

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM EM COSMOLOGIA
Clélio Brasil Cardoso Gomes

JOÃO PESSOA

- 2006 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM EM COSMOLOGIA

Clélio Brasil Cardoso Gomes

Dissertação realizada sob a orientação do prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho, apresentada ao Departamento de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

JOÃO PESSOA

- 2006 -

G633f Gomes, Clélio Brasil Cardoso
 Formalismo de primeira ordem em cosmologia / Clélio
 Brasil Cardoso Gomes.-- João Pessoa, 2006.
 71f. : il.
 Orientador: Dionisio Bazeia Filho
 Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
 1. Física. 2. Cosmologia. 3. Gravitação. 4. Campos
 escalares reais. 5. Energia escura. 6. Equações de movimento.
 7. Equações diferenciais de primeira ordem.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Aos meus pais e irmãos
À Lilian

AGRADECIMENTOS

É difícil agradecer apropriadamente a todos que contribuíram de forma significativa, direta ou indiretamente, para que este trabalho pudesse ser realizado. Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Dionisio Bazeia pela orientação. Ao prof. Dr. Laércio Losano pela colaboração na minha aquisição de conhecimento e pela dedicação demonstrada. Ao prof. Dr. Paulo Sérgio Silva por sempre estar disponível a tirar minhas dúvidas. Ao grupo de Física de Partículas e Campos pelos seminários da sexta-feira que muito contribuíram para o meu amadurecimento. Aos professores Valdir Barbosa Bezerra, Maria Luiza Cescato, Carlos Pires e Carlos Romero Filho, Adriano Natale, Gastão Krein, Ruben Audrovandi e José Pereira por terem contribuído para a minha formação como dedicados professores das disciplinas por mim cursadas no mestrado. Ao Sr. Mariano por sempre estar bem humorado e pronto para servir um bom café. À secretária Sra. Ana Virgínia pela prestatividade e gentileza no tratamento com os alunos. Ao prof. Dr. Cláudio Furtado por ser um exemplo de coordenador, sempre apoiando os alunos e imparcial nas questões acadêmicas. Aos demais professores e servidores do departamento pela responsabilidade que lidam com os assuntos acadêmicos. Aos meus colegas Alessandro Oliveira e Carlos Bessa pela companhia descontraída e sempre prestativa no dia a dia. Aos meus amigos Alyson e Marlon, por sempre estarem presentes e prontos a ouvir. À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Lilian, pela sua compreensão, dedicação e apoio incondicional, estando a meu lado em todos os instantes de uma batalha que só quem enfrenta sabe das dificuldades. Aos meus irmãos Célio, Jucélia e Iracema por serem um exemplo de união e amor. Às minhas sobrinhas Lyana e Nicolý por serem a minha razão de viver. À minha mãe Maria Felix pelo amor que tem pela família. Ao meu pai Juquivaldo, por ser o grande idealizador deste projeto, dedico a ele todo o mérito desta conquista, pois sem seu apoio e seu entusiasmo, tenho certeza que não teria chegado onde cheguei.

RESUMO

Iniciamos o nosso trabalho com uma rápida revisão de cosmologia e gravitação. Utilizamos o modelo cosmológico padrão, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker para estudarmos modelos cosmológicos na presença de um campos escalares reais. O assunto é de interesse para a energia escura. Como resultado principal deste trabalho nós mostramos que as equações de movimento podem ser escritas como equações diferenciais de primeira ordem. Em geral muito mais simples de serem resolvidos pelos métodos usuais.

ABSTRACT

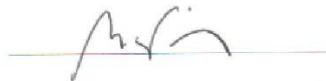
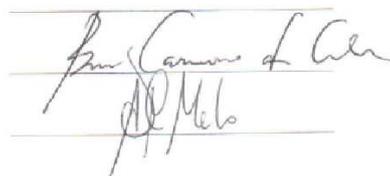
We start on work with a brief revision of gravitation and cosmology. We use the standard cosmological model of Friedmann-Robertson-Walker to investigate cosmological models in the presence of real scalar fields. The subject is of interest to dark energy. As main result of this work, we show that the equations of motion can be written as first-order differential equations. In general much simpler to be solved by standard methods.

Esta dissertação resultou na publicação do artigo referente ao trabalho apresentado no capítulo 4 deste texto.

Ata da Sessão Pública de Defesa da tese de doutorado do Aluno Clélio Brasil Cardoso Gomes, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração em Física da Gravitação e Cosmologia.

1
2
3
4
5
6
7 Aos vinte e dois dias do ano dois mil e seis, às quinze horas, na sala de reuniões do
8 Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
9 Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para
10 examinar o candidato ao grau de Doutor em Física, na área de:
11 Física da Gravitação e Cosmologia, o Sr. Clélio Brasil Cardoso Gomes. A comissão
12 examinadora composta pelos professores doutores: Dionísio Bazeia Filho (DF-UFPB),
13 Orientador e Presidente da Banca Examinadora, Cláudio Benedito Silva Furtado (DF -
14 UFPB), Bruno Carneiro da Cunha (DF-UFPE), dando início aos trabalhos, o Prof. Dionísio
15 Bazeia Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra
16 ao candidato para que o mesma fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação
17 intitulado "Formalismo de Primeira Ordem em Cosmologia". Concluída a exposição, a
18 candidata foi argüida pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "aprovado
19 com distinção" Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo
20 diploma de Mestre em Física na forma da lei e, para constar, eu, Ana Virgínia Chaves de
21 Melo, servindo de secretária, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos
22 membros da Banca Examinadora. João Pessoa, 22 de fevereiro de 2006.

23 Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
Orientador
Prof Dr Cláudio B S Furtado
Titular Especialista UFPB
Prof Dr Bruno Carneiro da Cunha
Titular Especialista externo (UFPE)
Ana Virgínia Chaves de Melo
Secretária

24

Com tempo, onde se lê no cabeçalho "tese de doutorado", lia-se dissertação de Mestrado. E na linha 10, onde se lê "ao grau de Doutor", lia-se "ao grau de Mestre"

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Relatividade Geral | 3 |
| 2.1 | Albert Einstein e a Relatividade Geral | 3 |
| 2.2 | Geodésica | 5 |
| 2.3 | Equações de Einstein | 7 |
| 3 | Cosmologia | 9 |
| 3.1 | Uma Breve História Sobre a Cosmologia | 9 |
| 3.2 | Modelo Cosmológico Padrão e o Princípio Cosmológico | 14 |
| 3.3 | Métrica de Friedmann-Robertson-Walker | 18 |
| 3.4 | Lei de Hubble | 21 |
| 3.5 | O Redshift | 23 |
| 3.6 | As Equações de Friedmann | 25 |
| 3.7 | Matéria Ordinária x Matéria Escura | 30 |
| 3.8 | Radiação Cósmica de Fundo | 32 |
| 3.9 | A Constante Cosmológica e a Energia Escura | 37 |
| 4 | Aplicação do modelo de Friedman | 42 |
| 4.1 | Introdução | 42 |
| 4.2 | Procedimento | 45 |
| 4.3 | Dinâmica Taquiônica | 49 |
| 5 | Conclusão | 51 |
| 6 | Apêndice | 53 |
| 6.1 | Obtenção explícita das Eqs. de Friedmann e da aceleração | 53 |
| | Referências Bibliográficas | 60 |

Capítulo 1

Introdução

O início do século XX assistiu ao surgimento da cosmologia como um ramo da física graças a duas grandes descobertas realizadas independentemente. No aspecto teórico, Albert Einstein publicou em 1915 a teoria da Relatividade Geral, contendo uma descrição geométrica da gravitação, e mostrou como é possível aplicá-la, de uma forma consistente, no entendimento da dinâmica global do Universo [1]. A Relatividade Geral tem um papel importantíssimo na evolução da cosmologia. Antes da grande descoberta de Einstein, a cosmologia não tinha uma ferramenta matemática sólida onde pudesse se apoiar em busca de encontrar respostas para o desconhecido Universo que nos cerca.

Menos de dez anos depois, graças às observações ópticas obtidas no recém-inaugurado telescópio do Monte Wilson [1], Edwin Hubble se encarregou de demolir o conceito da imutabilidade cósmica. Primeiro com a descoberta de que a nebulosa de Andrômeda era na verdade, tal como tantas outras, um sistema estelar de dimensões semelhantes ao nosso próprio sistema estelar. Depois, Hubble demonstrou que as galáxias próximas se afastavam de nós com velocidades crescentes com as distâncias que nos separam delas. Esta descoberta mudou o conceito de que o nosso era estático como o próprio Einstein imaginava.

Alguns resultados recentes como a evidência da aceleração do Universo provocou uma grande mudança conceitual no entendimento do Universo [2, 3, 4]. Para o futuro, com o lançamento de telescópios mais modernos a bordo de satélites, espera-se que este e outros mistérios do nosso Universo sejam desvendados.

No Capítulo 2 estudamos um pouco da trajetória de Einstein e de uma das suas mais famosas descobertas, a teoria da Relatividade Geral. Estudamos a geodésica que é uma curva que une dois pontos tal que para pequenas variações da forma da curva o seu comprimento é estacionário. Einstein observou que a luz segue a trajetória da geodésica tipo luz e os corpos de massa a geodésica tipo tempo. Obtivemos também

na mesma secção a equação da geodésica, como também a equação para os símbolos de Christoffel em função da métrica. Também neste capítulo nós introduzimos a ideia de curvatura com o tensor de Riemann e o tensor de Ricci. Encontramos o tensor de Riemann em função das conexões e a identidade de Bianchi. Também encontramos equação de Einstein a partir da identidade de Bianchi e utilizando a contração do tensor de Ricci mais conhecido como escalar de Ricci.

No Capítulo 3 introduzimos uma breve história sobre a cosmologia, sua evolução desde os tempos da idade média até os dias atuais. Estudamos o chamado modelo cosmológico padrão ou modelo do *big bang quente*, também estudamos a ideia de princípio cosmológico que é a base para a obtenção da métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Estudamos a lei Hubble, até hoje reconhecido como o maior astrônomo de todos os tempos e que observou a relação entre a distância e a velocidade das galáxias. Com base na descoberta de Hubble, também estudamos o desvio espectral da luz emitida por galáxias e estrelas no universo, mais conhecido como *redshift* que é baseada no efeito Doppler.

Com a utilização da equação de Einstein obtida no Capítulo 2, obtivemos a equação de Friedmann e a equação da aceleração para o universo homogêneo e isotrópico. Analisamos a dependência geométrica do Universo em relação a densidade total de energia. Discutimos os efeitos da recente descoberta de que a matéria bariônica do Universo compõe aproximadamente 5 por cento da totalidade da energia existente [5], onde 25 por cento compõe a matéria escura e 70 por cento a energia escura. Também estudamos o efeito da maior fonte de informações do universo primordial, a chamada radiação cósmica de fundo (CMB). A Radiação cósmica de fundo foi descoberta em 1965 por Penzias e Wilson. A CMB foi emitida aproximadamente 500 mil anos após o *big bang* e é a nossa maior fonte de informação universo no passado [6].

No Capítulo 4 desenvolvemos uma nova metodologia onde utilizamos um campo escalar real no modelo Friedmann e reduzimos para primeira ordem as suas equações. Esta redução possibilitou na simplificação quanto a obtenção do potencial e do fator de escala do universo.

As conclusões finais e algumas possíveis aplicações e extensões deste trabalho são discutidas no Capítulo 5.

O capítulo 6 é um apêndice que obtém explicitamente a equação de Friedmann e a equação da aceleração a partir da equação de Einstein.

Capítulo 2

Relatividade Geral

2.1 Albert Einstein e a Relatividade Geral

Desde a antiguidade, o ser humano busca respostas no sentido de entender o mundo que nos cerca. Desde a época dos gregos, o homem vem fazendo tentativas, muitas vezes com sucesso de explicar fenômenos naturais. Uma teoria para explicar a gravitação sempre fez-se necessário. Desde os tempos de Aristóteles (384-322 a.C), que considerava que os corpos caem para chegar ao seu lugar natural. Na antiguidade, consideravam-se elementos primários a terra, a água, ar e fogo. Quanto mais pesado um corpo (mais terra) mais rápido cai no chão. A água se espalha pelo chão porque seu lugar natural é a superfície da Terra. O lugar natural do ar é uma espécie de capa em torno da Terra. O fogo fica em uma esfera acima de nossas cabeças e por isso as chamas queimam para cima. Estas tentativas de explicar a gravidade passou por mãos brilhantes como a de Newton (1643-1727), porém, foi Einstein que em 1916 deu um tratamento teórico a gravitação que até hoje é considerada uma teoria irrefutável e provada em experimentos.

Dez anos depois de ter publicado seu trabalho sobre a relatividade restrita, Einstein estende a noção de tempo-espaço à força da gravidade. A Teoria Geral da Relatividade, classificada pelo próprio Einstein como ”‘bonita esteticamente’”, é também uma teoria da gravidade capaz de explicar a força de atração pela geometria tempo-espaço. Enquanto Newton descrevera a gravitação como uma queda, para Einstein é uma questão espacial. Quando um corpo está livre, isto é, sem influência de qualquer força, seus movimentos apenas exprimem a qualidade do espaço-tempo. A presença de um corpo em determinado local causa uma distorção no espaço próximo. Um raio de luz proveniente de uma estrela distante parece sofrer uma alteração de trajetória ao passar perto do Sol. Isto não é causado por qualquer força de atração. Em função da enorme massa

do Sol, o espaço a sua volta está deformado. É como se ele estivesse ”afundado” (fig. 01). O raio apenas acompanha esta curvatura, mas segue sua rota natural.

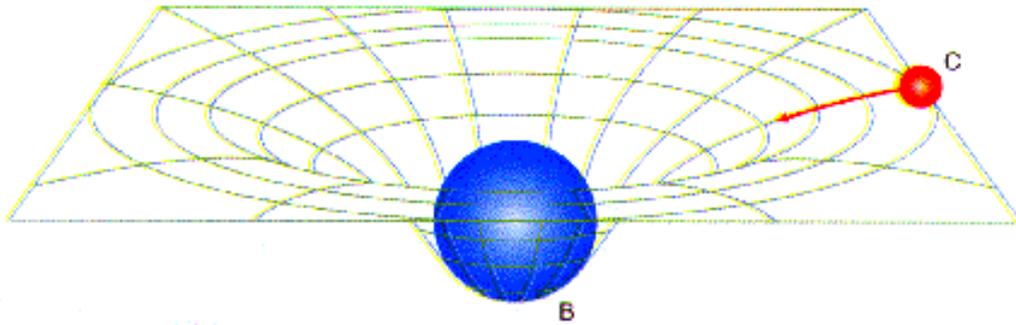


Figura 2.1: Espaço curvo devido a presença de um corpo de massa elevada

Albert Einstein, um dos mais famosos cientistas da primeira metade do século XX nasceu em Ulm, Alemanha, em 1879, numa família de origem judaica. Tornou-se o pai da teoria da relatividade. Foi criado em Munique, embora parte da adolescência fosse passada em Milão, onde adquiriu paixão pela música. Licenciou-se e doutorou-se em Física e Matemática na Universidade de Zurique. Iniciou a sua vida profissional no Ofício Federal de Patentes, em Berna, naturalizando-se suíço em 1902 [11].

