

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE
CONSEQUÊNCIAS FÍSICAS DE CORDAS
CÓSMICAS E DO EFEITO CASIMIR EM
CONTEXTO COSMOLÓGICO

HERONDY FRANCISCO SANTANA MOTA

JOÃO PESSOA

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE
CONSEQUÊNCIAS FÍSICAS DE CORDAS
CÓSMICAS E DO EFEITO CASIMIR EM
CONTEXTO COSMOLÓGICO

Tese realizada sob orientação do
Prof. Dr. Valdir B. Bezerra,
apresentada ao Departamento de
Física, em complementação aos re-
quisitos para obtenção do título de
Doutor em Física.

HERONDY FRANCISCO SANTANA MOTA

M917c Mota, Herondy Francisco Santana.
Contribuições ao estudo de consequências físicas de
cordas cósmicas e do efeito Casimir em contexto cosmológico /
Herondy Francisco Santana Mota.-- João Pessoa, 2013.
160f. : il.
Orientador: Valdir B. Bezerra
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Cordas cósmicas. 3. Partículas de Higgs.
4. Tensão da corda. 5. Efeito Casimir. 6. Interação de Casimir-
Polder.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



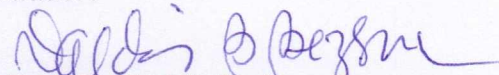
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Doutorado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 29 de abril de 2013, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Herondy Francisco Santana Mota** na defesa de sua tese intitulada "*Contribuições ao estudo de consequências físicas de cordas cósmicas e do efeito Casimir em contexto cosmológico*".

João Pessoa, 29 de abril de 2013

Orientador:


Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(DF/UFPB)

1º Examinador:


Prof. Dr. Fernando Moraes
(DF/UFPB)

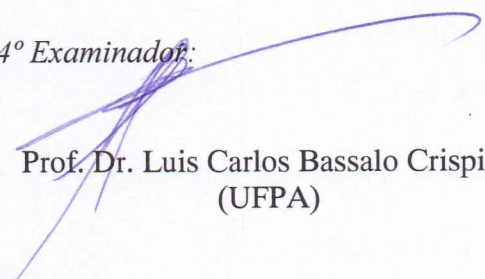
2º Examinador:


Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer
(UFPR)

3º Examinador:


Prof. Dr. Edmundo M. do Monte
(DF/UFPB)

4º Examinador:


Prof. Dr. Luis Carlos Bassalo Crispino
(UFPA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus avós: Sebastião Gomes da Mota e Elizete Nogueira de Carvalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- À toda minha família, em especial à minha mãe, pai e irmã por todo apoio e incentivo.
- Ao meu orientador e amigo Valdir Barbosa Bezerra, pela paciência, incentivo, compreensão e por ter me proporcionado a oportunidade de trabalhar com três excelentes profissionais: Alexander Vilenkin, Vladimir Mostepanenko e Aram Saharian.
- Aos professores Drs. Vladimir Mostepanenko, Aram Saharian, Eugênio R. Bezerra de Mello e Carlos Augusto Romero Filho pela colaboração em parte deste trabalho.
- Ao professor Dr. Alexander Vilenkin por ter aceitado me orientar durante minha visita à Universidade de Tufts em 2012 e por ter me concedido a chance de evoluir profissionalmente, interagindo com seu grupo de pesquisa.
- À todos os outros professores que contribuíram para minha formação.
- Aos amigos Luis Paulo Machado, Paulo Rogério Dias, Eduardo Bragança, Felipe Ferreira Freitas, Rubens Silva e seus filhos Erick e Larissa Silva, e todos os outros que de alguma forma participaram do meu círculo de amizades e proporcionaram momentos de lazer inesquecíveis durante os 5 anos em que morei em João Pessoa.
- Ao meu grande amigo Hsiang Huang por ter me ajudado a praticar e melhorar meu inglês durante o período em que estive em Boston e pelos momentos de descontração.
- À CAPES pelo suporte financeiro durante meu doutorado.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro no ano de 2012, período no qual estive na Universidade de Tufts nos EUA.
- Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba pelo acolhimento e suporte para realização deste trabalho.
- Aos funcionários do departamento de física, em especial seu Mariano pelos seus serviços e pela amizade.
- Aos membros da banca por terem aceitado avaliar este trabalho.
- E finalmente, à todos os outros que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

RESUMO

Na presente tese, consideramos a emissão de partículas de Higgs por cordas cósmicas com condensado. Desta forma, são obtidas restrições na tensão da corda $G\mu$, considerando os efeitos da emissão de partículas de Higgs na formação de elementos leves durante o período da fotodissociação ($10^8 s \lesssim t \lesssim 10^{12} s$) e também sua contribuição para os raios gama que são observados no universo. As restrições são obtidas como função da constante de acoplamento κ à corda cósmica. Os resultados obtidos mostram que a produção de partículas de Higgs por laços de cordas cósmicas é descartada, a menos que $G\mu \sim 10^{-19}$.

Outro efeito que consideramos aqui é o efeito Casimir térmico. Neste contexto, calculamos a energia interna total, as densidades totais de energia e pressão e a energia livre para os campos do neutrino e eletromagnético, nos modelos cosmológicos de Einstein e Friedmann. As contribuições de Casimir para todas essas quantidades são destacadas. As expressões assintóticas para a energia interna total, energia livre e para as contribuições de Casimir associadas as mesmas são obtidas nos casos limites de baixas e altas temperaturas. É mostrado que o campo do neutrino não possui um limite clássico a altas temperaturas. Por outro lado, para o campo eletromagnético, demonstramos que a energia interna total tem uma contribuição de origem clássica e a energia interna de Casimir tende para o limite clássico a altas temperaturas. A energia livre de Casimir possui termos logarítmico e linear com relação à temperatura. As entropias total e de Casimir para os campos do neutrino e eletromagnético a baixas temperaturas são também calculadas, com a terceira lei da termodinâmica sendo obedecida.

Adicionalmente ao efeito Casimir térmico, também estudamos o efeito Casimir-Polder. Neste caso, calculamos o potencial de interação de Casimir-Polder para uma micropartícula polarizável e uma placa condutora no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica perpendicular à placa. O caso geral do tensor de polarização anisotrópico para a micropartícula é considerado. A força correspondente é uma função das distâncias entre a micropartícula e a placa e entre a micropartícula e a corda. Dependendo da orientação dos eixos principais do tensor de polarização, a força pode

ser atrativa ou repulsiva. O comportamento assintótico do potencial de Casimir-Polder é investigado nos casos de pequenas e grandes distâncias, comparados com o comprimento de onda das transições atômicas dominantes. Mostramos também que o defeito cônico pode ser usado para controlar a intensidade e o sinal da força de Casimir-Polder.

Palavras chaves: cordas cósmicas, partículas de Higgs, tensão da corda, efeito Casimir, interação de Casimir-Polder.

ABSTRACT

In the present thesis, we consider emission of Higgs particles by cosmic strings with condensates. Stringent constraints on cosmic string tension $G\mu$ are obtained by considering the effect of Higgs particles emission on photo-dissociation of light elements and their contributions to the observed diffuse gamma-ray background (GRB) in the universe. The resulting constraints are obtained as a function of the coupling constant κ to the cosmic string and are plotted on the $(\kappa, G\mu)$ -plan. Then, we show that the production of Higgs particles by loops of cosmic strings is ruled out by observations of photo-dissociation and GRB unless $G\mu \sim 10^{-19}$.

Another effect we consider is the thermal Casimir effect. In this scenario, we calculate the total internal energy, total energy density and pressure, and the free energy for the neutrino and electromagnetic fields in Einstein and closed Friedmann cosmological models. The Casimir contributions to all these quantities are separated. The asymptotic expressions for both the total internal energy and free energy, and for the Casimir contributions to them are found in the limiting cases of low and high temperatures. It is shown that the neutrino field does not possess a classical limit at high temperature. As for the electromagnetic field, we demonstrate that the total internal energy has the classical contribution and the Casimir internal energy goes to the classical limit at high temperature. The respective Casimir free energy contains both linear and logarithmic terms with respect to the temperature. The total and Casimir entropies for the neutrino and electromagnetic fields at low temperature are also calculated and shown to be in agreement with the Nernst heat theorem.

In addition to the Thermal Casimir effect, we study the Casimir-Polder effect. For this case, the Casimir-Polder interaction potential is evaluated for a polarizable microparticle and a conducting wall in the geometry of a cosmic string perpendicular to the wall. The general case of the anisotropic polarizability tensor for the microparticle is considered. The corresponding force is a function of the wall-microparticle and cosmic string-microparticle distances. Depending on the orientation of the polarizability tensor principal axes the force can be either attractive or repulsive. The asymptotic behavior

of the Casimir-Polder potential is investigated at large and small separations compared to the wavelength of the dominant atomic transitions. We show that the conical defect may be used to control the strength and the sign of the Casimir-Polder force.

Conteúdo

1	Introdução	14
2	Cordas cósmicas - aspectos principais	20
2.1	Defeitos topológicos - uma breve revisão	21
2.1.1	Corda cósmica global	28
2.1.2	Corda cósmica local	30
2.2	Dinâmica de cordas cósmicas	31
2.2.1	A ação de Nambu-Goto	31
2.2.2	Equação de movimento no espaço-tempo de Minkowski	32
2.3	Laços de Cordas Cósmicas, Cúspides e Kinks	35
2.4	regime de escala	37
2.5	O espaço-tempo da corda cósmica	39
2.6	Implicações observacionais	43
3	Emissão de partículas de Higgs	47
3.1	Radiação de partículas de Higgs emitida por cúspides	48
3.2	Distribuição de laços e período dominado pela fricção	54
3.2.1	Distribuição de laços	54
3.2.2	Época dominada pela fricção	55
3.3	Restrições cosmológicas na tensão da corda cósmica	56

3.3.1	Densidade de energia	56
3.3.2	Restrições cosmológicas	57
4	Efeito Casimir - aspectos principais	62
4.1	A origem do efeito Casimir	65
4.2	Efeito Casimir - modelo simples	68
4.3	Efeito Casimir térmico	73
4.3.1	A formulação de Matsubara	73
4.4	Interações de van der Waals e Casimir-Polder	81
5	Efeito Casimir térmico - neutrino e fóton	86
5.1	Expressões gerais - neutrino e fóton	88
5.2	Cálculo de quantidades termodinâmicas - neutrino	95
5.3	Cálculo de quantidades termodinâmicas - fóton	100
6	Efeito Casimir-Polder na presença da Corda	107
6.1	Tensor de Green retardado	107
6.2	O potencial de Casimir-Polder	115
6.3	Modelo do Oscilador	121
7	Conclusões e Perspectivas	126
A	Definições gerais	132
A.1	Cosmologia	132
A.2	Teoria de campos e relatividade geral	133
B	Cálculos adicionais para o capítulo 3.	135
B.1	Sobre o termo de interação em (3.1)	135
B.2	Sobre a Eq. (3.7)	136

C Cálculos adicionais para os capítulos 4 e 6. 139

C.1 Sobre a Eq. (4.55) 139

C.2 Sobre as soluções em (6.7) 140

C.3 Sobre a condição de normalização (6.11) 143

C.4 Comentários gerais 144

C.5 Sobre a Eq. (6.72) 145

Bibliografia 146

Lista de Figuras

2.1	Gráfico mostrando o potencial com formato de chapéu mexicano descrito pela Eq. (2.2) [1]. Pode-se perceber o círculo de mínimos no plano complexo, devido à quebra de simetria $U(1)$	24
2.2	Duplo poço de potencial descrito pela Eq. (2.10). Note que reescalamos o potencial $V(\phi)$ para a forma $\frac{4}{\lambda}V(\phi)$ e plotamos o gráfico do mesmo com relação ao campo ϕ	25
2.3	Gráfico da solução (2.11).	26
2.4	Uma corda cósmica em três dimensões pode ser localizada quando percorre-se um caminho fechado L em volta da mesma [1].	27
2.5	Simulações numéricas mostram que uma vez que um cúspide é formado, o mesmo evolui dinamicamente de forma a emitir uma alta quantidade de energia. Devido a essa emissão de energia (região nublada), o cúspide se torna menos acentuado como mostra a figura acima[75].	36
2.6	Processo de interação e auto-interação entre cordas[76]. Após este processo, um <i>kink</i> é formado em cada corda. No entanto, os mesmos desaparecem gradualmente durante a expansão do Universo.	37
2.7	Representação do espaço-tempo cônico da corda cósmica. Neste espaço-tempo, o ângulo azimutal θ' varia de acordo com (2.68) [1].	42

- 3.1 Aniquilação de cúspide ocorre para um comprimento dado por $\sigma_c \sim \sqrt{L/M}$ enquanto que a emissão de Higgs com momento k ocorre para um comprimento $\Delta\sigma \gtrsim \sigma_c$. Esta última condição fornece um limite superior no momento $k \lesssim M\sqrt{ML}$. Para um valor de k maior que este limite superior, a aproximação de Nambu-Goto não é mais válida (apêndice B.2). 52
- 3.2 Restrições na tensão da corda $G\mu$ devido a observações da fotodissociação dos elementos leves e dos GRB's mostradas no plano $(\kappa, G\mu)$ para $\zeta \sim 16$, $\beta \sim 0,1$ and $\Gamma \sim 50$. Para $t \lesssim t_e$, partículas de Higgs não podem ser produzidas para valores $G\mu$ abaixo da linha tracejada, visto que esta região é proibida pelo período dominado pela fricção, e as linhas pontilhadas (B) e (C) correspondem à restrições obtidas de $t_e \lesssim t_0$ e $t_e \lesssim t_{eq}$, respectivamente. A pequena região (A) (sobreposição das regiões permitidas pela fotodissociação e pelos GRB's) corresponde a $G\mu \sim 10^{-19}$ e pode ser detectada por observações da fotodissociação e dos GRB's. Para este valor de $G\mu$, o tempo t_e é aproximadamente $10^{11}s$ 60
- 4.1 Duas placas metálicas ideais paralelas, com área A , eletricamente neutras, separadas por uma distância a , colocadas no vácuo, atraem-se devido a flutuações quânticas do vácuo [122]. 66
- 4.2 Lei de potências assintóticas para as forças entre (a) dois átomos; (b) um átomo e uma esfera pequena; (c) um átomo e um anel fino. Além disso, **p** e **m** representam os objetos polarizados e magnetizados, respectivamente. O sinal positivo indica uma força repulsiva enquanto que o sinal negativo indica uma força atrativa [126]. 85

- 4.3 Lei de potências assintóticas para as forças entre (continuação Fig. 4.2) (d) um átomo e uma placa fina; (e) um átomo e um semi plano e (f) para a força por unidade de área entre dois semi planos. Além disso, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{m}$ representam os objetos polarizados e magnetizados, respectivamente. O sinal positivo indica uma força repulsiva enquanto que o sinal negativo indica uma força atrativa [126]. 85
- 6.1 Micropartícula próxima à placa condutora. A corda cósmica está situada ao longo do eixo z 118
- 6.2 O potencial de CP, $U(\mathbf{r})/(g_0\omega_0^2)$, como uma função das distâncias, reescaladas, da placa e da corda. Para o parâmetro q , que caracteriza a corda, assumimos o valor 3. Veja que a força de Casimir-Polder é atrativa com relação à placa e repulsiva com relação à corda, de acordo com o gráfico. 124
- 6.3 O potencial de CP, $r^2U(\mathbf{r})/g^{(1)}$, como uma função dos ângulos α e β para um tensor de polarização anisotrópico. Neste gráfico, adotamos $q = 3$, $\omega^{(1)}r = 1$, $\omega^{(1)}z = 1$, $\omega^{(3)}/\omega^{(1)} = 1.5$, e $g^{(3)}/g^{(1)} = 1.25$. Como pode ser visto no gráfico, a orientação de equilíbrio dos eixos principais para o tensor de polarização é dado pelos valores de β e α obtidos do mínimo do potencial em $r^2U(\mathbf{r})/g^{(1)} \sim 0.175$. 125

Capítulo 1

Introdução

It is my task to convince you not to turn away because you don't understand it. You see my physics students don't understand it... That is because I don't understand it. Nobody does.

QED: The Strange Theory of Light and Matter

– Richard P. Feynman –

O bóson de Higgs é uma partícula prevista pelo Modelo Padrão de física de partículas. A existência de uma partícula bosônica, cujas propriedades acredita-se serem consistentes com as propriedades do bóson de Higgs, tem sido confirmada por físicos no LHC (Large Hadron Collider) com um alto nível de precisão. Embora exista mais de um modelo de física de partículas que prevêem a existência do bóson de Higgs, o comportamento da partícula tipo Higgs detectada no LHC tem sido consistente com o Modelo Padrão. Tal partícula tem um tempo de vida muitíssimo curto $\tau_h \sim 10^{-22}s$ e uma massa $m_h \sim 126 GeV$. Em um cenário em que cordas cósmicas estão presentes, partículas de Higgs também podem ser produzidas, na forma de radiação, por laços de cordas cósmicas.

Corda cósmica é um defeito topológico previsto por algumas teorias de calibre e pode ser formada como resultado de uma quebra espontânea de simetria que deve ter ocorrido durante transições de fase no Universo primordial [1, 2]. A corda é caracterizada pela sua

tensão μ , a qual é da ordem de η^2 , em que η é a escala de energia da quebra de simetria. Quando cordas cósmicas são produzidas, evoluem dinamicamente e podem se intersectar e auto-intersectar. Como resultado deste processo, cordas se quebram nos pontos de interseção e após sucessivas reconexões dão origem à laços oscilantes. Tais laços podem apresentar cúspides - pontos ao longo da corda que podem alcançar momentaneamente a velocidade da luz - ou *kinks* - pontos descontínuos no vetor tangente ao longo da corda. As cordas com cúspides são as que despertam maior interesse, porque podem emitir partículas com energias muito maiores que suas massas de repouso, devido a um alto fator de Lorentz.

A formação de laços no Universo primordial pode ter consequências astrofísicas e cosmológicas e apresentam-se como uma “marca registrada” da presença de cordas [3, 4, 5, 6, 7]. De acordo com observações da Radiação Cósmica de Fundo¹ (CMBR) [6, 7], cordas cósmicas podem contribuir para perturbações de densidade no universo, somente se sua tensão for tal que² $G\mu \lesssim 10^{-7}$, o qual se traduz em uma escala de energia da ordem de $\eta \lesssim 10^{15} \text{ GeV}$. Valores maiores da escala de energia de formação da corda são devidos a ondas gravitacionais [8, 9], as quais podem ser produzidas, com variadas frequências, por cordas. Na medida em que os valores de $G\mu$ diminuem, a emissão de partículas torna-se o mecanismo de perda de energia mais importante. Neste sentido, muitos trabalhos têm sido feitos com o objetivo de explorar e entender como este processo alternativo, o qual ocorre em baixas energias, pode afetar o Universo. Deste modo, por exemplo, a emissão de partículas de *Moduli*³ foi considerada nas

¹A abreviação CMBR é devido à seguinte denominação em inglês: Cosmic Microwave Background Radiation.

² G é a constante gravitacional. Nos estudos de cordas cósmicas é comum usarmos o parâmetro adimensional $G\mu$ para caracterizá-las. Esse parâmetro se torna adimensional no sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$.

³*Moduli* são partículas associadas a campos escalares chamados *Moduli*. Estes campos escalares existem no contexto de alguns modelos de teorias de cordas.

Refs. [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Um estudo sobre a emissão de partículas por laços com espessura não desprezível pode ser encontrado na Ref. [16] e, adicionalmente, a emissão de partículas de Kaluza-Klein⁴ (KK) por cúspides presentes em supercordas cósmicas é analisada nas Refs. [17, 18].

Outros fenômenos para os quais tem sido dada grande atenção são o efeito Casimir e o efeito Casimir-Polder, os quais também podem ser estudados no contexto de cordas cósmicas.

O efeito Casimir manifesta-se como uma polarização do vácuo devido a fronteiras materiais ou à topologia não-trivial do espaço-tempo [19]. Este efeito é atualmente bem conhecido e constitui um fenômeno com aplicação multidisciplinar, abrangendo áreas que vão desde a matéria condensada até teoria quântica de campos, gravitação e cosmologia [20, 21, 22, 23], passando por aplicações práticas em nanotecnologia. Durante a última década, vários experimentos destinados a medir a força de Casimir foram realizados, os quais podem ser encontrados nas Refs. [24, 25, 26]. Os resultados desses experimentos foram usados, dentre outros objetivos, para obter fortes restrições nos parâmetros das correções do tipo Yukawa para a lei da gravitação Newtoniana prevista em muitas extensões do Modelo Padrão [27, 28, 29, 30, 31]. Os estudos iniciais sobre o efeito Casimir foram realizados à temperatura nula [19]. No entanto, o estudo do papel da temperatura sobre o efeito mencionado é de extrema importância. Neste sentido, foi obtido que a influência de portadores de cargas livres nas fronteiras materiais, levando em conta correções térmicas para a força de Casimir, é altamente não-trivial e conduz à problemas sutis de estatística quântica [23, 24, 26, 32].

Em cosmologia, o efeito Casimir surge, não devido a fronteiras materiais, mas devido a condições de identificação impostas ao sistema físico pela topologia não-trivial

⁴Partículas de KK são encontradas no contexto de teorias de cordas em que dimensões extras são compactificadas.

do espaço-tempo. Especificamente, a densidade de energia e a pressão de Casimir para o campo escalar nos modelos cosmológicos de Friedmann fechado e Einstein, com topologia $S^3 \times R^1$, foram obtidos nas Refs. [33, 34] e [35] para os casos não massivo e massivo, respectivamente. A densidade e a pressão de Casimir para os campos do neutrino e eletromagnético no modelo cosmológico de Einstein foram obtidos na Ref. [36]. O efeito Casimir foi investigado em vários outros espaços com topologia não-trivial [37, 38, 39, 40]. Isto resultou no desenvolvimento de novos métodos em física matemática e aplicações em cosmologia multidimensional [41, 42] e no problema da energia escura [43].

Um considerável número de trabalhos sobre o efeito Casimir térmico em modelos cosmológicos foram realizados. Especificamente, funções de Green térmicas nos espaços de Rindler, de Sitter e Schwarzschild foram consideradas [44]. Nas Refs. [45, 46], o tensor momento-energia térmico do campo escalar no modelo cosmológico de Einstein foi investigado e os comportamentos assintóticos a baixas e altas temperaturas foram obtidos. Um problema análogo para um modelo cosmológico com topologia de um 3-toro foi analisado na Ref. [47]. Na Ref. [48] os resultados das Refs. [45, 46] foram considerados, usando outra abordagem. Foi mostrado que o tensor momento-energia térmico total do campo escalar, no modelo de Einstein, possui a contribuição de Casimir, a qual tem o mesmo comportamento assintótico a baixas e altas temperaturas, como no caso de duas placas metálicas ideais e paralelas. O tensor momento-energia térmico total do neutrino e do campo eletromagnético no modelo cosmológico de Einstein foi considerado na Ref. [49]. As expressões obtidas foram usadas em [49, 50] para determinar o *back reaction* do tensor momento-energia térmico total no espaço-tempo resolvendo as equações de Einstein, situação na qual este tensor foi considerado como fonte.

Adicionalmente, interações de Casimir-Polder (CP) entre átomos e superfícies

constituem uma das mais interessantes manifestações das flutuações quânticas do campo eletromagnético [51]. As aplicações destas interações em muitas áreas da ciência e tecnologia motivam a investigação de vários mecanismos para controlar sua intensidade e sinal. Recentemente, grandes esforços têm sido feitos com o intuito de investigar a natureza das forças de CP e suas dependências com a geometria das fronteiras. Em particular, tem havido um grande interesse nas forças de CP repulsivas [52]. Na Ref. [53] foi mostrado que a presença de defeitos topológicos podem servir como uma ferramenta fundamental para o controle das forças. De fundamental interesse para esta tese é o estudo da interação de CP no espaço-tempo da corda cósmica.

No modelo mais simples para a corda cósmica reta e muito fina, a geometria fora da mesma é plana com um deficit angular dado por $\Delta\phi = 4\pi G\mu$. A correspondente topologia não-trivial conduz a uma modificação nas flutuações de ponto zero dos campos quânticos. As mudanças nas propriedades de vácuo devido a esta modificação têm sido discutidas em um grande número de artigos (veja, por exemplo, as referências dadas em [54]). O efeito de polarização do vácuo por uma corda cósmica no espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter foi investigado nas Refs. [55, 56]. A distorção das flutuações de vácuo do campo eletromagnético por uma corda cósmica também dá origem a uma força de CP entre a corda e uma partícula polarizável. Esta força é investigada nas Refs. [57, 58]. Foi mostrado que a mesma depende dos autovalores do tensor de polarização e da orientação dos seus eixos principais. A força de CP entre uma corda e uma partícula pode ser repulsiva ou atrativa com relação à corda. Para um tensor de polarização isotrópico, a força é sempre repulsiva. Na Ref. [53] foi considerado a influência da corda cósmica na força de CP entre uma micropartícula e uma casca cilíndrica condutora e coaxial a uma corda. Os efeitos combinados da topologia da corda cósmica e das fronteiras sobre a energia do vácuo foram discutidos nas Refs. [54, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66].

A presente tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, uma revisão sobre os aspectos principais da formação e dinâmica da corda cósmica, bem como sua influência cosmológica, é apresentada. No capítulo 3, estudamos um sistema físico o qual se propõe a estudar a emissão de partículas de Higgs e suas consequências cosmológicas sobre a formação dos elementos leves no período da fotodissociação e sobre a quantidade de raios gama que são observados no Universo na presente época. Uma revisão sobre os efeitos Casimir, Casimir térmico e Casimir-Polder, com um enfoque mais nos dois últimos, é discutida no capítulo 4. Um estudo sobre o efeito Casimir térmico, para os campos do neutrino e eletromagnético, no contexto dos modelos cosmológicos de Friedmann fechado e de Einstein é realizado no capítulo 5. Adicionalmente ao estudo do efeito Casimir térmico, no capítulo 6, um sistema constituído de uma micropartícula polarizável na presença de uma placa condutora no espaço-tempo da corda cósmica é analisado de forma a obter-se as interações de Casimir-Polder. Finalmente, no capítulo 7, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Cordas cósmicas - aspectos principais

Not only is the Universe stranger than we think, it is stranger than we can think.

Across the Frontiers

– Werner Heisenberg –

O maior interesse em cordas cósmicas surgiu nos anos oitenta e noventa, momento no qual físicos acreditavam que as mesmas pudessem oferecer um modo alternativo de gerar perturbações de densidade primordial, o que levaria à formação de estruturas no Universo, tal como galáxias e aglomerados de galáxias. Contudo, medidas da radiação cósmica de fundo descartaram a possibilidade de cordas serem a principal fonte de flutuações de densidade primordial [67]. Somente há cerca de uma década, cordas cósmicas começaram a reaparecer como um assunto de interesse no cenário cosmológico. Isto ocorreu devido a alguns importantes fatos teóricos e observacionais.

Do ponto de vista teórico, o renovado interesse por cordas teve seu início com a teoria fundamental de cordas¹. Inicialmente, achava-se que não existia conexão alguma entre cordas cósmicas e cordas fundamentais, uma vez que a formação das primeiras

¹Teoria fundamental de cordas ou teoria de cordas é, atualmente, a teoria mais aceita que se

acontece em escalas de energia de grande unificação (10^{16} GeV) ou menos, e a formação das segundas ocorre na escala de energia de Planck (10^{19} GeV). Contudo, percebeu-se que a escala de energia para a teoria de cordas podia ser menor e, desta forma, a mesma garantiria a existência de defeitos topológicos macroscópicos, dentre os quais cordas estão presentes [68]. Além disso, teorias supersimétricas de grande unificação também predizem a existência de cordas cósmicas.

Do ponto de vista observacional, uma possível explicação para a formação de lentes gravitacionais foi atribuída, inicialmente, a uma corda cósmica [68]. No entanto, novas análises usando dados do telescópio espacial Hubble, em 2006, mostraram que não se tratava de um caso de lentes gravitacionais. No entanto, este fato foi parcialmente responsável pela renovação do interesse no estudo das cordas cósmicas, e do papel destas, no contexto astrofísico e cosmológico. Adicionalmente, observações de flutuações anômolas no Universo podem ser explicadas, de modo mais simples, através da presença de cordas cósmicas [67, 68].

Na próxima seção faremos uma breve revisão sobre a formação de defeitos topológicos e nas seções seguintes abordaremos os principais aspectos da corda cósmica, incluindo sua dinâmica. Adicionalmente, no presente capítulo e no próximo, usaremos as seguintes convenções: métrica de Minkowski com assinatura $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ e $\hbar = c = 1$, para a constante de Planck $\hbar$ e para a velocidade da luz c .

2.1 Defeitos topológicos - uma breve revisão

Defeitos topológicos são previstos em teorias de grande unificação (GUT's como são conhecidas, em inglês, uma vez que é a abreviação para Grand Unification Theories).

propõe a unificar as quatro interações fundamentais; interação gravitacional, interação eletromagnética, interação nuclear fraca e interação nuclear forte. Apesar desse status, ainda não obteve-se evidência experimental que confirme as predições da teoria de cordas.

Tais defeitos aparecem quando um grande grupo de simetria é quebrado, conduzindo aos grupos de simetria do Modelo Padrão de física de partículas $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Do ponto de vista da cosmologia, este mecanismo, que é chamado de quebra espontânea de simetria, deve ter ocorrido quando nosso Universo evoluiu de um estado extremamente quente para estados cada vez mais frios, através de um processo chamado de transição de fase. Este fenômeno ocorreu no Universo primordial, onde altas energias podem ser encontradas, da ordem de $10^{16} GeV$, que é a escala de energia de grande unificação. Devido à quebra espontânea de simetria, o valor esperado de vácuo do campo que descreve uma teoria particular adquire um valor não-nulo. Isto significa dizer que, o vácuo da teoria adquire uma topologia não-trivial², a qual caracteriza a variedade de vácuo, e dependendo dessa variedade de vácuo, que surge devido à quebra de simetria, pode-se ter diferentes tipos de defeitos topológicos. Monopolos, paredes de domínio, texturas e cordas cósmicas são exemplos de defeitos topológicos associados a diferentes variedades de vácuo.

Um modelo simples, descrevendo uma quebra espontânea de simetria, é o chamado modelo de Goldstone, o qual é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana [1, 2]:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \bar{\phi})(\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.1)$$

em que ϕ é um campo escalar complexo e o potencial $V(\phi)$ associado a este campo complexo é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2)^2, \quad (2.2)$$

com λ e η sendo constantes positivas e $|\phi|^2 = \bar{\phi}\phi$.

A equação de movimento que surge da Lagrangiana (2.1), com o potencial (2.2), é

²Kibble propôs uma forma de classificar a variedade de vácuo $\mathcal{M}$, associada a diferentes tipos de defeitos topológicos, de acordo com grupos de homotopia $\pi_n(\mathcal{M})$, em que n é a ordem do grupo de homotopia. Deste forma, a topologia do vácuo será não-trivial quando $\pi_n(\mathcal{M}) \neq I$.

dada por

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + \lambda(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2)\phi = 0. \quad (2.3)$$

Deste modo, a solução fundamental, de vácuo, para a Eq. (2.3) será

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

em que θ é uma fase arbitrária.

Claramente, o modelo descrito pela Lagrangiana (2.1), é invariante sob o grupo de tranformações de fase global³ $U(1)$, ou seja

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad (2.5)$$

em que α é uma fase arbitrária. Além disso, os valores mínimos do potencial (2.2) formam um círculo de raio $|\phi| = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ (veja Fig. 2.1) e, portanto, a solução de vácuo (2.4) da teoria adquire um valor esperado não-nulo

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{i\theta}. \quad (2.6)$$

Deste modo, pode-se perceber que sob transformações de fase (2.5), o valor esperado de vácuo (2.6) tem sua fase mudada de θ para $\theta + \alpha$ e, portanto, a simetria é espontaneamente quebrada, visto que (2.6) não é invariante sob tais transformações. De forma geral, toda vez que a Lagrangiana associada a uma teoria de campo, como por exemplo (2.1), tiver sua simetria preservada sob certos grupos de transformações, porém, o valor esperado do vácuo do campo não tiver sido preservado, dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada. Esse processo de quebra espontânea de simetria dá origem a uma partícula escalar de massa $m_s^2 = \lambda\eta^2$, e a uma partícula bosônica sem massa chamada de bóson de Goldstone, o qual é associado com a quebra global de simetria.

³A denominação ‘global’ indica que a fase α na equação (2.5) é independente das coordenadas de espaço-tempo x^μ .

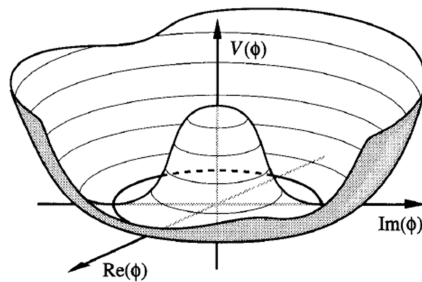


Figura 2.1: Gráfico mostrando o potencial com formato de chapéu mexicano descrito pela Eq. (2.2) [1]. Pode-se perceber o círculo de mínimos no plano complexo, devido à quebra de simetria $U(1)$.

Do ponto de vista de teorias abelianas de gauge, existe o chamado modelo Abeliano de Higgs, o qual é descrito pela seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - V(\phi), \quad (2.7)$$

em que $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, sendo A_μ um campo vetorial. A densidade Lagrangiana (2.7) é invariante sob o grupo de transformações locais $U(1)$

$$\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha(x)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.8)$$

em que $\alpha(x)$ é uma função real. Com isso, as equações de campo serão dadas por

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi + \lambda(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2)^2 \phi &= 0, \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} + ie(\bar{\phi}D^\mu\phi - D^\mu\bar{\phi}\phi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A solução para o campo escalar ϕ , nas equações em (2.9), será similar à (2.4), porém, agora com a fase α dependendo das coordenadas x^μ . Neste caso, como consequência da quebra espontânea de simetria, tem-se um campo escalar massivo com massa m_s , exatamente como antes, porém, agora, com o bóson de Goldstone sendo incorporado ao campo vetorial A_μ , o qual ganha massa⁴ $m_v = e\eta$.

⁴Um estudo mais detalhado sobre defeitos topológicos do ponto de vista de teorias Abelianas e não Abelianas de gauge pode ser encontrado em [1].

Antes de falarmos especificamente sobre cordas cósmicas, é importante entender o caso mais simples em que um defeito surge. Neste sentido, considere o modelo de Goldstone (2.1), mas agora descrito por um único campo escalar real ϕ , o qual depende somente das coordenadas t e x . Para este caso, o potencial $V(\phi)$ associado à Lagrangiana (2.1) é descrito como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2. \quad (2.10)$$

O potencial (2.10) descreve um duplo poço de potencial que pode ser visto na Fig. 2.2. A solução estática da equação de campo que surge da Lagrangiana (2.1), com o potencial (2.10), é dada analiticamente por

$$\phi(x) = \eta \tanh \left((\lambda/2)^{1/2} \eta x \right). \quad (2.11)$$

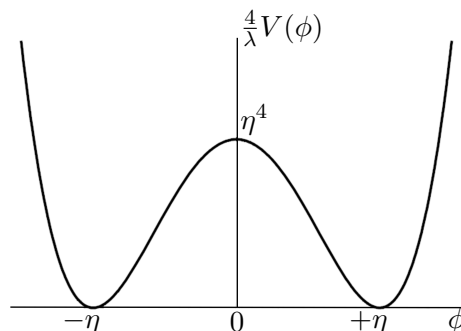


Figura 2.2: Duplo poço de potencial descrito pela Eq. (2.10). Note que reescalamos o potencial $V(\phi)$ para a forma $\frac{4}{\lambda}V(\phi)$ e plotamos o gráfico do mesmo com relação ao campo ϕ .

