa* $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, que implica $\omega_\Lambda = -1$. Como veremos mais adiante, esse fluido desempenha um importante papel nos modelos inflacionários.

Uma análise qualitativa da equação da aceleração nos mostra que, se suficientemente grande, a constante cosmológica pode sobrepujar a atração gravitacional, e uma vez que contribui positivamente para a aceleração, resulta numa força repulsiva. Portanto, mostra-se uma candidata à explicação da expansão acelerada observada por Hubble, ainda que a matéria tenda a gerar uma desaceleração.

Para um puro universo de De Sitter, podemos encontrar a evolução temporal do fator de escala resolvendo sua respectiva equação da aceleração:

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} - a(t) \frac{\Lambda}{3} = 0; \quad \implies \quad a(t) = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (2.89)$$

Substituindo este resultado na primeira equação de Friedmann e resolvendo em termos da curvatura, vemos que esta é vinculada às constantes A e B :

$$K = \left(\frac{4AB}{3} \right) \Lambda. \quad (2.90)$$

de forma que para um universo plano, fixamos $B = 0$. Nos outros casos, temos $A = -B$ para uma curvatura negativa, e $A = B$ para uma curvatura positiva. Definindo o fator de Hubble constante $H_\Lambda \equiv \Lambda/3$ através destas relações, encontramos as

respectivas soluções

$$a(t) = H_{\Lambda}^{-1} \begin{cases} e^{tH_{\Lambda}}, & k = 0 \\ \text{Senh}(tH_{\Lambda}), & k = -1. \\ \text{Cosh}(tH_{\Lambda}), & k = 1 \end{cases} \quad (2.91)$$

A figura 2.3 representa graficamente estas soluções, onde vemos que em um certo instante $t > H_{\Lambda}^{-1}$, o comportamento do fator de escala tende à mesma forma funcional nos três casos, i.e., $a(t) \sim e^{tH_{\Lambda}}$. Uma propriedade interessante do espaço de De Sitter reside no fato de as escalas de Hubble serem constantes nesse limite

$$H = a^{-1}\dot{a} = H_{\Lambda}^{-1}. \quad (2.92)$$

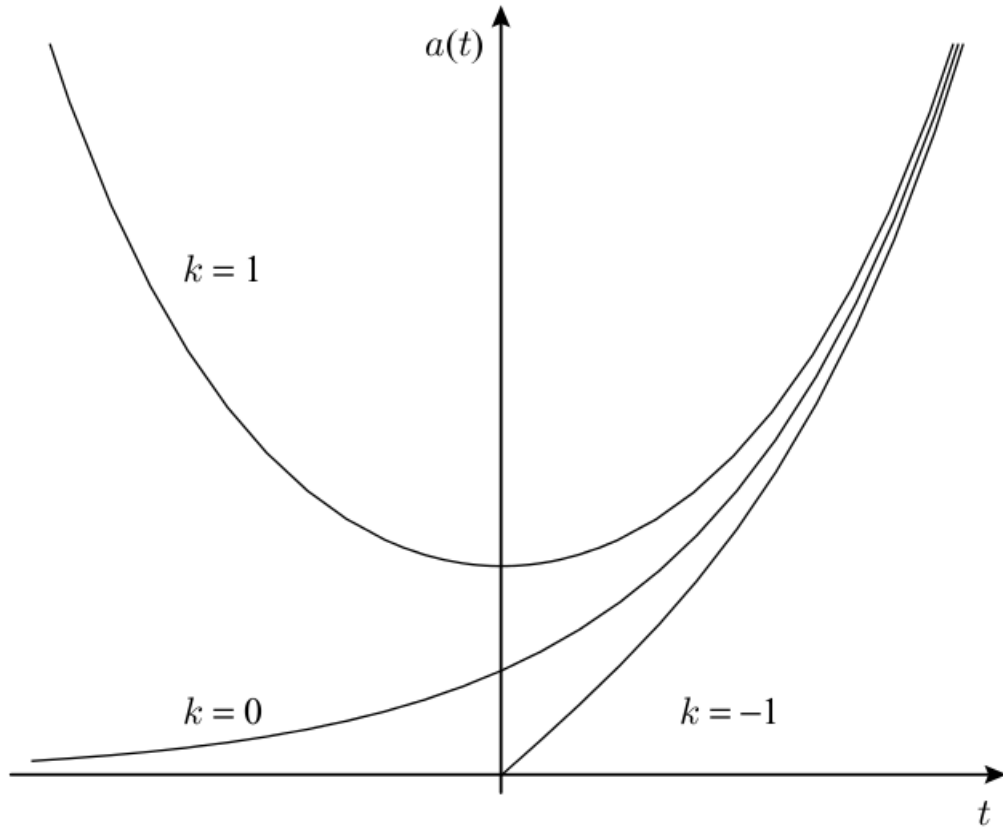


Figura 2.3 Evoluç ao temporal do fator de escala em um universo de De Sitter [12].

Sendo o fator de Hubble e a densidade de energia constantes, dizemos que o espaço de De Sitter não evolui verdadeiramente, possuindo uma invariância por *traslações temporais* [13].

2.6 Problemas do Modelo Cosmológico Padrão

Determinada a evolução do universo para os conteúdos em questão, veremos a seguir alguns dos principais problemas da teoria do Big Bang quente, que, por sua vez, são os grandes motivadores dos modelos inflacionários, abordados nos capítulos seguintes. Os problemas que citaremos a seguir certamente não são os únicos, mas, para nossos objetivos, são suficientes; de fato, outros problemas como o surgimento (e abundância) de defeitos topológicos como monopolos magnéticos, paredes de domínio e cordas cósmicas, ainda que excluídos pela observação, são presentes no MCP. Também acredita-se que pequenas inomogeneidades no universo primordial levaram à produção de estruturas de larga escala, como galáxias, através da instabilidade gravitacional, cujo espectro não é predito pelo MCP, demandando física além desse.

2.6.1 Problema da Planura

Segundo as medições do WMAP, o parâmetro de densidade atual é $\Omega_0 \simeq 1$ com imprecisões da ordem de 1% [14, 25], indicando, com grande precisão, a geometria euclidiana para o universo atual. Em consequência direta, a planura do universo remoto chegaria a incríveis níveis de exatidão, o que só acontece sob circunstâncias ímpares (para dizer o mínimo), como veremos a seguir. Partindo da dependência da densidade de energia em função do fator de escala (2.60), temos

$$\rho(a) = Ca^{-3(1+\omega)}, \quad (2.93)$$

e, usando a definição do parâmetro de densidade $\Omega(a) = \rho(a)/\rho_c$ na equação de Friedmann (2.63), obtemos

$$\Omega(a)^{-1} = 1 + Ca^{(1+3\omega)}. \quad (2.94)$$

Diferenciando em função de a ,

$$\frac{d\Omega}{da} = -(1+3\omega)\frac{\Omega^2}{a} \left(Ca^{(1+3\omega)} \right), \quad (2.95)$$

que resulta

$$\frac{d\Omega}{d \ln a} = (1+3\omega)\Omega(\Omega-1). \quad (2.96)$$

Para $\Omega = 1$ na última equação, o universo tem um ponto fixo instável, se a condição forte de energia for satisfeita¹²:

$$\frac{d|\Omega-1|}{d \ln a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+3\omega > 0, \quad (2.97)$$

¹²Esta é outra maneira de definir a condição forte, derivada da primeira equação de Friedmann.

evidenciando que as condições iniciais às quais universo primordial estaria sujeito deveriam ser extremamente específicas para que se obtenha o atual universo observável. Nesse sentido, dizemos que é necessário um ajuste-fino (*fine-tuning*) extremo das condições iniciais.

Para termos uma noção quantitativa deste fato, escrevemos a equação de Friedmann da seguinte forma [16]

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \varepsilon T^2, \quad (2.98)$$

onde T é a temperatura e a grandeza $\varepsilon \equiv k/(aT)^2$ é relacionada com a densidade de entropia do horizonte, tal que $\varepsilon \propto s^{-2/3}$. Logo, uma vez que s conserva-se, pois é uma grandeza comóvel, ε também é conservada. Sabendo que $s \propto T^{-3/2}$, observamos que a entropia do horizonte é proporcional ao seu volume. Substituindo (2.61) na última expressão, temos

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho_c} = \frac{3\varepsilon T^2}{8\pi G\rho_c} \sim T^{-2}. \quad (2.99)$$

Vemos que, para a escala de energia do universo primordial, são geradas ínfimas perturbações na densidade de energia. Para $T \sim \mathcal{O}(10^{15})\text{GeV}$, as perturbações são da ordem de $\mathcal{O}(10^{-50})$! O MCP carece de uma explicação para tamanho ajuste das condições iniciais.

2.6.2 Problema do Horizonte

Outro grave problema do modelo do *Big Bang* reside no fato de que este não explica por que, no passado remoto do universo, regiões e antes estavam causalmente desconexas, hoje estão em contato causal, segundo evidências empíricas.

Para uma visualização clara disso, lembremos da definição que demos ao contato causal entre pontos distintos do universo através da distância comóvel máxima percorrida pela luz

$$\chi_p(\eta) \equiv \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int \frac{da}{a^2 H} = \int \frac{d \ln a}{a H}, \quad (2.100)$$

em que $(aH)^{-1}$ é o *raio de Hubble comóvel*, o qual podemos relacionar com o fator de escala, usando a equação (2.71) e o resultado da seção anterior $\Omega \propto a^{-(1+3\omega)}$,

$$(aH)^{-1} \propto a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \quad (2.101)$$

Levando em consideração os diferentes tipos de matéria já citados, encontramos uma

relação entre o horizonte de partícula e o fator de escala

$$\chi_P = \int \frac{d \ln a}{aH} \propto \begin{cases} a, & \omega = 1/3 (\text{radiação}) \\ a^{1/2}, & \omega = 0 (\text{poeira}), \end{cases} \quad (2.102)$$

de forma que o horizonte comóvel cresce monotonicamente com o tempo em ambos os casos. Claramente, em um universo que se expande aceleradamente, regiões que hoje estão dentro do horizonte atual, não estavam em contato causal no universo primordial.

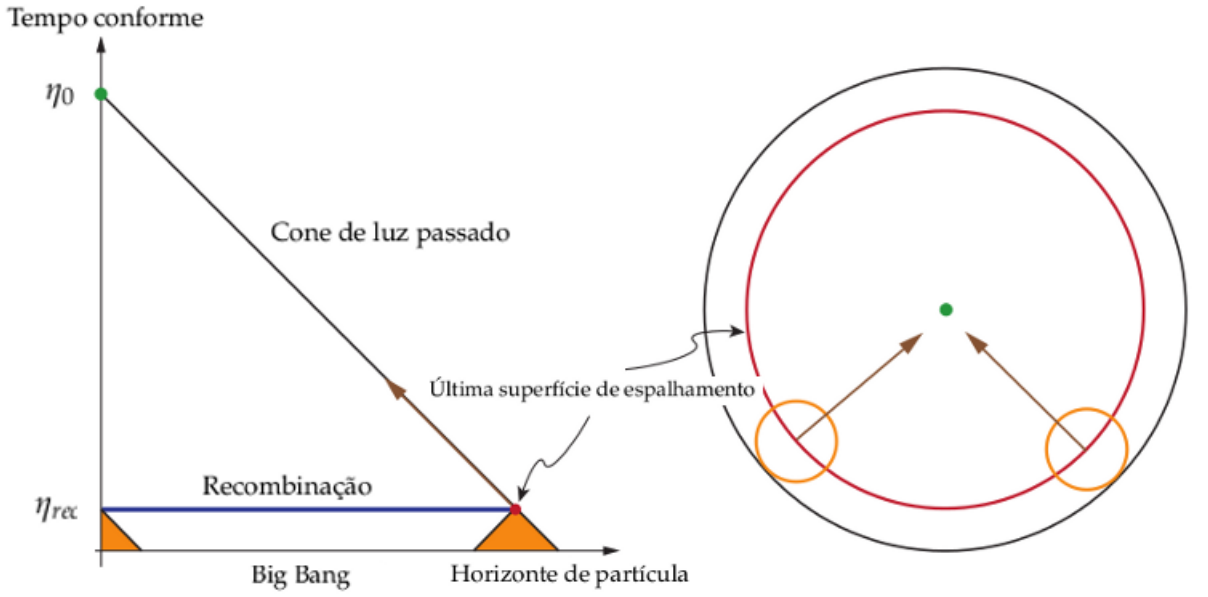


Figura 2.4 Diagrama conforme que evidencia o problema do horizonte, mostrando a última superfície de espalhamento à direita. O cone de luz maior representa o horizonte atual, o qual engloba dois eventos simultâneos que ocorreram na época da recombinação, mostrando que, nesta época, estavam causalmente desconectados. Adaptado de [17].