Nos ”Anais da Física”, em 1905, publicou cinco artigos. O quarto, intitulado ”Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento”, revolucionou a física newtoniana. É a teoria da relatividade especial, que faz a síntese da mecânica clássica, da óptica e da teoria electromagnética de Maxwell. Demonstrou que o espaço e o tempo não são independentes entre si, mas relativos; e que a massa é uma grandeza relativa e não absoluta, variando com o movimento. O quinto artigo deu-lhe o título de ”A inércia de um corpo depende do seu conteúdo em energia?” e é o corolário do precedente. Einstein desenvolve a nova ideia de equivalência entre massa e energia; é aí que se encontra a famosa fórmula $E = mc^2$, sendo E a energia, m a massa e c a velocidade da luz.

No ano de 1915 construiu a nova teoria geral da relatividade e em 1921 foi galardoado com o Prêmio Nobel da Física. Naturalizado norte-americano em 1940, país para onde emigrou em 1933, forçado pela ascensão do nazismo e onde passou a lecionar no Institute for Advanced Study de Princeton. Einstein, que toda a vida se preocupou com os problemas sociais, sendo um pacifista ativo e um defensor do judaísmo. Morreu em Princeton no ano de 1955.

2.2 Geodésica

Com a observação de que a gravidade provocava modificações na geometria do universo produzindo uma curvatura do espaço-tempo, Einstein descobriu que as linhas do Universo dos observadores em queda livre serão as geodésicas deste espaço-tempo curvo. Geodésica é uma curva que une dois pontos tal que para pequenas variações da forma da curva o seu comprimento é estacionário [7]. Do ponto de vista prático, na maioria dos casos a geodésica é a curva de menor comprimento que une dois pontos. Em uma geometria euclidiana (variedade plana), essa curva é um segmento de reta, mas em geometrias riemanaiana (variedade curva), o segmento de menor distância entre dois pontos pode não ser uma reta e sim uma curva. Vamos então supor que temos uma curva ξ , onde o vetor tangente a esta curva num determinado ponto é dado por $\vec{\lambda} \equiv \dot{\vec{r}}(s)$, onde s é o parâmetro da curva. Sabemos que este vetor tem direção constante, logo temos que

$$\frac{d\vec{\lambda}}{ds} = 0 \quad (2.1)$$

Vamos expressar o vetor $\vec{\lambda}$ na forma $\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{e}_i$, onde $\vec{e}_i = d\vec{r}(s)/du^i$. Então, usando (2.1) temos que

$$\frac{d\lambda^i \vec{e}_i}{ds} = \frac{d\lambda^i}{ds} \vec{e}_i + \frac{d\vec{e}_i}{ds} \lambda^i = 0, \quad (2.2)$$

mas $d\vec{e}_i/du^i = (\partial_j \vec{e}_i) du^j/ds$. Fazendo $\partial_j \vec{e}_i = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k$ e substituindo em (2.2), nós encontramos

$$\left(\frac{d\lambda^k}{ds} + \lambda^i \Gamma_{ij}^k \frac{du^j}{ds} \right) \vec{e}_k = 0. \quad (2.3)$$

Como $\vec{e}_k \neq 0$, logo

$$\frac{d\lambda^k}{ds} + \lambda^i \Gamma_{ij}^k \frac{du^j}{ds} = 0, \quad (2.4)$$

que é a equação de uma geodésica. Agora precisamos descobrir quem é Γ_{ij}^k . Sabemos que $\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial u^i$, assim,

$$\partial_j \vec{e}_i = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \partial_i \vec{e}_j; \quad (2.5)$$

logo, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. O tensor métrico é encontrado através do produto $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, fazendo $\partial_k g_{ij} = (\partial_k \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j + (\partial_k \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i$, usando o fato de que $\partial_k \vec{e}_i = \Gamma_{ik}^j \vec{e}_j$, nós encontramos que

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^m \vec{e}_m \cdot \vec{e}_j + \Gamma_{jk}^m \vec{e}_m \cdot \vec{e}_i. \quad (2.6)$$

Usando o resultado anterior, podemos escrever as expressões

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{im}, \quad (2.7a)$$

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ji}^m g_{mk} + \Gamma_{ki}^m g_{jm}, \quad (2.7b)$$

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma_{kj}^m g_{mi} + \Gamma_{ij}^m g_{km}. \quad (2.7c)$$

Somando os dois primeiros e subtraindo do terceiro, nós encontramos $2\Gamma_{ki}^m g_{mj} = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}$, multiplicando por $\frac{1}{2}g^{lj}$, teremos

$$\Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2}g^{lj}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}), \quad (2.8)$$

que é a conexão, ou mais conhecido como símbolos de Christoffel.

As equações de Einstein são representadas pelos símbolos de Christoffel e a partir do cálculo das conexões, encontramos as soluções das equações de Einstein.

2.3 Equações de Einstein

Vamos considerar um campo vetorial λ_a , de forma que possa ser definida uma derivada covariante na forma $\lambda_{a;b} \equiv \partial_b \lambda_a - \Gamma_{ab}^d \lambda_d$. Derivando a segunda vez o campo vetorial, nós encontramos que $\lambda_{a;bc} = \partial_c(\lambda_{a;b}) - \Gamma_{ac}^e \lambda_{e;b} - \Gamma_{bc}^e \lambda_{a;e}$. Abrindo esta expressão, nós encontramos que

$$\lambda_{a;bc} = \partial_c \partial_b \lambda_a - (\partial_c \Gamma_{ab}^d) \lambda_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c \lambda_d - \Gamma_{ac}^e (\partial_b \lambda_e - \Gamma_{eb}^d \lambda_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e \lambda_a - \Gamma_{ae}^d \lambda_d) \quad (2.9a)$$

$$\lambda_{a;cb} = \partial_b \partial_c \lambda_a - (\partial_b \Gamma_{ac}^d) \lambda_d - \Gamma_{ac}^d \partial_b \lambda_d - \Gamma_{ab}^d (\partial_c \lambda_d - \Gamma_{cd}^e \lambda_e) - \Gamma_{cb}^d (\partial_d \lambda_a - \Gamma_{da}^e \lambda_e) \quad (2.9b)$$

Fazendo $\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = R_{abc}^d \lambda_d$, teremos que

$$R_{abc}^d \equiv \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d. \quad (2.10)$$

Este tensor é conhecido como tensor Riemann-Christoffel, tensor de curvatura ou apenas tensor de Riemann [7, 8, 9]. De forma análoga ao que já foi feito antes, podemos escrever este tensor como

$$R_{abc}^d = \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d, \quad (2.11a)$$

$$R_{bca}^d = \Gamma_{ba,c}^d - \Gamma_{bc,a}^d + \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ea}^d - \Gamma_{ba}^e \Gamma_{ec}^d, \quad (2.11b)$$

$$R_{cab}^d = \Gamma_{cb,a}^d - \Gamma_{ca,b}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{cb}^e \Gamma_{ea}^d. \quad (2.11c)$$

Que assim encontramos a propriedade cíclica do tensor de Riemann como sendo $R_{abc}^d + R_{bca}^d + R_{cab}^d = 0$. Como o tensor de Riemann é escrito em função dos símbolos de Christoffel, e os símbolos de Christoffel são escritos como uma soma de derivadas do tensor métrico (2.8), encontramos uma outra identidade muito importante na relatividade geral conhecida como identidade de Bianchi que tem a forma

$$R_{bcd;e}^a + R_{bde;c}^a + R_{bec;d}^a = 0. \quad (2.12)$$

É fácil de ver que esta identidade é válida pois a derivada covariante do tensor métrico é nulo.

Outro tensor muito utilizado, e talvez o mais importante na relatividade é o tensor de Ricci. Este, que é obtido a partir da contração de dois índices do tensor de Riemann é o tensor que aparece na equação de Einstein junto com o escalar de curvatura. O tensor de Ricci tem a forma $R_{bad}^a = R_{bd}$ e o escalar de curvatura é obtido multiplicando o tensor métrico ao tensor de Ricci e assim obtendo o seu traço $g^{bd} R_{bd} = R_b^b = R$.

Vamos agora voltar a identidade de Bianchi (2.12), fazendo $a = c$, nós obtemos que

$$R_{bd;e} + R_{bde;a}^a + R_{bea;d}^a = 0. \quad (2.13)$$

Usando o fato de que $R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a$ na equação acima, nós encontramos

$$R_{bd;e} + R_{bde;a}^a - R_{be;d} = 0; \quad (2.14)$$

multiplicando por g^{be} teremos que $R_c^e; e - R; c + R_c^a; a = 0$, que pode ser escrito como sendo

$$(R_c^a - \frac{1}{2}R\delta_c^a);a = 0. \quad (2.15)$$

Esta equação mostra que esta quantidade é conservada, por uma derivação covariante, como o tensor energia momento também é uma quantidade conservada, logo a equação de Einstein é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde $\kappa = -8\pi G/c^4$. Este valor pode ser obtido através de uma teoria de perturbação, onde considera-se o campo gravitacional muito fraco.

A equação da relatividade geral pode ser encontrada através do princípio da mínima ação de Hamilton $\delta \int s = 0$, onde a ação varia minimamente em relação a métrica $g_{\mu\nu}$.

As equações acima indicam a grande importância do conhecimento geométrico do sistema. Em cosmologia, a métrica mais utilizada é a de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) que é encontrada a partir da hipótese de que o universo é homogêneo e isotrópico, o chamado princípio cosmológico. Esta questão será melhor tratada nas seções posteriores.

Capítulo 3

Cosmologia

3.1 Uma Breve História Sobre a Cosmologia

As origens históricas da cosmologia estão diretamente ligadas a mitos que povoaram as religiões dos povos antigos. Como o universo era desconhecido, cada civilização adequava sua percepção cosmológica ao que percebia: o sol, a lua, alguns planetas e algumas estrelas. Essa associação tinha raízes no desejo de organizar o cosmos e, de alguma forma, explicar a origem do lugar onde o Homem vivia. A cosmologia antiga pode ser bem representada pela astronomia egípcia, mesopotâmica e grega (2000 a.C.) [12].

Outras civilizações como a árabe deram continuidade à busca do conhecimento científico e à evolução cultural proporcionados pelos antigos gregos. Os árabes nomearam um grande número de estrelas e constelações conhecidas.

O modelo de Ptolomeu (200 anos DC) em que o universo seria geocêntrico transformou-se em dogma adotado pela religião cristã e, em consequência, pela civilização cristã provocando uma estagnação no estudo da astronomia.

O início da revolução astronômica veio com a introdução do sistema heliocêntrico para o universo, por Copérnico (1473-1543), pela utilização do telescópio construído por Galileu (1564-1642) e pela descoberta das Leis de Kepler (1571-1630). A partir desses três marcos e das descobertas científicas de Newton, a astronomia começou a evoluir de forma quantitativa, separando-se cada vez mais da astrologia e caracterizando-se como ciência. Finalmente, a noção real de que o universo se estendia para além do nosso sistema solar apareceu no século XIX. Apesar disso, a cosmologia somente passou a ser considerada como ciência no século XX. Nas últimas décadas do Séc. XX houve um rápido aumento do conhecimento humano sobre o universo, de modo que somos a

primeira geração de seres humanos capaz de perceber os detalhes da história cósmica.

A cosmologia é a ciência que estuda a origem, estrutura e evolução do universo e tem um caráter multidisciplinar. Seu objetivo é entender como o universo se formou, por que ele tem a forma que hoje percebemos e qual será o seu destino. Ela é também a mais exigente em termos de extrapolação de resultados e conceitos, já que as escalas de tempo e distância envolvidas nos problemas cosmológicos são da mesma ordem de grandeza da idade e tamanho do universo que queremos observar. Além disso, ao contrário de um experimento em laboratório, não podemos criar vários universos para que possamos fazer uma análise estatística completa de suas propriedades.

As principais ferramentas utilizadas pela cosmologia vêm da física, da matemática e da astronomia. Da física, vêm as leis que descrevem fenômenos físicos nos laboratórios da terra e, ao verificarmos que elas descrevem fenômenos semelhantes em lugares distantes do universo, podemos reafirmar seu caráter universal. A matemática fornece a linguagem utilizada para registrar os processos observados, permitindo a descrição precisa dos fenômenos astronômicos. Da astronomia, vêm as técnicas de observação do céu, de medição do tempo e de determinação das escalas de distância envolvidas. Podemos ainda incluir a química e a filosofia. A primeira é importante no estudo da matéria que compõe o universo e a segunda fornece o arcabouço que insere a cosmologia na hierarquia do pensamento humano.

O homem teve que aos poucos abandonar a noção de que tinha qualquer posição central no universo, e no começo deste século reconheceu que vivemos num planeta nada excepcional, em torno de uma estrela nada excepcional, o sol, localizada quase na extremidade de uma galáxia normal, a via láctea. Esta galáxia faz parte de um grupo de galáxias, o grupo local, localizado na periferia de um grande cúmulo de galáxias. Mesmo este cúmulo, o cúmulo de virgem, é pequeno em relação aos grandes cúmulos de galáxias que podemos observar em outras partes do universo. Nossa localização no universo é portanto insignificante.

A revolução cosmológica aconteceu um pouco antes da descoberta feita por Einstein da Relatividade Geral. [13, 15] Em 1912 Vesto M. Slipher descobriu que as linhas espectrais das estrelas na galáxia de Andrômeda (M31) mostravam um enorme deslocamento para o azul, indicando que esta galáxia está se aproximando do sol, a uma velocidade de 300 km/s. Slipher iniciou então um trabalho sistemático que levou duas décadas, demonstrando que das 41 galáxias que ele estudou, a maioria apresentava deslocamento espectral para o vermelho, indicando que as galáxias estavam se afastando de nós. Slipher descobriu que quanto maior as distâncias das galáxias, maior era

o deslocamento para o vermelho de seu espectro (redshift).

Outro cientista que prestou grande contribuição a cosmologia foi Hubble. Em 1923, usando um telescópio de 2,5 m de diâmetro do Monte Wilson, na Califórnia, conseguiu identificar as estrelas individuais na galáxia de Andrômeda e, medindo sua distância, demonstrou conclusivamente que nossa galáxia não é a única no universo. Em 1929, observando o deslocamento para o vermelho nas linhas espectrais das galáxias e medindo suas distâncias, descobriu que as galáxias estavam se afastando com velocidades proporcionais à sua distância, isto é, quanto mais distante a galáxia, maior sua velocidade de afastamento.