O modelo que fornece a solução (2.11) é conhecido como ϕ^4 -kink, uma vez que (2.11) descreve um ‘kink’ cujo centro é localizado em $x = 0$ (veja Fig. 2.3). Na Fig. 2.3, pode-se perceber que quando $x \rightarrow \pm\infty$, o campo $\phi \rightarrow \pm\eta$. Ou seja, o campo $\phi(x)$ é responsável por mapear, não-trivialmente, os pontos $x = \pm\infty$ do espaço físico na variedade de vácuo constituída por $\phi = \pm\eta$ (Fig. 2.2). Portanto, se a variedade de

vácuo $\mathcal{M}$ tiver componentes desconexas, como neste simples exemplo que acabamos de ver, paredes de domínio podem ser formados nas fronteiras descritas pelos valores $\pm\eta$. Neste sentido, paredes de domínio aparecem quando uma simetria discreta é quebrada, como por exemplo a quebra de simetria por reflexão $\phi \rightarrow -\phi$. Isto é exatamente o que acontece quando o grupo de homotopia de ordem zero $\pi_0(\mathcal{M})$ é não-trivial. Pode-se ver que o modelo de Goldstone descrito por (2.1), com o potencial (2.10), é invariante sob tais transformações por reflexão, entretanto, o valor esperado de vácuo não o é, visto que uma transformação por reflexão do tipo $\phi \rightarrow -\phi$ conduz o valor esperado de vácuo de η para $-\eta$ ou vice versa.

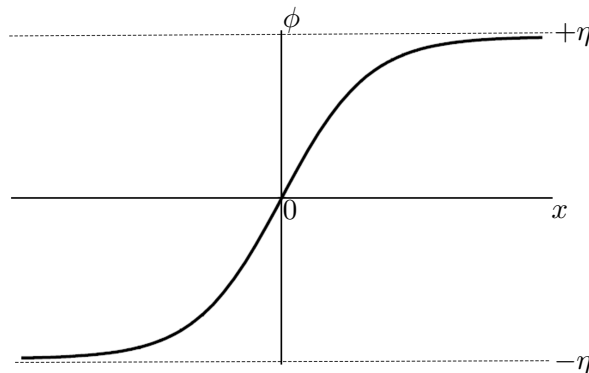


Figura 2.3: Gráfico da solução (2.11).

O contexto em que cordas cósmicas são formadas é um pouco mais complicado do que no exemplo anterior. No entanto, mantendo a mesma idéia em mente, mas agora de uma forma mais intuitiva, podemos tentar entender como o defeito tipo corda surge. Considere, então, o modelo de Goldstone descrito por (2.1) com o potencial mexicano (2.2). Se descrevermos um caminho fechado L no espaço físico representado pelo plano (x, y) , o campo scalar complexo $\phi(x)$ será capaz de mapear os pontos desse caminho fechado L no círculo de mínimos $|\phi| = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ da variedade de vácuo $\mathcal{M}$, e que pode ser vista na Fig. 2.1. Desta forma, se variarmos o círculo fechado L na direção perpendicular ao eixo z , pode-se perceber a formação de um defeito topológico tipo corda (veja Fig.

2.4). Neste sentido, toda a energia da corda estará concentrada em seu núcleo, o qual é definido exatamente pelo círculo de mínimos $|\phi| = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$.

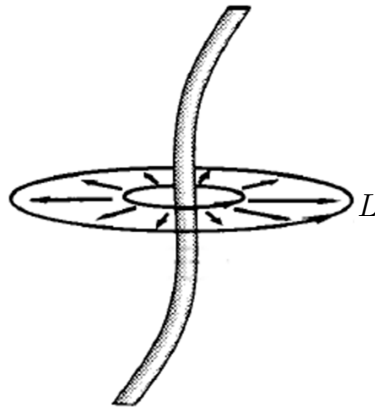


Figura 2.4: Uma corda cósmica em três dimensões pode ser localizada quando percorre-se um caminho fechado L em volta da mesma [1].

De forma geral, cordas cósmicas aparecem em modelos nos quais a variedade de vácuo $\mathcal{M}$ não é simplesmente conexa, o que significa que $\mathcal{M}$ contém ‘buracos’ (neste caso o círculo de mínimos S^1). Desta forma, o raio de qualquer caminho fechado que fizermos em torno destes ‘buracos’ não poderá ser levado continuamente à zero. Evidentemente, neste caso, a variedade $\mathcal{M}$ será não-trivial já que descreve um conjunto de mínimos diferentes de zero. O grupo de homotopia que descreve cordas cósmicas é de ordem um, $\pi_1(\mathcal{M})$, o qual é conhecido como o grupo fundamental de homotopia. Os grupos de homotopia classificam o mapeamento de pontos de uma n -esfera S^n na variedade de vácuo $\mathcal{M}$ e, portanto, são bastante importantes no entendimento das propriedades topológicas da variedade de vácuo.

Monopolos, ou defeitos tipo-ponto, são formados quando pontos de uma 2-esfera S^2 são mapeados, não-trivialmente, na variedade de vácuo $\mathcal{M}$, o qual por sua vez, neste caso, corresponde ao segundo grupo de homotopia $\pi_2(\mathcal{M})$. Desta forma, analiticamente, pode-se obter defeitos tipo-ponto considerando que o campo escalar real em (2.10) tem

3 componentes, ou seja:

$$\phi^2 = \sum_{k=1}^3 \phi_k^2.$$

De forma análoga, texturas são formadas quando uma 3-esfera S^3 é mapeada na variedade de vácuo $\mathcal{M}$, que pertence ao terceiro grupo de homotopia $\pi_3(\mathcal{M})$. Assim, o campo escalar em (2.10) terá 4 componentes. Para um resumo dos tipos de defeitos topológicos, suas dimensões e grupos de homotopia veja Tabela 2.1.

Defeitos topológicos	Dimensão	Classificação
Parede de domínio	2	$\pi_0(\mathcal{M})$
Corda cósmica	1	$\pi_1(\mathcal{M})$
Monopolo	0	$\pi_2(\mathcal{M})$
Textura	—	$\pi_3(\mathcal{M})$

Tabela 2.1: Classificação dos defeitos topológicos de acordo com seus grupos de homotopia.

2.1.1 Corda cósmica global

Existe uma outra solução, neste caso estática, com densidade de energia não-nula, para a Eq. (2.3) [1, 2]. Tal solução é descrita pelo seguinte *ansatz*:

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} f(m_s \rho) e^{in\varphi}, \quad (2.12)$$

em que (ρ, φ, z) são as coordenadas cilíndricas, n é um número inteiro conhecido como número de circulação e m_s é a massa da partícula escalar que surge da quebra espontânea de simetria global, mencionada anteriormente na Seção 2.1. O número de circulação representa o número total de voltas que o campo ϕ dá em torno dos mínimos $|\phi| = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ se calcularmos seus valores ao longo de um caminho fechado L . Tal número é positivo para voltas no sentido horário e negativo para voltas no sentido anti-horário.

Além disso, cordas cósmicas somente existirão se o número de circulação for diferente de zero.

Substituindo a Eq. (2.12) na Eq. (2.3), obtemos

$$f'' + \frac{1}{\xi}f' - \frac{n^2}{\xi^2} - \frac{1}{2}(f^2 - 1)f = 0, \quad (2.13)$$

em que $\xi = m_s \rho$. Da Eq. (2.13) podemos obter o comportamento assintótico de f para pequenas e grandes distâncias ξ . Para que a função ϕ mantenha seu comportamento regular na origem, é necessário que $f \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow 0$. Assim, ϕ e f serão contínuas e diferenciáveis de tal forma que a Lagrangiana (2.1) seja bem definida. Para valores grandes de ξ , é necessário que $f \rightarrow 1$ para que o campo recupere sua solução de vácuo (2.4). Esta condição evita que exista um excesso de energia para o campo ϕ , o que significaria um valor infinito para a energia total. Desta forma, é razoável admitirmos que $f = 1 - \delta f$. Substituindo esta expressão na Eq. (2.13), obtemos que $\delta f \sim n^2/\xi^2$.

A densidade de energia associada ao campo ϕ é dada pela densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{E} = |\dot{\phi}|^2 + |\nabla\phi|^2 + V(\phi). \quad (2.14)$$

Embora a densidade de energia $\mathcal{E}$ seja bem comportada na origem, para longas distâncias, existe um termo proporcional a ξ^{-2} na Eq. (2.14), devido à derivada angular do gradiente. Em outras palavras, a energia por unidade de comprimento desta solução é infinita. No interior de um cilindro de raio $R \gg m_s^{-1}$, a energia por unidade de comprimento é dada aproximadamente por

$$\mu \sim 2\pi \int \rho |\nabla\phi|^2 d\rho \sim 2\pi\eta^2 n^2 \ln(R/r_0), \quad (2.15)$$

em que $r_0 \sim m_s^{-1}$ é o raio da corda. As soluções (2.4) e (2.12) são conhecidas como cordas cósmicas globais ou vórtices [69], uma vez que as mesmas estão associadas com uma quebra espontânea de simetria global. Em geral, não são consideradas topologicamente estáveis já que a densidade de energia é infinita para grandes distâncias.

2.1.2 Corda cósmica local

Considere agora as Eqs. (2.9), para uma simetria de gauge local. Uma solução de vórtice [70] ainda existe para tais equações, porém, possui propriedades bastantes diferentes quando comparadas com as soluções de vórtices globais. Neste caso, a energia por unidade de comprimento é finita. Vejamos como isto acontece mais especificamente. Em coordenadas cilíndricas, fazendo a escolha de calibre $A_\rho = 0$, podemos escrever o seguinte *ansatz*:

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} f(m_v \rho) e^{in\varphi}, \quad A^i = \frac{n}{e\rho} \hat{\varphi}^i a(m_v \rho). \quad (2.16)$$

Substituindo as expressões da Eq. (2.16) nas equações em (2.9), obtemos um sistema de equações diferenciais acopladas, o qual não tem solução exata [2]. Contudo, o comportamento assintótico para pequenas e grandes distâncias é dado, respectivamente, por [1, 2]

$$\begin{aligned} f &\sim f_0 \xi^{|n|}, & a &\sim a_0 \xi^2 - \frac{|n|f_0^2}{4(|n|+1)} \xi^{2|n|+2}, & \xi \rightarrow 0, \\ f &\sim 1 - f_1 \xi^{-1/2} \exp(-\sqrt{\beta}\xi), & a &\sim 1 - a_1 \xi^{-1/2} \exp(-\xi), & \xi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $\beta = \lambda/e^2 = (m_s/m_v)^2$ e $\xi = m_v \rho$. Para $\beta > 4$, $f(\infty) \sim \xi^{-1} \exp(-2\xi)$. O comportamento assintótico apresentado em (2.17) mostra que a solução de vórtice local é regular na origem e os campos se aproximam da solução de vácuo para grandes distâncias. A energia por unidade de comprimento da corda local é calculada como

$$\mu \sim \int \rho d\rho d\varphi \mathcal{E}(\rho) \sim \pi \eta^2 \epsilon(\beta), \quad (2.18)$$

em que $\epsilon(\beta)$ é um parâmetro que cresce lentamente com β e que, além disso, pode ser mostrado analiticamente que $\epsilon(1) = 1$ [2, 71]. Desta forma, pode-se adotar a aproximação $\mu \sim \eta^2$. Como podemos perceber, as soluções de cordas locais possuem uma densidade de energia por unidade de comprimento finita e, portanto, são mais interessantes do ponto de vista cosmológico.

Nosso estudo sobre cordas cósmicas na presente tese somente leva em consideração cordas cósmicas locais. Assim, nas próximas seções veremos os principais aspectos da dinâmica de cordas cósmicas no espaço-tempo plano.

2.2 Dinâmica de cordas cósmicas

2.2.1 A ação de Nambu-Goto

Podemos considerar uma corda cósmica como tendo somente uma dimensão se seu raio de curvatura R for muito maior que sua espessura δ ($R \gg \delta$). Deste modo, sua trajetória através do espaço-tempo 4-dimensional pode ser parametrizada de tal forma que ela possa ser representada por uma superfície bi-dimensional descrita por [1, 2]

$$X^\mu = X^\mu(\sigma^a), \quad a = 0, 1, \quad (2.19)$$

a qual é chamada de folha de mundo da corda e os parâmetros σ^0, σ^1 são as coordenadas desta folha. A coordenada σ^0 é do tipo-tempo e a coordenada σ^1 , a qual localiza pontos ao longo da corda, é do tipo-espaço. Além disso, a parametrização (2.19) permite que o intervalo de espaço-tempo entre dois pontos vizinhos na folha de mundo possa ser descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} X_{,a}^\mu X_{,b}^\nu d\sigma^a d\sigma^b, \quad (2.20)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo. Deste modo, podemos definir a métrica da folha de mundo bi-dimensional como sendo

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} X_{,a}^\mu X_{,b}^\nu, \quad (2.21)$$

e consequentemente, temos

$$ds^2 = \gamma_{ab} d\sigma^a d\sigma^b, \quad (2.22)$$

em que a métrica contravariante γ^{ab} é definida, assim como $g_{\mu\nu}$, por $\gamma^{ab}\gamma_{bc} = \delta_c^a$.

A dinâmica da corda pode ser obtida pela ação de Nambu-Goto [1, 72]

$$S = -\mu \int \sqrt{-\gamma} d^2\sigma, \quad (2.23)$$

em que γ é o determinante da métrica induzida γ^{ab} , devido à parametrização (2.19).

Variando (2.23) com relação a $X^\mu(\sigma^a)$, podemos obter as seguintes equações de movimento para a corda cósmica:

$$X_{,a}^{\mu ;a} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \gamma^{ab} X_{,a}^{\nu} X_{,b}^{\sigma} = 0, \quad (2.24)$$

em que usamos a expressão (2.21) e a relação

$$d\gamma = \gamma \gamma^{ab} d\gamma_{ab}. \quad (2.25)$$

O símbolo de Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ e o Laplaciano $X_{,a}^{\mu ;a}$ na Eq. (2.24) são dados, respectivamente, por

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (g_{\tau\nu,\sigma} + g_{\tau\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\tau}), \quad (2.26)$$

e

$$X_{,a}^{\mu ;a} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_a (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} X_{,b}^{\mu}). \quad (2.27)$$

Variando novamente a ação (2.23), agora com relação a $g_{\mu\nu}$, pode-se obter o tensor momento-energia

$$T^{\mu\nu} \sqrt{-g} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \mu \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} X_{,a}^{\mu} X_{,b}^{\nu} \delta^4(X^\rho - X^\rho(\sigma^a)). \quad (2.28)$$

2.2.2 Equação de movimento no espaço-tempo de Minkowski

Considerando a métrica $g_{\mu\nu}$ como sendo a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e os símbolos de Christoffel como sendo todos nulos $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = 0$, a equação de movimento (2.27) pode ser escrita como

$$\partial_a (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} X_{,b}^{\mu}) = 0. \quad (2.29)$$

Note que a ação de Nambu (2.23) é invariante sob reparametrização da folha de mundo. Neste sentido, podemos reduzir os graus de liberdade da métrica γ_{ab} de três para apenas um grau de liberdade [73]. Isto pode ser feito realizando uma transformação $\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a(\sigma)$ nas coordenadas da folha de mundo de tal forma que a métrica γ_{ab} assuma a forma conformalmente plana

$$\gamma_{ab} = \Omega^2(\sigma)\eta_{ab}, \quad (2.30)$$

em que $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1)$. Deste modo, a Eq. (2.30) fornece

$$\gamma_{01} = 0, \quad \gamma_{00} + \gamma_{11} = 0. \quad (2.31)$$

As relações em (2.31) são conhecidas como calibre conforme uma vez que são obtidas da forma conformalmente plana (2.30) da métrica da folha de mundo. Usando a Eq. (2.31) na Eq. (2.21), temos

$$\begin{aligned} \dot{X} \cdot X' &= 0, \\ \dot{X}^2 + X'^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que ponto e linha representam derivadas com relação a σ^0 e σ^1 , respectivamente.

Usando as condições de gauge (2.31), a equação de movimento (2.29) pode ser escrita em uma forma mais simples como

$$\ddot{X}^\mu - X'''^\mu = 0. \quad (2.33)$$

Para analisarmos soluções da equação de movimento (2.29), é conveniente fixarmos ainda mais o calibre⁵. Para tal propósito, a escolha usual é a do calibre temporal $\sigma^0 = t$ [74]. Assim, a trajetória da corda será descrita apenas pelo tri-vetor $\mathbf{X}(\sigma, t)$, em que

⁵Temos a liberdade de fixar ainda mais o calibre porque as relações em (2.32) são escritas em termos de derivadas. Desta forma, podemos escolher $\frac{\partial t}{\partial \sigma^0} = 1$, em que $X^0 = t$. Com essa escolha, $\frac{\partial t}{\partial \sigma^1} = 0$ uma vez que agora σ^1 e t são variáveis independentes.

$\sigma^1 \equiv \sigma$ é a coordenada tipo-espaço da corda. Com isso, as equações (2.32) e (2.33) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}' &= 0, \\ \dot{\mathbf{X}}^2 + \mathbf{X}'^2 &= 1, \\ \ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{X}'' &= 0,\end{aligned}\tag{2.34}$$

em que $\mathbf{X}$ são as coordenadas espaciais do quadri-vetor X^μ .

A solução geral para as equações em (2.34) é dada por

$$\mathbf{X}(\sigma, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{X}_+(\sigma_+) + \mathbf{X}_-(\sigma_-)],\tag{2.35}$$

em que $\mathbf{X}_+(\sigma_+)$ corresponde a ondas se propagando para a direita, $\mathbf{X}_-(\sigma_-)$ a ondas se propagando para a esquerda e $\sigma_+ \equiv \sigma + t$, $\sigma_- \equiv \sigma - t$ são as coordenadas do cone de luz. Substituindo a Eq. (2.35) nas Eqs. (2.34), pode-se obter as seguintes relações de calibre:

$$\mathbf{X}'_+{}^2 = \mathbf{X}'_-{}^2 = 1,\tag{2.36}$$

em que “linha” corresponde a derivadas com relação às correspondentes coordenadas de cone de luz σ_+ e σ_- . As relações em (2.36) são conhecidas como condições de Virasoro.

O tensor momento-energia no gauge descrito pelas Eqs. (2.31) pode ser obtido como [1]

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{X}, t) = \mu \int d\sigma (\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - X'^\mu X'^\nu) \delta^3(\mathbf{X} - \mathbf{X}(\sigma, t)).\tag{2.37}$$

Deste modo, a energia total E da corda pode ser escrita da seguinte forma:

$$E = \int T_0^0 d^3 X = \mu \int d\sigma.\tag{2.38}$$

De forma semelhante, o momento linear e o momento angular da corda são dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mu \int d\sigma \dot{\mathbf{X}}(\sigma, t), \\ \mathbf{J} &= \mu \int d\sigma \mathbf{X}(\sigma, t) \times \dot{\mathbf{X}}(\sigma, t),\end{aligned}\tag{2.39}$$

em que o símbolo “ $\times$ ” indica o produto vetorial entre o vetor $\mathbf{X}(\sigma, t)$, que localiza pontos ao longo da corda, e o vetor velocidade da corda $\dot{\mathbf{X}}(\sigma, t)$.

2.3 Laços de Cordas Cósmicas, Cúspides e Kinks

As relações em (2.36) podem ser interpretadas como curvas descritas sobre uma esfera unitária⁶, sendo σ o parâmetro que descreve o comprimento ao longo dessas curvas. Deste modo, o movimento de laços fechados de cordas pode ser descrito pelas Eqs. (2.35) e (2.36), sendo que a coordenada tipo-espaço σ varia no intervalo

$$0 \leq \sigma \leq L, \quad (2.40)$$

em que L é o comprimento do laço e é definido como $L = E/\mu$. Para que se possa ter laços fechados de cordas, é também necessário que se tenha a seguinte condição de periodicidade na função $\mathbf{X}(\sigma, t)$:

$$\mathbf{X}(\sigma + L/2, t + L/2) = \mathbf{X}(\sigma, t). \quad (2.41)$$

Além disso, visto que as quantidades $\mathbf{X}_{\pm}(\sigma_{\pm})$ são também periódicas, temos a relação

$$\int_0^L d\sigma_+ \mathbf{X}'_+ = \int_0^L d\sigma_- \mathbf{X}'_- = 0. \quad (2.42)$$

Dessa forma, o centro de massa das curvas $\mathbf{X}'_{\pm}(\sigma)$ estará localizado no centro da esfera unitária e, portanto, tais curvas não poderão estar somente em um hemisfério dessa esfera. Assim, espera-se que as curvas $\mathbf{X}'_{\pm}(\sigma)$ se cruzem em algum ponto e que, além disto, existam regiões em que $\mathbf{X}'_+(\sigma)$ e $-\mathbf{X}'_-(\sigma)$ tenham os mesmos valores, ou seja:

$$\mathbf{X}'_+(\sigma_a) + \mathbf{X}'_-(\sigma_b) = 0. \quad (2.43)$$

⁶Essa denominação foi sugerida por Tom Kibble e Neil Turok em 1982 e, portanto, é conhecida como esfera de Kibble-Turok.

Como resultado, na posição $\sigma = (\sigma_a + \sigma_b)/2$ e no tempo $t = (\sigma_b - \sigma_a)/2$, temos

$$\begin{aligned}\partial_\sigma \mathbf{X}(\sigma, t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}'_+(\sigma_+) + \mathbf{X}'_-(\sigma_-)) = 0, \\ |\partial_t \mathbf{X}(\sigma, t)| &= \frac{1}{2}|\mathbf{X}'_+(\sigma_+) - \mathbf{X}'_-(\sigma_-)| = 1,\end{aligned}\tag{2.44}$$

em que $\partial_\sigma = \partial/\partial\sigma$, $\partial_t = \partial/\partial t$ e a “linha” corresponde às derivadas com relação às respectivas coordenadas de cone de luz $\sigma_\pm$. As relações em (2.44) indicam que cúspides⁷ são formados na posição e no tempo descritos acima. Ou seja, cúspides são pontos na corda que se movem momentaneamente com a velocidade da luz (ver Fig. 2.5).

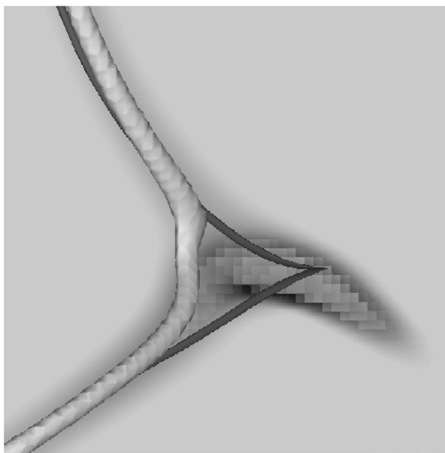


Figura 2.5: Simulações numéricas mostram que uma vez que um cúspide é formado, o mesmo evolui dinamicamente de forma a emitir uma alta quantidade de energia. Devido a essa emissão de energia (região nublada), o cúspide se torna menos acentuado como mostra a figura acima[75].

É importante ressaltar que a ação de Nambu-Goto (2.23) descreve o movimento de cordas com exatidão somente se as mesmas não se auto-interceptarem e não interagem entre si. Por outro lado, se uma dessas duas possibilidades mencionadas acontecer, a aproximação de Nambu-Goto perde a validade nas regiões onde as cordas interagem e, portanto, simulações numéricas desempenham um importante papel no entendimento

⁷O termo em inglês é conhecido como *cusp* para designar um cúspide presente em uma corda cósmica.

do comportamento de cordas nessas regiões. Adicionalmente, simulações numéricas revelam que após cordas cósmicas serem produzidas, elas sofrem um processo de interação e auto-interação no qual as mesmas dividem-se e em seguida se reconectam (veja Fig. 2.6). Cada interação entre as cordas produz um *kink*⁸ após a reconexão, e o resultado desse processo são laços de cordas com alguns *kinks*. Um único *kink* aparece no caso especial em que somente uma das funções $\mathbf{X}'_{\pm}(\sigma_{\pm})$ é descontínua.

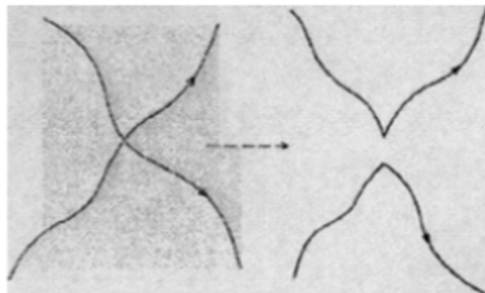


Figura 2.6: Processo de interação e auto-interação entre cordas[76]. Após este processo, um *kink* é formado em cada corda. No entanto, os mesmos desaparecem gradualmente durante a expansão do Universo.

2.4 regime de escala

O estudo de cordas cósmicas tem grande importância cosmológica. Neste sentido, para que se possa admitir a existência de cordas do ponto de vista teórico e com possibilidade de detecção observacional, a fração de energia no Universo associada às mesmas precisa ser constante. Para entendermos isto mais claramente, devemos analisar a razão Ω_c entre a densidade de energia total na forma de cordas presentes no volume do horizonte cosmológico e a densidade de energia do Universo. Desta forma, existem três possibilidades para o resultado desta razão à medida que o Universo evolui: aumentar, diminuir ou permanecer constante. Se Ω_c tivesse aumentando, a densidade de energia

⁸*kinks* são descontinuidades no vetor tangente $(\mathbf{X}'_{\pm}(\sigma_{\pm}))$ à corda cósmica.

das cordas estaria dominando a densidade de energia do Universo na presente época e, portanto, cordas já deveriam ter sido observadas. Se por outro lado, Ω_c estivesse diminuindo à medida que o Universo evolui, cordas teriam sido diluídas com o tempo e, deste modo, não se teria qualquer expectativa que as mesmas pudessem ser observadas. Como nenhuma das duas opções se mostra viável para a existência e a consequente detecção de cordas, devemos esperar, então, que Ω_c seja constante. Este procedimento, o qual constitui a alternativa mais plausível para a existência de um defeito tipo corda, é chamado de solução de escala.

Simulações numéricas têm mostrado que aproximadamente 90% da rede de cordas consiste de cordas infinitas, sendo o resto laços que rapidamente decaem [77, 78, 79]. Neste sentido, a densidade de energia das cordas é dominada por cordas infinitas e é dada aproximadamente por

$$\rho_\infty \sim \frac{\mu}{l^2}, \quad (2.45)$$

em que l é um comprimento definido tal que as cordas estejam todas dentro do volume l^3 . Para que Ω_c seja constante, $l = \lambda t$. Com isso, podemos reescrever (2.45) como [1]

$$\rho_\infty \sim \frac{\zeta \mu}{t^2}, \quad (2.46)$$

em que $\zeta = \lambda^{-2} \sim 16$ é o parâmetro que caracteriza a densidade associada às cordas infinitas. De fato, simulações numéricas confirmam que cordas cósmicas aproximam-se de um regime de escala e que, portanto, a definição (2.46) é consistente [1, 2].

A densidade de energia total do Universo na era dominada pela radiação é dada por

$$\rho_r = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.47)$$

em que $H = 1/2t$ é o parâmetro de Hubble (ver apêndice A.1). Assim, usando (2.46) e (2.47), a fração de energia Ω_c pode ser obtida como

$$\Omega_c \sim \frac{8\pi}{3} \lambda^2 G \mu \sim G \mu. \quad (2.48)$$

Portanto, cordas cósmicas contribuem com uma pequena fração⁹ constante para a densidade de energia do Universo, de acordo com a Eq. (2.48).

2.5 O espaço-tempo da corda cósmica

Podemos obter a expressão para a métrica que descreve o espaço-tempo de uma corda cósmica muito longa, estática e sem estrutura (muito fina), usando a aproximação de campo fraco. Neste sentido, a métrica do espaço tempo será aproximadamente a de Minkowski [1, 80]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

em que $h_{\mu\nu} \ll 1$ é a perturbação na métrica, a qual permite que a equação de Einstein seja linearizada. No gauge hamônico $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ [1], o tensor de Ricci (ver apêndice A.2) linearizado é dado por

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\partial_k\partial^k h_{\mu\nu}. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) nas equações de Einstein, temos

$$\square h_{\mu\nu} = 16\pi G S_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

em que $\square = \partial_k\partial^k$ é o operador D'Alembertiano e

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T, \quad (2.52)$$

com T sendo o traço do tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$. Deve-se notar que, na aproximação de campo fraco, a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é usada para levantar e baixar índices.

Para uma corda muito longa e estática, situada ao longo do eixo z , o tensor momento-energia (2.37) se reduz a [1]

$$T_\nu^\mu(\mathbf{x}) = \mu\delta(x)\delta(y)\text{diag}(1, 0, 0, 1). \quad (2.53)$$

⁹Dados observacionais da CMB indicam que $G\mu \lesssim 10^{-7}$ [6, 7].

Desta forma, para uma métrica estática, a Eq. (2.51) pode ser escrita como

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = 16\pi G S_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Podemos concluir, usando as Eqs. (2.52), (2.53) e (2.54), que $h_{00} = h_{33} = 0$, $h_{11} = h_{22} = \bar{h}$ e

$$\nabla^2 \bar{h} = -16\pi G \mu \delta^2(\mathbf{r}), \quad (2.55)$$

em que o vetor $\mathbf{r}$ está no plano (x, y) . Pode-se usar o método da transformada de Fourier para resolver a Eq. (2.55), o que nos permite escrever

$$\bar{h}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{h}(\mathbf{k}). \quad (2.56)$$

Substituindo a Eq. (2.56) em (2.55), temos

$$\bar{h}(\mathbf{k}) = \frac{16\pi G \mu}{k^2}, \quad (2.57)$$

em que $|\mathbf{k}| = k$. Para acharmos a expressão na Eq. (2.57), usamos a representação integral da delta de Dirac

$$\delta^2(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.58)$$

Substituindo (2.57) na Eq. (2.56), obtemos

$$\bar{h}(\mathbf{r}) = \frac{16\pi G \mu}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2}. \quad (2.59)$$

Para resolver a integral em (2.59) é conveniente introduzirmos um parâmetro ϵ de forma que $\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 + \epsilon^2}$ e, no final dos cálculos, tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. A Eq. (2.59) terá, então, a seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{h}(\mathbf{r}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{16\pi G \mu}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 + \epsilon^2} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{16\pi G \mu}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 + \epsilon^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ikr \cos \theta} \right], \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[8G \mu \int_0^\infty \frac{J_0(kr) k dk}{k^2 + \epsilon^2} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [8G \mu K_0(\epsilon r)] = -8G \mu \ln(r/r_0), \end{aligned} \quad (2.60)$$

em que J_0 é a função de Bessel de ordem zero, K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e r_0 é uma constante. Para obtermos a expressão em (2.60), usamos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_0(kr)kdk}{k^2 + m^2} &= K_0(mr), \\ \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ikr\cos\theta} &= 2\pi J_0(kr). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Portanto, as componentes de $h_{\mu\nu}$ são

$$\begin{aligned} h_{00} &= h_{33} = 0, \\ h_{11} &= h_{22} = -8G\mu \ln(r/r_0). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Usando as componentes de $h_{\mu\nu}$ dadas em (2.62), o elemento de linha em coordenadas cilíndricas para o espaço-tempo da corda cósmica terá a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + (1 - \bar{h})(dr^2 + r^2 d\theta^2) + dz^2, \quad (2.63)$$

em que $\bar{h} = h_{11} = h_{22}$. Introduzindo uma nova coordenada radial dada por

$$(1 - \bar{h})r^2 = (1 - 8G\mu)r'^2, \quad (2.64)$$

obtemos, para primeira ordem em $G\mu$,

$$ds^2 = -dt^2 + dr'^2 + (1 - 8G\mu)r'^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (2.65)$$

Deste modo, para uma nova coordenada angular dada por

$$\theta' \cong (1 - 4G\mu)\theta, \quad (2.66)$$

o elemento de linha (2.65) assume a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + dz^2. \quad (2.67)$$

Podemos perceber, portanto, que o espaço-tempo de uma corda muito longa e estática, é localmente plano. Contudo, globalmente, o espaço-tempo não é plano, visto que a coordenada angular tem a variação

$$0 \leq \theta' \leq 2\pi(1 - 4G\mu), \quad (2.68)$$

e, desta forma, a corda cósmica introduz um deficit angular dado por

$$\Delta = 8\pi G\mu. \quad (2.69)$$

O resultado em (2.69) implica que, para um superfície com t e z constantes, o espaço-tempo da corda é cônico (ver Fig. 2.7).

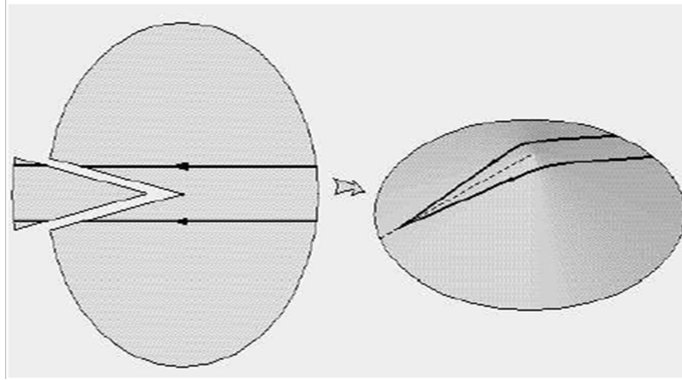


Figura 2.7: Representação do espaço-tempo cônico da corda cósmica. Neste espaço-tempo, o ângulo azimutal θ' varia de acordo com (2.68) [1].

O parametro $G\mu$ desempenha um importante papel visto que ele caracteriza a corda cósmica. Sua magnitude é estimada como sendo

$$G\mu \sim \left(\frac{\eta}{m_{Pl}} \right)^2, \quad (2.70)$$

em que η é a escala de quebra de simetria da corda e m_{Pl} é a massa de Planck. Na aproximação de campo fraco, (2.49) é válida somente para $G\mu \ll 1$, ou de forma equivalente, $\eta \ll m_{Pl}$.

2.6 Implicações observacionais

A formação de cordas no Universo primordial pode ter consequências astrofísicas e cosmológicas, as quais fornecem limites superiores para $G\mu$ e apresentam-se como uma possibilidade de detecção da presença de cordas. Assim, por exemplo, uma das características principais das cordas é que as mesmas servem como fontes de ondas gravitacionais. O fundo estocástico¹⁰ de ondas gravitacionais provenientes de laços de cordas em diferentes épocas do Universo pode causar perturbações na cronometragem de sinais vindos de pulsares de milissegundos, os quais, normalmente, servem como relógios muito precisos. O limite superior mais atual na tensão da corda obtido da cronometragem de pulsares é dado por $G\mu \lesssim 1,5 \times 10^{-8}$ [81].

Além do fundo estocástico, ondas gravitacionais podem ser emitidas¹¹ especificamente por cúspides e detectadas pelos experimentos LIGO e LISA, se a corda cósmica tiver uma tensão em torno de $G\mu \sim 10^{-14}$ [9].

Como vimos na seção anterior, o espaço-tempo em torno de uma corda cósmica muito longa e reta é localmente plano. Desta forma, partículas próximas à corda não sofrerão atração gravitacional, visto que a tensão da corda é igual a sua densidade de energia em magnitude e, portanto, a força atrativa devida à densidade de energia é cancelada pela força repulsiva devido à tensão da corda [1, 82]. Contudo, globalmente, o espaço-tempo é cônico e apresenta um déficit angular dado por $\delta = 8\pi G\mu$ (seção 2.5). Se um objeto astrofísico estiver localizado atrás da corda cósmica, uma dupla imagem do objeto será criada com uma separação angular da ordem de δ . O limite superior mais atual na tensão da corda devido a este efeito é dado por $G\mu \lesssim 2.3 \times 10^{-6}$, o qual é baseado na análise que compara imagens ópticas de pares de objetos muito próximos

¹⁰Em inglês o termo técnico é conhecido como *stochastic background*.

¹¹O termo em inglês usado para designar a emissão de ondas gravitacionais por cúspides é conhecido como *gravitational wave bursts*.

[83].

Cordas cósmicas também foram consideradas como fontes de flutuações de densidades no Universo primordial [84]. A medida precisa da radiação cósmica de fundo (CMBR) pelo WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) mostra que a contribuição de cordas para a potência total é inferior a 10 % [85, 86, 87]. Os picos acústicos observados no espectro de potência da CMBR são bem explicados de acordo com a cosmologia inflacionária, enquanto que cordas podem somente produzir um único pico, o qual fornece, usando dados do WMAP, um limite superior para a tensão da corda dado por $G\mu \lesssim 2.1 \times 10^{-7}$ [88].

Uma outra característica de cordas cósmicas é que as mesmas podem ser fontes de anisotropias na temperatura da CMBR, fenômeno este conhecido como efeito Kaiser-Stebbins [89]. Quando uma corda cósmica passa através de um meio uniforme de fótons com velocidade v , os fótons da frente da corda sofrem desvio para o vermelho, enquanto que aqueles que estão atrás da corda sofrem desvio para o azul devido à geometria cônica do espaço-tempo. Este efeito pode evidenciar-se como uma mudança descontínua na temperatura do meio dada por $\delta T = 8\pi G\mu v$, a qual poderá ser detectada pelo satélite Planck.