Construir um diagrama conforme nos ajudará a colocar a situação de forma mais concreta e, para isso, consideremos o seguinte: lembremos que o horizonte de partícula para matéria e radiação em um universo plano eram tais que

$$\chi_P \propto \begin{cases} \eta, & \omega = 1/3 \quad (\text{radiação}) \\ \eta^2, & \omega = 0 \quad (\text{poeira}) \end{cases} \quad (2.103)$$

Logo, em um universo dominado por estes conteúdos, não existe tempo conforme negativo, o que nos leva a um limite inferior para a origem do diagrama conforme.

No final da era dominada por radiação, a recombinação, houve a última superfície de espalhamento de fótons dessa época, conhecida como CMBR, de forma que o

cone de luz de um evento que ocorre atualmente, η_0 , contem o cone de luz de eventos que ocorreram simultaneamente na recombinação η_{rec} . A figura 2.2 representa estes fatos, mostrando que, diferentemente do que as observações da CMBR indicam, regiões como estas não podem estar em equilíbrio térmico uma vez que seus cones de luz não se interceptam.

Considere o volume do horizonte atual V_0 e o da recombinação V_{rec} que é encerrado pela última superfície de espalhamento. Podemos relacioná-los, usando o fato decorrente da equação (2.98) de que a entropia do horizonte é inversamente proporcional ao seu volume:

$$\frac{V_0}{V_R} = \frac{s_0}{s_{rec}} = \left(\frac{T_{rec}}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sim 10^5. \quad (2.104)$$

Logo, nosso horizonte atual era dividido em 10^5 regiões que não estavam ligadas de forma causal na época da recombinação. Entretanto, o absurdo equilíbrio térmico da CMBR medido pelo COBE nos extremos do universo observável contradiz estes fatos, indicando uma radiação de fundo altamente isotrópica. De fato, as últimas medições realizadas pelos experimentos mostram uma temperatura de 2,725K com desvios da ordem de (apenas) $10^{-4}K$! [18]. Novamente o MCP não possui uma resposta.

DEFININDO A FASE INFLACIONÁRIA

Neste capítulo, mostramos uma maneira de definir a fase inflacionária, e como esta resolve os problemas da planura e do horizonte discutidos no capítulo anterior[17, 19, 20, 21, 22]. Fazendo uso de um campo escalar (Inflaton) para modelar este período, derivamos as equações e objetos que regem sua dinâmica através do princípio de mínima ação[7, 8, 12]. Em seguida obtemos as equações de Einstein através deste princípio, considerando a ação de Einstein-Hilbert minimamente acoplada com a ação de um campo escalar[7, 8]. Ao fim do capítulo, formalizamos a aproximação proposta por Linde em termos do potencial do campo escalar[20, 23, 24], obtendo formas analíticas para as grandezas relevantes para a análise dos modelos inflacionários no capítulo seguinte.

3.1 Solucionando os problemas do MCP

Com o objetivo de definir a fase inflacionária, partiremos da primeira equação de Friedmann (2.63), observando que

$$a^2 H^2 |\Omega - 1| = |k| = \text{Const.} \quad (3.1)$$

Nosso objetivo é comparar escalas de distância segundo os resultados obtidos em (2.104). Consideremos novamente uma determinada distância física qualquer D entre pontos no espaço-tempo, tal que $D \propto a$ e, lembrando do raio de Hubble $(H)^{-1}$, temos

$$\left(\frac{D}{(H)^{-1}} \right) \propto |\Omega - 1|^{-1/2}. \quad (3.2)$$

Se considerarmos a distância no tempo atual D_0 da ordem do raio de Hubble atual $D_0/(H_0)^{-1} \simeq 1$, podemos comparar esta razão com a razão para um certo tempo arbitrário no passado, tendo em mente a expansão universal, de forma que

$$\left(\frac{D}{(H)^{-1}} \right) \propto \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega(\eta) - 1} \right)^{1/2} \gg 1, \quad (3.3)$$

evidenciando que pontos no espaço-tempo separados por uma distância que hoje é comparável ao raio de Hubble atual, eram separados por distâncias muito maiores que o raio de Hubble no passado, desde que o universo afaste-se da planura. Para os tipos de matéria que consideramos anteriormente, observamos que o horizonte $d \propto H^{-1}$, de forma que, em coordenadas comóveis, a última relação continua válida

$$\left(\frac{a\chi}{(H)^{-1}} \right) = \left(\frac{\chi}{(aH)^{-1}} \right) \gg 1. \quad (3.4)$$

O raio de Hubble mede o volume em que o contato causal é possível em um determinado tempo, para um determinado observador, como é possível inferir da definição da lei de Hubble, entretanto, a relação acima afirma que estes pontos internos ao raio de Hubble atual no passado não estavam em contato causal. Em termos de coordenadas comóveis, vemos que, enquanto o horizonte permanece constante durante a expansão, o raio de Hubble diminui, fazendo com que os pontos outrora internos a este não mais o sejam.

Portanto, esta diminuição do raio de Hubble resolve qualitativamente o problema do horizonte, pois permite explicar o porque da isotropia da CMBR. Para encontrar uma forma matemática de implementar esta condição, observemos, primeiramente, que derivando (3.3) em função do tempo conforme, encontramos uma forma equivalente da condição (3.4) para um universo que evolui afastando-se da planura

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{(aH)^{-1}}{\chi} \right)^2 \propto \frac{d|\Omega - 1|}{d\eta} > 0. \quad (3.5)$$

A partir desta relação podemos postular uma fase em que o universo evolui para a planura, em que distâncias comóveis aumentam em relação ao tamanho do horizonte comóvel

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d\eta} \propto \frac{d}{d\eta} \left(\frac{(aH)^{-1}}{\chi} \right)^2 < 0, \quad (3.6)$$

chamada de *inflação cosmológica*. Baseado nos estudos anteriores, precisamos saber que tipo de matéria satisfaz essa condição e, portanto, sua respectiva equação de estado. Lembrar que a equação da aceleração possui dependência explícita com a pressão e a densidade de energia pode nos dar uma pista de por onde começar. Observemos, primeiramente, que

$$(aH)^{-2} = a^2 \left(\frac{da}{d\eta} \right)^{-2}, \quad (3.7)$$

e, derivando em função de η ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (aH)^{-2} &= -2(aH)^{-1} a^2 \left(\frac{da}{d\eta} \right)^{-2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 - \frac{1}{a} \left(\frac{d^2a}{d\eta^2} \right) \right\} \\ &= (aH)^{-3} a^2 (\rho + 3p). \end{aligned} \quad (3.8)$$

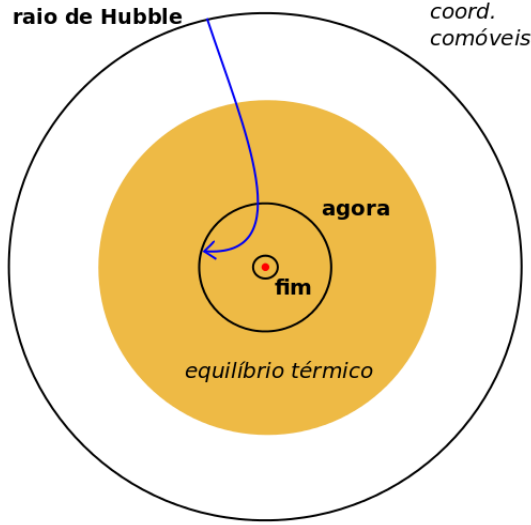


Figura 3.1 Esquema que mostra o raio de Hubble comóvel inicialmente maior que a região colorida que delimita o contato causal. A inflação diminuiu o raio de Hubble, de forma que mesmo após a seu término, o universo observável permanece dentro da região causalmente conexa. Adaptado de [17]

onde usamos a parte espacial da equação de Einstein (2.55). Usando a condição inflacionária (3.6), vemos que

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{(aH)^{-1}}{\chi} \right)^{-2} \propto \left(\frac{(aH)^{-1}}{\chi} \right)^3 a^2 (\rho + 3p) < 0, \quad (3.9)$$

resulta numa equação de estado em que a pressão é negativa, de forma que a expansão universal é acelerada; condições que podem ser igualmente usadas para definir a fase inflacionária

$$\omega < -\frac{1}{3} \implies \ddot{a} > 0. \quad (3.10)$$

A forma mais natural de implementar estas condições consiste em considerar que o universo passa por uma *fase de De Sitter* na qual a densidade energia de vácuo ρ_Λ é dominante, com $\omega = -1$. Assim, na equação (2.59) o termo k/a tende rapidamente a zero pois $\ddot{a} > 0$, o que resulta

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \simeq \text{Constante}, \quad (3.11)$$

mostrando que distâncias da ordem do raio de Hubble são constantes nesse período. A solução desta equação mostra que o fator de escala cresce exponencialmente no tempo

$$a \propto \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t, \quad (3.12)$$

e, assim, de acordo com os resultados obtidos na seção 2.5. Logo, as distâncias comóveis também crescem exponencialmente, forçando o parâmetro de densidade chegar rapidamente à unidade e a consequente planura do universo.

Dissemos que esta é apenas uma *fase* de De Sitter porque, se o parâmetro de Hubble não evolui no tempo, a inflação continua indefinidamente, tornando o universo um enorme vazio com temperaturas extremamente baixas - um puro universo de De Sitter, que em nada condiz com nosso atual universo. Portanto, a inflação deve findar-se em algum tempo, onde a energia de vácuo, de alguma forma, deve transformar-se em energia térmica para o universo. Este processo de aquecimento (*reheating*, em inglês), consiste no decaimento da energia do vácuo em partículas, resultando em um massivo aumento na entropia universal, assim dando início a era dominada pela radiação.

3.1.1 Quantificando a inflação

Nesse contexto, é de grande interesse definir uma grandeza física que meça a "quantidade de inflação", i.e., o *número de e-foldings*

$$\mathcal{N} \equiv \int_{t_f}^{t_i} H dt = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \quad (3.13)$$

medido no intervalo em que ocorre a inflação, onde i e f indicam respectivamente os instantes inicial e final. Podemos, agora, nos questionar sobre o número mínimo de *e-foldings* necessários para resolver os problemas da planura e do horizonte. Para responder esta questão, notemos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H}. \quad (3.14)$$

Ao fim do período inflacionário, a expansão universal deve retardar-se como visto no capítulo anterior e, assim, $\ddot{a} < 0$. Esta transição da evolução do universo de um período inflacionário para a evolução de acordo com MCP chama-se *saída graciosa*. Tendo em vista este fato e derivando a última equação, obtemos $2H\dot{H} + \ddot{H} < 0$ tal que $|\ddot{H}| < 2H\dot{H}$. No instante t_f em que cessa a inflação, $\ddot{a} \rightarrow 0$ permitindo-nos estimar este instante

$$H \approx \text{Const.} \quad \implies \quad t_f \sim \frac{H_i}{|\dot{H}_i|}. \quad (3.15)$$

A teoria das perturbações na densidade de energia diz que a taxa de expansão inicial $\dot{a}_i$ deveria ser muito menor que a taxa de expansão atual $\dot{a}_0$ para prevenir uma grande perturbação inicial[12] e, de fato, recentes observações da CMBR exigem que

as perturbações na densidade de energia o horizonte atual não excedam 10^{-5} , ou equivalentemente $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 10^{-5}$ [12, 16]. Usando a regra da cadeia podemos reescrever esta condição

$$\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_f} \frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} = \left(\frac{a_i H_i}{a_f H_f} \right) \frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} < 10^{-5}. \quad (3.16)$$

Do capítulo anterior, sabemos que o fator de escala é inversamente proporcional à temperatura, o que nos permite estimar

$$\frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_0} \sim \frac{a_f t_0}{a_0 t_f} \sim \frac{T_0}{T_{pl}}. \quad (3.17)$$

A temperatura de Planck nos dá a ordem de grandeza da temperatura do universo primordial, i.e., $T_{pl} \sim 10^{32}K$, e a temperatura atual é da ordem da unidade. O tempo em que a inflação chega ao fim é estimado em $t_f \sim 10^{-43}s$ e o tempo atual é $t_0 \sim 10^{17}s$, de forma que $\dot{a}_f/\dot{a}_0 \sim 10^{28}$. Assim, obtemos

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^{33} \frac{H_i}{H_f}. \quad (3.18)$$

Assumindo que a variação do fator de Hubble é muito pequena no início da inflação, podemos aproximar (3.14) para este tempo, obtendo

$$\frac{a_f}{a_i} \sim e^{H_i(t_f-t_i)} \implies \frac{a_f}{a_i} \sim \exp\left(\frac{H_i^2}{|\dot{H}_i|}\right) > 10^{33}. \quad (3.19)$$

onde na expressão da esquerda usamos a regra da cadeia e, em seguida, uma integração em termos do fator de escala, posteriormente substituindo as variáveis temporais, obtendo a expressão da direita. Da definição (3.13), observamos que são necessários mais que 75 *e-foldings* para que haja uma saída graciosa de um período inflacionário bem sucedido em resolver os problemas do MCP.

