

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE 4D
EM BRANAS SUSY

RODRIGO CÉSAR FONSECA DA SILVA

JOÃO PESSOA
01/03/2013

LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE 4D EM BRANAS SUSY

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE 4D EM BRANAS SUSY

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Laercio Losano e co-orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada ao Departamento de Física, em complemento aos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

RODRIGO CÉSAR FONSECA DA SILVA

JOÃO PESSOA
01/03/2013

S586l Silva, Rodrigo César Fonseca da.
Localização de gravidade 4D em branas susy / Rodrigo
César Fonseca da Silva.-- João Pessoa, 2013.
107f. : il.
Orientador: Laercio Losano
Co-orientador: Francisco de Assis de Brito
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Mundo-brana. 3. Gravitação. 4. Teoria de
Campos. 5. Potencial Newtoniano. 6. Campos Escalares
Reais.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE 4D EM BRANAS SUSY

RODRIGO CÉSAR FONSECA DA SILVA

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Laércio Losano
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
co-Orientador

Prof. Dr. José Roberto do Nascimento
Examinador Interno

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior
Examinador Externo

Prof. Dr. Bruno Carneiro da Cunha
Examinador Externo

Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
Examinador Externo

“No estudo, em geral, a busca da verdade e da beleza são domínios que nos permitem permanecer crianças por toda a vida”.

Albert Einstein

A Deus

À minha Família.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Laércio Losano pela orientação, estímulo, confiança e competência com que conduziu este trabalho.
- Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela presente co-orientação, interesse, apoio e participação decisiva no desenvolvimento e término deste trabalho.
- A todo o Grupo de Partículas e Campos, pela convivência e alta qualidade dos trabalhos desenvolvidos.
- Ao Departamento de Física e o Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, em nome dos Professores Alexandre da Silva Rosas e Sergio Andre Fontes Azevedo, pela oportunidade que me foi dada para obter o título de Doutor em Física.
- A todos os professores deste departamento, pela minha formação.
- Aos bons amigos e colegas de trabalho, pelos momentos de estudo edificante e descontração.
- Aos funcionários deste departamento, pela assistência e grata convivência.
- Aos meus professores da graduação da Universidade Federal de Campina Grande, pelos ensinamentos, pelo profissionalismo, paciência e amizade que me abriram muitas portas.
- À CAPES, pelo indispensável suporte financeiro.
- A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para o término deste trabalho.

Resumo

No modelo de Randall–Sundrum, a gravidade 5D está acoplada à uma constante cosmológica negativa e uma 3-brana é originado por uma função delta. A solução nesta configuração é simétrica, e dada em termos de duas cópias de espaços AdS_5 unidos ao longo da 3-brana. Embora a quinta dimensão seja infinita, o volume formado pelo espaço maior 5D é finito, pois a geometria é deformada e esta, permite termos um modo de zero gráviton responsável pela gravidade 4D na brana. Isso não é necessário verdade para espaços cujo volume diverge, porque nenhum modo de zero emerge mais. Nós investigamos a localização de gravidade 4D, metaestável, em torno de branas mergulhadas em um espaço 5D, que só existe até distâncias suficientemente pequenas em comparação com uma *escala de crossover*. Longe de tal escala, efeitos 5D desviam fortemente o potencial Newtoniano potencial. Nesta tese, estudamos esse efeito, considerando a localização de gravidade em soluções tipo 3-brana plana assimétrica, e 3-branas curvas dilatônicas, não-BPS e BPS, que se originam de uma supergravidade 5D. No primeiro caso, os parâmetros que controlam a largura da brana assimétrica também controlam o tamanho da escala de crossover. Por outro lado, a constante cosmológica (positiva) na brana curva dilatônica controla o tamanho da escala de crossover no segundo caso. Para uma constante cosmológica suficiente pequena, que está de acordo com as observações atuais, a escala de crossover se torna muito grande. Tal como nos cenários de Gregory-Rubakov-Sibiryakov (GRS) e Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP), nosso foco é a interessante característica da gravidade é metaestável 4D, para distâncias muito menores do que a escala de crossover, que surge como uma gravidade 5D para distâncias muito maior do que tal escala. Ao fazer isso, vamos encontrar o potencial Newtoniano induzido pelos modos massivos de gravidade oriundos de uma equação tipo Schroedinger para as flutuações da gravidade em torno das soluções tipo branas.

Abstract

In the original Randall–Sundrum model, the 5D gravity is coupled to a negative cosmological constant and a 3–brane sourced by a delta function. The solution in such setup is a symmetric solution given in terms of two copies of AdS_5 spaces patched together along the 3–brane. Although in this setup the fifth dimension is infinite the volume of the 5D bulk space is infinite because the geometry is warped. As a consequence this allows having graviton zero mode responsible for 4D gravity on the brane. This is not necessarily true for spaces whose volume diverges, because no zero mode emerges anymore. We investigate the localization of metastable 4D gravity around an asymmetric flat brane and a bent dilatonic brane, embedded into a 5D space, that exists only up to distances sufficiently small compared to a crossover scale. Far from such scale, 5D effects causing deviations in Newtonian potential. In this thesis, we present a study on this effect considering the location of massive gravity on an asymmetric flat brane and non-BPS and BPS bent dilatonic 3–brane solutions of a supergravity 5D. The parameters control the thickness of the membrane also control the crossover scale of the first case. In the other hand, the cosmological constant on the bent brane controls the size of the crossover scale in second case. For sufficiently small positive cosmological constant, that is in accord with the present observations, the crossover scale becomes very large. Thus, as emphasized in Gregory-Rubakov-Sibiryakov (GRS) and Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) scenarios, we shall focus on the main beautiful characteristic of the 4D metastable gravity, that is the fact that where as gravity becomes four-dimensional for distances very much smaller than the crossover scale, it emerges as a 5D gravity for distances very much larger than such scale. In doing so, we will find the Newtonian potential induced by the gravity massive modes of a Schroedinger-like equation for the gravity fluctuations around the brane solutions.

Lista de Publicações

1. 2012 – 4D gravity on a non-BPS bent dilatonic brane

- JCAP01(2012)032 doi:10.1088/1475-7516/2012/01/032

2. 2011 – 4D gravity on a BPS brane in 5D AdS-Minkowski space

- Phys. Lett. B, 697, 5, p.493-496. doi: 10.1016/j.physletb.2011.02.031

3. 2009 – Fermion states on domain wall junctions and the flavor number

- Journal-ref: Eur. Phys. J. C 63, 163 (2009). doi: 10.1140/epjc/s10052-009-1089-9

Conteúdo

1	Introdução	3
2	O problema da localização de gravidade em branas	11
2.1	Modelos em mundo-brana	11
2.1.1	Mundo-brana com dimensões extras compactas	12
2.2	O Modelo original de Randall–Sundrum	16
2.2.1	A Métrica deformada	17
2.2.2	RS–I: Uma alternativa para o Problema da Hierarquia	21
2.2.3	O Modelo RS–II e localização de gravidade 4D	23
2.3	Modelo DGP: Dimensões Extras com volume infinito	31
3	Campos Escalares, Branas e localização de gravidade 4D	34
3.1	Branas planas	35
3.1.1	Modelos com um campo escalar real	35
3.1.2	Modelos com $\mathcal{N}$ campos escalares reais	40
3.2	Branas Curvas	45
3.2.1	Modelos com um campo escalar real	45
3.2.2	Modelos com dois campos escalares reais	50
3.3	Localização de Gravidade	51
4	Localização de gravidade 4D em uma teoria de supergravidade	57

CONTEÚDO

4.1	Gravidade 4D em branas planas assimétricas	59
4.2	Gravidade 4D em branas dilatônicas curvas	67
4.2.1	Modelo I: Branas não-BPS	69
4.2.2	Modelo II: Branas BPS	73
5	Conclusões e Perspectivas	77
A	Dedução das equações de Einstein	93
A.1	Equações de campo para a métrica não perturbada.	93
A.1.1	Variação do Determinante da Métrica	93
A.1.2	Tensor energia-momento	93
A.1.3	Variações do escalar de Ricci e dos tensores de curvatura e de Ricci . .	94
A.1.4	Equação de movimento	95
A.2	Tensor de Einstein na métrica deformada RS	96
A.2.1	Os símbolos de Christoffel	96
A.2.2	Escalar de Ricci	97
A.2.3	Equações de Einstein linearizadas	97

Capítulo 1

Introdução

A obtenção de soluções analíticas para as equações clássicas em contextos que envolvem escalares acoplados à gravidade oferece grandes desafios em *teoria de campos*. Isso se deve ao fato de que a maioria desses problemas só admite um tratamento numérico devido à própria estrutura não linear das equações diferenciais, que surgem da resolução das equações de Einstein. A construção de teorias plausíveis com dimensões extras, que constituam cenários onde haja uma contribuição para o potencial gravitacional compatível com os dados experimentais, fica ainda mais difícil presença da constante cosmológica. Esse aumento da complexidade dos problemas é mais um reflexo da natureza da gravidade. A gravidade é uma força fundamental que domina a estrutura de larga escala do universo apenas parcialmente, pois a matéria se organiza para cancelar o eletromagnetismo e as forças fortes e fracas no domínio das pequenas distâncias. Em um nível mais fundamental, a gravidade é extremamente fraca. Talvez, a coisa mais incomum sobre o que sabemos sobre a gravidade é que está intimamente ligada à estrutura do espaço-tempo, ao contrário das outras forças da natureza sendo necessário o uso de ferramentas matemáticas cada vez mais apurado. O porquê é tão diferente das outras interações, e também o fato de que não foi possível unificá-la com as demais forças, ainda são desafios que não foram solucionados pela física moderna. O entendimento destes problemas, dentro da teoria de campos, nos remete à busca por teorias de unificação das forças fundamentais da natureza. Atualmente, uma nova formulação

baseada em objetos extensos, chamada *teoria de cordas* vem sendo desenvolvida e apresenta a incorporação da gravidade às demais forças como principal característica, sem a consequente introdução de divergências.

A teoria de cordas, mesmo longe da sua formulação final, já foi capaz de obter alguns resultados muito importantes, tais como uma interpretação estatística da entropia de um buraco negro e a correspondência AdS/CFT, que mostra que uma certa teoria de campos 4D pode ser descrita completamente por supercordas fechadas que se propagam em um espaço-tempo curvo. Além disso, foi capaz de prever que a gravidade, à semelhança das outras forças fundamentais, pode ser mediada por uma partícula sem massa e de spin 2, denominada gráviton. Quando trabalhamos em um espaço-tempo com dimensões superiores, a teoria de campos nos fornece uma série de possibilidades de estudos sobre gravidade, que nos permite verificar sugestões recentes para o trato da fenomenologia de *mundo-brana* para a gravitação. Também abre a possibilidade de estudarmos as equações para flutuações em alguns modelos já consagrados na literatura, bem como novos modelos que obedecem ao formalismo de primeira ordem em teoria de campos. Neste âmbito, os métodos trabalhados nesta tese envolvem apenas equações de primeira ordem inspirados em uma teoria de *supergravidade*, no intuito de obter soluções exatas das equações clássicas de campo não lineares, em modelos de branas constituídos por campos escalares acoplados com gravidade, que sejam válidas mesmo sem *supersimetria*. A supersimetria é um conceito complexo que surgiu por volta de 1971, com o objetivo de fazer com que as massas das partículas elementares sejam compatíveis com a teoria do gráviton. Em linhas gerais, é um intercâmbio de um férmion com um bóson onde as equações fundamentais da teoria se conservariam. Uma consequência deste novo conceito é o surgimento das chamadas s-partículas(ou s-parceiros) à partir dessa nova simetria. Sendo assim, cada partícula conhecida tem o seu parceiro. Por exemplo: os superparceiros do neutrino, quarks, elétron, fóton e glúon seriam, na sequência, s-neutrino, s-quarks, s-elétron, fotino e gluíno. Por sua vez, a supergravidade se trata da versão

supersimétrica da relatividade geral de Einstein e é uma teoria que envolve 10 dimensões espaciais.

Historicamente, a ideia de dimensões espaciais extras entrou no reino da física em 1920, quando Kaluza [1] e Klein [2] tentaram unificar o eletromagnetismo com a gravidade, assumindo que o campo eletromagnético se origina da quinta componente, $g_{\mu 5}$, de um tensor métrico com cinco dimensões (Fig. (1.2)). O que vem a ser uma dimensão pode ser visualizado, do ponto de vista físico-matemático, através de argumentos simples. Uma linha é uma figura geométrica bastante conhecida e pode ser descrita apenas por seu comprimento constituindo um objeto unidimensional, a que damos o nome de 1-brana. Podemos imaginar que a dimensionalidade de um objeto pode ser criada tomando o movimento relativo de outro objeto (e com pelo menos uma dimensão espacial), movendo-se linearmente para outra dimensão. É possível assim criar uma linha imaginária, tomando um ponto em movimento. Repetindo o processo sucessivamente, para criar dimensões superiores é necessário mover objetos tridimensionais em direções diferentes do seu comprimento, largura ou profundidade. Embora seja um processo relativamente fácil de realizar matematicamente, é impossível imaginá-las ou mesmo representá-las geometricamente.

A evolução dessas teorias culminou no surgimento teoria das cordas no início de 1980, e então houve uma revitalização da ideia original de que o nosso universo pode ser descrito corretamente por modelos que envolvem dimensões extras. Nesse contexto, as cordas seriam entidades unidimensionais que vibram em um espaço 10D e são consideradas, nas teorias modernas da gravitação, como sendo a unidade elementar da natureza, não possuindo uma estrutura interna e com características quânticas e relativísticas. Podem se apresentar na forma de cadeias fechadas ou abertas e os modos de vibração dessas minúsculas fibras de energia, correspondem às partículas elementares e as forças observáveis na natureza. Possuem em média o comprimento da ordem da distância de Planck (10^{-33} cm), que justifica a sua inobservância direta, por ser 20 ordens de grandeza menor que o próton. Em teorias que

envolvem dimensões superiores, a estrutura dessas entidades fundamentais de toda a matéria do universo pode vir a dilatar-se, combinando-se uma com as outras, adquirindo a vasta constituição de uma *membrana* (ou simplesmente *brana*, por uma questão de simplicidade). Entretanto, o conceito de branas extrapola o que seria a conclusão do senso comum, de que deveria se tratar de objetos planos, achatados e geometricamente perfeitos. De acordo com a teoria-M, a teoria mais atual que versa sobre a existência das cordas cósmicas vibrando num espaço-tempo 11D, se uma brana representa as três dimensões em que vivemos (Fig.(1.1)), os férmions, que são os constituintes de tudo o que existe, se comportariam como cordas cujas extremidades estão para sempre sujeitas a essas três dimensões enquanto que a gravidade é livre para percorrer um espaço de maior dimensão, denominado *bulk*. Embora o modelo padrão, tenha sido bem sucedido ao explicar tudo o que se conhece a nível das partículas elementares, ele ainda é incompleto, entre outras razões, por não incluir a *força gravitacional* (Fig. (1.1)).

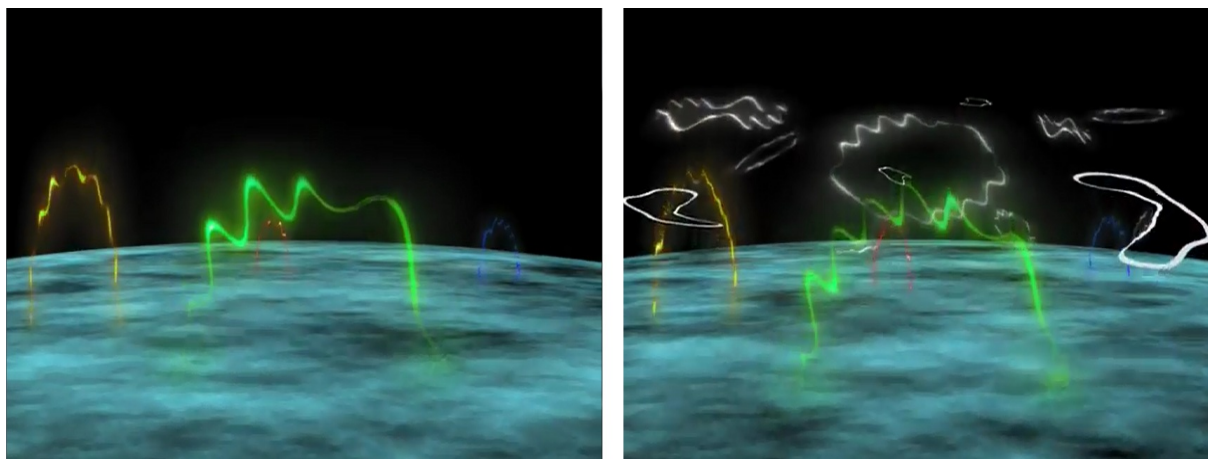


Figura 1.1: À **esquerda** temos a representação do que seriam as partículas do modelo padrão (filamentos ou cordas), presas pelas extremidades ao tecido do espaço-tempo 4D, correspondente à Brana-Mundo em que vivemos. À **direita** temos a representação dos Grávitons, as partículas que transportam a gravidade, que segundo a teoria das cordas, é uma cadeia fechada e livre para transitar entre as dimensões de ordem superiores.

A partir do desenvolvimento desses novos conceitos na física surge uma nova escala de

energia, a massa de Planck ($m_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV), que é 10^{16} vezes mais pesada do que a escala de energia alcançada até então, mostra uma discrepância entre duas escalas que são fundamentais para as teorias de gravitação. Esta diferença ficou conhecida como o problema da hierarquia de massa. Além disso temos novos campos de estudo sobre problema de localização de gravidade, inicialmente proposto pelos trabalhos originais de Randall e Sundrum [14]. Estes dois pontos podem ser trabalhados por alguns dos modelos de mundo-brana que iremos apresentar. Em relação ao problema de localização de gravidade, geralmente, o modo zero de gravidade deve ser localizado na brana para garantir que a gravidade 4D eficaz seja recuperada.

O problema de localização de gravidade em uma brana, de forma local, foi abordado primeiramente em [23]. Uma das particularidades deste modelo é que o modo do gráviton responsável pela gravidade 4D é um modo quase sem massa, ou “quasi-zero” que domina sobre os modos de Kaluza-Klein. Trata-se de um mecanismo muito mais geral de localização de gravidade, porque ele não impõe qualquer condição no espaço a longas distâncias da brana. Além disso, do ponto de vista fenomenológico, é muito importante por procurar configurações que permitam a existência de um salto de energia (“gap” de massa) no espectro gravitacional das excitações de Kaluza-Klein (KK). Tais gaps podem decidir a escala de energia além da qual os modos massivos podem ser excitados. Na referência [58] vemos que a existência de um gap de massa poderia determinar a localização do gráviton sem massa. O gap de massa também pode resultar em diferentes correções do potencial de Newton. No trabalho de Freedman temos uma análise mais completa dos efeitos da tensão nas branas sobre a métrica [25], onde foram introduzidos campos escalares adicionais, de maneira a suavizar as branas usuais. As branas assim idealizadas adquirem uma estrutura similar aos kinks usuais característicos de paredes de domínios. Com a análise de modelos simples, com solução em grande parte analítica [27], pode-se ilustrar de modo interessante a localização de gravidade mesmo em modelos de branas espessas.

No capítulo 2, apresentamos um breve resumo sobre as principais teorias de mundo-brana,

envolvendo dimensões extras compactadas, ou não, que foram essenciais na elaboração deste trabalho de tese. O primeiro modelo introduz n dimensões extras espaciais, compactas, planas e com grande volume. Este modelo de mundo-brana é conhecido como o modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali) que além de oferecer uma solução para o problema da hierarquia, também prevê desvios em relação à lei de Newton 4D em distâncias submilimétricas. O segundo modelo é o consagrado modelo de Randall–Sundrum, que fornece uma forma elegante de solucionar o problema da hierarquia, demonstrando que uma hierarquia exponencial surge naturalmente entre as escalas de energia fraca e da gravidade. Apresenta também, um estudo completo sobre o espectro de flutuações métricas, que serviu de base para nossos modelos branas com um campo escalar acoplado à gravidade. Os resultados importantes extraídos deste modelo são o espectro das flutuações gravitacionais, que consiste em um modo zero, que dá origem a lei de Newton 4D na brana, além de um contínuo de estados de energia positiva, que correspondem às pequenas correções para o potencial newtoniano 4D. Trata-se de um modelo bastante instrutivo por usar uma forma alternativa da equação para as flutuações gravitacionais, agora na forma de uma equação do tipo Schroedinger, que apresenta um potencial de onde é possível extrair informações importantes sobre o espectro.

O conteúdo teórico do estudo dos defeitos topológicos, em teoria de campos, é muito vasto e rico e tem uma relação profunda com a teoria de cordas. Muitas destas ligações se apresentam nas particularidades da correspondência AdS/CFT ou na analogia entre as branas e objetos extensos com energia finita, provenientes de soluções estáveis em teorias de campos. O capítulo 3, é dedicado a cenários de mundo-brana descritos por um espaço-tempo 5D, com uma geometria deformada envolvendo uma única dimensão infinitamente extensa, modelada por campos escalares reais com dinâmica padrão. Os modelos apresentados aqui revelaram novas possibilidades para o estudo de localização de gravidade em branas. Inicialmente iremos trabalhar com o formalismo de primeira ordem presente no caso de um espaço-tempo 4D de Minkowski ($\mathbb{M}$), que pode ser estendido à geometria de Sitter (dS) ou anti-de Sitter (AdS) na

presença de vários campos escalares reais. Apresentamos vários exemplos onde soluções tipo kink, que emergem são contruídas em torno de duas funções específicas do campo escalar, $W(\phi)$ e $Z(\phi)$. Verificamos o surgimento de branas No final deste capítulo fazemos um breve estudo sobre a localização de gravidade 4D para alguns modelos de branas curvas, onde equação efetiva do tipo Schroedinger, que surge das flutuações da métrica, tem um potencial do tipo Pöschl–Teller modificado já bem conhecido na literatura.

O Capítulo 4, apresenta os resultados inéditos que correspondem à nossa contribuição científica. Exploramos a localização do gráviton a partir de um background de p –branas (numa extensão onde temos $p = D - 2$ dimensões) criadas por campos escalares do setor bosônico de uma teoria de supergravidade. Esta apresenta conteúdos relevantes no que tange a cosmologia de branas/strings, a princípio, em um espaço com D –dimensões arbitrárias onde os campos escalares podem desempenhar papel importante. A métrica generalizada trabalhada é a de Randall–Sundrum que inclui 3–branas em espaços de dimensão superior não necessariamente Anti-de Sitter longe das branas. A escolha dos potenciais é feita de acordo a possibilidade de ligação com a cosmologia moderna.

O primeiro resultado, que pode ser conferido na referência [56], refere-se à localização de gravidade 4D próxima à branas planas BPS assimétricas em um espaço–tempo 5D, no regime de aproximação de pequenas espessuras. Ao contrário do modelo de Randall–Sundrum que ignora a espessura das branas, aqui resultado é decorrente deste limite ($a b^2 \gg 1$). Temos que o potencial gravitacional obtido é característico da gravidade metaestável 4D, para distâncias muito menores do que uma escala de crossover de energia, identificada com os parâmetros que controlam a largura da brana, e é 5D para distâncias muito maior do que tal escala. O segundo resultado versa sobre a localização de gravidade 4D nas proximidades de branas curvas em um espaço–tempo 5D [57], gerando branas distintas do ponto de vista da classificação segundo o formalismo de primeira ordem. De acordo com a escolha do regime de parâmetros, podemos ter branas curvas BPS ou não–BPS onde o regime da gravidade

é definido pela constante cosmológica. Nos três casos estudamos a possibilidade de termos o modo zero gráviton e os modos contínuos de Kaluza–Klein e assim para poder definir o potencial Newtoniano induzido pelos modos massivos de gravidade oriundos de uma equação tipo Schroedinger, que surge a partir das flutuações da gravidade em torno das soluções tipo branas obtidas.

O capítulo final, e apêndice desta tese, corresponde aos cálculos complementares aos que foram desenvolvidos ao longo do trabalho.

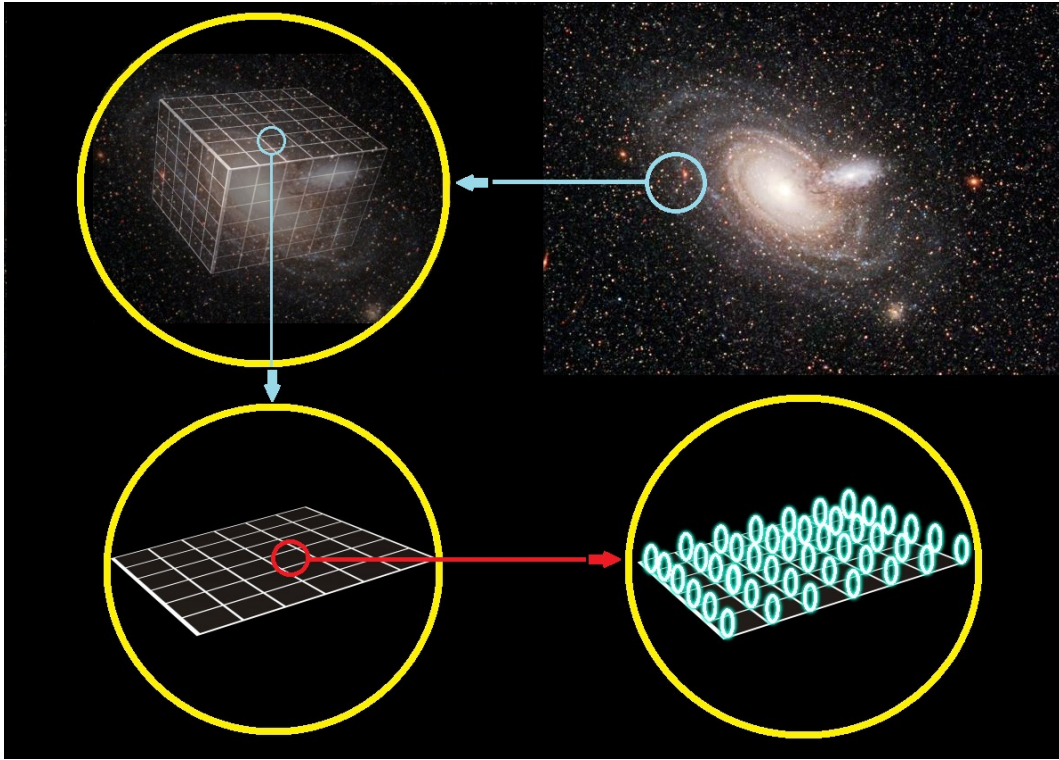


Figura 1.2: Considerando o espaço como sendo um substrato de tudo que existe, supondo que seja possível representar uma pequena porção do espaço com a geometria mais simples possível, neste caso a geometria plana. A figura representa uma ampliação cada vez maior, ultrapassando a fronteira do universo visível a olho nu, até que seja possível captar as dimensões extras muito abaixo, nas profundezas microscópicas e intensamente coladas no tecido do próprio espaço. Isso nos conduz às idéias de Kaluza e Klein, que nosso mundo, quando descrito apropriadamente, tem mais dimensões além daquelas que podemos ver. Mas com o avanço da Física, principalmente com advento da teoria das cordas, as dimensões extras passam à ser idealizadas como uma geometria entrelaçada mais rica, dobrando-se sobre si mesmas.