Enquanto a cosmologia inflacionária prevê perturbações escalar e tensorial, cordas cósmicas produzem, em grande parte, perturbações vetoriais. Esta propriedade característica pode servir como um meio de detecção de cordas cósmicas através do modo-B de polarização¹² da CMBR [90].

Cordas também podem ser responsáveis por fenômenos de altíssimas energias no Universo, tal como emissão de raios gama (diffuse gamma-ray background - GRB) e

¹²Sabemos que a CMBR é constituída de fótons que se movem livremente desde a superfície de último espalhamento, quando o Universo tinha aproximadamente 380 mil anos. Desde então, a CMBR sofreu vários espalhamentos, os quais induzem polarizações lineares na luz. Portanto, existem dois modos de polarização da CMBR: o modo-E e o modo-B.

raios cósmicos de altas energias (ultra high energy cosmic rays - UHECR's). Neste sentido, muitos mecanismos têm sido propostos para explicar a produção de partículas de altas energias, por cordas cósmicas. Emissão de partículas devido ao colapso de um laço com uma linha dupla [91, 92] produz um pequeno fluxo, visto que a probabilidade do colapso acontecer é muito pequena [93]. Além disso, na medida em que laços de cordas cósmicas perdem energia via radiação de ondas gravitacionais e de partículas, eles encolhem e se aniquilam dando origem à partículas de altas energias. Contudo, este mecanismo produz somente algumas partículas por laço e, portanto, seu fluxo é muito pequeno para ser detectado [94]. Laços de cordas também podem decair em partículas de altas energias [93]. Este mecanismo, no entanto, não é suportado por simulações de cordas cósmicas, uma vez que tais laços constituem somente uma fração da densidade de energia total da rede [95]. Além disso, uma pequena porção da corda cósmica pode ser aniquilada quando a mesma dobra-se sobre si própria, na região onde cúspides são formados. Este mecanismo é conhecido como aniquilação de cúspide e fornece fluxos de partículas de altas energias que poderão ser observados em experimentos futuros [96, 97, 98].

Existem outros mecanismos através dos quais raios cósmicos de altíssimas energias podem ser gerados. Radiação proveniente de cúspides em cordas cósmicas supercondutoras¹³ poderia explicar as mais altas emissões de energias de raios gama no Universo [99, 100, 101]. Cordas cósmicas supercondutoras também podem produzir neutrinos de altíssimas energias provenientes de cúspides e que poderão ser observados no experimento JEM-EUSO (Japanese Experiment Module - Extreme Universe Space Observatory). Além do mais, condensados de Higgs podem ser formados em cordas cósmicas e, desta forma, um grande número de partículas Higgs podem ser produzidas por cúspides e como subproduto de decaimento, raios cósmicos de altíssimas energias

¹³Cordas supercondutoras são cordas que conduzem corrente elétrica.

[102].

No próximo capítulo, analisamos a emissão de partículas Higgs por cordas com condensado. Veremos como a emissão de Higgs pode afetar o período da fotodissociação e contribuir para a quantidade de raios gama observados no Universo.

Capítulo 3

Emissão de partículas de Higgs

In five minutes you will say that it is all so absurdly simple.

Sherlock Holmes, The Adventure of the Dancing Men

– Arthur Conan Doyle –

Neste capítulo, consideramos a produção de partículas de Higgs por cordas cósmicas com condensado, segundo o tratamento dado em [102]. O autor considera o caso em que partículas de Higgs são emitidas por cordas cósmicas com cúspides, para uma distribuição particular de laços. Desta forma, restrições na tensão $G\mu$ da corda devido às observações de raios cósmicos de altíssimas energias (UHECR's), tais como, o fundo difuso de raios gama (GRB) e o fluxo difuso de prótons (PF) foram obtidas. Com isso, a conclusão é que cordas cósmicas com uma escala de energia de 10^{13} GeV podem produzir UHECR's. Ao invés disso, investigamos a emissão de partículas de Higgs por cordas cósmicas que foram produzidas na era da radiação. Nossas aplicações cosmológicas são baseadas em considerações sobre como a emissão de partículas de Higgs pode afetar a produção de elementos leves, devido à fotodissociação, para tempos cósmicos $10^{13} s \gtrsim t \gtrsim 10^8 s$, e também sua contribuição para a quantidade de GRB que são observados para tempos $t \gtrsim 10^{13} s$.

O capítulo está organizado do seguinte modo: na seção 3.1 apresentamos a ação

total que descreve a corda cósmica com condensado e, então, calculamos a taxa na qual partículas de Higgs são emitidas. Com isso, estimamos o comprimento necessário para que um laço possa sobreviver ao menos um tempo de Hubble. Na seção 3.2, descrevemos a distribuição de laços de cordas formadas na era da radiação e como a emissão de partículas de Higgs pode ser eficiente, evitando a época dominada pela fricção. Na seção 3.3 são obtidas restrições cosmológicas na tensão da corda $G\mu$ [103] e cálculos adicionais são apresentados no apêndice B.

3.1 Radiação de partículas de Higgs emitida por cúspides

Um tipo particular de interação entre a corda cósmica e um campo escalar surge quando o mesmo condensa no interior da corda. Vachaspati [102] mostrou que o campo de Higgs pode interagir com a corda de forma que o mesmo condense. Neste sentido, a ação total (ver apêndice B.1) para o campo de Higgs h interagindo com uma corda cósmica de tensão μ é dada por

$$S = -\mu \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}m_h^2 h^2 - \kappa j(x)h \right], \quad (3.1)$$

em que γ é o determinante da métrica induzida γ_{ab} (Eq. (2.21)), g é o determinante da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, $X^\mu(\sigma, \tau)$ descreve a folha de mundo da corda, $j(x)$ é a fonte do campo de Higgs h , κ é a constante de acoplamento e m_h é a massa do Higgs.

A equação de movimento para o campo de Higgs, obtida variando a ação (3.1) com relação ao campo h , no espaço-tempo de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, é dada por

$$(\square - m_h^2)h = -\kappa j(x), \quad (3.2)$$

em que

$$j(x) = -\eta \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \delta^4(x - x(\sigma, \tau)), \quad (3.3)$$

com η sendo a escala de energia da corda.

O número de partículas de Higgs, com momento no intervalo entre k e $k + dk$, emitidas de um laço é escrita como [102]

$$dN_h(k) = \kappa^2 |j(\omega_k, \mathbf{k})|^2 \frac{d^3k}{2\omega_k} = \kappa^2 |j(\omega_k, \mathbf{k})|^2 \frac{k^2 dk}{2\omega_k} d\Omega_k, \quad (3.4)$$

em que $j(\omega_k, \mathbf{k})$ é a transformada de Fourier da fonte $j(x)$ e pode ser escrita como

$$j(\omega_k, \mathbf{k}) = \int d^4x j(x) e^{ik_\nu X^\nu}, \quad (3.5)$$

$$= -\eta \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} e^{-i[\omega_k \tau - \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\sigma, \tau)]}, \quad (3.6)$$

com $\omega_k = \sqrt{k^2 + m_h^2}$.

Usando a solução geral (2.35), a Eq. (3.6) é reescrita como

$$j(\omega_k, \mathbf{k}) = -\frac{\eta}{4} \int d\sigma_+ d\sigma_- (1 + \mathbf{X}'_+ \cdot \mathbf{X}'_-) e^{\frac{i}{2}[\phi_+ - \phi_-]}, \quad (3.7)$$

em que $\phi_\pm \equiv (\omega_k \sigma_\pm \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_\pm)$. A integral na Eq. (3.7) pode ser resolvida na aproximação de fase estacionária (ver apêndice B.2), para laços de comprimento $L \gg m_h^{-1}$ [10, 17]. Neste caso, as fases $\phi_\pm$ têm pontos de sela, o que significa que cordas cósmicas podem ter cúspides ou *kinks*. Cúspides são formados quando as duas fases $\phi_\pm$ tiverem pontos de sela, e *kinks* quando ϕ_+ ou ϕ_- tiver um ponto de sela e o outro tiver uma descontinuidade [9]. Para aplicações cosmológicas, estamos interessados em emissão de partículas de Higgs por cúspides em detrimento à *kinks*, as quais não contribuem significativamente para a emissão de partículas de Higgs. Deste modo, usamos os resultados da Ref. [10], onde foi resolvida uma integral semelhante a dada pela Eq. (3.7) considerando, também, um campo escalar interagindo linearmente com cordas. Portanto, podemos usar os mesmos resultados (apêndice B.2) da Ref. [10] para $\phi_\pm$, que são dados por

$$\phi_\pm \approx (\omega_k - k)\sigma_\pm + \frac{2\pi^2}{3L^2} k \sigma_\pm^3, \quad (3.8)$$

em que L é o comprimento do laço. Para estas aproximações foi admitido que $\mathbf{k}$ é paralelo ao vetor tangente $\mathbf{X}'_\pm$, à folha de mundo. Para pequenos ângulos entre esses

dois vetores, $\theta_k \lesssim (kL)^{-1/3}$, a Eq. (3.8) ainda pode ser aplicada [10, 17]. Além disso, assim como em [10], podemos usar a seguinte aproximação para o integrando na Eq. (3.7):

$$1 + \mathbf{X}'_+ \cdot \mathbf{X}'_- \approx -\frac{4\pi^2}{L^2} \sigma_+ \sigma_- . \quad (3.9)$$

Assim, para o termo principal, a Eq. (3.7) pode ser expressa como:

$$j(\omega_k, \mathbf{k}) \approx \frac{M\pi^2}{L^2} I_+ I_- , \quad (3.10)$$

em que

$$I_{\pm} = \int_{-L}^L d\sigma_{\pm} \sigma_{\pm} e^{\pm i \frac{\phi}{2}} . \quad (3.11)$$

Após uma mudança de variáveis, obtemos [10]

$$I_{\pm}(u) = \frac{L^2}{2\pi^2} \left(\frac{\omega_n}{k} - 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{\pm i \frac{3}{2} u [x + \frac{1}{3} x^3]} , \quad (3.12)$$

em que

$$u \equiv \frac{Lk}{3\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\omega_n}{k} - 1 \right)^{3/2} . \quad (3.13)$$

A parte real da integral na Eq. (3.12) é nula visto que a mesma é uma função ímpar de x e a parte imaginária pode ser expressa em termos da função de Bessel modificada de ordem $2/3$

$$I_{\pm}(u) = \pm i \frac{L^2}{2\pi^2} \left(\frac{\omega_n}{k} - 1 \right) \frac{2}{\sqrt{3}} K_{2/3}(u) . \quad (3.14)$$

A função $K_{\nu}(u)$ vai exponencialmente à zero para valores grandes de u e pode ser aproximada como uma lei de potência no limite $u \ll 1$, quando $K_{\nu}(u) \approx \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{\nu} \right)^{\nu}$. Esta forma assintótica corresponde a $k \gg m_h$, o qual nos permite encontrar que $u \approx \frac{Lm_h^3}{12\pi k^2}$. Deste modo, obtemos

$$I_{\pm} \sim \pm 4, 1 \times 10^{-1} i L^{4/3} k^{-2/3} . \quad (3.15)$$

O resultado na Eq. (3.15) é somente válido quando $k \gtrsim k_{\min}$, onde

$$k_{\min} \sim \frac{1}{4} m_h \sqrt{m_h L} . \quad (3.16)$$

Para $k \lesssim k_{\min}$, $I_{\pm}$ vai a zero exponencialmente (ver apêndice B.2).

Usando (3.15), a Eq. (3.10) pode ser expressa como

$$j(\omega_k, \mathbf{k}) \sim ML^{2/3}k^{-4/3}. \quad (3.17)$$

Deste modo, a Eq. (3.4) fornece

$$dN_h(k) \sim \frac{\kappa^2}{2} |j(\omega_k, \mathbf{k})|^2 d\Omega_k k dk \sim \kappa^2 M^2 L^{2/3} \frac{dk}{k^{7/3}}, \quad (3.18)$$

em que

$$\Omega_k \sim 2\pi\theta_k^2 \sim 2\pi(kL)^{-2/3}, \quad (3.19)$$

com $\theta_k \sim \frac{1}{(Lk)^{1/3}}$. Vejamos, agora, qual o limite de validade de (3.18). Para isto, devemos lembrar que a aniquilação de cúspide ocorre quando dois segmentos da corda sobrepõem-se em uma região de comprimento $\sigma_c \sim \sqrt{rL}$, em que $r \sim M^{-1}$ é a largura da corda [98] (veja Fig. 3.1). Deste modo, a emissão de partículas de Higgs precisa ocorrer para uma região de comprimento $\sigma_c \lesssim \Delta\sigma \sim L/(kL)^{1/3}$, pois, de outro modo a aproximação de Nambu-Goto perde sua validade [17, 102, 98]. Com isto, k terá um limite superior dado por $k \lesssim M\sqrt{ML}$. Portanto, o resultado em (3.18) é válido somente para k variando de $k_{\min} \sim m_h\sqrt{m_h L}$ até $k_{\max} = M\sqrt{ML}$.

Da Eq. (3.18), o número de partículas de Higgs emitidas por período de oscilação é aproximadamente dado por

$$\dot{N}_h(k) \sim \kappa^2 \mu L^{-1/3} k_{\min}^{-4/3}, \quad (3.20)$$

em que $\mu \sim M^2$. Podemos perceber que a principal contribuição para a Eq. (3.20) vem de $k_{\min}$, o qual é dado pela Eq. (3.16).

O espectro de potência para a emissão de Higgs pode ser obtido da Eq. (3.18) como

$$dP_h(k) = \frac{k dN_h(k)}{L/2} \sim \kappa^2 \mu L^{-1/3} \frac{dk}{k^{4/3}}, \quad (3.21)$$

$$P_h(k) \sim \kappa^2 \mu L^{-1/3} k_{\min}^{-1/3} \sim \frac{\kappa^2 \mu}{\sqrt{L m_h}}, \quad (3.22)$$

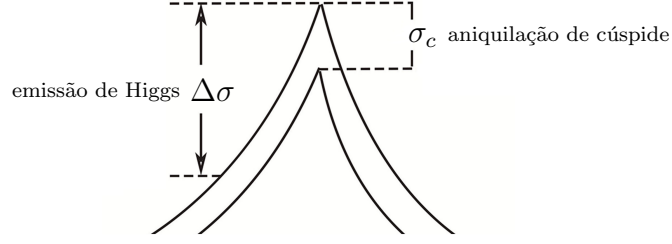


Figura 3.1: Aniquilação de cuspide ocorre para um comprimento dado por $\sigma_c \sim \sqrt{L/M}$ enquanto que a emissão de Higgs com momento k ocorre para um comprimento $\Delta\sigma \gtrsim \sigma_c$. Esta última condição fornece um limite superior no momento $k \lesssim M\sqrt{ML}$. Para um valor de k maior que este limite superior, a aproximação de Nambu-Goto não é mais válida (apêndice B.2).

que é um resultado dominado pelo limite inferior, $k_{\min}$.

Ondas gravitacionais também podem ser irradiadas por laços de cordas cósmicas com uma potência dada por

$$P_g \sim \Gamma G \mu^2, \quad (3.23)$$

em que Γ é uma constante cujo valor é aproximadamente 50 [1]. Quando $P_h \sim P_g$, laços de comprimento

$$L_e = \frac{\kappa^4}{(\Gamma G \mu)^2 m_h} \quad (3.24)$$

emitem a mesma quantidade de energia em forma de partículas e radiação gravitacional. Deste modo, para $L < L_e$, a emissão de partículas domina sobre a emissão de radiação gravitacional e, para $L > L_e$, radiação gravitacional domina sobre a emissão de partículas.

A taxa na qual laços com energia total $E = \mu L$ irradiam ondas gravitacionais e partículas de Higgs é dada por

$$\mu \frac{dL}{dt} = -\Gamma G \mu^2 - \frac{\kappa^2 \mu}{\sqrt{L m_h}}. \quad (3.25)$$

Podemos reescrever (3.25) como

$$\dot{L} = -\Gamma G\mu \left(1 + \sqrt{\frac{L_e}{L}} \right), \quad (3.26)$$

em que o ponto sobre L representa derivação com relação à t e L_e é dado pela Eq. (3.24).

O tempo de vida de um laço, quando a radiação de Higgs é o principal mecanismo de perda de energia, pode ser obtido de (3.25) e é dado por

$$\Delta t \sim \frac{\mu L}{P_h} \sim \frac{L^{3/2} m_h^{1/2}}{\kappa^2}. \quad (3.27)$$

Isto será maior que um tempo de Hubble t para $L > L_h(t)$, em que

$$L_h(t) = \kappa^{4/3} m_h^{-1/3} t^{2/3}, \quad (3.28)$$

para o caso de emissão de Higgs.

De modo semelhante, o tempo de vida de um laço, quando o principal mecanismo de perda de energia é por emissão de ondas gravitacionais, pode ser escrito como

$$\Delta t \sim \frac{\mu L}{P_g} \sim \frac{L}{\Gamma G\mu}. \quad (3.29)$$

Isto será maior que um tempo de Hubble t para $L > L_g(t)$, em que

$$L_g(t) = \Gamma G\mu t, \quad (3.30)$$

para o caso de emissão de ondas gravitacionais. Deste modo, em geral, se laços sobrevivem durante mais que um tempo de Hubble, os comprimentos dos mesmos precisam satisfazer $L > L_H(t)$ [17], em que

$$L_H(t) = \text{Max}[L_g(t), L_h(t)], \quad (3.31)$$

com $\text{Max}[a, b] = a$ ou b , para o que dominar.

O tempo no qual os três comprimentos L_e , $L_g(t)$ e $L_h(t)$ são iguais é dado por

$$t_e \sim \frac{\kappa^4}{(\Gamma G \mu)^3 m_h}. \quad (3.32)$$

Neste sentido, radiação de ondas gravitacionais domina para $t > t_e$, enquanto que radiação de Higgs domina para $t < t_e$.

3.2 Distribuição de laços e período dominado pela fricção

3.2.1 Distribuição de laços

A densidade do número de laços depende do comprimento dos laços formados da rede de cordas cósmicas. A questão relacionada ao comprimento típico com o qual laços são formados tem sido um assunto de profundo debate. Neste sentido, vários trabalhos analíticos [104, 105, 106] e diferentes simulações [107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 95] têm sido realizadas com diferentes resultados obtidos. Contudo, a simulação mais recente realizada [95], sugere que laços formados em um tempo cósmico, t , têm seus comprimentos característicos dados pela relação de escala

$$L_i \sim \beta t, \quad (3.33)$$

com $\beta \sim 0.1$.

A densidade do número de laços, com comprimentos entre L e $L + dL$, formados na era dominada pela radiação é dada por [1]

$$n(L, t) dL \sim \zeta p^{-1} \beta^{1/2} t^{-3/2} L^{-5/2} dL, \quad \text{for } t < t_{\text{eq}}, \quad (3.34)$$

em que $L_H(t) \lesssim L \lesssim \beta t$, $t_{\text{eq}} \sim 2,4 \times 10^{12}$ sec, p é a probabilidade de reconexão, que é igual à um para cordas cósmicas ordinárias, e $\zeta \sim 16$ é o parâmetro que caracteriza a densidade associada a cordas infinitas $\rho_\infty \sim \zeta \mu / t^2$ (seção 2.4).

A densidade do número de laços que são formados na era dominada pela radiação com comprimento entre $(L, L + dL)$, e que ainda sobrevivem na era dominada pela matéria, pode ser escrita como

$$n(L, t)dL \sim p^{-1}\zeta(\beta t_{\text{eq}})^{1/2}t^{-2}L^{-5/2}dL, \quad \text{for } t > t_{\text{eq}}, \quad (3.35)$$

em que $L_H(t) \lesssim L \lesssim \beta t_{\text{eq}}$. Nas Eqs. (3.34) e (3.35), o comprimento mínimo $L_H(t)$ depende se a dissipação da energia de laços é dominada pela emissão gravitacional ou pela emissão de partículas de Higgs. Este comprimento $L_H(t)$ será dado por (3.28) para $t \lesssim t_e$ ou por (3.30) para $t \gtrsim t_e$, com t_e dado pela Eq. (3.32).

3.2.2 Época dominada pela fricção

Analizaremos, agora, o efeito do período dominado pela fricção durante a evolução da corda cósmica, sobre as distribuições do número de laços dados pelas Eqs. (3.34) e (3.35).

Após a formação da corda cósmica no tempo $t_f \sim t_{Pl}/(G\mu)$, seu movimento é rapidamente enfraquecido devido à sua interação com a alta densidade de plasma térmico do Universo. Neste período, o principal mecanismo de perda de energia é por fricção, de forma que partículas ou radiação gravitacional serão emitidos por laços somente para tempos $t > t_d$, em que t_d é o tempo no qual o período de fricção termina, que é dado por [1]:

$$t_d \sim \frac{t_p}{(G\mu)^2}. \quad (3.36)$$

A condição correspondente para o comprimento dos laços é [10]

$$L_H(t) \gtrsim \beta t_d. \quad (3.37)$$

Deste modo, para $t > t_e$, laços com comprimento $L_g(t) = \Gamma G\mu t$ são os dominantes e a emissão de ondas gravitacionais não será afetada pelo período dominado pela fricção

somente quando $t \gtrsim t_g$, onde

$$t_g = \frac{\beta t_p}{\Gamma(G\mu)^3}. \quad (3.38)$$

Para o caso em que a emissão de partículas de Higgs prevalece, $t < t_e$, laços de comprimento L_h são os que dominam. Desta forma, a emissão de Higgs será eficiente somente quando $t > t_h$, onde

$$t_h \sim \sqrt{\frac{\beta^3 t_d^3 m_h}{\kappa^4}}. \quad (3.39)$$

Note que não está claro se t_g é maior do que t_e ou não. Contudo, pode-se verificar que para $\kappa \gtrsim 10^{-4}$, $t_h \lesssim t_g \lesssim t_e$ e para $\kappa \lesssim 10^{-4}$, $t_h \gtrsim t_g \gtrsim t_e$. A última condição significa que para $\kappa \lesssim 10^{-4}$, somente contribuições devido a laços de comprimento $L_g(t)$ fornecem restrições em $G\mu$.

3.3 Restrições cosmológicas na tensão da corda cósmica

Nesta seção discutimos consequências cosmológicas devido à emissão de partículas de Higgs por cordas cósmicas com cúspides.

3.3.1 Densidade de energia

A densidade de energia total por unidade de tempo que é emitida por laços, na forma de partículas de Higgs, é dada por [17]

$$\dot{\rho}_h(t) = \int dL n_L(L, t) P_h, \quad (3.40)$$

em que P_h é a potência, dada por (3.22), emitida por um laço de comprimento L e $n_L(L, t)dL$ é dado por (3.34) ou (3.35). Na era dominada pela radiação, a integral (3.40) é obtida como

$$\dot{\rho}_h(t) \sim \frac{\zeta \beta^{1/2} \kappa^2 m_h^{-1/2} \mu}{(\Gamma G\mu)^2 t^{7/2}} \text{Min} \left[1, \frac{t^{2/3}}{t_e^{2/3}} \right], \quad \text{for } t < t_{\text{eq}}, \quad (3.41)$$

em que usamos (3.31), (3.32) and (3.34).

Na era dominada pela matéria, a integral (3.40) é dada por

$$\dot{\rho}_h(t) \sim \frac{\zeta(\beta t_{\text{eq}})^{1/2} \kappa^2 m_h^{-1/2} \mu}{(\Gamma G \mu)^2 t^4} \text{Min} \left[1, \frac{t^{2/3}}{t_e^{2/3}} \right], \quad \text{for } t > t_{\text{eq}}, \quad (3.42)$$

em que usamos (3.31), (3.32) and (3.35). Note que nas expressões (3.41) e (3.42), laços de comprimento $L_H(t)$ são os que dominam. Nas Eqs. (3.41) e (3.42), também usamos a notação $\text{Min}[a, b] = a$ if $a < b$ e b if $b < a$.

Agora, podemos usar a Eq. (3.41) para obtermos a quantidade de energia liberada, na era da radiação, pela emissão de partículas de Higgs em um tempo de Hubble. Esta energia pode ser estimada como

$$\rho_L(t) \sim t \dot{\rho}_h(t) \sim \frac{\zeta \beta^{1/2} \kappa^2 m_h^{-1/2} \mu}{(\Gamma G \mu)^2 t^{5/2}} \text{Min} \left[1, \frac{t^{2/3}}{t_e^{2/3}} \right]. \quad (3.43)$$

Deste modo, a densidade de energia liberada por unidade de densidade de entropia é dada por

$$Y(t) = \frac{\rho_L(t)}{s(t)} \sim \frac{5 \zeta \beta^{1/2} \kappa^2}{\Gamma^2 G \mu} \left(\frac{m_p}{m_h} \right)^{1/2} \frac{1}{t} \text{Min} \left[1, \frac{t^{2/3}}{t_e^{2/3}} \right], \quad (3.44)$$

em que a densidade de entropia $s(t)$ é dada pela seguinte expressão:

$$s(t) = 0,00725 \mathcal{N}^{1/4} \left(\frac{m_p}{t} \right)^{3/2}, \quad (3.45)$$

com $\mathcal{N} \sim 100$ sendo o número total de graus de liberdade de spin, na era dominada pela radiação [114].

3.3.2 Restrições cosmológicas

As cordas cósmicas com cúspides devem emitir Higgs durante toda a evolução do Universo, até a presente época. A energia lançada no meio cosmológico quando o Higgs decai é, então, limitada por observações. A liberação de partículas no Universo, as quais são subprodutos do decaimento da partícula de Higgs, sofre restrição por diferentes

Tempo t	Limites superiores	Dados observacionais
$10^8 \text{sec} < t < 10^{12} \text{sec}$	$Y \sim 10^{-14} \text{ GeV}$	fotodissociação
$t > 10^{13} \text{sec}$	$\omega_{\text{max}} \sim 5,8 \times 10^{-7} \text{ eV/cm}^3$	GRB

Tabela 3.1: Dados observacionais da fotodissociação e do GRB. Para que a emissão de partículas de Higgs possa contribuir para a fotodissociação dos elementos leves, é necessário que (3.44) tenha um limite superior da ordem de $Y \sim 10^{-14} \text{ GeV}$. Por outro lado, para que a emissão de partículas de Higgs possa contribuir para os raios gama observados no Universo na presente época, é necessário que (3.46) tenha um limite superior da ordem de $\omega_{\text{max}} \sim 5,8 \times 10^{-7} \text{ eV/cm}^3$.

dados observacionais de origem cosmológica, em particular, da fotodissociação de elementos leves e dos GRB's. Desta forma, no Universo primordial, a energia liberada pode afetar o período da nucleossíntese do big bang para $10^{-2}s \lesssim t \lesssim 10^{13}s$ e pode contribuir para os GRB's observados no Universo para $t \gtrsim 10^{13}s$. Neste sentido, alguns trabalhos têm sido realizados com o objetivo de entender como partículas com um longo tempo de vida podem afetar a nucleossíntese do big bang [115, 116, 117, 118]. Contudo, a partícula de Higgs tem um tempo de vida muito curto e, embora seu tempo de vida possa ser prolongado por um alto fator de Lorentz, a mesma ainda decai em um tempo de Hubble¹. Adicionalmente, como explicado em [17], para $t \lesssim 10^8s$, processos hadrônicos complicados dominam e, desta forma, estamos interessados apenas em um tempo $10^{12}s \gtrsim t \gtrsim 10^8s$ o qual é caracterizado por processos radioativos, à saber, fotodissociação dos elementos leves e que pode ser aplicado ao nosso caso, de modo mais direto. O dado observacional para o período no qual processos radioativos ocorrem é apresentado na Tabela 3.1. Podemos agora obter restrições na tensão da corda cósmica $G\mu$.

¹O tempo de vida da partícula de Higgs é prolongado devido à um alto fator de Lorentz $\gamma \sim \sqrt{m_h L}/4$, quando é emitido por cordas com cúspides.

Uma vez que partículas de Higgs são emitidas, irão decair na forma de raios gama, de forma que dados observacionais dos GRB's presentes no Universo podem ser usados [118, 119, 120, 121]. Deste modo, a densidade de energia eletromagnética associada à emissão de partículas de Higgs, o qual decai em fótons, é dada por

$$\omega = \frac{f_\pi}{2} \int dt \frac{\dot{\rho}_h(t)}{(1+z)^4}, \quad (3.46)$$

em que $f_\pi \sim 1$, $1/2$ é a fração de energia associada aos raios gama e $(1+z) = (t_0/t)^{2/3}$, é dada na era da matéria. O fator $1/(1+z)^4$ é devido ao desvio para o vermelho da densidade de energia do fóton, do momento de sua produção até a presente época. Deste modo, a integral em t , na Eq. (3.46), pode ser resolvida integrando de $t_i \sim 10^{15}s$ a $t_0 \sim 4,4 \times 10^{17}s$. O limite inferior t_i é justificado porque os fótons produzidos em $t_i \lesssim 10^{15}s$ são absorvidos pelo meio cosmológico de forma que podemos desprezar contribuições para esses tempos [10]. Com isso, a integral na Eq. (3.46) é dominada pelo seu limite inferior para $t_e < t_i$, por seu limite superior para $t_e > t_0$, e pela contribuição $t = t_e$ para $t_i < t_e < t_0$. Assim, obtemos

$$\omega \sim \frac{\zeta(\beta t_{eq})^{1/2} \kappa^2 m_h^{-1/2} \mu}{(\Gamma G \mu)^2 t_0^{8/3} t_e^{1/3}} \text{Min} \left[\frac{t_e^{1/3}}{t_{cas}^{1/3}}, 2 - \frac{t_{cas}^{1/3}}{t_e^{1/3}} - \frac{t_e^{1/3}}{t_0^{1/3}}, \frac{t_0^{1/3}}{t_e^{1/3}} \right]. \quad (3.47)$$

Usando (3.47), dados observacionais do *Fermi-LAT diffuse gamma-ray* [119] (veja Tabela 3.1 para o máximo valor permitido para ω na Eq. (3.47)) fornecem restrições na tensão da corda $G\mu$. As expressões analíticas para essas restrições podem ser vistas na Tabela 3.2.

Para partículas de Higgs decaindo entre 10^8 sec e 10^{13} sec, o limite superior é mostrado na Tabela 3.1. Deste modo, usando (3.44), obtemos restrições devido à fotodissociação dos elementos leves [115, 116, 117, 118] (veja Tabela 3.2). Colocamos em um gráfico, todas as restrições da Tabela 3.2 no plano $(\kappa, G\mu)$ (veja Fig. 3.2) e concluímos que a emissão de partículas de Higgs é descartada, a menos que a tensão

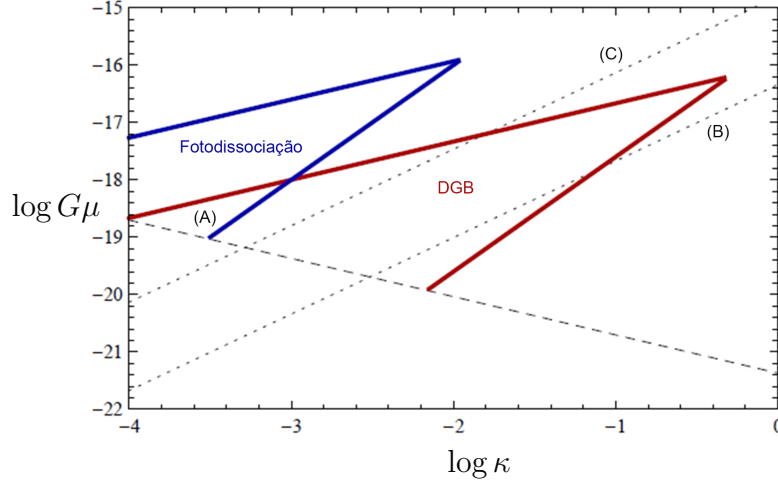


Figura 3.2: Restrições na tensão da corda $G\mu$ devido a observações da fotodissociação dos elementos leves e dos GRB's mostradas no plano $(\kappa, G\mu)$ para $\zeta \sim 16$, $\beta \sim 0,1$ and $\Gamma \sim 50$. Para $t \lesssim t_e$, partículas de Higgs não podem ser produzidas para valores $G\mu$ abaixo da linha tracejada, visto que esta região é proibida pelo período dominado pela fricção, e as linhas pontilhadas (B) e (C) correspondem à restrições obtidas de $t_e \lesssim t_0$ e $t_e \lesssim t_{eq}$, respectivamente. A pequena região (A) (sobreposição das regiões permitidas pela fotodissociação e pelos GRB's) corresponde a $G\mu \sim 10^{-19}$ e pode ser detectada por observações da fotodissociação e dos GRB's. Para este valor de $G\mu$, o tempo t_e é aproximadamente $10^{11}s$.

da corda assuma o valor $G\mu \sim 10^{-19}$, o qual corresponde à pequena região sobreposta (A). As linhas pontilhadas em (B) e (C) na Fig. 3.2 são devido às restrições obtidas das relações $t_e \lesssim t_0$ (GRB) and $t_e \lesssim t_{eq}$ (fotodissociação), respectivamente. Além disso, para $t_h \lesssim t \lesssim t_e$, a emissão de partículas de Higgs não é permitida pela região abaixo da linha tracejada, a qual corresponde à $t_h \lesssim 10^8 s$. Para valores de $\kappa \lesssim 10^{-4}$, somente contribuições devido a $L_g(t)$ fornecem restrições na tensão da corda. Para este caso, emissão de partículas de Higgs é também descartada, a menos que $G\mu \sim 10^{-19}$, para $\kappa \sim 10^{-4}$.

Restrições em $G\mu$	Dados observacionais
$G\mu \gtrsim 2,7 \times 10^{-16} \kappa^2$	GRB
$G\mu \lesssim 5,8 \times 10^{-17} \kappa^{2/3}$	GRB
$G\mu \gtrsim 2,1 \times 10^{-12} \kappa^2$	fotodissociação
$G\mu \lesssim 2,6 \times 10^{-15} \kappa^{2/3}$	fotodissociação

Tabela 3.2: Restrições na tensão da corda $G\mu$. Esta tabela mostra restrições analíticas que obtemos de observações dos GRB's e da fotodissociação de elementos leves [115, 116, 117, 118], para a emissão de partículas de Higgs, como função da constante de acoplamento κ .

Capítulo 4

Efeito Casimir - aspectos principais

I mentioned my results to Neils Bohr, during a walk. That is nice, he said, that is something new. I told him that I was puzzled by the extremely simple form of the expressions for the interaction at very large distances and he mumbled something about zero-point energy. That was all, but it put me on a new track.

– H.B.G Casimir –

O conceito de vácuo tem sido objeto de discussão desde a antiguidade, momento no qual conhecidos filósofos gregos como, por exemplo, Platão e Aristóteles defendiam idéias completamente opostas sobre esse tema. As duas idéias que se estabeleceram desde então foram a da existência do vazio, ou seja, uma região no espaço onde não haveria completamente nada, e a de que sempre haveria algo permeando tudo. O debate continuou ao longo da história com personagens como Evangelista Torricelli, James Clerk Maxwell e Albert Einstein, assumindo diferentes visões sobre esse assunto. A idéia do éter, por exemplo, defendida por Maxwell, foi inevitavelmente deixada para trás com a teoria da relatividade especial de Einstein, publicada em 1905, quando foi mostrado que é impossível se ter um referencial privilegiado no qual o éter estaria em repouso.

O conceito de vácuo no contexto da teoria quântica de campos é diferente do conceito

clássico. O vácuo quântico, por exemplo, está repleto de partículas que são criadas e aniquiladas rapidamente e, devido a isso, conhecidas como partículas virtuais. Além disso, a existência de tais partículas é consistente com o princípio da incerteza, o qual estabelece que é impossível medir-se, com precisão absoluta, de modo simultâneo, energia e momento¹. Neste caso, não seria possível medir, com precisão, o valor zero para a energia do vácuo e, portanto, o que existe são somente flutuações em torno de um valor médio de observáveis físicos, tais como energia e momento. O valor médio associado às grandezas mencionadas, quando obtido em um espaço-tempo sem fronteiras ou condições de contorno, é zero. No entanto, quando o espaço-tempo contém ou fronteiras devido a corpos macroscópicos ou campos com condições de contorno, as flutuações podem ser modificadas de tal forma que os valores médios dos observáveis físicos sejam diferentes de zero. Dentre as consequências associadas a este fenômeno de origem quântica, estão o efeito Casimir² e sua relação com outros efeitos em teoria quântica de campos associados com a existência de oscilações de ponto zero³, tais como: polarização do vácuo devido a campos externos, criação de partículas do vácuo devido a campos externos, efeito Casimir dinâmico, emissão espontânea proveniente de átomos, o desvio Lamb, momento magnético anômalo de um elétron, dentre outros.