3.1.2 Diagrama Conforme

Como vimos anteriormente, a diminuição do raio de Hubble em relação ao horizonte comóvel resolve o problema do horizonte, uma vez que explica o equilíbrio térmico observado em regiões que antes não poderiam estar em contato causal. Para entender este processo em termos do diagrama conforme que usamos quando tratamos deste problema, partimos da definição de tempo conforme, lembrando que durante a inflação $H \sim H_\Lambda \sim \text{constante}$, implicando

$$d\eta = a^{-1}dt = \exp(-tH_\Lambda)dt. \quad (3.20)$$

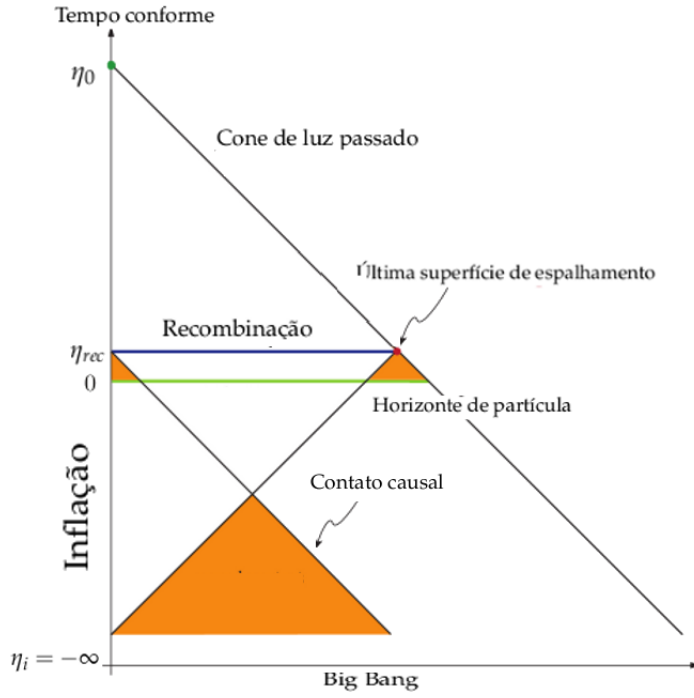


Figura 3.2 A inflação ao empurrar a origem para $-\infty$ permite que os cones de luz interceptem-se no passado remoto, permitindo o contato causal entre as respectivas regiões. Adaptado de [17].

Integrando a última expressão, somos levados à seguinte forma de escrever o fator de escala em termos do tempo conforme

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_\Lambda \eta}. \quad (3.21)$$

Desta expressão percebemos que a singularidade $a = 0$ ocorre quando $\eta \rightarrow -\infty$, fato que permite as regiões passadas dos cones-de-luz de dois eventos que na época da recombinação estavam causalmente desconexos, interceptarem-se, pois afasta a origem do plano (η, χ) para um ponto arbitrariamente distante. Por outro lado, quando $\eta \rightarrow 0$ o fator de escala diverge e, embora pareça um resultado não físico, possui uma explicação simples: o instante $\eta = 0$ é, na verdade, o instante em que cessa o período inflacionário e, portanto, corresponde ao limite em que o tempo físico $t \rightarrow +\infty$ no espaço de De Sitter, onde o fator de Hubble é sempre constante[17].

3.2 Inflação Como Uma Teoria de Campo Escalar

3.2.1 Dinâmica do Campo Escalar

Tensor energia-momentum

A Física de Partículas possui fortes indícios da existência de partículas modeladas por campos escalares, ainda que nenhuma tenha sido observada até então. O campo escalar também é de vital importância para o processo inflacionário, uma vez que satisfaz as condições necessárias a este regime. Assim, iniciaremos o estudo desse campo a partir de sua ação

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (3.22)$$

O termo $\sqrt{-g}$, em que g o determinante do tensor métrico, surge da necessidade de que a ação, sendo um escalar, seja invariante por transformações gerais de coordenadas, o que implica o elemento de volume ($d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$), também transformar-se como um escalar. De fato, a lei de transformação do elemento de volume no espaço-tempo de Friedmann, quando realizamos uma mudança de coordenadas $X \rightarrow x$, é tal que

$$d^4X = \frac{1}{\mathcal{J}} d^4x \quad (3.23)$$

em que $\mathcal{J}$ é o determinante jacobiano. Realizando a transformação de coordenadas acima para o tensor métrico e, em seguida, calculando o determinante para a lei de transformação, encontramos $\mathcal{J} = 1/\sqrt{-g}$. Assim, a lei de transformação para o elemento de volume nos mostra que $\sqrt{-g} d^4x$ é, de fato, um invariante.

Para uma ação estacionária, a variação em termos do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, por exemplo, deve anular-se

$$\delta \mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g - \frac{\mathcal{L}}{2\sqrt{-g}} \delta \sqrt{-g} \right\} = 0. \quad (3.24)$$

Para encontrar a variação δg , partimos da definição de determinante em termos do tensor de Levi-Civita de ordem n

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{n!} \epsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_n} \epsilon^{\sigma_1 \dots \sigma_n} g_{\lambda_1 \sigma_1} \dots g_{\lambda_n \sigma_n}, \quad (3.25)$$

notando que, na variação da última expressão, podemos renomear livremente os índices mudos, obtendo

$$\delta g = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_n} \epsilon^{\sigma_1 \dots \sigma_n} g_{\lambda_1 \sigma_1} \dots \delta g_{\lambda_n \sigma_n}, \quad (3.26)$$

e que estas expressões relacionam-se através de $\delta g = g(g^{\lambda\sigma}\delta g_{\lambda\sigma})$. Devemos notar, também, que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = n$, e derivando ambos os lados dessa igualdade, encontramos $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Este resultado nos permite escrever

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

e, assim, substituindo os últimos resultados na variação da ação, encontramos

$$\delta\mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}g_{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

Partindo da definição do tensor energia-momentum em termos da ação

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathcal{L}g^{\mu\nu} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (3.29)$$

e sabendo que a lagrangeana de um campo escalar ϕ em termos do potencial $V(\phi)$ é dada por $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$, encontramos a forma explícita que o tensor energia-momentum desse campo escalar assume

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\partial_\lambda\phi\partial_\sigma\phi + V(\phi) \right). \quad (3.30)$$

Como no capítulo anterior, consideramos o conteúdo de matéria do universo comportando-se como um fluido perfeito descrito por (2.48), devemos considerar que o campo escalar em questão assume as propriedades desse fluido. Os coeficientes de (3.30) são

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 - V(\phi) \quad (3.31)$$

$$T_{ii} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + V(\phi) \quad (3.32)$$

$$T_{0i} = T_{i0} = -\partial_0\phi\partial_i\phi. \quad (3.33)$$

Fazendo uma correspondência entre os coeficientes das duas formas do tensor energia-momentum, observamos que as componentes que dependem do gradiente espacial anulam-se, significando que o campo escalar não pode depender do espaço em si, consequência direta das propriedades de homogeneidade e isotopia do fluido perfeito. É razoável assumir o campo como homogêneo, pois, observando que o gradiente físico relaciona-se com o comóvel por

$$(\partial_i)_{\text{físico}} = a^{-1}(t)(\partial_i)_{\text{comóvel}} \quad (3.34)$$

fica claro que, devido ao crescimento exponencial do fator de escala durante a inflação, estes termos tendem rapidamente a zero. Portanto, em termos do tempo conforme,

obtemos

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 + V(\phi) \quad (3.35)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 - V(\phi),$$

e, assim, podemos relacionar diretamente o campo escalar e sua respectiva equação de estado

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 + V(\phi)} \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 = p + \rho = \rho(1 + \omega). \quad (3.37)$$

Estas expressões são de grande utilidade, pois possibilitam substituir a dependência das variáveis de estado nas equações de Friedmann pelo campo escalar

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2}, \quad (3.38)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{8\pi G}{3} a^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{a} \right)^2 - V(\phi) \right]. \quad (3.39)$$

Vemos que, usando (2.56), é imediato encontrar estas equações em termos do tempo físico. Obviamente, também é possível reescrever a equação da continuidade em termos de ϕ , que resulta exatamente na equação do movimento para o campo escalar, a qual deduziremos a seguir do princípio de mínima ação.

Equação do movimento

Os resultados acima foram obtidos a partir da variação da ação em termos do tensor métrico, entretando, podemos variar a ação também em termos do campo escalar, tal que

$$\delta \mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \{ g_{\mu\nu} \partial_\mu \phi \delta(\partial_\nu \phi) - V_{,\phi}(\phi) \delta \phi \} \quad (3.40)$$

$$= \int d^4x \{ \partial_\nu [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \sqrt{-g} \delta \phi] - [\partial_\nu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \phi) - \sqrt{-g} V_{,\phi}(\phi)] \delta \phi \}, \quad (3.41)$$

em que realizamos uma integração por partes no primeiro termo. Descartando o termo de superfície, obtemos a equação do movimento do campo escalar conhecida como *equação de Klein-Gordon*

$$\square\phi + V_{,\phi}(\phi) = 0, \quad (3.42)$$

onde $\square$ é a versão covariante do operador de D'Alembert

$$\square\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \phi). \quad (3.43)$$

Em um universo com curvatura nula, sabemos que a métrica do espaço tempo relaciona-se com a métrica do espaço de Minkowsky através de $g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}$, em que $g = a^8(\eta)\det(\eta_{\mu\nu}) = -a^8(\eta)$. Este resultado possibilita escrever a equação do movimento em uma forma mais explícita, usando o fator de Hubble em termos do tempo conforme

$$\begin{aligned} \square\phi &= a^{-4}\partial^\mu (a^4\partial_\mu\phi) \\ &= a^{-4} [\partial^0 (a^4\partial_0\phi) + \nabla^2\phi] \\ \hookrightarrow 0 &= \phi'' + 2aH\phi' + a^2V_{,\phi}(\phi), \end{aligned} \quad (3.44)$$

que é exatamente a equação da continuidade após a substituição das relações (3.35) e descartando o laplaciano. Em termos do tempo físico, temos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi}(\phi) = 0. \quad (3.45)$$

O interesse nesta forma da equação surge devido ao segundo termo, uma vez que este, sendo proporcional ao fator de Hubble, mostra que a dinâmica do campo escalar é diretamente afetada pela expansão universal. Também é importante notar que, sendo proporcional a velocidade, este mesmo termo funciona como um termo de fricção ou amortecimento, aumentando o tempo que o campo escalar leva para atingir o mínimo do potencial.

3.2.2 Ação de Einstein-Hilbert

Mostraremos, a seguir, como obter as equações de campo de Einstein através ação de matéria que consideraremos minimamente acoplada à ação de Einstein-Hilbert $S[\phi]$

$$\mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k} R + \mathcal{L} \right\}. \quad (3.46)$$

Devemos variar a ação acima em termos do tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$, antes lembrando que a variação da ação de matéria pode ser escrita da seguinte forma, de acordo

com (3.28) e (3.29)

$$\delta\mathcal{S}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (3.47)$$

Assim, usando (3.27) obtemos

$$\delta(\mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}[\phi]) = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.48)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k} \left[\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.49)$$

A variação do escalar de curvatura é tal que $\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, resultado que requer uma boa quantidade de paciência para ser provado; para maiores detalhes, veja [7], por exemplo. Do princípio de mínima ação, encontramos

$$0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.50)$$

que, finalmente, nos leva às equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}. \quad (3.51)$$

Por fim, salientamos que a seguinte forma da ação de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k} (R + 2\Lambda) \right\} \quad (3.52)$$

leva ao conjunto de equações com a presença da constante cosmológica, (2.83).