Capítulo 2

O problema da localização de gravidade em branas

2.1 Modelos em mundo—brana

A separação entre a escala fraca (10^3 GEV) e a tradicional escala da Gravidade Quântica, a escala de Planck (10^{19} GEV), é um dos aspectos mais intrigantes da natureza. Trata-se do conhecido problema da Hierarquia. Uma das formas teóricas de se resolver este problema é introduzindo a supersimetria. Alternativamente, pode-se esperar que o problema seja resolvido quando exploramos a geometria do espaço-tempo. Uma teoria muito usada, que resolve o problema da Hierarquia alterando a geometria do espaço-tempo com dimensões espaciais extras, é o cenário conhecido como mundo—brana. Este modelo foi motivado pelo trabalho de Horava e Witten [5, 6], que encontraram um cenário em teoria—M 11D, onde os campos do modelo padrão estão confinados em uma hipersuperfície 10D, ou o que se convém chamar de 10—brana. Nestes cenários, os graus de liberdade gravitacionais são representados por “cadeias”, ou cordas abertas, cujas extremidades residem na brana e, por outro lado, os graus de liberdade na teoria das cordas são obtidos na forma de “cordas fechadas”, que não se encontram limitadas a qualquer objeto de dimensão menor. Sendo assim, a característica principal deste modelo é que as partículas do modelo padrão estão localizadas em um espaço-tempo 4D, denominado 3—brana, enquanto que a gravidade está livre para se propagar em $(4 + n)$ —dimensões, numa região mais abrangente comumente chamada de *Bulk*. Geralmente,

2.1. MODELOS EM MUNDO–BRANA

assume-se nos cálculos que todas as n dimensões extras são transversais à brana e tem em comum um dado tamanho R . Entretanto, a brana também pode ter dimensões adicionais menores associadas à ela, de tamanho $r \ll R$, que conduzem a efeitos semelhantes aos de uma espessura finita muito pequena. Entre os mais importantes eventos da Física, no que concerne aos modelos de mundo–brana, é possível citar o primeiro trabalho de localização de partículas de aplicação física do modelo padrão, proposto por Rubakov e Shaposhnikov [7], e independentemente por Akama [8], e o mecanismo de localização dos campos de gauge em branas, no contexto de teorias de campos, proposto por Dvali e Shiffman [9], e também como uma propriedade natural de objetos conhecidos como D –branas, em teorias de cordas [10]. A obtenção das leis da gravidade sobre a brana 4D, em todos os modelos de mundo–brana, se dá em sua aproximação para baixas energias. Porém, o tamanho e a geometria do Bulk, bem como os tipos de partículas que são permitidos se propagar no volume e na brana, variam entre os diferentes modelos.

2.1.1 Mundo–brana com dimensões extras compactas

Para se obter a gravidade $(3 + 1)$ –dimensional sobre a brana, a idéia da compactificação de Kaluza–Klein é combinada com as idéias apresentadas em modelos de Mundo-Brana. Tal associação foi proposta em 1998 por Arkani-hamed [3], juntamente com Antoniadis [11]. Verificaram que as demais dimensões são compactas e da ordem do micrômetro. O que torna este modelo interessante é a possibilidade de explicar a debilidade relativa da gravidade, se comparada com as outras forças fundamentais da natureza. As outras três interações do modelo padrão são localizados na brana, mas não há qualquer restrição sobre a possibilidade de “fuga” de gravidade para o Bulk. Como consequência, a força da gravidade deve aparecer notadamente mais forte em escalas milimetricamente pequenas, na região onde a perda da força da gravidade é significativamente menor. Considere a ação da gravidade em

2.1. MODELOS EM MUNDO–BRANA

$(4 + n)$ –dimensões é dada por

$$S_{(4+n)} = \frac{M_*^{(2+n)}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi R} d^n y \sqrt{G} R_{4+n} + \int d^4x \sqrt{g} (T + \mathcal{L}_{SM}), \quad (2.1)$$

onde $M_* \sim (1 - 10)\text{TEV}$, $g(x) = G(x, y = 0)$, $T + \mathcal{L}_{SM} \geq 0$, e $\mathcal{L}_{SM}$ é a lagrangiana do modelo padrão. Neste modelo, a ação efetiva 4D para o modo zero toma a forma

$$S = \pi R^n M_*^{(2+n)} \int d^4x \sqrt{g_0} R_0 + \int d^4x \sqrt{g} (T + \mathcal{L}_{SM}). \quad (2.2)$$

Comparando com a ação padrão 4D de gravidade pura, temos

$$M_{Pl}^2 = M_*^{(2+n)} (2\pi R)^n. \quad (2.3)$$

Uma determinada massa m' , a uma distância $r \ll R$ de uma outra massa m , sentirá a influência de um potencial gravitacional dado pela Lei de Gauss em $(4 + n)$ –dimensões [12]

$$\nabla^2 V^{(n+4)} = 4\pi \rho_m, \quad (2.4)$$

que tem por solução

$$V^{(n+4)}(r) = -\Gamma \left[\frac{(3+n)}{2} \right] \frac{G_N^{(n+4)}}{2\pi^{\frac{(3+n)}{2}}} \frac{m}{r^{n+1}}, \quad r \gg R; \quad (2.5)$$

onde G_N^D é a constante gravitacional em D –dimensões. Contudo, para $r \gg R$ o potencial gravitacional 4D será recuperado, uma vez que as linhas do fluxo gravitacional não permeiam o espaço das dimensões extras. Sendo assim

$$V^{(n+4)}(r) \sim G_N^{(4+n)} \frac{m}{R^n r}, \quad r \gg R; \quad (2.6)$$

de onde temos a seguinte relação

$$\frac{G_N^{(4+n)}}{G_N} \sim R^n. \quad (2.7)$$

Da equação (2.5), vemos que

$$\frac{G_N^{(4+n)}}{G_N} = \frac{\left(l_{Pl}^{(4+n)} \right)^{(2+n)}}{(l_{Pl})^2}, \quad (2.8)$$

2.1. MODELOS EM MUNDO-BRANA

o que implica em

$$R \sim l_{Pl}^{(4+n)} \frac{\left(l_{Pl}^{(4+n)}\right)^{(2+n)}}{(l_{Pl})^2}. \quad (2.9)$$

Postulando que a nova Gravidade Quântica é aproximadamente da ordem de TEV, $l_{Pl} \sim 10^{-33}cm$ e $l_{Pl}^{(5)} \sim 10^{-18}cm$, encontramos que o tamanho das dimensões extras é tal que

$$R = 10^{30/n-17}cm. \quad (2.10)$$

Com $n = 1$, o tamanho da dimensão extra é em torno $R \sim 10^{13}cm$, que é um valor que deve ser excluído por alterar a gravidade na escala do sistema solar. Por outro lado, para $n = 2$, nós temos $R \sim 10^{-2}cm$, que é de interesse por trazer uma predição da modificação das leis da gravidade 4D em uma escala submilimétrica. Assim, o problema de hierarquia é resolvido desde que tenhamos um bulk do tipo $\mathbb{M}_4 \times S_4$, com duas dimensões extras encurvadas da ordem de um milímetro. O raio de compactificação não é um parâmetro livre da teoria de cordas e sim um parâmetro de um espaço-tempo permitido. Trata-se de valores ajustáveis, algumas vezes chamados de *moduli*. Os campos de moduli descrevem o tamanho e forma das dimensões compactas em cada ponto do espaço-tempo. Já está bem fundamentado que estes campos moduli geram forças de intensidade comparáveis à da gravidade 4D usual, e chegamos à forma potencial do potencial newtoniano entre dois corpos de densidades de massa ρ_1 e ρ_2 , por meio de correções dadas por um termo de interação tipo Yukawa que caracteriza a intensidade e alcance da força geradas pelos moduli, tal que [13]

$$V = - \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \frac{G_N \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2)}{r_{12}} \left[1 + \sigma e^{-\frac{r_{12}}{\lambda}} \right] \quad (2.11)$$

onde σ é a intensidade da força de alcance, G_N é a constante gravitacional e o parâmetro λ é devido ao campo de *modulus*. Ao longo deste trabalho, iremos usar variações destes campos de moduli que caracteriza as correções para o limite Newtoniano. Para o cenário ADD estudado nesta seção vamos supor duas fontes sobre a brana, que interagem de acordo com o potencial

2.1. MODELOS EM MUNDO-BRANA

gravitacional não-relativístico

$$V(r) = -G_N m_1 m_2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\Psi_n(y=0)|^2 \frac{e^{-m_n r}}{r}, \quad (2.12)$$

onde $\Psi_n(y=0)$ representa a função de onda do n -ésimo modo KK em uma determinada posição sobre a brana e $m_n = |n|/R$. Para o caso em que $r \gg L$ nós temos

$$V(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \quad (2.13)$$

que recupera a lei da dinâmica Newtoniana em sua forma convencional 4D. Por outro lado, no limite em que $r \ll L$ nós temos

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_*^{2+n} r^{1+n}}. \quad (2.14)$$

Essa é a lei para interações gravitacionais em $(4+n)$ -dimensões, e as leis da gravidade são modificadas a distâncias da ordem de R . As previsões teóricas acima, assim como as de outros modelos inspirados em Teoria de Cordas, conduziram a um interesse renovado por testes precisos da interação gravitacional a distâncias menores que $100 \mu m$. Nesta seção apresentamos um resumo dos resultados do modelo ADD que nos apresentou a possibilidade de haver um desvio da Lei de Newton numa escala submilimétrica. Se m_{Pl} for realmente da ordem na escala TeV, não seria uma hierarquia muito grande entre a escala fundamental de Planck, e a escala de M_{EF} para interações fracas; e sendo assim, resolveria o problema da hierarquia. Neste caso, a gravidade iria aparecer mais fraca do que as outras forças a longas distâncias, porque ela iria ficar diluída pelo grande volume das dimensões extras. No entanto, se inferirmos a igualdade da força das interações fracas e gravitacionais, é preciso indagar o porquê desta não ser a escala que define o tamanho das dimensões extras em si. Assim, postulando um raio muito grande para as dimensões adicionais, pode-se traduzir, simplesmente, o problema da hierarquia das escalas de interações com o problema da razão pela qual o tamanho da dimensão extra é tão grande em relação ao seu valor natural. Para o valor específico $n=6$, temos que a força gravitacional deve ser medida diretamente numa

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

escala abaixo de um milímetro, e os testes de precisão do modelo padrão, até ~ 200 GeV, implicam que os campos do modelo padrão não podem sentir estas dimensões extras de ordem superior por estarem limitados a uma parede, ou 3-brana, imersa em um espaço de maior dimensão.

2.2 O Modelo original de Randall–Sundrum

Diferente do modelo apresentado na seção anterior, o ponto de partida para a construção deste modelo é considerar a existência de uma única dimensão extra compactada em um círculo, conforme a representação da figura (2.1). De um ponto de vista mais formal, isto significa que estamos trabalhando em um *espaço topológico* que localmente dado pelo “orbifold” $S_1/\mathbb{Z}_2$, onde S_1 trata-se de um círculo de raio unitário (ou em nossa linguagem de teoria de imersão, 1-esfera) e $\mathbb{Z}_2$ é o grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$, cuja operação usual de multiplicação de números inteiros estabelece uma estrutura de grupo abeliano. A adoção desta construção implica em dois pontos fixos: um localizado na origem ($y = 0$) e o ponto fixado bem na outra extremidade do círculo, na posição $y = \pi R$, que representa um comprimento total L . Em cada um desses pontos limites teremos um mundo 4D, tal como o que conhecemos e vivemos. Por analogia com branas inseridas em espaços com dimensões superiores, esses mundos com (3+1)D envolvem e limitam um volume 5D. Simplificando temos a visão de duas 3-branas, com uma distância L as separando, que encerram um volume 5D (vide figura (2.2)). A ação fundamental, em termos da constante cosmológica 5D (Λ), é a soma do ação de Hilbert-Einstein, S_H , e uma parte de matéria, S_M :

$$S = S_H + S_M = \int d^4x \int_{-L}^L dy \sqrt{-g} M^3 (R - \Lambda) \quad (2.15)$$

onde M é a escala de massa fundamental 5D, R é o escalar Ricci e g é o determinante da métrica, cuja forma explícita será investigada a seguir.

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

2.2.1 A Métrica deformada

Consideramos o seguinte Ansatz:

$$ds^2 = e^{A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.16)$$

onde o prefator, $e^{A(y)}$, chamado de fator de deformação¹, é escrito convenientemente como uma exponencial, e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica 4D de Minkowski. Para determinar uma função $A(y)$ apropriada, temos que calcular as equações de Einstein 5D:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = G_{5D}^2 T_{MN}, \quad (2.17)$$

onde temos que os índices capitais assumem os valores $M, N = 0, 1, 2, 3$ e 5, isto é, $M = (\mu, 5)$, com μ sendo o usual índice 4D de Lorentz, e assim por diante. Nosso desafio é encontrar soluções adequadas para as equações de Einstein 5D de maneira que, o universo 4D derivado desta teoria se apresente plano e estático na ausência de matéria. A constante de Newton 5D e o tensor de energia–momento são dados, respectivamente, por

$$G_{5D}^2 \equiv \frac{1}{2 M^3}, \quad T_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{MN}}, \quad (2.18)$$

de modo que um termo na ação do tipo $\sqrt{-g} V$, com V constante, corresponde a um tensor de energia–momento igual a $V g_{MN}$. A evolução do tensor de Einstein, para a métrica parametrizada pelo Ansatz (2.16), pode ser conferida no Apêndice A. A componente–(55) da equação de Einstein nos dá:

$$G_{55} = 6 A'^2 = -\frac{\Lambda}{2 M^3}. \quad (2.19)$$

Devemos notar que uma solução real para A só existe se a constante cosmológica 5D for negativa, o que significa que o espaço entre as branas deve ser anti–de Sitter, especificamente, o espaço AdS_5 . O caso em que a função A é puramente imaginária corresponde a um fator de deformação oscilatório, o que não pertence ao modelo RS. A partir dessa equação, vemos

¹Uma tradução livre para a expressão **warp factor**, como é conhecido o prefator $A(y)$.

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

que A'^2 é igual a uma constante, que nomearemos por critério de simplicidade de k^2

$$A'^2 = -\frac{\Lambda}{12 M^3} \equiv k^2, \quad y \neq 0. \quad (2.20)$$

Fazendo a integração com respeito a um orbifold simétrico, encontramos a solução

$$A(y) = k |y| \quad (2.21)$$

com $-L \leq y \leq L$. Sendo assim, lançando um olhar na componente $\mu\nu$ das equações de Einstein, temos

$$G_{\mu\nu} = (6 A'^2 - 3 A'') g_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

A partir da solução desenvolvida aqui nós temos a primeira e segunda derivadas do fator de deformação A

$$A'(y) = k [\theta(y) - \theta(-y)], \quad A''(y) = 2 k \delta(y). \quad (2.23)$$

Da mesma forma, o limite em que $y = L$ dá origem a uma outra função delta, e a expressão completa para a segunda derivada é

$$A''(y) = 2 k [\delta(y) - \delta(y - L)]. \quad (2.24)$$

Substituindo estes resultados na expressão do tensor de Einstein temos

$$G_{\mu\nu} = 6 k^2 g_{\mu\nu} - 6 k [\delta(y) - \delta(y - L)] g_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

onde o primeiro termo da equação acima é igual às componentes $\mu\nu$ do tensor energia–momento multiplicadas pela constante de Newton 5D, ou seja,

$$G_{5D}^2 T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{2 M^3} g_{\mu\nu} = 6 k^2 g_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

A solução do segundo termo, entretanto, depende das densidades de energia das branas, a que chamamos de tensões das branas. Isto é feito através da adição de uma ação correspondente ao termo de cada brana, que correspondente às tensões das branas, σ_1 e σ_2 :

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int d^4x \sqrt{-g_1} \sigma_1 = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \sigma_1 \delta(y), \\ S_2 &= - \int d^4x \sqrt{-g_2} \sigma_2 = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \sigma_2 \delta(y - L), \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

cujos termos g_1 e g_2 representam as métricas induzidas² sobre as branas. Temos aqui

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x, y_i) dx^\mu dx^\nu, \quad i = 1, 2; \quad (2.28)$$

com $y_1 = 0$, $y_2 = L$, $g_1 = g\delta(y)$ e $g_2 = g\delta(y - L)$, pois temos que $g_{55} = 1$. Vamos impor uma relação entre as tensões da brana de maneira que seja possível resolver as equações de Einstein:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = 12 k M^3. \quad (2.29)$$

E além disso, pela definição de k , encontramos o valor específico para a constante cosmológica

$$\Lambda = -\frac{\sigma_1^2}{12 M^3}. \quad (2.30)$$

²Uma **métrica induzida** define as distâncias ao longo das branas que configuram o modelo em estudo.

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

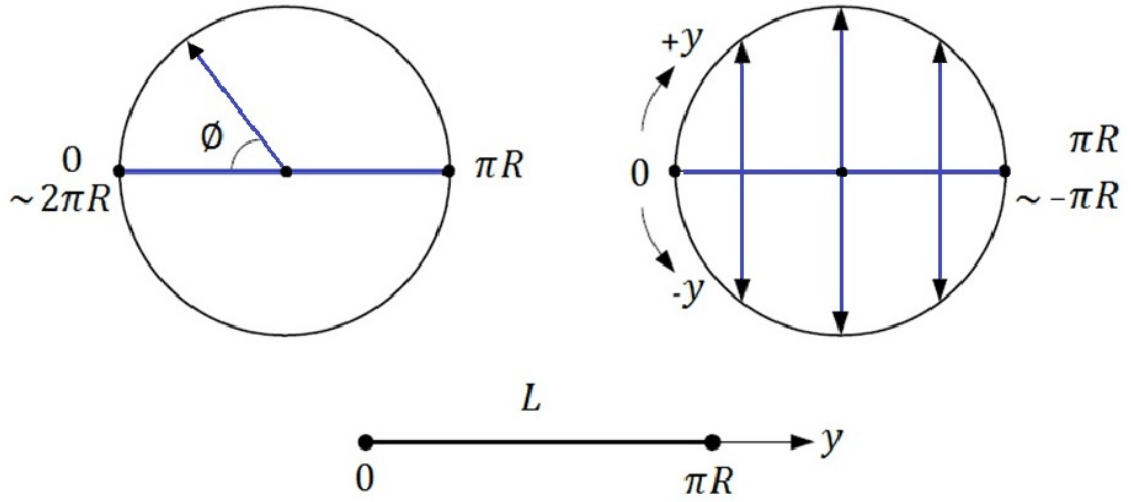


Figura 2.1: Orbifold $S_1/\mathbb{Z}_2$.

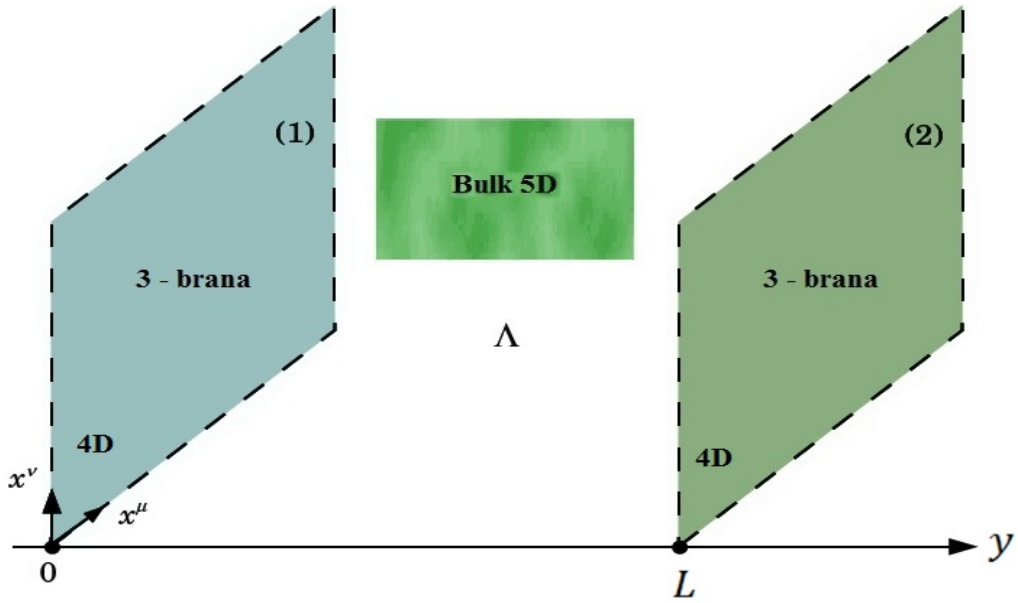


Figura 2.2: Setup do Modelo de Randall–Sundrum: As fontes de branas 4D são balanceadas pela constante cosmológica do Bulk 5D, a fim de obter uma constante cosmológica 4D eficaz.

2.2.2 RS–I: Uma alternativa para o Problema da Hierarquia

Trata-se de uma proposta para a solução do Problema da Hierarquia baseada em uma única dimensão espacial extra. Neste modelo, o universo observável 4D, caracterizado como uma 3-brana, é considerado como sendo um subespaço de um espaço-tempo 5D. Considere o campo escalar de Higgs com a ação

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{g_2} \left[g_2^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \sigma (H^\dagger H - v^2)^2 \right] \\ &= \int d^4x e^{2kL} \left[e^{-4kL} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \sigma (H^\dagger H - v^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para termos uma ação canonicamente normalizada, vamos redefinir o campo de Higgs como $H = e^{2kL} \tilde{H}$, então

$$S = \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu \tilde{H}^\dagger D_\nu \tilde{H} - \sigma (\tilde{H}^\dagger \tilde{H} - v^2 e^{2kL})^2 \right]. \quad (2.32)$$

Esta é a ação de um escalar de Higgs normal, exceto para o valor esperado, exponencialmente suprimido, do vácuo (VEV)

$$v_{ef} = e^{-kL} v. \quad (2.33)$$

Uma vez que o Higgs VEV define todos os parâmetros de massa no modelo padrão, isto significa que todos os parâmetros de massa estão submetidos a uma supressão exponencial na segunda brana. Caso o valor da massa do Higgs seja da ordem da escala de Planck, então a massa física de Higgs pode ser deformada até a escala fraca de energia, onde se espera que ele esteja de fato. Por este motivo, a primeira brana em $y = 0$ é muitas vezes chamada de brana de “Planck”, enquanto a segunda é denominada de brana “TEV”. Ainda é necessário entender como essa escala eficaz de gravidade se comporta com relação à dimensão extra e podemos extrair tais informações a partir da forma como a ação 5D contém a ação efetiva 4D

$$\begin{aligned} S &\sim M^3 \int d^4x \int_{-L}^{+L} dy e^{-2k|y|} \sqrt{-g^{(0)}} R_{4D} h_{\mu\nu}^{(0)} \\ &= \frac{(1 - e^{-2kL})}{k} M^3 \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} R_{4D} h_{\mu\nu}^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

Este termo corresponde à ação 4D, de modo que podemos identificar o valor da massa de Planck 4D:

$$M_{Pl}^2 = \frac{(1 - e^{-2kL})}{k} M^3. \quad (2.35)$$

Vemos que o resultado depende fracamente do tamanho da dimensão extra L , desde kL seja moderadamente grande. Colocando nossos dois últimos resultados juntos, vemos que a escala fraca é exponencialmente suprimida ao longo da dimensão extra, enquanto a escala de gravidade é mais independente dela. Em suma, teoricamente, quando os valores de todos os parâmetros $(M, \Lambda, \sigma_1, v)$ estão determinados pela escala de Planck, uma hierarquia exponencial pode ser gerada naturalmente entre as escalas fraca e de gravidade.

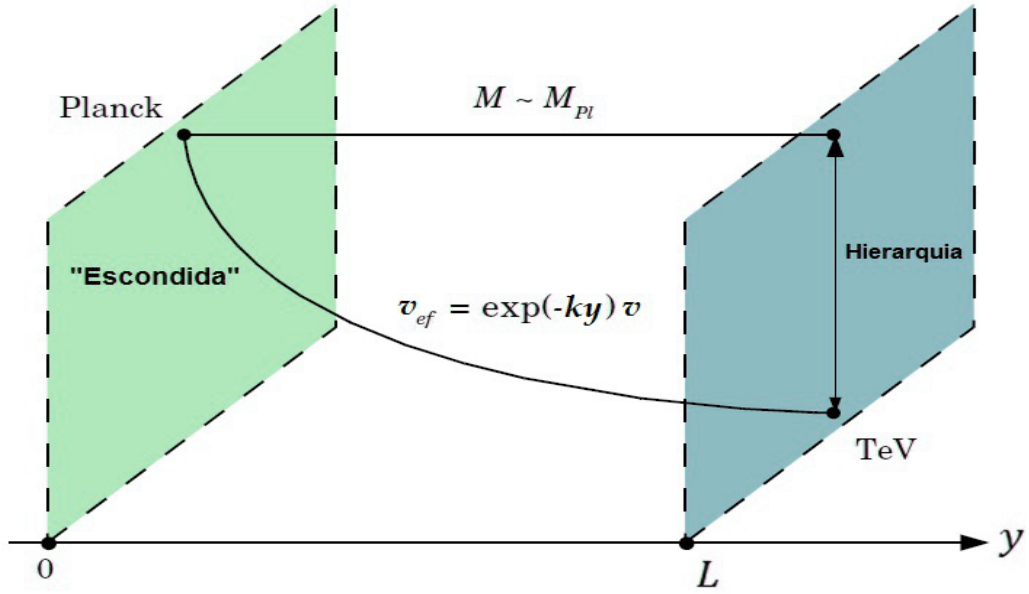


Figura 2.3: Hierarquia exponencial do modelo RS.