Dentre as contribuições para a cosmologia, temos que destacar a teoria da relatividade geral. Trata-se na verdade da teoria da gravidade, descrevendo a gravitação como a ação das massas nas propriedades do espaço e do tempo, que afetam o movimento dos corpos e outras propriedades físicas. Na relatividade geral o espaço-tempo é distorcido pela presença da matéria que ele contém. Um ano depois de propor a relatividade geral, em 1917, Einstein publicou seu artigo histórico sobre cosmologia chamado de *Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade*, construindo um modelo esférico do Universo. Como as equações da Relatividade Geral não levavam diretamente a um universo estático de raio finito, Einstein modificou suas equações, introduzindo a famosa constante cosmológica, para obter um Universo estático, já que ele não tinha nenhuma razão para supor que o Universo estivesse se expandindo ou contraindo. A constante cosmológica age como uma força repulsiva que previne o colapso do universo pela atração gravitacional. O holandês Willem de Sitter demonstrou em 1917 que a constante cosmológica permite um Universo em expansão mesmo se ele não contivesse qualquer matéria. Depois disto, Einstein reconheceu o erro e chamou a constante cosmológica de maior asneira dita por ele.

A maior fonte de dados que temos até o momento para estudar a evolução cosmológica foi descoberta em 1964 [14, 17]. A descoberta acidental da radiação de microondas do fundo do universo, uma radiação que vinha de todas as direções, pelos astrônomos Penzias e Woodrow, dos Bell Laboratories, com sua antena corneta de Holmdel, que transmitiria mensagens entre a terra e satélites de comunicação, reforçou a teoria do Big Bang, ou a Grande Explosão. Penzias e Wilson receberam o prêmio Nobel em 1978. Dicke, Peebles, Roll, e Wilkinson, que estavam construindo uma antena para procurar por esta emissão, interpretaram este excesso como a detecção da radiação remanescente do Big Bang. A radiação do fundo do universo é o sinal eletromagnético proveniente das regiões mais distantes do Universo (a 13,7 bilhões de anos-luz). A teo-

ria do Big Bang leva em conta que se as galáxias estão se afastando umas das outras, como observado por Hubble em 1929, então no passado elas deveriam estar cada vez mais próximas, e num passado remoto, cerca de 13,7 bilhões de anos atrás, deveriam estar todas num mesmo ponto, muito quente, uma singularidade espaço-tempo, que se expandiu no Big Bang. O Big Bang, ou Grande Explosão, criou não somente a matéria e a radiação, mas também o próprio espaço e o tempo. Este é o início do universo que podemos conhecer. O padre e cosmólogo belga Georges-Henri Édouard Lemaître foi provavelmente o primeiro a propor um modelo específico para o Big Bang, em 1927. Ele imaginou que toda a matéria estivesse concentrada no que ele chamou de átomo primordial e que este átomo se partiu em incontáveis pedaços, cada um se fragmentando cada vez mais, até formar os átomos presentes no universo, numa enorme fissão nuclear. Sabemos que este modelo não pode ser correto, pois não obedece às leis da relatividade e estrutura da matéria, mas ele inspirou os modelos modernos.

Independentemente de Lemaître, o matemático e meteorologista russo Alexander Friedmann descobriu toda uma família de soluções das equações da teoria da relatividade geral. A família de soluções para a teoria de relatividade geral encontrada por Friedmann e Lemaître descreve um universo em expansão, e eles são chamados os pais da cosmologia. As soluções possíveis das equações da relatividade geral incluem expansão eterna ou re colapso. Se a constante cosmológica é nula, os modelos se dividem em três classes. Se a densidade de matéria for alta suficiente para reverter a expansão, o Universo é fechado, como a superfície de uma esfera mas em três dimensões, de modo que se uma nave viajasse por um tempo extremamente longo em linha reta, voltaria ao mesmo ponto.

Outro item importante na cosmologia é a chamada matéria escura, postulada pela primeira vez por Fritz em 1937. Esta é a matéria extra necessária para explicar as curvas de rotação das galáxias e as velocidades observadas das galáxias em aglomerados, maiores que as explicáveis através da matéria observada, chamada matéria luminosa. Zwicky, um astrônomo suíço trabalhando com o recém instalado telescópio Schmidt de 46 cm do Monte Palomar, nos Estados Unidos, observando que as velocidades das galáxias em aglomerados eram muito maiores do que deveriam ser, calculou que a massa do aglomerado deveria ser pelo menos dez vezes maior do que a massa da matéria visível no aglomerado, isto é, da massa em estrelas e gás pertencentes às galáxias. Esta hipótese, talvez seja o maior desafio a ser desvendado pela cosmologia moderna.

Além destas, existem muitas outras contribuições para o desenvolvimento da cosmologia e que não foram citados, porém, não podem ser esquecidos.

Com a formulação da teoria da Relatividade Geral, a cosmologia ganhou uma ferramenta importantíssima para o seu desenvolvimento, e foi exatamente após a utilização da Relatividade Geral que a cosmologia se tornou uma das mais promissoras e intrigantes áreas da ciência.

3.2 Modelo Cosmológico Padrão e o Princípio Cosmológico

O modelo padrão da cosmologia é o chamado modelo do Big Bang quente [18]. Começou a ser desenvolvido em 1927, e tornou-se quase universalmente aceite a partir de 1965. Fornece uma descrição observacionalmente testada da evolução do universo desde o seu primeiro centésimo de segundo até o presente momento. No entanto, deixa ainda questões em aberto. Por exemplo, nada nos diz sobre as condições iniciais, e em particular sobre a origem das estruturas que nele existem.

O modelo assenta basicamente sobre três pilares. O primeiro é o chamado "Princípio Cosmológico", que sustenta que em escalas suficientemente grandes, o Universo é homogêneo (ou seja, não há qualquer ponto privilegiado) e isotrópico (ou seja, não há qualquer direção privilegiada). O segundo é a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, que descreve a dinâmica do Universo. O terceiro é a hipótese de que o conteúdo do universo pode ser descrito como um gás perfeito clássico, isto corresponde essencialmente a suposição de que a pressão exercida pelo gás é diretamente proporcional à sua densidade.

Quais são então as consequências do modelo? A primeira a ser comprovada observacionalmente é que o Universo está em expansão, um resultado obtido por Hubble. De fato, as galáxias afastam-se umas das outras com uma velocidade que é proporcional à distância entre elas. Note-se que isto não significa que a nossa galáxia seja o centro do universo. De fato, uma vez que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, não pode existir qualquer centro.

Convém ainda salientar que a expansão do universo é uma expansão do próprio espaço, e não uma expansão das galáxias num espaço que já existe. De fato, o espaço é "criado" à medida que o universo se expande com o fator de escala $a = a(t)$. Além disso, também não é correto imaginar o começo do universo como uma explosão em algum ponto do espaço, primeiro porque não existe qualquer ponto privilegiado (o Universo é homogêneo) e segundo porque o conceito de explosão está associado a um gradiente de pressão (e o Universo é isotrópico). Em particular, o Universo pode expandir-se tão depressa quanto quiser. A velocidade de expansão não está limitada pela velocidade da luz, porque não existe qualquer transporte de energia nessa expansão.

Com estas hipóteses, há apenas três possibilidades para a geometria local do Uni-

verso: pode ser esférico, plano ou hiperbólico . Note-se que no primeiro caso o Universo é espacialmente limitado, enquanto nos restantes é ilimitado, isto é, continuará a expandir-se indefinidamente. A geometria depende essencialmente da quantidade total de matéria e energia que contém o Universo. Isto é uma quantidade difícil de obter observacionalmente, pelo que não há ainda dados absolutamente conclusivos. No entanto, o universo hiperbólico parece fortemente desfavorecido.

Se o Universo está se expandindo, foi outrora menor e mais denso. Vale a pena lembrar alguns momentos cruciais da história do Universo. Presentemente, a idade do universo é de cerca de 13,7 mil milhões de anos, e a sua densidade média é de apenas 3 átomos por metro cúbico. Quando o Universo tinha cerca de 380 000 anos, os elétrons combinaram-se com os núcleos, e o universo tornou-se eletricamente neutro. A esmagadora maioria destes núcleos formaram-se quando o universo tinha apenas 3 minutos. Assim, o universo é composto por cerca de 75 por cento de hidrogênio, 24 por cento de hélio e 1 por cento do restante dos elementos, que em Cosmologia se chama simplesmente "elementos pesados"; destes, apenas o deutério ,um átomo por cada dez mil de hidrogênio, e o lítio, um por cada dez mil milhões, foram sintetizados nesta altura. O restante, a partir do carbono, foram sintetizados muito mais tarde, nos núcleos das estrelas e em explosões de supernovas. Finalmente, no limite de aplicabilidade do modelo do Big Bang, quando o universo tinha apenas um centésimo de segundo, era composto por um gás extremamente quente e denso com cerca de mil toneladas por metro cúbico e contendo um número aproximadamente igual de fótons, elétrons, neutrinos e as anti-partículas destes, além de um pequeno número de prótons e nêutrons que era apenas um por cada mil milhões de fótons.

Note-se que estes fótons estão presentes ainda hoje. A radiação produzida no início do universo tem obviamente que estar em algum lugar, simplesmente porque não existe "lado de fora" do Universo. E está, de fato, em todo o lugar, formando um mar de fótons com uma densidade de cerca de 413 milhões por metro cúbico. À medida que o Universo se expande, a temperatura característica desses fótons vão diminuindo. A sua temperatura característica atual é de 2,726 K, isto é, 2,726 graus acima do zero absoluto, ou cerca de 270 graus centígrados negativos, e foi prevista teoricamente com base no modelo do Big Bang cerca de 20 anos antes de ser observada; a sua detecção em 1965 constituiu num decisivo passo para a consolidação do modelo do Big Bang.

Apesar deste e muitos outros sucessos, o modelo tem também algumas deficiências. Estas não devem ser vistas como falhas do modelo, mas mais como questões pertinentes às quais o modelo não consegue dar resposta, em parte por não ter sido construído para

esse fim. Todas estas deficiências estão de alguma forma ligadas às condições iniciais do Universo. A primeira está precisamente relacionada com a radiação cósmica de fundo. Há cerca de 380 000 anos, quando se formaram os átomos, esse mar de fótons deixou praticamente de interagir com o restante da matéria do universo, e tem-se mantido quase inalterado desde então. Por incrível que pareça, isto permite-nos reconstruir uma imagem do universo nessa altura, ou seja, quando tinha apenas 380 000 anos, o que foi feito pela primeira vez em 1992, a partir de observações por satélites, e sucessivamente melhorado desde então. O que se observa são pequenos desvios à homogeneidade de cerca de uma parte em cem mil, que se traduzem em pequeníssimas flutuações de temperatura. Estas flutuações de temperatura correspondem a flutuações de densidade, e são de fato impressões digitais das tais flutuações primordiais que desencadearam a formação das galáxias.

Estas flutuações de densidade foram posteriormente amplificadas pela força gravitacional, até originarem as estruturas que hoje podemos ver. A questão é então, o que deu origem a estas flutuações? Há atualmente dois paradigmas, cada um dos quais contém uma série de modelos particulares que podem eventualmente explicar este processo. Quer a inflação, quer os defeitos topológicos têm as suas próprias qualidades e defeitos, e a situação atual não é totalmente clara. Por um lado, as previsões de muitos modelos inflacionários parecem estar de acordo com os dados observacionais, mas nem um único destes modelos está bem motivado sob o ponto de vista da física de partículas. Por outro lado, os modelos com defeitos topológicos surgem naturalmente em modelos da física de partículas, mas as suas previsões são mais difíceis de reconciliar com os dados observacionais. Importa ainda dizer que há varias situações em que os dois tipos de modelos co-existem e contribuem para a criação das flutuações primordiais.

Outra questão importante a que o modelo do Big Bang não responde é, surpreendentemente, ao conteúdo do universo. Obviamente só podemos ver diretamente matéria que emita luz, mas sucede que a maior parte da matéria do universo não o faz. Por exemplo, pensa-se que a parte visível das galáxias está rodeada por halos de matéria escura, com um tamanho que pode ser até 30 vezes maior do que o da parte visível.

Assim sendo, há apenas evidência observacional indireta para a existência de matéria escura, mas apesar disso há uma ideia razoável das suas propriedades. Cerca de 5 por cento da matéria do Universo é visível. Outros 5 por cento são matéria escura normal [5], ou seja essencialmente bárions (prótons e nêutrons). Cerca de 25 por cento da matéria do Universo é matéria escura fria, ou seja partículas exóticas pesadas e não-relativistas.

Finalmente, cerca de 70 por cento da densidade de energia do Universo está sob a forma de uma constante cosmológica, ou seja, energia do vácuo ou de algo cujo efeito gravitacional lhe é muito semelhante. Ao contrário da matéria escura fria, esta componente nunca se agrega. Pelo contrário, forma uma distribuição homogênea e tende a acelerar a expansão do universo. De fato há alguma evidência observacional para uma fase de expansão acelerada do universo, que começou muito recentemente. É interessante notar que um período de expansão acelerada no futuro, apesar de não pôr quaisquer problemas do ponto de vista cosmológico, é problemático para a teoria de supercordas.

Estes ingredientes são necessários para construir modelos cosmológicos. Começando com um paradigma teórico, adiciona-se um determinado conjunto de parâmetros cosmológicos (idade, conteúdo, etc) e determinam-se as consequências observacionais relevantes. A comparação com os dados observacionais ditará o futuro de cada modelo. Hoje, o modelo padrão da cosmologia continua sendo o do Big Bang, mas até quando será ninguém sabe.

3.3 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Com a observação de que o universo é homogêneo em escalas de 10 a 100 milhões de anos luz ou mais [13]. A hipótese de que o Universo é homogêneo e isotrópico é chamada de Princípio Cosmológico. Para escalas menores, podemos ver estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, mas em larga escala os elementos de volume são homogêneos.

Tendo estabelecido a ideia de princípio cosmológico, nós temos agora que construir um modelo de universo baseado neste princípio. Como a Relatividade Geral é uma teoria geométrica, nós podemos começar investigando as propriedades geométricas do espaço homogêneo e isotrópico. Vamos supor o universo se comportando como fluido contínuo em três coordenadas espaciais x^α , onde ($\alpha = 1, 2, 3$). Qualquer ponto neste fluido pode ser localizado pelas coordenadas x^α e o tempo próprio τ medido por um relógio movendo-se com o elemento de fluido. As propriedades geométricas do espaço-tempo são descritas por uma métrica. [19, 20] A métrica utilizada em cosmologia, levando em conta o princípio cosmológico é conhecida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker e é dada por

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) \right\}, \quad (3.1)$$

onde r , θ e φ (fig. 02) são coordenadas esféricas, $a(t)$ é o fator de escala do universo ou fator de expansão e τ o tempo próprio. O termo k acima é um parâmetro de curvatura que pode assumir três valores: (1) para o universo aberto, (0) para o universo plano e (-1) para o universo fechado. A Eq. (3.1) pode ser escrita na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico que determina todas as propriedades geométricas do espaço-tempo descrito pelo sistema de coordenadas x^α . Se $ds > 0$, então o intervalo é tipo tempo e $\frac{ds}{c}$ seria o intervalo de tempo medido por um relógio que se move entre x^α e $x^\alpha + dx^\alpha$. Se $ds < 0$, então o intervalo é tipo espaço e $|ds^2|^{1/2}$ representa o segmento de reta com fim em $x^\alpha + dx^\alpha$, medido por um observador em repouso com respeito a este segmento. Se $ds = 0$, então o intervalo é tipo luz; este tipo de intervalo é importante pois dois pontos $x^\alpha + dx^\alpha$ pode ser conectado por um raio de luz. Se a distribuição da matéria for uniforme então o espaço é uniforme e isotrópico [19, 20]. Este meio pode definir um tempo universal tal que em qualquer instante a métrica

espacial tridimensional seja

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

onde o intervalo é apenas a distância espacial, e é idêntica em todas as direções. Assim, a métrica do espaço-tempo será da forma

$$ds^2 = (cdt)^2 - dl^2 = (cdt)^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.4)$$

Para encontrar o tensor métrico $\gamma_{\alpha\beta}$ vamos considerar primeiro o simples caso de um isotrópico e homogêneo espaço com apenas duas dimensões. Neste caso, o espaço pode ser de três formas: (i) Coordenadas euclidianas com espaço plano e raio de curvatura infinito. (ii) Uma superfície esférica de raio R e com posição de curvatura gaussiana $\frac{1}{R^2}$. (iii) O espaço como uma hiperboloide com curvatura gaussiana negativa.