3.3 Aproximação *Slow-Roll*

A relação (3.38), tendo em mente a fase de De Sitter que implementa a inflação, nos permite observar que os termos dependentes do campo escalar em (3.35) vão rapidamente a zero devido ao crescimento esponencial do fator de escala. Logo, a densidade de energia do universo é preponderantemente a energia potencial do *inflaton*, $\rho \simeq V(\phi)$, e assim

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi) \quad \implies \quad H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (3.53)$$

Portanto, podemos inferir que, nesta fase, a contribuição da energia cinética é desprezível em relação à energia potencial do campo, fazendo com que o inflaton desça suave e lentamente até atingir o mínimo de $V(\phi)$. O potencial, por sua vez, deve ser suficientemente plano, i.e., variar lentamente com a expansão universal para satisfazer

esses requisitos. A partir de agora, escreveremos nossas equações em termos da massa de Planck $M_{pl} = 1/\sqrt{G}$. A forma quantitativa desta condição surge reescrevendo a equação da continuidade, levando em consideração a condição (3.53) e a equação de estado $\omega \simeq -1$:

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln a} = -3(1 + \omega) \quad \implies \quad \frac{d \ln V(\phi)}{d \ln a} \simeq 0. \quad (3.54)$$

Essas condições definem a chamada *aproximação slow-roll* (ASR) e podem ser apropriadamente definidas em termos potencial [23, 24]. Para isso, tomemos o quadrado de ambos os lados da equação (3.45), notando que o termo de segunda ordem é desprezível e, usando (3.53), obtemos

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (3.55)$$

onde adotamos $V_{,\phi}$ como a derivada do potencial em ϕ e definimos o parâmetro $\epsilon(\phi)$, relacionando-o com a declividade do potencial associado ao campo escalar, que, como sabemos, é de grande interesse no contexto em questão. Esta definição mostra-se ainda mais útil, pois permite reescrever tanto a equação de estado quanto equação da aceleração em termos desta condição:

$$\omega = \frac{2}{3}\epsilon(\phi) - 1, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = [1 - \epsilon(\phi)] H^2. \quad (3.56)$$

Outra condição de slow-roll pode ser obtida derivando (3.45) em termos do inflaton, usando (3.57) e notando que $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ em, i.e.,

$$|\eta(\phi)| \equiv \frac{3M_{pl}^2}{8\pi} \left| \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \right| \ll 1. \quad (3.57)$$

Logo, as condições que um potencial candidato a gerar o cenário inflacionário deve satisfazer são sintetizadas simplesmente por $\epsilon(\phi) \ll 1$ e $|\eta(\phi)| \ll 1$. Entretanto, adiantamos que estas condições são suficientes, porém não necessárias, para que ocorra a inflação. Para isto, voltemos a (3.45), desprezando novamente o termo de segunda ordem, resultando

$$\dot{\phi} = -(3H)^{-1} V_{,\phi}. \quad (3.58)$$

Nas manipulações a seguir, trabalharemos por conveniência com o tempo físico e, assim, derivando ambos os lados de (3.35) em termos desse, trabalhando o lado esquerdo e usando (3.53) encontramos, resolvendo para $\dot{H}$

$$\dot{H} = \frac{4\pi}{3HM_{pl}^2} \dot{\phi} V_{,\phi}, \quad (3.59)$$

onde usamos a regra da cadeia. Por hora, guardemos estes resultados, voltando a atenção para o fato de que $\ddot{a} > 0$ durante a inflação, implicando

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \implies \frac{\dot{H}}{H^2} > -1. \quad (3.60)$$

Substituindo (3.58) e (3.59) na última expressão, chegamos à seguinte condição

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 < 1, \quad (3.61)$$

que é, de fato, a condição *necessária* para que se inicie um período inflacionário.

É também possível mostrar que o potencial, em termos de sua declividade, deve satisfazer alguns vínculos numéricos. Voltando a (3.53), podemos relacionar a condição da esquerda com a expressão da direita, resultando

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{(M_{pl} V_{,\phi})^2}{48\pi V} \implies \left| \frac{M_{pl} V_{,\phi}}{V} \right| \ll \sqrt{48\pi}. \quad (3.62)$$

Derivando a última equação em função do tempo, obtemos

$$\ddot{\phi} = (2\dot{\phi})^{-1} \frac{M_{pl}^2}{48\pi} \dot{\phi} \left[2 \left(\frac{V_{,\phi} V_{,\phi\phi}}{V} \right) - \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 V_{,\phi} \right]$$

e, usando novamente $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \simeq -V$, encontramos

$$\left| \frac{M_{pl}^2 V_{,\phi\phi}}{V} \right| \ll 24\pi. \quad (3.63)$$

Definidas as condições da aproximação e seus parâmetros, podemos, agora, discutir a sua relevância no contexto inflacionário. A maior vantagem de sua utilização é a redução da ordem das equações de Friedmann e Klein-Gordon, como vemos de (3.53) e (3.58) respectivamente, pois mesmo para potenciais simples, são de difícil resolução.

Assim, podemos facilmente obter formas analíticas tanto para o campo escalar quanto para o fator de escala como segue: Primeiramente, resolvemos (3.53) em termos do fator de escala, obtendo

$$a(t) \propto \exp \left\{ M_{pl}^{-1} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int [V(t')]^{1/2} dt' \right\}. \quad (3.64)$$

Já a equação (3.58) deve ser resolvida para o parâmetro de Hubble a fim de retirar a dependência do mesmo em (3.53), resultando

$$t(\phi) \propto -2M_{pl}^{-1} \sqrt{6\pi} \int \frac{[V(\phi')]^{1/2}}{V_{,\phi'}(\phi')} d\phi'. \quad (3.65)$$

Logo, dado um certo potencial em termos do campo escalar, é possível encontrar $\phi(t)$ e $V(t)$ da última expressão, conseqüentemente permitindo encontrar $a(t)$. Finalmente, se conveniente for, é possível escrever (3.64) como uma função do campo escalar ao substituir (3.65), i.e.,

$$a(\phi) \propto \exp \left\{ -8\pi M_{pl}^{-2} \int \frac{V(\phi')}{V_{,\phi'}(\phi')} d\phi' \right\}. \quad (3.66)$$

Esta aproximação também se mostra muito útil no cálculo do número de *e-foldings*, que pode ser escrito diretamente em termos do potencial

$$\mathcal{N} = \int_{t_f}^{t_i} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V(\phi)}{V_{,\phi}(\phi)} d\phi, \quad (3.67)$$

onde usamos (3.53) e (3.58).

MODELOS INFLACIONÁRIOS

De posse do número de *e-foldings* e da ASR apresentados no capítulo anterior, discutimos a seguir alguns dos mais proeminentes potenciais inflacionários: inflação caótica [31], híbrida [33, 34] e natural [40, 41], evidenciando as ligações de alguns destes com a Física de Partículas, antes mostrando algumas das formas de classificar os vários cenários inflacionários existentes e revisando as principais características da velha [27] e nova inflação [23, 24, 26]. De fato, um dos maiores interesses no contexto inflacionário é a construção de uma teoria de partículas que seja compatível com este cenário. Ressaltamos que os modelos aqui apresentados também dependem fortemente das restrições e resultados advindos do formalismo das perturbações na densidade de energia, a qual determina o surgimento de estruturas de larga escala no universo, o que foje do escopo deste trabalho. Encerramos este capítulo com uma breve revisão de um modelo inflacionário que possui solução exata, não fazendo uso da ASR. Salvo menção explícita, todas as manipulações a seguir utilizarão as equações dinâmicas para o campo escalar em termos do tempo físico t .

4.1 Classificação dos Modelos

Existem várias formas de classificar os potenciais inflacionários. Escolhemos aqui a classificação em termos do valor inicial do inflaton. Os potenciais *tipo I* são caracterizados por valores iniciais do campo escalar menores que M_{pl} , também conhecidos como modelos de "pequenos campos". Os modelos *tipo II* ("grandes campos") são aqueles que possuem um valor inicial do inflaton maior que M_{pl} , muito importantes em cosmologia, pois geram ondas gravitacionais detectáveis. Existem, também, modelos que utilizam-se de mais de um campo escalar durante o período inflacionário e, em geral, são denominados *híbridos*; termo originalmente usado para um regime específico do potencial apresentado na seção 4.4.

4.2 Transições de Fase e Inflação

4.2.1 Transições de primeira ordem e a velha inflação

Foi Alan Guth, em 1981 [27], quem primeiro utilizou o termo "inflação" ao apresentar sua idéia baseada na quebra espontânea da simetria de vácuo de uma teoria de grande unificação (GUT em inglês), no universo primordial. A expansão nesse modelo é gerada por uma pressão negativa resultante de uma densidade de energia de vácuo positiva. Podemos analisar as principais características desse tipo de modelo de um ponto de vista heurístico [16], sem menção explícita à forma potencial, uma vez que nosso intuito é estudar a transição de fase de primeira ordem presente neste modelo.

Nesse sentido, consideremos um potencial $V(\phi, T)$ como na figura a seguir, possuindo um falso vácuo, i.e., um mínimo instável (ou "metaestável") em $\phi = 0$ e o verdadeiro estado de vácuo em $\phi = M$. Como visto, o potencial depende explicitamente da temperatura, de tal forma que a altas temperaturas o falso vácuo é o estado preferencial [16], considerando que o campo escalar esteja em equilíbrio térmico com os demais campos que possivelmente estejam presentes na teoria. Esta última afirmação consiste em uma das dificuldades deste modelo, uma vez que necessita da existência de vários tipos de partículas já no universo primordial. Dizemos, então, que o potencial é "efetivo", cuja forma pode ser

$$V(\phi, T) = V(\phi) + \frac{\alpha}{2} \phi^2 T^2 \quad (4.1)$$

com α uma constante. A origem deste termo dependente da temperatura é de natureza quântica [16], da qual não trataremos.

Como já vimos, a expansão universal faz as componentes espaciais do tensor energia-momentum desse campo escalar tenderem a zero, de forma que

$$T_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (4.2)$$

Tomando $V(M) = 0$ (necessário para evitar valores muito altos para uma constante cosmológica no tempo atual [16]), a equação de estado do campo escalar aproxima-se de $\omega = -1$, iniciando a inflação. Ocorre, portanto, uma transição de fase de primeira ordem, transformando o mínimo global em local, no qual o campo escalar fica preso devido ao surgimento de uma barreira. Sua densidade de energia se torna a dominante, funcionando como uma constante cosmológica efetiva, gerando pressão negativa e, conseqüentemente, uma expansão exponencial. A inflação termina quando o campo tunela quanticamente a barreira e atinge o verdadeiro vácuo em um tempo Γ^{-1} , onde

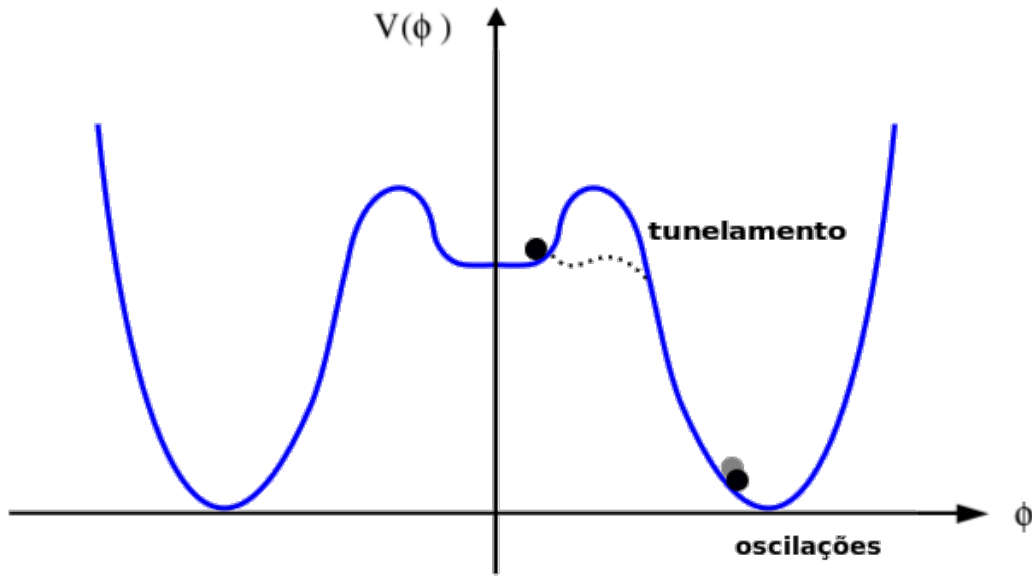


Figura 4.1 Esboço do potencial da velha inflação proposta por Guth, onde vemos o tunelamento do inflaton através da barreira, seguido por oscilações do mesmo em torno do mínimo global.

Γ é a taxa de tunelamento. Esta abrupta transição de fase gera a chamada "nucleação de bolhas", fenômeno semelhante ao que ocorre em materiais paramagnéticos, que consiste no surgimento de "bolhas" da nova fase $\phi = M$ dentro da fase antiga $\phi = 0$.