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

2.2.3 O Modelo RS–II e localização de gravidade 4D

Notavelmente, a massa de Planck eficaz permanece finita, mesmo se tomarmos o limite de descompactificação, $L \rightarrow \infty$. Este caso, em que temos apenas uma brana, é conhecido como o modelo de Randall–Sundrum II (RS–II). A fim de compreender como a gravidade funciona no modelo RS, primeiro temos que encontrar expressões explícitas para os grávitons, que correspondem às pequenas flutuações $h_{MN}(x, y)$ em torno da métrica

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.36)$$

Isso será obtido pelo cálculo das soluções da equação de Einstein linearizada, que foi desenvolvida no Apêndice A. É conveniente trabalhar com uma métrica conformalmente plana, ou seja, uma métrica proporcional ao espaço plano. Para isso, definimos uma variável nova dimensão extra z relacionada com y através da relação

$$dy^2 \equiv e^{k|z|} dz^2. \quad (2.37)$$

De acordo com esta proposta, integração produz uma constante, de modo que temos o valor zero de y correspondente ao valor zero da z . Como resultado temos

$$k|z| = e^{k|z|} - 1, \quad e^{2k|z|} = \frac{1}{(k|z| + 1)^2}. \quad (2.38)$$

De acordo com esta nova coordenada, a métrica é dada por

$$ds^2 = \frac{1}{(k|z| + 1)^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) \Rightarrow ds^2 = e^{-2A(z)} \eta_{MN} dx^M dx^N, \quad (2.39)$$

onde é utilizada a notação $x^5 = z$ e temos a forma reescrita para o fator de deformação, $A(z) = \ln(k|z| + 1)$, cujas derivadas são

$$A'(z) = \frac{\text{sgn}(z) k}{k|z| + 1}, \quad A''(z) = \frac{2k(\delta(z) - \delta(z - L_z))}{k|z| + 1} - \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} \quad (2.40)$$

Particularmente, é conveniente para este tipo de cálculo que trabalhemos com um gauge específico, no qual as flutuações não tenham qualquer componente com dimensão extra e

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

sejam transversais e de traço nulo

$$h_{M5} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu_\mu = 0, \quad (2.41)$$

a partir das equações de Einstein linearizadas. Além disso, a expressão do tensor de Einstein para flutuações em torno da métrica plana (como pode ser visto na referência [18], Eq. (4.4.5), mais especificamente) assume a forma resumida

$$\tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{MN}, \quad (2.42)$$

e cujo desenvolvimento pode ser conferido no Apêndice A. A componente $\mu\nu$ do tensor linearizado neste gauge é então dado por

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2} h'_{\mu\nu} A' - 3(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) (A'' - A'^2) \quad (2.43)$$

Por outro lado, temos que calcular o tensor energia–momento para a métrica perturbada. Voltando para a expressão em termos da ação para as tensões branas (2.27), temos que ter cuidado com o fato de que com métricas conformemente planas, os determinantes das métricas induzidas na branas são agora relacionado com o *determinante da métrica completa* por $g = g_i g_{55} = g_i e^{-2A(z_i)}$, onde $i = 1, 2$ e $z_1 = 0$, $z_2 = L_z$. As ações correspondentes em cada brana é dada por

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int d^4x \sqrt{-g_1} \sigma_1 = - \int d^4x dz \sqrt{-g_1} \sigma_1 e^{A(L_z)} \delta(z) \\ S_2 &= - \int d^4x \sqrt{-g_2} \sigma_2 = - \int d^4x dz \sqrt{-g_2} \sigma_2 e^{A(L_z)} \delta(z - L_z) \end{aligned} \quad (2.44)$$

A componente $\mu\nu$ do tensor de energia–momento multiplicado pela constante de Newton 5D é então

$$\begin{aligned} G_{5D}^2 T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2M^3} [-\Lambda - \sigma_1 e^A \delta(z) - \sigma_2 e^A \delta(z - L_z)] g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2M^3} [-\Lambda e^{-A} - \sigma_1 e^{-A} \delta(z) - \sigma_2 e^{-A} \delta(z - L_z)] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

Voltando para a expressão (2.20) para k , as derivadas do fator de deformação (2.24) e a relação entre as tensões das branas (2.29), podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} G_{5D}^2 T_{\mu\nu} &= [6 k^2 e^{-2A} - 6 k e^{2A} (\delta(z) - \delta(z - L_z))] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= [6 A'^2 - 3 (A'' + A'^2)] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= (3 A'^2 - 3 A'') (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Os termos proporcionais a $\eta_{\mu\nu}$, das componentes $\mu\nu$ da equação linearizada de Einstein, reproduzem as equações de Einstein não perturbadas

$$-\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2} A' h'_{\mu\nu} = 0. \quad (2.47)$$

Fazendo uma mudança de escala $h_{\mu\nu} \rightarrow e^{\alpha A} h_{\mu\nu}$, sendo que α é uma constante, a equação de Einstein não perturbada nos dá

$$-\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) A' h'_{\mu\nu} + \left[\left(\frac{3}{2} \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) A'^2 - \frac{1}{2} \alpha A'' \right] h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.48)$$

e com a escolha do valor particular $\alpha = 3/2$, fazemos com que os termos com $h'_{\mu\nu}$ se anulem e temos a forma reduzida

$$-\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \left[\frac{9}{8} A'^2 - \frac{3}{4} A'' \right] h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.49)$$

Por fim, realizando uma decomposição de Kaluza–Klein

$$h_{\mu\nu}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^n(x) \psi_n(z), \quad (2.50)$$

encontramos uma equação tipo Schroedinger para os modos KK

$$-\frac{d^2}{dz^2} \psi_n(z) + \left[\frac{9}{4} A'^2(z) - \frac{3}{2} A''(z) \right] \psi_n(z) = m_n^2 \psi_n(z) \quad (2.51)$$

com $\square h_{\mu\nu}^n \equiv \partial_\rho h_{\mu\nu}^n = m_n^2 h_{\mu\nu}^n$. Da equação (2.51) identificamos o potencial escalar, tipo vulcão, em termos do fator de deformação (Fig.(2.4))

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{9}{4} A'^2(z) - \frac{3}{2} A''(z) \\ &= \frac{9}{4} \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} - \frac{3}{2} \left[\frac{2k(\delta(z) - \delta(z - L_z))}{k|z| + 1} - \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} \right] \\ &= \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} - \frac{3k(\delta(z) - \delta(z - L_z))}{k|z| + 1}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

Para a fronteira em $z=0$, temos as condições de contorno

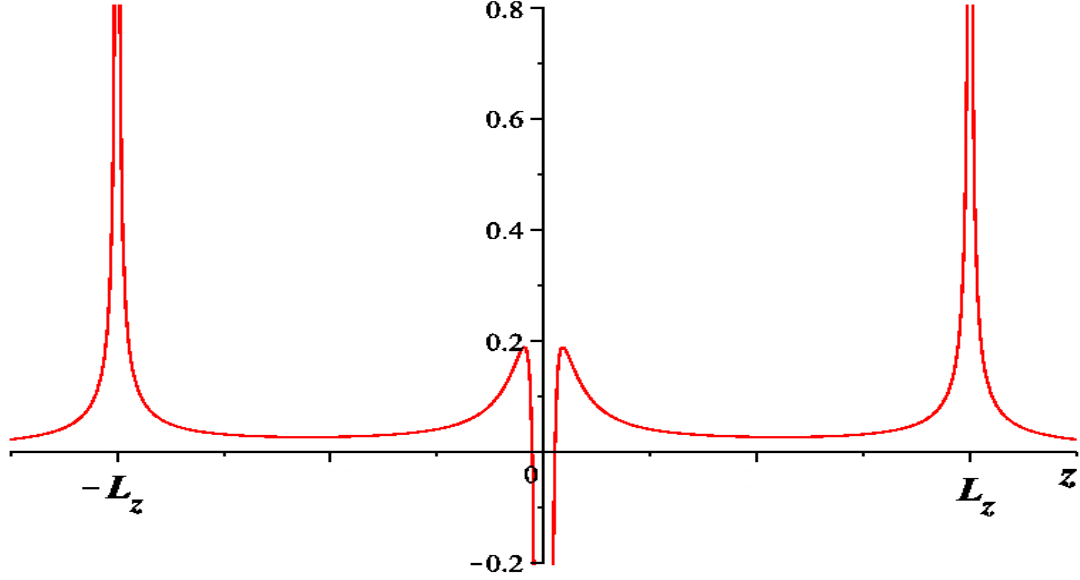


Figura 2.4: Potencial vulcão gerado pelo modelo RS. Um dado importante é que para $|L_z| \rightarrow \infty$, temos o modelo com uma brana conhecido como RS2. Parâmetro $k = 1$.

$$\int_{0^-}^{0^+} dz (-\psi_n'' + V \psi_n) = \int_{0^-}^{0^+} dz m^2 \psi_n, \quad -\psi_n'(0^+) + \psi_n'(0^-) - 3k \psi_n(0) = 0. \quad (2.53)$$

Sabendo que a função de onda é uma função par, tal que $z \rightarrow -z$ e a primeira derivada é uma função ímpar, i.e., $\psi_n'(0^+) = -\psi_n'(0^-)$, a condição de contorno³ na brana Planck é:

$$\left[\frac{d}{dz} \psi_n(z) \right]_{z=0} = -\frac{3}{2} k \psi_n(0), \quad (2.54)$$

e A partir de considerações semelhantes, encontramos a condição de contorno na brana TEV em $z = \pm L_z$

$$\left[\frac{d}{dz} \psi_n(z) \right]_{z=L_z} = -\frac{3k}{2(kL_z + 1)} \psi_n(L_z). \quad (2.55)$$

O cálculo do modo zero se dá quando temos $m_0 = 0$, e equação de Schroedinger se reduz a

$$-\frac{d^2}{dz^2} \psi_0(z) + \left[\frac{9}{4} A'^2(z) - \frac{3}{2} A''(z) \right] \psi_0(z) = 0 \quad (2.56)$$

³Nas referências recebe o nome de “**Jump Condition**”.

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

cuja solução, que satisfaz as condições de contorno (2.53) e (2.54), é dada por

$$\psi_0(z) = e^{-\frac{3}{2}A} = (k|z| + 1)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.57)$$

A gravidade é então localizada na brana Planck, enquanto que na brana TEV sente-se a atenuação da função de onda do gráviton. Assim, a razão da debilidade da gravidade no modelo RS se deve à sua localização, longe de onde vivemos. Para concluir o desenvolvimento deste modelo, resta-nos analisar o espectro do gráviton e determinar o limite Newtoniano para o potencial gravitacional. Entre as fronteiras, os modos massivos de Kaluza–Klein satisfazem uma equação de Bessel, cuja solução geral é uma superposição de funções de Bessel, de primeiro e segundo tipo, dada por

$$\psi_n(z) = C_n \sqrt{|z| + 1/k} \left[N_2(m_n(|z| + 1/k)) + \frac{4k^2}{\pi m_n^2} J_2(m_n(|z| + 1/k)) \right] \quad (2.58)$$

onde C_n e o coeficiente em frente à função J_2 é obtida usando a equação (2.53) e as formas assintóticas das funções de Bessel para pequenos argumentos ($m_n(|z| \ll 1)$):

$$\begin{aligned} N_2 \left(m_n \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right) &\sim -\frac{4}{\pi m_n^2 \left(|z| + \frac{1}{k} \right)^2} - \frac{1}{\pi} \\ J_2 \left(m_n \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right) &\sim \frac{m_n^2 \left(|z| + \frac{1}{k} \right)^2}{8}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Uma vez que $k/m_n \gg 1$, o termo com J_2 domina a expressão para a função de onda então, para calcularmos um valor analítico para a constante de normalização usaremos a aproximação para grandes argumentos ($m_n|z| \gg 1$)

$$\sqrt{z} J_2(m_n|z|) \sim \sqrt{\left(\frac{2}{\pi m_n} \right)} \cos \left(m_n|z| - \frac{5}{4}\pi \right) \quad (2.60)$$

que colocada na condição de normalização, $\int_{-L}^{+L} dz |\psi|^2 = 1$, nos dá

$$\int_{-L}^{+L} dz C_n^2 \frac{32k^4}{\pi^3 m_n^5} \cos \left(m_n|z| - \frac{5}{4}\pi \right) = C_n^2 \left(\frac{32k^4}{\pi^3 m_n^5} \right) L = 1 \Rightarrow C_n = \sqrt{\frac{\pi}{2L} \frac{\pi m_n^{5/2}}{4k^2}} \quad (2.61)$$

então,

$$\psi_n(z) = \sqrt{L} \cos \left(m_n|z| - \frac{5}{4}\pi \right) \quad (2.62)$$

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

O Espectro do Gráviton

A presença das duas branas induz a quantização das massas dos estados KK. Seja a solução geral do modelo RS e sua primeira derivada:

$$\begin{aligned}\psi_n(z) &= \sqrt{m_n(|z| + 1/k)} [a_n J_2(m_n(|z| + 1/k)) + b_n N_2(m_n(|z| + 1/k))], \quad \text{e} \\ \psi'_n(z) &= m_n (|z| + 1/k)^{1/2} [a_n J_1(m_n(|z| + 1/k)) + b_n N_1(m_n(|z| + 1/k))] \\ &\quad - \frac{3}{2} (|z| + 1/k)^{-1/2} [a_n J_2(m_n(|z| + 1/k)) + b_n N_2(m_n(|z| + 1/k))],\end{aligned}\quad (2.63)$$

onde a_n e b_n são constantes a determinar. Usando as condições de contorno (2.53) e (2.54), temos

$$\begin{aligned}a_n J_1(m_n/k) + b_n N_1(m_n/k) &= 0 \quad ; \\ a_n J_1(m_n(L_z + 1/k)) + b_n N_1(m_n(L_z + 1/k)) &= 0 \quad ,\end{aligned}\quad (2.64)$$

e o sistema obtido tem solução apenas se seu determinante é nulo, nos fornecendo o seguinte vínculo

$$J_1(m_n/k) J_1(m_n(L_z + 1/k)) - N_1(m_n/k) N_1(m_n(L_z + 1/k)) = 0. \quad (2.65)$$

Na aproximação para pequenas massas ($m_n \ll 1$), as funções de Bessel de primeira ordem assumem as formas assintóticas

$$J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) \sim \frac{m_n}{k} \quad \text{e} \quad N_1\left(\frac{m_n}{k}\right) \sim \frac{m_n}{k} \ln\left(\frac{m_n}{k}\right) \quad (2.66)$$

talque nós podemos assumir $-N_1\left(\frac{m_n}{k}\right) \gg J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)$. O vínculo (2.65) nessa situação se reduz a

$$J_1\left(\frac{m_n}{k} e^{kL}\right) = 0, \quad (2.67)$$

e as massas de Kaluza–Klein discretizadas são dadas por

$$m_n = k e^{-kL} j_n, \quad (2.68)$$

onde j_n são os zeros das funções de Bessel: $J_1(j_n) = 0$. Como o valor de k é suposto ser da ordem da escala de Planck, e o fator exponencial e^{-kL} é fixada na brana TEV de maneira

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

que resolve o problema da Hierarquia, as massas dos estados KK são da ordem de TEV. Por outro lado, $j_{n+1} - j_n \sim \pi$, de maneira que a separação das massas é também da ordem TEV. Isto implica na possibilidade de observarmos ressonâncias individuais dos primeiros estados KK em aceleradores, futuramente. O tratamento singular das branas nos modelos de Randall e Sundrum manifesta-se através do aparecimento de funções delta nas componentes do tensor estresse-energia, constitui uma simplificação bem-vinda quando se trata de resolver as equações de Einstein. No entanto, A partir de um ponto de vista de campos teóricos, branas podem ser consideradas como soluções de energia finita para algumas equações do campo com uma densidade de energia localizada em alguma região do espaço de um dado valor δ_0 , de espessura finita. Por um lado, no caso de uma única brana, uma solução completa para equações de Einstein pode ser obtida de uma maneira simples através da imposição da condição de junção de Israel [15], no limite entre as duas regiões separadas pela brana. Por outro lado, o tratamento não singular, como no caso de branas espessas (*thick branes*), em princípio, com base na solução completa e acoplada de Einstein e equações de campo da matéria, e é em geral, uma tarefa muito mais difícil onde as soluções analíticas são raras.

O Limite Newtoniano

Para nossos propósitos, nós consideraremos um acoplamento mínimo de matéria à gravidade e lançaremos um olhar para valores das constantes de acoplamento. A ação é composta de uma parte de gravidade S_G e outra parte de matéria

$$\begin{aligned} S &= S_G + S_M \\ S &= S_G + \int d^4x dy \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(\Phi, g_{MN}), \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde Φ representa os campos que residem nas branas. Para pequenas perturbações em torno da métrica

$$g_{MN} = e^{-2A} \eta_{MN} \quad \rightarrow \quad g'_{MN} = e^{-2A} (\eta_{MN} + h_{MN}), \quad (2.70)$$

2.2. O MODELO ORIGINAL DE RANDALL–SUNDRUM

fazemos a expansão da Lagrangiana de matéria em série de Taylor até a primeira ordem:

$$\mathcal{L}_M(\Phi, g'_{MN}) = \mathcal{L}_M(\Phi, g_{MN}) + h_{\mu\nu} \left[\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g'_{\mu\nu}} \right]_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.71)$$

Usando a definição do tensor energia–momento,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M}{\delta g'_{\mu\nu}} \right]_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}} = -\mathcal{L}_M g^{\mu\nu} - 2 \left[\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g'_{\mu\nu}} \right]_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}}, \quad (2.72)$$

e a fórmula $\sqrt{\det(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})} = 1 + h/2 + \mathcal{O}(h^2)$ com $h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, nós temos

$$\begin{aligned} \sqrt{g'} \mathcal{L}_M(\Phi, g'_{MN}) &= \sqrt{g} \left(1 + \frac{h}{2} \right) \mathcal{L}_M(\Phi, g'_{MN}) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \sqrt{g} \left[\mathcal{L}_M(\Phi, g_{MN}) + h_{\mu\nu} \left[\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g'_{\mu\nu}} \right]_{g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}} + \frac{h}{2} \mathcal{L}_M(\Phi, g'_{MN}) \right] + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \sqrt{g} \left[\mathcal{L}_M(\Phi, g_{MN}) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Por outro lado, quando se expande S_G até a segunda ordem nas perturbações obtemos os seguintes termos: uma parte independente de $h_{\mu\nu}$, que desaparece devido à exigência do anulamento da constante cosmológica efetiva; e uma parte linear, que é a ação que nos conduz às equações lineares de movimento, de maneira que se anule na fronteira; e uma parte quadrática, o que corresponde a Lagrangiana de Pauli-Fierz $\mathcal{L}_{PF}$. A solução encontrada para a decomposição dos modos KK, após redefinirmos a escala $e^{\frac{3}{2}A}$ e uma decomposição das variáveis, nós temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\Phi, g'_{MN}) &= \mathcal{L}_M(\Phi, g_{MN}) + M^3 \sum_n \mathcal{L}_{PF}(h_{\mu\nu}^n(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_n e^{\frac{3}{2}A} \psi^{(n)}(z) h_{\mu\nu}^n T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

A fim de obtermos uma Lagrangiana de Pauli-Fierz canonicamente normalizada de operaremos a seguinte redefinição de campo, $h_{\mu\nu}^n(x) \rightarrow \sqrt{M^{-3}} h_{\mu\nu}^n(x)$, então, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\Phi, g) &= \mathcal{L}_M(\Phi, \eta) + \sum_n \mathcal{L}_M(h_{\mu\nu}^n(x)) + M^3 \sum_n \mathcal{L}_{PF}(h_{\mu\nu}^n(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{M^3}} \sum_n e^{\frac{3}{2}A} \psi^{(n)}(z) h_{\mu\nu}^n T^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.75)$$

2.3. MODELO DGP: DIMENSÕES EXTRAS COM VOLUME INFINITO

de onde é possível identificar a expressão das constantes de acoplamento gravidade-matéria

$$a_n = \frac{e^{\frac{3}{2} A} \psi^{(n)}(z)}{\sqrt{M^3}}. \quad (2.76)$$

Agora, é possível computar o potencial entre duas partículas, de massa unitária, sobre a brana TEV em $z = L$, ou seja, o potencial estático gerado pela troca do modo zero e os modos massivos KK. Seja o caso de uma interação tipo Yukawa onde temos

$$V(r) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{4\pi} \frac{e^{-m_n r}}{r}. \quad (2.77)$$

A contribuição do modo zero, $\psi_0(z) = \exp(-3 A/2)$, para a interação gravitacional é

$$V_0(r) = -\frac{1}{16\pi M^3 r} = -\frac{G_N}{r}, \quad (2.78)$$

que reproduz a gravidade 4D, onde G_N é a constante de Newton. Por outro lado, de acordo com a expressão obtida para a função de onda para os modos massivos KK, obtida no final da subseção anterior, o potencial gravitacional não-relativístico, mediado pelo n -ésimo gráviton na brana TEV, nos dá

$$\begin{aligned} V_n(r) &= -\frac{k^3 L^2}{16\pi M^3} \cos\left(m_n L_z - \frac{5}{4}\pi\right) \frac{e^{-m_n r}}{r} \\ &= -G_N k^3 L^2 \cos\left(m_n L_z - \frac{5}{4}\pi\right) \frac{e^{-m_n r}}{r}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

O que devemos observar é que essas contribuições para o potencial gravitacional são exponencialmente suprimidas, e essa supressão pode ser negligenciada à distâncias da ordem do comprimento de fermi, $r \sim 10^{-13} \text{cm}$. Em suma, a gravidade do modelo RS corresponde, efetivamente, à gravidade 4D que nós experimentamos.

2.3 Modelo DGP: Dimensões Extras com volume infinito

Para encerrarmos este capítulo de revisão, vamos apresentar um breve resumo do modelo proposto em 2000 por Dvali-Gabadadze-Porrati, ao que se dá o nome de modelo DGP [55]. Este é um mecanismo de obtenção de gravidade em $(3 + 1)$ dimensões na brana que,

2.3. MODELO DGP: DIMENSÕES EXTRAS COM VOLUME INFINITO

diferentemente do modelo RS–I, permite que o volume da dimensão extra seja infinito. Neste cenário, o tamanho das dimensões adicionais não necessita ser estabilizado desde que as dimensões extras não sejam compactadas nem entrelaçadas por causa da presença do volume infinito das outras dimensões e, portanto, a gravidade é modificada a grandes distâncias. Isto origina novas soluções para o tempo final em cosmologia e para a aceleração do Universo, que vem de observações de supernovas. Isso também pode explicar o problema da energia escura e radiação cósmica de fundo. Os principais resultados do modelo DGP serão mostrados na sequência. Seja a ação 5D, com uma dimensão extra com volume infinito, dada pela

$$S = \frac{M_*^3}{2} \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sqrt{G} R_5 + \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{M_{Pl}^2}{2} T + \mathcal{L}_{SM} \right). \quad (2.80)$$

Para estudar a gravidade descrita por este modelo, introduz-se uma nova quantidade

$$r_c \sim \frac{M_{Pl}^2}{M_*^3}, \quad (2.81)$$

reconhecida como uma escala de crossover, que limita os regimes de comportamento da gravidade deste modelo. Quando $r_c \rightarrow \infty$ o termo 4D domina, enquanto no limite oposto $r_c \rightarrow 0$, o termo 5D domina. Então, esperamos que, para $r \ll r_c$, possamos recuperar as leis da gravidade 4D na brana, enquanto que para $r \gg r_c$ recuperaremos as leis 5D. O potencial gravitacional estático entre as fontes no volume global 4D da brana é dada pela expressão

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{1}{r} \left\{ \sin\left(\frac{r}{r_c}\right) \text{Ci}\left(\frac{r}{r_c}\right) - \cos\left(\frac{r}{r_c}\right) \text{Si}\left(\frac{r}{r_c}\right) \right\} \quad (2.82)$$

onde reescrevemos as integrais exponenciais resultantes usando as relações

$$\text{Ci}(x) = -\int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t} \quad \text{e} \quad \text{Si}(x) = -\int_x^\infty dt \frac{\sin t}{t}, \quad (2.83)$$

e as formas assintóticas

$$\text{Ci}(x) \sim \gamma_E + \ln(x) \quad \text{e} \quad \text{Si}(x) \sim x - \frac{\pi}{2}, \quad \text{para } x \ll 1,$$

$$\text{Ci}(x) \sim \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{e} \quad \text{Si}(x) \sim -\frac{\cos(x)}{x} \quad \text{para } x \gg 1.$$

2.3. MODELO DGP: DIMENSÕES EXTRAS COM VOLUME INFINITO

A escala de crossover é dada por $r_c \sim \frac{M_{Pl}^2}{2M_*^3}$, e é assumida como sendo da ordem do tamanho Hubble presente, que é equivalente à fazer a escolha $M^* \sim (10 - 100)$ MeV. Isso nos é útil para estudar o comportamento da gravidade à curtas e longas distâncias desta expressão. Quando $r \ll r_c$ nós temos

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{r}{r_c} \left[-1 + \gamma + \ln \left(\frac{r}{r_c} \right) \right] + \mathcal{O}(r^2) \right\}. \quad (2.84)$$

Portanto, à distâncias curtas, o potencial tem o dimensionamento Newtoniano correto em 4 dimensões, $1/r$. Este é posteriormente modificado pelo termo de repulsão logarítmica na expressão acima. À grandes distâncias $r \gg r_c$, o potencial toma a forma

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi^2 M_{Pl}^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{r_c}{r} + \mathcal{O}(r^2) \right\} \quad (2.85)$$

cuja escala $1/r^2$ está de pleno acordo com as leis da gravidade em teorias 5D. Os detalhes exaustivos de construções deste tipo serão apresentados no Capítulo 4, que é dedicado à contribuição científica deste trabalho de tese, com novos resultados no estudo de localização de gravidade em mundo-brana no contexto de Supergravidade.

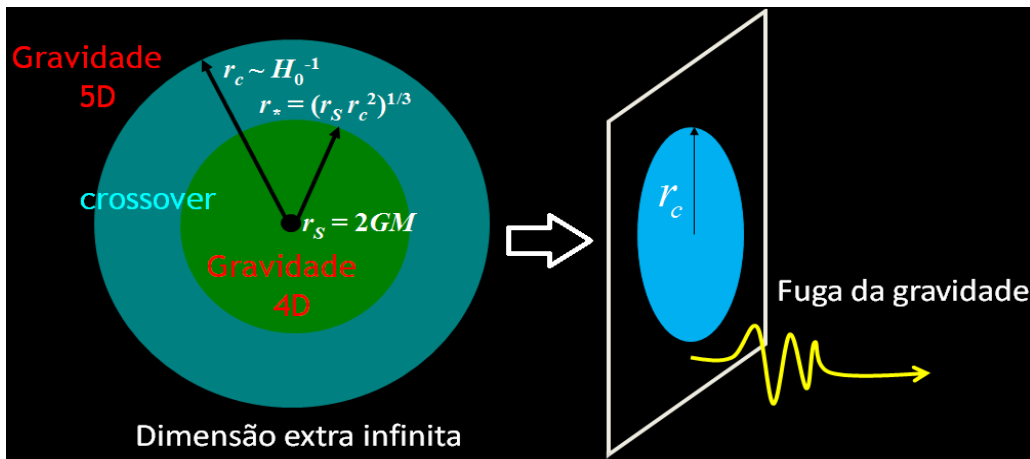


Figura 2.5: Modelo DGP: A escala de crossover r_c controla o comportamento da gravidade onde as circunferências representam os hipervolumes formados pelas dimensões extras.

Capítulo 3

Campos Escalares, Branas e localização de gravidade 4D

Inspirado no trabalho original de Randall e Sundrum [14], nosso cenário de mundo-brana é constituído de cinco dimensões em uma geometria AdS (ou mesmo Minkowski) e a 3-brana tem um espaço-tempo 4D, com geometria AdS, M ou dS, levando-se em conta uma única dimensão extra e quatro dimensões genéricas do espaço-tempo. Orientamo-nos pela iniciativa apresentada em [19], no qual foi utilizado um potencial em função campo escalar para inferir como o fator de deformação depende da dimensão extra considerada. Estes resultados foram expandidos em [20] e a partir do método desenvolvido, relacionado com importantes simplificações, fomos direcionados a modelos regulados pelo campo escalar em um potencial de forma muito específica, que dependem de duas novas funções, o superpotencial, $W = W(\phi)$, e a função auxiliar $Z = Z(\phi)$, que é uma função que responde à presença da constante cosmológica, nos conduzindo a cenários onde o campo escalar pode ser conectado com estas duas funções, revelando novos direcionamentos para a investigação da localização de gravidade nas proximidades de branas. A princípio, os modelos que investigaremos são descritos por uma teoria de gravidade 4D acoplado a campos escalares regidos pela seguinte ação

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi) \right), \quad (3.1)$$

3.1. BRANAS PLANAS

onde ϕ é o campo escalar real e estamos considerando $4\pi G = 1$. O elemento de linha ds_5^2 para um espaço-tempo de cinco dimensões pode ser escrito como

$$ds_5^2 = g_{ij}dx^i dx^j = e^{2A}ds_4^2 - dy^2, \quad (3.2)$$

sabendo que $i, j = 0, 1, \dots, 4$. Além disso, o termo ds_4^2 representa o elemento de linha de um espaço-tempo 4D, que pode assumir duas formas, a saber

$$ds_4^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\Lambda}t}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad (3.3a)$$

$$ds_4^2 = e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3}(dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2) - dx_3^2, \quad (3.3b)$$

para as geometrias dS ou AdS, respectivamente. No limite em que $\Lambda \rightarrow 0$, temos que o elemento de linha assume a forma

$$ds_5^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (3.4)$$

onde o tensor $\eta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, descreve a geometria $\mathbb{M}$ e e^{2A} é o fator de deformação. A dinâmica do campo escalar é governada pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ij}\partial^i\phi\partial^j\phi - V, \quad (3.5)$$

onde $V = V(\phi)$ representa o potencial como função do campo escalar, que especifica o modelo em estudo.