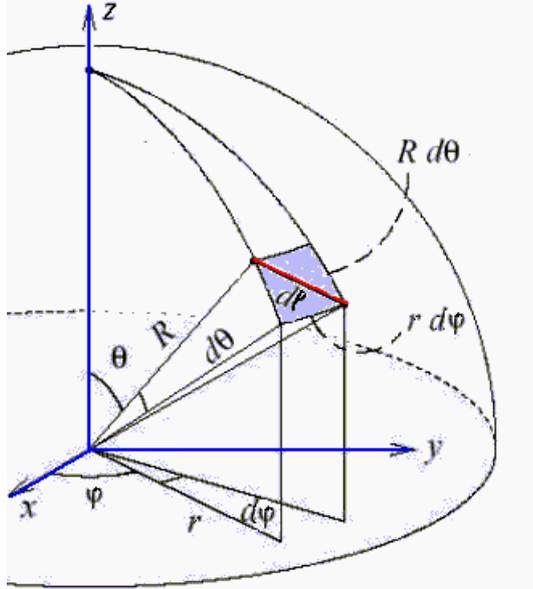


Figura 3.1: Sistema de Coordenadas da métrica de FRW

No primeiro caso em coordenadas polares, temos que ρ ($0 \leq \rho < \infty$) e φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), de forma que

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad (3.5)$$

onde $r = \frac{\rho}{a}$ com ($0 \leq r < \infty$) é uma variável adimensional.

No caso da superfície esférica de raio R, a métrica nas coordenadas θ com ($0 \leq \theta < \pi$) e φ com ($0 \leq \varphi < 2\pi$) é dado por

$$dl^2 = a^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2 \right), \quad (3.6)$$

onde $r = \sin\theta$ com ($0 \leq r \leq 1$). Como no caso anterior, r também é uma variável adimensional e $a=R$. No caso hiperboloidal a métrica é

$$dl^2 = a^2(\sinh^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2 \right), \quad (3.7)$$

onde $r = \sinh\theta$ com ($0 \leq r \leq \infty$) e também é uma variável adimensional.

A métrica de FRW é obtida da Eq. (3.4), onde a parte espacial é simplesmente a generalização tridimensional das equações para o espaço plano, esférico e hiperbólico respectivamente mostradas nas equações

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (3.8a)$$

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2) = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) e \quad (3.8b)$$

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2) = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right); \quad (3.8c)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ e χ varia entre ($0 \leq \chi \leq \pi$) para a Eq (3.8b) e entre ($0 \leq \chi < \infty$) para a Eq (3.8c). Os valores de $k = 1, 0, -1$ correspondem respectivamente ao hiperespaço, o espaço euclidiano de curvatura zero e o com curvatura negativa. Na tabela abaixo tem a descrição da estrutura do universo em relação ao valor de k .

| Tabela da Estrutura do Universo | | | | |
|--|-------------|---------------|----------------|-----------------|
| Curvatura | Geometria | Triângulo | Circunferência | Universo |
| $k>0$ | Esférica | $> 180^\circ$ | $c < 2\pi r$ | Fechado(closed) |
| $k=0$ | Flat | $= 180^\circ$ | $c = 2\pi r$ | Plano(flat) |
| $k<0$ | Hiperbólica | $< 180^\circ$ | $c > 2\pi r$ | Aberto(open) |

Fazendo uma mudança de variável para o tempo, de forma que $\tau = \int \frac{dt}{a(t)}$, onde τ é o tempo conforme. A métrica se modifica para

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[(cd\tau)^2 - \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \right], \quad (3.9)$$

que é uma forma alternativa para a métrica de FRW.

A métrica de FRW será usada na secção 3.6 na obtenção da equação de Friedmann e da equação da aceleração.

3.4 Lei de Hubble

A distância própria d_{pr} , de um ponto P para outro ponto P_0 , que nós definimos como a origem de um sistema de coordenadas polares r, θ, φ , é a distância medida por um observador que conecta P e P_0 no tempo t [19, 20, 18]. Da métrica de Friedmann-Robertson-Walker Eq. (3.1) com $dt = 0$ nós veremos que

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{adr'}{(1 - kr'^2)^{1/2}} = af(r) \quad (3.10)$$

onde a função $f(r)$ assume os seguintes valores: $f(r) = \sin^{-1}r$ para ($k=1$) $f(r) = r$ para ($k=0$) $f(r) = \sinh^{-1}r$ para ($k=-1$).

É claro que a distância própria é de pequena significância observacional porque nem sempre podemos medir simultaneamente todos os elementos de distância que separam P de P_0 [19, 20, 18]. A distância própria no tempo t é encontrada através de uma relação com o tempo em t_0 de forma que

$$d_{pr}(t_0) = \frac{a_0}{a} d_{pr}(t) \quad (3.11)$$

onde a_0 é o valor de a em t_0 . Podemos definir uma distância a partir da coordenada radial na forma

$$d_c = a_0 f(r) \quad (3.12)$$

A relação entre distância comoving e distância própria é

$$d_c = \frac{a_0}{a} d_{pr} \quad (3.13)$$

A distância própria d_{pr} muda com o tempo pois o fator de escala $a = a(t)$ é uma função do tempo. Assim, a velocidade radial entre o ponto P e P_0 é

$$v_r = \dot{a} f(r) = \frac{\dot{a}}{a} d_{pr}. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é chamada de lei de Hubble, onde $H(t) = \dot{a}/a$ é conhecido como o parâmetro de Hubble.

Edwin Hubble até hoje é considerado o maior astrônomo da história. Ganador de vários prêmios, sendo a maior deles a medalha Barnard, patrocinada pela Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos, e concedida a ele, em junho de 1935, na Universidade de Colúmbia. Esta medalha foi instituída em 1895, e desde então concedida a cada cinco anos. Todos os predecessores de Hubble foram também recebedores

do prêmio Nobel, entre eles Roentgen, Rutherford, Einstein, Bohr e Heisenberg. Neste caso, Hubble distinguiu-se tanto por ser o primeiro americano quanto por ser o primeiro astrônomo a ganhar a medalha. Uma grande injusta foi o fato de Hubble não ter ganhado o prêmio Nobel por ser astrônomo.

3.5 O Redshift

O redshift é uma técnica de observação do universo baseada no efeito Doppler. O efeito Doppler é a alteração da frequência notada pelo observador em virtude do movimento relativo de aproximação ou afastamento entre uma fonte de ondas e o observador [11]. Embora se trate de um fenômeno característico de qualquer propagação ondulatória, o efeito Doppler sonoro é mais comum em nosso cotidiano. Quando um automóvel aproxima-se de nós buzinando, percebemos o som da buzina mais agudo (maior frequência) do que perceberíamos se o veículo estivesse em repouso. Por outro lado, quando o automóvel afasta-se buzinando, percebemos um som mais grave (menor frequência) do que perceberíamos se o veículo estivesse em repouso. O redshift é o mesmo efeito para ondas luminosas. Quando um determinado objeto luminoso está se afastando de um determinado referencial em repouso, o espectro de luz vai para o vermelho, da mesma forma, quando está se aproximando, o espectro de luz vai para o azul. Nós definimos o redshift de uma fonte luminosa pela equação

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}; \quad (3.15)$$

onde λ_0 é comprimento de onda da radiação observada na origem do nosso sistema de coordenadas e λ_e é o comprimento de onda da fonte em movimento. A radiação viaja ao longo de um raio de luz de uma fonte para um observador tal que $ds^2 = 0$, então

$$c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (3.16)$$

onde vemos facilmente que

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = f(r). \quad (3.17)$$

A função $f(r)$ está definida na seção anterior e depende do valor de K . Como r é uma distância comoving, e conseqüente o valor de $f(r)$ não muda, então teremos

$$\int_{t'_e}^{t'_0} \frac{cdt}{a} = f(r). \quad (3.18)$$

Se δt_e e δt_0 são pequenos, então, de (3.17) e (3.18) vemos que

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a} \quad (3.19)$$

Se, em particular, $\delta t = \frac{1}{\nu_e}$ e $\delta t_0 = \frac{1}{\nu_0}$, então, comparando com (3.19) teremos

$$\frac{a}{\lambda_e} =, \frac{a_0}{\lambda_0}, \text{ ou } 1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (3.20)$$

onde z é o redshift.

Analisando a Eq (3.20), podemos notar que uma maneira de calcular o fator de escala do universo é através do redshift [19, 20, 18]. Sendo a conhecido e o valor de z encontrado através de observações, podemos encontrar o valor de a_0 que é o fator de escala do universo .

A grande dificuldade em inferir as distâncias astronômicas se deve à impossibilidade óbvia de aplicar um mesmo método, igualmente preciso, a todos os objetos. Dentro do sistema solar, as estimativas diretas baseadas em telemetria laser resultam em determinações de invejável precisão. Fora do sistema solar, mesmo para as estrelas mais próximas, é necessário confiar em métodos indiretos, e conseqüentemente muito menos precisos, requerendo a calibração de um método contra o outro e que além disto pioram gradualmente seu desempenho com o aumento da distância. Além do redshift, temos também a paralaxe trigonométrica. Quando uma estrela próxima é observada, podemos verificar, devido ao nosso movimento anual em torno do sol, que ela se movimenta em relação ao fundo das estrelas distantes, que se mantém praticamente imutáveis. Pela medida do ângulo paralático, nós podemos estimar qual a distância desta estrela em relação a nós.

Muitas outras técnicas de medida são adotadas na astronomia mundial, o redshift é muitos utilizado pelos cosmólogos pois nos permite estudar objetos que se encontram a grandes distâncias do nosso planeta. Por isto, esta secção deu mais enfase ao redshift.

3.6 As Equações de Friedmann

A métrica de FRW é uma consequência cinemática da homogeneidade e isotropia da nossa secção espacial. Para construirmos a dinâmica de um modelo cosmológico governado pela métrica de FRW, nós devemos aplicar a equação de Einstein da relatividade geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.21)$$

na a métrica de FRW [19, 20, 8].

Olhando para (3.1), podemos identificar os termos da métrica de FRW como sendo

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

Usando o fato de que $g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$, podemos encontrar as componentes contravariantes da métrica que são da forma

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(a^2r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(a^2r^2 \sin^2(\theta)) \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

Para resolver a equação de Einstein, faz-se necessário encontrar os termos R_{ii} e R . R_{ii} é encontrado a partir da soma

$$R_{ii} = R_{i0i}^0 + R_{i1i}^1 + R_{i2i}^2 + R_{i3i}^3. \quad (3.24)$$

O escalar de Ricci é encontrado através da soma $R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$.

Usando a Eq (3.24), podemos então encontrar todas as componentes da equação de Einstein. Primeiro, vamos encontrar R_{00} .

$$R_{00} = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \quad (3.25)$$

É fácil vermos que $R_{000}^0 = 0$ olhando para a Eq (2.10). Então, precisamos calcular os demais termos. Vamos então escrever o termo R_{010}^1 em função dos símbolos de Christoffel e calcular suas componentes.

$$R_{010}^1 = \Gamma_{01,0}^1 - \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^\eta \Gamma_{0\eta}^1 - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 \quad (3.26)$$

Usando (2.8), vamos encontrar que

$$\Gamma_{01,0}^1 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (3.27a)$$

$$\Gamma_{00}^1 = 0 \quad (3.27b)$$

$$\Gamma_{00}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 = 0 \quad (3.27c)$$

$$\Gamma_{01}^\eta \Gamma_{0\eta}^1 = \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (3.27d)$$

Assim, temos que $R_{010}^1 = \dot{a}^2/a^2$. Escrevendo agora R_{020}^2 em função dos símbolos de Christoffel temos

$$R_{020}^2 = \Gamma_{02,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 + \Gamma_{02}^\eta \Gamma_{0\eta}^2 - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{2\eta}^2. \quad (3.28)$$

Usando (2.8), vamos encontrar que

$$\Gamma_{02,0}^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (3.29a)$$

$$\Gamma_{00}^2 = 0 \quad (3.29b)$$

$$\Gamma_{00}^\eta \Gamma_{2\eta}^2 = 0 \quad (3.29c)$$

$$\Gamma_{02}^\eta \Gamma_{0\eta}^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (3.29d)$$

E encontramos que $R_{020}^2 = \dot{a}^2/a^2$. É fácil notar que $R_{030}^3 = \dot{a}^2/a^2$, porém, o cálculo explícito das equações de Friedmann estão no apêndice I.

Somando as quatro componentes, encontramos que $R_{00} = 3\ddot{a}/a$. Resolvendo de forma análoga para todas as componentes da equação de Einstein (ver Apêndice I), nós encontramos que

$$R_{11} = - \left(\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \right) \quad (3.30a)$$

$$R_{22} = - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \quad (3.30b)$$

$$R_{33} = - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2(\theta) \quad (3.30c)$$

$$R = \frac{6\ddot{a}}{a} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6k}{a^2}. \quad (3.30d)$$

Sendo $R_{00} = 3\ddot{a}/a$ e usando (3.30) e (3.21), encontramos que

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = -2T^0_0 \implies \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{2}{3}\rho, \quad (3.31)$$

para $4\pi g \equiv 1$. A Eq (3.31) é conhecida como a equação de Friedmann. Usando as demais componentes, nós encontramos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3P). \quad (3.32)$$

Como dito anteriormente, o termo $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Para o universo homogêneo e isotrópico, o tensor energia momento tem a forma

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

onde ρ é a densidade de energia e p é a pressão. A equação de Friedmann pode ser reescrita na forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.34)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e "a" o fator de escala do universo.