As paredes destas bolhas (conhecidas como paredes de domínio), possuem uma tensão superficial tal que a relação entre a energia interna e externa a bolha é constante. Caso uma dessas bolhas sofra um aumento em seu tamanho, sua energia potencial diminui uma vez que a tensão é proporcional a superfície de uma esfera $4\pi r^2$, enquanto seu interior é proporcional ao volume $4\pi r^3/3$.

É exatamente este fato que encerra o grave problema que levou este modelo a não ser encarado como um cenário inflacionário viável, pois não permite uma "saída graciosa" do período inflacionário para a evolução de acordo com o MCP. O raio dessas bolhas é muito pequeno, mesmo que a inflação fosse suficiente para resolver os problemas do MCP e ainda que as paredes das bolhas crescessem a velocidade da luz, seriam hoje muito menores que o raio de Hubble atual [16]. Portanto, não há produção suficiente de bolhas para que estas colidam e homogeneizem, assegurando a isotropia da CMBR observada atualmente. Ressaltamos que este problema pode ser evitado no contexto de teorias de gravitação alternativas a RG como a de Jordan-Brans-Dicke.

4.2.2 Transições de segunda ordem e a nova inflação

De forma independente, Linde [23] e Albrecht, Steinhardt[28] propuseram um modelo com o fim de sanar os problemas presentes no modelo de Guth, batizado de *nova inflação* por Linde. Neste, assume-se, como antes, a quebra espontânea de simetria nos primórdios do universo, cuja forma geral esboçamos na figura a seguir. Seu potencial é caracterizado por ser simétrico em que $\phi = 0$, onde existe um máximo local para $T = 0^\circ$. Um potencial geralmente utilizado para gerar este cenário é o da teoria de grande unificação SU(5) de Coleman, Weinberg[30] cuja forma é

$$V(\phi) = \frac{25\alpha^2}{16} \left[\phi^4 \ln \left(\frac{\phi^2}{M^2} \right) + \frac{1}{2} (M^2 - \phi^2)^2 \right] \quad (4.3)$$

com α e M constantes.

Genericamente, quando a temperatura atinge valores menores que uma temperatura crítica T_c , acontece uma transição de fase de segunda ordem, quebrando espontaneamente a simetria de vácuo, levando o campo escalar a seu verdadeiro vácuo em $\phi = M$ de forma suave, sem a criação de barreiras como no caso anterior, não havendo o problema da saída graciosa.

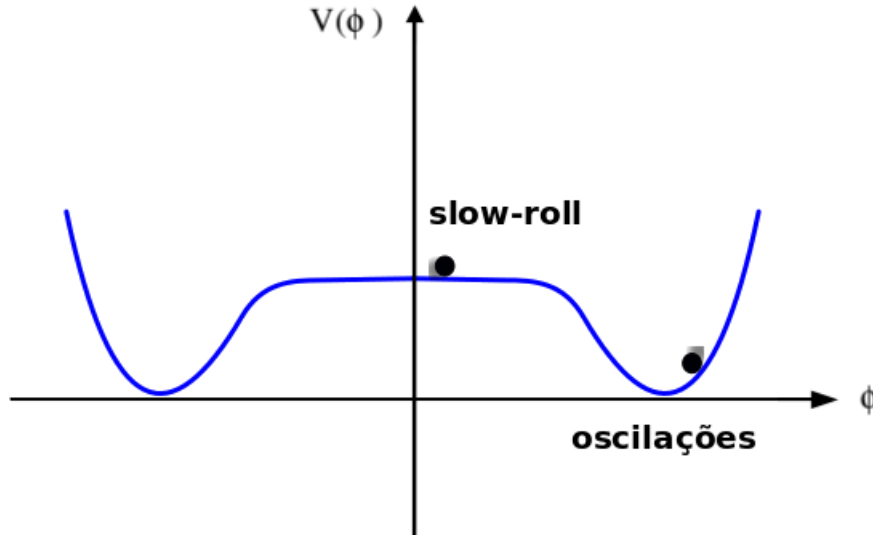


Figura 4.2 No potencial da nova inflação, não existe o problema da nucleação de bolhas pois neste, o inflaton não encontra nenhuma barreira, onde o conceito de descida suave (*slow-roll*) é introduzido.

Entretanto, para que haja inflação, o potencial genérico $V(\phi)$ deve ser bastante plano em $\phi = 0$, fazendo com que o campo evolua lentamente até o mínimo global e assim introduzindo pela primeira vez a ideia de *slow-roll*. Para satisfazer este requisito, as constantes de acoplamento devem ser extremamente pequenas, que, em outras

palavras, significa um ajuste fino das condições iniciais para que o campo escalar esteja de fato em equilíbrio térmico. Logo observou-se que estas condições iniciais para a nova inflação eram demasiado artificiais, não estando de acordo com os vínculos impostos pelas observações da CMBR.

4.3 Inflação Caótica

A inflação caótica foi inicialmente proposta por Linde[31] em 1983, quando este apresentou sua ideia de que a ASR poderia ser implementada em potenciais simples como potenciais monomiais, evidenciando a inflação como um fenômeno natural e, talvez, até uma inevitável consequência das condições iniciais caóticas necessárias para justificar o alto valor inicial do inflaton neste tipo de cenário. Em [32], Linde mostra que, em modelos caóticos, o universo é dotado de uma estrutura global não-trivial, pois se auto-reproduz indefinidamente como resultado natural da *inflação eterna*, dando origem a infinitos universos cujas condições iniciais podem ser drasticamente diferentes. Atualmente a terminologia caótica refere-se a todo e qualquer modelo que possua um único campo escalar cujo potencial deve satisfazer a ASR em alguma região, possuindo um verdadeiro vácuo. Existem vários potenciais que satisfazem estas condições, com ou sem a motivação de reproduzir os resultados da Física de Partículas. Estudaremos, a seguir, os dois potenciais mais simples que satisfazem estas condições.

4.3.1 Potencial quadrático

A forma mais simples que o potencial gerador de um cenário inflacionário do tipo II assume é [20]

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (4.4)$$

A dinâmica da inflação é determinada pelas equações (3.53) e (3.58), que neste modelo específico, respectivamente, resultam

$$H^2 = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2}m^2\phi^2 \quad (4.5)$$

$$H = -\frac{m^2\phi}{3\dot{\phi}}. \quad (4.6)$$

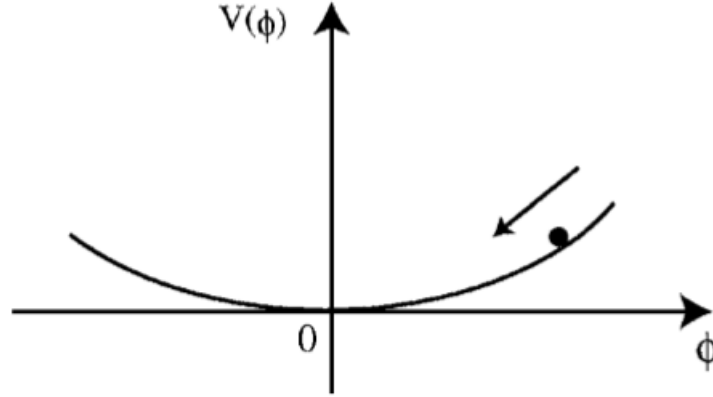


Figura 4.3 Esboço do potencial caótico (4.4), onde o valor inicial do inflaton é maior que M_{pl} [21].

Através dos parâmetros da ASR, podemos verificar que este é realmente um modelo em que o inflaton assume grandes valores, bastando para isso substituir o potencial na expressão (3.61) do parâmetro ϵ , que resulta $\phi > M_{pl}$. Entretanto, a escala de Planck é a escala dos fenômenos quânticos, de forma que este grande valor para o campo escalar invalida a análise clássica dada até aqui. A solução para esta discrepância reside no fato de que o que realmente importa no contexto inflacionário é o potencial $V(\phi)$, e assim concluímos que a massa m desse campo escalar deve ser pequena o suficiente para que nossa análise continue válida em uma escala sub-planckiana de energia. observações do satélite COBE acerca da amplitude das perturbações na densidade de energia do universo impõem o vínculo $m \simeq 10^{-6}M_{pl}$ para a massa do inflaton[21].

Estamos interessados em encontrar a dependência temporal do inflaton enquanto este desce em direção ao mínimo do potencial e, para isso, procedemos seguindo os mesmos passos que nos levaram a (3.65), tal que, integrando, em um intervalo arbitrário, temos

$$\Delta t = -2\sqrt{3\pi}(mM_{pl})^{-1}\Delta\phi. \quad (4.7)$$

Considerando $t_i = 0$, obtemos a relação desejada

$$t(\phi) = 2\sqrt{3\pi}(mM_{pl})^{-1}[\phi(0) - \phi], \quad (4.8)$$

que implica na seguinte evolução temporal do fator de escala

$$a(t) = a(0)\exp\left\{mM_{pl}^{-1}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\phi(0) - \frac{mM_{pl}}{4\sqrt{3\pi}}t\right)t\right\}. \quad (4.9)$$

Com o objetivo de calcular o número de *e-foldings* para este cenário, precisamos encontrar os valores característicos que o inflaton assume nos extremos desse período. Sabemos que o regime inflacionário deve findar-se em um instante t_f , de forma que ao aproximarem-se deste, os parâmetros de slow-roll tendem rapidamente à unidade, em que ambos indicam o valor

$$\phi(t_f) = \frac{M_{pl}}{2\sqrt{\pi}} \quad (4.10)$$

para o campo escalar nesse instante. Da última expressão podemos relacionar (muito convenientemente) o tempo em que cessa a inflação com o valor que o inflaton assume no início desta fase, i.e.,

$$t_f = 2\sqrt{3\pi}(mM_{pl})^{-1}\phi(0) - \frac{\sqrt{3}}{m}. \quad (4.11)$$

Assim, de acordo com (3.67) e os últimos resultados, o número de *e-foldings* fica

$$\mathcal{N} = \frac{2\pi}{M_{pl}^2}[\phi(0)]^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.12)$$

a qual reproduz a condição mínima que resolve os problemas da planura e do horizonte $\mathcal{N} > 75$, se o valor inicial que o inflaton assume for $\phi(0) > 3M_{pl}$. Desses valores e do vínculo sobre a massa do inflaton, vemos que o máximo do potencial quadrático deve ser $V(\phi(0)) \simeq M_{pl}^4$ e, uma vez que a condição inflacionária impõe que a densidade de energia seja dominada pelo potencial do inflaton, o termo cinético deste campo neste período deve ser tal que $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \ll M_{pl}^4$. Logo, para este potencial, o campo escalar assume valores iniciais característicos $\phi(0) \sim M_{pl}^2/m \sim 10^{13}\text{GeV}$.

Comportamento Atrator

Consideraremos a seguir uma forma diferente de estudar a dinâmica do inflaton sujeito ao potencial quadrático acima, baseado no tratamento dado por [12]. Lembrando das formas originais das equações dinâmicas (3.45) e (3.38), podemos combiná-las em uma só expressão para o campo escalar, usando-as em termos do tempo físico

$$\ddot{\phi} + \left[\alpha^2(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) \right]^{1/2} \dot{\phi} + m^2\phi^2 = 0 \quad (4.13)$$

onde, por simplicidade, definimos a constante $\alpha^2 = 12\pi/M_{pl}^2$. Esta é uma equação diferencial de segunda ordem não-linear sem dependência explícita no tempo. É possível simplificar a resolução desta equação notando que podemos reduzir sua ordem através de $\ddot{\phi} = \dot{\phi}(d\dot{\phi}/d\phi)$, obtendo

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = - \frac{[\alpha^2(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)]^{1/2} \dot{\phi} + m^2\phi^2}{\dot{\phi}}. \quad (4.14)$$

Esboçando as soluções desta equação no plano $(\phi, \dot{\phi})$ como mostra a seguinte figura, observamos a existência de uma *solução atratora*, para a qual todas as outras convergem à medida que evoluem no tempo.