3.1 Branais planas

3.1.1 Modelos com um campo escalar real

Inicialmente, vamos nos concentrar no caso em que $\Lambda = 0$, quando temos branas do tipo $\mathbb{M}$. As considerações iniciais que fazemos é supor que os campos escalares, A e ϕ , são estáticos e dependentes apenas da dimensão extra considerada, tal que $A = A(y)$ and $\phi = \phi(y)$. Levando-se em conta que $\sqrt{|g|} = e^{4A}$, as equações de movimento, para o campo escalar, são obtidas A

3.1. BRANAS PLANAS

partir das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0, \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} e^{4A}, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = (-4A' \phi' - \phi'') e^{4A}. \quad (3.7)$$

Temos então

$$\phi'' + 4A' \phi' = V_\phi, \quad (3.8)$$

onde as aspas representam derivadas com respeito à dimensão extra, y , e adotamos a notação simplificada, $V_\phi = dV/d\phi$. Das equações de Einstein, com geometria 4D de Minkowski, encontramos duas novas equações

$$A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2, \quad (3.9a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6} \phi'^2 - \frac{1}{3} V(\phi). \quad (3.9b)$$

A função $W = W(\phi)$ é o superpotencial que nos remete ao formalismo de primeira ordem, (vide [21, 25, 26, 27]). Uma sugestão para soluções de teorias deste tipo é definir a equação de primeira ordem

$$A' = -\frac{1}{3} W, \quad (3.10)$$

e usar a equação (3.9a) para então obter

$$\phi' = \frac{1}{2} W_\phi. \quad (3.11)$$

Por sua vez, o potencial que aparece na equação (3.9b), assume a forma específica

$$V = \frac{1}{8} W_\phi^2 - \frac{1}{3} W^2. \quad (3.12)$$

Com um mínimo de trabalho é possível mostrar que as equações (3.10) e (3.11) são soluções do conjunto de equações composto por (3.8) e (3.9) com o potencial obtido em (3.12). É possível também realizar a mudança $W \rightarrow -W$ sem que haja uma alteração do potencial,

3.1. BRANAS PLANAS

com a vantagem de oferecer outra possibilidade de investigação. Este resultado é muito interessante, uma vez que simplifica o cálculo de forma bastante significativa [21, 25]. As soluções das equações de movimento são defeitos que envolvem um certo custo de energia. No caso que envolve gravidade, a *densidade de matéria–energia*, tem uma expressão que inclui o fator de deformação da métrica:

$$T^{00} = \mathcal{E} = e^{2A(y)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 + V(\phi) \right], \quad (3.13)$$

que corresponde a componente T^{00} do tensor energia–momento.

Branas com energia finita

Ainda analisando o caso em que temos apenas um campo escalar na teoria, trataremos aqui de dois exemplos simples, sendo que o primeiro é dado pelo superpotencial [28, 29, 30]

$$W = 2a \arctan(\sinh(b\phi)), \quad (3.14)$$

que gera o seguinte potencial escalar

$$V(\phi) = \frac{1}{2}a^2 b^2 \text{sech}^2(b\phi) - \frac{4}{3}a^2 \arctan^2(\sinh(b\phi)). \quad (3.15)$$

As soluções para as equações de primeira ordem são

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{b} \text{arcsinh}(ab^2 y), \quad (3.16)$$

e

$$A(y) = \frac{1}{3b^2} \ln(1 + a^2 b^4 y^2) - \frac{2}{3}a y \arctan(ab^2 y). \quad (3.17)$$

O segundo exemplo é o bem conhecido modelo $\lambda\phi^4$, que pode ser obtido com um superpotencial na forma

$$W = 2ab \left(\phi - \frac{b^2 \phi^3}{3} \right), \quad (3.18)$$

que gera o seguinte potencial escalar

$$V(\phi) = \frac{1}{2}a^2 b^2 (1 - b^2 \phi^2)^2 - \frac{4}{3}a^2 b^2 \phi^2 \left(1 - \frac{b^2}{3} \phi^2 \right)^2. \quad (3.19)$$

3.1. BRANAS PLANAS

Encontramos para este modelo, como solução das equações de primeira ordem,

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{b} \tanh(a b^2 y), \quad (3.20)$$

e

$$A(y) = \frac{4}{9b^2} \ln(\operatorname{sech}(a b^2 y)) - \frac{1}{9b^2} \tanh^2(a b^2 y), \quad (3.21)$$

onde a, b , são constantes. Nestes exemplos temos a representação de branas com energia finita, pois suas densidades de energia são localizadas, como é possível verificar nas figuras (3.1) e (3.2), respectivamente. Porém, o perfil do comportamento do kink é totalmente diferente do ponto de vista assintótico. Nesse limite, no primeiro exemplo, o kink conecta os vácuos no infinito. Por sua vez, no caso do modelo $\lambda\phi^4$ o kink conecta os dois vácuos $\phi_{vac} = \pm 1/b$. Mas em ambos os casos teremos que os vácuos serão supersimétricos desde que $W_\phi = 0$.

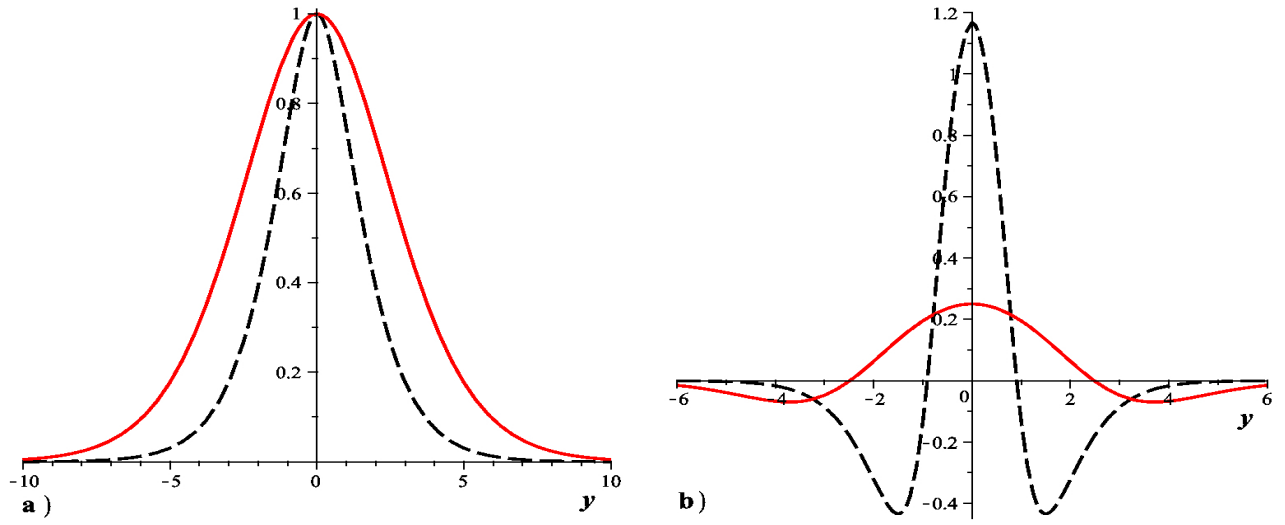


Figura 3.1: **a)** Fator de deformação assumindo os parâmetros $a = 1$, e $b = 1/2$ (linha sólida), $b = 1$ (linha tracejada). **b)** Densidades de energia correspondentes para os campos escalares dados por (3.16) em um espaço plano no modelo definido por (3.14).

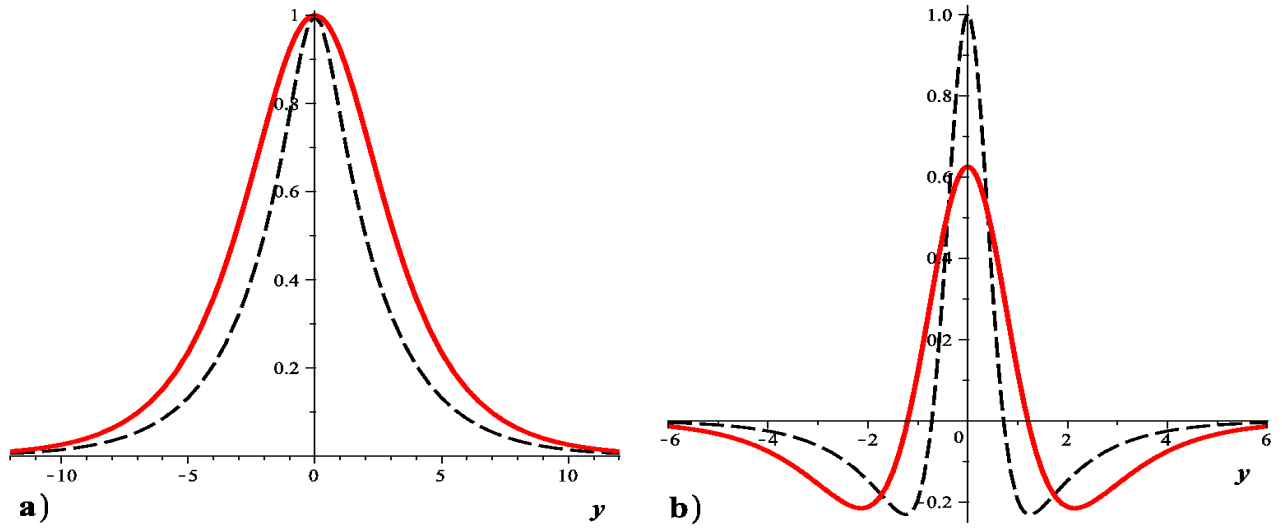


Figura 3.2: **a)** Fator de deformação assumindo os parâmetros $a = 1$, e $b = 1/2$ (linha sólida), $b = 1$ (linha tracejada). **b)** Densidades de energia correspondentes para os campos escalares dados por (3.20) em um espaço plano no modelo definido por (3.18).

3.1. BRANAS PLANAS

3.1.2 Modelos com $\mathcal{N}$ campos escalares reais

Para o caso de dois ou mais campos escalares reais, com dinâmica padrão, as soluções são órbitas no espaço de configurações e a generalização surge naturalmente. Temos a simples mudança da densidade Lagrangeana para a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \dots + \frac{1}{2}\partial_\mu\zeta\partial^\mu\zeta - V(\phi, \chi, \varphi, \dots, \zeta). \quad (3.22)$$

Dada a independência dos diversos campos da teoria considerada a determinação das equações de movimento também se dá de forma direta. Sejam as equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} &= 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\zeta} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\zeta)} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

de onde vem que

$$\phi'' + 4A'\phi' = V_\phi \quad , \quad \chi'' + 4A'\chi' = V_\chi \quad , \quad \varphi'' + 4A'\varphi' = V_\varphi \quad , \quad \dots \quad , \quad \zeta'' + 4A'\zeta' = V_\zeta, \quad (3.24)$$

e para o caso de branas (com geometria de Minkowski) pela resolução das equações de Einstein encontramos

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2 - \frac{2}{3}\chi'^2 - \frac{2}{3}\varphi'^2 - \dots - \frac{2}{3}\zeta'^2, \quad (3.25a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 + \frac{1}{6}\chi'^2 + \frac{1}{6}\varphi'^2 + \dots + \frac{1}{6}\zeta'^2 - \frac{1}{3}V. \quad (3.25b)$$

Como foi proposto para o caso do modelo com apenas um campo escalar, temos $A' = -W/3$, só que agora nosso superpotencial será uma função composta por todos os campos que modelam o sistema, $W = W(\phi, \chi, \varphi, \dots, \zeta)$. Iremos manter a sugestão para o formato das equações de primeira ordem, também levando em consideração o número de campos

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi \quad , \quad \chi' = \frac{1}{2}W_\chi \quad , \quad \varphi' = \frac{1}{2}W_\varphi \quad , \quad \dots \quad , \quad \zeta' = \frac{1}{2}W_\zeta, \quad (3.26)$$

e o potencial escalar agora assume a forma

$$V = \frac{1}{8}W_\phi^2 + \frac{1}{8}W_\chi^2 + \frac{1}{8}W_\varphi^2 + \dots + \frac{1}{8}W_\zeta^2 - \frac{1}{3}W^2. \quad (3.27)$$

3.1. BRANAS PLANAS

Por meio de uma simples substituição, é possível constatar que estas equações de primeira ordem (3.26) são soluções do conjunto formado por (3.24) e (3.25), para o potencial com o formato especificado em (3.27). No caso que envolve gravidade, a *densidade de matéria-energia*, tem uma forma geral que inclui o fator de deformação da métrica:

$$T^{00} = \mathcal{E} = e^{2A(y)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dy} \right)^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{dy} \right)^2 + V(\phi, \chi, \dots, \zeta) \right], \quad (3.28)$$

agora em termos dos $\mathcal{N}$ campos da teoria.

Branas Simétricas e Assimétricas

Com este exemplo, daremos maior ênfase ao modelo onde o superpotencial acopla dois campos escalares, ϕ e χ , inicialmente arbitrários, tem a seguinte forma [20]

$$W = 3a \sin(b\phi) \cos(b\chi). \quad (3.29)$$

Neste caso específico, teremos a seguinte estrutura para o potencial escalar

$$V = \frac{9}{8} a^2 b^2 (\cos^2(b\phi) \cos^2(b\chi) + \sin^2(b\phi) \sin^2(b\chi)) - 3a^2 \sin^2(b\phi) \cos^2(b\chi). \quad (3.30)$$

Nós podemos encontrar a solução para as equações de primeira ordem acopladas por meio da escolha de uma família de órbitas dada pela relação

$$\cos(b\phi) = C \sin(b\chi) \quad (3.31)$$

sendo que C é uma constante real que controla a mudança das órbitas de interesse. Estamos interessados na órbita particular em que $C = 1$, que nos permite encontrar as seguintes soluções

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \pm \frac{1}{2b} \arccos \left(\tanh\left(\frac{3}{4} a b^2 y\right) \right) + (k+1) \frac{\pi}{2b}, \\ \chi(y) &= \pm \frac{1}{2b} \arccos \left(\tanh\left(\frac{3}{2} a b^2 y\right) \right) + k \frac{\pi}{2b}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

e o fator de deformação

$$A(y) = (-1)^{k+1} \frac{a y}{2} + \frac{2}{3b^2} \ln \left[q \operatorname{sech}\left(\frac{3}{4} a b^2 y\right) \right], \quad k = \text{cte}; \quad (3.33)$$

3.1. BRANAS PLANAS

onde temos um vínculo a ser considerado, $q > 0$. A escolha dessa órbita gera branas assimétricas, como pode ser visto na figura (3.3) e branas simétricas, conforme a figura (3.4), de onde é possível tirar conclusões importantes a respeito dessa estrutura de vácuos e da geometria dessas soluções. Os vácuos supersimétricos quando satisfazem as condições $W_\phi = 0$, $W_\chi = 0$ são conectados por branas BPS e não-BPS. O superpotencial $W(\phi, \chi)$ medido no vácuo (ϕ_{vac}, χ_{vac}) nos dá o comportamento assintótico da geometria governada pela equação $A' = -W/3$. No vácuo, i.e., com $y = \pm\infty$, soluções tipo kink para valores pares de k (índice P), ou ímpar (índice I), nos dão

- (i) $W_I^+ = 0$, (iii) $W_I^- = 3a$;
- (ii) $W_P^+ = 3a$, (iv) $W_P^- = 0$.

Nesses vácuos a constante cosmológica 5D dada por

$$\Lambda_5 \equiv V(\phi_{vac}, \chi_{vac}) = -\frac{1}{3} \left(W_{P/I}^\pm \right)^2 \leq 0, \quad (3.34)$$

e caracteriza os espaços 5D de Minkowski ($\mathbb{M}_5$) ou anti-de Sitter (AdS_5), assintoticamente. Verificando os casos separadamente temos a descrição de:

- (i)-(ii) branas **assimétricas** conectando os espaços $\text{AdS}_5 - \mathbb{M}_5$;
- (iii)-(iv) branas **assimétricas** conectando os espaços $\mathbb{M}_5 - \text{AdS}_5$, assintoticamente.

Importantes discussões sobre branas assimétricas podem ser verificadas em [31, 32, 33, 34, 35, 36]. Por sua vez, é possível unir as soluções pares e ímpares de maneira a formar branas simétricas $\mathbb{Z}_2$. Temos os casos:

- (ii)-(iii) branas **simétricas** conectando os espaços $\text{AdS}_5 - \text{AdS}_5$;
- (i)-(iv) branas **simétricas** conectando os espaços $\mathbb{M}_5 - \mathbb{M}_5$, assintoticamente.

3.1. BRANAS PLANAS

Em teoria de campos, essas branas são claramente não-BPS devido ao fato de não satisfazer o *limite de Bogomol'nyi*, dado pela expressão [33, 37, 38, 39, 40]

$$\mathcal{E}_{BPS} = |\Delta W| = |W_{P/I}^{\pm} - W_{I/P}^{\mp}| = 0, \quad (3.35)$$

onde $\mathcal{E}_{BPS}$ é a densidade de energia. No caso das branas assimétricas, a condição BPS nos dá $\mathcal{E}_{BPS} = 3a$, que nos garante que as soluções minimizam energia. Temos que, localmente, a geometria das branas em torno de $y = 0$ tem o comportamento de acordo com os ramos $A(y) \simeq (-1)^{k+1}ay/2$. É possível unir dois ramos locais, juntamente com as membranas simétricas $A(y) \simeq -a|y|/2$ e $A(y) \simeq a|y|/2$, conforme a figura (3.4.a). Este modelo receberá uma atenção especial no próximo capítulo por apresentar condições de se realizar um estudo sobre localização de gravidade e nossa primeira contribuição científica no Doutorado.

3.1. BRANAS PLANAS

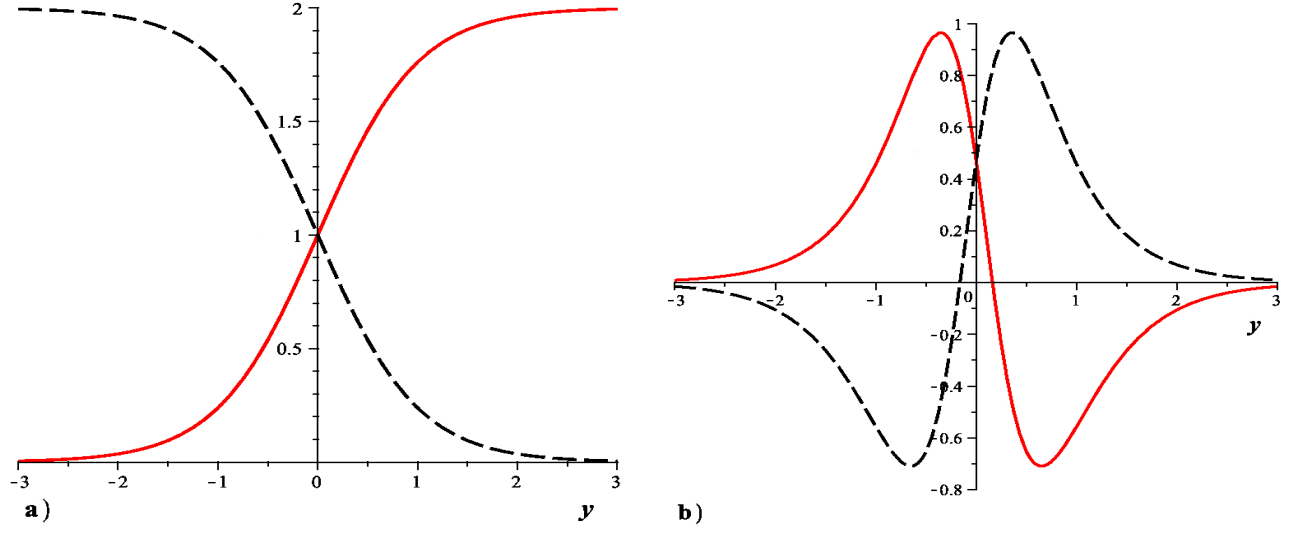


Figura 3.3: **a)** Fator de deformação para branas BPS assimétricas que conectam os espaços $\text{AdS}_5 - \mathbb{M}_5$ assintoticamente (linha sólida) e os espaços $\mathbb{M}_5 - \text{AdS}_5$ (linha tracejada). **b)** Densidade de energia correspondente. Parâmetros: $a = 1$, $b = 2/\sqrt{3}$ e $k = 1, 2$.

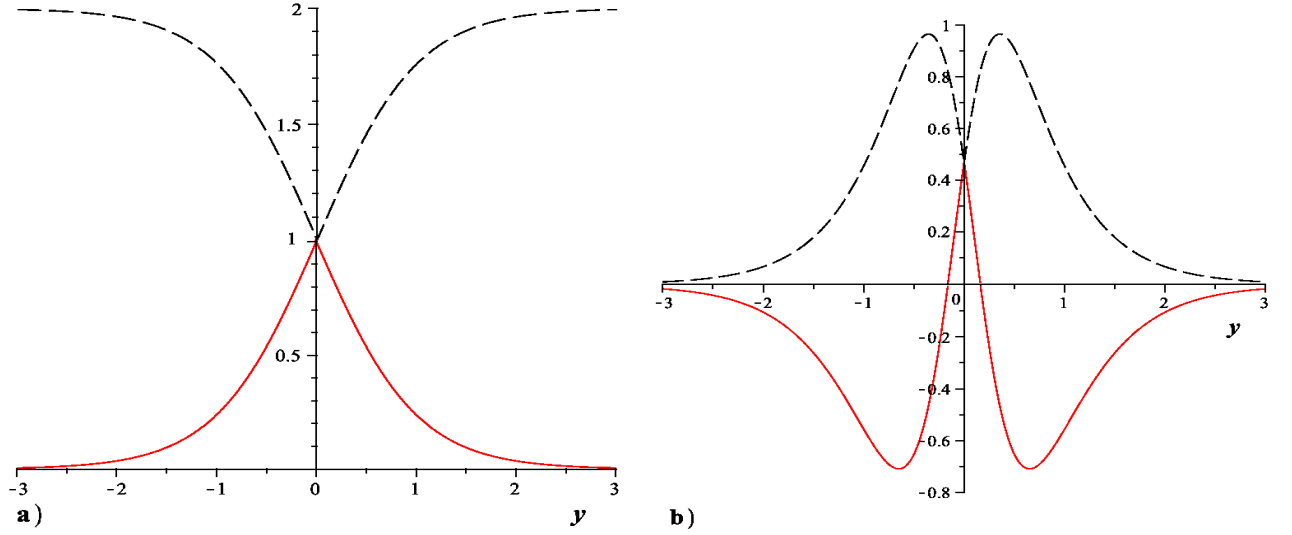


Figura 3.4: **a)** Fator de deformação para branas não BPS simétricas que conectam os espaços $\text{AdS}_5 - \text{AdS}_5$ assintoticamente (linha sólida) e os espaços $\mathbb{M}_5 - \mathbb{M}_5$ (linha tracejada). **b)** Densidade de energia correspondente. Parâmetros: $a = 1$, $b = 2/\sqrt{3}$ e $k = 1, 2$.

Nos casos gerais para as geometrias AdS (com $\Lambda < 0$) e dS (com $\Lambda > 0$), obtemos das equações de Einstein o conjunto de equações

$$A'^2 - \Lambda e^{-2A} = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (3.36b)$$

Devemos notar que, o caso do espaço-tempo Minkowski é obtido imediatamente no limite $\Lambda \rightarrow 0$, nas equações (3.36). O caminho proposto a seguir, mostra uma forma alternativa de tratarmos cenários de mundo-brana envolvendo constante cosmológica diferente de zero. A sugestão apresentada em [20], como caminho para obtenção de soluções, são as equações de primeira ordem com a seguinte forma

$$A' = -\left(\frac{1}{3}W + \frac{1}{3}\Lambda\gamma Z\right), \quad (3.37)$$

$$\phi' = \frac{1}{2}(W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi), \quad (3.38)$$

onde α , γ são constantes reais a determinar, e $Z = Z(\phi)$ é uma função auxiliar arbitrária do campo escalar, em resposta à constante cosmológica. Assim sendo, as equações (3.37) e (3.38) serão soluções do conjunto formado pelas equações (3.8) e (3.36), para o potencial que se apresenta com a forma

$$V = \frac{1}{8}(W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi)(W_\phi + \Lambda(\gamma - 3\alpha)Z_\phi) - \frac{1}{3}(W + \Lambda\gamma Z)^2, \quad (3.39)$$

desde que um novo vínculo, que se origina no trato dessas equações, seja satisfeito:

$$W_{\phi\phi}Z_\phi + W_\phi Z_{\phi\phi} + 2\Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi Z_{\phi\phi} - \frac{4}{3}Z_\phi(W + \Lambda\gamma Z) = 0. \quad (3.40)$$

Quando todas as condições apresentadas nesta seção são obedecidas é possível estabelecer uma forma geral para o fator de deformação. Derivando a equação (3.37) em relação à dimensão

3.2. BRANAS CURVAS

extra (usando a regra da cadeia)

$$\begin{aligned} A''(y) = & -\frac{1}{3} (W_\phi \phi'(y) - \Lambda \gamma Z_\phi \phi'(y)) \\ & -\frac{1}{3} (W_\phi - \Lambda \gamma Z_\phi) \phi'(y), \end{aligned} \quad (3.41)$$

e substituindo (3.38) em (3.41), obtemos

$$A''(y) = -\frac{1}{6} (W_\phi - \Lambda \gamma Z_\phi) (W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma) Z_\phi). \quad (3.42)$$

Por outro lado, se substituirmos (3.38) em (3.36a), encontramos a equação de segunda ordem, em função da coordenada extra, y ,

$$A''(y) = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} W_\phi + \frac{1}{2} \Lambda (\alpha + \gamma) Z_\phi \right)^2 - \Lambda e^{-A(y)}. \quad (3.43)$$

Subtraindo (3.42) de (3.43) e colocando a função $A(y)$ em evidência, determinamos a forma geral para o fator de deformação

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln \left(\mp \frac{\alpha}{6} (W_\phi Z_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma) Z_\phi^2) \right), \quad (3.44)$$

que oferece novas possibilidades para tratarmos de cenários onde $\Lambda \neq 0$. A presença da constante cosmológica costuma aumentar a complexidade dos problemas e estudos interessantes a respeito podem ser vistos em [41, 42].