As equações de Friedmann relacionam a taxa de aumento do fator de escala com a densidade de energia total de todo o universo. Nós podemos utilizar a equação de Friedmann para definir a densidade crítica,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (3.35)$$

para que a secção espacial seja precisamente flat ($k = 0$). Nós então definiremos o parâmetro de densidade como sendo

$$\Omega_{total} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.36)$$

que nos permite relacionar a densidade de energia do universo com a geometria local via

$$\Omega_{total} > 1 \implies k = +1, \quad (3.37a)$$

$$\Omega_{total} = 1 \implies k = 0, \quad (3.37b)$$

$$\Omega_{total} < 1 \implies k = -1,5 \quad (3.37c)$$

A figura 3.2 mostra a forma do universo em função do valor de Ω_{total} .

Usando a conservação da energia e do momento no tensor energia-momento $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ temos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (3.38)$$

que é a equação de continuidade para um fluido.

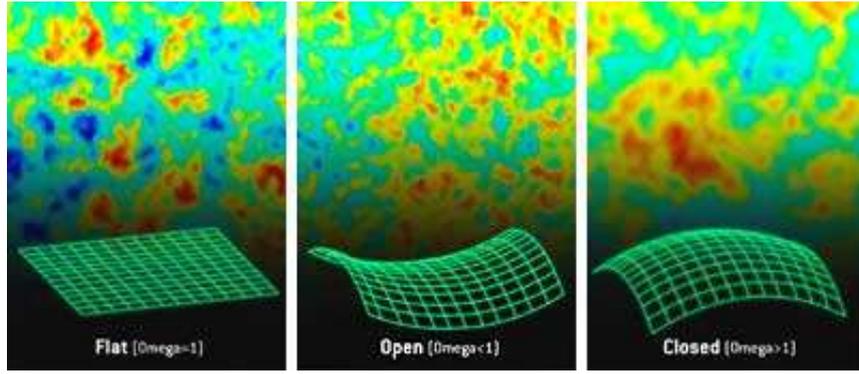


Figura 3.2: Curvatura do Universo em função de Ω_{total}

Isto implica que a equação do universo pode conduzir às mudanças locais na densidade da energia. Esta equação não é independente da equação de Friedmann e da aceleração, mas é requerida por consistência.

Uma outra questão importante é saber como a pressão e a densidade de energia se relacionam. Com a aproximação de que o universo é um fluido perfeito, nós podemos assumir que a pressão é uma função da densidade de energia $p = p(\rho)$ [19, 18, 8]. Isto é conveniente para definir uma equação de estado com um parâmetro w na forma

$$p = w\rho \quad (3.39)$$

Esta equação pode ser vista como uma instantânea definição do parâmetro w . Faz-se necessário representar a equação completa de estado, que pode ser requerida para calcular o comportamento da flutuação. Como exemplo, $w = 0$ representa a matéria sem pressão, ou poeira que são um conjunto de partículas massivas não relativísticas. De forma semelhante, $w = 1/3$ corresponde a um gás de radiação, que podem ser fótons ou outra espécie de natureza relativística.

Substituindo (3.39) em (3.38) nós encontramos

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + w) = 0. \quad (3.40)$$

Integrando esta equação, encontramos a relação entre a densidade de energia e o fator de escala do universo

$$\rho \propto \frac{1}{a(t)^{3(1+w)}}. \quad (3.41)$$

Note que o comportamento de poeira $w = 0$ e da radiação $w = 1/3$ são consistentes com o que nós esperaríamos obter. Levando em consideração os limites de integração

como não sendo zero, a Eq (3.40) pode ser escrita na forma

$$\rho a^{3(1+w)} = \rho_0 a_0^{3(1+w)}. \quad (3.42)$$

Substituindo $w = 0$ e $w = 1/3$, e comparando com a Eq (3.20) nós temos que

$$\rho_m = \rho_{0m}(1+z)^3 \quad e \quad \rho_r = \rho_{0r}(1+z)^4. \quad (3.43)$$

Que são os valores obtidos em observações da matéria não relativística e da radiação[19].

Nesta secção não foram descritas as equações de Friedmann com a constante cosmológica. Este tema será tratado de forma mais ampla e detalhada numa secção posterior deste trabalho.

3.7 Matéria Ordinária x Matéria Escura

Após a descoberta da existência da matéria escura, que não conseguimos medi-la e muito menos observá-la, mas que a sua existência é crucial para explicar o comportamento de galáxias e outros sistemas que compõem o universo, acarretou numa revolução no estudo da estrutura do universo. A cosmologia observacional procura dois números importantes para o entendimento do mundo que nos cerca [5, 1]. O parâmetro de Hubble H_0 e o parâmetro de densidade de matéria Ω_M . Ambas as quantidades permanecem inegavelmente importantes, mesmo que nós ampliemos extremamente o espaço que vamos medir. O parâmetro de Hubble é frequentemente parametrizado em termos de uma quantidade adimensional h com $H_0 = 100 h \text{ km/sec/Mpc}$. Onde Mpc significa mega parsec, enquanto que 1 parsec equivale a aproximadamente 3,26 anos luz.

Após anos medindo o valor do parâmetro de Hubble, foi chegado ao valor de $h = 0.71 \pm 0.06$. Por anos, o valor de Ω_M baseado na dinâmica das galáxias tem nos mostrado um valor entre 0.1 e 0.4, visivelmente um valor menor que da densidade crítica. Nos últimos anos, vários métodos foram criados para se medir a densidade do universo, porém, o mais tradicional método para estimar a densidade de massa do universo é dividindo o "peso" de clusters "aglomerado de galáxias" pela luminosidade, e extrapolar o resultado para o universo como um todo. Embora estes clusters não sejam uma representação simples do universo, eles são suficientemente grandes que nos possibilita acreditar em seus resultados. Embora seja possível que o valor global de M/L difira apreciavelmente do valor obtido em clusters, as extrapolações das escalas pequenas não aparentam alcançar o valor da densidade crítica. Novas técnicas para pesar os conjuntos, incluindo lentes gravitacionais de galáxias nos levam a similar conclusão de que a densidade crítica está muito longe de ser alcançada.

Melhor que medir a massa relativa à densidade de luminosidade, que pode ser diferente dentro ou fora do clusters, nós podemos também medi-la com respeito à densidade bariônica, que é muito provável ter o mesmo valor nos clusters que em outra parte do universo, simplesmente porque em larga escala não é possível separar matéria bariônica da matéria escura. A maioria da massa bariônica está no gás quente dentro dos clusters, e a função f_{gas} da massa total pode ser medida pela observação direta dos raios X do gás ou por distorções das micro-onda de fundo por espalhamento dos elétrons quentes, frequentemente entre $0.1 \leq f_{gas} \leq 0.2$.

Todas as medidas da densidade do universo nos dá um valor bastante menor do que

se espera. Uma saída para explicar este fenômeno é a matéria escura. A matéria escura é a matéria que não interage com a luz e por isso não pode ser observada diretamente, mas cuja existência é inferida pela sua influência gravitacional na matéria luminosa, ou prevista por certas teorias. Por exemplo, os astrônomos acreditam que as regiões mais exteriores das galáxias, incluindo a Via Láctea, têm de possuir matéria escura devido às observações do movimento das estrelas. A Teoria Inflacionária do Universo prevê que o Universo tem uma densidade elevada, o que só pode ser verdade se existir matéria escura.

Desde a década de 1930, fala-se de matéria escura no universo. Em aglomerados de galáxias e halos de galáxias, deve haver cerca de dez vezes mais matéria do que aquela visível na forma de estrelas e gás. Uma complicação é que essa matéria escura não pode ser predominantemente bariônica, a matéria ordinária dos nossos corpos e das estrelas. Os nêutrons e prótons, que compõem os núcleos atômicos, são bárions. Mas os estudos da formação de núcleos após o Big Bang fixam o total de matéria bariônica em torno de $\Omega_B = 0.05$ da densidade crítica, que é a densidade de energia necessária para que o universo tenha uma geometria plana $k = 0$.

A impossibilidade de termos um universo dominado pela matéria bariônica nos remete à consideração da matéria escura como um constituinte básico. Porém, uma pergunta nos vem em mente. Será que, mesmo sem observá-la diretamente, podemos obter pistas de como essa matéria escura se distribui no universo? Ainda não se tem respostas concretas a esta pergunta, porém, com o avanço dos experimentos, espera-se que isto ocorra muito em breve.

Sem a misteriosa substância chamada matéria escura, as galáxias se fragmentariam. Uma simulação feita em computador por John Dubinski, um astrofísico da Universidade de Toronto, representa a matéria escura como uma enorme rede de filamentos espalhada pelo espaço. Segundo os cálculos de Dubinski e outros astrofísicos, o universo visível (estrelas e galáxias) é uma mera farpa do que há lá fora. A matéria escura é uma partícula grande sem carga elétrica; sua única marca é sua força gravitacional. Os especialistas calculam que os experimentos dos próximos dez anos conseguirão finalmente isolar partículas da matéria escura e desvendar o maior mistério do universo atualmente.

3.8 Radiação Cósmica de Fundo

A Radiação Cósmica de Fundo em micro-ondas (CMB) é um sinal eletromagnético, de origem cosmológica, que pode ser observado hoje em dia em todo o céu. É uma espécie de ruído que permeia todo o Universo. Ela, portanto, atinge a terra vinda de todas as direções e pode ser detectada, por exemplo, por um aparelho de TV, pois algo em torno de 3 por cento do ruído eletromagnético recebido por um televisor deve-se à CMB [21]. Essa radiação é descrita por um espectro de corpo negro a uma temperatura de 2,7 K. Pode-se dizer, então, que a temperatura do Universo hoje é de 2,7 K, ou aproximadamente -270° C. Por ter essa temperatura, a CMB tem intensidade máxima na faixa de micro-ondas do espectro eletromagnético. Ela está associada a uma época em que o Universo ainda era muito jovem (muito antes de surgirem as primeiras estrelas, planetas ou galáxias), quando a matéria era predominantemente constituída por prótons e elétrons que formavam uma espécie de "gás primordial".

A CMB se constitui numa das mais poderosas ferramentas de estudo da Cosmologia. A sua existência foi prevista por Gamow, Alpher e Herman, em 1948, quando estudavam a origem dos elementos químicos e o estado da matéria no universo primordial, levando-os a concluir que essa matéria, que estaria ultracomprimida, deveria ter liberado uma radiação que teria, hoje, uma temperatura da ordem de 5 a 10 K, que seria a Radiação Cósmica de Fundo em micro-ondas. Ela foi descoberta, acidentalmente, há quase quarenta anos, por Arno Penzias e Robert Wilson. Essa descoberta é considerada como uma das mais importantes da história da cosmologia observacional e, por isso, Penzias e Wilson ganharam o Prêmio Nobel de Física em 1978. A CMB é uma das fontes mais ricas de informação sobre o universo primordial, já que nenhum outro observável cosmológico revela um passado mais remoto do universo do que ela. Nem mesmo as galáxias e os quasares mais distantes conseguem nos revelar como era a fase inicial do universo. A título de comparação, a luz do Sol viaja oito minutos até chegar a nós; a luz da estrela mais próxima da Terra viaja quatro anos e meio até chegar a nós; a luz da galáxia Andrômeda, que é uma das mais próximas da Terra, leva alguns milhões de anos até chegar aqui. A CMB, por sua vez, leva em torno de 13 bilhões de anos viajando à velocidade da luz até chegar a nós.

O universo, a partir de sua origem, supostamente um estado de alta densidade e temperatura, evoluiu constantemente, se expandindo. Quando atingiu aproximadamente 370 mil anos de idade e uma temperatura em torno de 3000 K, fótons e matéria

que formavam o plasma primordial estavam fortemente acoplados. Nessa época, a energia média dos fótons se tornou menor do que o potencial de ionização do átomo de hidrogênio. Como consequência, os elétrons livres foram capturados pelos prótons, formando átomos de hidrogênio neutro. Com a diminuição do número de elétrons livres, a matéria e a radiação não mais interagiram de forma significativa e ocorreu o que denominamos de desacoplamento entre a radiação e a matéria. Diz-se, então, que o universo se tornou transparente à radiação e todos os efeitos provocados pelos processos físicos que ocorreram antes do desacoplamento apareceriam como uma assinatura do universo jovem na distribuição espacial dessa radiação, que pode ser lida hoje através das observações da CMB. Esta radiação nos fornece, portanto, informações sobre uma época em que o universo tinha cerca de 370 mil anos de idade e pode ser estudada a partir de medidas de seu espectro, polarização e distribuição espacial. Os estudos do espectro e da distribuição espacial do CMB no céu são fatores importantes na discriminação entre os diversos tipos de modelos cosmológicos, ou seja, de modelos que tentam explicar como surgiram as estruturas de matéria que observamos hoje no universo, como estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, planetas e, em última instância, até mesmo a vida.

A confirmação de que a CMB possui um espectro de corpo negro quase perfeito foi obtida por meio das observações feitas com o instrumento Far InfraRed Absolute Spectrophotometer (FIRAS), em 1990, um dos experimentos que estavam a bordo do satélite Cosmic Background Explorer (COBE) [21]. Esse resultado se tornou uma das mais fortes evidências a favor do modelo conhecido por "Hot Big Bang" e mostra que o universo na época do desacoplamento estava em um estado de quase equilíbrio termodinâmico. Tão importante quanto esta detecção foi a descoberta de pequenas perturbações na distribuição angular de temperatura da CMB no céu, ou anisotropias, que estão ligadas à formação das estruturas hoje observadas, tais como aglomerados e superaglomerados de galáxias. A detecção dessas anisotropias na CMB foi feita pelo experimento Differential Microwave Radiometer (DMR), em 1992, também a bordo do satélite COBE. Ela teve um profundo impacto na cosmologia, pois pela primeira vez foi obtida uma detecção de anisotropia intrínseca à (CMB), ou seja, uma anisotropia que não estava ligada a nenhum efeito que fosse devido ao próprio observador ou a algum fenômeno que tenha ocorrido no universo recentemente, ela revelava como era o universo há mais de 13 bilhões de anos.

Embora notáveis, os resultados do DMR apresentam uma limitação, pois os dados não permitem que sejam obtidas informações a respeito do processo de formação

de galáxias; apenas foi possível se ter uma ideia de como as grandes estruturas, relacionadas aos super aglomerados de galáxias, surgiram. Além disso, a qualidade das medidas não é muito boa, já que o nível do sinal era muito baixo. Em função disso, desde então, vários outros experimentos, no solo e a bordo de balões, começaram a tentar medir flutuações de temperatura na distribuição angular da CMB numa grande faixa de frequências, em diversas escalas angulares e com grande sensibilidade. Esses experimentos proporcionaram um grande avanço na determinação dos parâmetros cosmológicos, ou seja, dos parâmetros que nos ajudam a entender como é o universo, de que componentes ele é constituído e quais são as suas características, como densidade, topologia, etc.