Além do surgimento do efeito Casimir quando tem-se fronteiras materiais, como no caso das duas placas metálicas ideais adotadas como condições de fronteiras por Casimir em seu trabalho original em 1948, o efeito também surge quando estuda-se materiais

¹Existe também a seguinte relação entre energia e tempo: $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$. No entanto, esta relação tem uma natureza diferente daquela entre momento e energia. Sua interpretação correta ensina quanto deve durar, no mínimo, o processo de medida de um dado sistema para que a precisão obtida seja ΔE .

²Hendrik Brugt Gerhard Casimir foi um físico holandês e previu, em 1948, que duas placas metálicas neutras, colocadas no vácuo e separadas por uma certa distância, atraem-se. O nome deste fenômeno ficou conhecido como efeito Casimir.

³Estamos usando a denominação *oscilações de ponto zero* como um sinônimo para o termo *oscilações de vácuo* uma vez que tal conceito, na visão da física moderna, está relacionado à mínima energia do sistema que está associada ao valor zero do número quântico que rotula os níveis de energia.

reais (situação na qual considera-se a condutividade finita dos metais, rugosidade e temperatura). Neste caso, as correções associadas à energia de Casimir dependem da carga do elétron e de outros parâmetros. No estudo do efeito Casimir em sistemas com temperatura finita, usualmente, adota-se a abordagem de Matsubara, aplicada a sistemas em equilíbrio térmico.

Um outro ponto importante é a relação do efeito Casimir com a força de van der Waals⁴. Esta força surge em sistemas que consistem de átomos, moléculas ou corpos macroscópicos, com ou sem momento de dipolo permanente, produzindo flutuações no campo eletromagnético em um espaço interatômico ou intermolecular. Originalmente, a teoria quântica associada à interação de van der Waals foi desenvolvida em uma abordagem não-relativística por London (1930) e em uma abordagem relativística por Casimir e Polder⁵ (1948). Neste sentido, o nome genérico para as interações de Casimir e de van der Waals ficou conhecido como *forças de dispersão* uma vez que tais interações são causadas por dispersões do operador momento de dipolo.

Desde o surgimento do trabalho de Casimir e Polder em 1948 [19], o efeito Casimir tem ganhado ampla atenção, em especial nas duas últimas décadas. Atualmente, sabe-se que este é um assunto extremamente vasto, pois envolve praticamente todas as áreas da física moderna, além de suas aplicações em nanotecnologia. Neste capítulo, estamos interessados no efeito Casimir a uma temperatura finita, que é estudado levando em consideração a topologia não-trivial⁶ do espaço-tempo fechado de Friedmann. Além

⁴Johannes Diderik van der Waals foi um físico holandês pioneiro no estudo das interações entre átomos e moléculas, levando em consideração as propriedades de polarização dos mesmos. Tais interações ficaram conhecidas como interações de van der Waals.

⁵Dirk Polder foi um físico holandês que previu, juntamente com Casimir, o efeito Casimir-Polder.

⁶O efeito Casimir também pode surgir como consequência da topologia não-trivial do espaço-tempo. Neste caso, não existem condições de fronteiras devido a corpos materiais e cargas carregadas produzindo flutuações no campo eletromagnético. Contudo, existem as chamadas *condições de identificação* impostas ao campo sujeito à topologia não-trivial do espaço-tempo.

disso, também estudamos o efeito Casimir-Polder (interação de van der Waals) para um sistema que consiste de um átomo interagindo com uma placa na presença de uma corda cósmica.

Neste capítulo, faremos uma revisão dos principais aspectos relacionados ao efeito Casimir e às forças de dispersão. Em especial, daremos ênfase ao estudo do efeito Casimir térmico. Além disso, somente na seção 4.3 não preservamos as constantes $\hbar$, c e k_B por conveniência de cálculos. Em complemento, adotamos a seguinte assinatura para a métrica: $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

4.1 A origem do efeito Casimir

A descoberta do efeito Casimir remonta à primeira metade do século XX, período no qual Casimir publicou o primeiro trabalho sobre o assunto [19]. Trata-se de uma manifestação direta das flutuações do vácuo. Em sua forma original, o efeito Casimir consiste na atração de duas placas condutoras, planas, paralelas, infinitamente grandes, neutras, e colocadas no vácuo (veja Fig. 4.1). De acordo com a eletrodinâmica clássica, sabemos que a força agindo entre as duas placas neutras é igual a zero. No caso da eletrodinâmica quântica, essa força não é nula, e está associada à energia de vácuo do campo eletromagnético quantizado. A força atrativa por unidade de área (pressão) entre as duas placas, feitas de um metal ideal, e à temperatura zero, na configuração descrita anteriormente, é dada por

$$\frac{F(a)}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}, \quad (4.1)$$

onde A é a área das placas e a é a separação entre as mesmas (veja Fig. 4.1). Se considerarmos que as placas estão separadas por uma distância de $a = 1\mu\text{m}$, a pressão associada à força de Casimir será dada aproximadamente por $P \approx 1.3 \text{ mPa}$, o qual é um valor macroscópico.

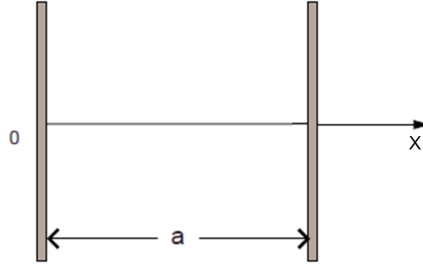


Figura 4.1: Duas placas metálicas ideais paralelas, com área A , eletricamente neutras, separadas por uma distância a , colocadas no vácuo, atraem-se devido a flutuações quânticas do vácuo [122].

Pode-se ter uma melhor idéia sobre a origem do efeito Casimir, considerando os níveis de energia de um oscilador harmônico quantizado, ou seja:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.2)$$

em que ω é a frequência angular do oscilador e $n = 1, 2, 3, \dots$ representam os níveis de energia do mesmo. Deste modo, para $n = 0$, o estado fundamental associado à Eq. (4.2) é dado por

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (4.3)$$

o qual representa a energia de oscilação de ponto zero, com frequência ω .

Do ponto de vista da teoria quântica de campos, qualquer campo quantizado pode ser considerado como um conjunto de osciladores harmônicos de todas as frequências, as quais são associadas aos números quânticos dos modos do campo. O estado fundamental do campo é dado pela soma das energias de oscilações de ponto zero⁷

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_j \omega_j, \quad (4.4)$$

⁷Veja que o índice j na Eq. (4.4) representa, em geral, mais de um número quântico e, portanto, uma energia de ponto zero deve ser associada a cada um deles.

em que j representa os números quânticos dos modos do campo. Por exemplo, para o campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski sem fronteiras, os modos são representados pelo vetor de onda $\mathbf{k}$ com componentes contínuas e dois índices discretos que fixarão o estado de polarização. No entanto, se o espaço-tempo em questão tiver fronteiras, algumas das componentes do vetor de onda podem tornar-se discretas devido às condições de contorno impostas nas fronteiras.

É importante notar que a soma em (4.4) é divergente e que, deste modo, faz-se necessário adotar um método para que se possa extrair um resultado finito da mesma. No caso do espaço-tempo de Minkowski sem fronteiras, o argumento baseia-se no fato de que, fisicamente, a energia é definida a menos de uma constante. Desta forma, os valores de energia fisicamente aceitáveis são configurados para que possam começar de zero através de um procedimento em teoria de campos chamado de ordenamento normal, situação na qual o operador de criação é colocado à esquerda do operador de destruição. No entanto, outros procedimentos devem ser adotados quando se tem fronteiras no espaço-tempo de Minkowski, como é o caso do sistema constituído de duas placas paralelas descrito anteriormente. Para este caso, quem primeiro obteve a energia de vácuo finita do campo eletromagnético quantizado na presença de placas metálicas ideais foi Casimir [19]. Através de um procedimento de regularização, a energia infinita do campo eletromagnético no espaço de Minkowski sem fronteiras foi subtraída da energia de vácuo infinita do mesmo campo na presença de placas metálicas ideais, restando apenas a seguinte energia finita por unidade de área:

$$\mathcal{E}(a) = \frac{E(a)}{A} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{a^3}. \quad (4.5)$$

Neste sentido, a expressão (4.1) pode ser obtida, usando a Eq. (4.5), através da relação

$$P = -\frac{\partial \mathcal{E}(a)}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4}. \quad (4.6)$$

É importante ressaltar que, neste caso, por exemplo, o procedimento de ordenamento

normal não se aplica ao espaço de Minkowski com fronteiras, porque a frequência do campo, tratado como um conjunto de osciladores, depende da separação, a , entre as placas. Como existe um conjunto infinito de diferentes estados de vácuo para diferentes valores de a , seria incorreto assumir como configuração uma energia de vácuo igual a zero para todas as frequências associadas à diferentes estados. Portanto, quando tem-se fronteiras no cálculo da energia, deve-se adotar métodos de regularização para extrair a parte finita da mesma.

4.2 Efeito Casimir - modelo simples

Considere um campo escalar $\varphi(t, x)$, em (1+1)-dimensões, obedecendo a equação de Klein-Gordon [23]

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0, \quad (4.7)$$

em que m é a massa do campo, c é a velocidade da luz e $\hbar$ é a constante de Planck, dividida por 2π . Para entendermos como o efeito Casimir surge nesta situação, devemos considerar o campo escalar definido no intervalo $0 < x < a$ e obedecendo condições de contorno de Dirichlet

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a) = 0. \quad (4.8)$$

O produto escalar entre duas soluções f e g da Eq. (4.7), definidas no intervalo entre 0 e a , é dado por

$$(f, g) = \frac{i}{c} \int_0^a dx \left(f^* \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f^*}{\partial t} g \right). \quad (4.9)$$

Além disso, as duas soluções independentes da Eq. (4.7) que obedecem as condições de contorno dadas por (4.8), são

$$\varphi_n^{(\pm)}(t, x) = \left(\frac{c}{a\omega_n} \right)^{1/2} e^{\mp i\omega_n t} \sin k_n x, \quad (4.10)$$

em que

$$\omega_n = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2 \right)^{1/2}, \quad (4.11)$$

com $k_n = \frac{\pi n}{a}$ e $n = 1, 2, 3, \dots$. Substituindo (4.10) em (4.9), obtemos as seguintes relações de ortonormalização:

$$\begin{aligned} (\varphi_n^{(\pm)}, \varphi_{n'}^{(\pm)}) &= \mp \delta_{nn'}, \\ (\varphi_n^{(\pm)}, \varphi_{n'}^{(\mp)}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que $\delta_{nn'}$ é a delta de Kronecker.

A solução geral da Eq. (4.7), com as condições de contorno (4.8), é uma combinação das soluções dadas na Eq. (4.10), somadas sobre todos os valores de n , ou seja:

$$\varphi(t, x) = \sum_n [\varphi_n^{(-)}(t, x) a_n + \varphi_n^{(+)}(t, x) a_n^\dagger], \quad (4.13)$$

em que a_n e $a_n^\dagger$ são os operadores destruição e criação, respectivamente. Tais operadores obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[a_n, a_{n'}^\dagger] = \delta_{nn'}, \quad [a_n, a_{n'}] = [a_n^\dagger, a_{n'}^\dagger] = 0. \quad (4.14)$$

O estabelecimento dessas relações é o procedimento padrão para a quantização do campo $\varphi(t, x)$. O estado de vácuo associado com o campo em questão, na presença de condições de fronteira, é definido como

$$a_n |0\rangle = 0. \quad (4.15)$$

Adicionalmente, o operador densidade de energia, o qual é representado pela componente 00 do tensor momento-energia do campo escalar $\varphi(t, x)$, é dado por [23]

$$T_{00}(x) = \frac{\hbar c}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} [\partial_t \varphi(x)]^2 + [\partial_x \varphi(x)]^2 \right\}. \quad (4.16)$$

O valor esperado de (4.16) na base $|0\rangle$ pode ser obtido como

$$\langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2 c^4}{2a \hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2k_n x)}{\omega_n}, \quad (4.17)$$

em que usamos (4.11), (4.13), (4.14) e (4.15). Desta forma, podemos obter a energia total de vácuo integrando (4.17), ou seja:

$$\begin{aligned} E_0(a) = \int_0^a \langle 0|T_{00}(x)|0\rangle dx &= \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2 c^4}{2a\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^a \cos(2k_n x) dx, \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \end{aligned} \quad (4.18)$$

A integral no segundo termo do lado direito da primeira linha da Eq. (4.18) é zero e, portanto, não contribui para a energia total. Além disso, o termo que contribui para a energia total é claramente infinito e, desta forma, é preciso utilizar um procedimento de regularização para extrair a parte finita de tal energia. Dentre os vários métodos de regularização, utilizamos o método do corte nas frequências, o qual consiste na introdução do fator exponencial $e^{-\delta\omega_n}$ na Eq. (4.18), para tornar a soma convergente. Deste modo, quando necessário, podemos tomar o limite $\delta \rightarrow 0$ e remover a regularização. Com isso, a energia do vácuo regularizada tem a seguinte forma:

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n e^{-\delta\omega_n}. \quad (4.19)$$

Por simplicidade, consideramos o caso do campo escalar $\varphi(t, x)$ sem massa ($m = 0$).

Assim, a Eq. (4.19) pode ser escrita na forma

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\pi n}{a} e^{-\frac{\delta c\pi n}{a}} = \frac{\pi\hbar c}{8a} \sinh^{-2} \frac{\delta\pi c}{2a}. \quad (4.20)$$

Expandindo em séries a Eq. (4.20) para $\frac{\delta\pi c}{2a} \ll 1$, temos

$$E_0(a, \delta) = -\frac{\pi\hbar c}{24a} + \frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2} + O(\delta^2). \quad (4.21)$$

Portanto, a energia do vácuo regularizada na Eq. (4.21) é representada por um termo finito somado a um termo singular.

Considere, agora, o campo escalar $\varphi(t, x)$ definido para todos os valores de x , ou seja, $-\infty < x < +\infty$. Neste caso, as soluções da Eq. (4.7) são dadas por

$$\varphi_n^{(\pm)}(t, x) = \left(\frac{c}{4\pi\omega} \right)^{1/2} e^{\mp i(\omega t - kx)}, \quad (4.22)$$

em que

$$\omega = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k^2 \right)^{1/2}, \quad (4.23)$$

com $-\infty < k < +\infty$. Antes de mais nada, é necessário comentar a respeito das equações (4.9), (4.12), (4.13) e (4.14) correspondentes a este caso. O produto indireto para o espaço-tempo em (1+1)-dimensões, sem fronteiras, tem seus limites inferior e superior alterados para menos e mais infinito, respectivamente. As relações em (4.12) e (4.14) serão dadas em termos das funções delta $\delta(k - k')$ ao invés de deltas de Kronecker. Adicionalmente, a Eq. (4.13) é escrita na forma integral como

$$\varphi(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} \left[\varphi_k^{(-)}(t, x) a(k) + \varphi_k^{(+)}(t, x) a^+(k) \right]. \quad (4.24)$$

Em seguida, o estado de vácuo pode ser definido da seguinte forma:

$$a(k)|0_M\rangle = 0, \quad (4.25)$$

em que o subíndice M refere-se ao espaço-tempo de Minkowski (1+1) sem condições de contorno.

Da mesma forma que no caso com condições de contorno, podemos calcular o valor médio do operador densidade de energia, T_{00} , para o caso em questão. A quantidade divergente que contribui para a densidade de energia total é, então, dada por

$$\langle 0_M | T_{00}(x) | 0_M \rangle = \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega dk. \quad (4.26)$$

Para efeitos de comparação com o caso com condições de contorno, devemos integrar a Eq. (4.26) somente no intervalo $(0, a)$, ou seja

$$E_{0M}(a) = \int_0^a \langle 0_M | T_{00}(x) | 0_M \rangle dx. \quad (4.27)$$

Com isso, a energia total no intervalo considerado é dada por

$$E_{0M}(a) = \frac{\hbar a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega dk. \quad (4.28)$$

Utilizando o método do corte nas frequências como processo de regularização, a Eq. (4.28) pode ser escrita na forma

$$E_{0M}(a, \delta) = \frac{c\hbar a}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-\delta ck} dk = \frac{\hbar a}{2\pi c \delta^2}, \quad (4.29)$$

em que reescrevemos a Eq. (4.26) como uma integral em dk de 0 a $+\infty$ devido a sua propriedade de paridade (a (4.26) é uma função par) e $e^{-\delta ck}$ é o fator de regularização, que pode ser removido no limite $\delta \rightarrow 0$. Para resolver a Eq. (4.28) foi utilizado o caso do campo escalar sem massa $m = 0$. Além disso, devemos notar que o resultado em (4.29) coincide com o segundo termo em (4.21). Portanto, a energia do vácuo renormalizada no intervalo $(0, a)$ é obtida da seguinte forma:

$$E_0^{\text{ren}}(a) = E(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [E_0(a, \delta) - E_{0M}(a, \delta)] = -\frac{\pi \hbar c}{24a}. \quad (4.30)$$

Neste ponto podemos perceber que para o cálculo da energia de Casimir são necessários dois passos importantes: (1) utilizar um método de regularização apropriado ao problema e (2) subtrair a energia associada ao espaço-tempo sem condições de contorno da energia associada ao espaço-tempo com condições de contorno, tomando o limite em que o fator de regularização tende a zero (como foi feito para este simples modelo de campo escalar sem massa). A força atrativa que surge da energia renormalizada (4.30) pode ser calculada como

$$F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}. \quad (4.31)$$

O caso para o campo escalar massivo é mais complicado e pode ser encontrado em artigos de revisão sobre o assunto [23, 24]. Nosso objetivo foi somente ilustrar, como um exemplo, o procedimento através do qual calcula-se a energia de Casimir. Na presente tese, focamos nossa atenção para o caso em que o efeito Casimir aparece em um espaço-tempo com topologia não-trivial e a uma temperatura T . Na próxima seção, revisaremos o procedimento geral para se calcular a energia de Casimir a uma temperatura finita, $T \neq 0$, utilizando a formulação de Matsubara.

4.3 Efeito Casimir térmico

Nesta seção, estamos interessados em contribuições devido às excitações no estado de vácuo de um campo quântico em decorrência da existência de partículas reais em equilíbrio térmico. Desta forma, deve-se considerar um *ensemble* de estados caracterizados por uma temperatura T e uma distribuição de probabilidade. A energia associada ao *ensemble* na presença de fronteiras espaciais será, então, considerada como a energia de Casimir à uma temperatura T .

4.3.1 A formulação de Matsubara

O formalismo de Matsubara é baseado na teoria de campos Euclidiana, a qual é obtida, do espaço-tempo de Minkowski, utilizando uma transformação na coordenada temporal dada por⁸ $t \rightarrow -i\tau$. Além disso, a coordenada temporal τ deve estar contida no intervalo $(0, \beta)$, em que $\beta = 1/k_B T$, com k_B sendo a constante de Boltzmann e T a temperatura. No intervalo em questão, os campos deverão obedecer condições de periodicidade, as quais são dadas por⁹

$$\varphi(\tau, \mathbf{r}) = \varphi(\tau + \beta, \mathbf{r}), \quad (4.32)$$

para campos bosônicos e

$$\varphi(\tau, \mathbf{r}) = -\varphi(\tau + \beta, \mathbf{r}), \quad (4.33)$$

para campos fermiônicos.

Considerando, agora, um sistema quântico à uma temperatura não nula T e em

⁸Esta transformação é uma continuação analítica do espaço-tempo de Minkowski e representa uma rotação de 90° na coordenada temporal t . É conhecida como rotação de Wick.

⁹Esta revisão do efeito Casimir térmico foi baseada nas Refs. [23, 24] e leva em conta a obtenção da expressão geral para a energia livre fermiônica, diferentemente das referências citadas que só levam em conta a obtenção da expressão geral para a energia livre bosônica.

equilíbrio térmico. Tal sistema é caracterizado pela seguinte função de partição:

$$Z = \sum_n e^{-E_n \beta}, \quad (4.34)$$

em que E_n é a energia do estado n . Como veremos, $n = 0$ representa o estado de um sistema quântico à temperatura nula e os valores para $n \neq 0$ representam estados do mesmo sistema quântico com correção de temperatura.

A energia livre $\mathcal{F}$ pode ser obtida de (4.34) como

$$\mathcal{F} = -k_B T \ln Z. \quad (4.35)$$

A pressão e a entropia são dadas, respectivamente, por

$$P = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V} \right)_T, \quad (4.36)$$

e

$$S = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \quad (4.37)$$

Adicionalmente, no formalismo de Matsubara, a função de partição em (4.34) tem a seguinte representação em termos de uma integral funcional:

$$Z = C \int D\varphi e^{-S_E[\varphi]}, \quad (4.38)$$

em que $-S_E$ é a ação Euclidiana e $D\varphi$ é o elemento diferencial do campo φ . Uma vez que em teoria quântica de campos, integrais de trajetórias são definidas, usualmente, a menos de uma constante, podemos escolher $C = 1$, o que não influencia o resultado final. Além disso, no espaço-tempo de Minkowski, o argumento da exponencial em (4.38) é dado por iS_M e portanto, para se obter $-S_E$, é necessário realizar a transformação $S_M = iS_E$. Para um campo escalar $\varphi(t, \mathbf{r})$, sem fonte, a ação S_E pode ser escrita como

$$S_E[\varphi] = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3r \varphi K_E \varphi, \quad (4.39)$$

em que

$$K_E = (-\square_E + m^2), \quad (4.40)$$

sendo

$$\square_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \quad (4.41)$$

o operador de onda Euclidiano, o qual é obtido do operador d'Alembertiano usual através da transformação $t \rightarrow -i\tau$.

Pode-se notar que a ação (4.39) é quadrática no campo e, portanto, a integral na Eq. (4.38) é do tipo Gaussiana e pode ser calculada diretamente. O resultado da integral (4.38), para campos sem fontes, é dado por [123]

$$Z = C(\det K_E)^{\pm 1/2}, \quad (4.42)$$

em que o sinal positivo no expoente representa o resultado para férmions e o negativo para bósons. Com o resultado (4.42), a energia livre pode ser obtida através da Eq. (4.35), ou seja:

$$\mathcal{F} = \pm \frac{1}{2\beta} \text{Tr} \ln K_E, \quad (4.43)$$

em que usamos a relação $\text{Tr} \ln K_E = \ln \det K_E$, para um operador diagonalizado. O traço na Eq. (4.43) é realizado sobre o espaço do campo que é integrado na equação (4.38).

Considere, agora, a seguinte base no espaço do campo $\varphi(\tau, \mathbf{r})$:

$$\varphi_{lj}(\tau, \mathbf{r}) = \frac{e^{-i\xi_l \tau}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (4.44)$$

em que l e j representam estados quânticos do campo φ e

$$\xi_l = \frac{2\pi}{\beta} l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.45)$$

para bósons e

$$\xi_l = \frac{\pi}{\beta} (2l + 1), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.46)$$

para férmions. As Eqs. (4.45) e (4.46) são conhecidas como frequências de Matsubara e são obtidas aplicando as condições de periodicidade em τ apresentadas nas Eqs. (4.32) e (4.33). Além disso, considere também uma equação de autovalor para o operador Laplaciano ∇^2 dada por

$$-\nabla^2\varphi_j(\mathbf{r}) = \Lambda_j\varphi_j(\mathbf{r}). \quad (4.47)$$

Desta forma, usando as Eqs. (4.44) e (4.47), obtemos a seguinte equação de autovalor para o operador¹⁰ K_E :

$$K_E\varphi_{lj} = (\xi_l^2 + \Lambda_j + m^2)\varphi_{lj}. \quad (4.48)$$

Em seguida, a Eq. (4.43) pode ser reescrita em termos dos autovalores do operador K_E em (4.48), ou seja:

$$\mathcal{F} = \pm \frac{1}{2}k_B T \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_j \ln(\xi_l^2 + \Lambda_j + m^2), \quad (4.49)$$

o qual representa a energia livre de um *ensemble* de estados, contendo partículas, a uma temperatura T . A expressão (4.49) é divergente e, deste modo, devemos introduzir um método de regularização. Para este propósito, o método de regularização da função zeta pode ser aplicado (ver Refs. [23, 24] para uma revisão sobre este método), o que resulta

$$\mathcal{F}(s) = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} k_B T \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_j (\xi_l^2 + \Lambda_j + m^2)^{-s}, \quad (4.50)$$

em que o sinal negativo está relacionado ao caso bosônico e o positivo ao caso fermiônico e μ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa. A regularização é removida quando tomamos o limite $s \rightarrow 0$, o que faremos mais adiante.

Podemos reescrever a Eq. (4.50) utilizando a seguinte representação integral:

$$(\xi_l^2 + \Lambda_j + m^2)^{-s} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} e^{-t(\xi_l^2 + \Lambda_j + m^2)}, \quad (4.51)$$

¹⁰Pode-se considerar que as componentes do campo de Dirac seguem a mesma equação de autovalor (4.48), uma vez que tais componentes são também soluções da equação de Klein-Gordon.

ou seja,

$$\mathcal{F}(s) = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} k_B T \sum_{l=-\infty}^\infty \sum_j e^{-t(\xi_l^2 + \Lambda_j + m^2)}. \quad (4.52)$$

Adicionalmente, para deixarmos a Eq. (4.52) mais tratável, usaremos a fórmula da soma de Poisson

$$\sum_{l=-\infty}^\infty e^{-zl^2} = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi^2 n^2 / z}, \quad (4.53)$$

em que $\text{Re} z > 0$. Trataremos, primeiramente, do caso bosônico. Para este fim, usaremos a substituição $z = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 t$ no termo exponencial da Eq. (4.52). Em seguida, usando (4.53), obtemos:

$$\mathcal{F}^{(b)}(s) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \sum_{n=-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s) \sqrt{4\pi t}} \sum_j e^{-[n^2 \beta^2 + 4t^2(\Lambda_j + m^2)]/4t}. \quad (4.54)$$

Devemos destacar que o fator n na exponencial da Eq. (4.54) permite que a integração em t seja convergente para todos os termos da soma exceto para $n = 0$, o qual pode ser interpretado como a contribuição da energia de Casimir à temperatura $T = 0$. Podemos verificar que esta interpretação está coerente com os resultados obtidos à temperatura nula, usando, para o limite $T \rightarrow 0$, a relação

$$k_B T \sum_{l=-\infty}^\infty f(\xi_l) \rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{2\pi} f(\xi). \quad (4.55)$$

Neste caso, da Eq. (4.52), a função $f(\xi) = e^{-t\xi}$ e portanto

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{2\pi} e^{-t\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}. \quad (4.56)$$

Deste modo, substituindo este último resultado em (4.52), obtemos

$$E_0^{(b)}(s) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s) \sqrt{4\pi t}} \sum_j e^{-t(\Lambda_j + m^2)}, \quad (4.57)$$

que é a energia do vácuo bosônico à temperatura nula. A Eq. (4.57) é exatamente o resultado que se obtém fazendo $n = 0$, em (4.54). Com este resultado, fica claro que

podemos separar a energia livre em duas partes: uma parte devido à temperatura nula somada à segunda parte à temperatura finita T . Ou seja:

$$\mathcal{F}^{(b)}(s, T) = E_0^{(b)}(s) + \Delta\mathcal{F}^{(b)}(s, T). \quad (4.58)$$

Para expressarmos $E_0^{(b)}(s)$ de uma outra forma, devemos usar a Eq. (4.55) na Eq. (4.50). Fazendo isso, obtemos

$$E_0^{(b)}(s) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \sum_j (\xi^2 + \Lambda_j + m^2)^{-s}. \quad (4.59)$$

Veja que se usarmos a representação integral (4.51) no último resultado acima, e em seguida usarmos a Eq. (4.56), obtemos novamente a Eq. (4.57).

Com relação ao termo $\Delta\mathcal{F}^{(b)}(s, T)$ na equação (4.58), podemos expressá-lo como

$$\Delta\mathcal{F}^{(b)}(s, T) = -\frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)\sqrt{4\pi t}} \sum_j e^{-[n^2\beta^2 + 4t^2(\Lambda_j + m^2)]/4t}. \quad (4.60)$$

A expressão (4.60), na verdade, é a Eq. (4.54) para¹¹ $n \neq 0$. Além disso, a integral em t na expressão (4.60) é convergente e, desta forma, pode-se remover o parâmetro de regularização s usando a relação

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \frac{f(s)}{\Gamma(s)} = f(0). \quad (4.61)$$

Usando esta relação, obtemos

$$\Delta\mathcal{F}^{(b)}(T) = - \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{-3/2} \frac{e^{-[n^2\beta^2 + 4t^2(\Lambda_j + m^2)]/4t}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (4.62)$$

Para realizarmos a integral em t e em seguida o somatório em n , podemos usar as seguintes relações¹²:

$$\int_0^{\infty} x^{-3/2} e^{-(a^2 + 4b^2 x^2)/4x} = 2\sqrt{\pi} \frac{e^{-ab}}{a}, \quad (4.63)$$

¹¹Usamos a simetria do somatório em (4.54). Ou seja, o somatório sobre os valores negativo de n é o mesmo somatório sobre os valores positivos de n . O resultado é duas vezes o somatório de $n = 1$ até $n = +\infty$, como mostrado na Eq. (4.60).

¹²Fazendo uso do programa mathematica, é fácil obtermos as relações (4.63) e (4.64), quando calculamos a integral em t e o somatório em n na Eq. (4.62).

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-dn}}{n} = -\ln(1 - e^{-d}). \quad (4.64)$$

Com isso, se fizermos as identificações $a^2 = n^2 d^2$, $b^2 = \Lambda_j + m^2$ e $d = \beta b$, obtemos

$$\Delta \mathcal{F}^{(b)}(T) = k_B T \sum_j d_j \ln(1 - e^{-\beta \omega_j}), \quad (4.65)$$

em que $\omega_j^2 = \Lambda_j + m^2$ e d_j é a degenerescência do sistema¹³.

Para o caso fermiônico, devemos considerar a Eq. (4.52) com o sinal positivo e frequência ξ_l dada pela Eq. (4.46). Além disso, de forma a simplificar o somatório em l , usamos a seguinte identidade:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(\omega_j^2 + (2l+1)^2 \frac{\pi^2}{\beta^2})t} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(\omega_j^2 + l^2 \frac{\pi^2}{\beta^2})t} - \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(\omega_j^2 + (2l)^2 \frac{\pi^2}{\beta^2})t}. \quad (4.66)$$

Substituindo esta identidade na Eq. (4.52) com o sinal positivo, teremos dois termos contribuindo para energia livre fermiônica devido ao primeiro e segundo termos do lado direito da Eq. (4.66). Com isso, obtemos

$$\mathcal{F}^{(1/2)}(s, T) = \mathcal{F}(s, T) + \mathcal{F}^{(b)}(s, T). \quad (4.67)$$

Ou seja, existe um termo na energia livre fermiônica que é exatamente devido à energia livre bosônica $\mathcal{F}^{(b)}(s, T)$ dada pela Eq. (4.65). Esta contribuição está relacionada ao segundo termo do lado direito da Eq. (4.66). Por outro lado, o primeiro termo do lado direito de (4.66) está relacionado ao primeiro termo do lado direito da Eq. (4.67), o qual é dado por

$$\mathcal{F}(s, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} k_B T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_j e^{-t(\frac{\pi^2}{\beta^2} l^2 + \omega_j^2)}. \quad (4.68)$$

¹³Em alguns sistemas quânticos, como por exemplo os que estudamos no capítulo 5, apresentam vários estados com a mesma energia. Neste sentido é necessário levar em consideração a degenerescência do sistema.

Fazendo a substituição $z = \frac{\pi^2}{\beta^2}t$ na exponencial da Eq. (4.68) e usando a Eq. (4.53), temos

$$\mathcal{F}(s, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s) \sqrt{\pi t}} \sum_j e^{-[n^2 \beta^2 + t^2 \omega_j]/t}. \quad (4.69)$$

Podemos, agora, retirar o fator de regularização s da Eq. (4.69), usando a Eq. (4.61).

Com isso obtemos

$$\mathcal{F}(T) = E_0(s) + \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{-3/2} \frac{e^{-[n^2 \beta^2 + t^2 \omega_j^2]/t}}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.70)$$

em que E_0 é o termo para $n = 0$, o qual é dado por

$$E_0(s) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s) \sqrt{\pi t}} \sum_j e^{-t(\Lambda_j + m^2)}. \quad (4.71)$$

Antes de prosseguirmos, devemos atentar para um detalhe importante. O termo para $n = 0$ dado pela Eq. (4.71) soma-se com termo para $n = 0$ dado pela Eq. (4.57), quando calcularmos $\mathcal{F}^{(1/2)}$ na Eq. (4.67), resultando na energia de vácuo fermiônica à temperatura nula, a qual é dada por

$$E_0^{(1/2)}(s) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mu^{2s} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s) \sqrt{4\pi t}} \sum_j e^{-t(\Lambda_j + m^2)}. \quad (4.72)$$

O resultado na Eq. (4.72) é exatamente igual a (4.57), mas com o sinal positivo. Além disso, também pode-se expressar a Eq. (4.72) na forma da Eq. (4.59). O resultado será o mesmo, mas com o sinal positivo.

Para realizarmos a integral em t e depois o somatório em n no segundo termo do lado direito da Eq. (4.70), devemos usar as relações em (4.63) e (4.64). Desta forma, para a Eq. (4.70) temos

$$\mathcal{F}(T) = E_0(s) - k_B T \sum_j \ln(1 - e^{-2\beta \omega_j}). \quad (4.73)$$

Realizando a soma das Eqs. (4.73) e (4.58) em (4.67), obtemos o seguinte resultado:

$$\mathcal{F}^{(1/2)}(T) = E_0^{(1/2)} + \Delta \mathcal{F}^{(1/2)}(T), \quad (4.74)$$

em que

$$\Delta\mathcal{F}^{(1/2)}(T) = -k_B T \sum_j d_j \ln(1 + e^{-\beta\omega_j}). \quad (4.75)$$

Portanto, as Eqs. (4.65) e (4.75) são as correções térmicas para as energias de Casimir devido a bósons e férmions, respectivamente. No capítulo 5, calculamos as energias de Casimir à temperatura nula e suas respectivas correções térmicas, usando as Eqs. (4.58) e (4.74), para os campos do neutrino e eletromagnético no modelo cosmológico de Friedmann.

4.4 Interações de van der Waals e Casimir-Polder

Nesta seção revisamos as interações entre átomos, entre átomos e superfícies e entre superfícies. O estudo dessas interações teve início com J. D. van der Waals que propôs a explicação do desvio da lei do gás ideal, a partir da seguinte equação de estado [51]:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (4.76)$$

para 1 mol de um gás genérico à temperatura T , com P e V sendo, respectivamente, pressão e volume, R é a constante universal dos gases e a e b são as constantes de van der Waals obtidas, usando a Eq. (4.76), a partir de dados experimentais. A constante b foi interpretada por van der Waals como sendo o volume excluído pelos átomos, que foram considerados como esferas, e a constante a foi associada com uma força atrativa entre os mesmos. De forma a explicar a interação entre os átomos, van der Waals sugeriu o seguinte potencial de interação: $V(r) = -Ar^{-1}e^{-Br}$, em que A e B são constantes. Adicionalmente, para duas moléculas polares, Keesom¹⁴ obteve o potencial $V(r) = -p_1^2 p_2^2 / 3kTr^6$, em que p_1 e p_2 são os momentos de dipolo das moléculas.

¹⁴Willem Hendrik Keesom foi um físico holandês que analisou a interação de van der Waals do tipo dipolo-dipolo, em 1921.

Debye¹⁵ foi um dos primeiros a perceber que era necessário uma força atrativa mais geral correspondente à interação entre os átomos, uma vez que moléculas de gases não polares possuem um valor não nulo para a constante a .

A primeira teoria quântica para descrever, de forma mais geral, a interação entre átomos foi formulada por F. London em 1930 [124]. Neste contexto, as forças de interação são derivadas de potenciais do tipo

$$V_{\text{vdW}} \propto \frac{1}{L^n}, \quad (4.77)$$

em que L é a distância entre os objetos considerados no sistema (dois átomos, um átomo e uma superfície ou duas superfícies) e o expoente n depende de parâmetros físicos e da geometria do sistema¹⁶. Aplicando o princípio da incerteza para os elétrons que constituem sistemas atômicos, London mostrou que dois átomos se atraem de acordo com a Eq. (4.77), com um expoente dado por $n = 6$.