Branas com simetria AdS_4 e dS_4

Considerando os casos gerais de branas com geometria anti-de Sitter 4D (AdS_4), ou de Sitter 4D (dS_4), vamos ilustrar o estudo de modelos de branas curvas com um único campo escalar considerando o caso simples em que $Z = \phi$ e

$$W = a \sinh(b\phi) - \Lambda \gamma \phi. \quad (3.45)$$

Assumindo em (3.40) que $b = \pm 2/\sqrt{3}$ nós temos o potencial escalar

$$V = \frac{1}{8} (ab \cosh(b\phi) + \Lambda \alpha) (ab \cosh(b\phi) - 3\Lambda \alpha) - \frac{1}{3} a^2 \sinh^2(b\phi). \quad (3.46)$$

3.2. BRANAS CURVAS

Com essas considerações, o problema é resolvido por

$$\phi(y) = \pm \frac{2}{b} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{ab + \Lambda\alpha}{ab - \Lambda\alpha}} \tan \left(\frac{1}{4} b \sqrt{a^2 b^2 - \Lambda^2 \alpha^2} y \right) \right), \quad (3.47)$$

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{6} \frac{a^2 b^2 - \Lambda^2 \alpha^2}{ab + \Lambda\alpha - 2ab \cos^2 \left(\frac{1}{4} b \sqrt{a^2 b^2 - \Lambda^2 \alpha^2} y \right)} \right). \quad (3.48)$$

O comportamento do kink (3.47), e da geometria da brana (3.48), podem ser visualizados na figura (3.5). Nas branas com geometria AdS_4 ($\Lambda < -ab/\alpha$) o kink é suave enquanto que para branas com geometria dS_4 ($\Lambda > ab/\alpha$), o kink torna-se singular em torno de

$$y^* = \pm \frac{4}{b \sqrt{-a^2 b^2 + \Lambda^2 \alpha^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{ab - \Lambda\alpha}{\sqrt{-a^2 b^2 + \Lambda^2 \alpha^2}} \right). \quad (3.49)$$

Outros tipos de singularidades em branas dS_4 podem ser vistas em [58]. Nós assumimos que as constantes assumem valores $ab > 0$, $\alpha > 0$. O caso em que temos $-ab/\alpha < \Lambda < ab/\alpha$, temos o quadro que inclui branas com geometria do tipo Minkowski ($\Lambda = 0$) e nos fornecem uma matriz de kinks singulares. A solução (3.47) é um bom exemplo onde aparece uma brana singular, cuja singularidade (figura (3.5.b), linha tracejada) que pode ser suavizada em outra brana (figura (3.5.b), linha sólida) pela troca do sinal da constante cosmológica. Assintoticamente, o campo escalar ϕ descreve um kink suave que tende a um setor de vácuo finito e constante ϕ_{vac} . O potencial escalar aproxima-se da constante cosmológica 5D, i.é,

$$\begin{aligned} V(\phi_{vac}) &\equiv \Lambda_5 = -\frac{1}{3} (W(\phi_{vac}) + \Lambda \gamma Z(\phi_{vac}))^2 \\ &= -3A'(\pm\infty)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{\Lambda^2 \alpha^2}{4}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde nós usamos $b = 2/\sqrt{3}$, o potencial (3.46), e a solução (3.47)–(3.48) nos limites assintóticos, sabendo que esses são vácuos supersimétricos desde que satisfaçam a condição

$$\phi'_{vac} = \pm \frac{1}{2} (W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma) Z_\phi)|_{vac} = 0 \quad (3.51)$$

e que para branas tipo Minkowski ($\Lambda = 0$), os vácuos supersimétricos satisfazem a condição $W_\phi = 0$, que é bem mais simples. Além disso correspondem a uma geometria tipo AdS_5

3.2. BRANAS CURVAS

assintoticamente, i.e., $\Lambda_5 < 0$, pois $\alpha^2 \Lambda^2 > a^2 b^2$. Como segundo exemplo, consideremos outro modelo obtido com $Z = W$ e o superpotencial

$$W = a \sinh(b\phi), \quad (3.52)$$

com $b = \pm \sqrt{6(1 - \Lambda\alpha)(1 + \Lambda(\alpha + \gamma))}/3(1 + \Lambda(\alpha + \gamma))$, A partir do vínculo (3.40). Encontramos o seguinte potencial

$$V = \frac{1}{12}(1 - \Lambda\alpha)(1 + \Lambda(\gamma - 3\alpha))a^2 \cosh^2(b\phi) - \frac{1}{3}a^2(1 + \Lambda\gamma)^2 \sinh^2(b\phi). \quad (3.53)$$

Para este caso, o problema é resolvido com

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{b} \operatorname{arcsinh} \left(\tan \left(\frac{1}{3} a (1 - \Lambda\alpha) y \right) \right), \quad (3.54)$$

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1}{9} \alpha a^2 (1 - \Lambda\alpha) \sec^2 \left(\frac{1}{3} a (1 - \Lambda\alpha) y \right) \right). \quad (3.55)$$

Note que o kink periódico (3.54) é singular e a métrica tem uma singularidade em

$$y^* = \pm \frac{3\pi}{2a} (1 - \Lambda\alpha), \quad (3.56)$$

para qualquer que seja a constante cosmológica Λ . No caso em que $\alpha > 0$, nós temos apenas branas dS_4 , desde que apenas constante cosmológica positiva é permitida. Por outro lado, com $\alpha < 0$ podemos ter branas AdS_4 ou dS_4 , devido à duas possibilidades de valores para a constante cosmológica: $-1/|\alpha| < \Lambda < 0$ ou $\Lambda > 0$, respectivamente. Nas referências [26, 27, 43] encontramos modelos similares.

3.2. BRANAS CURVAS

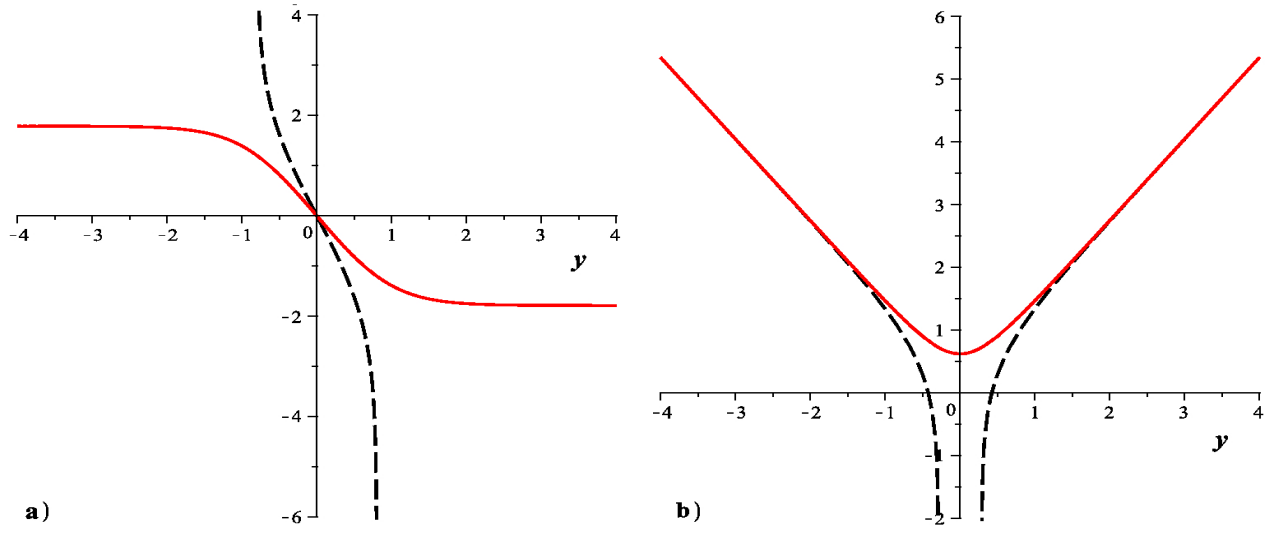


Figura 3.5: **a)** Comportamento do kink (3.47). **b)** Fator de deformação $A(y)$: singular (linha tracejada) para $\Lambda_{\text{dS}} > ab/\alpha$ e não singular (linha sólida) com $\Lambda_{\text{AdS}} < -ab/\alpha$. Parâmetros: $a = 1$, $b = 2/\sqrt{3}$, $\alpha = 1$.

3.2. BRANAS CURVAS

3.2.2 Modelos com dois campos escalares reais

Por conveniência, vamos nos limitar apenas a tratar de problemas que envolvem teorias com dois campos escalares no “background” (3.2). Sendo assim, além do conjunto de equações de movimento (3.24), resolvendo as equações de Einstein temos

$$A'' + \Lambda e^{-2A} = -\frac{2}{3}\phi'^2 - \frac{2}{3}\chi'^2, \quad (3.57a)$$

$$A'^2 - \Lambda e^{-2A} = \frac{1}{6}\phi'^2 + \frac{1}{6}\chi'^2 - \frac{1}{3}V(\phi, \chi). \quad (3.57b)$$

Vamos adotar a mesma sugestão para as soluções do modelo de um campo escalar real, só que agora adaptado ao modelo de dois campos. Assim, temos um conjunto de equações de primeira ordem

$$A' = -\frac{1}{3}(W + \Lambda\gamma Z), \quad (3.58)$$

$$\phi' = \frac{1}{2}(W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma) Z_\phi), \quad (3.59)$$

$$\chi' = \frac{1}{2}(W_\chi + \Lambda(\beta + \gamma) Z_\chi), \quad (3.60)$$

onde $Z = Z(\phi, \chi)$, responde à presença da constante cosmológica e α, β, γ são constantes reais. Tal sugestão, (3.58)–(3.60), será consistente com as equações (3.57a)–(3.57b) e para o potencial escalar com a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{8}(W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi)(W_\phi + \Lambda(\gamma - 3\alpha)Z_\phi) + \frac{1}{8}(W_\chi + \Lambda(\beta + \gamma)Z_\chi)(W_\chi + \Lambda(\gamma - 3\beta)Z_\chi) - \frac{1}{3}(W + \Lambda\gamma Z)^2, \quad (3.61)$$

desde que dois novos vínculos, que surgem no trato das equações de Einstein e de movimento, sejam obedecidos:

$$\begin{aligned} & \alpha W_\phi Z_{\phi\phi} + \alpha Z_\phi W_{\phi\phi} + 2\Lambda\alpha(\alpha + \gamma)Z_\phi Z_{\phi\phi} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)W_\chi Z_{\phi\chi} + \\ & \beta Z_\chi W_{\phi\chi} + \frac{1}{2}\Lambda(\beta + \gamma)(\alpha + 3\beta)Z_\chi Z_{\phi\chi} - \frac{4}{3}\alpha Z_\phi(W + \Lambda\gamma Z) = 0, \end{aligned} \quad (3.62a)$$

$$\begin{aligned} & \beta W_\chi Z_{\chi\chi} + \beta Z_\chi W_{\chi\chi} + 2\Lambda\beta(\beta + \gamma)Z_\chi Z_{\chi\chi} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)W_\phi Z_{\phi\chi} + \\ & \alpha Z_\phi W_{\phi\chi} + \frac{1}{2}\Lambda(\alpha + \gamma)(3\alpha + \beta)Z_\phi Z_{\phi\chi} - \frac{4}{3}\beta Z_\chi(W + \Lambda\gamma Z) = 0. \end{aligned} \quad (3.62b)$$

3.3. LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE

Então, assim como foi feito para o caso de apenas um campo escalar, é possível reescrever o fator de deformação da métrica na forma geral

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\alpha}{6} (W_\phi Z_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma) Z_\phi^2) - \frac{\beta}{6} (W_\chi Z_\chi + \Lambda(\beta + \gamma) Z_\chi^2) \right). \quad (3.63)$$

Considerando o seguinte superpotencial em função dos campos escalares $\phi = \phi(y)$ e $\chi = \chi(y)$:

$$W = -3 b_3 e^{b_1 \phi + b_2 \chi}, \quad (3.64)$$

onde b_i são constantes com $i = 1, 2$.

3.3 Localização de Gravidade

Encerramos este capítulo com um breve estudo sobre a localização de gravidade sobre as soluções tipo *branas regulares* e *irregulares* com $\Lambda > 0$. Primeiro, é necessário escolher um gauge no qual as flutuações gerais da métrica tem a forma

$$ds^2 = e^{2A(y)} (g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (3.65)$$

onde $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, y)$ representa as métricas para as geometrias dS, AdS ou Minkowski 4D, $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x, y)$ é o termo que representa as pequenas flutuações da métrica e ϵ é um pequeno parâmetro constante e real. Variando a ação com respeito à métrica até a segunda ordem em relação ao parâmetro ϵ temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + e^{2A} \left(\frac{1}{2} \partial_y^2 + 2A' \partial_y \right) h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial_\lambda h_{\lambda\mu}) \\ & + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} A' \partial_y (\eta^{\lambda\rho} h_{\lambda\rho}) = 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde $\square \partial_\mu \partial^\mu$. O gauge transverso e de traço nulo [25] é obtido por meio do operador de projeção $h_{\mu\nu} \rightarrow \Phi_{\mu\nu} = P_{\mu\nu\lambda\rho} h^{\lambda\rho}$, onde temos

$$P_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} (\pi_{\mu\lambda} \pi_{\nu\rho} + \pi_{\mu\rho} \pi_{\nu\lambda}) - \frac{1}{3} \pi_{\mu\nu} \pi_{\lambda\rho}, \quad (3.67)$$

3.3. LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE

com

$$\pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad (3.68)$$

Após essas considerações iniciais, a equação para as flutuações da métrica toma a forma:

$$\Phi''_{\mu\nu} + 4 A' \Phi'_{\mu\nu} = e^{2A} \square \Phi_{\mu\nu} \quad (3.69)$$

sabendo que

$$\partial^\mu \Phi_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} = 0. \quad (3.70)$$

Realizando uma decomposição de variáveis do tipo Kaluza-Klein $\Phi(x, y) = \varphi(x)\omega(y)$ ficamos com

$$(\square + k^2) \varphi = 0, \quad (3.71)$$

$$(\partial_y^2 + 4 A' \partial_y) \omega = -k^2 e^{-2A} \omega. \quad (3.72)$$

A equação (3.70) tem por solução $\varphi = \exp(i p_\mu x^\mu)$, com $p^2 = k^2$. Tal como no procedimento utilizado nas referências [23, 38, 46, 47], vamos introduzir a coordenada z de forma a tornar a métrica conformalmente plana, com a mudança $dz = e^{-A(y)} dy$, e as flutuações da métrica das soluções tipo brana. Com isso eliminamos o termo proporcional à primeira derivada na equação (3.72) e encontramos

$$ds^2 = e^{2A(y)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (3.73)$$

com essa nova variável z , definimos uma nova função $\psi(z)$ tal que

$$\Phi(z) = e^{-\frac{3}{2}A(z)} \psi(z). \quad (3.74)$$

Enfim, com a substituição da equação (3.74) em (3.72) encontramos uma equação do tipo Schroedinger:

$$-\frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + U(z) \psi(z) = m^2 \psi(z), \quad (3.75)$$

3.3. LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE

onde temos o potencial satisfazendo a relação

$$U(z) = \frac{9}{4}A'^2(z) + \frac{3}{2}A''(z), \quad (3.76)$$

válido para as geometrias dS, AdS ou Minkowski. Esta equação pode ser fatorizada como

$$\left[-\frac{d}{dz} + \frac{3}{4}A'(z) \right] \left[\frac{d}{dz} + \frac{3}{4}A'(z) \right] \psi(z) = m^2\psi(z), \quad (3.77)$$

e esta é uma das características de modelos que não apresentam estados de modo zero para o gráviton com massa negativa. O modo zero gráviton $\psi_0(z) = e^{-\frac{3}{4}A(z)}$ é o estado fundamental do problema mecânico-quântico. Dada a dificuldade em obter $A(z)$ a partir de $A(y)$ em algumas soluções tipo brana se faz necessário o uso do cálculo numérico para a determinação do espectro do gráviton. Por exemplo, o estudo das flutuações métricas via equação (3.75) das soluções tipo brana definidas pelos superpotenciais (3.14), (3.18), e (3.45), é tratado numericamente. O caso definido pela solução (3.21) pode ser conferido na referência [35], para a escolha dos parâmetros $a = b = 1$. O modelo definido pelo superpotencial (3.52) nos conduz a uma equação tipo Schroedinger (3.75) cujo potencial é do tipo Poschl-Teller modificado, e foi estudado nas referências [43, 27]. Por sua vez, o modelo

$$W = 3c \sinh(d\chi) \quad (3.78)$$

com $d = \pm\sqrt{1/3}$ nos dá um potencial tipo vulcão, cujo espectro já foi bastante trabalhado nas referências [26, 27, 46, 47] e para $d = \pm\sqrt{2/3}$, o espectro foi investigado nas referências [27, 43]. Embora que no modelo definido pelo superpotencial (3.29) que nos fornece o fator de deformação $A(y)$ (3.33) as flutuações da gravidade só possam ter um tratamento numérico, é possível encontrar uma aproximação para o limite de pequenas espessuras da brana. Para ilustrar mais um resultado temos o superpotencial [20]

$$W = 3a \sin(b\phi + c\chi), \quad (3.79)$$

onde a , b , e c são constantes reais. Adotaremos os parâmetros $Z = W$, com $\gamma = 0$ e $\beta = \alpha$ em nosso modelo de branas curvas com dois campos escalares e das equações de vínculo

3.3. LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE

encontramos a relação

$$b^2 + c^2 = -\frac{2}{3}(1 + \Lambda\alpha). \quad (3.80)$$

O potencial escalar obtido neste exemplo tem a forma

$$V(\phi, \chi) = 3a^2 \left(\left(1 - \frac{1}{4}(1 - 3\Lambda\alpha) \right) \cos^2(b\phi + c\chi) - 1 \right). \quad (3.81)$$

As equações de primeira ordem tem soluções analíticas para as órbitas $b\chi = c\phi + C$, onde C é uma constante real. Então, para os valores

$$\begin{aligned} (1 - 3\Lambda\alpha) < 4 \quad \text{e} \quad C = \frac{b}{c} n\pi, \quad \text{ou} \\ (1 - 3\Lambda\alpha) > 4 \quad \text{e} \quad C = \frac{b\pi}{2c} (2n + 1), \end{aligned} \quad (3.82)$$

teremos os kinks regulares

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{d} \arcsin(\tanh(ay)) + k\frac{\pi}{d}, \quad (3.83)$$

e os kinks irregulares

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{d} \arcsin(\coth(ay)) + k\frac{\pi}{d}. \quad (3.84)$$

Além disso, para

$$\begin{aligned} (1 - 3\Lambda\alpha) < 4 \quad \text{e} \quad C = \frac{b\pi}{2c} (2n + 1), \quad \text{ou} \\ (1 - 3\Lambda\alpha) > 4 \quad \text{e} \quad C = \frac{b}{c} n\pi, \end{aligned} \quad (3.85)$$

nós temos os kinks regulares

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{d} \arccos(\tanh(ay)) + k\frac{\pi}{d}, \quad (3.86)$$

e os kinks irregulares

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{d} \arccos(\coth(ay)) + k\frac{\pi}{d}, \quad (3.87)$$

onde k e n são constantes reais e temos a relação $d = -\frac{2}{b}(1 + \Lambda\alpha)$. Além disso, para vácuos globais ou supersimétricos, nós temos

$$W(\phi_{vac}, \chi_{vac}) = 3a$$

3.3. LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE

e por causa disso a constante cosmológica 5D cosmological é dada por

$$\Lambda_5 \equiv V(\phi_{vac}, \chi_{vac}) = -\frac{1}{3} W^2 = -3 a^2 = -\frac{3}{L^2}, \quad (3.88)$$

onde nós identificamos $a = 1/L$ e L é o raio AdS_5 . Das soluções tipo kink regulares nós obtemos

$$A(y) = \ln \left[\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{|a|} \cosh(a y) \right], \quad \alpha > 0. \quad (3.89)$$

Esta solução representará uma brana com geometria AdS_4 desde que satisfaça a relação

$$\alpha = -\frac{1}{\Lambda} \left[\frac{2}{3} (b^2 + c^2) + 1 \right], \quad \Lambda < 0. \quad (3.90)$$

Por outro lado, para kinks irregulares nós obtemos

$$A(y) = \ln \left[\sqrt{\frac{1}{-\alpha}} \frac{1}{|a|} |\sinh(a y)| \right], \quad \alpha < 0. \quad (3.91)$$

Desde que

$$\alpha = -\frac{1}{\Lambda} \left[\frac{2}{3} (b^2 + c^2) + 1 \right], \quad \Lambda > 0, \quad (3.92)$$

esta solução representa uma brana com geometria dS_4 , onde é possível constatar que para a condição de campos fortemente acoplados, $(b^2 + c^2) \gg 1$, encontramos $\alpha = -1/\Lambda$. Com essas considerações, a solução (3.89) se reduz a solução familiar de uma brana com geometria AdS_4 , [91, 23, 38] sem que haja fontes tipo δ para a brana:

$$A(y) = \ln \left[\sqrt{-\Lambda} L \cosh \left(\frac{a y}{L} \right) \right]. \quad (3.93)$$

A solução da brana com geometria dS_4 (3.91) pode ser escrita na forma familiar

$$A(y) = \ln \left[\sqrt{\Lambda} L \sinh \left(\frac{a y}{L} \right) \right]. \quad (3.94)$$

Se considerarmos o modelo de dois campos com $\Lambda \neq 0$ no superpotencial (3.79), que pode ser estudado analiticamente, da solução AdS_4 (3.89) nós temos

$$A(z) = -\frac{1}{2} \ln \left(\alpha a^2 \cos^2 \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}} \right) \right). \quad (3.95)$$

3.3. LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE

O potencial tipo Schroedinger(3.76) é agora um potencial tipo Poschl-Teller

$$U(z) = -\frac{9}{4\alpha} + \frac{15}{4\alpha} \sec^2 \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}} \right). \quad (3.96)$$

Este modelo suporta um número infinito de estados ligados com autovalores dados por

$$m_n^2 = \frac{n}{\alpha} (n+3), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.97)$$

onde

$$\alpha = -\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{2}{3}(b^2 + c^2) + 1 \right), \quad \Lambda < 0. \quad (3.98)$$

Esse potencial é o mesmo encontrado no cenário de Karch-Randall [23]. O espectro consiste de modos massivos graviton das flutuações da gravidade de um espaço-tempo AdS_5 puro. A localização de gravidade na 3-brana é devido ao modo muito suave que surge quando a tensão na brana se torna suficientemente grande (vide [23, 36, 48, 49, 50] para maiores detalhes). Embora a solução da brana do modelo (3.79) tenha uma tensão não nula,

$$\sigma_{BPS} = |\Delta W| = 3a, \quad \text{para } m = k = 0, \quad (3.99)$$

tal informação não aparece no potencial (3.96), tornando impossível o controle do espectro (3.97) no sentido de que o modo gráviton mais leve é o responsável pelo surgimento da gravidade 4D.

Capítulo 4

Localização de gravidade 4D em uma teoria de supergravidade

Este capítulo é destinado à apresentação dos resultados originais obtidos durante o período do doutorado. A título de introdução, é necessário saber que a supergravidade é uma teoria de Gauge com *supersimetria local* e em outras palavras, é o estudo da interação das partículas elementares da natureza, e suas correspondentes spartículas, no contexto de gravitação. Uma supersimetria é uma propriedade de invariância que transforma campos bosônicos em fermiônicos e vice-versa. Uma teoria é dita supersimétrica se a correspondente ação é invariante por transformações que atuam nos chamados supercampos, que são definidos como funções das coordenadas do superespaço quando campos bosônicos e fermiônicos interagem. Em supersimetria, os parâmetros das transformações são espinores constantes (*supersimetria global*), e ao tornar estes parâmetros funções da posição obtemos a supersimetria local que dará origem às teorias de supergravidade, que estão definidos em um *superespaço* formado pelas coordenadas do espaço-tempo, mais coordenadas de caráter grasmanniano (números anticomutantes). Historicamente, estas teorias surgiram da tentativa de usar a supersimetria nos modelos de gravitação com o objetivo de diminuir, senão solucionar, os problemas de divergência ultra-violeta na gravitação quântica. Porém, verificou-se logo que uma supersimetria local não bastava para remover por completo tais divergências ultravioletas na teoria perturbativa. Embora, incapaz de livrar a gravitação quântica das divergências, a

supersimetria impõe sobre a mesma uma série de restrições nos termos que podem aparecer na ação, e isso motivou nossos estudos iniciais da supergravidade, e dentro deste contexto, a *localização de gravidade* 4D em mundo-brana, que resultou neste trabalho de tese cujos principais resultados serão apresentados na sequência. No presente estudo, investigamos esse cenário em uma supergravidade 5D, consistentemente truncada, onde a 3-brana assimétrica aparece como soluções BPS, no primeiro modelo estudado, e como soluções dilatônicas BPS e não-BPS, oriundas de um mesmo modelo teórico. Elas são soluções de um conjunto de equações de primeira ordem, que preservam parte da supersimetria e também satisfazem as equações de Einstein. Na primeira seção deste capítulo estamos interessados em soluções tipo branas assimétricas em gravidade 4D induzida [31, 32, 53, 39], que surgem naturalmente no contexto de supergravidade em quatro [39] e cinco dimensões [20], onde a espessura da 3-brana é incorporada em um espaço assintoticamente AdS–Minkowski 5D. Isso nos permite a possibilidade de termos gravidade 4D metaestável, como primeiramente apontado nas Refs. [54, 55], que são os cenários GRS e DGP respectivamente. Nas seções seguintes seguiremos os mesmos passos para encontrar o potencial Newtoniano induzido pelos modos de gravidade massivos que surgem. A partir de uma equação tipo Schroedinger para as flutuações de gravidade em torno de uma solução do tipo 3-brana dilatônica curva.

4.1 Gravidade 4D em branas planas assimétricas

Consideraremos a ação mais geral, para espaços-tempos em D -dimensões arbitrárias ($D > 3$) acoplados com $\mathcal{N}$ campos escalares [51, 52, 39],

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{\kappa^{D-2}} \int d^D x e [R - \kappa^{D-2} g^{MN} \partial_M \phi_i \partial_N \phi_i + \bar{\psi}_{Mi} \Gamma^{MNP} \nabla_N \psi_P^i \\
 & + \kappa^{D-2} \bar{\chi}_i \Gamma^M \nabla_M \chi^i + M(\phi) \kappa^{D-2} \bar{\chi}_i \chi^i + \kappa^{D-2} V(\phi) \\
 & + \frac{1}{2} \kappa^D \partial_N \phi (\bar{\psi}_{Mi} \Gamma^N \Gamma^M \chi^i + \bar{\chi}_i \Gamma^M \Gamma^N \psi_M^i) \\
 & + W_2 \kappa^D (\bar{\psi}_{Mi} \Gamma^M \chi^i - \bar{\chi}_i \Gamma^M \psi_M^i) - (D-2) W \kappa^D \bar{\psi}_{Mi} \Gamma^{MN} \psi_N^i \\
 & + (\text{termos da ordem de fermi})],
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $e = \det e_M^A = |\det g_{MN}|^{1/2}$ e a assinatura é $(-+++)$. Para o estudo da localização de gravidade, que será realizado neste capítulo, é suficiente tratar do setor bosônico da teoria mais abrangente dada pela ação (4.1). Temos então:

$$S_{SG} = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2\kappa^{D-2}} R - \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi_i \partial_N \phi_i - V(\phi_i) \right], \tag{4.2}$$

onde $\kappa = \frac{1}{M_*}$ é o comprimento de Planck D -dimensional e M_* é a escala fundamental de energia. O potencial e os campos escalares, que determinam a teoria, são dados por

$$V(\phi_i) = 2(D-2)^2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^2 - \kappa^{D-2} \left(\frac{D-1}{D-2} \right) W^2 \right], \tag{4.3}$$

onde $W(\phi_i)$ é a função usualmente conhecida como superpotencial. Nesta seção, vamos adotar a seguinte indexação para os campos escalares ϕ_i , com $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$, e fazer uso da métrica generalizada de Randall-Sundrum:

$$ds_D^2 = e^{A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \tag{4.4}$$

onde $e^{A(y)}$ é o fator de deformação, $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-2$ são os índices da $(D-2)$ -brana.