Conhecer essas características é fundamental para se entender como o Universo evoluiu de uma estrutura tão simples e homogênea (basicamente uma sopa de prótons, elétrons e fótons) para algo tão complexo e heterogêneo como o conhecemos hoje. Atualmente, sabemos que há no universo regiões com grandes aglomerados de galáxias e regiões com pouquíssimas galáxias. Modelos teóricos nos permitem descrever o gás primordial como sendo bastante homogêneo em termos de sua densidade, apresentando, porém, pequenos desvios dessa homogeneidade, a que usualmente é chamada de "flutuações". Em outras palavras, havia regiões minúsculas que eram um pouco mais densas do que a média e regiões um pouco menos densas. Tais regiões evoluíram para se tornar hoje regiões com altas densidades de galáxias ou com baixas densidades de galáxias. Como os fótons e a matéria estavam fortemente acoplados, qualquer flutuação de densidade na matéria se refletiria necessariamente na radiação como uma flutuação de temperatura. Como a matéria (prótons e elétrons), por efeitos gravitacionais, se aglomerou e formou as estruturas, ou seja, se modificou com o passar do tempo, restaram apenas os fótons (a CMB), dessa "sopa primordial", que viajaram livres para nos contar a história do passado do Universo. Daí a importância de se estudar em detalhes a CMB.

Dentre os modelos cosmológicos que tentam explicar a formação de estruturas que hoje observamos no céu, um que foi bastante favorecido com as observações da (CMB) foi o que supõe que o Universo passou um processo de expansão extremamente rápida, conhecida como inflação, logo no seu início. Ele explica, por exemplo, como é possível que regiões do céu tão distantes entre si hoje possam apresentar temperaturas tão próximas, com diferenças da ordem de $0,00001$ K [18].

São três as características que podem ser observadas na CMB: O seu espectro, a sua distribuição angular e a sua polarização. Os astrofísicos buscam, portanto, medir

essas características. Essas medidas são feitas por experimentos que observam o céu em micro-ondas. Esses instrumentos, dependendo da frequência em que operam, podem efetuar essas medidas no solo, em geral em locais de grandes altitudes, ou no espaço a bordo de satélites, foguetes e balões estratosféricos. Para medir as flutuações de temperatura, os receptores são sintonizados numa certa frequência e apontados, alternadamente, para duas regiões diferentes do céu, medindo-se dessa forma a diferença de temperatura entre essas duas regiões. Medindo a intensidade da CMB em todo o céu, podemos então fazer um "mapa" da temperatura desse gás primordial, da mesma maneira que fazemos um mapa da Terra representando os acidentes geográficos. Estudando-se esse mapa, é possível inferir os parâmetros que descrevem o Universo.

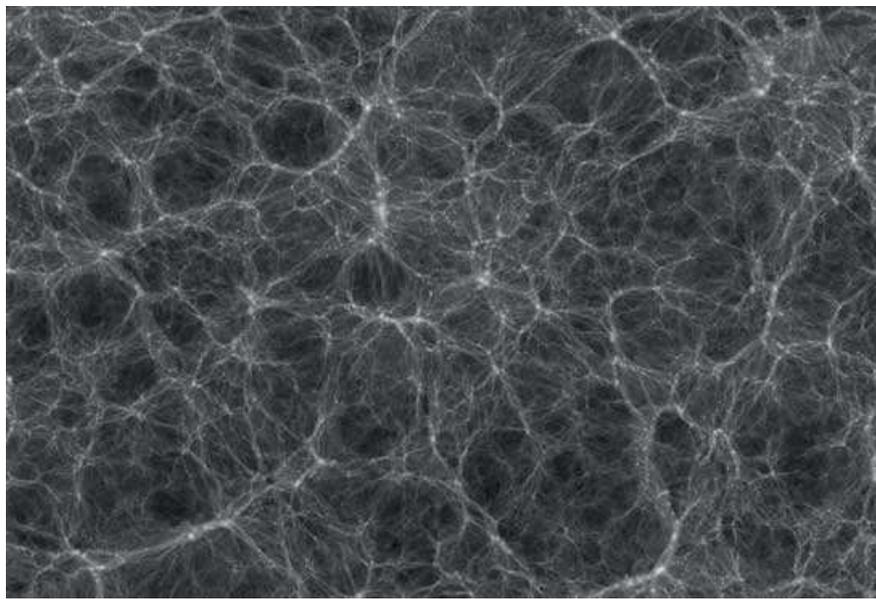


Figura 3.3: Imagem Simulada da Radiação Cósmica de Fundo

O problema é que essas diferenças de temperatura são extremamente pequenas, o que dificulta sobremaneira a realização desses experimentos. É necessário empregar os melhores receptores de micro-ondas que existem, as melhores técnicas de criogenia, entre outros recursos, para que os experimentos possam efetivamente medir algum sinal de origem cosmológica. É um desafio tecnológico, além de científico. Vários fatores complicam a realização desses experimentos: a nossa atmosfera, que emite micro-ondas e também absorve uma parte das que vêm do céu, a nossa própria Galáxia, a Via Láctea, que ocupa uma grande área do céu e, obviamente, atrapalha a observação direta das micro-ondas cosmológicas, as radiofontes cósmicas, entre outros. O advento da era espacial foi crucial para que o progresso nessa área fosse enorme, já que um dos

maiores fatores de interferência pode ser contornado que é a nossa atmosfera.

A questão da formação de estruturas é um dos mais intrigantes e excitantes problemas da cosmologia atual e, certamente, esconde ainda muitas surpresas que devem vir à tona nos próximos anos. Qualquer que seja o modelo adotado atualmente, ele não responde a todas as nossas perguntas. Ainda existem grandes mistérios como a uniformidade observada na (CMB) e a existência de um Universo "encarado" como este em que vivemos. O Universo é suficientemente complexo para permitir a formação de estruturas em estado de sofisticado e delicado equilíbrio, tais como o nosso Sistema Solar, a partir de uma "sopa" de matéria e radiação muito mais uniforme do que jamais poderíamos supor ao olhar para o céu.

3.9 A Constante Cosmológica e a Energia Escura

De acordo com a teoria da Relatividade Geral as propriedades geométricas do espaço são determinadas pelas fontes de energia, que estão disponíveis no meio. Portanto, o conhecimento da curvatura do espaço-tempo requer o levantamento minucioso de todas as possíveis fontes de energia bem como das fontes de pressão. As fontes mais óbvias, e que de uma certa forma estão mais atreladas à nossa experiência diária, são a matéria, seja ela bariônica ou não, e a radiação. Em ambos os casos podemos entender a óbvia conexão com a densidade de energia do universo e a sua repercussão para a curvatura [13]. Mas, uma fonte de energia muito menos óbvia e intuitiva, mas nem por isto menos importante, é o vácuo. O vácuo pode ser a fonte de energia que nos permite entender a fase inflacionária do universo. E, ainda hoje, pode ser que os efeitos desta componente estejam se fazendo sentir no processo de expansão do universo.

Uma propriedade bastante surpreendente do vácuo é a sua capacidade de prover a fonte de aceleração do universo atual [22, 1]. Esta propriedade decorre da possibilidade da gravitação ser repulsiva na teoria de relatividade geral. Ao contrário do que ocorre na mecânica newtoniana, na qual a gravidade é sempre atrativa, a relatividade geral abre a possibilidade para a existência de um meio com pressão suficientemente negativa para gerar esta repulsão gravitacional. Se confirmada, como parecem indicar as observações de distâncias das supernovas, esta nova faceta da relatividade geral pode ser considerada como uma característica tão revolucionária quanto a previsão de existência de buracos negros.

A possibilidade de que a energia do vácuo seja um fator determinante para a taxa de expansão do universo começou a ser colocada em termos quantitativos através de um argumento de S. White nos anos de 1990. O ponto de partida consiste em admitir que os aglomerados de galáxias, por concentrarem uma enorme quantidade de matéria, representam uma amostra não viciada da distribuição de massa do universo como um todo. Por sua vez, as determinações de massas destes aglomerados indicam uma enorme presença de matéria escura, conforme mencionamos antes. Tipicamente a matéria bariônica, presente nas estrelas e no gás disperso nos aglomerados, representam cerca de $\rho_b/\rho_m \approx 13$ por cento[1]. Esses números são confirmados pelas observações da dinâmica dos aglomerados, emissão de raio X e lentes gravitacionais. Portanto, o argumento que se propõe de início indica que esta relação de massa deve prevalecer no universo como um todo. A outra peça de informação que precisamos é a abundância

de bárions no universo que de acordo com os argumentos da nucleossíntese primordial indicam que $\Omega_{0b} = 0,04$, consistente com as estimativas diretas da abundância de bárions no universo. Portanto, somos compelidos a concluir que o universo como um todo deve ter uma abundância de matéria,

$$\Omega_{0m} = \frac{\Omega_{0b}}{\rho_b/\rho_m} \approx 0,31 \pm 0,10. \quad (3.44)$$

Como os resultados da análise da radiação cósmica de fundo nos diz que o nosso universo é plano e nós sabemos que $\Omega_0 = 1$ e $\Omega_{0m} = 0,3$, então qual é a substância que está dominando a inércia do universo? Uma das respostas é que esta energia pode estar relacionada com a energia do vácuo.

Uma forte evidência de que a energia do vácuo pode estar desempenhando um papel de destaque na expansão cosmológica vem das recentes estimativas de que o universo está sofrendo no momento uma fase de aceleração. E esta evidência se manifesta através do redshift de supernovas. A conclusão mais lógica seria a de que o universo estivesse num processo de desaceleração devido a atração gravitacional da matéria existente no universo, afinal, a massa interna a uma dada camada deve certamente exercer uma atração gravitacional contrária à expansão e portanto se a matéria e radiação são as fontes de inércia, certamente devemos observar este efeito. Mas durante anos a detecção experimental deste efeito de desaceleração progressiva das camadas mais distantes têm escapado aos observadores. O motivo era a falta de um indicador de distância que, sendo isento de efeitos sistemáticos, nos permitisse medir o parâmetro Ω a partir da relação magnitude-redshift.

No entanto, nos últimos anos, os astrônomos encontraram um indicador de distância bastante preciso e capaz de ser utilizado a grandes distâncias e que ao mesmo tempo está relativamente livre de efeitos sistemáticos. Trata-se das supernovas do tipo Ia, onde se acredita que ocorra quando uma anã branca explode. Para que isto ocorra, a anã branca deve fazer parte de um sistema binário. Nesses sistemas, parte da massa ejetada a partir da componente visível pode ser capturada pela anã branca que vai lentamente aumentando a sua própria massa. Quando a anã branca atinge seu limite máximo de massa, o equilíbrio gravitacional é rompido e a estrela explode num evento de supernova, milhões de vezes mais brilhantes que uma cefeira (estrelas variáveis, com luminosidades da ordem de 10^{3-4} lum. solar, e períodos da ordem de dezenas a centenas de dias. Obedecem a uma relação período-luminosidade que nos permite inferir a sua luminosidade intrínseca a partir da estimativa do período. Sendo muito brilhantes é possível observá-las em galáxias próximas, proporcionando assim uma forma de medir

a distâncias destas galáxias), e por isto mesmo visível a uma distância muito maior. Como a explosão só ocorre quando este limite de massa é atingido, resulta que a luminosidade das supernovas do tipo Ia é razoavelmente constante, o que garante a sua utilidade como indicador de distâncias cosmológicas. Por este motivo, desde os anos de 1990, vários astrônomos têm se preocupado em identificar estes eventos em galáxias distantes. A grande surpresa que emerge dos resultados de redshift é que o universo estaria acelerando. As medidas nos dizem que $\Omega = -0,4$, correspondendo a um universo com uma quantidade negativa de massa! Este é o grande problema a ser resolvido pela cosmologia.

A discrepância encontrada pode ser compatibilizada com a teoria de relatividade geral se considerarmos que além da matéria existe ainda uma pressão negativa, associada ao vácuo. A primeira tentativa de associar uma inércia ao vácuo foi feita pelo próprio Einstein na forma de uma constante cosmológica. A introdução desta grandeza foi feita para preservar a crença que ele próprio tinha de que o universo devia ser estático. Para resolver este impasse, que ele acreditava ser um problema da sua teoria, ele modificou a equação adicionando um termo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.45)$$

Depois da descoberta da expansão do universo, Einstein reconheceu seu erro e retirou a constante da sua equação.

Com as recentes estimativas da aceleração cosmológica, a constante Λ está passando por um novo período de entusiasmo. O motivo pode ser visto usando (3.32) para a radiação, nós teremos que

$$\ddot{a} = -\frac{1}{3}(\rho - \Lambda)a. \quad (3.46)$$

Se $\Lambda = 0$, a aceleração do fator de escala é necessariamente negativa com um valor determinado pela massa interior à camada que estamos estudando. Mas se $\Lambda > \rho$, então o fator de escala sofre uma aceleração cuja magnitude depende do exato valor que atribuímos a constante. Este é precisamente o efeito que pode nos ajudar a entender os resultados obtidos com as recentes observações de supernovas.

Com a introdução da constante cosmológica, a equação de Friedmann e a equação da aceleração sofrem alterações de forma que elas se transformam em

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.47a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.47b)$$

Assim, teremos que $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$. Se considerarmos que o universo é flat como se imagina $k = 0$, nós teremos a relação do parâmetro de densidade na forma

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1. \quad (3.48)$$

De forma generalizada, teremos que

| Estrutura do Universo | |
|-----------------------------------|------------------|
| Parâmetro de Densidade | Geometria |
| $0 < \Omega + \Omega_\Lambda < 1$ | Universo Aberto |
| $\Omega + \Omega_\Lambda = 1$ | Universo Flat |
| $\Omega + \Omega_\Lambda > 1$ | Universo Fechado |

Atualmente, apesar das incertezas quanto as evidências, muitos cosmólogos voltam seus esforços para tentar explicar a existência da constante cosmológica. Mesmo que a constante cosmológica represente uma força contrária a gravitação, necessária para explicar como pode o universo estar se expandindo de forma cada vez mais rápida, esta constante representa uma mesma força, constante com o tempo, ao passo que evidências observacionais indicam que a força que hoje acelera a expansão do universo, já teve um período em que representava uma força negligenciável, pois de outra maneira, estrelas e planetas, bem como galáxias, nunca teriam se formado.

Existem outras variáveis para a energia escura, também conhecida como quintessence. As propriedades desta seriam dependentes do tempo, permitindo então a possibilidade de a força exercida pela quintessence ter um comportamento diferente, necessário para coincidir com as evidências observacionais. A energia escura, segundo as teorias, teria sido dominante em um primeiro estágio expansivo do universo, até tempos da ordem de 10-35 segundos [22], quando então passou a ter menor importância que outras forças existentes, desta forma permanecendo até um tempo recente, relativo a idade do universo, no qual, voltou a tornar-se dominante, começando então a exercer a força necessária para acelerar a expansão do universo.