Casimir e Polder, usando o conceito de flutuações de vácuo descrito pela eletrodinâmica quântica, generalizaram a teoria de London-van der Waals de forma que a mesma pudesse incluir efeitos de retardamento¹⁷ [125]. Deste modo, a nova abordagem de Casimir-Polder forneceu uma explicação para a mudança do expoente n observada em alguns experimentos. Neste sentido, para distâncias grandes comparadas com o comprimento característico λ_0 do sistema, o efeito de retardamento deve ser incluído, fato este que conduz ao resultado

$$V_{\text{CP}} \propto \frac{\lambda_0}{L^{n+1}}, \quad L \gg \lambda_0. \quad (4.78)$$

¹⁵Peter Joseph William Debye foi um físico holandês e ganhador do prêmio Nobel de química. Ele contribuiu para o estudo da interação de van der Waals analisando a interação entre um momento de multipolo permanente de uma molécula com o momento de multipolo induzido de outra molécula.

¹⁶Por exemplo, $n = 3$ descreve um sistema constituído de um átomo e uma placa de espessura finita interagindo [51].

¹⁷Quando se leva em conta efeitos de retardamento, na verdade, considera-se a interação de van der Waals no regime relativístico. De forma contrária, no regime não-retardado, despreza-se efeitos relativísticos.

Com isso, para a interação Casimir-Polder entre dois átomos, a dependência L^{-7} é obtida. O parâmetro λ_0 , neste caso, é o comprimento de onda das principais linhas de absorção atômica, o qual está no espectro visível até próximo do infravermelho para átomos alcalinos típicos e é de alguns milésimos de nanômetros.

As Eqs. (4.77) e (4.78) aplicam-se para $T = 0$, situação na qual somente flutuações quânticas são consideradas. Para um sistema a uma temperatura não nula, o comprimento de onda térmico

$$\lambda_T = \frac{\hbar c}{k_B T}, \quad (4.79)$$

precisa ser levado em conta. Este corresponde ao comprimento de onda quando o espectro da radiação térmica é importante. Estudos para a interação entre átomos e superfícies, usando teoria quântica de campos a temperatura finita, foram realizados por Dzyaloshinskii, Lifshitz, and Pitaevskii [51]. Eles mostraram que os potenciais de London-van der Waals e Casimir-Polder podem ser obtidos como casos limites de uma expressão mais geral. Além disso, eles também confirmaram que para distâncias $L \ll \lambda_T$, as interações são dominadas por flutuações quânticas. Por outro lado, para distâncias $L \gg \lambda_T$ foi mostrado que

$$V \propto \frac{\lambda_0}{\lambda_T L^n} \sim \frac{k_B T}{\hbar \omega_0} V_{vdW}, \quad (4.80)$$

em que ω_0 é a frequência angular correspondente a $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$. A interação entre átomos, entre átomos e superfícies ou entre superfícies desempenha um importante papel na física, química e biologia, além de ter várias aplicações tecnológicas. Neste sentido, o entendimento desse tipo de interação é de fundamental importância.

De acordo com a eletrodinâmica clássica, objetos materiais não polarizados e eletricamente neutros não irão interagir entre si, mesmo se tais objetos forem polarizáveis. Deste modo, uma interação somente ocorrerá se um dos objetos tiver uma polarização permanente ou tiver uma polarização induzida. Para uma polarização

ser induzida, um campo eletromagnético deve ser aplicado a pelo menos um dos objetos. Com isso, a polarização induzida do objeto dá origem a um campo eletromagnético, o qual pode, por sua vez, induzir uma polarização em outro objeto polarizável, o qual também dá origem a um campo eletromagnético e induz uma polarização em outros objetos. Esta situação resulta em objetos polarizados interagindo entre si através de um campo eletromagnético.

Na eletrodinâmica quântica a configuração inicial é a de objetos em seus estados quânticos fundamentais, juntamente com um campo eletromagnético em seu estado de vácuo, de forma que o valor médio da polarização dos objetos e do campo eletromagnético é nulo. Desta forma, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, o qual implica na existência de flutuações de estados de vácuo, a polarização dos objetos e o campo eletromagnético sofrerão flutuações que darão origem a uma interação entre os objetos. À temperaturas diferentes de zero, flutuações térmicas deverão ser introduzidas. As forças responsáveis pela interação entre os objetos são conhecidas como forças de dispersão, forças de Casimir-Polder ou forças de van der Waals¹⁸

Um resumo de algumas das expressões assintóticas para as forças de dispersão mais conhecidas e suas respectivas dependências com a distância é mostrado nas Figuras 4.2 e 4.3. Todas as forças de dispersão nesta figura são atrativas para dois objetos polarizáveis e repulsivas para um objeto polarizável interagindo com outro magnetizável. Podemos perceber que no limite retardado as forças diminuem mais rapidamente com o aumento da distância em comparação com o limite não retardado.

No capítulo 6 calculamos, para um sistema constituído de um átomo interagindo com uma placa metálica na presença de uma corda cósmica, a interação de Casimir-

¹⁸O termo força de Casimir-Polder é frequentemente usado quando o sistema é constituído de objetos macroscópicos e efeitos de retardamento são levados em conta. Por outro lado, o termo forças de van der Waals é conhecido quando o sistema é constituído de objetos microscópicos e efeitos de retardamento não são levados em conta.

Polder. Os métodos de cálculo da função de Green, potencial de interação e outros são apresentados. Cálculos adicionais são apresentados no apêndice C.

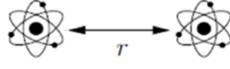
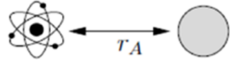
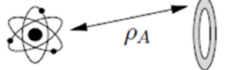
Distância →	Atrasado		Não atrasado	
Polarização →	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{m}$	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{m}$
(a) 	$-\frac{1}{r^8}$	$+\frac{1}{r^8}$	$-\frac{1}{r^7}$	$+\frac{1}{r^5}$
(b) 	$-\frac{1}{r_A^8}$	$+\frac{1}{r_A^8}$	$-\frac{1}{r_A^7}$	$+\frac{1}{r_A^5}$
(c) 	$-\frac{1}{\rho_A^8}$	$+\frac{1}{\rho_A^8}$	$-\frac{1}{\rho_A^7}$	$+\frac{1}{\rho_A^5}$

Figura 4.2: Lei de potências assintóticas para as forças entre (a) dois átomos; (b) um átomo e uma esfera pequena; (c) um átomo e um anel fino. Além disso, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{m}$ representam os objetos polarizados e magnetizados, respectivamente. O sinal positivo indica uma força repulsiva enquanto que o sinal negativo indica uma força atrativa [126].

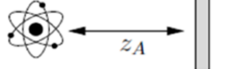
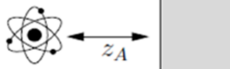
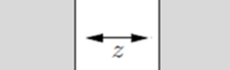
Distância →	Atrasado		Não atrasado	
Polarização →	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{m}$	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{m}$
(d) 	$-\frac{1}{z_A^6}$	$+\frac{1}{z_A^6}$	$-\frac{1}{z_A^5}$	$+\frac{1}{z_A^3}$
(e) 	$-\frac{1}{z_A^5}$	$+\frac{1}{z_A^5}$	$-\frac{1}{z_A^4}$	$+\frac{1}{z_A^2}$
(f) 	$-\frac{1}{z^4}$	$+\frac{1}{z^4}$	$-\frac{1}{z^3}$	$+\frac{1}{z}$

Figura 4.3: Lei de potências assintóticas para as forças entre (continuação Fig. 4.2) (d) um átomo e uma placa fina; (e) um átomo e um semi plano e (f) para a força por unidade de área entre dois semi planos. Além disso, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{m}$ representam os objetos polarizados e magnetizados, respectivamente. O sinal positivo indica uma força repulsiva enquanto que o sinal negativo indica uma força atrativa [126].

Capítulo 5

Efeito Casimir térmico - neutrino e fóton

Nature abhors a vacuum

– Aristóteles –

Os estágios iniciais da evolução do Universo foram quentes e densos, de acordo com o modelo padrão em cosmologia. Ao longo de sua evolução, o Universo passou por diferentes períodos, do ponto de vista de sua história térmica. Devido a isto, o estudo do efeito Casimir térmico em modelos cosmológicos, mencionados anteriormente, é de grande importância física. Além disso, é preciso ressaltar que campos não massivos de spin zero não são observados na natureza e, deste modo, uma atenção especial deve ser dada aos campos do neutrino e eletromagnético. Considerando que, em grandes escalas, nosso Universo é espacialmente homogêneo, derivamos expressões exatas para o tensor momento-energia térmico total para esses campos, nos modelos cosmológicos de Friedmann fechado e de Einstein. Obtemos também a energia livre de Casimir, a energia total e as contribuições de Casimir para o tensor momento-energia. Calculamos os comportamentos assintóticos das expressões obtidas nos casos limites de baixas e

altas temperaturas. Para o caso do neutrino, nossos resultados para a pressão e a energia total são os mesmos que na Ref. [49]. Para o caso eletromagnético, contudo, existe uma discordância entre nosso resultado para o tensor momento-energia térmico e o obtido na Ref. [49]. Explicamos essa discordância com a justificativa de que [49] não levou em consideração a contribuição devido ao modo zero na fórmula de Abel-Plana. A expressão para a energia livre de Casimir e a energia interna de Casimir para o campo eletromagnético foram obtidas, neste trabalho, em analogia com o caso conhecido do efeito Casimir térmico em uma casca esférica metálica ideal. Calculamos também, para os campos do neutrino e eletromagnético, a entropia de Casimir e demonstramos que a terceira lei da termodinâmica é satisfeita.

A estrutura desse capítulo apresenta-se do seguinte modo: na seção 5.1, apresentamos as expressões gerais para a energia livre, energia interna e tensor momento energia para os campos do neutrino e eletromagnético no modelo cosmológico de Einstein. Um destaque especial é dado para o procedimento de renormalização e para as definições das contribuições de Casimir para as quantidades consideradas à temperatura nula. A seção 5.2 é dedicada à derivação da energia livre de Casimir, da energia total e da energia interna para o campo do neutrino [127]. As pressões de Casimir e total são também consideradas. As expressões assintóticas a baixas e altas temperaturas são obtidas e a validade da terceira lei da termodinâmica é verificada. Na seção 5.3 são apresentados resultados análogos para o efeito Casimir térmico, no caso eletromagnético [127].

Por conveniência, para efeitos de comparação com o limite clássico (o caso de altas temperaturas Ref. [128]), manteremos as constantes de Planck $\hbar$, a velocidade da luz c , e a constante de Boltzmann k_B em todas as equações.

5.1 Expressões gerais - neutrino e fóton

Nesta seção consideramos os campos fermiônico e eletromagnético em equilíbrio térmico a uma certa temperatura T , no modelo cosmológico estático de Einstein com uma topologia $S^3 \times R^1$. O elemento de linha que descreve este modelo é dada por¹

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.1)$$

em que ψ , θ e ϕ são coordenadas adimensionais em um espaço tridimensional de curvatura constante $+1$ e τ é o tempo próprio. Este é um modelo espacialmente homogêneo com um volume $V = 2\pi^2 a^3$, em que a =constante é o fator de escala. Todos os resultados obtidos abaixo são também aplicáveis ao modelo cosmológico fechado de Friedmann, com o fator de escala dependendo do tempo². Neste caso, contudo, existem contribuições adicionais ao tensor momento-energia devido à anomalia conforme e à criação de partículas [130, 131].

A energia livre dos campos do neutrino e eletromagnético pode ser reescrita, usando as Eqs. (4.58) e (4.74), da seguinte forma:

$$\mathcal{F}^{(s)}(T) = E_0^{(s)} + \Delta\mathcal{F}^{(s)}(T), \quad (5.2)$$

em que $s = 1/2$ e $s = 1$ representam os spins para o neutrino e para o fóton, respectivamente. $E_0^{(s)}$ é a energia de ponto zero à temperatura nula e $\Delta\mathcal{F}^{(s)}(T)$ é a correção térmica dada por (4.65), para bósons e por (4.75), para férmions. Para o campo do neutrino, temos [36, 49]

$$E_0^{(1/2)} = -2\hbar \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \omega_n^{(1/2)}, \quad \omega_n^{(1/2)} = \frac{(n + \frac{1}{2})c}{a}, \quad (5.3)$$

¹ver apêndice A

²O modelo cosmológico de Friedmann é conformalmente plano com o modelo cosmológico estático de Einstein (ver Ref. [33]). O conceito de equilíbrio térmico em situações não estacionárias é discutido na Ref. [129].

$$\Delta F^{(1/2)}(T) = -4k_B T \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \ln \left[1 + e^{-(\hbar \omega_n^{(1/2)}/k_B T)} \right]. \quad (5.4)$$

em que $d_n = 4n(n+1)$ é a degenerescência. Para o campo eletromagnético, as respectivas expressões são dadas por [36, 49]

$$E_0^{(1)} = \hbar \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) \omega_n^{(1)}, \quad \omega_n^{(1)} = \frac{nc}{a}. \quad (5.5)$$

$$\Delta F^{(1)}(T) = 2k_B T \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) \ln \left[1 - e^{-(\hbar \omega_n^{(1)}/k_B T)} \right], \quad (5.6)$$

em que $d_n = 2(n^2 - 1)$ é a degenerescência. Deve-se notar que a energia de ponto zero $E_0^{(s)}$ dada por (5.3) e (5.5) é divergente, enquanto que a correção térmica $\Delta F^{(s)}(T)$ dada por (5.4) e (5.6) é finita.

A renormalização da energia do vácuo $E_0^{(s)}$ é convencionalmente realizada subtraindo da mesma os termos obtidos das Eqs. (5.3) e (5.5), substituindo as somas discretas por integrações sobre variáveis contínuas [36]. Como resultado, as energias renormalizadas são definidas como

$$E_{0,\text{ren}}^{(1/2)} = -2\hbar \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \omega_n^{(1/2)} - \int_0^{\infty} t(t+1) \omega_t^{(1/2)} dt \right], \quad (5.7)$$

$$E_{0,\text{ren}}^{(1)} = \hbar \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) \omega_n^{(1)} - \int_0^{\infty} (t^2 - 1) \omega_t^{(1)} dt \right]. \quad (5.8)$$

As diferenças entre as somas e as integrais podem ser calculadas usando as seguintes fórmulas de Abel-Plana [21, 23, 132, 133]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n) - \int_0^{\infty} \Phi(t) dt = -\frac{1}{2} \Phi(0) + i \int_0^{\infty} \frac{\Phi(it) - \Phi(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (5.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \int_0^{\infty} \Phi(t) dt = -i \int_0^{\infty} \frac{\Phi(it) - \Phi(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt. \quad (5.10)$$

As Eqs. (5.9) e (5.10) são mais convenientes para os casos dos campos bosônico e fermiônico, respectivamente.

A aplicação da Eq. (5.10) na Eq. (5.7), usando

$$\begin{aligned}\Phi\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Phi_1^{(1/2)}\left(n + \frac{1}{2}\right) = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right),\end{aligned}\quad (5.11)$$

fornece [36, 49]

$$E_{0,\text{ren}}^{(1/2)} = \frac{17\hbar c}{480a}. \quad (5.12)$$

De modo semelhante, aplicando a Eq. (5.9) na Eq. (5.8), e usando a relação

$$\Phi(n) = \Phi_1^{(1)}(n) = n(n^2 - 1) = n^3 - n, \quad (5.13)$$

obtém-se o seguinte resultado[36, 49]:

$$E_{0,\text{ren}}^{(1)} = \frac{11\hbar c}{120a}. \quad (5.14)$$

A energia livre total para os campos do neutrino e eletromagnético no modelo cosmológico de Einstein é dada por

$$F_{\text{tot}}^{(s)}(T) = E_{0,\text{ren}}^{(s)} + \Delta F^{(s)}(T), \quad (5.15)$$

onde todos os termos no lado direito são definidos nas Eqs. (5.4), (5.6), (5.12) e (5.14).

Uma outra importante característica do estado de equilíbrio do campo a uma temperatura não nula é a energia interna, a qual está conectada com o valor esperado do tensor momento-energia e com a energia livre do seguinte modo [134, 135]:

$$U_{\text{tot}}^{(s)}(T) = V \left\langle T_0^{(s)0} \right\rangle_{\text{tot}} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{F_{\text{tot}}^{(s)}(T)}{T} \right]. \quad (5.16)$$

Usando as Eqs. (5.4), (5.6), (5.15) e (5.16), a energia interna total, para os campos do neutrino e eletromagnético, é dada, genericamente, pela equação

$$U_{\text{tot}}^{(s)}(T) = E_{0,\text{ren}}^{(s)} + \Delta U^{(s)}(T), \quad (5.17)$$

em que

$$\Delta U^{(1/2)}(T) = 4\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\omega_n^{(1/2)}}{e^{(\hbar\omega_n^{(1/2)}/k_B T)} + 1}, \quad (5.18)$$

$$\Delta U^{(1)}(T) = 2\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - 1)\omega_n^{(1)}}{e^{(\hbar\omega_n^{(1)}/k_B T)} - 1}. \quad (5.19)$$

As definições de energia livre e energia interna de Casimir seguem a abordagem da teoria de Lifshitz [136], a qual estabelece que a energia livre de Casimir do campo eletromagnético entre duas fronteiras materiais separadas por uma distância a é obtida subtraindo a energia livre do espaço-tempo de Minkowski, sem fronteiras, da energia livre em (5.6). Em outras palavras, não somente uma renormalização de origem infinita da energia de ponto zero é realizada, como também a correção térmica $\Delta F^{(s)}(T)$ sofre uma renormalização finita, subtraindo da mesma a contribuição da radiação de corpo negro [23]. Esta contribuição é proporcional ao volume do espaço entre as fronteiras. A mesma definição para a energia de Casimir térmica foi usada na teoria quântica de campos a temperatura finita, para a configuração de duas placas metálicas ideais e paralelas [23, 136]. Além disso, para configurações com um volume finito, tal como uma caixa metálica ideal e retangular, foi mostrado [137] que para se obter a energia livre de Casimir deve-se subtrair de $\Delta F^{(s)}(T)$ dois termos de origem quântica proporcionais à área da superfície da caixa e ao perímetro de suas bordas. Isto está em acordo com [138], o qual demonstrou que no limite assintótico de altas temperaturas, a energia livre total em um volume genérico contém os seguintes três tipos de termos dependentes da constante de Planck:

$$\alpha_0^{(s)} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}, \quad \alpha_1^{(s)} \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^2}, \quad \alpha_2^{(s)} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c}, \quad (5.20)$$

em que os coeficientes $\alpha_0^{(s)}$, $\alpha_1^{(s)}$, $\alpha_2^{(s)}$ dependem do spin do campo e são expressos em termos dos coeficientes de núcleo de calor [23]. Alguns desses coeficientes podem ser

iguais a zero. Por exemplo, para um campo escalar conforme e sem massa, no modelo cosmológico de Einstein, tem-se que [48]

$$\alpha_0^{(0)} = -\frac{\pi^2}{90}V, \quad \alpha_1^{(0)} = 0, \quad \alpha_2^{(0)} = 0. \quad (5.21)$$

Podemos notar que, em nosso caso, os termos (5.20) na energia livre estão presentes na integral

$$\int_0^\infty \Phi_2^{(s)}(t)dt, \quad (5.22)$$

em que a função $\Phi_2^{(s)}(t)$ para os campos do neutrino e eletromagnético, em concordância com as Eqs. (5.4) e (5.6), é dada por

$$\Phi_2^{(1/2)}(t) = -4k_B T \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \ln [1 + e^{-(\hbar c t / a k_B T)}], \quad (5.23)$$

$$\Phi_2^{(1)}(t) = 2k_B T (t^2 - 1) \ln [1 - e^{-(\hbar c t / a k_B T)}]. \quad (5.24)$$

Expandindo os logaritmos em series de potência e em seguida integrando, obtemos [139]

$$\int_0^\infty \Phi_2^{(1/2)}(t)dt = -\frac{7\pi^4 a^3}{90} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} + \frac{\pi^2 a}{12} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c}, \quad (5.25)$$

$$\int_0^\infty \Phi_2^{(1)}(t)dt = -\frac{2\pi^4 a^3}{45} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} + \frac{\pi^2 a}{3} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c}. \quad (5.26)$$

Como resultado, a energia livre de Casimir é definida por

$$F_C^{(s)}(T) = E_{0,\text{ren}}^{(s)} + \Delta F_C^{(s)}(T), \quad (5.27)$$

em que a correção térmica no segundo termo do lado direito é dada pela expressão

$$\Delta F_C^{(s)}(T) = \Delta F^{(s)}(T) - \int_0^\infty \Phi_2^{(s)}(t)dt. \quad (5.28)$$

A definição (5.28) generaliza a abordagem anteriormente adotada na teoria de Lifshitz e em teoria quântica de campos a temperatura finita, para placas metálicas ideais e

caixas retangulares. Como pode ser visto nas Eqs. (5.25) e (5.26), para os campos do neutrino e eletromagnético, no modelo de Einstein, temos

$$\begin{aligned}\alpha_0^{(1/2)} &= -\frac{7\pi^2}{180}V, & \alpha_1^{(1/2)} &= 0, & \alpha_2^{(1/2)} &= \frac{\pi^2 a}{12}, \\ \alpha_0^{(1)} &= -\frac{\pi^2}{45}V, & \alpha_1^{(1)} &= 0, & \alpha_2^{(1)} &= \frac{\pi^2 a}{3}.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Dessa forma, a definição da correção térmica da energia livre de Casimir leva em consideração a subtração, não somente da contribuição devido à radiação de corpo negro no espaço de Minkowski sem fronteiras, como é o caso para o campo escalar (veja Eq. (5.21)), mas também de mais dois termos de origem quântica, os quais estão presentes na energia livre total. Nas seções 5.2 e 5.3 veremos que as expressões assintóticas da energia livre total $F_{\text{tot}}^{(s)}$ a altas temperaturas não possuem quaisquer termos adicionais de origem quântica.

A contribuição de Casimir para a energia interna pode ser definida de um modo similar como

$$U_C^{(s)}(T) = E_{0,\text{ren}}^{(s)} + \Delta U_C^{(s)}(T), \quad (5.30)$$

em que

$$\Delta U_C^{(s)}(T) = \Delta U^{(s)}(T) - \int_0^\infty \Phi_3^{(s)}(t) dt. \quad (5.31)$$

Em concordância com as Eqs. (5.18) e (5.19), a função $\Phi_3^{(s)}(t)$ para os campos do neutrino e eletromagnético, é dada por

$$\Phi_3^{(1/2)}(t) = \frac{\hbar c}{a} \frac{t(4t^2 - 1)}{e^{(\hbar c t / a k_B T)} + 1}, \quad (5.32)$$

$$\Phi_3^{(1)}(t) = \frac{2\hbar c}{a} \frac{t(t^2 - 1)}{e^{(\hbar c t / a k_B T)} - 1}. \quad (5.33)$$

As integrais que aparecem na Eq. (5.31) são dadas por

$$\int_0^\infty \Phi_3^{(1/2)}(t) dt = \frac{7\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{12 \hbar c}, \quad (5.34)$$

$$\int_0^\infty \Phi_3^{(1)}(t) dt = \frac{2\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{3 \hbar c}. \quad (5.35)$$

As integrais (5.25) e (5.26) subtraídas da energia livre de Casimir e as respectivas integrais (5.34) e (5.35) subtraídas da energia interna de Casimir, satisfazem a Eq. (5.16), da mesma forma que as quantidades totais.

Para finalizarmos esta seção, consideramos outras componentes do tensor momento-energia diferente de T_{00} , a qual foi definida na Eq. (5.16). Na métrica espacialmente homogênea e isotrópica do espaço-tempo em consideração, o tensor momento-energia é diagonal e tem iguais componentes espaciais, as quais são dadas por

$$P_{\text{tot}}^{(s)}(T) = - \left\langle T_i^{(s)i} \right\rangle_{\text{tot}}, \quad (5.36)$$

em que $P_{\text{tot}}^{(s)}(T)$ é a pressão total. As pressões total e de Casimir são expressas usando as respectivas energias livres, como

$$P_{\text{tot}}^{(s)}(T) = - \frac{\partial F_{\text{tot}}^{(s)}(T)}{\partial V}, \quad P_C^{(s)}(T) = - \frac{\partial F_C^{(s)}(T)}{\partial V}. \quad (5.37)$$

Considerando as Eqs. (5.4), (5.6), (5.12), (5.14) e (5.15), obtemos para a pressão total definida na Eq. (5.37), os seguintes resultados:

$$P_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{2880\pi^2 a^4} + \frac{2\hbar}{3\pi^2 a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\omega_n^{(1/2)}}{e^{(\hbar\omega_n^{(1/2)}/k_B T)} + 1}, \quad (5.38)$$

$$P_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{720\pi^2 a^4} + \frac{\hbar}{3\pi^2 a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - 1)\omega_n^{(1)}}{e^{(\hbar\omega_n^{(1)}/k_B T)} - 1}. \quad (5.39)$$

Comparando a Eq. (5.38) com as Eqs. (5.16)-(5.18) e a Eq. (5.39) com as Eqs. (5.16), (5.17) e (5.19), obtemos a equação de estado

$$P_{\text{tot}}^{(s)}(T) = \frac{1}{3} \varepsilon_{\text{tot}}^{(s)}(T), \quad (5.40)$$

em que a densidade de energia total é dada por

$$\varepsilon_{\text{tot}}^{(s)}(T) = \left\langle T_0^{(s)0} \right\rangle_{\text{tot}} = \frac{U^{(s)}(T)}{V}, \quad (5.41)$$

em concordância com a Eq. (5.16). Usando as Eqs. (5.25), (5.26), (5.34) e (5.35), pode-se verificar que a mesma equação de estado é satisfeita para as quantidades de Casimir (energia livre, energia interna e pressão) definidas nas Eqs. (5.27), (5.28), (5.30), (5.31) e (5.37), ou seja:

$$P_C^{(s)}(T) = \frac{1}{3}\varepsilon_C^{(s)}(T). \quad (5.42)$$

A densidade de energia de Casimir é dada pela componente T_{00} do tensor momento-energia de Casimir

$$\varepsilon_C^{(s)}(T) = \left\langle T_0^{(s)0} \right\rangle_C \equiv \frac{U_C^{(s)}(T)}{V}. \quad (5.43)$$

As outras componentes deste tensor são dadas por $-P_C^{(s)}(T)$.

5.2 Cálculo de quantidades termodinâmicas - neutrino

Nesta seção, calculamos as energias livre e interna para o campo do neutrino nos modelos cosmológicos de Friedmann e Einstein. Para este propósito, utilizamos a representação da energia livre de Casimir $F_C^{(1/2)}(T)$ na forma dada pela Eq. (5.27) com $s = 1/2$, em que a energia à temperatura nula é expressa pela Eq. (5.12) e a correção térmica de Casimir é dada pela Eq. (5.28) com (5.4) e (5.23). Desta forma, calculamos a diferença entre a soma na Eq. (5.4) e a integral na Eq. (5.28), usando a fórmula de Abel-Plana (5.10), com $\Phi(t) = \Phi_2^{(1/2)}(t)$ definida na Eq. (5.23). Expandindo o logarítmo em séries de potência, temos

$$\Phi_2^{(1/2)}(t) = -4k_B T \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-(\hbar c n t / a k_B T)} \quad (5.44)$$

e

$$\Phi_2^{(1/2)}(it) - \Phi_2^{(1/2)}(-it) = -8ik_B T \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\hbar c n t}{a k_B T}. \quad (5.45)$$

Em seguida, calculando a integral no lado direito de (5.10), obtemos a seguinte representação da energia livre de Casimir, em termos de um duplo somatório:

$$F_C^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{16\hbar c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left\{ \frac{(\hbar cn/ak_B T)^2 - 3(2\pi m)^2}{[(\hbar cn/ak_B T)^2 + (2\pi m)^2]^3} - \frac{1}{8} \frac{1}{(\hbar cn/ak_B T)^2 + (2\pi m)^2} \right\}. \quad (5.46)$$

Na Eq. (5.46) pode-se realizar primeiramente o somatório em qualquer um dos índices m ou n que as representações resultantes para a energia livre de Casimir são, estritamente falando, equivalentes. No entanto, realizar o somatório primeiramente em m é mais conveniente para obter-se o limite assintótico para baixas temperaturas. Ao contrário, realizar primeiramente o somatório em n é mais conveniente para obter-se o limite assintótico para altas temperaturas. Com isto, trataremos, primeiramente, do somatório em m , o qual pode ser realizado usando a expressão

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[\frac{x^2 - 3y^2 m^2}{(x^2 + y^2 m^2)^3} - \frac{1}{8(x^2 + y^2 m^2)} \right] \\ &= \frac{1}{8x^4} \{ 4 - \pi^3 x^3 [3 + \cosh(2\pi x/y)] \operatorname{csch}^3(\pi x/y) \} \\ & \quad - \frac{y - \pi x \operatorname{csch}(\pi x/y)}{16x^2 y}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

em que $x = \hbar cn/ak_B T$ e $y = 2\pi$. Deste modo, usando a Eq. (5.47), o somatório em m na Eq. (5.46) é dado por

$$\begin{aligned} F_C^{(1/2)}(T) &= \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{7\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{90 (\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{12 \hbar c} \\ & \quad - k_B T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{\sinh^3(\hbar cn/2ak_B T)}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Da Eq. (5.48), no limite de baixas temperaturas quando, $\hbar c/ak_B T \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} F_C^{(1/2)}(T) &= \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{7\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{90 (\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{12 \hbar c} \\ & \quad - 8k_B T e^{-(3\hbar c/2ak_B T)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Este resultado é análogo ao comportamento para baixas temperaturas da energia livre de Casimir, no caso de duas placas metálicas ideais e paralelas [23, 136].

Da Eq. (5.48) pode-se obter a expressão exata para a energia livre total. Usando as Eqs. (5.15), (5.25) e (5.28), todos os termo de potência em T são cancelados e a energia livre total é dada por

$$F_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{480a} - k_B T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{\sinh^3(\hbar c n / 2ak_B T)}. \quad (5.50)$$

Deste modo, a correção térmica na energia livre total à baixas temperaturas é exponencialmente pequena, ou seja:

$$F_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{480a} - 8k_B T e^{-(3\hbar c / 2ak_B T)}. \quad (5.51)$$

Para obter-se o comportamento assintótico da energia livre, energia total e da energia de Casimir a altas temperaturas, devemos realizar primeiramente o somatório em n na Eq. (5.46). Isto fornece a seguinte expressão para a energia livre de Casimir:

$$\begin{aligned} F_C^{(1/2)}(T) = & \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{a^2}{16\pi^4} \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4 \sinh^3(2\pi^2 m a k_B T / \hbar c)} \\ & \times \left\{ 4\pi^2 m \left[4\pi^4 m^2 + \frac{(\hbar c)^2}{(a k_B T)^2} (2 + \pi^2 m^2) \right] \cosh \left(\frac{4\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \right. \\ & + 3 \frac{(\hbar c)^3}{(a k_B T)^3} (6 + \pi^2 m^2) \sinh \left(\frac{2\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \\ & + 4\pi^2 m \left[12m^2 \pi^4 - \frac{(\hbar c)^2}{(a k_B T)^2} (2 + \pi^2 m^2) + 4\pi^2 \frac{\hbar c}{a k_B T} m \sinh \left(\frac{4\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \right] \\ & \left. - \frac{(\hbar c)^3}{(a k_B T)^2} (6 + \pi^2 m^2) \sinh \left(\frac{6\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

A mesma expressão pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} F_C^{(1/2)}(T) = & \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{a^2}{4\pi^4} \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} \\ & \times \left\{ -\frac{(\hbar c)^3}{(a k_B T)^3} (6 + \pi^2 m^2) + 2m\pi^2 \text{csch} \left(\frac{2\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \right. \\ & \times \left[\pi^2 \frac{\hbar c m}{a k_B T} \left(\frac{\hbar c m}{a k_B T} + 4 \coth \left(\frac{2\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \right) + 2 \left(\frac{(\hbar c)^2}{(a k_B T)^2} + 2m^2 \pi^4 \right. \right. \\ & \left. \left. 4m^2 \pi^4 \text{csch}^2 \left(\frac{2\pi^2 m a k_B T}{\hbar c} \right) \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Da Eq. (5.52) ou (5.53), no limite de altas temperaturas, obtemos

$$F_C(T) = 4\pi^2 a^2 \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^2} e^{-(2\pi^2 a k_B T / \hbar c)}. \quad (5.54)$$

Note que, no limite de altas temperaturas, a contribuição de temperatura nula para a energia livre de Casimir foi cancelada pelo correspondente termo na correção térmica. Além disso, deve-se ressaltar que a energia livre de Casimir a altas temperaturas é exponencialmente pequena e não possui o termo clássico proporcional a $k_B T$ (veja seção 5.3), como é esperado para um campo espinorial (neste caso do neutrino).

A energia livre total é obtida adicionando a Eq. (5.25) na Eq. (5.52) ou (5.53). A expressão obtida para $F_{\text{tot}}^{(1/2)}(T)$ é equivalente à Eq. (5.50), a qual é mais compacta. O comportamento assintótico da energia livre total a altas temperaturas é obtida adicionando as Eqs. (5.25) e (5.54).

Uma outra quantidade termodinâmica importante, o qual está relacionada à energia livre, é a entropia. As entropias total e de Casimir para os campos do neutrino e eletromagnético são definidas como

$$S_{\text{tot}}^{(s)}(T) = -\frac{\partial F_{\text{tot}}^{(s)}(T)}{\partial T}, \quad S_C^{(s)}(T) = -\frac{\partial F_C^{(s)}(T)}{\partial T}. \quad (5.55)$$

A expressão exata para a entropia de Casimir do campo do neutrino pode ser obtida da Eq. (5.48) e é dada por

$$\begin{aligned} S_C^{(1/2)}(T) &= \pi^2 k_B \frac{a k_B T}{3\hbar c} \left[\frac{1}{2} - \frac{14\pi^2 (a k_B T)^2}{15 (\hbar c)^2} \right] \\ &+ k_B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\text{csch}^3(\hbar c n / 2a k_B T) + \frac{3\hbar c n}{2a k_B T} \cosh\left(\frac{\hbar c n}{2a k_B T}\right) \right. \\ &\times \left. \text{csch}^4(\hbar c n / 2a k_B T) \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

No limite de baixas temperaturas, a expressão assintótica para a entropia de Casimir é escrita como

$$\begin{aligned} S_C^{(1/2)}(T) &= \pi^2 k_B \frac{a k_B T}{3\hbar c} \left[\frac{1}{2} - \frac{14\pi^2 (a k_B T)^2}{15 (\hbar c)^2} \right] \\ &+ \frac{12\hbar c}{a T} e^{-(3\hbar c / 2a k_B T)}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Note que na Eq. (5.57), a entropia de Casimir tende a zero quando T tende a zero, ou seja, a terceira lei da termodinâmica é satisfeita [134, 135]. A entropia total é obtida das Eqs. (5.50) e (5.55) e será dada pela Eq. (5.56) com o primeiro termo do lado direito omitido. O comportamento assintótico da entropia total a baixas temperaturas é dado pelo termo exponencialmente pequeno na Eq. (5.57). Deste modo, a terceira lei da termodinâmica também mantém-se para a entropia total do campo do neutrino.

Com relação a energia interna total para o campo do neutrino, a mesma é dada pelas Eqs. (5.17) e (5.18). Adicionalmente, a energia interna de Casimir pode ser calculada pelas Eqs. (5.30) e (5.31), com a função $\Phi_3^{(1/2)}(t)$ definida na Eq. (5.32). Os cálculos seguem os mesmos passos como mostrado anteriormente, para a energia livre, usando a fórmula de Abel-Plana (5.10). Os mesmos resultados podem ser obtidos das respectivas expressões para a energia livre, usando a Eq. (5.16) e equações similares para as quantidades de Casimir (energia livre, energia interna e pressão). Com isso, das Eqs. (5.16) e (5.50), obtemos os seguintes resultados para a energia interna total:

$$U_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{3\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cosh(\hbar cn/2ak_B T)}{\sinh^4(\hbar cn/2ak_B T)}. \quad (5.58)$$

No limite de baixas temperaturas, a Eq. (5.58) fornece

$$U_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{480a} + \frac{12\hbar c}{a} e^{-(3\hbar c/2ak_B T)}. \quad (5.59)$$

Por outro lado, no limite de altas temperaturas, o comportamento assintótico da energia interna total é dado por

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) &= \frac{7\pi^4 a^3}{30} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a}{12} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c} \\ &+ 8\pi^4 a^3 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} e^{-(2\pi^2 ak_B T/\hbar c)}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Dividindo ambos os lados das Eqs. (5.59) e (5.60) pelo volume V , obtemos

$$\varepsilon_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) = \frac{17\hbar c}{960\pi^2 a^4} + \frac{6\hbar c}{\pi^2 a^4} e^{-(3\hbar c/2ak_B T)}, \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{tot}}^{(1/2)}(T) &= \frac{7\pi^2}{60} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} - \frac{1}{24a^2} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c} \\ &\quad + 4\pi^2 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} e^{-(2\pi^2 a k_B T / \hbar c)}\end{aligned}\quad (5.62)$$

para baixas e altas temperaturas, respectivamente. Este resultado coincide com o comportamento assintótico da densidade de energia para o campo do neutrino encontrado na Ref. [49] (note que termos exponencialmente pequenos foram omitidos nesta referência).