Da ação (4.2), juntamente com a métrica (4.4), obtemos a série de equações

$$\phi_i'' + (D-1) A' \phi_i' - \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0, \tag{4.5a}$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

$$A'' = -\frac{\kappa^{D-2}}{(D-2)} \phi'^2 \quad (4.5b)$$

e

$$A'^2 = 2 \frac{\kappa^{D-2}}{(D-1)(D-2)} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V \right), \quad (4.5c)$$

que tem como soluções um conjunto de equações de primeira ordem obtidas das equações espinoriais de Killing escritas como

$$\partial_y A = \mp 2\kappa^{D-2} W, \quad (4.6a)$$

$$\partial_y \phi_i = 2(D-2) \frac{\partial W}{\partial \phi_i}, \quad (4.6b)$$

onde assumimos que os campos escalares dependem apenas da coordenada transversa y . Os modos gráviton das $(D-2)$ -branas são governadas pela equação de movimento linearizada para um número arbitrário, $(D > 3)$, de dimensões dada por [51, 52, 39]

$$\partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \Phi) = 0, \quad (4.7)$$

onde Φ descreve a função de onda para o gráviton para as coordenadas não compactas $M, N = 0, 1, 2, \dots, D-1$. Agora, iremos considerar a separação de variáveis $\Phi = h(y) \varphi(x^\mu)$ na equação (4.7) e também o fato de que $\square_{D-1} \varphi = m^2 \varphi$, onde $\square_{D-1}$ é o operador laplaciano sobre a estrutura tangente. Então, a equação de onda para o gráviton, em termos da coordenada transversa y , é

$$\frac{\partial_y (\sqrt{-g} g^{yy} \partial_y h(y))}{\sqrt{-g}} = -m^2 |g^{00}| h(y). \quad (4.8)$$

Usando as componentes da métrica (4.4) na equação (4.8), obtemos a equação que governa os modos do gráviton sobre as branas

$$\frac{1}{2} (D-1) \partial_y A \partial_y h(y) + \partial_y h(y) = -m^2 e^{-A(y)} h(y). \quad (4.9)$$

Com a mudança de variáveis:

$$h(y) = \psi(z) e^{-\frac{A(z)(D-2)}{4}}, \quad \text{e} \quad z(y) = \int e^{-\frac{A(y)}{2}} dy, \quad (4.10)$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

realizamos uma mudança da métrica (4.4) para a métrica conformalmente plana,

$$ds_D^2 = e^{A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (4.11)$$

Assim, a equação (4.9) pode ser reescrita como a equação do tipo Schroedinger,

$$-\partial_z^2 \psi(z) + V(z) \psi(z) = m^2 \psi(z), \quad (4.12)$$

cujo potencial escalar $V(z)$ é dado por

$$V(z) = \frac{(D-2)^2}{16} (\partial_z A(z))^2 + \frac{D-2}{4} \partial_z^2 A(z), \quad (4.13)$$

expresso agora em termos da coordenada conformal z . Queremos examinar a teoria introduzida pela ação que representa o setor bosônico da supergravidade (4.2), para o caso da gravidade 5D acoplada a dois campos escalares reais, a saber ϕ_1 and ϕ_2 . Para $D = 5$, vamos realizar a transformação $W \rightarrow W/12$ em (4.6a) e (4.6b), e as unidades são tais que $\kappa^{D-2} = 2$ [56]. Fazendo isso, recuperamos o caso das branas planas assimétricas desenvolvido no capítulo 3, para o superpotencial

$$W = \frac{3}{2} a \sin(\sqrt{2} b \phi_1) \cos(\sqrt{2} b \phi_2), \quad \text{onde } a, b = \text{constante}. \quad (4.14)$$

Vamos trabalhar em uma órbita conveniente que desacopla as equações de primeira ordem

$$\cos(\sqrt{2} b \phi_1) = C \sin(\sqrt{2} b \phi_2), \quad C = \text{constante real}. \quad (4.15)$$

Para $C = 1$ nós temos as seguintes soluções

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4b} \arccos \left(\tanh \left(\frac{3}{4} a b^2 y \right) \right) + (n+1) \frac{\sqrt{2}\pi}{4b}, \\ \phi_2(y) &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4b} \arccos \left(\tanh \left(\frac{3}{2} a b^2 y \right) \right) + n \frac{\sqrt{2}\pi}{4b}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

de forma que obtemos o seguinte fator de deformação

$$A(y) = (-1)^{n+1} \frac{a y}{2} + \frac{2}{3 b^2} \ln \left(q \operatorname{sech} \left(\frac{3}{4} a b^2 y \right) \right), \quad (4.17)$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

de onde vem o primeiro vínculo, $q > 0$. Então, o modelo aqui desenvolvido gera branas tipo BPS assimétricas que conectam os espaços $\text{AdS}_5 - \mathbb{M}_5(\text{Minkowski})$ porém, a equação (4.17) apresenta problemas quando tentamos obter valores analíticos com a mudança de variável (4.10). Para contornar estes problemas realizaremos uma aproximação para pequenas espessuras,

$$\ln(\cosh(\varepsilon x)) \rightarrow |\varepsilon x| \quad \text{para} \quad \varepsilon \gg 1, \quad (4.18)$$

e assim podemos reescrever o fator de deformação para a forma

$$A(y) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2} a y + \frac{2}{3} \frac{\ln(q)}{b^2} - \frac{1}{2} |a y|, \quad a b^2 \gg 1, \quad (4.19)$$

agora com um vínculo adicional $q \geq 1$. De posse do fator de deformação reescrito (4.19), assumiremos valores ímpares para o parâmetro n para então realizar uma mudança de variáveis que torna a métrica conformalmente plana dada por

$$y = \frac{2}{a k} z, \quad z \leq 0, \quad (4.20a)$$

$$y = \frac{2}{a} \ln\left(\frac{z}{k} + 1\right), \quad z > 0. \quad (4.20b)$$

De acordo com essa mudança de variáveis, o fator de deformação pode ser reescrito na forma geral

$$A(z) = -2 \ln\left(\frac{a(z + |z|)}{4} + \frac{a k}{2}\right), \quad q = e^{\frac{3}{4} a b^2 k}; \quad (4.21)$$

englobando todo espaço conformal da variável z . Restringindo nosso problema ao caso em que $D = 5$, pela substituição de (4.21) nas equações (4.12) e (4.13), nós obtemos a equações tipo Schroedinger para as pequenas flutuações em torno da métrica

$$-\frac{d}{dz^2} \psi_m(z) + \left(\frac{15}{64} \frac{(1 + \text{sgn}(z))^2}{\left(\frac{1}{4}(z + |z|) + \frac{k}{2}\right)^2} - \frac{3}{8} \frac{\delta(z)}{\left(\frac{1}{4}(z + |z|) + \frac{k}{2}\right)} \right) \psi_m(z) = m^2 \psi_m(z), \quad (4.22)$$

onde m^2 é a massa 4D que corresponde aos modos de Kaluza-Klein. Queremos analisar agora as duas regiões descritas pelo nosso problema. Primeiro, para $z < 0$ a solução da equação (4.22) é do tipo onda plana com a forma geral

$$\psi_{1_m}(z) = C_1 \sin(m z) + C_2 \cos(m z). \quad (4.23a)$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

Por sua vez, quando temos $z > 0$, a equação de Bessel de segunda ordem que emerge de (4.22) tem como solução a superposição

$$\psi_{2_m}(z) = \sqrt{z+k} [C_3 J_2(m(z+k)) + C_4 N_2(m(z+k))], \quad (4.24)$$

onde J_2 e N_2 são funções de Bessel, de primeira e segunda espécie, respectivamente, e C_ℓ , $\ell = 1, 2, 3, 4$, são constantes que serão calculadas analiticamente. Para eliminar o termo que não contribui para a condição de continuidade da solução em $z = 0$, ao fazermos $C_1 = 0$ na equação (4.22), geramos uma solução particular para o problema que também garante a condição de contorno $\psi'_{1_m}(0) = 0$. Por se tratar de uma solução oscilatória no Bulk, a fase da brana pode ser escolhida na forma mais conveniente. Estamos interessados nos termos de correção para a lei de Newton entre duas massas unitárias sobre a brana em 4 dimensões, então é necessário obter a probabilidade de que haja gravidade com modos KK sobre a brana. O comportamento assintótico dessa probabilidade, $|\psi_m(0)|^2$, depende da intensidade do argumento das funções de Bessel e das constantes de normalização C_2 , C_3 e C_4 , sob determinadas condições. Neste modelo, temos duas condições de contorno no ponto onde se localiza a brana, $z = 0$: a condição de continuidade para as funções de onda, que exige que $\psi_{1_m}(0) = \psi_{2_m}(0)$, e a condição de “jump” que surge com o uso das propriedades da função delta

$$\left[\frac{d}{dz} \psi_{2_m}(z) \right]_{z=0} + \frac{3}{4} \frac{\psi_{2_m}(0)}{k} = 0, \quad (4.24)$$

e junto com a relação de ortonormalização das funções de Bessel

$$\int_0^\infty x J_\nu(ux) J_\nu(vx) dx = \frac{\delta(u-v)}{u}, \quad (4.25)$$

estabelecemos o conjunto de equações que nos darão as relações entre as constantes. Após essas considerações, podemos reescrever as equações (4.23a) e (4.24) como

$$\psi_{1_m}(z) = \frac{4}{\pi} \frac{C_m}{\sqrt{k}} \cos(mz), \quad (4.26a)$$

$$\psi_{2_m}(z) = C_m \sqrt{m(z+k)} [-F(m) J_2(m(z+k)) + N_2(m(z+k))], \quad (4.26b)$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

onde temos a função auxiliar

$$F(m) = \frac{F_1(m)}{F_2(m)} = \frac{2 k m N_1(mk) - 3 N_2(mk)}{2 k m J_1(mk) - 3 J_2(mk)}, \quad (4.27)$$

com a constante de normalização dada por

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{k\pi} + m [F_1(m)^2 + F_2(m)^2]}}. \quad (4.28)$$

Para obter as equações acima, nós usamos a relação de recorrência para as funções de Bessel (Fórmula de Lommel)

$$J_{\nu+1}(x) N_{\nu}(x) - J_{\nu}(x) N_{\nu+1}(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (4.29)$$

e as relações de ortonormalidade para as funções de Bessel. Sendo assim, encontramos a seguinte densidade de probabilidade

$$|\psi_m(0)|^2 = \frac{16}{\pi^2 \left[\frac{16}{k\pi} + m [F_1(m)^2 + F_2(m)^2] \right]}, \quad (4.30)$$

onde:

- para $m \gg \frac{1}{k}$, há a predominância das funções de Bessel de primeira espécie;
- quando $m \ll \frac{1}{k}$, há a predominância das funções de Bessel de segunda espécie.

Então, usando as formas assintóticas das funções de Bessel

$$\begin{aligned} J_{\nu}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(-x + \frac{1}{4}(2\nu + 1)\pi\right) \quad \text{e} \\ N_{\nu}(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(-x + \frac{1}{4}(2\nu + 1)\pi\right), \quad \text{para } x \gg 1; \\ J_{\nu}(x) &\sim \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \quad \text{e} \quad N_{\nu}(x) \sim -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}, \quad \text{para } x \ll 1; \end{aligned} \quad (4.31)$$

a densidade de probabilidade (4.30) assume duas formas simplificadas:

$$|\psi_m(0)|^2 \sim \frac{4}{\pi (13 + 4 k^2 m^2)}, \quad m \gg \frac{1}{k}; \quad (4.32)$$

$$|\psi_m(0)|^2 \sim \frac{8 k m}{3 \pi^2}, \quad m \ll \frac{1}{k}. \quad (4.33)$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

As correções do potencial Newtoniano gerados pelos modos massivos são dadas por [16]

$$V(r) = \frac{M_5^{-3}}{r} |\psi_0(0)|^2 + \delta V(r), \quad (4.34)$$

onde o primeiro termo é a contribuição do modo zero e o segundo termo corresponde ao termo de correção gerado pelos modos massivos KK. Uma vez que de um lado da 3-brana, assintoticamente, temos o espaço 5D de Minkowski, cujo volume é infinito, então nenhum modo-zero de gravidade emergirá neste problema. Por essa razão a equação (4.34) se reduz a

$$V(r) = \delta V(r) = \frac{M_5^{-3}}{r} \int_0^\infty dm e^{-mr} |\psi_m(0)|^2. \quad (4.35)$$

Nossa análise é feita em duas regiões distintas nas quais obtemos as probabilidades de existência de gravidade com modos contínuos sobre a brana no ponto $z = 0$. Consequentemente, é necessário dividir a integral em duas regiões para calcular a forma aproximada para as correções no potencial Newtoniano a uma distância r , então

$$V(r) \sim \frac{M_5^{-3}}{r} \left(\frac{8}{3} \frac{k}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{k}} m e^{-mr} dm + 4 \int_{\frac{1}{k}}^\infty \frac{e^{-mr}}{\pi (13 + 4 k^2 m^2)} dm \right). \quad (4.36)$$

No limite em que a escala de crossover $r_c = k$ é muito pequena, i.e., $k \rightarrow 0$, a primeira integral da equação (4.36) é dominante e nos dá como resposta

$$V(r) \sim \frac{8}{3} \frac{M_5^{-3} r_c}{\pi^2 r^3}, \quad (4.37)$$

que é o mesmo comportamento que se obtém no cenário de Randall-Sundrum [16]. Por outro lado, quando a escala de crossover é muito larga, i.e., $r_c = k \rightarrow \infty$, a segunda integral em (4.36) é dominante e é possível escrever a forma aproximada de $\delta V(r)$ a uma distância r . Reescrevendo as integrais exponenciais resultantes usando as relações

$$\text{Ei}(ix) = \text{ci}(x) + i \text{si}(x), \quad \text{onde}$$

$$\text{ci}(x) = - \int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t} \quad \text{e} \quad \text{si}(x) = - \int_x^\infty dt \frac{\sin t}{t}, \quad (4.38)$$

4.1. GRAVIDADE 4D EM BRANAS PLANAS ASSIMÉTRICAS

temos como resultado a forma aproximada para o potencial Newtoniano

$$V(r) \sim \frac{\sqrt{13}}{13} \frac{M_5^{-3}}{r_c \pi r} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{13}r}{2r_c}\right) \text{ci}\left(\frac{\sqrt{13}r}{2r_c}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{13}r}{2r_c}\right) \text{si}\left(\frac{\sqrt{13}r}{2r_c}\right) \right]. \quad (4.39)$$

Vamos agora fazer uma breve discussão sobre o comportamento da gravidade à pequenas e grandes distâncias em comparação com a escala de crossover. De acordo com as formas assintóticas das integrais:

$$\text{ci}(x) \sim \gamma_E + \ln(x) \quad \text{e} \quad \text{si}(x) \sim x - \frac{\pi}{2}, \quad \text{para } x \ll 1,$$

$$\text{ci}(x) \sim \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{e} \quad \text{si}(x) \sim -\frac{\cos(x)}{x} \quad \text{para } x \gg 1. \quad (4.40)$$

Para pequenas distâncias, i.e., $r/r_c \ll 1$, onde $\gamma_E \approx 0.577$ é a constante de Euler-Masceroni, nós obtemos a seguinte forma

$$V(r) \sim \frac{\sqrt{13}}{13} \frac{M_5^{-3}}{r_c \pi r} \left[\frac{\sqrt{13}r}{2r_c} \left(\gamma_E + \ln\left(\frac{\sqrt{13}r}{2r_c}\right) \right) - \frac{\sqrt{13}r}{2r_c} + \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(r^2) \right], \quad r \ll r_c. \quad (4.41)$$

Como era esperado, à curtas distâncias o potencial tem o correto decaimento $1/r$ para a lei de Newton 4D, que é subsequentemente modificado pelo termo de repulsão logarítmica na expressão (4.41). Finalmente, para largas distâncias em comparação com a escala de crossover, i.e., $r/r_c \gg 1$ o potencial na equação (4.40) nos dá

$$V(r) \sim \frac{2}{13} \frac{M_5^{-3}}{\pi^2 r^2}, \quad r \gg r_c, \quad (4.42)$$

que está de acordo com a lei da gravidade em cinco dimensões [54, 55]. O completo comportamento da gravidade é controlado pela escala de crossover r_c , (consequentemente, pela largura da brana) e os resultados obtidos aqui estão de acordo com os cenários GRS e DGP e publicados em [56], onde se verifica que r_c pode estar relacionado com o comprimento de Hubble atual.

4.2 Gravidade 4D em branas dilatônicas curvas

Nesta seção iremos explorar a métrica generalizada de Karch-Randall:

$$ds_D^2 = e^{A(y)} ds_{(D-1)}^2 - dy^2, \quad (4.43)$$

onde $e^{A(y)}$ é o fator de deformação, $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-2$ são índices sobre a $(D-2)$ -brana.

Os elementos de linha do espaço-tempo 4D, $ds_{(D-1)}^2$, são tais que

$$ds_{(D-1)}^2 = dt^2 - e^{\sqrt{\Lambda}t} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{D-2}^2), \quad (4.44a)$$

$$ds_{(D-1)}^2 = e^{-\sqrt{-\Lambda}x_{(D-2)}} (dt^2 - dx_1^2 - \dots - dx_{(D-3)}^2) - dx_{(D-2)}^2, \quad (4.44b)$$

onde temos, respectivamente, a geometria dS ($\Lambda > 0$) ou geometria AdS ($\Lambda < 0$). Em uma notação simplificada para os campos escalares, ϕ_i , com os índices de soma $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$, quando usamos a ação da supergravidade (4.2), proposta na seção anterior, com a métrica (4.43), obtemos o conjunto de equações

$$\phi_i'' + (D-1)A'\phi_i' - \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0, \quad (4.45a)$$

$$A'' = -\frac{\kappa^{D-2}}{(D-2)} \phi'^2 - \Lambda e^{-A} \quad (4.45b)$$

e

$$A'^2 = \frac{2\kappa^{D-2}}{(D-1)(D-2)} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 - V \right) + \Lambda e^{-A}, \quad (4.45c)$$

que são resolvidas pelas equações de primeira ordem, obtidas das equações dos espinores de Killing, em termos de duas novas funções W e Z

$$\partial_y A = -\frac{2\kappa^{D-2}}{(D-1)(D-2)} (W + \Lambda \beta Z), \quad (4.46a)$$

$$\partial_y \phi_i = \frac{3\kappa^{D-2}}{(D-1)(D-2)} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} + \Lambda(\alpha_i + \beta) \frac{\partial Z}{\partial \phi_i} \right), \quad (4.46b)$$

onde $W = W(\phi_i)$ é o superpotencial, $Z = Z(\phi_i)$, como vimos no capítulo 3, é uma função auxiliar arbitrária do campo escalar que responde à presença da constante cosmológica e

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

α_i, β são constantes reais [20]. Estamos assumindo que o campo escalar depende apenas da coordenada transversa y , e os modos do gráviton sobre a $(D - 2)$ -brana são governados pela equação de movimento linearizada em um número arbitrário de $(D > 3)$ -dimensões, em um processo de construção semelhante ao que foi feito para o caso das branas planas na seção anterior, com algumas diferenças que precisam ser enfatizadas. Temos então, a equação

$$\partial_M(\sqrt{-g}g^{MN}\partial_N\Phi) = 0, \quad (4.47)$$

onde Φ descreve a função de onda para o gráviton nas coordenadas não-compactadas $M, N = 0, 1, 2, \dots, D - 1$. Estamos admitindo a separação de variáveis $\Phi = h(y)\varphi(x^\mu)$ na equação (4.47) e o fato que $\square_{D-1}\varphi = m^2\varphi$, onde $\square_{D-1}$ é o operador Laplaciano da estrutura tangencial. Então, a equação de onda para o gráviton, na coordenada transversa y , é dada por

$$\frac{\partial_y(\sqrt{-g}g^{yy}\partial_y h(y))}{\sqrt{-g}} = -m^2|g^{00}|h(y). \quad (4.48)$$

Usando as componentes da métrica (4.43) em (4.48) nós encontramos a equação

$$\frac{1}{2}(D - 1)\partial_y A \partial_y h(y) + \partial_y h(y) = -m^2 e^{-A(y)} h(y), \quad (4.49)$$

e realizando uma mudança de variáveis

$$h(y) = \psi(z) e^{-\frac{A(z)(D-2)}{4}} \quad \text{e} \quad z(y) = \int e^{-\frac{A(y)}{2}} dy, \quad (4.50)$$

que torna a métrica (4.43) conformalmente plana, encontramos

$$ds_D^2 = e^{A(z)}(ds_{(D-1)}^2 - dz^2), \quad (4.51)$$

em termos da nova coordenada z . Assim, podemos reescrever a equação (4.49) como uma equação do tipo Schroedinger

$$-\partial_z^2 \psi(z) + V(z)\psi(z) = m^2 \psi(z), \quad (4.52)$$

que governa os modos do gráviton onde o potencial escalar é dado por [43]

$$V(z) = -\frac{(D-2)^2}{16}\Lambda + \frac{(D-2)^2}{16}(\partial_z A)^2 + \frac{D-2}{4}\partial_z^2 A. \quad (4.53)$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

4.2.1 Modelo I: Branas não-BPS

Chamaremos de modelo I, os resultados desenvolvidos e publicados em [57]. A partir deste ponto, iremos examinar a teoria introduzida pela ação (4.2), para uma gravidade 5D acoplada a dois campos escalares, ϕ_1 and ϕ_2 . Consideremos agora, o superpotencial com a forma

$$W = -b_3 e^{b_1 \phi_1 + b_2 \phi_2}. \quad (4.54)$$

Para $D = 5$, além da transformação $W \rightarrow W/[(D-1)(D-2)]$ em (4.46a) e (4.46b), também utilizaremos o sistema de unidades tal que $\kappa^{D-2} = 2$, o que faz com que esse segundo modelo esteja plenamente de acordo com a teoria apresentada no Capítulo 3. Como uma sugestão para o formato do potencial escalar, em termos do superpotencial, nós temos

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{8} (W_{\phi_1} + \Lambda (\alpha_1 + \beta) Z_{\phi_1}) (W_{\phi_1} + \Lambda (-3\alpha_1 + \beta) Z_{\phi_1}) \\ &+ \frac{1}{8} (W_{\phi_2} + \Lambda (\alpha_2 + \beta) Z_{\phi_2}) (W_{\phi_2} + \Lambda (-3\alpha_2 + \beta) Z_{\phi_2}) \\ &- \frac{1}{3} (W + \Lambda \beta Z)^2, \end{aligned} \quad (4.55)$$

que impõe os seguintes vínculos

$$\begin{aligned} \alpha_1 W_{\phi_1} Z_{\phi_1 \phi_1} + \alpha_1 Z_{\phi_1} W_{\phi_1 \phi_1} + 2\alpha_1 \Lambda (\alpha_1 + \beta) Z_{\phi_1} Z_{\phi_1 \phi_1} + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) W_{\phi_2} Z_{\phi_1 \phi_2} + \\ \alpha_2 Z_{\phi_2} W_{\phi_1 \phi_2} + \frac{1}{2} \Lambda (\alpha_1 + 3\alpha_2) Z_{\phi_2} Z_{\phi_1 \phi_2} - \frac{4}{3} \alpha_1 Z_{\phi_1} (W + \Lambda \beta Z) = 0, \end{aligned} \quad (4.56a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 W_{\phi_2} Z_{\phi_2 \phi_2} + \alpha_2 Z_{\phi_2} W_{\phi_2 \phi_2} + 2\alpha_2 \Lambda (\alpha_2 + \beta) Z_{\phi_2} Z_{\phi_2 \phi_2} + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) W_{\phi_1} Z_{\phi_1 \phi_2} + \\ \alpha_1 Z_{\phi_1} W_{\phi_1 \phi_2} + \frac{1}{2} \Lambda (\alpha_2 + 3\alpha_1) Z_{\phi_1} Z_{\phi_1 \phi_2} - \frac{4}{3} \alpha_2 Z_{\phi_2} (W + \Lambda \beta Z) = 0. \end{aligned} \quad (4.56b)$$

A manipulação das equações de Einstein nos dá a forma geral para o fator de deformação

$$A(y) = -\ln \left(-\frac{1}{6} \alpha_1 (W_{\phi_1} Z_{\phi_1} + \Lambda (\alpha_1 + \gamma) Z_{\phi_1}^2) - \frac{1}{6} \alpha_2 (W_{\phi_2} Z_{\phi_2} + \Lambda (\alpha_2 + \gamma) Z_{\phi_2}^2) \right). \quad (4.57)$$

Nosso desafio é encontrar soluções razoáveis para este conjunto de equações em termos do superpotencial, da combinação dos parâmetros e a função auxiliar Z . Utilizaremos aqui o ansatz para encontrar soluções tipo *paredes de domínios dilatônicas* proposto em [39] para os

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

kinks

$$\begin{aligned}\phi_i(y) &= -\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} \ln(1 - c_1 y), \quad y > 0; \\ \phi_i(y) &= -\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} \ln(1 - c_2 y), \quad y < 0\end{aligned}\tag{4.58}$$

e o fator de deformação

$$\phi_i(y) = -\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} A(y),\tag{4.59}$$

onde b_1, b_2, b_3, c_1 e c_2 são constants reais. Faremos a escolha $Z = W, \beta = 0, c_i^2 = b_3^2, \alpha_i = \alpha, b_1^2 + b_2^2 = \frac{2}{3(1+\Lambda\alpha)}$, de maneira que os vínculos (4.56a)–(4.56b) sejam satisfeitos. As órbitas $\phi_2 = \frac{b_2 \phi_1}{b_1}$, desacoplam as equações de primeira ordem no espaço dos campos escalares fornecendo *soluções dilatônicas* não–BPS. Ao utilizarmos o superpotential proposto e restringindo o conjunto de parâmetros, o potencial escalar é agora dado por

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{9}{4} (1 + \Lambda\alpha) b_3 e^{b_1 \phi_1 + b_2 \phi_2}.\tag{4.60}$$

Vamos utilizar o ansatz proposto para o fator de deformação

$$\begin{aligned}A(y) &= \ln(1 + c_1 y), \quad y > 0; \\ A(y) &= \ln(1 - c_1 y), \quad y < 0,\end{aligned}\tag{4.61}$$

e os kinks resultantes da manipulação do nosso conjunto de equações

$$\begin{aligned}\phi_i(y) &= -\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} \ln(1 + c_1 y), \quad y > 0; \\ \phi_i(y) &= -\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} \ln(1 - c_1 y), \quad y < 0\end{aligned}\tag{4.62}$$

com $i = 1, 2$. Soluções desse tipo são conhecidas como soluções de escala e podem ser agrupadas em uma única forma abrangendo todo espaço, que satisfaz as equações de movimento

$$A(y) = \ln(1 + c_1 |y|), \quad \phi_i(y) = -\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} \ln(1 + c_1 |y|),\tag{4.63}$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

e servem aos nossos propósitos. Estas últimas são soluções não-BPS regulares, que se conectam aos mesmos vácuos

$$\Delta W \rightarrow W(\phi_i(+\infty)) - W(\phi_i(-\infty)) = 0$$

estando de acordo com a fonte da função delta nas equações de movimento, pois cada parcela destas soluções tipo kink pode produzir este termo tomando o limite de pequenas espessuras

$$\frac{b_i}{b_1^2 + b_2^2} \rightarrow \infty.$$

Tal como fizemos na última seção, iremos investigar a existência de modos gravitacionais na vizinhança das branas empregando a mudança da citada variável, que resulta na métrica conformalmente plana (11) e, então, reescrever o fator de deformação (4.63) obtendo a nova forma

$$A(y) = c_1 |z| + 1. \quad (4.64)$$

Para $D = 5$ obtemos a equação tipo Schroedinger

$$-\frac{d^2}{dz^2} \psi_m(z) + \left(-\frac{9}{4} \Lambda + \frac{9}{4} c_1^2 + 3 c_1 \delta(z) \right) \psi_m(z) = m^2 \psi_m(z) \quad (4.65)$$

onde m^2 é a massa em quatro dimensões, que corresponde aos modos de Kaluza-Klein. Temos um problema de uma barreira de potencial delta modificada. Para energias positivas, as partículas (por exemplo os grávitons) são livres para se mover em qualquer uma das metades do espaço ($z < 0$ ou $z > 0$) e são espalhados pelo potencial função delta em $z = 0$. Uma vez que estamos interessados nos termos de correção para a lei de Newton 4D, entre duas massas unitárias na brana, é necessário obter a probabilidade de termos gravidade com modos KK. Esses modos são dados em termos do espalhamento dos estados governados por $|\psi_m(0)|^2$, que depende da magnitude dos coeficientes de transmissão (T) ou de reflexão (R). A condição de contorno (jump) em $z = 0$,

$$\left[\frac{d}{dz} \psi_m(z) \right]_{z=0} + 3 c_1 \psi_m(z) = 0, \quad (4.66)$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