Uma das formas propostas para a quintessence, foi proposta por Andreas Albrecht e seu estudante Constantinos Skordis. Eles propuseram uma classe de funções de energia ou “potenciais” não lineares para a quintessence, de tal forma, que com uma adequada escolha de parâmetros, a quintessence pode apresentar as características necessárias para apresentar um comportamento adequado à explicação das evidências observacionais. Estes potenciais, apresentam a vantagem de serem funções de primeira ordem somente das constantes físicas c , h e G , respectivamente, a velocidade da luz, a constante de Planck e a constante gravitacional. Segundo eles, a quintessence seria um

tipo de energia do vácuo, ligado com a mecânica quântica e a teoria de supercordas, que apresentaria a exótica propriedade de exercer uma força de repulsão, contrária a força gravitacional. Assim como a Força Lambda, a Quintessência é uma forma de energia do vácuo que existe no espaço como um campo escalar. Um campo escalar não tem dimensão, somente magnitude.

A relação entre teorias que tentam explicar o universo como um todo, e teorias que tentam explicar o mundo microscópico, poderiam representar as raízes de uma teoria unificadora em física, que, a muito tempo, tem sido buscada por diversos físicos. Mas, como seria esperado para uma teoria que se propõe a explicar o destino do universo e a geometria do espaço, fazer a unificação dos mundos quânticos e cosmológico, explicar a massa faltante e a aceleração do universo, e levar a aceitação de uma quinta força fundamental da natureza; seria esperado que se encontrassem problemas. Primeiramente, ninguém sabe o motivo pelo qual a quintessence poderia ter surgido novamente para acelerar a expansão do universo após um longo período de hibernação. Em segundo lugar, e não menos importante, vem o fato de as estimativas feitas para a força exercida por essa possível energia do vácuo serem da ordem de 120 ordens de grandeza maiores do que seriam necessárias para explicar os efeitos observados atualmente; forças desta ordem, seriam suficientes para impedir até mesmo a formação de matéria, o que obviamente, não é o que realmente acontece.

Mesmo com estas questões não bem resolvidas, a quintessence parece ser a melhor teoria que se tem para explicar a expansão acelerada do universo e a geometria do espaço. Esta "energia do vácuo" evoluiu de tal forma que hoje constitui uma das mais desafiadoras das ideias da cosmologia moderna. Nestas teorias, os conceitos de forças fundamentais da natureza, ideias de estrutura do universo, uma possível ligação entre os mundos quântico e cosmológico, e o próprio destino do universo, estão todos envolvidos.

Capítulo 4

Aplicação do modelo de Friedman

4.1 Introdução

Em cosmologia, a energia escura é uma forma hipotética de energia que estaria permeada no espaço, tendo uma forte pressão negativa. De acordo com a teoria da relatividade, o efeito de tal pressão negativa seria semelhante, qualitativamente, a uma força que age em larga escala em oposição à gravidade. Existem duas formas possíveis de lidar com a energia escura, uma seria a constante cosmológica (uma densidade de energia que preencheria o espaço de forma homogênea) e a ”quintessência” (um campo escalar real cuja densidade de energia poderia variar no tempo e no espaço)[29, 30, 31, 32, 11]. Em nosso trabalho desenvolvido no período do mestrado [28], nós consideramos um modelo descrito por um campo escalar real em um genérico espaço tempo, descrevendo um perfil esférico, flat ou hiperbólico do espaço. Neste trabalho, nós reduzimos a ordem das equações do modelo de FRW para primeira ordem e fizemos com que o parâmetro de Hubble dependesse de uma nova função, $W = W(\phi)$. Com isto, nós simplificamos o problema na obtenção do potencial e do fator de escala. Este método possibilitou na obtenção de diversos cenários de interesse atual na cosmologia.

Um modelo de FRW com um campo escalar real é descrito por uma ação na forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (4.1)$$

onde $\phi = \phi(t)$ descreve um campo escalar real e nós usamos como antes que $4\pi G \equiv 1$. Como estamos um modelo de FRW, o elemento de linha será dado por $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{r}^2$, onde $a(t)$ é o fator de escala do universo como já foi dito antes no capítulo 3. Em geral, o tensor energia momento é dado por $T^\mu{}_\nu = (\rho, -p, -p, -p)$, onde ρ e p representam a densidade de energia e a pressão respectivamente.

A equação de movimento para um campo escalar depende de $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, que tem a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (4.2)$$

Para encontrarmos a equação de movimento, precisamos fazer a variação da métrica em relação ao campo de forma que

$$\delta S = \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right). \quad (4.3)$$

Como o escalar de Ricci não varia com o campo escalar, podemos reescrever esta equação na forma

$$\delta S = \delta \int d^4x (\sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)) = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right). \quad (4.4)$$

A equação (4.4) pode ser reescrita como

$$\delta S = \int d^4x \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right). \quad (4.5)$$

O segundo termo se anula por ser um termo de superfície, logo, temos a equação

$$\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Usando (4.6) em (4.2), nós encontramos a equação de movimento para um modelo de FRW governado por um campo escalar real que é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (4.7)$$

onde H é o parâmetro de Hubble e $V_\phi = dV/d\phi$.

Como o nosso Universo é homogêneo e isotrópico, ele só depende da pressão e da densidade de energia que são dadas por p e ρ respectivamente. Para encontrarmos as equações para a pressão e para a densidade de energia, nós temos que calcular o tensor energia momento; para isto, temos que variar a ação em função da posição. Fazendo isto, vamos obter duas equações, uma para $T^0_0 = \rho$ e outra para $T^i_i = p$. assim, temos que

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V, \quad (4.8a)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V. \quad (4.8b)$$

E usando a equação de Einstein, encontramos

$$H^2 = \frac{2}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.9a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p). \quad (4.9b)$$

Que é a equações de Friedmann e a equação da aceleração obtidas explicitamente no apêndice deste texto.

4.2 Procedimento

Vamos agora utilizar as equações (4.8) e (4.9). Substituindo (4.8) em (4.9), nós veremos que

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (4.10a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2}{3} \left(\dot{\phi}^2 - V \right). \quad (4.10b)$$

Podemos ver que $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$, assim, combinando as equações acima temos

$$H^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{3} + \frac{2V}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (4.11a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (4.11b)$$

De forma análoga, podemos obter a equação para o potencial em função do parâmetro de Hubble e da constante k combinando as equações acima, logo, a equação para o potencial é dada por

$$V = \frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}\dot{H} + \frac{k}{a^2}. \quad (4.12)$$

Agora vamos fazer $H = W(\phi)$ de forma que $\dot{H} = W_\phi \dot{\phi}$. Para $k = 0$ nós temos que

$$\dot{\phi} = -W_\phi. \quad (4.13)$$

Desta forma, substituindo W e W_ϕ em (4.12) para $k = 0$, encontramos o potencial em função da nova variável W e de sua derivada na forma

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (4.14)$$

Para o caso em que $k \neq 0$, o método não é tão direto. Neste caso, a solução é mais complicada e nós notamos que usar $H = W$ não é suficiente para resolver o problema, mas da mesma forma que no caso em que $k = 0$, vamos fazer $H = W$. Este procedimento requer a presença de um novo vínculo. Assim, fazendo $1/a^2 \equiv \alpha Z$ teremos

$$\dot{\phi} = (k\alpha Z - W_\phi), \quad (4.15)$$

onde $Z = Z(\phi)$ é em princípio uma função arbitrária e α uma constante. Notemos que a Eq (4.15) é igual a Eq (4.14) para $k = 0$. Com $k \neq 0$, o potencial terá a forma

$$V = \frac{3}{2}W^2 + (k\alpha Z - W_\phi) \left(k\alpha Z + \frac{1}{2}W_\phi \right). \quad (4.16)$$

Usando (4.7), (4.15) e (4.16), nós encontramos uma equação diferencial de segunda ordem onde os parâmetros não são constantes

$$W_{\phi\phi}Z + W_{\phi}Z_{\phi} - 2k\alpha ZZ_{\phi} - 2WZ = 0. \quad (4.17)$$

A depender do comportamento de Z , esta equação pode nos dar vários cenários. porém, esta equação será analisada mais adiante.

Primeiro, vamos considerar o caso em que $k = 0$, fazendo $W = A\phi^n$, onde A e n são constantes quaisquer. Desta forma, utilizando a Eq (4.14) nós encontramos que

$$V = \frac{1}{2}A^2\phi^{2n} \left(3 - \frac{n^2}{\phi^2} \right). \quad (4.18)$$

Resolvendo a Eq (4.13) para $W = A\phi^n$, nós teremos que

$$\phi = [An(n-2)t]^{1/(2-n)}. \quad (4.19)$$

Como admitimos que $H = W$, e que $W = W[\phi(t)]$. Substituindo o valor de ϕ nas expressões anteriores encontramos que $H = A^{\frac{2}{2-n}}[n(n-2)t]^{\frac{n}{2-n}}$. No caso em que $n = 2$, temos que investigar em separado, pois ocorre uma divergência. Neste caso, $H = Ae^{-4At}$ e o potencial tem a forma $V(\phi) = (A^2/2)(3\phi^2 - 4)\phi^2$. Para o caso de $n = 1$ teremos potencial negativo.

Outro cenário utilizado em cosmologia é quando fazemos $W = Ae^{-B\phi}$ [51], com A e B constantes, da mesma forma, utilizando (4.14) encontramos que

$$V = \frac{1}{2}A^2(3 - B^2)e^{-2B\phi}. \quad (4.20)$$

E resolvendo (4.13) encontramos que $H = 1/(B^2t)$.

Para o caso em que $k \neq 0$, como já foi dito antes, será um pouco mais complicado. Fazendo $Z = 1$ em (4.17), a equação se torna bastante simples, ficando na forma $W_{\phi\phi} = 2W$ onde tem soluções do tipo $W = Ae^{\pm\sqrt{2}\phi}$. Outra possibilidade é se fizermos $Z = W_{\phi}$. Neste caso a equação se modifica, deixando uma dependência em função do valor de α e k

$$(1 - k\alpha)W_{\phi\phi} = W. \quad (4.21)$$

Desta forma, W pode ser limitado ou não a depender do valor de $(1 - k\alpha)$.

Como nós exemplificamos anteriormente, vamos considerar $W = Ae^{B\phi}$, onde $B = \pm\sqrt{1 - k\alpha}$ e $\alpha < 0$. Utilizando (4.16) para $Z = W_{\phi}$, nós encontramos que

$$V = (1 - k\alpha)A^2e^{2B\phi}, \quad (4.22)$$

e de forma análoga ao que foi feito no exemplo anterior, encontramos que $H = 1/t$.

Outro exemplo é quando consideramos $W = A \sin(\phi/\sqrt{k\alpha - 1})$ para A sendo constante e $k\alpha - 1 \geq 0$. Neste caso, temos que

$$V = \frac{3}{2}A^2 + A^2(k\alpha - 1) \cos^2(\phi/\sqrt{k\alpha - 1}). \quad (4.23)$$

Agora temos que encontrar o valor de H para este cenário. Usando (4.15) para $Z = W_\phi$ nós temos

$$\dot{\phi} = -(1 - k\alpha)W_\phi. \quad (4.24)$$

Usando $W = A \sin(B\phi)$, onde $B = 1/\sqrt{k\alpha - 1}$ temos

$$\int \frac{d\phi}{\cos(B\phi)} = -(1 - k\alpha)AB \int dt \quad (4.25)$$

Resolvendo esta integral nós encontramos que

$$\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B\phi}{2} \right) \right) = -(1 - k\alpha)AB^2t. \quad (4.26)$$

Invertendo esta equação, nós teremos que $\phi = -\phi/2B + 2/B \arctan(e^{-(1-k\alpha)AB^2t})$. Substituindo em W teremos que

$$H = A \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(e^{-(1-k\alpha)AB^2t}) \right) = A \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(e^{At}) \right). \quad (4.27)$$

Mas $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$ e $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$, logo

$$H = -\cos^2(\arctan(e^{At})) + \sin^2(\arctan(e^{At})). \quad (4.28)$$

Usando as identidades matemáticas

$$\cos(\arctan(u)) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad (4.29a)$$

$$\sin(\arctan(u)) = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad (4.29b)$$

nós encontramos que $H = A \tanh(At)$. Este modelo representa um cenário onde o Universo está acelerado. A vantagem da unitização deste método é que podemos escolher a forma do potencial e depois encontramos os parâmetros cosmológicos como H e o fator de escala $a(t)$. Muitos outros modelos podem ser implantados utilizando esta metodologia. Como exemplo, vamos considerar $W = A[B + \arctan(\sinh(C\phi))]$, para $k = 0$ e A, B e C constantes. Neste caso, temos um potencial dado por

$$V = \frac{3}{2}A^2[B + \arctan(\sinh(C\phi))]^2 - \frac{1}{2}A^2C^2 \operatorname{sech}^2(C\phi). \quad (4.30)$$

Nós plotamos este potencial para alguns valores de A , B e C na Fig.5. Nós ilustramos algumas possibilidades com $A = 1$, $C = \sqrt{2}$ e $B = 0$, que dá um potencial simétrico, similar a um potencial bicíclico; $B = \pi/4$ similar ao caso de expansão cíclica; $B = \pi/2$ que dá um potencial tipo kink.

Utilizando (4.14) para $W = A[B + \arctan(\sinh(C\phi))]$ nós encontramos que $H = A[B - \arctan(AC^2t)]$. Este resultado nos dá um modelo em que podemos controlar o parâmetro de Hubble através das três constantes envolvidas.

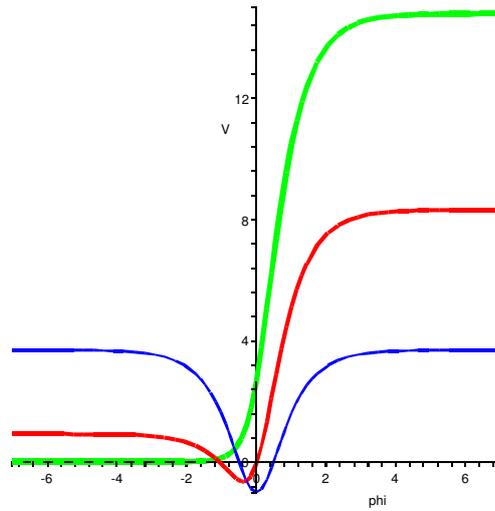


Figura 4.1: Potencial da Eq (4.30) para $A=1$, $C = \sqrt{2}$ e $B=0, \pi/4$ e $\pi/2$

4.3 Dinâmica Taquiônica

Nosso método também pode ser estendido para o caso com dinâmica taquiônica. O táquion é uma partícula hipotética que viaja com velocidade superiores a da luz. De acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, não é possível acelerar uma partícula até que ela atinja a velocidade da luz. Nada impede, contudo, a existência de partículas com velocidade superior à da luz. A expressão da energia de um táquion seria um número imaginário. Embora se tenham efetuado pesquisas em busca de táquions, os resultados até o presente foram negativos [23]. A densidade lagrangeana para o táquion é dada por

$$\mathcal{L}_t = -V(\phi)\sqrt{1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}. \quad (4.31)$$

A densidade de energia e a pressão são dadas por $\rho_t = V/(1 - \dot{\phi}^2)^{1/2}$ e $p_t = -V(1 - \dot{\phi}^2)^{1/2}$. Utilizando (4.6) em (4.31) nós teremos a equação de movimento da dinâmica taquiônica que é dada por

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2)(3H\dot{\phi} + V_\phi/V) = 0. \quad (4.32)$$

Utilizando as equações da pressão e da densidade de energia na equação de Friedmann e na equação da aceleração para o caso taquiônico, encontraremos que

$$\dot{H} = -\frac{V\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (4.33a)$$

$$H^2 = \frac{2}{3}\frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (4.33b)$$

Vamos utilizar o mesmo procedimento de antes fazendo $H = W(\phi)$. Logo, $\dot{H} = W_\phi\dot{\phi}$. Substituindo estas duas equações em (4.33) teremos

$$W_\phi = -\frac{V\dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (4.34a)$$

$$W^2 = \frac{2}{3}\frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (4.34b)$$

Dividindo estas duas últimas equações, nós encontramos que

$$\dot{\phi} = \frac{2}{3}\frac{W_\phi}{W^2}. \quad (4.35)$$

Substituindo em (4.34), nós encontramos a expressão para o potencial que é dado por

$$V(\phi) = \frac{3}{2} \sqrt{W^4 - \frac{4}{9} W_\phi^2}. \quad (4.36)$$

Como exemplo para o caso taquiônico, nós utilizaremos $W = A/\phi$. Utilizando (4.36) para obtermos o potencial taquiônico que é dado por

$$V(\phi) = \frac{3}{2} A \sqrt{A^2 - \frac{4}{9} \frac{1}{\phi^2}}. \quad (4.37)$$

onde $A > 2/3$ para que tenhamos resultados reais. Usando $W = A/\phi$ em (4.35), nós encontramos que $H = C/t$, onde $C = 3A^2/2$.