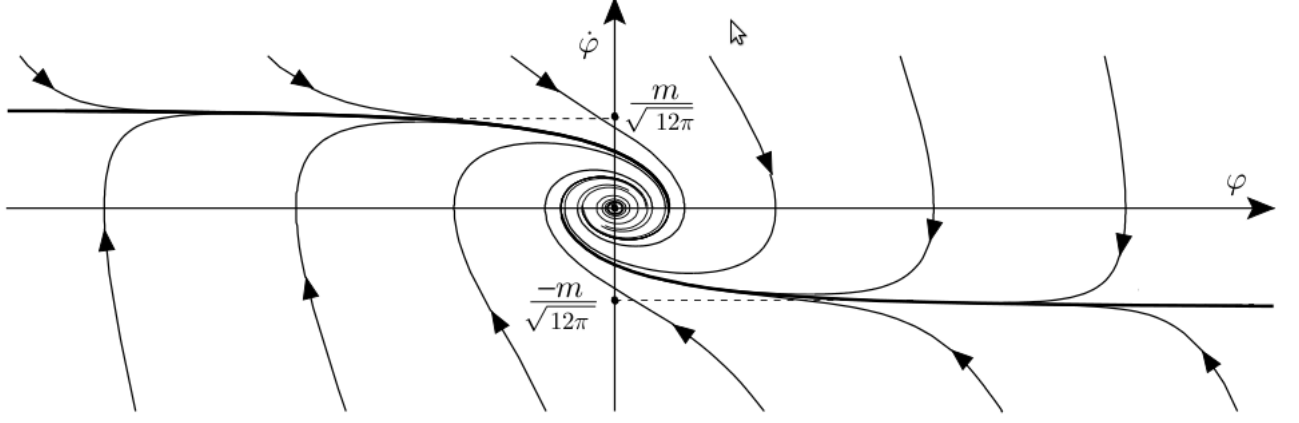


Figura 4.4 O comportamento atrator da solução $\phi = -m/\sqrt{12\pi}$, tomando $M_{pl} = 1$ é exibido. A concentração no centro representa a oscilação do campo escalar em torno do mínimo do potencial [12].

Inicialmente, analisemos o quadrante $(\phi > 0, \dot{\phi} < 0)$, considerando o regime em que a energia cinética é muito maior que a potencial, i.e., $|\dot{\phi}| \ll V(\phi)$, o que nos permite ignorar os termos de massa em comparação com $\dot{\phi}$ e, assim, simplificando a equação diferencial acima:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} &= -\frac{\left[\alpha^2\dot{\phi}^2\left(1 + \frac{m^2\phi^2}{\dot{\phi}^2}\right)\right]^{1/2}\dot{\phi} + m^2\phi^2}{\dot{\phi}} \\ &= -\alpha\dot{\phi} - \mathcal{O}\left(\frac{\phi}{\dot{\phi}}\right) \\ &\simeq -\alpha\dot{\phi}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

cujas respectivas soluções são da forma

$$\dot{\phi} = C \exp\{\alpha[\phi(t) - \phi(t_0)]\}, \quad (4.16)$$

tal que a constante $C < 0$ devido ao quadrante em questão. Podemos resolver esta última expressão e obter a dependência explícita do campo escalar no tempo

$$\phi(t) = C - \frac{1}{\alpha} \ln t, \quad (4.17)$$

que, comparada com (4.16), evidencia a discrepância entre estas, i.e., pequenas variações no campo escalar geram uma diminuição exponencial na derivada temporal do

mesmo, fazendo com que grandes valores de $|\dot{\phi}|$ convirjam para o atrator. Concluimos, portanto, que um grande número de condições iniciais geram este cenário inflacionário, justificando a denominação "caótica" em referência a este fato. Substituindo o último resultado na equação de Friedmann e desprezando o potencial, obtemos

$$\frac{da}{a} \propto \frac{dt}{3t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a(t) \propto t^{1/3} \\ \rho \propto a^{-6}. \end{cases} \quad (4.18)$$

A densidade de energia foi obtida substituindo o fator de escala em (2.71) tomando $\omega = 1$. Esta é a equação de estado de um fluido perfeito *ultra-rígido*, que mostra-se o tipo de matéria que preenchia o universo primordial até a era inflacionária.

Vejamos, agora, como ficam estes resultados quando passamos ao regime inflacionário, que, como sabemos, deve satisfazer $|\dot{\phi}| \ll V(\phi)$, ou, equivalentemente, $d\dot{\phi}/d\phi \approx 0$, que, de acordo com (4.14), implica

$$\begin{aligned} -m^2\phi^2 &= \left[\alpha^2(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) \right]^{1/2} \dot{\phi} \\ &= \alpha\dot{\phi}(m\phi) \sqrt{1 + \frac{\dot{\phi}^2}{m^2\phi^2}} \\ &\simeq \alpha\dot{\phi}(m\phi), \end{aligned} \quad (4.19)$$

e, assim,

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{m\phi}{\alpha}, \quad (4.20)$$

de onde obtemos nosso atrator

$$\phi_{atr}(t) \simeq \phi(t_i) - \frac{m}{\alpha}(t - t_i). \quad (4.21)$$

Assumindo que $\phi(t_f) = 0$, obtemos a duração do período inflacionário em termos do valor inicial do inflaton

$$\Delta t \simeq \frac{\alpha\phi(t_i)}{m}, \quad (4.22)$$

que, resolvida para $\phi(t_i)$ e substituindo na penúltima expressão, nos dá

$$\phi_{atr}(t) \simeq \frac{m}{\alpha}(t_f - t). \quad (4.23)$$

A evolução do fator de escala em termos da ASR é obtida substituindo esta expressão em (4.5) após uma integração

$$\int_{a(t_i)}^{a(t_f)} d(\ln a) = \frac{m^2}{3} \int_{t_i}^{t_f} (t' - t_f) dt' \quad \Rightarrow \quad a(t) \simeq a(t_f) \exp \left\{ -\frac{m^2}{6} (\Delta t)^2 \right\}, \quad (4.24)$$

da qual vemos que, substituindo (4.22), obtemos o número de *e-foldings* durante este período

$$\mathcal{N} \simeq \frac{2\pi}{M_{pl}} \phi(t_i). \quad (4.25)$$

Assim, para $\phi(t_i) > 4M_{pl}$, vemos que a inflação satisfaz o número mínimo de *e-foldings* para resolver os problemas do MCP citados no capítulo 2, que também está de acordo com o resultado há pouco obtido diretamente das equações de Friedmann.

4.3.2 Potencial quártico

O segundo potencial caótico mais simples é o potencial que, no contexto de Física de Partículas, representa a auto interação do campo escalar

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4, \quad (4.26)$$

o qual analisaremos seguindo os mesmos procedimentos do exemplo anterior. Portanto, em termos da ASR, as equações dinâmicas do campo escalar ficam

$$H^2 = \frac{2\lambda\pi}{3M_{pl}^2}\phi^4 \quad (4.27)$$

$$H = -\frac{\lambda\phi^3}{3\dot{\phi}}, \quad (4.28)$$

que, em termos de (3.65), considerando novamente o instante inicial sendo nulo, resulta

$$t(\phi) = M_{pl}^{-1} \sqrt{\frac{6\pi}{\lambda}} \ln \frac{\phi(0)}{\phi(t)}, \quad (4.29)$$

e, assim,

$$a(t) = a(0) \exp \left\{ \frac{\pi[\phi(0)]^2}{M_{pl}^2} \left[1 - \exp \left(-t \sqrt{\frac{2\lambda M_{pl}^2}{3\pi}} \right) \right] \right\}. \quad (4.30)$$

A segunda exponencial pode ser expandida em série de potências em primeira ordem, considerando $t^2 \ll \alpha^2$ durante a fase inflacionária, onde $\alpha \equiv (2\lambda M_{pl}^2/3\pi)^{1/2}$, de forma que

$$a(t) = a(0) \exp \left\{ \frac{4\pi\lambda[\phi(0)]^4}{3M_{pl}^2} \right\} \quad (4.31)$$

é precisamente a evolução temporal do fator de escala em uma fase de De Sitter para o potencial $V = \lambda\phi^4/4$, tendo em vista (4.27).

A seguir, fazendo os parâmetros da ASR tenderem à unidade ao fim da inflação, observamos que, diferentemente do caso anterior, cada um deles resulta em um valor distinto para o campo escalar neste instante

$$\epsilon(t_f) = 1 \implies \phi(t_f) = \frac{M_{pl}}{\sqrt{\pi}} \quad (4.32)$$

$$|\eta(t_f)| = 1 \implies \phi(t_f) = \frac{\sqrt{3}M_{pl}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.33)$$

Como dito anteriormente, estes parâmetros serem muito menores que a unidade encerram condições necessárias, mas não suficientes, para que ocorra a inflação, de forma que ambos dão *estimativas* razoáveis do fim deste período. Por simplicidade escolhemos o primeiro, obtendo

$$t_f = \sqrt{\frac{3\pi}{2\lambda M_{pl}^2}} \ln \left(\frac{\pi[\phi(0)]^2}{M_{pl}^2} \right) \quad (4.34)$$

e o correspondente número de *e-foldings*

$$\mathcal{N} = \frac{\pi[\phi(0)]^2}{M_{pl}^2} - 1, \quad (4.35)$$

em que $\phi(0) > 5M_{pl}$ para que a condição $\mathcal{N} > 75$ seja satisfeita. Se usarmos o vínculo que encontramos há pouco para o máximo do potencial, i.e., $V(\phi(0)) \simeq M_{pl}^4$, o valor máximo que o campo escalar assume é

$$\phi(0)_{max}^2 \simeq \frac{2M_{pl}}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.36)$$

implicando em um número máximo de *e-foldings*

$$\mathcal{N}_{max} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} - 1. \quad (4.37)$$

e, de $\mathcal{N} > 75$, obtemos uma constante de acoplamento tal que $\lambda < 7 \times 10^{-3}$, o que conclui nossa análise.

4.4 Inflação Híbrida

Inicialmente proposta por Linde em 1990, a *inflação híbrida* é intimamente relacionada com uma espécie de modelo caótico em que o potencial depende não somente de um, mas de dois campos escalares; $V(\phi, \psi)$, sendo uma espécie de mistura de inflação caótica e de uma teoria com quebra espontânea de simetria. Nesta, ϕ continua sendo o inflaton, responsável pela expansão do universo enquanto desce em direção ao mínimo de seu potencial, de forma que ao oscilar nessas proximidades, reaquece o universo com uma massiva produção de partículas elementares. Já o campo ψ , geralmente chamado de campo "nao-inflacionário", permanece constante em seu estado de vácuo devido sua interação com ϕ , até que este último atinge um certo valor crítico, momento que encerra duas possibilidades para a evolução de ψ : em uma primeira possibilidade,

este campo estaria preso em seu estado de vácuo verdadeiro, possuindo o mesmo valor desde a inflação até agora, levando a uma evolução muito parecida com o cenário caótico já discutido.

Na segunda possibilidade, estando preso em um mínimo "metaestável", ψ evolui rapidamente em direção a seu verdadeiro mínimo através de uma transição de fase que pode ser de primeira ou segunda ordem, o que implica na quase inevitável formação de defeitos topológicos ao fim da inflação. Se o valor desse falso vácuo é desprezível em comparação a contribuição do inflaton ao potencial, a dinâmica deste último não é muito afetada, surgindo alguns "efeitos colaterais" por assim dizer, devido à interação destes campos. Entretanto, no caso em que a densidade de energia desse falso vácuo é a dominante, a dinâmica da inflação é alterada significativamente, cujos efeitos trataremos a seguir. Dizemos, em geral, que o campo ψ é o responsável pela saída graciosa do período inflacionário. O termo *híbrido* foi originalmente usado por Linde[33] para identificar o regime em que a densidade de energia do falso vácuo é dominante, o foco desta seção.

Potencial quadrático

É vasto o número de potenciais que satisfazem as condições acima descritas. Voltaremos nossa atenção para um dos mais famosos, cuja forma é

$$V(\phi, \psi) = \frac{\lambda}{4} (\psi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda'}{2} \phi^2 \psi^2, \quad (4.38)$$

em que λ e λ' são as constantes de acoplamento de auto interação do campo ψ e da interação entre os campos escalares, respectivamente, e M uma constante que define a escala da massa do campo ψ , como veremos. Este potencial é simétrico pelas trocas $\phi \leftrightarrow -\phi$ e $\psi \leftrightarrow -\psi$ e pode ser escrito na forma

$$V(\phi, \psi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} m_\psi^2 \psi^2 + \frac{\lambda'}{2} \phi^2 \psi^2 + \frac{\lambda}{4} \psi^4 + V_0, \quad (4.39)$$

onde $m_\psi^2 = \lambda M^2$ é a massa de ψ e o termo constante é definido por $V_0 = \lambda M^4/4 = m_\psi^2 M^4/4$. Observamos que λ' , M e m são parâmetros livres independentes, de forma que uma escolha errada destes invalida uma interpretação em termos de física de partículas. Escolhemos $m \gtrsim 100 \text{ GeV}$, a escala em que há a quebra da simetria de vácuo de um dos modelos superssimétricos, a *soft-SUSY*, de forma que $\lambda \gtrsim 0$, $\lambda' \lesssim 1$ e $M \lesssim M_{pl}/\sqrt{8\pi} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$.