A expressão exata para a energia térmica de Casimir é obtida subtraindo a Eq. (5.34) da Eq. (5.58). Como resultado, para baixas e altas temperaturas, temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}U_C^{(1/2)}(T) &= \frac{17\hbar c}{480a} - \frac{7\pi^4 a^3}{30} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} + \frac{\pi^2 a}{12} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c} \\ &\quad + \frac{12\hbar c}{a} e^{-(3\hbar c / 2a k_B T)},\end{aligned}\quad (5.63)$$

$$U_C^{(1/2)}(T) = 8\pi^4 a^3 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} e^{-(2\pi^2 a k_B T / \hbar c)}.\quad (5.64)$$

Deste modo, para o campo do neutrino em questão, a energia interna de Casimir a altas temperaturas é exponencialmente pequena. Os valores limites para a densidade de energia de Casimir são obtidos das Eqs. (5.63) e (5.64). As pressões total e de Casimir podem ser obtidas das equações de estado (5.40) e (5.42).

5.3 Cálculo de quantidades termodinâmicas - fóton

O caso do campo eletromagnético é mais complicado porque a função $\Phi_2^{(1)}(t)$ definida na Eq. (5.24) tende ao infinito quando t tende a zero. Isto impede que a fórmula de Abel-Plana (5.9) seja aplicada para o cálculo da energia livre de Casimir do campo eletromagnético, definida nas Eqs. (5.27) e (5.28). Um problema análogo surge no cálculo das energias internas total e de Casimir dadas pelas Eqs. (5.17) e (5.30),

respectivamente. Isto ocorre porque a função $\Phi_3^{(1)}(t)$, dada pela Eq. (5.33), a qual determina a correção térmica (5.19) na energia interna, tem pólos ao longo do eixo imaginário de frequências. Isto também impede a aplicação da fórmula de Abel-Plana na sua forma original (5.9).

Começaremos, então, expandindo, em série de potências, o logarítmo na energia livre total dada por (5.6), ou seja:

$$F_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{120a} - 2k_B T \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) e^{-(\hbar c n m / a k_B T)}. \quad (5.65)$$

Calculando a soma em n , obtemos

$$F_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{120a} - 2k_B T \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3e^{\hbar c m / a k_B T} - 1}{m(e^{\hbar c m / a k_B T} - 1)^3}. \quad (5.66)$$

A energia livre de Casimir para o campo eletromagnético é obtido, então, subtraindo a Eq. (5.26) da Eq. (5.66), ou seja:

$$\begin{aligned} F_C^{(1)}(T) &= \frac{11\hbar c}{120a} + \frac{2\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{45 (\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{3 \hbar c} \\ &\quad - 2k_B T \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3e^{\hbar c m / a k_B T} - 1}{m(e^{\hbar c m / a k_B T} - 1)^3}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

As Eqs. (5.66) e (5.67) são convenientes para a obtenção das expressões assintóticas a baixas temperaturas. Com isso, da Eq. (5.66), a energia livre total é dada por

$$F_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{120a} - 6k_B T e^{-(2\hbar c / a k_B T)}. \quad (5.68)$$

Pode-se notar que a correção total para a energia a temperatura nula é exponencialmente pequena. O comportamento a baixas temperaturas da energia livre de Casimir é dado pela diferença entre as Eqs. (5.68) e (5.26). Neste caso, existem correções para a energia à temperatura nula.

Antes de considerarmos o comportamento assintótico da energia livre a altas temperaturas, obteremos a expressão exata para a energia interna e seu comportamento

assintótico a baixas e altas temperaturas. Usando a expansão em série de potências na Eq. (5.19), podemos reescrever a Eq. (5.17) na forma

$$U_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{120a} + \frac{2\hbar c}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 - 1) e^{-(\hbar c m n / a k_B T)}. \quad (5.69)$$

Realizando o somatório em n , obtemos a seguinte expressão:

$$U_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{120a} + \frac{12\hbar c}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\hbar c m / a k_B T}}{(e^{\hbar c m / a k_B T} - 1)^4}. \quad (5.70)$$

A energia interna de Casimir é dada pelas Eqs. (5.30) e (5.31). Desta forma, levando em conta a Eq. (5.35), temos

$$\begin{aligned} U_C^{(1)}(T) &= \frac{11\hbar c}{120a} - \frac{2\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3} + \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{3 \hbar c} \\ &+ \frac{12\hbar c}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\hbar c m / a k_B T}}{(e^{\hbar c m / a k_B T} - 1)^4}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

As expressões em (5.70) e (5.71) são convenientes para a obtenção das expressões assintóticas a baixas temperaturas. Com isso, da Eq. (5.70) obtém-se

$$U_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{11\hbar c}{120a} + \frac{12\hbar c}{a} e^{-(2\hbar c / a k_B T)}. \quad (5.72)$$

Após a subtração da Eq. (5.35) da Eq. (5.72), a expressão assintótica para a energia interna de Casimir a baixas temperaturas é obtida. Todas essas expressões para a energia interna estão relacionadas com as respectivas expressões para a energia livre, obtidas acima, pela Eq. (5.16) e uma equação análoga para as quantidades de Casimir (energia livre, energia interna e pressão).

Com relação à energia interna de Casimir na forma das Eqs. (5.30) e (5.31), calculamos a mesma de um modo diferente, que nos permite obter o limite a altas temperaturas. Os pólos da função $\Phi_3^{(1)}(t)$, definida na Eq. (5.33), estão localizados nos pontos $t = it_l = 2\pi i l a k_B T / \hbar c$, em que $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. Além disso, em $t = 0$, esta função assume o valor não nulo, $\Phi_3^{(1)}(0) = -2k_B T$. A presença dos pólos ao longo

do eixo imaginário de frequências torna a fórmula de Abel-Plana na forma original inaplicável. Contudo, uma generalização dessa fórmula para o caso no qual existem pólos no eixo imaginário de frequência é dada por [132]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n) - \int_0^{\infty} \Phi(t) dt = -\frac{1}{2}\Phi(0) - \pi \sum_l \text{Res}_{t=it_l} \left[\frac{\Phi(t)e^{i\pi t}}{\sin(\pi t)} \right] + i \int_0^{\infty} \frac{\Phi(it) - \Phi(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (5.73)$$

Para o presente caso, é admitido que a soma é realizada para os valores positivos de l de forma que a função $\Phi(t)$ satisfaz a condição

$$\Phi(t) = \Phi(-t) + o \left[\frac{1}{(t - it_l)} \right] \quad \text{quando } t \rightarrow it_l. \quad (5.74)$$

Aplicamos a Eq. (5.73) à função $\Phi(t) = \Phi_3^{(1)}(t)$ definida na Eq. (5.33). Para este objetivo, usamos as relações

$$\begin{aligned} & - \pi \sum_{l=1}^{\infty} \text{Res}_{t=it_l} \left[\frac{\Phi_3^{(1)}(t)e^{i\pi t}}{\sin(\pi t)} \right] \\ &= \frac{32\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^3}{e^{4\pi^2 l a k_B T / \hbar c} - 1} \\ &+ \frac{8\pi^2 a (k_B T)^2}{\hbar c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{e^{4\pi^2 l a k_B T / \hbar c} - 1} \end{aligned} \quad (5.75)$$

e

$$\Phi_3^{(1)}(it) - \Phi_3^{(1)}(-it) = \frac{2\hbar c}{a} it(t^2 + 1). \quad (5.76)$$

Além disso, calculando a integral no lado direito da Eq. (5.73),

$$i \int_0^{\infty} \frac{\Phi_3^{(1)}(it) - \Phi_3^{(1)}(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt = -\frac{11}{120} \frac{\hbar c}{a}, \quad (5.77)$$

percebemos que tal resultado cancela-se com as contribuições da energia de Casimir $E_{0,\text{ren}}^{(1)}$ à temperatura nula, definida na Eq. (5.14). Deste modo, das Eqs. (5.30) e (5.31), obtemos

$$\begin{aligned} U_C^{(1)}(T) &= k_B T + \frac{32\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^3}{e^{4\pi^2 l a k_B T / \hbar c} - 1} \\ &+ \frac{8\pi^2 a (k_B T)^2}{\hbar c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{e^{4\pi^2 l a k_B T / \hbar c} - 1}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Esta é uma expressão alternativa e exata para a energia interna de Casimir. Cálculos numéricos mostram que a Eq. (5.78) fornece os mesmos valores que a Eq. (5.71) para todos os valores de temperatura, T , considerados. A energia interna total $U_{\text{tot}}^{(1)}(T)$ é obtida adicionando a Eq. (5.35) à Eq. (5.78).

A Eq. (5.78) é conveniente para a obtenção do limite assintótico a altas temperaturas. Desta forma, a expressão assintótica para a energia interna de Casimir a altas temperaturas é dada por

$$U_C^{(1)}(T) = k_B T + \frac{32\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{(\hbar c)^3} e^{-(4\pi^2 a k_B T / \hbar c)}. \quad (5.79)$$

A expressão assintótica a altas temperaturas para energia interna total é obtida adicionando a Eq. (5.35) à Eq. (5.79), o que resulta em

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}}^{(1)}(T) &= \frac{2\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3} - \frac{\pi^2 a (k_B T)^2}{3 \hbar c} + k_B T \\ &+ \frac{32\pi^4 a^3 (k_B T)^4}{(\hbar c)^3} e^{-(4\pi^2 a k_B T / \hbar c)}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Pode-se notar da Eq. (5.79) que a energia interna de Casimir eletromagnética a altas temperaturas possui um limite clássico [128], o qual não depende de $\hbar$ e c . A energia interna total (5.80) também possui um termo clássico igual a $k_B T$. A respectiva expressão assintótica para a densidade de energia interna total é dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{tot}}^{(1)}(T) &= \frac{U_{\text{tot}}^{(1)}(T)}{V} = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3} - \frac{1}{6a^2} \frac{(k_B T)^2}{\hbar c} + \frac{k_B T}{2\pi^2 a^3} \\ &+ 16\pi^2 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} e^{-(4\pi^2 a k_B T / \hbar c)}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

O comportamento assintótico de $\varepsilon_{\text{tot}}^{(1)}$ para altas temperaturas obtido na Ref. [49] não possui o termo clássico. Isto é explicado pela omissão do termo $\Phi_3^{(1)}(0)/2 = -k_B T$ na fórmula da soma de Poisson (Eq. (4) da Ref. [41]), o qual é equivalente à fórmula de Abel-Plana utilizada aqui.

A expressão (5.79) para a energia interna de Casimir a altas temperaturas pode ser usada para determinar o comportamento, neste regime de temperatura, da energia livre

de Casimir. Usando a conexão termodinâmica, dada pela Eq. (5.16), entre a energia livre e a energia interna, temos

$$F_C^{(1)}(T) = -T \left[\int \frac{U_C^{(1)}(T)}{T^2} dT + k_B R \right], \quad (5.82)$$

em que R é uma constante adimensional arbitrária, independente de T . Substituindo a Eq. (5.79) na Eq. (5.82) e mantendo somente termos de ordem superior, obtemos

$$\begin{aligned} F_C^{(1)}(T) &= -k_B T \ln \frac{ak_B T}{\hbar c} - R k_B T \\ &\quad + 8\pi^2 a^2 \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^2} e^{-(4\pi^2 ak_B T/\hbar c)}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

O valor da constante R pode ser determinado da expressão exata para $F_C^{(1)}(T)$ (veja Eq. (5.67)). Cálculos numéricos mostram que a expressão (5.67) fornece os mesmos valores da energia livre de Casimir que a expressão assintótica (5.83), a menos de seis algarismos significativos, para os valores do parâmetro $ak_B T/\hbar c \geq 1$, quando $R = 1.77698$. Deste modo, a energia livre de Casimir do campo eletromagnético a altas temperaturas não possui somente o termo clássico (na entropia) mas também a contribuição logarítmica. O mesmo se mantém para a energia livre de Casimir no interior de uma casca esférica metálica ideal [23, 140, 141] (a temperatura nula, a energia de Casimir para campos de diferentes spins, em cavidades com simetrias esféricas foi considerado nas Refs. [142, 143]). O comportamento a altas temperaturas da energia livre total é obtida somando a Eq. (5.26) à Eq. (5.83).

Para finalizar esta seção, consideramos as entropias total e de Casimir para o campo eletromagnético, nos modelos cosmológicos fechado de Friedmann e no de Einstein. A baixas temperaturas, obtemos, das Eqs. (5.55) e (5.68), a seguinte contribuição para a entropia total:

$$S_{\text{tot}}^{(1)}(T) = \frac{12\hbar c}{aT} e^{-(2\hbar c/ak_B T)}. \quad (5.84)$$

Para a entropia de Casimir a baixas temperaturas, usando a Eq. (5.26), obtemos

$$S_C^{(1)}(T) = 2\pi^2 k_B \frac{ak_B T}{3\hbar c} \left[1 - \frac{4\pi^2 (ak_B T)^2}{15 (\hbar c)^2} \right] + \frac{12\hbar c}{aT} e^{-(2\hbar c/ak_B T)}. \quad (5.85)$$

Pode-se notar que, das Eqs. (5.84) e (5.85), as entropias total e de Casimir tendem a zero quando a temperatura tende a zero, em concordância com a terceira lei da termodinâmica.

Usando os resultados acima, as expressões para as pressões total e de Casimir do campo eletromagnético e seus comportamentos a baixas e altas temperaturas podem ser obtidas das Eqs. (5.40) e (5.41).

No próximo capítulo estudamos o efeito Casimir-Polder em um sistema constituído de uma placa condutora interagindo com uma micropartícula na presença de uma corda cósmica.

Capítulo 6

Efeito Casimir-Polder na presença da Corda

Every great and deep difficulty bears in itself its own solution.

It forces us to change our thinking in order to find it.

– Niels Bohr –

Neste capítulo investigaremos a influência de uma corda cósmica na força de CP entre uma micropartícula e uma placa condutora colocada perpendicularmente à uma corda [144]. Sendo assim, seguiremos a seguinte estrutura: na seção 6.1 calculamos o tensor de Green retardado para o campo eletromagnético, na geometria de uma corda cósmica, com uma placa condutora. Este tensor é usado na seção 6.2 para calcular a força de CP agindo em uma partícula polarizável para o caso geral de um tensor de polarização anisotrópico. A força de CP no modelo do oscilador para o tensor de polarização é analisado na seção 6.3 e cálculos adicionais podem ser encontrados no apêndice C.

6.1 Tensor de Green retardado

Para uma corda cósmica reta e muito longa, a distâncias muito maiores que sua espessura, a correspondente geometria do espaço-tempo é cônica com um déficit angular

azimutal dado por $2\pi - \phi_0$. Considerando que a corda está situada ao longo do eixo z , o elemento de linha, em coordenadas cilíndricas $(x^1, x^2, x^3) = (r, \phi, z)$, pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (6.1)$$

em que $0 \leq \phi \leq \phi_0 = 2\pi/q$, com q sendo um parâmetro associado à corda cósmica. Este elemento de linha foi obtido em [145] na aproximação de campo fraco e considerando a espessura da corda desprezível (veja capítulo 2, seção 2.5). Neste caso, o déficit angular está relacionado à massa por unidade de comprimento μ da corda pela expressão $2\pi - \phi_0 = \mu/m_{\text{Pl}}^2$, em que m_{Pl} é a massa de Planck. No cenário que é adotado para a formação de cordas cósmicas, no universo primordial, tem-se $\mu \sim \eta^2$, em que η é a escala de energia da transição de fase na qual cordas são formadas. Para uma escala de energia associada com teorias de grande unificação GUT, $\mu \ll m_{\text{Pl}}^2$, o que justifica a aproximação de campo fraco, como é visto no capítulo 2. Contudo, a validade do elemento de linha (6.1) tem sido estendida para além da teoria de perturbação linear por vários autores [146] (veja também [1]). Neste caso o parâmetro q não pode ser próximo de 1. No contexto da matéria condensada, q pode assumir, em princípio, qualquer valor associado a defeitos cônicos que aparecem como uma geometria efetiva em vários sistemas, tais como cristais, cristais líquidos e líquidos quânticos [147].

Nosso principal interesse neste trabalho é calcular a força de CP agindo sobre uma micropartícula polarizável (átomo, molécula ou qualquer objeto pequeno descrito por um tensor dipolo elétrico de polarização) próxima à uma placa condutora perpendicular à corda cósmica e localizada em $z = 0$. Para uma partícula situada em um ponto $\mathbf{r}$, a energia de interação CP pode ser expressa como

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \alpha_{jl}(i\xi) G_{jl}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi), \quad (6.2)$$

em que o somatório é realizado sobre os valores $j, l = 1, 2, 3$, $\alpha_{jl}(\omega)$ é o tensor de

polarização da partícula e

$$G_{jl}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G_{jl}^{(s)}(x, x') e^{i\omega\tau}, \quad (6.3)$$

com $x = (t, \mathbf{r})$, $x' = (t', \mathbf{r}')$, $\tau = t - t'$. Em (6.3), $G_{jl}^{(s)}(x, x')$ é dada por

$$G_{jl}^{(s)}(x, x') = G_{jl}(x, x') - G_{jl}^{(M)}(x, x'), \quad (6.4)$$

em que $G_{jl}(x, x')$ é o tensor de Green retardado para o campo eletromagnético na geometria sob consideração e $G_{jl}^{(M)}(x, x')$ é o tensor de Green atrasado no espaço-tempo de Minkowski sem fronteiras. A geometria local induzida pela corda cósmica é plana e o tensor de Green $G_{jl}^{(s)}(x, x')$ é finito no limite de coincidência dos pontos $z \neq 0$ e $r \neq 0$.

O tensor de Green retardado para o campo eletromagnético pode ser obtido através da expressão

$$G_{jl}(x, x') = -i\theta(\tau) \langle E_j(x) E_l(x') - E_l(x') E_j(x) \rangle, \quad (6.5)$$

em que $\theta(x)$ é a função de Heaviside, $E_j(x)$ é a componente j do campo elétrico e o *bracket* corresponde ao valor esperado no vácuo. Se $\{E_{\alpha j}(x), E_{\alpha j}^*(x)\}$ for um conjunto completo de funções modos para o campo elétrico, com o índice α especificando os modos da função, então, o tensor de Green pode ser expresso como uma soma de tais modos, ou seja:

$$G_{jl}(x, x') = -i\theta(\tau) \sum_{\alpha} [E_{\alpha j}(x) E_{\alpha l}^*(x') - E_{\alpha l}(x') E_{\alpha j}^*(x)], \quad (6.6)$$

em que “asterisco” representa o complexo conjugado. Na Eq. (6.6), $E_{\alpha j}(x)$ é a componente física j do vetor campo elétrico em coordenadas cilíndricas e os valores $j = 1, 2, 3$ correspondem às coordenadas r, ϕ, z , respectivamente.

Na geometria sob consideração tem-se duas classes de funções modos, as quais correspondem às ondas transversais do tipo magnética (MT) e elétrica (ET). As correspondentes funções modos do campo elétrico, obedecendo a condição de contorno

$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, na placa condutora em $z = 0$, sendo o vetor $\mathbf{n}$ normal a placa, são dadas pela expressão compacta¹

$$E_{\alpha l}^{(\lambda)}(x) = \beta_{\alpha} E_{\alpha l}^{(\lambda)}(r, z) e^{i(qm\phi - \omega t)}, \quad (6.7)$$

em que $\lambda = 0, 1$ correspondem aos modos MT e ET, respectivamente e

$$\omega^2 = \gamma^2 + k^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.8)$$

com $0 \leq \gamma < \infty$, $0 \leq k < \infty$. As componentes do campo elétrico na Eq. (6.7) são dadas por

$$\begin{aligned} E_{\alpha 1}^{(0)}(r, z) &= -k\gamma J'_{q|m|}(\gamma r) \sin(kz), \\ E_{\alpha 2}^{(0)}(r, z) &= -ik \frac{qm}{r} J_{q|m|}(\gamma r) \sin(kz), \\ E_{\alpha 3}^{(0)}(r, z) &= \gamma^2 J_{q|m|}(\gamma r) \cos(kz), \end{aligned} \quad (6.9)$$

para os modos MT e pelas funções

$$\begin{aligned} E_{\alpha 1}^{(1)}(r, z) &= -\omega \frac{qm}{r} J_{q|m|}(\gamma r) \sin(kz), \\ E_{\alpha 2}^{(1)}(r, z) &= -i\omega \gamma J'_{q|m|}(\gamma r) \sin(kz), \\ E_{\alpha 3}^{(1)}(r, z) &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

para os modos ET. Nas Eqs. (6.9) e (6.10), $J_{\nu}(x)$ é a função de Bessel e “linha” representa a derivada com relação ao argumento da função. Além disso, os modos destas funções são dados pelo conjunto $\alpha = (\lambda, \gamma, m, k)$.

O problema em consideração é simétrico sob reflexão com respeito à placa, $z \rightarrow -z$. Nesta região as funções modos (6.7) são normalizadas pela relação²

$$\int_0^{\infty} dr r \int_0^{\phi_0} d\phi \int_0^{\infty} dz \mathbf{E}_{\alpha}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{E}_{\alpha'}^{(\lambda')*} = 2\pi\omega\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (6.11)$$

¹Ver apêndice C.2.

²Ver apêndice C.3

em que $\delta_{\alpha\alpha'}$ representa a função delta de Dirac para as componentes contínuas em relação ao índice α e a delta de Kronecker para componentes discretas. Substituindo as expressões para as funções modos, pode-se ver que o coeficiente de normalização é dado pela expressão

$$\beta_\alpha^2 = \frac{2q}{\pi\gamma\omega}, \quad (6.12)$$

tanto para os modos MT, quanto para os ET.

Substituindo as funções modos na Eq. (6.6) para o tensor de Green, obtemos

$$G_{jl}(x, x') = -2i\theta(\tau) \frac{q}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=0,1} \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\gamma \frac{1}{\gamma\omega} \times \\ \left[e^{iqm\Delta\phi - i\omega\tau} E_{\alpha j}^{(\lambda)}(r, z) E_{\alpha l}^{(\lambda)*}(r', z') - e^{-iqm\Delta\phi + i\omega\tau} E_{\alpha l}^{(\lambda)}(r', z') E_{\alpha j}^{(\lambda)*}(r, z) \right], \quad (6.13)$$

em que $\Delta\phi = \phi - \phi'$. Da Eq. (6.3), podemos obter o seguinte resultado:

$$G_{jl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) = -\frac{2q}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=0,1} \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\gamma \frac{1}{\gamma\omega} \\ \times \left[E_{\alpha j}^{(\lambda)}(r, z) E_{\alpha l}^{(\lambda)*}(r', z') \frac{e^{iqm\Delta\phi}}{\omega - i\xi} + E_{\alpha l}^{(\lambda)}(r', z') E_{\alpha j}^{(\lambda)*}(r, z) \frac{e^{-iqm\Delta\phi}}{\omega + i\xi} \right]. \quad (6.14)$$

Levando em conta as expressões (6.9) e (6.10), o tensor de Green se decompõe da seguinte forma

$$G_{jl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) = G_{jl}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) + G_{jl}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi), \quad (6.15)$$

em que $G_{jl}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi)$ é a correspondente função para a geometria da corda cósmica, sem fronteiras, e a parte $G_{jl}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi)$ é induzida pela presença da placa condutora em $z = 0$. A interação de CP na geometria da corda cósmica, sem fronteiras, foi analisada em [57, 58] de forma que, no presente trabalho, estaremos interessados somente com a parte induzida da função de Green.

As componentes do tensor $G_{jl}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi)$ podem ser expressas em termos das funções

$$A(r, r', \Delta\phi, y, \xi) = \sum_{m=0}'^{\infty} \cos(qm\Delta\phi) \int_0^\infty dk \cos(ky) \\ \times \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma J_{qm}(\gamma r) J_{qm}(\gamma r')}{\omega^2 + \xi^2}, \quad (6.16)$$

e

$$B(r, r', \Delta\phi, y, \xi) = \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(qm\Delta\phi) \int_0^{\infty} dk \cos(ky) \times \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma J_{qm-j}(\gamma r) J_{qm-j}(\gamma r')}{\omega^2 + \xi^2}, \quad (6.17)$$

em que “linha” na soma indica que a mesma deve ser realizada levando em conta o coeficiente $1/2$ no termo $m = 0$. Para as componentes diagonais, temos

$$\begin{aligned} G_{11}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) &= -\frac{2q}{\pi} \left[\partial_z^2 B(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) + \frac{2}{rr'} \partial_{\Delta\phi}^2 A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) \right], \\ G_{22}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) &= -\frac{2q}{\pi} \left[\partial_z^2 B(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) - 2\partial_r \partial_{r'} A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) \right], \\ G_{33}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) &= \frac{4q}{\pi} (-\partial_z^2 + \xi^2) A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi). \end{aligned} \quad (6.18)$$

As componentes não diagonais são dadas por

$$\begin{aligned} G_{12}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) &= -\frac{4q}{\pi rr'} [2\partial_{\xi^2} \partial_z^2 \partial_{\Delta\phi} + r' \partial_{r'} \partial_{\Delta\phi}] A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi), \\ G_{13}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) &= -\frac{4q}{\pi} \partial_z \partial_r A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi), \\ G_{23}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi) &= -\frac{4q}{\pi r} \partial_{\Delta\phi} \partial_z A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi). \end{aligned} \quad (6.19)$$

As outras componentes não diagonais do tensor de Green são obtidas da Eq. (6.19), usando a relação

$$G_{lj}(\mathbf{r}', \mathbf{r}; -i\xi) = G_{jl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi). \quad (6.20)$$

Com as Eqs. (6.18) e (6.19), o cálculo do tensor de Green é reduzido ao cálculo das funções (6.16) e (6.17). Para a função (6.16) tem-se a seguinte representação [58]:

$$A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) = \frac{\pi}{4q} \left[\sum_k \frac{e^{-\xi u_k}}{u_k} - \frac{q}{2\pi} \sum_{j=\pm 1} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin(q\pi + jq\Delta\phi) e^{-\xi v(x)} / v(x)}{\cosh(qx) - \cos(q\pi + jq\Delta\phi)} \right], \quad (6.21)$$

em que

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt{r^2 + r'^2 + (z + z')^2 - 2rr' \cos(2\pi k/q - \Delta\phi)}, \\ v(x) &= \sqrt{r^2 + r'^2 + (z + z')^2 + 2rr' \cosh x}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

No primeiro termo do lado direito de (6.21), a soma é realizada obedecendo a condição

$$-q/2 + q\Delta\phi/(2\pi) \leq k \leq q/2 + q\Delta\phi/(2\pi). \quad (6.23)$$

Uma representação análoga pode ser usada para a função na Eq. (6.17) [58], ou seja:

$$\begin{aligned} B(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) &= \frac{2r}{r'} A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi) + \frac{\pi}{2q\xi} \frac{1}{r'} \partial_r \left[\sum_k e^{-\xi u_k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q}{2\pi} \sum_{j=\pm 1} \int_0^\infty dx \frac{\sin(q\pi + jq\Delta\phi) e^{-\xi v(x)}}{\cosh(qx) - \cos(q\pi + jq\Delta\phi)} \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Para o cálculo do potencial de CP, precisamos das componentes do tensor de Green $G_{jl}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi)$, no limite $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$. Adicionalmente, para calcularmos $\partial_{\Delta\phi}^2 A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi)$ no limite mencionado, é conveniente usarmos a relação

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \partial_{\Delta\phi}^2 A(r, r', \Delta\phi, \Delta'z, \xi) = - \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} [r\partial_r(r\partial_r) - 4r^2\partial_{z^2}(r\partial_r + 1)] A(r, r', \Delta\phi, z + z', \xi). \quad (6.25)$$

Para as componentes diagonais, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} G_{ll}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi) &= -2\xi^3 \left[\sum_{k=0}^{[q/2]'} f_l(2\xi\sqrt{r^2 s_k^2 + z^2}, s_k, z) - \frac{q}{\pi} \sin(q\pi) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty dy \frac{f_l(2\xi\sqrt{r^2 \cosh^2 y + z^2}, \cosh y, z)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (6.26)$$

em que $[q/2]$ corresponde à parte inteira de $q/2$ e

$$s_k = \sin(\pi k/q). \quad (6.27)$$

Da mesma forma que antes, o símbolo “linha” na soma da Eq. (6.26) corresponde ao termo $k = 0$, com o coeficiente $1/2$. Além disso, na Eq. (6.26), definimos a função

$$f_l(u, v, z) = e^{-u} \sum_{p=1}^3 [b_{lp}(v) u^{p-4} + 4z^2 \xi^2 c_{lp}(v) u^{p-6}], \quad (6.28)$$

em que

$$\begin{aligned} b_{lp}(v) &= b_{lp}^{(0)} + b_{lp}^{(1)} v^2, \\ c_{lp}(v) &= c_{lp}^{(0)} + c_{lp}^{(1)} v^2. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Os coeficientes na Eq. (6.29) são dados pelas matrizes

$$b_{lp}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_{lp}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

e

$$c_{lp}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{lp}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

em que as linhas e colunas são representados por l e p , respectivamente.

No limite $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, a única componente não diagonal do tensor de Green, associado à fronteira, que não se anula, é a componente $G_{13}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi)$, a qual é dada, usando a Eq. (6.19), por

$$\begin{aligned} G_{13}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi) &= -8rz\xi^5 \left[\sum_{k=0}^{[q/2]'} s_k^2 f_{13}(2\xi \sqrt{r^2 s_k^2 + z^2}) - \frac{q}{\pi} \sin(q\pi) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty dy \frac{f_{13}(2\xi \sqrt{r^2 \cosh^2 y + z^2})}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \cosh^2 y \right], \end{aligned} \quad (6.32)$$

com a notação

$$f_{13}(u) = u^{-5} e^{-u} (u^2 + 3u + 3). \quad (6.33)$$

Para valores inteiros do parâmetro q , as Eqs. (6.26) e (6.32) reduzem-se a

$$\begin{aligned} G_{ll}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi) &= -\xi^3 \sum_{k=0}^{q-1} f_l(2\xi \sqrt{r^2 s_k^2 + z^2}, s_k, z), \\ G_{13}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi) &= -4rz\xi^5 \sum_{k=0}^{q-1} s_k^2 f_{13}(2\xi \sqrt{r^2 s_k^2 + z^2}). \end{aligned} \quad (6.34)$$

O termo $k = 0$ nessas expressões correspondem à função de Green para uma placa condutora no espaço-tempo de Minkowski, com fronteiras. Note que, para $k = 0$, a componente $G_{13}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi)$ se anula.

6.2 O potencial de Casimir-Polder

Usando os resultados obtidos na seção anterior para o tensor de Green atrasado, podemos calcular o potencial de CP usando a Eq. (6.2). Com isso e levando em conta a Eq. (6.15), o potencial pode ser escrito como

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_b(\mathbf{r}), \quad (6.35)$$

em que

$$U_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \alpha_{jl}(i\xi) [G_{jl}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi) - G_{jl}^{(M)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi)], \quad (6.36)$$

é o potencial na geometria da corda cósmica sem fronteiras e

$$U_b(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \alpha_{jl}(i\xi) G_{jl}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\xi), \quad (6.37)$$

é a parte induzida pela placa em $z = 0$.

Substituindo as Eqs. (6.26) e (6.32), para as componentes do tensor de Green, na Eq. (6.37), obtemos o seguinte resultado:

$$U_b(\mathbf{r}) = -\frac{1}{16\pi} \left[\sum_{k=0}^{[q/2]'} f(r, z, s_k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sin(q\pi) f(r, z, \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \quad (6.38)$$

em que

$$f(r, z, x) = \sum_{l,p=1}^3 [(r^2 x^2 + z^2) b_{lp}(x) + z^2 c_{lp}(x)] \frac{h_{lp}(2\sqrt{r^2 x^2 + z^2})}{(r^2 x^2 + z^2)^3} + 2r z x^2 \frac{h(2\sqrt{r^2 x^2 + z^2})}{(r^2 x^2 + z^2)^3}, \quad (6.39)$$

onde as funções $h_{lp}(y)$ e $h(y)$ são dadas por

$$\begin{aligned} h_{lp}(y) &= \int_0^\infty du u^{p-1} e^{-u} \alpha_l(iu/y), \\ h(y) &= \int_0^\infty du e^{-u} (u^2 + 3u + 3) \alpha_{13}(iu/y). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Para $r \gg z$, a contribuição dominante para o potencial de CP é dado pelo termo $k = 0$. Desta forma, para o termo dominante, o potencial coincide com o correspondente

potencial para a placa no espaço-tempo de Minkowski: $U_b(\mathbf{r}) \approx U_b^{(M)}(\mathbf{r})$ (Veja Eq. (6.46)). Por outro lado, para $r \ll z$, o potencial é dominado pelo termo relacionado à corda, $U_0(\mathbf{r})$.

Na Eq. (6.40), $\alpha_{jl}(i\xi)$ são as componentes do tensor de polarização em coordenadas cilíndricas. Essas componentes dependem da orientação do eixo principal do tensor de polarização. Como consequência, o potencial de CP depende da distância da micropartícula com relação à corda e à placa e também depende dos ângulos que determinam a orientação dos eixos principais. Considere $x^l = (x', y', z')$ como sendo as coordenadas Cartesianas cuja origem está situada na micropartícula e com os eixos direcionados ao longo dos eixos principais do tensor de polarização (veja Fig. 6.1). Além disso, introduzimos as coordenadas Cartesianas intermediárias $x'' = (x'', y'', z'')$, com a mesma origem e com o eixo z'' paralelo à corda, em que a mesma tem coordenada $x'' = -r$. Considere agora β_{ln} como sendo o cosseno do ângulo entre os eixos x''^l e x'^n . Tem-se, então, que

$$\sum_{n=1}^3 \beta_{ln}^2 = 1.$$

Os coeficientes β_{ln} podem ser expressões em termos dos ângulos de Euler (α, β, γ) (veja Fig. 6.1), os quais determinam a orientação dos eixos principais com relação ao sistema de coordenadas x''^l (veja Ref. [148]). A correspondente matriz $\hat{R}$, com os elementos β_{ln} , é dada por

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ & -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

em que β é o ângulo entre os eixos z' e z'' , γ (α) é o ângulo entre os eixos y' (y'') e a linha de interseção dos planos $x'y'$ e $x''y''$, linha N na Fig. 6.1. Para as componentes

diagonais do tensor de polarização em (6.40), temos

$$\alpha_{ll}(\omega) = \sum_{n=1}^3 \beta_{ln}^2 \alpha_n(\omega), \quad (6.42)$$

em que $\alpha_n(\omega)$ são os valores principais do tensor de polarização. A componente não diagonal pode ser escrita como

$$\alpha_{13}(\omega) = \sum_{n=1}^3 \beta_{1n} \beta_{3n} \alpha_n(\omega),$$

ou levando em conta (6.41), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \alpha_{13}(\omega) = & \sin \beta [(\alpha_1(\omega) - \alpha_2(\omega)) \sin \gamma (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \cos \beta) \\ & + (\alpha_3(\omega) - \alpha_1(\omega)) \cos \alpha \cos \beta]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

No caso isotrópico $\alpha_n(\omega) \equiv \alpha(\omega)$, com a relação $\alpha_{jl}(\omega) = \alpha(\omega) \delta_{jl}$. Quando

$$\alpha_1(\omega) = \alpha_2(\omega), \quad (6.44)$$

usando as expressões gerais, temos

$$\begin{aligned} \alpha_{ll}(\omega) &= \alpha_1(\omega) + [\alpha_3(\omega) - \alpha_1(\omega)] \beta_{l3}^2, \\ \alpha_{13}(\omega) &= \frac{1}{2} [\alpha_3(\omega) - \alpha_1(\omega)] \cos \alpha \sin(2\beta). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Neste caso especial, o potencial de CP não depende do ângulo γ .