é obtida a partir da equação tipo Schroedinger usando as propriedades da função delta. Considerando-se as funções de onda gerais para os estados espalhados

$$\begin{aligned}\psi_{m1}(z) &= e^{i\kappa z} + R e^{-i\kappa z}, \quad z < 0; \\ \psi_{m2}(z) &= T e^{i\kappa z}, \quad z > 0,\end{aligned}\tag{4.67}$$

onde $\kappa^2 = m^2 + \frac{9}{4}\Lambda$ é o número de onda, a densidade de probabilidade assume a forma simplificada

$$|\psi_m(0)|^2 = |T|^2 = \frac{(9\Lambda + 4m^2)k^2}{1 + (9\Lambda + 4m^2)k^2},\tag{4.68}$$

onde $k^2 = \frac{1}{9c_1^2}$. O segundo termo do potencial de Schroedinger é absorvido pelo termo de massa sem modificar o resultado do nosso estudo. A correção para potencial Newtoniano, gerada pelos modos massivos, é dada por (4.34) e como este cenário não possui um modo zero nós temos

$$V(r) = \delta V(r) = \frac{M_5^{-3}}{r} \int_0^\infty dm e^{-mr} |\psi_m(0)|^2.\tag{4.69}$$

Para grandes valores da escala de crossover, ou seja $r_c \rightarrow \infty$, é possível construir uma forma aproximada para $\delta V(r)$, em relação à uma distância r , usando as relações

$$\begin{aligned}\text{Ei}(ix) &= \text{Ci}(x) + i \left[\frac{1}{2} \pi + \text{Si}(x) \right], \quad \text{onde} \\ \text{Ci}(x) &= - \int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t} \quad \text{e} \quad \text{Si}(x) = - \int_x^\infty dt \frac{\sin t}{t}\end{aligned}\tag{4.70}$$

tal como foi feito na última seção, no caso de branas planas assimétricas. Encontramos a primeira forma aproximada para a correção do potencial

$$V(r) \sim \frac{M_5^{-3}}{4f(k)kr} \left(\sin\left(\frac{1}{2} \frac{f(k)r}{k}\right) \text{Ci}\left(\frac{1}{2} \frac{f(k)r}{k}\right) - \cos\left(\frac{1}{2} \frac{f(k)r}{k}\right) \text{Si}\left(\frac{1}{2} \frac{f(k)r}{k}\right) \right)\tag{4.71}$$

onde identificamos a escala de crossover, $r_c = k/f(k)$, onde $f(k) = \sqrt{1 + \Lambda k^2}$. Neste ponto nós usaremos as formas assintóticas:

$$\text{Ci}(x) \sim \gamma_E + \ln(x) \quad \text{e} \quad \text{Si}(x) \sim x - \frac{\pi}{2}, \quad \text{para} \quad x \ll 1;$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

$$\text{Ci}(x) \sim \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{e} \quad \text{Si}(x) \sim -\frac{\cos(x)}{x} \quad \text{para} \quad x \gg 1. \quad (4.72)$$

No limite de curtas distâncias, quando temos $r/r_c \ll 1$, nós obtemos a seguinte forma

$$V(r) \sim \frac{M_5^{-3}}{4 f(k) k r} \left(\frac{1}{2} \frac{f(k) r}{k} \left(\gamma_E + \ln \left(\frac{1}{2} \frac{f(k) r}{k} \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{f(k) r}{k} + \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(r^2) \right), \quad r \ll r_c. \quad (4.73)$$

Como esperávamos, à curtas distâncias o potencial tem a escala correta de Newton 4D, $1/r$, que é subsequentemente modificada pelo termo de repulsão logarítmica em (4.73). Finalmente, para grandes distâncias, i.e., $r/r_c \gg 1$, o potencial mostrado na Eq. (4.71) nos dá

$$V(r) \sim \frac{M_5^{-3}}{2 r^2 f(k)^2 \pi} \sim \frac{1}{r^2}, \quad r \gg r_c, \quad (4.74)$$

que está de acordo com a escala 5D [54, 55]. Trata-se de um resultado que também está de acordo com os cenários GRS e DGP, e agora demonstramos que r_c está realmente relacionado com o comprimento de Hubble dado em termos da constante cosmológica na brana, ou seja, $r_c \sim 1/\sqrt{\Lambda}$. Isso implica diretamente em uma constante cosmológica positiva, que está de acordo com as observações atuais. A gravidade 4D pode durar o tempo suficiente sobre a membrana, tanto quanto como uma constante cosmológica positiva pode ser tomada muito pequena.

4.2.2 Modelo II: Branas BPS

Nesta seção vamos ampliar os resultados obtidos até aqui, partindo da teoria descrita pelo superpotencial (4.54), cujos resultados chamaremos de modelo II. Não utilizaremos nenhum ansatz e as soluções obtidas aqui serão fruto da manipulação direta dos vínculos da teoria e dos seus parâmetros associados. A órbita que resolve os vínculos (4.56a)–(4.58) é

$$\phi_2 = \frac{b_2 \phi_1}{b_1}. \quad (4.75)$$

No caso especial em que, $Z = W$, $\alpha = -\beta$, $b_1^2 = \frac{2b_2^2}{3b_2^2 - 2}$,

$$\alpha = -\frac{1}{3} \frac{[(6b_1^2 - 3b_2^2) - 4](\Lambda\gamma + 1)}{\Lambda(2b_1^2 + b_2^2)}, \quad \text{e} \quad \gamma = -\frac{(6b_2^2 - 3)b_1^2 + 2b_2^2(-2 + 3b_2^2)}{\Lambda[(6b_2^2 + 1)b^2 + 2b_2^2(3b_2^2 + 2)]}.$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

A partir de (3.61), obtemos os seguintes potenciais escalares

$$V(\phi) = -\frac{b_3^2(9b_2^4 + 3b_2^2 - 26)}{3(b_2^2 + 1)^2} e^{\frac{3\sqrt{2}b_2^3}{\sqrt{-2+3b_2^2}}\phi(y)}, \quad V(\chi) = -\frac{b_3^2(9b_2^4 + 3b_2^2 - 26)}{3(b_2^2 + 1)^2} e^{\frac{6b_2^3}{-2+3b_2^2}\chi(y)}. \quad (4.76)$$

Obtemos os campos escalares reais, ϕ e χ , usando (3.59) e (3.60)

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{\sqrt{2(-2+3b_2^2)}}{3b_2^2} \ln\left(\frac{b_2^2+1}{4b_3b_2^2(C_1+y)}\right), \\ \chi(y) &= \frac{(-2+3b_2^2)}{b_2^3} \ln\left(\frac{b_2^2+1}{4b_3b_2^2(C_1+y)}\right), \quad b_3(C_1+y) > 0; \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{\sqrt{2(-2+3b_2^2)}}{3b_2^2} \ln\left(\frac{b_2^2+1}{4b_3b_2^2(C_1-y)}\right), \\ \chi(y) &= \frac{(-2+3b_2^2)}{b_2^3} \ln\left(\frac{b_2^2+1}{4b_3b_2^2(C_1-y)}\right), \quad b_3(C_1-y) > 0; \end{aligned} \quad (4.78)$$

desde que $b_2^2 > 2/3$, e o fator de deformação usando (3.63)

$$\begin{aligned} A(y) &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3b_2^2-4}{9b_2^4(C_1+y)^2\Lambda}\right), \\ A(y) &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3b_2^2-4}{9b_2^4(C_1-y)^2\Lambda}\right), \quad (3b_2^2-4)/\Lambda > 0; \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde C_1 é uma constante de integração e $b_3 > 0$ é o parâmetro de acoplamento do dilaton à teoria. Como cada uma dessas soluções obtidas satisfazem o conjunto de equações de primeira e segunda ordem, podemos supor que os campos obtidos nesta seção abragem todo o espaço, podendo ser incorporados na formas gerais para o fator de deformação

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3b_2^2-4}{9b_2^4(C_1+|y|)^2\Lambda}\right), \quad (3b_2^2-4)/\Lambda > 0; \quad (4.80)$$

e para os kinks

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{\sqrt{2(-2+3b_2^2)}}{3b_2^2} \ln\left(\frac{b_2^2+1}{4b_3b_2^2(C_1+|y|)}\right), \\ \chi(y) &= \frac{(-2+3b_2^2)}{b_2^3} \ln\left(\frac{b_2^2+1}{4b_3b_2^2(C_1+|y|)}\right), \quad b_3(C_1+|y|) > 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

Soluções BPS, com o formato mostrado na equação (4.81), que independem da constante cosmológica, podem ser verificadas em Bulks de *branas planas dilatônicas*. Realizando uma mudança de variável (4.50), que torna a métrica (4.43) conformalmente plana, obtemos

$$|z| = C_1 e^{C_2} \ln \left(1 + \frac{|y|}{C_1} \right) \Rightarrow |y| = C_1 \left(e^{\frac{|z| e^{-C_2}}{C_1}} - 1 \right), \quad (4.82)$$

nós temos agora a forma reescrita

$$A(z) = C_2 + \frac{1}{3} |z| \left(\frac{4 - 3 b_2^2}{b_2^4 C_1^4 \Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.83)$$

onde C_1 é uma constante de integração e $C_2 = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4 - 3 b_2^2}{9 b_2^4 C_1^4 \Lambda} \right)$. Fazendo uso das equações (4.52) e (4.53) encontramos a equação tipo Schroedinger que governa os modos massivos da brana em estudo

$$-\frac{d^2}{dz^2} \psi_m(z) + \sqrt{4 \kappa_2^2 + 9 \Lambda} \delta(z) \psi_m(z) = (m^2 + \kappa_2^2) \psi_m(z). \quad (4.84)$$

Mais uma vez temos um problema de Schroedinger para uma barreira potencial delta modificada, onde m^2 é a massa 4D que corresponde aos modos de Kaluza-Klein e $\kappa_2^2 = -\frac{9}{4} \Lambda + \frac{4 - 3 b_2^2}{4 (b_2^4 C_1^4 \Lambda)}$. Estes modos KK estão determinadados em função dos estados de espalhamento, que dependem da magnitude dos coeficientes, de transmissão (T) ou de reflexão (R). A condição de contorno em $z = 0$, para o conjunto de funções de onda na forma geral, para os estados espalhados (4.67), é

$$\left[\frac{d}{dz} \psi_m(z) \right]_{z=0} - \sqrt{4 \kappa_2^2 + 9 \Lambda} \psi_m(z) = 0 \quad (4.85)$$

com o número de onda dado por $\kappa^2 = m^2 + \kappa_2^2$. Então, a densidade de probabilidade assume a forma simplificada

$$|\psi(0)|^2 = |T|^2 = \frac{m^2 + \kappa_2^2}{m^2 + \frac{9}{4} \Lambda}. \quad (4.86)$$

Este problema difere do desenvolvido na seção anterior por apresentar um estado ligado único dado por

$$\psi_0(z) = \sqrt{\kappa_2} e^{-\kappa_2 |z|} \quad (4.87)$$

4.2. GRAVIDADE 4D EM BRANAS DILATÔNICAS CURVAS

e as correções do potencial Newtoniano podem ser encontradas totalmente com (4.34). Então, nossa análise estará completa com a resolução da integral

$$\delta V(r) = \frac{M_5^{-3}}{r} \int_{\frac{1}{r_c}}^{\infty} dm e^{-mr} |T|^2. \quad (4.88)$$

No limite em que $r_c \rightarrow \infty$, construímos a primeira forma aproximada para a correção do potencial

$$\delta V(r) \sim \frac{M_5^{-3}}{r} \left[\frac{e^{-\frac{r}{r_c}}}{r} + f(\kappa_2) \left(\sin\left(\frac{r}{r_c}\right) \text{Ci}\left(\frac{r}{r_c}\right) - \cos\left(\frac{r}{r_c}\right) \text{Si}\left(\frac{r}{r_c}\right) \right) \right], \quad (4.89)$$

onde usamos as formas assintóticas descritas na equação (4.70) sendo possível, assim, identificar a escala de crossover, $r_c = 2/3 \sqrt{\Lambda}$. No limite de curtas distâncias, quando temos $r/r_c \ll 1$, de acordo com a definição (4.34), nós obtemos

$$V(r) \sim \frac{\kappa_2}{M_5^3 r} + \frac{f(\kappa_2)}{M_5^3 r} \left(\frac{r}{r_c} \left(\gamma_E + \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) \right) - \frac{r}{r_c} + \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(r^2) \right), \quad r \ll r_c, \quad (4.90)$$

onde $f(\kappa_2) = \frac{3}{2} \sqrt{\Lambda} - \frac{2}{3} \frac{\kappa_2^2}{\sqrt{\Lambda}}$. Como esperávamos, à curtas distâncias o potencial tem a escala correta de Newton em quatro dimensões, $1/r$, que é subsequentemente modificada pelo termo de repulsão logarítmica em (4.90). Finalmente, para grandes distâncias, i.e., $r/r_c \gg 1$, o potencial mostrado na Eq. (4.89) nos dá

$$V(r) \sim \frac{\kappa_2}{M_5^3 r} + \left(\frac{2(9\Lambda - 2\kappa_2^2)}{9\Lambda} \right) \frac{1}{M_5^3 r^2} \sim \frac{1}{r^2}, \quad r \gg r_c; \quad (4.91)$$

que está de acordo com as leis da gravidade 5D [54, 55]. Assim, como verificado na seção anterior, temos que o comportamento da gravidade no cenário de branas curvas dilatônicas não-BPS, de fato, está relacionado com o comprimento de Hubble, dado em termos da constante cosmológica na brana, ou seja, $r_c \sim 1/\sqrt{\Lambda}$.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho de tese, realizamos um estudo sobre localização de gravidade que foca um cenário de uma única dimensão extra não compacta dentro do contexto de supergravidade e teoria das cordas. Nosso estudo, inspirado em trabalhos já consagrados na literatura sobre o tema, apresenta novos e relevantes resultados que enriquecem bastante a busca por novos resultados da física, nos ramos da gravitação e teoria de campos. As cordas cósmicas são defeitos topológicos que surgem devido à quebra espontânea de simetria em vários modelos e teorias, incluindo a teoria de campos, que visam descrever o modelo padrão das interações elementares. Assume-se que estas interações se unificam em uma escala de alta energia, chamada escala de grande unificação, que é da ordem de 10^{16} GeV. O segundo capítulo mostra um breve estudo sobre alguns dos principais modelos de mundo-brana, idealizados dentro das propostas de unificação, onde foi dada uma maior ênfase ao modelo RS devido à sua importância no desenvolvimento da nossa contribuição científica, tanto pela forma como seus resultados são construídos quanto pelo seu aspecto didático. Trata-se de um modelo de enorme interesse na física de altas energias que, desde a sua concepção, revelou-se uma ferramenta fecunda para explorar a física no universo das dimensões extras. Exploramos esta possibilidade de como uma hierarquia exponencial, entre a escala de gravidade e a escala fraca, pode ser gerada naturalmente, e como a gravidade 4D padrão emerge deste modelo no limite newtoniano através das equações diferenciais resultantes da equação de Einstein para

a métrica linearizada. O estudo das flutuações resulta em uma equação do tipo Schroedinger a partir das perturbações da métrica Ansatz, introduzida no modelo RS.

Soluções das equações de campo ao estilo da supergravidade, fundamentadas em um potencial escalar especial, $V(\phi)$, podem ser verificados em [82, 83]. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho de tese, pudemos verificar que se o potencial do campo escalar toma uma forma semelhante ao da supergravidade, ficando claro que trabalhamos considerando apenas o setor bosônico da teoria, as equações de campo podem ser reduzidas a um conjunto de equações de primeira ordem, as quais podem ser resolvidas com facilidade relativa.

Ainda dentro do tema mundo-brana, fizemos um longo estudo sobre cenários de descritos por um espaço-tempo 5D, que envolvem uma geometria deformada que apresenta uma única dimensão infinitamente extensa, modelados por campos escalares reais com dinâmica padrão. No Capítulo 3, foi utilizado um potencial em função campo escalar para inferir como o fator de deformação depende da dimensão extra e reproduzimos muitos dos resultados já conhecidos. Apresentamos a construção de novos modelos com base em duas novas funções do campo escalar, $W = W(\phi)$, e a função auxiliar $Z = Z(\phi)$, dentro dos cenários que envolvem branas planas e curvas. Mostramos, com o máximo de detalhes possível, o processo de formação de branas planas assimétricas e branas curvas dilatônicas a partir do conjunto de equações de primeira ordem que emerge do trato das equações de Einstein e de movimento. Graças a uma mudança de parâmetros nestes dois modelos, foi possível inseri-los no contexto de supergravidade, tal como é visto no Capítulo 4. Este capítulo é referente à nossa contribuição científica onde apresentamos um estudo sobre a localização de gravidade 4D nas proximidades de branas.

Comparando nossos resultados com o cenário RS, neste a gravidade 5D é acoplada a uma constante cosmológica negativa e uma 3-brana é originada por uma função delta e a solução nesta configuração simétrica é tal que é dada em termos de duas cópias de espaços AdS_5 , ao

longo da 3-brana. Embora que nesta configuração a quinta dimensão é infinita, o volume do espaço 5D é finito pois a geometria é deformada. Como consequência, isto permite que haja um modo zero gráviton, que é responsável pela gravidade 4D na brana. Entretanto, isto não é plenamente verdadeiro em espaços cujo volume diverge, porque nenhum modo de zero emerge mais. Este resultado foi mostrado pela primeira vez por Gregory-Rubakov-Sibiryakov (o que chamamos de modelo GRS) e Dvali-Gabadadze-Porrati (modelo DGP). A consequência de tal configuração é uma alternativa para que a gravidade 4D, metaestável na 3-brana, surja devido aos grandes modos gravitacionais. Os modos massivos podem durar o tempo suficiente, antes de escapar da 3-brana para produzir gravidade 4D dentro de uma escala suficientemente grande - a escala de crossover. Obtemos resultados semelhantes, dentro do nosso estudo da localização de gravidade 4D em mundo-brana no contexto de supergravidade, e isso gera grandes expectativas quanto ao modelo DGP, do ponto de vista cosmológico.

Existem indícios de que na compreensão da aceleração cósmica pode haver uma explicação dessa física nova e fundamental, envolvendo dimensões extras. Isso nos motiva a seguir o programa de exploração da cosmologia como uma ferramenta para entender a física das escalas imensas de energia (a física do *infrared*). No entanto, ao contrário de teorias populares de mundo-brana anteriores à idealização deste modelo, a dimensão extra apresentada no modelo DGP é astrofisicamente grande e plana, quando comparada com a física de escala de partículas, ao mesmo que patologicamente pequena em comparação com aquelas que observamos. Os modelos de mundo-brana fornecem uma vasta gama de possibilidades para sondagem da geometria e dinâmica do campo gravitacional e sua interação com a matéria [81]. Nesses aspectos, o modelo DGP destaca-se com um cenário onde a gravidade é alterada à distâncias imensas pelo vazamento extremamente lento de gravidade para fora da nossa 3-brana, que representa o universo perceptível aos nossos sentidos. Tendo sido pioneira no paradigma da auto-aceleração, a gravidade DGP em mundo-brana continua a ser uma das principais candidatas para o entendimento da gravidade modificada em distâncias extremas, no entanto,

ainda há muito trabalho a ser feito para compreender as suas consequências de longo alcance.

Neste cenário, o Bulk é considerado vazio, exceto pela presença de uma constante cosmológica. Os campos de matéria sobre a brana são considerados responsáveis pela sua evolução e o ramo auto-acelerado do modelo DGP explica o tempo final sem recorrer à energia escura ou outros elementos misteriosos da cosmologia. Mesmo o ramo normal do modelo DGP tem o potencial para realizar uma fase fantasma eficaz via rastreo dinâmico da constante cosmológica na brana [84, 85]. Uma visão detalhada de como a cosmologia surge neste modelo, incluindo o surgimento da fase de auto-acelerada pode ser vista em [55, 86, 87]. Ao mesmo tempo, uma imagem geométrica da forma como tais cosmologias evoluem se apresenta na perspectiva dos “observadores” no nosso universo, bem como dos observadores hipotéticos existentes no espaço de maior massa.

Em [88], foi considerado os efeitos do campo escalar que vive no Bulk, sobre a dinâmica da brana. Então, as equações de Einstein eficazes na brana, com uma tensão zero, e sua consequência na cosmologia de mundo-brana podem ser estudadas. É possível demonstrar que um modelo de campos escalares no Bulk pode ser usado para obter o tipo de cosmologia padrão de Friedmann sem a introdução de uma tensão ou constante cosmológica. As condições de aceleração para um universo dominado pelo campo escalar no Bulk é algo que também vale a pena ser examinado. Pelo fato do modelo DGP, com um Bulk de campo escalar, possuir uma brana com tensão zero e o tamanho infinito da dimensão extra, estamos interessados nas correspondentes soluções cosmológicas, como pano de fundo para futuros trabalhos.

A cosmologia do tipo Friedmann pode ser obtida a partir do modelo DGP em mundo-brana, sob condições adequadas, sem campo de matéria na brana. Mudando-se a escala do campo escalar do Bulk no modelo DGP. Espera-se que o ínflaton seja mimetizado na brana e isso garante que a cosmologia padrão possa ser recuperada. A partir de uma ação 5D, inspirada no modelo DGP em mundo-brana com um Bulk de campo escalar canônico, é possível encontrar as equações de movimento do Bulk, as condições de contorno e as

equações de Gauss-Codacci. Então, usando essas equações, gera-se a equação de conservação energia–momento eficaz na brana. ([82, 89, 90, 91, 92, 93]).

Em especial, na referência [83] encontramos muita motivação para o estudo da configuração do modelo DGP. Neste, uma extensão do cenário DGP, que na maior parte não é vazio e contém um campo escalar canônico ou *fantasma*. Como o ramo auto-acelerado do modelo DGP tem instabilidade na forma de campos fantasmas, o estudo ficou restrito para o ramo normal do modelo DGP. As equações de movimento do Bulk estão derivadas e algumas classes especiais de soluções são apresentadas bem como a evolução da brana, quando o potencial do campo escalar toma uma forma semelhante ao potencial da supergravidade. Apresenta alguns exemplos bastante significativos, juntamente com a análise numérica do espaço de parâmetros do modelo para cada um dos casos.

Em síntese, o campo escalar do Bulk, na configuração DGP, ainda não foi estudado ao estilo de análise da supergravidade. É também visível a semelhança na forma dos superpotenciais trabalhados na literatura com os desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4 desta tese. Vemos a possibilidade de encontrar outros aspectos semelhantes dos nossos modelos de campos escalares com o modelo DGP, no que concerne ao ramo da cosmologia e gravitação, que vão além do comportamento característico da gravidade de acordo com a escala de crossover, como já foi verificado. Temos esperança que outros resultados relevantes advirão dessa nova linha de investigação.

Bibliografia

- [1] T. Kaluza, “*Zum Unitätsproblem in der Physik*”, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 966-972, 1921.
- [2] O. Klein, “*Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*”, Zeitschrift für Physik, **37**, **12**, 895-906, 1926.
- [3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “*The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*”, Phys Lett **B**, 429, **3-4**, 263-272, 1998. Doi: 10.1016/S0370-2693(98)00466-3, hep-ph/9803315v1.
- [4] I. Antoniadis, C. Bachas, D. Lewellen, and T. Tomaras, “*On supersymmetry breaking in superstrings*”, Phys. Lett. **B**, 207, **4**, 441-446, 1988.
- [5] P. Horava and E. Witten, “*Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary*”, Nucl Phys **B**, 475, 1-2, 94-114, 1996, doi: 10.1016/0550-3213(96)00308-2, hep-th/9603142.
- [6] P. Horava and E. Witten, “*Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions*”, Nucl Phys **B**, 460, **3**, 506-524, 1996, doi: 10.1016/0550-3213(95)00621-4, hep-th/9510209.
- [7] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “*Do we live inside a domain wall?*”, Phys. Lett. **B**, 125, 2-3, 136-138, 1983, doi: 10.1016/0370-2693(83)91253-4.

BIBLIOGRAFIA

- [8] K. Akama, “*An early proposal of brane world*”, Lecture Notes in Physics, 176, 267-271, 1982, hep-th/0001113.
- [9] G. R. Dvali and M. A. Shiffman, “*Understanding Gravity: Some Extra-Dimensional Perspectives*”, Phys. Lett. **B**, 407, 3-4, 64-69, 1997, doi: 10.5402/2011/131473, arXiv:gr-qc/0605152.
- [10] J. Polchinski, “*TASI Lectures on D-Branes*”, Phys. Rev. Lett, **75**, 26, 4724- 4727, 1995, hep-th/9611050.
- [11] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “*New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*”, Phys. Lett. **B**, 436, 3-4, 257-263, 1998, doi: 10.1016/S0370-2693(98)00860-0, hep-ph/9804398.
- [12] B. Zwiebach, “*A first course in string theory*”, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2004.
- [13] Adalto R. Gomes dos S. Filho, “*Estrutura interna e localização de gravidade em branas*”, tese de doutorado (2005).
- [14] L. Randall and R. Sundrum, “*An Alternative to Compactification*”, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999), doi: 10.1103/PhysRevLett.83.4690, hep-th/9906064.
- [15] W. Israel, Nuovo Cim. B **44S10**, 1 (1966) [Erratum-ibid. **B** 48, 463 (1967 NUCIA, **B** 44,1.1966)].
- [16] L. Randall and R. Sundrum, “*A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*”, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370, doi: 10.1103/PhysRevLett.83.3370, hep-ph/9905221.
- [17] J. Lykken and L. Randall, “*The Shape of Gravity*”, JHEP 0006 (2000) 014, doi: 10.1088/1126-6708/2000/06/014, hep-th/ 9908076.
- [18] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.