A seguir podemos verificar que este potencial possui as seguintes características:

- (a) Derivando em função do inflaton, observamos que *sempre* existe um mínimo local no plano $V(0, \psi)$, i.e., para $\phi = 0$;

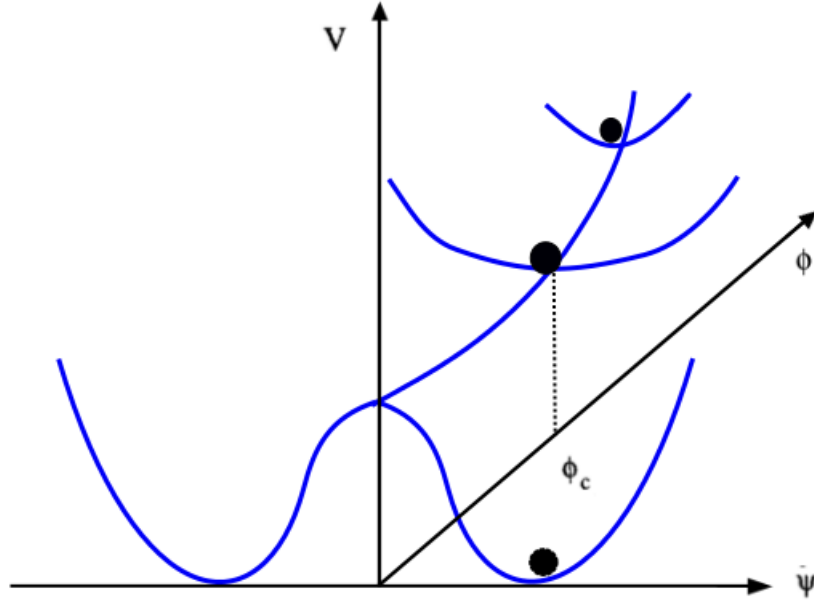


Figura 4.5 Esboço do potencial do potencial híbrido (4.38). Adaptado de [19].

(b) Derivando em função de ψ , surgem duas possibilidades:

(b.1) um mínimo em $\psi = 0 \Leftrightarrow \phi^2 > m_\psi^2 / \lambda'$;

(b.2) dois mínimos em $\psi^2 = \lambda^{-1} (m_\psi^2 - \lambda' \phi^2) \Leftrightarrow \phi^2 < m_\psi^2 / \lambda'$;

(c) Dos itens (a) e (b) e de (4.38), vemos que $V(0, \pm M)$ é um mínimo global.

A figura 4.5 sintetiza estas características, onde o vemos os resultados acima nos planos (ϕ, V) e (ψ, V) , respectivamente. Definimos

$$\phi_c = \frac{m_\psi^2}{\lambda'} \quad (4.40)$$

o valor crítico do inflaton que separa as possibilidades do item (b).

A região sinalizada em (b1) é a única em que a inflação é viável, pois a partir do ponto crítico, ψ decai rapidamente de seu falso vácuo. Uma vez que o ponto $(0, \phi)$ é sempre um mínimo nessa região para um dado valor do inflaton, podemos assumir que o campo não inflacionário ψ rapidamente anula-se iniciada a evolução de ϕ , supondo $V(0, \phi)$ suficientemente plano. Assim ϕ evolui para seu vácuo seguindo a trajetória $\psi = 0$ de acordo com

$$V(\phi, 0) = V_0 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = V_0 (1 + \tilde{\phi}^2), \quad (4.41)$$

onde definimos o campo adimensional $\tilde{\phi}^2 \equiv \phi^2 m^2 / 2V_0$ por conveniência e, no instante em que o inflaton chega $\phi = 0$, o campo não inflacionário atinge muito rapidamente o seu verdadeiro mínimo $\psi = \pm M$.

Da última equação, vemos que a evolução do inflaton admite as duas possibilidades citadas há pouco. Quando V_0 é o termo dominante, i.e., $\tilde{\phi}^2 \ll 1$, temos o regime *vácuo-dominado* em que a inflação finda-se em uma transição de fase quando $\phi \leq \phi_c$. Este é o regime batizado por Linde de *inflação híbrida*, primeiramente proposto ele e Kofman em [35], onde apontaram a possibilidade dessa transição de fase produzir cordas cósmicas com energia por unidade de comprimento suficiente para a produção de estruturas no universo. Já o termo *inflaton-dominado* ($\tilde{\phi}^2 \gg 1$) é reservado ao regime em que o segundo termo é o dominante, cuja dinâmica é similar à inflação caótica dependente apenas do campo escalar ϕ .

Sabemos das seções anteriores que o fim da inflação é sinalizado quando os parâmetros da ASR tendem à unidade. Entretanto, no regime vácuo-dominado, não somente esta, mas também a condição $\phi = \phi_c$ pode demarcar o instante em que termina o período inflacionário. Mas do que isso, dependendo do quão plano é o potencial (4.41), é possível que o inflaton adquira seu valor crítico sem que haja a violação $\epsilon \rightarrow 1$, situação na qual ocorre a transição de fase devido à instabilidade do ponto $(\phi_c, 0)$. A seguir analisaremos a dinâmica deste modelo em termos do *background* de Friedmann como nos casos anteriores, i.e., em termos da RG.

4.4.1 Dinâmica

As equações dinâmicas deste modelo são

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + V(\phi, \psi) \right]; \quad (4.42)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \phi} = 0; \quad (4.43)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \psi} = 0. \quad (4.44)$$

em que o par de equações de Klein-Gordon foram obtidas seguindo os mesmos procedimentos do capítulo 3 para a lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - V(\phi, \psi), \quad (4.45)$$

em termos da qual podemos encontrar o tensor energia-momentum a partir de (3.29) e, assim, encontrar a equação de Friedmann.

Lembrando da evolução qualitativa que demos a pouco, faremos a consideração de que enquanto o inflaton evolui seguindo a trajetória $\psi = 0$, a inflação é suficiente para que qualquer evidência do campo ψ possa ser desconsiderada [34], de forma que

a dinâmica do período inflacionário é a usual em termos de ϕ , segundo o potencial (4.41):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\phi^2 + V(\phi, 0) \right]; \quad (4.46)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (4.47)$$

As soluções destas equações diferenciais não-lineares podem ser encontradas em termos da ASR a partir de (3.66) e (3.65), respectivamente

$$a(\phi) = \left(e^{-2\pi\phi^2} \right) \phi^{-2\pi\lambda M^4/m^2}; \quad (4.48)$$

$$t(\phi) = \frac{-M^2\sqrt{6\pi\lambda}}{m^2} \left\{ V^{1/2} \sqrt{\frac{4}{\lambda M^4}} + \ln \left[\frac{[2m^{-2}(V - \lambda M^4/4)]^{1/2}}{1 + V^{1/2} \sqrt{\frac{4}{\lambda M^4}}} \right] \right\}. \quad (4.49)$$

Diferentemente dos casos anteriores, vemos, das equações acima, que não temos uma relação linear entre o tempo e o campo escalar e, por conveniência, adotaremos o término da inflação através da violação das condições (3.55) e (3.57), onde

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{m^2\phi}{V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2} \right)^2; \quad (4.50)$$

$$|\eta(\phi)| = \frac{3M_{pl}^2}{8\pi} \left| \frac{m^2}{V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2} \right|. \quad (4.51)$$

Também sabemos das análises anteriores que é conveniente medir quantitativamente a expansão do universo através do número de *e-foldings*, que de acordo com (3.67) e (4.41) fica

$$\mathcal{N} = \frac{8\pi V_0}{m^2 M_{pl}^2} \ln \frac{\phi_i}{\phi_f} + \frac{2\pi}{M_{pl}^2} (\phi_i^2 - \phi_f^2). \quad (4.52)$$

No que segue, usaremos os últimos resultados para descrever os regimes desse cenário.

4.4.2 Regimes

Inflaton-dominado

Como vimos no capítulo anterior, a única condição necessária para que a inflação ocorra é a de que ϵ seja menor que a unidade e, por isso, escolheremos este parâmetro para definir seu término, ainda que ambos sejam igualmente suficientes para defini-la.

Tomando $\epsilon = 1$ e resolvendo para ϕ , encontramos a raiz

$$\phi_f = \frac{M_{pl}}{4\sqrt{\pi}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{8V_0}{m^2} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{M_{pl}} \right)^2} \right]. \quad (4.53)$$

Quando $\phi_f \rightarrow M_{pl}/2\sqrt{\pi}$, este modelo torna-se muito similar à inflação caótica, como vemos de (4.10). Escrevemos somente a raiz positiva, pois, como [34] explica, a outra raiz não satisfaz (3.58), a qual define o comportamento atrator citado quando tratamos da inflação caótica. Em contraste, se $V_0 > m^2 M_{pl}^2 / 32\pi$, esta solução não existe e a inflação termina devido a instabilidade do inflaton.

Substituindo o valor característico para o fim da inflação caótica na condição $\tilde{\phi}^2 \ll 1$, encontramos

$$\frac{8\pi V_0}{m^2 M_{pl}^2} \ll 1, \quad (4.54)$$

que, por sua vez, nos leva a desprezar o primeiro termo de (4.52), mostrando-nos que a escala de energia inicial da inflação é da ordem da massa de Planck

$$\phi_i = M_{pl} \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{2\pi}}, \quad (4.55)$$

estando de acordo com a classificação de grandes campos.

Vácuo-dominado

Espera-se que a inflação termine no regime vácuo-dominado devido à instabilidade do inflaton, isto é, $\phi = \phi_c$ para λ e λ' não muito pequenas [9, 34]. Ao contrário da situação anterior, neste regime, observamos de (4.51) e (4.50) que a variação destes parâmetros é muito pequena, indicando que o potencial $V(\phi, 0)$ deve ser bastante plano até que o inflaton atinja seu valor crítico. Se $V(\phi, 0)$ for suficientemente plano, é possível que a inflação continue, ainda que $\phi < \phi_c$, entretanto, assumiremos que o instante em que o valor crítico é atingido como um indicador de que a inflação chega ao fim. Da condição (b1), o valor mínimo deste campo durante a inflação é

$$\psi_{min}^2 \equiv \frac{\lambda'}{\lambda} (\phi_c^2 - \phi^2) = M \left(1 - \frac{\phi^2}{\phi_c^2} \right). \quad (4.56)$$

Em termos deste, podemos reescrever o potencial (4.38) e suas derivadas em termos do

inflaton

$$V = V_0 \left[1 + \frac{m^2 \phi^2}{2V_0} - \left(1 - \frac{\phi^2}{\phi_c^2} \right)^2 \right], \quad (4.57)$$

$$V_{,\phi} = 2V_0 \phi \left[\frac{m^2}{2V_0} - \frac{2}{\phi_c^2} \left(1 - \frac{\phi^2}{\phi_c^2} \right) \right], \quad (4.58)$$

$$V_{,\phi\phi} = 2V_0 \left[\frac{m^2}{2V_0} - \frac{2}{\phi_c^2} \left(1 - 3\frac{\phi^2}{\phi_c^2} \right) \right], \quad (4.59)$$

e, em seguida, reescrever os parâmetros da ASR em termos destas expressões, no regime $\tilde{\phi}^2 \ll 1$, no instante em que o valor crítico do inflaton é atingido

$$\epsilon(\phi) \gtrsim \frac{M_{pl}^2}{4\pi} \left(\frac{m^2 \phi_c}{2V_0} \right)^2; \quad (4.60)$$

$$\eta(\phi) \gtrsim \frac{3M_{pl}^2}{\pi \phi_c^2}. \quad (4.61)$$

onde, por simplicidade, escolhemos o segundo destes para nos levar à condição de que a inflação termine devido a instabilidade

$$\phi_c^2 \lesssim \frac{3M_{pl}^2}{\pi}. \quad (4.62)$$

Atingido o ponto crítico, tem início a subsequente transição de fase, cuja natureza é bem mais complicada do que se pode tratar aqui. Como já dito, este modelo possui grande dependência dos parâmetros, de forma que uma análise completa necessita de vários dados advindos da teoria das perturbações e vínculos observacionais. Indicamos [34, 37] para maiores detalhes.

4.5 Inflação Natural

Este tipo de modelo [17, 21, 39, 40, ?] é caracterizado pelos chamados pseudo-bósons de Nambu-Goldstone (PNGB o acrônimo em inglês) cujo respectivo potencial surge quando se considera correções radiativas

$$V(\phi) = m^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right], \quad (4.63)$$

O termo "pseudo" surge pois estes bosons diferentemente dos Nambu-Goldstone originais, adquirem massa quando das correções radiativas.