Para valores inteiros do parâmetro q , a Eq. (6.38) pode ser reescrita como

$$U_b(\mathbf{r}) = -\frac{1}{32\pi} \sum_{k=0}^{q-1} f(r, z, s_k). \quad (6.46)$$

O termo $k = 0$, nesta expressão (e também em (6.38)) coincide com o potencial de CP, $U_b^{(M)}(\mathbf{r})$, para a placa colocada no espaço-tempo de Minkowski. Levando em conta a expressão (6.39), temos

$$U_b^{(M)}(\mathbf{r}) = -\frac{z^{-4}}{32\pi} \int_0^\infty dx e^{-x} [(1+x+x^2) \sum_{n=1}^3 \alpha_n(ix/2z) + (1+x-x^2) \alpha_{33}(ix/2z)], \quad (6.47)$$

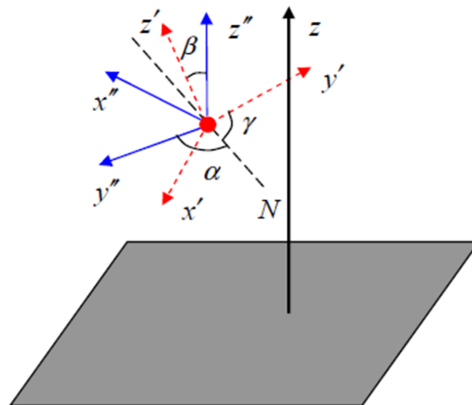


Figura 6.1: Micropartícula próxima à placa condutora. A corda cósmica está situada ao longo do eixo z .

em que

$$\alpha_{33}(\omega) = [\alpha_1(\omega) \cos^2 \gamma + \alpha_2(\omega) \sin^2 \gamma] \sin^2 \beta + \alpha_3(\omega) \cos^2 \beta. \quad (6.48)$$

Para $\alpha_n(ix/2z) > 0$, a correspondente força de CP é sempre atrativa. Esta força não depende do ângulo α . No caso especial dado em (6.44), a mesma não depende do ângulo γ , também.

Consideramos, agora, a forma assintótica do potencial de CP dada pela Eq. (6.38), para grandes distâncias da corda e da fronteira, comparado com o comprimento de onda das principais linhas de absorção atômica. Neste caso, a expressão para a função $f(r, z, x)$ tem a seguinte forma:

$$f(r, z, x) \approx 4 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ll}(0) \frac{(b_l r^2 + c_l z^2) x^2 + z^2}{(r^2 x^2 + z^2)^3} + \frac{16 r z x^2 \alpha_{13}(0)}{(r^2 x^2 + z^2)^3}, \quad (6.49)$$

com os coeficientes

$$b_l = (1, -1, -1), \quad c_l = (-2, -2, 0). \quad (6.50)$$

Além disso, se $z \gg r$, o potencial total de CP, dado em (6.35), é dominado pelo termo puro de corda $U_0(\mathbf{r})$. Com isto, o termo principal será dado por

$$U(\mathbf{r}) \approx U_0(\mathbf{r}) \approx \frac{(q^2 - 1)(q^2 + 11)}{360\pi r^4} [\alpha_{11}(0) - \alpha_{22}(0) + \alpha_{33}(0)]. \quad (6.51)$$

No caso especial (6.44), a dependência explícita do potencial com a orientação dos eixos principais é obtida levando em conta a relação

$$\alpha_{11}(0) - \alpha_{22}(0) + \alpha_{33}(0) = \alpha_3(0) + 2[\alpha_1(0) - \alpha_3(0)] \sin^2 \alpha \sin^2 \beta. \quad (6.52)$$

Neste caso, para um valor fixo de r , a orientação de equilíbrio corresponde a $\alpha = \beta = 0$ para $\alpha_1(0) > \alpha_3(0)$ e a $\alpha = \beta = \pi/2$ para $\alpha_1(0) < \alpha_3(0)$.

A projeção z da força é determinada pela parte induzida da força de CP. A distâncias da fronteira muito grande, comparadas com os comprimentos de onda correspondente à transição, a função $f(r, z, x)$, dada por (6.49), pode ser escrita aproximadamente como

$$f(r, z, x) \approx \frac{4}{z^4} \sum_{m=1}^3 \alpha_m(0) [1 - 2x^2 (1 - \beta_{3m}^2)], \quad (6.53)$$

quando admitimos que $z \gg r$. A correspondente força é atrativa com relação à placa. Em especial, para valores inteiros $q \geq 2$, após a soma sobre k em (6.46), temos

$$U_b(\mathbf{r}) \approx -\frac{q}{8\pi z^4} \alpha_{33}(0). \quad (6.54)$$

Note que, levando em conta (6.47) para a placa no espaço-tempo de Minkowski, a grandes distâncias, tem-se

$$U_b^{(M)}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{8\pi z^4} \sum_{m=1}^3 \alpha_m(0). \quad (6.55)$$

A Eq. (6.55) acima não depende da orientação dos eixos principais para o tensor de polarização. Comparando a mesma com (6.54), podemos notar que não é o caso quando a corda está presente.

À distâncias pequenas comparadas com o comprimento de onda das principais linhas de absorção atômica, a contribuição dominante para o potencial de CP é devido ao termo $p = 1$ e também devido ao último termo na Eq. (6.39). O termo principal para

o potencial de CP é dado por (6.38), com

$$f(r, z, x) \approx 2 \sum_l^3 \frac{(r^2 x^2 + z^2) b_{l1}(x) + z^2 c_{l1}(x)}{(r^2 x^2 + z^2)^{5/2}} \int_0^\infty du \alpha_l(iu) \\ + \frac{12 r z x^2}{(r^2 x^2 + z^2)^{5/2}} \int_0^\infty du \alpha_{13}(iu). \quad (6.56)$$

Por outro lado, se $r \ll z$, temos

$$f(r, z, x) \approx \frac{2}{z^3} [(1 - 2x^2) \sum_{l=1}^3 \int_0^\infty du \alpha_l(iu) + (1 + 2x^2) \int_0^\infty du \alpha_{33}(iu)], \quad (6.57)$$

em que $\alpha_{33}(\omega)$ é dada pela expressão (6.48). Para valores inteiros $q \geq 2$, o potencial de CP tem a seguinte forma assintótica:

$$U_b(\mathbf{r}) \approx -\frac{q}{8\pi z^3} \int_0^\infty du \alpha_{33}(iu). \quad (6.58)$$

Perceba que para o potencial de CP no espaço-tempo de Minkowski, a pequenas distâncias, temos

$$U_b^{(M)}(\mathbf{r}) \approx -\frac{z^{-3}}{16\pi} \int_0^\infty du \left[\sum_{l=1}^3 \alpha_l(iu) + \alpha_{33}(iu) \right]. \quad (6.59)$$

Para o caso isotrópico tem-se $\alpha_{jl}(\omega) = \alpha(\omega) \delta_{jl}$. Desta forma, a expressão para a função (6.39) assume a forma

$$f(r, z, x) = 2(r^2 x^2 + z^2)^{-3} \int_0^\infty du e^{-u} \alpha(iu/2\sqrt{r^2 x^2 + z^2}) \\ \times \{ (x^2 - 1)(1 + u) (r^2 x^2 - 2z^2) + u^2 [z^2(1 - 2x^2) - r^2 x^4] \}. \quad (6.60)$$

À grandes distâncias, temos

$$U_b(\mathbf{r}) \approx \frac{\alpha(0)}{4\pi z^4} \left[\sum_{k=0}^{[q/2]} g_1(r/z, s_k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sin(q\pi) g_1(r/z, \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \quad (6.61)$$

em que

$$g_1(y, x) = \frac{y^2 x^2 + 4x^2 - 3}{(y^2 x^2 + 1)^3}. \quad (6.62)$$

Em especial, para valores inteiros de q , tem-se

$$U_b(\mathbf{r}) \approx \frac{\alpha(0)}{8\pi} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{s_k^2 r^2 + (4s_k^2 - 3) z^2}{(s_k^2 r^2 + z^2)^3}. \quad (6.63)$$

Admitindo $z \gg r$, $q \geq 2$, obtemos de (6.63) que, para o termo principal, $U_b(\mathbf{r}) \approx -q\alpha(0)/(8\pi z^4)$. Para uma placa no espaço-tempo de Minkowski, a correspondente forma assintótica é dada por $U_b^{(M)}(\mathbf{r}) \approx -3\alpha(0)/(8\pi z^4)$.

Para a polarização assintótica, e à pequenas distâncias comparadas com o comprimento de onda das transições atômicas, a forma assintótica do potencial de CP é obtida, sendo dada por

$$U_b(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{4\pi z^3} \int_0^\infty du \alpha(iu) \left[\sum_{k=0}^{[q/2]'} g_2(r/z, s_k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sin(q\pi) g_2(r/z, \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \quad (6.64)$$

em que

$$g_2(y, x) = (x^2 - 1) \frac{y^2 x^2 - 2}{(y^2 x^2 + 1)^{5/2}}. \quad (6.65)$$

Para valores inteiros de q , temos

$$U_b(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{8\pi} \sum_{k=0}^{q-1} (1 - s_k^2) \frac{r^2 s_k^2 - 2z^2}{(r^2 s_k^2 + z^2)^{5/2}} \int_0^\infty du \alpha(iu). \quad (6.66)$$

Em especial, para $r \ll z$ e $q \geq 2$, da Eq. (6.66), obtemos

$$U_b(\mathbf{r}) \approx -q \int_0^\infty du \alpha(iu) / (8\pi z^3). \quad (6.67)$$

Para o potencial de CP no espaço-tempo de Minkowski, à pequenas distâncias da placa condutora, temos

$$U_b^{(M)}(\mathbf{r}) \approx - \int_0^\infty du \alpha(iu) / (4\pi z^3). \quad (6.68)$$

6.3 Modelo do Oscilador

Para calcularmos (6.38) mais especificamente, a dependência com a frequência do tensor de polarização na Eq. (6.40), deve ser especificada. Para os autovalores do tensor

de polarização, podemos usar o modelo do oscilador anisotrópico. Neste modelo,

$$\alpha_n(i\xi) = \sum_j \frac{g_j^{(n)}}{\omega_j^{(n)2} + \xi^2}, \quad (6.69)$$

em que $\omega_j^{(n)}$ e $g_j^{(n)}$ são as frequências e a resistências do oscilador, respectivamente. Para as funções na Eq. (6.40), obtemos

$$\begin{aligned} h_{lp}(y) &= y^2 \sum_{n=1}^3 \beta_{ln}^2 \sum_j g_j^{(n)} B_p(y\omega_j^{(n)}), \\ h(y) &= y^2 \sum_{n=1}^3 \beta_{1n}\beta_{3n} \sum_j g_j^{(n)} \sum_{p=1}^3 h_p B_p(y\omega_j^{(n)}), \end{aligned} \quad (6.70)$$

com $h_1 = h_2 = 3$, $h_3 = 1$, e

$$B_p(x) = \int_0^\infty du \frac{u^{p-1} e^{-u}}{u^2 + x^2}. \quad (6.71)$$

Para as primeiras duas funções em (6.71), temos

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x^{-1} [\sin(x)\text{Ci}(x) - \cos(x)\text{si}(x)], \\ B_2(x) &= -\cos(x)\text{Ci}(x) - \sin(x)\text{si}(x), \end{aligned} \quad (6.72)$$

em que as funções $\text{Ci}(x)$ e $\text{si}(x)$ podem ser encontradas no apêndice C.5 (ou na Ref. [149]). As funções $B_p(x)$ para $p \geq 3$ são obtidas usando a fórmula de recorrência

$$B_{p+2}(x) = \Gamma(p) - x^2 B_p(x). \quad (6.73)$$

A expressão para o potencial de CP é dada por (6.38), em que

$$\begin{aligned} f(r, z, x) &= 4 \sum_{n=1}^3 \sum_j g_j^{(n)} \sum_{p=1}^3 \frac{B_p(2\omega_j^{(n)} \sqrt{r^2 x^2 + z^2})}{(r^2 x^2 + z^2)^2} \\ &\times \left\{ \sum_{l=1}^3 [(r^2 x^2 + z^2) b_{lp}(x) + z^2 c_{lp}(x)] \beta_{ln}^2 + 2h_p r z x^2 \beta_{1n} \beta_{3n} \right\}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Note que para uma placa no espaço-tempo de Minkowski, o potencial de CP é dado pela expressão

$$U_b^{(M)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi z^2} \sum_{n=1}^3 \sum_j g_j^{(n)} \left\{ [B_1(2\omega_j^{(n)} z) + B_2(2\omega_j^{(n)} z)] (1 + \beta_{3n}^2) + B_3(2\omega_j^{(n)} z) (1 - \beta_{3n}^2) \right\}. \quad (6.75)$$

Este potencial é uma função monotônica crescente de z e a correspondente força é atrativa para todas as distâncias.

À pequenas distâncias, $\omega_j^{(n)}\sqrt{r^2+z^2} \ll 1$, a contribuição dominante é devido ao termo $p = 1$ usando a expressão $B_1(y) \approx \pi/(2y)$, válida para $y \ll 1$. Além do mais, se $r \ll z$, obtemos

$$f(r, z, x) \approx \frac{\pi}{z^3} \sum_{n=1}^3 \sum_j \frac{g_j^{(n)}}{\omega_j^{(n)}} [1 + \beta_{3n}^2 - 2x^2 (1 - \beta_{3n}^2)] . \quad (6.76)$$

Para valores inteiros $q \geq 2$, usando a última expressão acima, obtemos para o potencial de CP induzido devido à placa a seguinte expressão assintótica:

$$U_b(\mathbf{r}) \approx -\frac{q}{16z^3} \sum_{n=1}^3 \sum_j \frac{g_j^{(n)}}{\omega_j^{(n)}} \beta_{3n}^2. \quad (6.77)$$

Para a placa no espaço-tempo de Minkowski, à distâncias pequenas comparadas ao comprimento de onda das principais linhas atômicas de absorção, temos

$$U_b^{(M)}(\mathbf{r}) \approx -\frac{z^{-3}}{32} \sum_{n=1}^3 \sum_j \frac{g_j^{(n)}}{\omega_j^{(n)}} (1 + \beta_{3n}^2), \quad (6.78)$$

para o termo principal. Por outro lado, à grandes distâncias $\omega_j^{(n)}\sqrt{r^2+z^2} \gg 1$, usamos $B_p(z) \approx \Gamma(p)/z^2$, $z \gg 1$ e o resultado (6.49) é recuperado, com $\alpha_n(0) = \sum_j g_j^{(n)}/\omega_j^{(n)2}$.

No caso isotrópico $g_j^{(n)} = g_j$, $\omega_j^{(n)} = \omega_j$, a expressão (6.74) é dada por

$$\begin{aligned} f(r, z, x) = & 8 \sum_j g_j \left\{ B_3(y_j) \frac{z^2(1-2x^2) - r^2x^4}{(r^2x^2 + z^2)^2} \right. \\ & \left. + (x^2 - 1) [B_1(y_j) + B_2(y_j)] \frac{r^2x^2 - 2z^2}{(r^2x^2 + z^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.79)$$

com

$$y_j = 2\omega_j\sqrt{r^2x^2 + z^2}. \quad (6.80)$$

Para $y_j \gg 1$, obtemos a Eq. (6.61) com $\alpha_n(0) = \sum_j g_j\omega_j^{-2}$. A expressão assintótica para o potencial de CP à pequenas distâncias, correspondendo à $y_j \ll 1$, é obtida da Eq. (6.64), com a substituição $\int_0^\infty du \alpha(iu) = (\pi/2) \sum_j g_j/\omega_j$.

No caso isotrópico, para o termo puro de corda, temos [58]

$$U_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{[q/2]} f_0(r, s_k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{\sin(q\pi) f_0(r, \cosh y)}{\cosh(2qy) - \cos(q\pi)} \right], \quad (6.81)$$

em que

$$f_0(r, v) = \sum_j \frac{g_j}{r^2 v^2} \left\{ v^2 [B_1(2rv\omega_j) + B_2(2rv\omega_j)] + (1 - v^2) B_3(2rv\omega_j) \right\}. \quad (6.82)$$

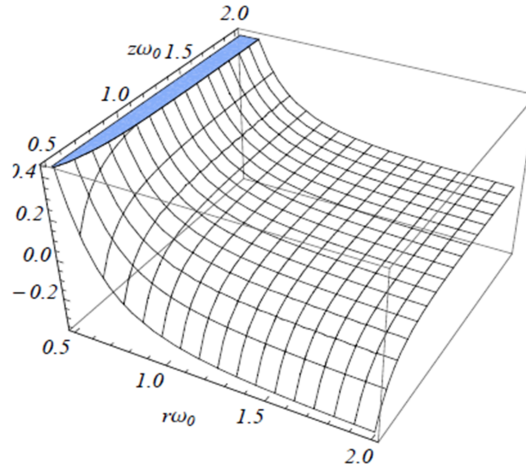


Figura 6.2: O potencial de CP, $U(\mathbf{r})/(g_0\omega_0^2)$, como uma função das distâncias, reescaladas, da placa e da corda. Para o parâmetro q , que caracteriza a corda, assumimos o valor 3. Veja que a força de Casimir-Polder é atrativa com relação à placa e repulsiva com relação à corda, de acordo com o gráfico.

Como um exemplo numérico, na Fig. 6.2 mostramos o gráfico do potencial de CP da micropartícula, com um tensor de polarização isotrópico, e sua dependência com a distância, em relação à placa e à corda. O modelo do oscilador é usado para a polarização. Para o parâmetro q descrevendo o espaço cônico usamos o valor $q = 3$. Como pode ser visto no gráfico, a força de Casimir-Polder é repulsiva com relação à corda e atrativa com relação à placa.

Como mencionado anteriormente, para um tensor de polarização anisotrópico, o potencial de CP, em complemento às coordenadas z e r da partícula polarizável, depende

da orientação dos eixos principais para o tensor de polarização. Como consequência desta dependência, uma força age sobre a micropartícula. No exemplo numérico abaixo, usamos o modelo do oscilador com $\alpha_n(i\xi) = g^{(n)}/[\omega^{(n)2} + \xi^2]$ e $g^{(1)} = g^{(2)}$, $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$. Neste caso, o potencial de CP depende apenas dos ângulos α e β . Na Fig. 6.3, mostramos a dependência do potencial de CP, $r^2U(\mathbf{r})/g^{(1)}$, como uma função dos ângulos α e β para $q = 3$, $\omega^{(1)}r = 1$, $\omega^{(1)}z = 1$, $\omega^{(3)}/\omega^{(1)} = 1.5$, e $g^{(3)}/g^{(1)} = 1.25$. Os valores para os ângulos α e β correspondendo ao mínimo do potencial determina a orientação de equilíbrio dos eixos principais para o tensor de polarização.

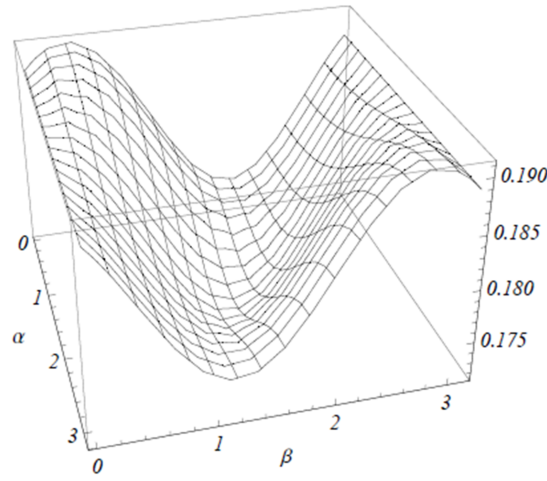


Figura 6.3: O potencial de CP, $r^2U(\mathbf{r})/g^{(1)}$, como uma função dos ângulos α e β para um tensor de polarização anisotrópico. Neste gráfico, adotamos $q = 3$, $\omega^{(1)}r = 1$, $\omega^{(1)}z = 1$, $\omega^{(3)}/\omega^{(1)} = 1.5$, e $g^{(3)}/g^{(1)} = 1.25$. Como pode ser visto no gráfico, a orientação de equilíbrio dos eixos principais para o tensor de polarização é dado pelos valores de β e α obtidos do mínimo do potencial em $r^2U(\mathbf{r})/g^{(1)} \sim 0.175$.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

It is not the strongest of the species that survive, nor the most intelligent, but the one most responsive to change.

– Sir Francis Darwin –

As cordas cósmicas podem surgir de uma quebra de simetria devido às transições de fase no universo primordial e podem ser detectadas por dados observacionais da nucleossíntese do big bang e dos raios cósmicos de altas energias (UHECR's), os quais complementam outros modos de detecção de cordas baseados em emissão de ondas gravitacionais e formação de estruturas, que pode contribuir para anisotropias na CMB. Cordas podem contribuir para perturbações de densidade no universo primordial somente se $G\mu \lesssim 10^{-7}$. Uma outra restrição é dada por $G\mu \lesssim 10^{-9}$, a qual é devido à cronometragem de pulsares de milissegundos [150]. Com os novos e mais avançados detectores de ondas gravitacionais, uma nova restrição na tensão da corda será dada por $G\mu \lesssim 10^{-12}$ [9, 80].

Partículas de altíssimas energias podem ser emitidas de cúspides presentes em cordas cósmicas. Esses cúspides são formados na região onde uma parte da corda dobra-se sobre ela mesma e move-se com um alto fator de Lorentz, o qual é dado por $\gamma \sim \sqrt{m_h L}/4$.

Na presente tese, consideramos um tipo particular de interação linear, no qual o

campo de Higgs condensa no interior da corda, em consequência do mesmo adquirir um valor esperado de vácuo não nulo. Este modelo foi considerado em [102], onde foi mostrado que cordas podem emitir raios gama e prótons como subprodutos de decaimento da partícula de Higgs. O resultado em [102] mostrou que a emissão de UHECR's pode ser eficiente se a corda tiver uma escala de energia da ordem de $M \sim 10^{13} \text{ GeV}$. De modo diferente, consideramos a produção de Higgs por laços de cordas criadas na era da radiação. Nossa aplicação cosmológica é feita usando dados provenientes de observações da fotodissociação dos elementos leves e dos raios gama presentes no Universo. Estimamos a potência emitida, em forma de partículas de Higgs, por cúspides e obtivemos expressões analíticas para a tensão da corda como uma função da constante de acoplamento κ . Adicionalmente, mostramos que para valores da constante de acoplamento entre $10^{-4} \lesssim \kappa \lesssim 1$, a emissão de Higgs é descartada, a menos que $G\mu \sim 10^{-19}$, para $\kappa \sim 10^{3.5}$. Para o caso no qual somente contribuições devido a laços de comprimento $L_g(t)$ fornecem restrições na tensão da corda ($\kappa \lesssim 10^{-4}$), obtivemos que a partícula de Higgs é também descartada a menos que $G\mu \sim 10^{-19}$, para $\kappa \sim 10^{-4}$. As restrições em $G\mu$ resultantes das aplicações cosmológicas são mostradas na Fig. 3.2. Este resultado também é discutido na Ref. [103].

Com relação aos efeitos de vácuo quântico, investigamos o efeito Casimir térmico para os campos do neutrino e eletromagnético no modelo cosmológico de Einstein. Os resultados obtidos são válidos também no modelo cosmológico fechado de Friedmann. Para os campos em consideração, calculamos as expressões gerais para a energia interna total, densidade de energia, pressão e para a energia livre total. Em todos os casos, separamos as contribuições de Casimir das quantidades obtidas, por meio de um procedimento de subtração.

As energias internas total, de Casimir e livre foram representadas em termos de somatórios. As expressões assintóticas para essas quantidades foram calculadas para

os casos limites de baixas e altas temperaturas. Para o campo do neutrino, nossos resultados para a energia interna total (densidade de energia) concordam com os resultados obtidos na Ref. [49]. Além disso, para os resultados da Ref. [49], obtivemos correções exponencialmente pequenas. Nossos resultados para a energia livre de Casimir do campo do neutrino são semelhantes aos obtidos para configurações com fronteiras materiais. Especificamente, mostramos que a energia livre de Casimir do campo do neutrino não possui o termo clássico no limite de altas temperaturas e que a entropia de Casimir satisfaz a terceira lei da termodinâmica.

Para o campo eletromagnético, nosso resultado para a energia interna total difere do resultado obtido em [49] por um termo clássico, o qual surge da contribuição do argumento zero nas fórmulas da soma de Poisson e Abel-Plana. Mostramos que para o campo eletromagnético, a altas temperaturas, a energia interna total possui não somente os termos de origem quântica, como acreditava-se anteriormente, mas também o termo clássico linear com a temperatura. Para a energia livre de Casimir do campo eletromagnético, no modelo cosmológico de Einstein, mostramos que existem termos clássico e logarítmico com a temperatura no limite de altas temperaturas, da mesma forma que é encontrado para o caso do efeito Casimir térmico no interior de uma esfera metálica ideal. Além disso, as entropias total e de Casimir estão em concordância com a terceira lei da termodinâmica, como foi demonstrando.

Estudamos a interação de CP entre uma micropartícula polarizável e uma placa condutora no espaço-tempo da corda cósmica. O potencial é esposto em termos do tensor de Green retardado para o campo eletromagnético, pela Eq. (6.2). Este tensor possui informação sobre as propriedades físicas e geométricas das flutuações de vácuo. Para o cálculo do tensor de Green, usamos o método da soma dos modos. Deste forma, o tensor de Green é decomposto em duas partes: uma sem fronteiras e outra devida à fronteira. A interação de CP no espaço-tempo da corda sem fronteiras foi analisada

anteriormente e, na presente tese, somente nos interessaram efeitos relacionados à presença da placa. A contribuição para o tensor de Green é dada pelas expressões (6.26) e (6.32), para as componentes diagonais e não diagonais, respectivamente.

Analogamente ao tensor de Green, o potencial de CP é decomposto como em (6.35), com a parte relacionada à fronteira dada pela expressão (6.38). Além disso, a força depende da distância da micropartícula à corda, da distância à placa e da orientação dos eixos principais do tensor de polarização. A dependência da orientação entra no potencial através da dependência das componentes do tensor de polarização com os ângulos de Euler. Este tensor é dado pelas Eqs. (6.42) e (6.43), com a matriz $\hat{R}$ dada por (6.41). Dependendo dos autovalores do tensor de polarização e da orientação dos eixos principais, a força de CP pode ser atrativa ou repulsiva. A equação geral é simplificada para o caso especial quando o parâmetro $q = 2\pi/\phi_0$ possui valores inteiros (veja (6.46)). Para distâncias muito maiores que os comprimentos de onda de transição relevantes, a expressão para a função $f(r, z, x)$, no potencial de CP, é dada por (6.49). Adicionalmente, se $z \gg r$, temos a expressão assintótica (6.53). Neste caso, o potencial varia inversamente com a quarta potência da distância à placa condutora e a correspondente força é atrativa com relação à placa. Para valores inteiros de, a saber, $q \geq 2$, o comportamento assintótico do potencial é dado pela expressão (6.54), a qual depende da orientação dos eixos principais do tensor de polarização. Para uma placa no espaço-tempo de Minkowski, a expressão assintótica correspondente é dada por (6.55) e, em primeira ordem, a força não depende da orientação. Para o tensor de polarização, a parte correspondente à placa no potencial de CP é dado pela expressão (6.38), com a função $f(r, z, x)$ dada por (6.60). Para grandes distâncias e para valores inteiros de q , a expressão assintótica correspondente é dada por (6.63). Adicionalmente, se $z \gg r$, para $q \geq 2$, tem-se $U_b/U_b^{(M)} \approx q/3$.

É importante destacar que U_b é divergente para $z = 0$. Para valores diferentes de z ,

próximo da corda, seu comportamento é bem definido. Para o tensor de polarização, usamos o modelo do oscilador anisotrópico, com os autovalores dados por (6.69). Para este modelo, a função $f(r, z, x)$, na expressão (6.38), para o potencial de CP é dada por (6.74), para o caso geral e por (6.79), para o caso do tensor de polarização isotrópico. Para o caso da polarização anisotrópico, a dependência do potencial de CP com a orientação dos eixos principais do tensor de polarização também conduz à uma força agindo na partícula. Isto resulta na polarização macroscópica de um sistema de partículas, induzida pelos efeitos combinados da corda e da fronteira.

Na discussão sobre o efeito Casimir-Polder, admitimos que o campo eletromagnético está no estado de vácuo. Se o campo estiver em um estado térmico, a uma temperatura T , uma nova escala de comprimento aparece, $\lambda_T = (k_B T)^{-1}$, com k_B sendo a constante de Boltzmann. Para temperaturas diferentes de zero, o resultado obtido nesta tese permanece válido na região $r, z \ll \lambda_T$.

No que diz respeito às perspectivas, emissão de partículas de *Moduli* por laços de cordas com cúspides e suas consequências cosmológica no período da nucleossíntese do big bang, na detecção de raios gama e na contribuição para a matéria escura podem ser considerados. Além disso, o estudo de cordas cósmicas supersimétricas, com o objetivo de investigar a emissão de raios cósmicos por este tipo de defeito topológico, se mostra como uma interessante área de pesquisa, inclusive no que diz respeito a simulações computacionais, e poderá ser uma das linhas de pesquisa de investigação decorrente dos estudos feitos na presente tese.

Seria interessante, também, determinar a influência do termo clássico, obtido no capítulo 4, na evolução cosmológica, situação na qual a energia interna total desempenha um papel importante como fonte, e considerar generalizações multi-dimensionais dos resultados obtidos para aplicações em cenários envolvendo branas. Especificamente, pode-se tentar uma generalização dos resultados das Refs. [41, 42].

Ainda com relação ao efeito Casimir, uma investigação do mesmo à temperatura nula e sua correção térmica no modelo cosmológico de Friedmann fechado e de Einstein na presença de uma corda cósmica pode ser considerada. Pode-se estudar a influência do parâmetro q , relacionado à corda, nas quantidades encontradas no capítulo 4 (energia livre, entropia, pressão).

O efeito Casimir-Polder, como uma generalização do problema estudado no capítulo 6, pode ser considerado em um cenário envolvendo múltiplas cordas. Além disso, a interação de Casimir-Polder pode ser considerado, também, no cenário cosmológico com ou sem a presença de cordas e com ou sem a constante cosmológica.

Apêndice A

Definições gerais

Neste apêndice apresentamos algumas das principais definições em cosmologia, teoria de campos e relatividade geral usadas na presente tese.

A.1 Cosmologia

Em cosmologia, temos as seguintes expressões conhecidas:

- Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (\text{A.1})$$

em que $a(t)$ é o fator de escala e k é o parâmetro de curvatura, o qual pode ser -1,0 ou +1, para uma curvatura aberta, plana ou fechada, respectivamente. Note que se usarmos, em (A.1), a parametrização $r = \sin\psi$ para $k = +1$, obtemos a Eq. (5.1).

- Densidade crítica do Universo

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (\text{A.2})$$

em que $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e G é a constante gravitacional. Além disso, na era da radiação, $a \propto t^{1/2}$ e, portanto, $H \sim 1/2t$.

- Relação entre o tempo cósmico e o desvio para o vermelho:

$$t_r = t_0(1 + z_{\text{eq}})^{1/2}(1 + z)^{-2}, \quad (\text{A.3})$$

para a era dominada pela radiação e

$$t_m = t_0(1 + z)^{-3/2}, \quad (\text{A.4})$$

para a era dominada pela matéria. Além disso, usamos durante a tese os seguintes valores:

$$\begin{aligned} t_0 &= 4.4 \times 10^{17} s, \\ t_{\text{eq}} &= 2.4 \times 10^{12} s, \\ 1 + z_{\text{eq}} &= 3200, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

em que t_0 é o tempo cósmico atual, t_{eq} é o tempo cósmico quando existia a mesma quantidade de matéria e radiação e z_{eq} é o desvio para o vermelho associado ao tempo t_{eq} . Em resumo, utilizamos o modelo cosmológico plano, descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (A.1). Assumimos a constante cosmológica $\Lambda = 0$ e adotamos as definições $a_r \propto t^{1/2}$ e $a_m \propto t^{2/3}$, para o fator de escala na era da radiação e na era da matéria, respectivamente.

A.2 Teoria de campos e relatividade geral

- Ação

$$S = \int d^4 \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (\text{A.6})$$

em que $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ é a densidade Lagrangiana, a qual, para o caso do campo escalar livre, é dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (\text{A.7})$$

- Operador d'Alambertiano

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (\text{A.8})$$

com a notação $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$.

- Conexão métrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.9})$$

- Tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \Gamma_{\kappa\sigma}^\rho. \quad (\text{A.10})$$

- Tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}. \quad (\text{A.11})$$

- Escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.12})$$

- Tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (\text{A.13})$$

- Equação da Geodésica

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

Cálculos adicionais para o capítulo 3.

Neste apêndice, vamos detalhar alguns cálculos realizados no capítulo 3. Para este propósito, começaremos discutindo o termo de interação em (3.1).

B.1 Sobre o termo de interação em (3.1)

Considere a parte de interação da ação (3.1) sendo escrita como [102]

$$S_{\text{int}} = -\kappa M \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} h. \quad (\text{B.1})$$

Podemos reescrever este termo de interação em termos da função delta de Dirac no espaço quadri-dimensional, ou seja:

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -\kappa M \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} h \int d^4X \sqrt{-g} \delta^4(X - X(\sigma, \tau)) \\ &= -\kappa \int d^4X \sqrt{-g} M \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \delta^4(X - X(\sigma, \tau)) h, \\ &= \kappa \int d^4X \sqrt{-g} j(X) h. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

em que a fonte $j(X)$ é dada por (3.3) e $\sqrt{-g} = 1$, no espaço-tempo de Minkowski. Perceba que, na primeira linha de (B.2), introduzimos uma integral da função delta, o

qual é igual a um. A Eq. (B.2) é exatamente igual ao último termo do lado direito de (3.1), como era de se esperar.

B.2 Sobre a Eq. (3.7)

Estamos interessados, agora, em detalhar o cálculo da Eq. (3.7). Para isto, considere a expansão em série de Taylor, nas proximidades de $\sigma_{\pm} = 0$, das funções $\mathbf{X}_{\pm}(\sigma_{\pm})$ e suas primeiras derivadas, ou seja:

$$\mathbf{X}_{\pm} = \mathbf{X}'_{\pm}(0)\sigma_{\pm} + \frac{1}{2}\mathbf{X}''_{\pm}(0)\sigma_{\pm}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{X}^{(3)}_{\pm}(0)\sigma_{\pm}^3 + \dots, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{X}'_{\pm} = \mathbf{X}'_{\pm}(0) + \frac{1}{2}\mathbf{X}''_{\pm}(0)\sigma_{\pm} + \frac{1}{6}\mathbf{X}^{(3)}_{\pm}(0)\sigma_{\pm}^2 + \dots \quad (\text{B.4})$$

em que a “linha” representa as derivadas em relação a $\sigma_{\pm}$ e o índice (3) no último termo do lado direito representa a terceira derivada com relação aos mesmos parâmetros. O *cusp* está localizado exatamente no ponto $\sigma_{\pm} = 0$, em torno do qual expandimos as funções $\mathbf{X}_{\pm}(\sigma_{\pm})$.

Adicionalmente, diferenciando as condições de Virasoro (2.36), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{\pm} \cdot \mathbf{X}''_{\pm} &= 0, \\ \mathbf{X}'_{\pm} \cdot \mathbf{X}^{(3)}_{\pm} + |\mathbf{X}''_{\pm}|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Deste modo, para o integrando de (3.7), obtemos

$$1 + \mathbf{X}'_{+} \cdot \mathbf{X}'_{-} \approx -|\mathbf{X}''_{+}|^2 \sigma_{+} \sigma_{-}. \quad (\text{B.6})$$

em que usamos (B.4), (B.5) e a relação $\mathbf{X}'_{+}(0) = -\mathbf{X}'_{-}(0)$ obtida de (2.44). Além disso, considerando que $|\mathbf{X}'_{\pm}| \sim 2\pi/L$, o qual apresenta-se como uma boa aproximação para *loops* que não possuem muitas ondulações [9], tem-se

$$1 + \mathbf{X}'_{+} \cdot \mathbf{X}'_{-} \approx -\frac{4\pi^2}{L^2} \sigma_{+} \sigma_{-}, \quad (\text{B.7})$$

que corresponde Eq. (3.9).