BIBLIOGRAFIA

- [19] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, and R. Menezes, “*First-order formalism and dark energy*”, Phys. Lett. B **633**, 415 (2006), doi: 10.1016/j.physletb.2005.12.031, astro-ph/0512197.
- [20] D. Bazeia, F.A. Brito, L. Losano, “*Scalar fields, bent branes, and RG flow*”, JHEP 0611 (2006) 064, doi: 10.1088/1126-6708/2006/11/064, hep-th/0610233.
- [21] K. Skenderis and P.K. Townsend, “*Gravitational Stability and Renormalization-Group Flow*”, Phys. Lett. B **468**, 46 (1999), doi: 10.1016/S0370-2693(99)01212-5, hep-th/9909070.
- [22] N. Kaloper, “*Bent Domain Walls as Braneworlds*”, Phys. Rev. D **60**, 123506 (1999), doi: 10.1103/PhysRevD.60.123506, hep-th/9905210.
- [23] A. Karch, L. Randall, “*Locally Localized Gravity*”, JHEP **0105**, 008 (2001), doi: 10.1088/1126-6708/2001/05/008, hep-th/0011156.
- [24] D. Bazeia, C. Furtado, and A.R. Gomes, “*Multi-sine-Gordon Models*”, JCAP **0402**, 002 (2004), doi: 10.1140/epjc/s10052-011-1767-2, hep-th/11040376.
- [25] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, and A. Karch, Phys. “*Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity*” Rev. D **62**, 046008 (2000), doi: 10.1103/PhysRevD.62.046008, hep-th/9909134.
- [26] M. Gremm, “*Four-dimensional gravity on a thick domain wall*”, Phys. Lett. B **478**, 434 (2000), doi: 10.1016/S0370-2693(00)00303-8, hep-th/9912060.
- [27] M. Gremm, “*Thick domain walls and singular spaces*”, Phys. Rev. D **62**, 044017 (2000), doi: 10.1103/PhysRevD.62.044017, hep-th/0002040.
- [28] I. Cho and A. Vilenkin, “*Vacuum defects without a vacuum*”, Phys. Rev. D **59**, 021701(R) (1999), doi: 10.1103/PhysRevD.59.021701, arXiv:hep-th/9808090.

BIBLIOGRAFIA

- [29] I. Cho and A. Vilenkin, “*Gravitational field of vacuumless defects*”, Phys. Rev. D **59**, 063510 (1999), doi: 10.1103/PhysRevD.59.063510, arXiv:gr-qc/9810049.
- [30] D. Bazeia, “*Topological solitons in a vacuumless system*”, Phys. Rev. D **60**, 067705 (1999), doi: 10.1103/PhysRevD.60.067705, hep-th/9905184.
- [31] A. Padilla, “*Cosmic acceleration from asymmetric branes*”, Class. Quant. Grav. **22**, 681 (2005), doi: 10.1088/0264-9381/22/4/003, hep-th/0406157.
- [32] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja, A. Ramirez, “*Localizing gravity on exotic thick 3-branes*”, Phys. Rev. D **70**, 104029 (2004), doi: 10.1103/PhysRevD.70.104029, hep-th/0404083.
- [33] J.D. Edelstein, M.L. Trobo, F.A. Brito, and D. Bazeia, “*Kinks Inside Supersymmetric Domain Ribbons*”, Phys. Rev. D **57**, 7561 (1998), doi: 10.1103/PhysRevD.57.7561, hep-th/9707016.
- [34] A. Melfo, N. Pantoja, A. Skrzewski, “*Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry*”, Phys. Rev. D **67**, 105003 (2003), doi: 10.1103/PhysRevD.67.105003, arXiv:gr-qc/0211081.
- [35] D. Bazeia, A.R. Gomes, “*Bloch Brane*”, JHEP **0405**, 012 (2004), doi: 10.1088/1126-6708/2004/05/012, hep-th/0403141.
- [36] M.D. Schwartz, “*The Emergence of Localized Gravity*”, Phys. Lett. B **502**, 223 (2001), doi: 10.1016/S0370-2693(01)00152-6, hep-th/0011177.
- [37] M. Cvetič, S. Griffies, S. J. Rey, “*Static Domain Walls in $N=1$ Supergravity*”, Nucl. Phys. B **381**, 301 (1992), doi: 10.1016/0550-3213(92)90649-V, hep-th/9201007.

BIBLIOGRAFIA

- [38] M. Cvetič, S. Griffies, H. H. Soleng, “*Local and global gravitational aspects of domain wall space-times*”, Phys. Rev. D **48**, 2613 (1993). Doi: 10.1103/PhysRevD.48.2613, arXiv:gr-qc/9306005.
- [39] M. Cvetič, H. H. Soleng, “*Supergravity Domain Walls*”, Phys. Rept. **282**, 159 (1997), doi: 10.1016/S0370-1573(96)00035-X, hep-th/9604090.
- [40] D. Bazeia, M.J. dos Santos, R.F. Ribeiro, “*Solitons in systems of coupled scalar fields*”, Phys. Lett. A **208**, 84 (1995), doi: 10.1016/0375-9601(95)00756-S, hep-th/0311265.
- [41] D.Z. Freedman, C. Núñez, M. Schnabl, and K. Skenderis, “*Fake Supergravity and Domain Wall Stability*”, Phys. Rev. D **69**, 104027 (2004), doi: 10.1103/PhysRevD.69.104027, hep-th/0312055.
- [42] A. Celi, A. Ceresole, G. Dall’Agata, A. Van Proeyen, M. Zagermann, “*On the fakeness of fake supergravity*”, Phys. Rev. D **71**, 045009 (2005), doi: 10.1103/PhysRevD.71.045009, hep-th/0410126.
- [43] V.I. Afonso, D. Bazeia and L. Losano, “*First-order formalism for bent brane*”, Phys. Lett. B **634**, 526 (2006). Doi: 10.1016/j.physletb.2006.02.017, hep-th/0601069.
- [44] M. Gogberashvili, “*Hierarchy problem in the shell-Universe model*”, Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 1635-1638, doi: 10.1142/S0218271802002992, hep-ph/9812296.
- [45] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, “*Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*”, Phys. Rev. D **62** (2000) 046008, doi: 10.1103/PhysRevD.62.046008, hep-th/9909134.
- [46] C. Csáki, J. Erlich, T.J. Hollowood, and Y. Shriman, “*Universal Aspects of Gravity Localized on Thick Branes*”, Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000), doi: 10.1016/S0550-3213(00)00271-6, hep-th/0001033.

BIBLIOGRAFIA

- [47] C. Csáki, J. Erlich, C. Grojean, and T.J. Hollowood, “*General Properties of the Self-tuning Domain Wall Approach to the Cosmological Constant Problem*”, Nucl. Phys. B **584**, 359 (2000). Doi: 10.1016/S0550-3213(00)00390-4, hep-th/0004133.
- [48] A. Miemiec, Fortsch. Phys. **49**, 747 (2001), “*A power law for the lowest eigenvalue in localized massive gravity*”, Fortsch.Phys. **49** (2001) 747-755, hep-th/0011160.
- [49] D. Bazeia, F.A. Brito, A.R. Gomes, “*Locally Localized Gravity and Geometric Transitions*”, JHEP **0411**, 070 (2004), doi: 10.1088/1126-6708/2004/11/070, hep-th/0411088.
- [50] R. Bao, M. Carena, J. Lykken, M. Park, and J. Santiago, Revamped Braneworld Gravity, Phys. Rev. D **73**, 064026 (2006), doi: 10.1103/PhysRevD.73.064026, hep-th/0511266.
- [51] D. Bazeia, F.A. Brito, J.R. Nascimento, “*Supergravity brane worlds and tachyon potentials*”, Phys. Rev. D **68** 085007 (2003), doi: 10.1103/PhysRevD.68.085007, hep-th/0306284.
- [52] F. A. Brito, F. F. Cruz and J. F. N. Oliveira, “*Accelerating universes driven by bulk particles*”, Phys. Rev. D **71** (2005) 083516, doi: 10.1103/PhysRevD.71.083516, hep-th/0502057.
- [53] G. Gabadadze, L. Grisa and Y. Shang, “*Resonance in Asymmetric Warped Geometry*”, JHEP 0608 (2006) 033, doi: 10.1088/1126-6708/2006/08/033, hep-th/0604218.
- [54] R. Gregory, V.A. Rubakov, and S.M. Sibiryakov, “*Opening up extra dimensions at ultra-large scales*”, Phys. Rev. Lett., **84** (2000) 5928, doi: 10.1103/PhysRevLett.84.5928, hep-th/0002072.
- [55] G.R. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, “*4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space*”, Phys. Lett. B **485** (2000) 208, doi: 10.1016/S0370-2693(00)00669-9, hep-th/0005016.

BIBLIOGRAFIA

- [56] R.C. Fonseca, F.A. Brito, L. Losano, “*4D gravity on a BPS brane in 5D AdS-Minkowski space*”, Phys. Lett. **B**, 27406 (2011), doi: 10.1016/j.physletb.2011.02.031, arXiv:1012.2349 [hep-th].
- [57] R.C. Fonseca, F.A. Brito, L. Losano, “*4D gravity on a non-BPS bent dilatonic brane*”, JCAP 1201:032, (2012), arXiv:1106.5719 [hep-th].
- [58] A. Wang, “*Thick de Sitter 3-Branes, Dynamic Black Holes and Localization of Gravity*”, Phys. Rev. D, **66** (2002) 024024.
- [59] N. Barbosa-Cendejas, A. Herrera-Aguilar, M.A. Reyes, C. Schubert, “*Mass gap for gravity localized on Weyl thick branes*”, Phys. Rev. D, **77** (2008) 126013.
- [60] Liu Y.-X., Yang K. and Zhong Y., “*de Sitter Thick Brane Solution in Weyl Geometry*”, JHEP, 1010 (2010) 069.
- [61] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972. M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook*, 1968.
- [62] W.D. Goldberger and M.B. Wise, “*Modulus Stabilization with Bulk Fields*”, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922 (1999), doi: 10.1103/PhysRevLett.83.4922, hep-ph/9907447.
- [63] K. Skenderis and P.K. Townsend, “*Gravitational Stability and Renormalization-Group Flow*”, Phys. Lett. B **468**, 46 (1999), doi: 10.1016/S0370-2693(99)01212-5, hep-th/9909070.
- [64] F.A. Brito, M. Cvetič, S.-C. Yoon, “*From a Thick to a Thin Supergravity Domain Wall*”, Phys. Rev. D **64** (2001) 064021, doi: 10.1103/PhysRevD.64.064021, hep-ph/0105010.
- [65] K. Skenderis and P.K. Townsend, “*Hidden supersymmetry of domain walls and cosmologies*”, Phys. Rev. Lett. **96**, 191301 (2006), doi: 10.1103/PhysRevLett.96.191301, hep-th/0602260.

BIBLIOGRAFIA

- [66] K. Skenderis and P.K. Townsend, *Hamilton-Jacobi for domain walls and cosmologies*, JHEP 9901 (1999) **3**, doi: 10.1088/1126-6708/1999/01/003, hep-th/0609056.
- [67] H.J. Boonstra, K. Skenderis, P.K. Townsend, “*The domain-wall/QFT correspondence*”, JHEP **9901**, 003 (1999), doi: 10.1088/1126-6708/1999/01/003, hep-th/9807137.
- [68] D.Z. Freedman, S.S. Gubser, K. Pilch, and N.P. Warner, “*Renormalization Group Flows from Holography–Supersymmetry and a c-Theorem*”, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 363 (1999), hep-th/9904017.
- [69] G. L. Cardoso, G. Dall’Agata, D. Lust, “*Curved BPS domain walls and RG flow in five dimensions*”, JHEP **0203**, 044 (2002), doi: 10.1088/1126-6708/2002/03/044, hep-th/0201270.
- [70] A. Wang, “*Thick de Sitter 3-Branes, Dynamic Black Holes and Localization of Gravity*”, Phys. Rev. D **66**, 024024 (2002), doi: 10.1103/PhysRevD.66.024024, hep-th/0201051.
- [71] K. Takahashi and T. Shiromizu, “*Asymmetric D-braneworld*”, Phys. Rev. D **70**, 103507 (2004), doi: 10.1103/PhysRevD.70.103507, hep-th/0408043.
- [72] R. Guerrero, R. Omar Rodriguez, and R. Torrealba, “*De-Sitter and double asymmetric brane worlds*”, Phys. Rev. D **72**, 124012 (2005), doi: 10.1103/PhysRevD.72.124012, hep-th/0510023.
- [73] J.M. Maldacena, “*The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*”, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998), doi: 10.1103/PhysRevD.72.124012, hep-th/9711200.
- [74] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov, “*Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory*”, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998); hep-th/9802109.

BIBLIOGRAFIA

- [75] E. Witten, “*Anti De Sitter Space And Holography*”, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998), hep-th/9802150.
- [76] R. Kallosh, A. Linde, “*Supersymmetry and the Brane World*”, JHEP **0002**, 005 (2000), doi: 10.1088/1126-6708/2000/02/005, hep-th/0001071.
- [77] M. Cvetič, “*Domain Wall World(s)*”, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 891 (2001), doi: 10.1103/PhysRevD.74.086001, hep-th/0012105.
- [78] H. Boschi-Filho, N.R.F. Braga, C.N. Ferreira, “*Heavy quark potential at finite temperature from gauge/string duality*”, Phys. Rev. D **74**:086001,2006, doi: 10.1103/PhysRevD.74.086001, hep-th/0607038.
- [79] C.P. Herzog, “*A holographic prediction of the deconfinement temperature*”, Phys. Rev. Lett. **98**:091601,2007, doi: 10.1103/PhysRevLett.98.091601, hep-th/0608151.
- [80] C. Csaki, *TASI Lectures on Extra Dimensions and Branes*, (2002), hep-ph/0404096.
- [81] R. Maartens, “*The universe as a brane*”, J. Phys. Conf. Series **33** (2006) 131, doi:10.1088/1742-6596/33/1/012.
- [82] S. C. Davis, “*Cosmological brane world solutions with bulk scalar fields*”, JHEP **0203** (2002) 054, doi: 10.1088/1126-6708/2002/03/054, hep-th/0106271.
- [83] Kourosch Nozari, M. Khamesian, N. Rashidi, “*Cosmological braneworld solutions with bulk scalar field in DGP setup*”, Astroparticle Phys. **35** (2012) 828, hep-th/1202.6204v1.
- [84] V. Sahni and Y. Shtanov, “*Braneworld models of dark energy*”, JCAP **0311** (2003) 014, doi: 10.1088/1475-7516/2003/11/014, astro-ph/0202346.
- [85] A. Lue and G. D. Starkman, “*How a brane cosmological constant can trick us into thinking that $w < -1$* ”, Phys. Rev. D **70** (2004) 101501, doi: 10.1103/PhysRevD.70.101501, astro-ph/0408246.

BIBLIOGRAFIA

- [86] Arthur Lue, “*The phenomenology of Dvali-Gabadadze-Porrati cosmologies*”, Phys. Rept. 423: 1-48,2006, DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.007, astro-ph/0510068.
- [87] C. Deffayet, “*Cosmology on a Brane in Minkowski Bulk*”, Phys. Lett. **B** 502 (2001) 199, doi: 10.1016/S0370-2693(01)00160-5, hep-th/0010186v2.
- [88] Rizwan ul Haq Ansari and P K Suresh, “*Bulk scalar field in DGP braneworld cosmology*”, JCAP 0709:021,2007, doi: 10.1088/1475-7516/2007/09/021
- [89] K. Skenderis and P. K. Townsend, “*Gravitational Stability and Renormalization-Group Flow*”, Phys. Lett. **B** 468 (1999) 46, doi: 10.1016/S0370-2693(99)01212-5, hep-th/9909070v2.
- [90] A. Chamblin and G. W. Gibbons, “*Supergravity on the Brane*”, Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 1090, doi: 10.1103/PhysRevLett.84.1090, hep-th/9909130.
- [91] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, “*Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*”, Phys. Rev. **D** 62 (2000) 046008, doi: 10.1103/PhysRevD.62.046008, hep-th/9909134.
- [92] C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean and T. Hollowood, “*General Properties of the Self-tuning Domain Wall Approach to the Cosmological Constant Problem*”, Nucl. Phys. **B** 584 (2000) 359, doi: 10.1016/S0550-3213(00)00390-4, hep-th/0004133.
- [93] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, “*Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*”, Phys. Lett. **B** 477 (2000) 285, doi: 10.1016/S0370-2693(00)00204-5, hep-th/9910219v2.
- [94] J. F. Vazquez-Poritz, “*Localized Massive Gravity from B Fields*”, hep-th/0101057v2.
- [95] J.M. Maldacena and J.G. Russo, “*Large N Limit of Non-Commutative Gauge Theories*”, JHEP 9909 (1999) 025, doi: 10.1088/1126-6708/1999/09/025, hep-th/9908134.

BIBLIOGRAFIA

- [96] A. Hashimoto and N. Itzhaki, “*Non-Commutative Yang-Mills and the AdS/CFT Correspondence*”, Phys. Lett. **B** 465 (1999) 142-147, doi: 10.1016/S0370-2693(99)01037-0, hep-th/9907166.
- [97] M. Alishahiha, Y. Oz and M.M. Sheikh-Jabbari, JHEP 9911 (1999) 007, “*Supergravity and Large N Noncommutative Field Theories*”, doi: 10.1088/1126-6708/1999/11/007.
- [98] M. Cvetič, H. Lu and C.N. Pope, “*Domain Walls with Localised Gravity and Domain-Wall/QFT Correspondence*”, Phys. Rev. D **63**:086004,2001, doi: 10.1103/PhysRevD.63.086004.

Apêndice A

Dedução das equações de Einstein

A.1 Equações de campo para a métrica não perturbada.

A.1.1 Variação do Determinante da Métrica

A formula de Jacobi, para diferenciação entre determinantes, nos dá:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

ou é possível transformar em um sistema de coordenadas, onde $g_{\mu\nu}$ é diagonal, para então se aplicar a regra do produto para se diferenciar os fatores da diagonal principal. Como resultado nós obtemos

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}), \quad (\text{A.2})$$

onde usamos a propriedade $g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ em (A.2), por decorrência da exigência de que o inverso variacional da matriz métrica $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ é $g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}$. Isso nos leva a concluir que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

A.1.2 Tensor energia–momento

Supondo que toda ação, da teoria em questão, seja dada pelo termo de Einstein-Hilbert mais um termo $\mathcal{L}_M$ que descreva qualquer campo de matéria que apareça na teoria. Seja

$$S = \int \left(\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{A.4})$$

A.1. EQUAÇÕES DE CAMPO PARA A MÉTRICA NÃO PERTURBADA.

O princípio de Hamilton, da mínima ação, indica que a variação destas ações com respeito à métrica inversa é nula, ou seja ,

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= \int \left(\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta\sqrt{-g}R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \\
&= \int \left[\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Uma vez que estas equação devem obedecer qualquer à qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$, isto implica que devemos ter

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{A.6}$$

que é a equação de movimento para o campo métrico. O lado direito desta equação é, por definição, proporcional ao Tensor de energia–momento,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M \tag{A.7}$$

A.1.3 Variações do escalar de Ricci e dos tensores de curvatura e de Ricci

Antes de obtermos as variações do escalar de Ricci é necessário antes encontrar a variação para o tensor de curvatura e a variação do tensor de Ricci. O tensor de curvatura é, por definição,

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\rho\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\beta_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\beta_{\rho\nu}. \tag{A.8}$$

Uma vez que o tensor de curvatura depende apenas da conexão de Levi-Civita, $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$, a variação do tensor de curvatura pode ser determinada como,

$$\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \delta \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \delta \Gamma^\mu_{\rho\nu} + \delta \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\beta_{\sigma\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \delta \Gamma^\beta_{\sigma\nu} - \delta \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\beta_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \delta \Gamma^\beta_{\rho\nu}. \tag{A.9}$$

Agora temos o valor $\delta \Gamma^\mu_{\sigma\nu}$, que é a diferença entre duas conexões. Como se trata de um tensor podemos desenvolvê-lo em termos de derivadas covariantes, isto é

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\mu_{\sigma\nu}) = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\sigma\nu} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \delta \Gamma^\beta_{\sigma\nu} - \Gamma^\beta_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^\mu_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\mu_{\sigma\beta}. \tag{A.10}$$

A.1. EQUAÇÕES DE CAMPO PARA A MÉTRICA NÃO PERTURBADA.

Então é possível reescrever a expressão (A.9) como

$$\delta R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \nabla_{\rho} (\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}) - \nabla_{\sigma} (\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}), \quad (\text{A.11})$$

tornando possível obter a variação do tensor de curvatura de Ricci, simplesmente pela contração dos dois índices da variação do tensor de curvatura,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\nu\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho} (\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\Gamma_{\rho\nu}^{\rho}). \quad (\text{A.12})$$

Por definição, o escalar de Ricci é dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.13})$$

e sua variação com respeito à métrica inversa $g^{\mu\nu}$ é

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} (\nabla_{\rho} (\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\Gamma_{\rho\nu}^{\rho})). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Graças a compatibilidade métrica da derivada convariante $\nabla_{\sigma} g^{\mu\nu} = 0$ temos

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) + \nabla_{\sigma} (g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\nu}^{\rho}). \quad (\text{A.15})$$

O último termo da equação (A.15), multiplicado por $\sqrt{-g}$, nos dá uma derivada total, uma vez que, $\sqrt{-g} \nabla_{\lambda} A^{\lambda} = \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} A^{\lambda})$ e, conseqüentemente, pelo teorema de Stokes, a variação do escalar de Ricci produzirá apenas um termo limite quando integrado. Sendo assim, a variação da métrica inversa $g^{\mu\nu}$ desaparecerá no infinito, e portanto, este termo não contribui para a variação da ação. Obtemos então o valor

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \quad (\text{A.16})$$

A.1.4 Equação de movimento

Com os resultados obtidos até aqui, pode-se inferir a equação de movimento para campos métricos, obtendo-se,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.17})$$

que é a equação de campo de Einstein com $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ e $R_{\mu\nu} = \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$.

A.2 Tensor de Einstein na métrica deformada RS

Seja a métrica:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \\ &= g_{MN}(y) dx^M dx^N, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde temos

$$g_{MN}(y) = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} + \delta_M^5 \delta_N^5. \quad (\text{A.19})$$

A métrica inversa é obtida por

$$g^{MN}(y) = e^{2A(y)} \eta^{\mu\nu} + \delta_5^M \delta_5^N. \quad (\text{A.20})$$

A.2.1 Os símbolos de Christoffel

Por definição

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2} g^{PR} (\partial_M g_{NR} + \partial_N g_{RM} - \partial_R g_{MN}) \quad (\text{A.21})$$

Uma vez que g_{MN} trata-se de uma função da única dimensão extra, apenas na componente $\mu\nu$, nós temos

$$\partial_L g_{MN} = \partial_5 g_{MN} = -\partial_5 g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.22})$$

e por consequência, apenas dois tipos de Símbolos de Christoffel não se anulam

$$\Gamma_{\mu\nu}^5 = \frac{1}{2} g^{5R} (-\partial_R g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} g^{55} (-\partial_5 g_{\mu\nu}) = A' e^{-2A} \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.23})$$

e

$$\Gamma_{\mu 5}^5 = \frac{1}{2} g^{\nu R} (\partial_5 g_{R\mu}) = \frac{1}{2} e^{2A} \eta^{\nu\rho} \left(-2 A' e^{-2A} \eta_{\rho\nu} \right) = -A' \delta_\mu^\nu. \quad (\text{A.24})$$

Por definição, temos o tensor de Ricci

$$R_{MN} = \partial_P \Gamma_{MN}^P - \partial_N \Gamma_{MP}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{MN}^Q - \Gamma_{NQ}^P \Gamma_{MP}^Q. \quad (\text{A.25})$$

A.2. TENSOR DE EINSTEIN NA MÉTRICA DEFORMADA RS

As componentes $\mu\nu$ que não se anulam serão

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_5 \Gamma_{\mu\nu}^5 + \Gamma_{\sigma 5}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^5 - \Gamma_{\nu 5}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^5 - \Gamma_{\nu\sigma}^5 \Gamma_{\mu 5}^\sigma \\
&= (A'' - 2A'^2) e^{-2A} \eta_{\mu\nu} - 4A'^2 e^{-2A} \eta_{\mu\nu} \\
&= (A'' - 4A'^2) g_{\mu\nu}; \\
R_{\mu 5} &= 0; \\
R_{55} &= -\partial_5 \Gamma_{5\sigma}^\sigma - \Gamma_{5\rho}^\sigma \Gamma_{5\sigma}^\rho \\
&= 4A'' - 4A'^2.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

A.2.2 Escalar de Ricci

$$\begin{aligned}
R &= g^{MN} R_{MN} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{55} R_{55} \\
&= 4(A'' - 4A'^2) + 4A'' - 4A'^2 \\
&= 8A'' - 20A'^2.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Por fim, temos o tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = (6A'^2 - 3A'') g_{\mu\nu} \\
G_{55} &= R_{55} - \frac{1}{2} g_{55} R = 6A'^2.
\end{aligned} \tag{A.28}$$

A.2.3 Equações de Einstein linearizadas

Admitindo que g_{MN} é uma transformação conformal de uma outra métrica $\tilde{g}_{MN}$, tal que

$$g_{MN} = e^{-2A} \tilde{g}_{MN}, \tag{A.29}$$

então os respectivos tensores de Einstein são relacionados por

$$\begin{aligned}
G_{MN}(g_{MN}) = \tilde{G}_{MN}(\tilde{g}_{MN}) &+ (n-2) \left[\tilde{\nabla}_M A \tilde{\nabla}_N A + \tilde{\nabla}_M \tilde{\nabla}_N A \right] \\
&- (n-2) \tilde{g}_{MN} \left(\tilde{\nabla}_R \tilde{\nabla}^R A - \frac{(n-3)}{2} \tilde{\nabla}_R A \tilde{\nabla}^R A \right), \tag{A.30}
\end{aligned}$$

A.2. TENSOR DE EINSTEIN NA MÉTRICA DEFORMADA RS

onde n é o número de dimensões. No nosso caso a métrica perturbada tem a forma

$$g_{MN} = e^{-2A} (\eta_{MN} + h_{MN}) \quad (\text{A.31})$$

e $n = 5$ (que implica em 4 dimensões espaciais e 1 dimensão de tempo), então a expressão (A.30), levando-se em conta os símbolos de Christoffel no interior das derivadas covariantes, nos dá:

$$\begin{aligned} G_{MN} = \tilde{G}_{MN} &+ 3 [\partial_M A \partial_N A + \partial_M \partial_N A - \tilde{\Gamma}_{MN}^R \partial^R A] \\ &- 3 \tilde{g}_{MN} \left(\partial_R \partial^R A - \tilde{\Gamma}_{RS}^R \partial^S A - \partial_R A \partial^R A \right). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Até a primeira ordem, temos os símbolos de Christoffel

$$\tilde{\Gamma}_{MN}^R = \frac{1}{2} (\partial_M h_N^R + \partial_N h_M^R - \partial^R h_{MN}), \quad (\text{A.33})$$

onde nós usamos o tensor métrico $\eta^{\mu\nu}$ para elevar os índices. Ao longo deste trabalho de tese foi utilizado o gauge transversal e de traço nulo, no qual não há componente com alguma dimensão extra, tal que

$$h_{M5} = 0, \quad \partial_\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0. \quad (\text{A.34})$$

Verifica-se que essas 10 condições restringem drasticamente, e convenientemente, o número de graus de liberdade do tensor simétrico h_{MN} , (5 X 5), de 15 para 5, para uma partícula de spin-2 (para maiores detalhes temos as referências [80, 12], seções 2.3 e 10.6, respectivamente). Com este gauge fixo, o segundo Símbolo de Christoffel na equação (A.32) se anula, enquanto que o primeiro Símbolo sofre uma redução para $-\partial^5 h_{MN}/2$, pela contração com $\partial_R A$, cuja componente que não se anula é $\partial_5 A$. Por fim, a expressão para o tensor de Einstein para flutuações em torno da métrica plana é dada por

$$\tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{MN}, \quad (\text{A.35})$$

tal qual pode ser conferido na referência [18].