Estas correções resultam na quebra espontânea de uma simetria contínua para a simetria discreta manifesta no potencial acima, a uma escala f , que determina se o

modelo é do tipo I ou II, onde m é uma constante que determina a escala de massa do campo escalar. O nome "natural" foi escolhido porque este potencial surge naturalmente em modelos de Física de Partículas e em Teorias de Cordas. Exemplos de PNGB são o pión, quando se considera a quebra espontânea da simetria quiral de isospin da Cromodinâmica Quântica (QCD o acrônimo em inglês), e o axion, partícula hipotética proposta na tentativa de explicar a violação da simetria CP na QCD. Cosmologicamente, o axion é importante, pois, se produzido em quantidades massivas no universo promordial e se suficientemente leve, torna-se um candidato à explicação da matéria escura.

Para o regime em que $f \gg M_{pl}$, o modelo é similar a inflação caótica. Consideraremos o regime em que $m \sim 10^{19} GeV$, a escala de grande unificação, e $f \sim M_{pl}$. Inicialmente na região $0 < \phi < \pi f$, o inflaton evolui em direção ao mínimo do potencial $\phi = \pi f$ e ao oscilar nesta região, inicia-se a fase de reaquietamento. Os parâmetros da ASR para este cenário são

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{pl}^2}{16\pi f^2} \left[\frac{\sin(\phi/f)}{1 + \cos(\phi/f)} \right]^2, \quad \eta(\phi) = -\frac{M_{pl}^2}{8\pi f} \left[\frac{\cos(\phi/f)}{1 + \cos(\phi/f)} \right], \quad (4.64)$$

em que a violação do primeiro destes nos leva a uma equação do segundo grau, indicando o início da inflação para ϕ aproximadamente zero como mostra a figura. Vemos que estes parâmetros são independentes da escala m , determinada apenas pela escala f . Uma propriedade típica dos modelos do tipo II é que a segunda derivada do potencial pode mudar de sinal[21] e neste caso específico $V_{,\phi\phi} < 0$ na região $0 < \phi < \pi f/2$.

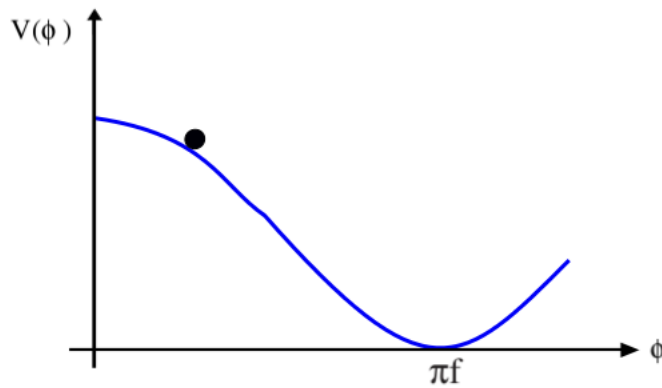


Figura 4.6 Esboço do potencial do potencial (4.63).

O número de *e-foldings* é

$$\mathcal{N} = \frac{16\pi f^2}{M_{pl}^2} \ln \left[\frac{\sin(\phi_f/2f)}{\sin(\phi_i/2f)} \right], \quad (4.65)$$

de onde vemos que, se a escala f for muito menor que a massa de planck, a inflação resultante não é suficiente para resolver os problemas do MCP. Para que $\mathcal{N} \gtrsim 70$ seja satisfeita com uma escala $f \sim M_{pl}$, o valor inicial do inflaton deve ser tal que $\phi_i \lesssim 0.1M_{pl}$.

4.6 Um Modelo com solução exata

Em um universo plano, consideremos um cenário inflacionário que é caracterizado pela condição de o fator de escala evoluir em potências do tempo cósmico, i.e.,

$$a(t) = a_p t^p, \quad (4.66)$$

com a_p uma constante qualquer, em que $p > 1$, o que levou seus criadores L. Lucchin e S. Matarrese a batizá-la como *power-law inflation* em 1985[36]. Satisfazer esta última desigualdade implica em uma expansão acelerada do universo, pois

$$\ddot{a}(t) = p(p-1)a_p t^{(p-2)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p > 1 \\ \text{ou} \\ p < 0. \end{cases} \quad (4.67)$$

Para encontrar a forma do potencial, devemos observar que a equação de Klein-Gordon (3.44) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] = -3H\dot{\phi}^2. \quad (4.68)$$

Derivando a equação de Friedmann (3.38) em relação ao tempo físico e substituindo o último resultado, obtemos $\dot{\phi}^2 = \sigma t^{-2}$, onde definimos a constante $\sigma = M_{pl}^2 (p/4\pi)^{1/2}$. Uma integração simples nos leva à evolução temporal do inflaton

$$\phi(t) = \phi(t_i) \pm \sigma \ln \left(\frac{t}{t_i} \right), \quad (4.69)$$

que, substituída em (3.38), resulta em um potencial cuja dependência em relação ao campo escalar é exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp \left\{ -\frac{\phi}{\sigma} \right\}, \quad (4.70)$$

onde definimos a constante

$$V_0 \equiv \frac{3p-1}{2} \left(\frac{\sigma}{t_i} \right)^2 \exp \left\{ \frac{\phi(t_i)}{\sigma} \right\}. \quad (4.71)$$

Uma vez que a condição (4.67) é válida para todo t , o universo se expande indefinidamente neste modelo, não havendo uma saída graciosa para que este evolua na forma descrita no MCP. Entretanto, potenciais desta forma surgem na cosmologia das teorias de Kaluza-Klein [36] e no âmbito de teorias alternativas a RG como a teoria Jordan-Brans-Dicke[9] na qual, fazendo certas restrições ao potencial, permite um tempo finito para o fim da inflação. Conhecida como *inflação estendida*, esta proposta reintroduz algumas das ideias da velha inflação proposta por Guth[9] e suas variantes mais simples já foram descartadas, uma vez que contradizem evidências observacionais[38].

Uma característica curiosa deste modelo reside no fato de a razão entre o termo cinético $\dot{\phi}/2$ e o potencial ser sempre constante. Para isso, devemos encontrar a dependência do potencial no tempo, substituindo (4.69) em (4.70), tal que $V(t) \propto t^{-1}$. Como $\dot{\phi} \propto t^{-1}$, temos $\dot{\phi}(t)/V(t) \propto \text{const.}$

Em seguida, calculando o número de e-foldings usando os últimos resultados, temos

$$\mathcal{N} = \ln \left(\frac{t}{t_i} \right)^p = \frac{p}{\sigma} [\phi(t_f) - \phi(t_i)] . \quad (4.72)$$

Por fim, podemos ver como se comporta este cenário mediante a ASR onde, usando (4.70), encontramos os parâmetros $\epsilon = 1/p$ e $\eta = 2/p$, que implicam $p > 1$ e $p \gg 2$ respectivamente, mostrando que estes parâmetros independem do campo escalar. Se por curiosidade desejarmos saber como fica a evolução temporal do fator de escala e do inflaton, veremos que a ASR se mostra interessante nesse contexto pois dela obtemos expressões muito próximas das exatas a pouco mostradas ao substituir o potencial em (3.65) e (3.66) respectivamente.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho, fizemos uma revisão das técnicas analíticas básicas empregadas na descrição do MCP e, principalmente, da inflação cosmológica, investigando alguns de seus vários potenciais através do formalismo clássico da teoria de campos, onde procuramos ressaltar as ligações entre alguns desses potenciais e teorias de Física de Partículas. Em um contexto geral, fica marcada a simplicidade da teoria inflacionária, que acaba por resolver vários problemas do MCP sem menção explícita a um potencial específico para o campo escalar que a modela. Sendo incorporada à teorias em que há a quebra espontânea de simetria em temperaturas da ordem da escala de grande unificação, a inflação cosmológica abre novas possibilidades de investigação do universo primordial, permitindo aos cosmologistas novas perspectivas sobre a descoberta de alguns dos mais obscuros segredos da natureza. Os dados que virão do satélite Planck em 2012 serão fundamentais nesse sentido.

Para um entendimento mais profundo da cosmologia inflacionária e, particularmente, de um de seus maiores triunfos, a predição do espectro das perturbações na densidade de energia e suas consequências na formação de estruturas, é necessário o conhecimento da teoria de perturbação, um dos nossos objetivos futuros. Este formalismo também é importante para a conexão entre os vínculos observacionais e predições dos modelos inflacionários, permitindo discernir a viabilidade desses modelos, em uma descrição realística do universo. O estudo do processo de reaquecimento do universo após a fase inflacionária, em que há uma massiva produção de partículas, também é de fundamental importância e, em particular, determinante para o estudo da produção de neutrinos no universo primordial, que aliado a aplicação da inflação em teorias supersimétricas e modelos cosmológicos alternativos, constituem alguns de nossos interesses.

Referências Bibliográficas

- [1] White, M. *Anisotropies in the CMB*. astro-ph/9903232v1.
- [2] Hubble, E., *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15, 3 168-173.
- [3] Ryden, B. (2003) *Introduction to Cosmology*, Addison Wesley, .
- [4] Bedran, M. L. (2002) *Apj* **70**(4), 406-408 .
- [5] Harrison, E. (1993) *Apj* **403**, 28-31.
- [6] Padmanabhan, T. (1996) *Cosmology and Astrophysics through Problems*, Cambridge University Press.
- [7] Weinberg, S. (1972) *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley.
- [8] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1975) *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann.
- [9] Dodelson, S. (2003) *Modern Cosmology*, Academic Press.
- [10] Plebanski, J., Krasinski, A. (2006) *A introduction to General Relativity and Cosmology* Cambridge University Press.
- [11] Wald, R .M. (2000) *General Relativity*, Cambridge University Press.
- [12] Mukhanov, V. (2005) *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press.
- [13] Rindler, W. (2006) *Relativity: special, general and cosmological*, Oxford University Press.
- [14] Spergel, D. N. *et al* (2007) *ApJS* **170** (2), 337-408.
- [15] Liddle, A. R. (2003) *An Introduction to Modern Cosmology*, 2° ed., Wiley.

- [16] Brandenberger, R. H. *Inflationary Cosmology: progress and problems*. hep-ph/9910410v1.
- [17] Baumann, D. *TASI Lectures on Inflation*. hep-ph/0907.5424v1.
- [18] Wright, E. L. *Theoretical Overview of Cosmic Microwave Background Anisotropy*. astro-ph/0305591v1.
- [19] Liddle, A. R., Lyth, D. H. (2000) *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press.
- [20] Liddle, A. R. *The Early universe*, astro-ph/9612096v2.
- [21] Tsujikawa, S. *Introductory Review of Cosmic Inflation*, hep-ph/0304257v1.
- [22] Peacock, J. (1999) *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.
- [23] Linde, A. Phys. Lett. **B108** (6), 389.
- [24] Liddle, A. R., Lyth, D. H. (1992) Phys. Lett. **B291**, 391.
- [25] Spergel, D. N. *et al*, ApJS **170** (2), 337.
- [26] Albrecht, A., Brandenberger, R. H. (1985) *Phys. Rev. D*, **31**, 1225-1231.
- [27] Guth, A. H. (1981) *Phys. Rev.*, **D23**, 347.
- [28] Albrecht, A. e Steinhardt, P. (1982) *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1220.
- [29] Linde, A. (1994) *Phys. Rev.*, **D49**, 748.
- [30] Coleman, S. R., Weinberg, E. J. (1973) *Phys. Rev.*, **D7**, 1888.
- [31] Linde, A. (1983) *Phys. Lett.*, **B129**, 177.
- [32] Linde, A. (1986) *Phys. Lett.*, **B175**, 395.
- [33] Linde, A. (1994) *Phys. Rev.*, **D49** (2), 748.
- [34] Copeland, E. J. Liddle, A. R. Lyth, D. H. Stewart, E. D., Wands, D. (1994) *Phys. Rev.*, **D49**, 6410.
- [35] Kofman, L. A., Linde, A. D. (1987) *Nucl. Phys.*, **B282**, 555.
- [36] Lucchin, F., Matarrese, S. (1985) *Phys. Rev.*, **D32**, 1316-1322 .
- [37] Mendes, L. E., Liddle, A. R. (2000) *Phys. Rev.*, **D62**, 103511. astro-ph/0006020v3.

- [38] Lyth, D. H., Riotto, A. (1999) *Phys. Rept.*, **314**. hep-ph/9807278v4.
- [39] Adams, F. C., Bond, J. R., Freese, K., Frieman, J. A., Olinto, A. V. (1993) *Phys. Rev.*, **D47**, 426-455.
- [40] Freese, K., Frieman, J. A., Olinto, A. V. (1990) *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3233.
- [41] Adams, F., Bond, J.R., Freese, K., Frieman, J., Olinto, A. (1993) *Phys. Rev.*, **D47**, 426. hep-ph/9207245.