Por outro lado, para as fases $\phi_{\pm}$ em (3.7), temos

$$\phi_{\pm} \equiv (\omega_k \sigma_{\pm} \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_{\pm}) \approx \omega_k \sigma_{\pm} \mp \mathbf{k} \cdot (\mathbf{X}'_{\pm}(0) \sigma_{\pm} + \frac{1}{2} \mathbf{X}''_{\pm}(0) \sigma_{\pm}^2 + \frac{1}{6} \mathbf{X}^{(3)}_{\pm}(0) \sigma_{\pm}^3). \quad (\text{B.8})$$

em que usamos (B.3). Considerando que $\mathbf{k}$ está na direção da velocidade da corda (lembrando que $\mathbf{X}'_+ = -\mathbf{X}'_-$), obtemos

$$\phi_{\pm} \equiv (\omega_k \sigma_{\pm} \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_{\pm}) \approx \omega_k \sigma_{\pm} - k \sigma_{\pm} + \frac{2\pi^2}{3L^2} \sigma_{\pm}^3, \quad (\text{B.9})$$

em que usamos as condições de Virasoro (2.36) e as relações em (B.5). A Eq. (B.9) é exatamente igual a Eq. (3.8).

Devemos, agora, ressaltar o método da aproximação de fase estacionária, o qual possibilita a resolução da Eq. (3.7). Neste sentido, considere a integral

$$I(\lambda) = \int dx g(x) e^{i\lambda f(x)}, \quad (\text{B.10})$$

em que $\lambda \rightarrow +\infty$, $\lambda f(x)$ é a fase e x , $g(x)$ e $f(x)$ são reais. A fase $\lambda f(x)$ é uma função que varia rapidamente com x e $g(x)$ varia lentamente, também com x , comparada com a fase. Percebe-se, então, que devido ao fato de a exponencial em (B.10) oscilar rapidamente, a integral vai à zero, exceto na vizinhança do ponto onde $\lambda f'(x_p) = 0$, ou seja, na vizinhança do ponto x_p , onde a fase é estacionária.

Do ponto de vista do problema tratado na presente tese, a fase é dada por $k_{\lambda} X_{\pm}^{\lambda}$, na exponencial da Eq. (3.7). Neste sentido, em $\sigma_{\pm} = 0$, região onde o *cusp* se encontra, temos que

$$k_{\lambda} X_{\pm}^{\lambda} = \sqrt{k^2 + m_h^2} \mp k \cos \theta = 0, \quad (\text{B.11})$$

em que usamos as condições de Virasoro em (2.36) e θ é o ângulo entre $\mathbf{k}$ e $\mathbf{X}_+$. Podemos perceber da Eq. (B.11) que a mesma será estacionária se $m_h = 0$ e $\theta = 0^\circ$ (para $\mathbf{X}'_+$) ou $\theta = 180^\circ$ (para $\mathbf{X}'_-$). Claramente, este caso não se aplica para a emissão de Higgs

uma vez que o mesmo possui massa. Contudo, a fase $k_\lambda X_\pm^\lambda$ continuará menor que um para $m_h \ll k$ e $\theta \ll 1$. Com esta aproximação, a fase terá a seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\phi_\pm = \frac{1}{2}k_\lambda X_\pm^\lambda \approx \frac{k}{4} \left(\theta^2 + \frac{m_h^2}{k^2} \right) \sigma_\pm + \frac{\pi^2 k}{3L^2} \sigma_\pm^3. \quad (\text{B.12})$$

A Eq. (B.12) é igual a (B.9) para $\theta = 0$ e $k \gg m_h$. Para que a Eq. (B.12) permaneça menor que a unidade é necessário que cada termo seja menor que um. Desta forma, para os termos sem o ângulo θ , temos

$$|\sigma_\pm| \lesssim \frac{4k}{m_h^2}, \quad |\sigma_\pm| \lesssim \frac{L}{(\pi k L)^{1/3}}. \quad (\text{B.13})$$

A razão entre a expressão da direita e a da esquerda, mostra que a expressão da direita é menor que a da esquerda, ou seja:

$$\frac{\text{Direita}}{\text{Esquerda}} = \frac{(mL)^{2/3}}{4\pi^{1/3}} \left(\frac{m}{k} \right)^{4/3}. \quad (\text{B.14})$$

Isto fica claro devido ao termo $(m/k)^{4/3}$ uma vez que $k \gg m$. Portanto, com esta condição, obtemos que $k \gtrsim k_{\min}$, onde

$$k_{\min} = \frac{1}{4} m_h \sqrt{m_h L}. \quad (\text{B.15})$$

Note que, para $k \gtrsim k_{\min}$, temos que $\sigma_\pm \lesssim \Delta\sigma$, com

$$\Delta\sigma = \frac{L}{(\pi k L)^{1/3}}. \quad (\text{B.16})$$

Ou seja, as coordenadas $\sigma_\pm$ têm um limite superior dado pela Eq. (B.16).

Devemos lembrar que ainda precisamos fazer o termo com o pequeno ângulo θ , em (B.12), menor que um. Com isto, devemos ter $\theta^2 \lesssim 4/(k\sigma_\pm)$. Usando o limite superior (B.16) para $\sigma_\pm$, obtemos

$$\theta \lesssim \frac{1}{(kL)^{1/3}}. \quad (\text{B.17})$$

Portanto, o cálculo da integral (3.7) permanece válido para ângulos obedecendo a relação (B.17).

Apêndice C

Cálculos adicionais para os capítulos 4 e 6.

C.1 Sobre a Eq. (4.55)

Para que possamos efetuar a passagem do discreto para o contínuo como feito na Eq. (4.55), devemos considerar o seguinte somatório:

$$\begin{aligned} k_B T \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(\xi_l) &= k_B T \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta \xi_l}{2\pi k_B T} f(\xi_l), \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta \xi_l}{2\pi} f(\xi_l), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

em que $\Delta \xi_l = \xi_{l+1} - \xi_l = 2\pi k_B T$, de acordo com as Eqs. (4.45) e (4.46). Se tomarmos o limite $T \rightarrow 0$, a segunda linha da Eq. (C.1) se transformará em uma integral, ou seja

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta \xi_l}{2\pi} f(\xi_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} f(\xi). \quad (\text{C.2})$$

Para a Eq. (4.52), temos que $f(\xi_l) = e^{-t\xi_l^2}$. Neste sentido, de acordo com o procedimento realizado na Eq. (C.2), $f(\xi) = e^{-t\xi^2}$ e, consequentemente, teremos o resultado na Eq. (4.56).

C.2 Sobre as soluções em (6.7)

Sabemos da teoria eletromagnética que os campos elétricos e magnéticos podem ter componentes transversais à direção de propagação da onda. Neste sentido, pode-se ter a seguinte configuração:

- Ondas Magnéticas do tipo Transversal (MT)

$$\begin{aligned} B_z &= 0, & B_r, B_\phi &\neq 0, \\ E_r, E_\phi, E_z &\neq 0. \end{aligned} \tag{C.3}$$

- Ondas Elétricas do tipo Transversal (ET)

$$\begin{aligned} E_z &= 0, & E_r, E_\phi &\neq 0, \\ B_r, B_\phi, B_z &\neq 0. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Para a descrição da configuração acima, adotamos um sistema de coordenadas cilíndricas visto que usamos a simetria cilíndrica no capítulo 6.

Na presente tese, estudamos um sistema constituído de uma micropartícula na presença de uma placa perpendicular à direção z e na presença de uma corda cósmica. Adicionalmente, os campos elétrico e magnético devem obedecer as seguintes condições de contorno:

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{C.5}$$

em que o vetor $\hat{n}$ é perpendicular à placa, ou seja, o mesmo está na direção z . As condições de contorno para o campo elétrico e magnético em (C.5) podem ser escritas agora como

$$\begin{aligned} E_t|_S &= 0, \\ B_z|_S &= 0, \end{aligned} \tag{C.6}$$

em que E_t e B_z são as componentes transversal e na direção z dos campos elétrico e magnético, respectivamente. As condições em (C.6) podem ser obtidas, levando em conta que $\hat{n}$ está na direção z e a componente perpendicular E_t está no plano da placa, decompondo os campos elétrico e magnético em componentes transversais e na direção z .

A equação de onda para os campos elétrico e magnético são dadas por

$$\begin{aligned}\square \mathbf{E} &= 0, \\ \square \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{C.7}$$

para cada componente do campo elétrico e magnético. Além disso, para uma solução geral das componentes na direção z dada por

$$\begin{aligned}E_z(r, \phi, z, t) &= E_z(r, \phi)(A \cos kz + B \sin kz)e^{-i\omega t}, \\ B_z(r, \phi, z, t) &= B_z(r, \phi)(C \cos kz + D \sin kz)e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{C.8}$$

podemos escrever, usando as equações de Maxwell, as equações para as componentes transversais de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t &= -i\omega \hat{k} \times \nabla_t \left(\frac{B_z}{\gamma^2} \right), \\ \mathbf{B}_t &= \nabla_t \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_z}{\gamma^2} \right) \right],\end{aligned}\tag{C.9}$$

para as ondas do tipo ET e como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t &= \nabla_t \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_z}{\gamma^2} \right) \right], \\ \mathbf{B}_t &= \frac{i\omega}{c^2} \hat{k} \times \nabla_t \left(\frac{E_z}{\gamma^2} \right),\end{aligned}\tag{C.10}$$

para as ondas do tipo MT. O fator γ é definido por $\gamma = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ e $\hat{k}$ é um versor unitário na direção z . Para o problema em questão somente nos interessam as componentes do campo elétrico nos casos de ondas do tipo MT e ET visto que

queremos analisar a polarização da micropartícula devido à sua interação com a placa e a corda. Ou seja, somente as componentes transversais para o campo elétrico em (C.9) e (C.10) nos interessam. Para calcularmos tais componentes precisamos de E_z e B_z . Neste sentido, devemos usar as condições de contorno em (C.6). Para B_z em (C.8), temos

$$B_z(r, \phi, z, t) = DB_z(r, \phi) \sin kze^{-i\omega t}. \quad (\text{C.11})$$

Para a componente E_t do campo elétrico, devemos considerar a condição (C.6), para a mesma, porém de outra forma. Neste sentido, note que em (C.10) a componente E_t depende da derivada $\partial_z E_z$. Assim, podemos considerar a condição $\partial_z E_z|_S = 0$, ao invés daquela dada em (C.6) para E_t . Fazendo isso, para E_z , obtemos

$$E_z(r, \phi, z, t) = AE_z(r, \phi) \cos kze^{-i\omega t}. \quad (\text{C.12})$$

Nos resta agora achar uma solução para $B_z(r, \phi)$ e $E_z(r, \phi)$. Com este propósito, devemos considerar as equações de onda em (C.7) na forma

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + \gamma^2) \frac{E_z(r, \phi)}{\gamma^2} &= 0, \\ (\nabla_t^2 + \gamma^2) \frac{B_z(r, \phi)}{\gamma^2} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

em que ∇_t^2 é operador Laplaciano transversal o qual, neste caso, está no mesmo plano da placa condutora. A solução para as equações em (C.13), na presença da corda, são dadas por

$$\begin{aligned} E_z(r, \phi) &= E_0 \gamma^2 J_{q|m|}(\gamma r) e^{imq\phi}, \\ B_z(r, \phi) &= B_0 \gamma^2 J_{q|m|}(\gamma r) e^{imq\phi}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

em que E_0 , B_0 são constantes, $q = 2\pi/\phi_0$ é o déficit angular e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Substituindo as equações em (C.14) nas Eqs. (C.9) e (C.10), para o campo elétrico,

obtemos as soluções para as ondas tipo MT e ET dadas pela equação compacta em (6.7), com (6.9) e (6.10).

C.3 Sobre a condição de normalização (6.11)

A condição de normalização (6.11) pode ser reescrita como

$$\int_0^\infty dr r \int_0^{\phi_0} d\phi \int_0^\infty dz \mathbf{E}_\alpha^{(\lambda)} \cdot \mathbf{E}_{\alpha'}^{(\lambda')*} = 2\pi\omega\delta_{mm'}\delta(\gamma - \gamma')\delta(k - k'). \quad (\text{C.15})$$

Devemos calcular a constante β_α em (6.7), usando (C.15), tomando separadamente as componentes $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ para os modos MT e ET, respectivamente. O resultado deverá ser o mesmo visto que β_α é uma constante. Adicionalmente, é preciso considerar algumas relações para o cálculo das integrais em r , em ϕ e em z . Para o cálculo da integral em r , por exemplo, devemos considerar a expressão assintótica para $J_\nu(x)$, quando $x \rightarrow +\infty$. Ou seja:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{C.16})$$

Além disso, deve-se também considerar a representação integral da delta de Dirac

$$\delta(y \pm y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos[(y \pm y_0)x] dx. \quad (\text{C.17})$$

Para a integral em ϕ , é preciso utilizar a relação de ortonormalidade

$$\int_0^{\phi_0} e^{-i(m'-m)q\phi} d\phi = \phi_0 \delta_{mm'}. \quad (\text{C.18})$$

Adicionalmente, para a integral em z , deve-se usar as conhecidas relações trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin x y \sin x' y &= \frac{1}{2} [\cos[(x - x')y] - \cos[(x + x')y]], \\ \cos x y \cos x' y &= \frac{1}{2} [\cos[(x - x')y] + \cos[(x + x')y]]. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Por fim, um ponto importante deve ser considerado para o cálculo das integrais em (C.15). Para a componente MT de (6.7), o termo $E_\phi^{(0)} E_\phi^{(0)*}$ não contribui para a integral, quando $r \rightarrow +\infty$. Da mesma forma, para a componente ET, o termo $E_r^{(1)} E_r^{(1)*}$ também não contribui para a integral em r , quando $r \rightarrow +\infty$. Para ambas as componentes, isto se deve ao fato de que o integrando, na integral em r , é proporcional a $1/r$. Levando em conta todas as expressões e considerações destacadas nesta seção, pode-se obter que a constante β_α é dada por (6.12).

C.4 Comentários gerais

- De forma a expressarmos o tensor de Green em (6.14) em termos das funções (6.16) e (6.17), deve-se utilizar as relações

Para a solução em ϕ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{imq\Delta\phi} &= 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \cos(mq\Delta\phi) + 1, \\ &= 2 \sum_{m=0}^{+\infty}{}' \cos(mq\Delta\phi), \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

em que a “linha” no somatório é uma abreviação que representa o termo $1/2$ para $m = 0$.

Para a função de Bessel $J_\nu(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) &= J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x), \\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2 \frac{d}{dx} J_\nu(x). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Integral por partes para a componente $G_{12}^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\xi)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\gamma^2 + k^2 + \xi^2)} \frac{d}{d\gamma} (J_\nu(\gamma r) J_\nu(\gamma r')) = -2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \int_0^{+\infty} d\gamma \gamma \frac{J_\nu(\gamma r) J_\nu(\gamma r')}{(\omega^2 + \xi^2)}. \quad (\text{C.22})$$

- Equação (6.15):

A separação do tensor de Green (6.15) na parte associada ao espaço-tempo da corda sem fronteiras e na parte induzida pela presença da placa condutora é possível devido ao termo $\sin kz \sin kz'$, o qual aparece em (6.14) e é proveniente da solução da componente z do campo elétrico. É possível separar este termo em duas partes, usando a relação dada neste apêndice, em (C.15). Neste sentido, o termo dado por $\cos[(z - z')k]$ está associado ao tensor de Green do espaço-tempo da corda sem fronteiras e o termo $\cos[(z + z')k]$ está associado à presença da placa condutora. Portanto, trabalhamos somente com a parte induzida relacionada com $\cos[(z + z')k]$, uma vez que a parte devido à $\cos[(z - z')k]$ foi analisada nas Refs. [57, 58].

C.5 Sobre a Eq. (6.72)

A definição das funções $\text{si}(x)$ e $\text{Ci}(x)$, usadas na Eq. (6.72), são dadas respectivamente por

$$\text{si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \quad (\text{C.23})$$

e

$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt, \quad (\text{C.24})$$

em que $\gamma \approx 0,58$ é a constante de Euler–Mascheroni. As expressões (C.23) e (C.24) são conhecidas como integrais de seno e cosseno, respectivamente. Para mais detalhes sobre essas definições ver Ref. [149].

Bibliografia

- [1] A. Vilenkin e E.P.S. Shellard, “*Cosmic Strings and Other Topological Defects*”, Cambridge University Press (1994).
- [2] M.B. Hindmarsh e T.W.B. Kibble, Rep. Prog. Phys. **55**, 478 (1995) [arXiv:hep-ph/9411342]; E.J. Copeland e T.W.B. Kibble, Proc. Roy. Soc. Lond. A**466**, 623 (2010) [arXiv:0911.1345 [hep-th]].
- [3] A. Vilenkin, “*Cosmic strings: progress and problems*”, [arXiv:hep-th/0508135].
- [4] Edmund J. Copeland, Levon Pogosian e Tanmay Vachaspati, “*Seeking String Theory in the Cosmos*”, [arXiv:1105.0207].
- [5] E. Jeong e G. F. Smoot, Astrophys. J. **624**, 21 (2005) [arXiv:astro-ph/0406432].
- [6] E. Komatsu et al. [WMAP Collaboration], Astrophys. J.Suppl. **192**, 18 (2011) [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [7] R. Keisler, C. L. Reichardt, K. A. Aird, B. A. Benson, L. E. Bleem, J. E. Carlstrom, C. L. Chang e H. M. Cho et al., Astrophys. J. **743**, 28 (2011) [arXiv:1105.3182 [astro-ph.CO]].
- [8] T. Vachaspati e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D 31**, 3052 (1985).
- [9] T. Damour e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **85**, 3761 (2000) [arXiv:gr-qc/0004075];
T. Damour e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D 64**, 064008 (2001) [arXiv:gr-qc/0104026];

- T. Damour e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D 71**, 063510 (2005) [arXiv:hep-th/0410222].
- [10] V. Berezhinsky, K.D. Olum, E. Sabancilar e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D 84**, 085006 (2011) [arXiv: 1108.2509].
- [11] C. Lunardini e E. Sabancilar, Phys. Rev. **D86**, 085008 (2012) [arXiv:1206.2924 [astro-ph.CO]].
- [12] T. Damour e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **78**, 2288 (1997) [arXiv:gr-qc/9610005].
- [13] E. Sabancilar, Phys. Rev. **D81**, 123502 (2010) [arXiv: 0910.5544].
- [14] E. Babichev e M. Kachelriess, Phys. Lett. **B 614**, 1 (2005) [arXiv:hep-th/0502135].
- [15] M. Peloso e L. Sorbo, Nucl. Phys. **B 649**, 88 (2003) [arXiv:hep-ph/0205063].
- [16] Masahiro Kawasaki, Koichi Miyamotoa e Kazunori Nakayamac, “*Cosmological effects of decaying cosmic string loops with TeV scale width*”, [arXiv:1105.4383].
- [17] Jean-François Dufaux, JCAP **09**, 022 (2012) [hep-th/1201.4850].
- [18] Jean-François Dufaux, Phys. Rev. Lett. **109**, 011601 (2012) [arXiv:1109.5121].
- [19] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **B 51**, 793 (1948).
- [20] M. Krech, *The Casimir Effect in Critical Systems* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [21] V. M. Mostepanenko e N. N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [22] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy* (World Scientific, Singapore, 2001).

- [23] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, e V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, Oxford, 2009).
- [24] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, e V. M. Mostepanenko, Rev. Mod. Phys. **81**, 1827 (2009) [arXiv:0902.4022 [cond-mat.other]].
- [25] A. W. Rodriguez, F. Capasso, e S. G. Johnson, Nature Photon. **5**, 211 (2011).
- [26] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, e V. M. Mostepanenko, Int. J. Mod. Phys. B **25**, 171 (2011) [arXiv:1104.1705 [cond-mat.mtrl-sci]].
- [27] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, e C. Romero, Phys. Rev. D **81**, 055003 (2010) [arXiv:1002.2141 [hep-th]].
- [28] G. L. Klimchitskaya e C. Romero, Phys. Rev. D **82**, 115005 (2010) [arXiv:1011.3065 [gr-qc]].
- [29] E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, e V. M. Mostepanenko, Eur. Phys. J. C **68**, 223 (2010) [arXiv:0911.1950 [quant-ph]].
- [30] Ph. Brax, C. Van de Bruck, D. F. Mota, N. J. Nunes, e H. A. Winter, Phys. Rev. D **82**, 083503 (2010) [arXiv:1006.2796 [astro-ph.CO]].
- [31] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, e C. Romero, Phys. Rev. D **83**, 075004 (2011) [arXiv:1103.0993 [hep-ph]].
- [32] V. M. Mostepanenko e G. L. Klimchitskaya, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 2302 (2010) [arXiv:0912.3877 [quant-ph]].
- [33] L. H. Ford, Phys. Rev. D **11**, 3370 (1975).
- [34] J. S. Dowker e R. Critchley, J. Phys. A **9**, 535 (1976).

- [35] S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko, e A. A. Starobinsky, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **70**, 1577 (1976) [Sov. Phys. JETP 43, 823 (1976)].
- [36] L. H. Ford, Phys. Rev. **D 14**, 3304 (1976).
- [37] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, e S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [38] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions* (Springer, Berlin, 1995).
- [39] A. A. Bytsenko, G. Cognola, L. Vanzo, e S. Zerbini, Phys. Rep. **266**, 1 (1996) [arXiv:hep-th/9505061].
- [40] E. Elizalde, J. Phys. **A 39**, 6299 (2006).
- [41] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, e S. Ogushi, Phys. Rev. **D 67**, 063515 (2003) [arXiv:hep-th/0209242].
- [42] E. Elizalde, S. D. Odintsov, e A. A. Saharian, Phys. Rev. **D 79**, 065023 (2009) [arXiv:0902.0717 [hep-th]].
- [43] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, e P. Wang, Phys. Rev. **D 71**, 103504 (2005) [arXiv:hep-th/0502082].
- [44] J. S. Dowker, Phys. Rev. **D 18**, 1856 (1978).
- [45] J. S. Dowker e R. Critchley, Phys. Rev. **D 15**, 1484 (1977).
- [46] A. Zhuk e H. Kleinert, Theor. Math. Phys. **109**, 1483 (1996).
- [47] H. Kleinert e A. Zhuk, Theor. Math. Phys. **108**, 1236 (1996).
- [48] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, e C. Romero, Phys. Rev. **D 83**, 104042 (2011).

- [49] M. B. Altaie e J. S. Dowker, Phys. Rev. **D 18**, 3557 (1978).
- [50] B. L. Hu, Phys. Lett. **103B**, 331 (1981).
- [51] V.A. Parsegian, *Van der Waals forces: A Handbook for Biologists, Chemists, Engineers, and Physicists* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005); S.Y. Buhmann e D.-G. Welsch, Prog. Quantum Electron. **31**, 51 (2007); S. Scheel e S.Y. Buhmann, Acta Phys. Slov. **58**, 675 (2008); M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, e V.M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, Oxford, 2009); F. Intravaia, C. Henkel, e M. Antezza, *Fluctuation-Induced Forces Between Atoms and Surfaces: The Casimir-Polder Interaction*, In *Lecture Notes in Physics: Casimir Physics*, Vol. 834, Eds. Diego Dalvit, Peter Milonni, David Roberts, e Felipe da Rosa (Springer, Berlin, 2011).
- [52] C. Eberlein e R. Zietal, Phys. Rev. **A 83**, 052514 (2011) [arXiv:1103.2381 [physics.atom-ph]]; K.A. Milton et al, Phys. Rev. **A 83**, 062507 (2011) [arXiv:1103.4386 [hep-th]].
- [53] A.A. Saharian e A.S. Kotanjyan, Phys. Lett. **B713**, 133(2012) [arXiv:1201.0135].
- [54] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, A.A. Saharian, e A.S. Tarloyan, Phys. Rev. **D 78**, 105007 (2008)[arXiv:0809.0844 [hep-th]].
- [55] E.R. Bezerra de Mello e A.A. Saharian, JHEP **04** (2009) 046 [arXiv:1006.0224 [hep-th]].
- [56] E.R. Bezerra de Mello e A.A. Saharian, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 115402 (2012) [arXiv:1110.2129 [hep-th]].
- [57] V.M. Bardeghyan e A.A. Saharian, J. Contemp. Phys. **45**, 1 (2010).

- [58] A.A. Saharian e A.S. Kotanjyan, Eur. Phys. J. **C 71**, 1765 (2011) [arXiv:1108.0195 [hep-th]].
- [59] I. Brevik e T. Toverud, Class. Quantum Grav. **12**, 1229 (1995).
- [60] N.R. Khusnutdinov e M. Bordag, Phys. Rev. **D 59**, 064017 (1999) [arXiv:gr-qc/9810066].
- [61] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, A.A. Saharian, e A.S. Tarloyan, Phys. Rev. **D 74**, 025017 (2006) [arXiv:hep-th/0605231].
- [62] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, e A.A. Saharian, Phys. Lett. **B 645**, 245 (2007) [arXiv:hep-th/0611310].
- [63] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, A.A. Saharian, e V.M. Bardeghyan, Phys. Rev. **D 82**, 085033 (2010) [arXiv:1008.1743 [hep-th]]; S. Bellucci, E.R. Bezerra de Mello, e A.A. Saharian, Phys. Rev. **D 83**, 085017 (2011) [arXiv:1101.4130 [hep-th]]; E.R. Bezerra de Mello, F. Moraes, e A.A. Saharian, Phys. Rev. **D 85**, 045016 (2012) [arXiv:1111.0199 [hep-th]].
- [64] G. Fucci e K. Kirsten, JHEP **1103**, 016 (2011); G. Fucci e K. Kirsten, J. Phys. **A 44**, 295403 (2011) [arXiv:1104.0688 [hep-th]].
- [65] E.R. Bezerra de Mello e A.A. Saharian, Class. Quantum Grav. **28**, 145008 (2011) [arXiv:1103.2550 [hep-th]].
- [66] V.V. Nesterenko e I.G. Pirozhenko, Class. Quantum Grav. **28**, 175020 (2011) [arXiv:1003.0886 [hep-th]].
- [67] L. Perivolaropoulos, Nucl. Phys. **B148**, 128 (2005), [arXiv:astro-ph/0501590v1].
- [68] T.W.B. Kibble, “*Cosmic Strings Reborn?*”, [arXiv:astro-ph/0410073].

- [69] A. Vilenkin e A. E. Everett, Phys. Rev. Lett. **48**, 1867 (1982); Q. Shafi e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D29**, 1870 (1984).
- [70] H. B. Nielsen e P. Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
- [71] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [72] Y. Nambu, "*Symmetries and Quark Models*", ed. Chand R (New York: Gordon and Breach - 1970); P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi e C. Thorne, Nucl. Phys. **B56** 109 (1973).
- [73] M. B. Green, J. Schwartz e E. Witten (1987) *Superstring Theory* (Cambridge:Cambridge University Press).
- [74] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi e C. Thorne, Nucl. Phys. **B56**, 109 (1973).
- [75] Ken D. Olum. e J. J. Blanco-Pillado, Phys. Rev. **D60**, 023503 (1999) [arXiv:gr-qc/9812040].
- [76] Ruth Durrer, "*Topological defects in Cosmology*", New Astronomy Reviews **43** (1999) 111-156.
- [77] A. Albrecht e N. Turok, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1868.
- [78] D.P. Bennet e F.R. Bouchet, Phys. Rev. **D 41** (1990) 2408.
- [79] B. Allen e E.P.S. Shellard, Phys. Rev. Lett **64** (1990) 119.
- [80] S. Olmez, V. Mandic e X. Siemens, Phys. Rev. **D81**, 104028 (2010) [arXiv:1004.0890 [astro-ph.CO]].
- [81] G. B. Hobbs et al., PASA **26**, 103 (2009) [arXiv: astro-ph/0812.2721].
- [82] A. Vilenkin, Phys. Rev **D23**, 852 (1981).

- [83] E. Morganson, P. Marshall, T. Treu, T. Schrabback e R. D. Blandford, MNRAS, Vol. 406, 2452 (2010) [arXiv : astro-ph.CO/0908.0602].
- [84] A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **46**, 1169 (1981).
- [85] M. Wyman, L. Pogosian e I. Wasserman, Phys. Rev. **D72**, 032513 (2005) [arXiv:astro-ph/0503364].
- [86] N. Bevis, M. Hindmarsh, M. Kunz e J. Urethilla, Phys. Rev. Lett. **100**, 021301 (2008) [arXiv: astro-ph/0702223].
- [87] L. Pogosian, S-H. H. Tye, I. Wasserman e M. Wyman, JCAP 0902, 013 (2009) [arXiv: astro-ph/0804.0810].
- [88] A. A. Fraisse, JCAP 0703, 008 (2007) [arXiv: astro-ph/0708.1162].
- [89] N. Kaiser e A. Stebbins, Nature **310**, 391 (1984).
- [90] L. Pogosian e M. Wyman, Phys. Rev. **D77**, 083509 (2008) [astro-ph/0711.0747].
- [91] T. W. B. Kibble e N. Turok, Phys. Lett. **B116**, 141 (1982).
- [92] P. Bhattacharjee, T.W. B. Kibble e N. Turok, Phys. Lett. **B119**, 95 (1982).
- [93] P. Bhattacharjee e N. C. Rana, Phys. Lett. **B246**, 365 (1990).
- [94] A. J. Gill e T. W. B. Kibble, Phys. Rev. **D50**, 3660 (1994) [arXiv: hep-ph/9403395].
- [95] J.J. Blanco-Pillado, K. D. Olum e B. Shlaer, Phys. Rev. **D83**, 083514 (2011) [arXiv : astro-ph.CO/1101.5173].
- [96] J. H. MacGibbon e R. H. Brandenberger, Nucl. Phys. **B331**, 153 (1990).
- [97] P. Bhattacharjee, Phys. Rev. **D40**, 3968 (1989).

- [98] J.J. Blanco-Pillado e K.D. Olum, Phys. Rev. **D59**, 063508 (1999) [arXiv:gr-qc/9810005] ; Ken D. Olum. e J. J. Blanco-Pillado, Phys. Rev. **D60**, 023503 (1999) [arXiv:gr-qc/9812040].
- [99] A. Babul, B. Paczynski e D.N. Spergel, Ap. J. Lett. **316**, L49 (1987).
- [100] V. Berezhinsky, B. Hnatyk e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D64**, 043004 (2001) [arXiv:astro-ph/0102366].
- [101] K. S. Cheng, Y. W. Yu e T. Harko, Phys. Rev. Lett. **104**, 241102 (2010) [arXiv:astro-ph.HE/1005.3427].
- [102] T. Vachaspati, Phys. Rev. **D81**, 043531 (2010) [arXiv: 0911.2655].
- [103] H. F. Mota, “*Cosmological Constraints on Higgs particles from Cosmic String Cusps*”, a ser submetido para publicação - (2013).
- [104] J. Polchinski e J. V. Rocha, Phys. Rev. **D75**, 123503 (2007) [arXiv:gr-qc/0702055].
- [105] F. Dubath, J. Polchinski e J.V. Rocha, Phys. Rev. **D77**, 123528 (2008).
- [106] V. Vanchurin, Phys. Rev. **D77**, 063532 (2008) [arXiv:0712.2236 [gr-qc]].
- [107] D.P. Bennett e F.R. Bouchet, Phys. Rev. **D41**, 2408 (1990).
- [108] B. Allen e E.P.S. Shellard, Phys. Rev. Lett. **64**, 119 (1990).
- [109] G.R. Vincent, M. Hindmarsh e M. Sakellariadou, Phys. Rev. **D56**, 637 (1997) [arXiv:astro-ph/9612135].
- [110] C.J.A.P. Martins e E.P.S. Shellard, Phys. Rev. **D73**, 043515 (2006) [arXiv:astro-ph/0511792].

- [111] C. Ringeval, M. Sakellariadou e F. Bouchet, JCAP 0702, 023 (2007).
- [112] V. Vanchurin, K. D. Olum e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D74**, 063527 (2006),
[arXiv:gr-qc/0511159v4].
- [113] K. D. Olum e V. Vanchurin, Phys. Rev. **D75**, 063521 (2007) [arXiv:astro-ph/0610419].
- [114] S. Carroll, “*Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*”, Addison Wesley (2004).
- [115] M. Kawasaki, K. Kohri e T. Moroi, Phys.Rev. **D71**, 083502 (2005) [astro-ph/0408426].
- [116] M. Kawasaki, K. Kohri e T. Moroi, Phys. Lett. **B625**, 7 (2005) [astro-ph/0402490].
- [117] K. Jedamzik, Phys. Rev. **D74**, 103509 (2006) [arXiv:hep-ph/0604251].
- [118] J. Ellis, K. A. Olive e E. Vangioni, Phys. Lett. **B619**, 30 (2005) [arXiv:astro-ph/0503023].
- [119] P. Sreekumar et al. [EGRET Collaboration], Astrophys. J. **494**, 523 (1998) [astro-ph/9709257]; A. W. Strong, I. V. Moskalenko e O. Reimer, Astrophys. J. **613**, 956 (2004) [astro-ph/0405441].
- [120] A. A. Abdo et al., [Fermi Collaboration], Phys. Rev. Lett. **104**, 101101 (2010) [arXiv:1002.3603 [astro-ph.HE]].
- [121] V. Berezhinsky, A. Gazizov, M. Kachelriess, e S. Ostapchenko, Phys. Lett. **B695**, 13 (2011) [arXiv:1003.1496].

- [122] Marcus Venicius Cougo-Pinto, Carlos Farina e Alexandre Tort, *O efeito Casimir*, Revista brasileira de ensino de física, vol.22, N° 01, Março 2000.
- [123] H. Lewis Ryder, *Quantum Field Theory*, second edition: Cambridge University Press (1996).
- [124] F. London: Z. Phys. **63** (1930) 245.
- [125] H.B.G. Casimir e D. Polder: Phys. Rev. **73** (1948) 360.
- [126] S.Y. Buhmann e D.-G. Welsch, Prog. Quantum Electron. **31**, 51 (2007).
- [127] V. B. Bezerra, V. M. Mostepanenko, H. F. Mota, e C. Romero, Phys. Rev. **D84**, 104025 (2011) [arXiv:1110.4504 [gr-qc]].
- [128] J. Feinberg, A. Mann, e M. Revzen, Ann. Phys. (N.Y.) **288**, 103 (2001).
- [129] G. Kennedy, J. Phys. A **11**, L77 (1978).
- [130] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [131] A. A. Grib, S. G. Mamayev, e V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (Friedmann Laboratory Publishing, St.Petersburg, 1994).
- [132] A. A. Saharian, *The Generalized Abel-Plana Formula with Applications to Bessel Functions and Casimir Effect* (Yerevan State University Publishing House, Yerevan, 2008); [arXiv: 0708.1187].
- [133] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, e F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions* (Kriger, New York, 1981), Vol. 1.
- [134] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1980), Part I.

- [135] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Dover, New York, 1987).
- [136] L. S. Brown e G. J. Maclay, Phys. Rev. **184**, 1272 (1969).
- [137] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya, e V. M. Mostepanenko, Eur. Phys. J. C **57**, 823 (2008) [arXiv:0808.3754 [quant-ph]].
- [138] J. S. Dowker e G. Kennedy, J. Phys. A **11**, 895 (1978).
- [139] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [140] R. Balian e B. Duplantier, Ann. Phys. (N.Y.) **104**, 300 (1977).
- [141] R. Balian e B. Duplantier, Ann. Phys. (N.Y.) **112**, 165 (1978).
- [142] G. Cognola, E. Elizalde, e K. Kirsten, J. Phys. A **34**, 7311 (2001) [arXiv:hep-th/9906228].
- [143] E. Elizalde, M. Bordag, e K. Kirsten, J. Phys. A **31**, 1743 (1998) [arXiv:hep-th/9707083].
- [144] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, H. F. Mota, e A. A. Saharian, Phys. Rev. **D86**, 065023 (2012) [arXiv:1205.6914 [hep-th]].
- [145] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D23**, 852 (1981).
- [146] J. R. Gott III, Astrophys. J. **288**, 422 (1985); W. Hiscock, Phys. Rev. **D31**, 3288 (1985); B. Linet, Gen. Relativ. Gravit. **17**, 1109 (1985); D. Garfinkle, Phys. Rev. **D32**, 1323 (1985).

- [147] D.R. Nelson, *Defects and Geometry in Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002); G.E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [148] G.A. Korn e T.M. Korn, *Mathematical Handbook* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [149] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I.A. Stegun (Dover, New York, 1972).
- [150] R. van Haasteren et al., “*Placing limits on the stochastic gravitational wave background using European pulsar timing array data*”, [arXiv: astro-ph.CO/1103.0576].