A vantagem do nosso método é exatamente na simplicidade com que obtemos o potencial. Outras técnicas como a da Ref[51], parte-se do parâmetro de Hubble e não se sabe em princípio o potencial que aquele cenário representa. No nosso é exatamente o contrário, partimos do potencial e vemos como se comporta o parâmetro de Hubble. A redução da ordem das equações foi crucial para a simplificação do problema, onde se consegue resolver diretamente as equações sem muita dificuldade.

Capítulo 5

Conclusão

Estudamos nesta dissertação algumas propriedades da cosmologia. No capítulo 2 estudamos a Relatividade Geral e suas propriedades, obtivemos a equação da geodésica e a equação de Einstein a partir da identidade de Bianchi e como a equação de Einstein se relaciona com o tensor energia momento.

No capítulo 3 vimos como a cosmologia evoluiu desde a idade média, com os grandes pensadores do passado até chegar aos tempos atuais. O modelo cosmológico padrão mais conhecido como o *Big Bang* e o princípio cosmológico que deram a cosmologia um caráter científico com a métrica de FRW que usa o princípio cosmológico como base da sua solução. A grande descoberta de Hubble que o Universo não é estático e sim dinâmico com uma relação entre velocidade e distância, onde quanto maior a distância entre as galáxias, maior a velocidade com que se afastam uma das outras. O desvio espectral para o vermelho que indica a expansão do nosso Universo. A obtenção da equação de Friedmann e da aceleração para a métrica de FRW, onde vemos como o universo tem cenários diferentes para cada valor de Ω e k . Vimos também como a descoberta da existência da Radiação Cósmica de Fundo ajudou no desenvolvimento da cosmologia trazendo informações do Universo primitivo. A descoberta de que a matéria bariônica compõe apenas certa de 4 por cento de toda a energia do universo e que a matéria escura seria responsável por 25 por cento, enquanto que a energia escura por 75 por cento. Como a energia escura é necessária para explicar os recentes dados de que o Universo está acelerando onde a constante cosmológica funcionaria como uma força contrária a gravidade acelerando o nosso universo.

No capítulo 4 nós desenvolvemos uma metodologia onde utilizamos o fato de que a aceleração do universo pode ser explicado pela "quintessência" (campo escalar real) e utilizamos o modelo de FRW com um campo escalar real e reduzimos a ordem das equações para a primeira ordem com a utilização de um novo parâmetro $W(\phi)$, onde

fizemos $H = W(\phi)$ e assim simplificamos a forma de obter o potencial e o fator de escala que domina o Universo.

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Obtenção explícita das Eqs. de Friedmann e da aceleração

Para encontrarmos a equação de Friedmann e a equação da aceleração, vamos utilizar a equação de Einstein e a métrica de FRW.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(a^2r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(a^2r^2 \sin^2(\theta)) \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

Precisamos agora calcular todos os termos do tensor de Ricci, para isto, vamos utilizar a expressão abaixo.

$$R_{ii} = R_{i0i}^0 + R_{i1i}^1 + R_{i2i}^2 + R_{i3i}^3 \quad (6.4)$$

Vamos primeiro calcular R_{00}

$$R_{00} = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \quad (6.5)$$

Como $R_{000}^0 = R_{111}^1 = R_{222}^2 = R_{333}^3 = 0$, estes termos não são necessário calcular. Precisamos calcular os demais termos. Vamos então calcular o termo R_{00} . Para isto, calculemos

$$R_{010}^1 = \Gamma_{01,0}^1 - \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^\eta \Gamma_{0\eta}^1 - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 \quad (6.6)$$

Usando (2.8), temos que

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{10,1} + g_{11,0} - g_{01,1}) = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0} \quad (6.7a)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) = -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} = 0 \quad (6.7b)$$

$$\Gamma_{00}^\eta = 0, \text{ logo } \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 = 0 \quad (6.7c)$$

$$\Gamma_{01}^\eta \Gamma_{0\eta}^1 = \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{01}^2 \Gamma_{02}^1 + \Gamma_{01}^3 \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 \quad (6.7d)$$

Calculando os termos diferentes de zero, teremos

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \left(-\frac{2a\dot{a}}{1-kr^2} \right) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (6.8a)$$

$$\Gamma_{01,0}^1 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (6.8b)$$

$$\Gamma_{01}^\eta \Gamma_{0\eta}^1 = \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (6.8c)$$

Desta forma, somando todos os termos, encontramos que

$$R_{010}^1 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (6.9)$$

Escrevendo agora R_{020}^2 em função dos símbolos de Christoffel temos

$$R_{020}^2 = \Gamma_{02,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 + \Gamma_{02}^\eta \Gamma_{0\eta}^2 - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{2\eta}^2. \quad (6.10)$$

De forma análoga.

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(g_{20,2} + g_{22,0} - g_{02,2}) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,0} \quad (6.11a)$$

$$\Gamma_{00}^2 = 0 \quad (6.11b)$$

$$\Gamma_{02}^\eta \Gamma_{0\eta}^2 = \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{02}^1 \Gamma_{01}^2 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{02}^3 \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 \quad (6.11c)$$

Para os termos diferentes de zero, teremos

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a^2 r^2} \right) (-2a\dot{a}r^2) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (6.12a)$$

$$\Gamma_{02,0}^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (6.12b)$$

$$\Gamma_{02}^\eta \Gamma_{0\eta}^2 = \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (6.12c)$$

E assim obtemos que

$$R_{020}^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (6.13)$$

Calculando agora $R_{030}^3 = \Gamma_{03,0}^3 - \Gamma_{00,3}^3 + \Gamma_{03}^\eta \Gamma_{0\eta}^3 - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{3\eta}^3$, vamos ter que

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (g_{30,3} + g_{33,0} - g_{03,3}) = \frac{1}{2} g^{33} g_{33,0} \quad (6.14a)$$

$$\Gamma_{00}^3 = 0 \quad (6.14b)$$

$$\Gamma_{03}^\eta \Gamma_{0\eta}^3 = \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 + \Gamma_{03}^1 \Gamma_{01}^3 + \Gamma_{03}^2 \Gamma_{02}^3 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \quad (6.14c)$$

Como foi feito antes, só para os termos diferentes de zero teremos:

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} g_{33,0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a^2 r^2 \sin(\theta)} \right) (-2a\dot{a}r^2 \sin(\theta)) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (6.15a)$$

$$\Gamma_{03,0}^3 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (6.15b)$$

$$\Gamma_{03}^\eta \Gamma_{0\eta}^3 = \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (6.15c)$$

E assim obtemos que

$$R_{030}^3 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (6.16)$$

Mas como $R_{00} = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3$, substituindo os valores encontrados acima teremos que

$$R_{00} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{3\ddot{a}}{a} \quad (6.17)$$

Agora vamos encontrar $R_{11} = R_{101}^0 + R_{121}^2 + R_{131}^3$. Outra vez, precisamos escrever os tensores de Riemann em função dos símbolos de Christoffel, e depois calcular todos os termos.

$$R_{101}^0 = \Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{10}^\eta \Gamma_{1\eta}^0 - \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{0\eta}^0 \quad (6.18)$$

Usando (2.8), temos que

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{10,0} + g_{00,1} - g_{01,0}) = 0 \quad (6.19a)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{10,0} + g_{10,1} - g_{11,0}) = -\frac{1}{2} g^{00} g_{11,0} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \quad (6.19b)$$

$$\Gamma_{11,0}^0 = \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}^2}{1-kr^2} \quad (6.19c)$$

$$\Gamma_{10}^\eta \Gamma_{1\eta}^0 = \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} \quad (6.19d)$$

$$\Gamma_{11}^\eta \Gamma_{0\eta}^0 = 0 \quad (6.19e)$$

E assim encontramos que

$$R_{101}^0 = -\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} - \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} = -\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}. \quad (6.20)$$

Calculando agora $R_{121}^2 = \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{21}^\eta \Gamma_{1\eta}^2 - \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{2\eta}^2$ temos que

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{r} \quad (6.21a)$$

$$\Gamma_{11,2}^2 = 0 \quad (6.21b)$$

$$\Gamma_{12,1}^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (6.21c)$$

$$\Gamma_{21}^\eta \Gamma_{1\eta}^2 = \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r^2} \quad (6.21d)$$

$$\Gamma_{11}^\eta \Gamma_{2\eta}^2 = \Gamma_{11}^0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 = \frac{\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \quad (6.21e)$$

Temos então que

$$R_{121}^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} = \frac{\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \quad (6.22)$$

E por último, para encontramos o termo R_{00} , precisamos calcular $R_{131}^3 = \Gamma_{13,1}^3 - \Gamma_{11,3}^3 + \Gamma_{13}^\eta \Gamma_{1\eta}^3 - \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{3\eta}^3$, de forma análoga, escrevendo em termo dos símbolos de Christoffel temos:

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) = \frac{1}{2}g^{33}g_{33,1} = \frac{1}{r} \quad (6.23a)$$

$$\Gamma_{11,3}^3 = 0 \quad (6.23b)$$

$$\Gamma_{13,1}^3 = -\frac{1}{r^2} \quad (6.23c)$$

$$\Gamma_{31}^\eta \Gamma_{1\eta}^3 = \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r^2} \quad (6.23d)$$

$$\Gamma_{11}^\eta \Gamma_{3\eta}^3 = \Gamma_{11}^0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{31}^3 = \frac{\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \quad (6.23e)$$

Como $R_{11} = R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3$, substituindo os valores encontrados acima teremos que

$$R_{11} = -\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} - \frac{2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \quad (6.24)$$

Calculando agora $R_{22} = R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3$, temos:

$$R_{202}^0 = \Gamma_{20,2}^0 - \Gamma_{22,0}^0 + \Gamma_{20}^\eta \Gamma_{2\eta}^0 - \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{0\eta}^0 \quad (6.25)$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{20,0} + g_{00,2} - g_{02,0}) = 0 \quad (6.26a)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{02,2} + g_{20,2} - g_{22,0}) = -\frac{1}{2}g^{00}g_{22,0} = a\dot{a}r^2 \quad (6.26b)$$

$$\Gamma_{22,0}^0 = \dot{a}^2r^2 + a\ddot{a}r^2 \quad (6.26c)$$

$$\Gamma_{20}^\eta \Gamma_{2\eta}^0 = \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 = \dot{a}^2r^2 \quad (6.26d)$$

$$\Gamma_{22}^\eta \Gamma_{0\eta}^0 = 0 \quad (6.26e)$$

E assim encontramos que

$$R_{202}^0 = -\dot{a}^2r^2 - a\ddot{a}r^2 + \dot{a}^2r^2 = -a\ddot{a}r^2 \quad (6.27)$$

Calculando agora $R_{212}^1 = \Gamma_{21,2}^1 - \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{21}^\eta \Gamma_{2\eta}^1 - \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{1\eta}^1$ temos que

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{12,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = -r(1 - kr^2) \quad (6.28a)$$

$$\Gamma_{22,1}^1 = -(1 - 3kr^2) \quad (6.28b)$$

$$\Gamma_{21,2}^1 = -0 \quad (6.28c)$$

$$\Gamma_{21}^\eta \Gamma_{2\eta}^1 = \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 = -(1 - kr^2) \quad (6.28d)$$

$$\Gamma_{22}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 = \Gamma_{22}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 = \dot{a}^2r^2 - kr^2 \quad (6.28e)$$

Temos então que

$$R_{212}^1 = -(k + \dot{a}^2)r^2. \quad (6.29)$$

Para encontramos o termo R_{22} , precisamos calcular $R_{232}^3 = \Gamma_{23,2}^3 - \Gamma_{22,3}^3 + \Gamma_{23}^\eta \Gamma_{2\eta}^3 - \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{3\eta}^3$, de forma análoga, escrevendo em termo dos símbolos de Christoffel temos:

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3}) = \frac{1}{2}g^{33}g_{33,2} = \cot\theta \quad (6.30a)$$

$$\Gamma_{22,3}^3 = 0 \quad (6.30b)$$

$$\Gamma_{23,2}^3 = -\operatorname{cosec}^2\theta \quad (6.30c)$$

$$\Gamma_{32}^\eta \Gamma_{2\eta}^3 = \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3 = \cot^2(\theta) \quad (6.30d)$$

$$\Gamma_{22}^\eta \Gamma_{3\eta}^3 = \Gamma_{22}^0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{31}^3 = \dot{a}^2r^2 - (1 - kr^2) \quad (6.30e)$$

E assim, temos que $R_{232}^3 = (\dot{a}^2 + k)r^2$. Somando os últimos resultados teremos que $R_{22} = -(a\dot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2$.

E por último, vamos calcular $R_{33} = R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3$, temos:

$$R_{303}^0 = \Gamma_{30,3}^0 - \Gamma_{33,0}^0 + \Gamma_{30}^\eta \Gamma_{3\eta}^0 - \Gamma_{33}^\eta \Gamma_{0\eta}^0 \quad (6.31)$$

$$\Gamma_{30}^0 = 0 \quad (6.32a)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (6.32b)$$

$$\Gamma_{33,0}^0 = \dot{a}^2 r^2 \sin^2(\theta) + a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (6.32c)$$

$$\Gamma_{30}^\eta \Gamma_{3\eta}^0 = \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 = \dot{a}^2 r^2 \sin^2(\theta) \quad (6.32d)$$

$$\Gamma_{33}^\eta \Gamma_{0\eta}^0 = 0 \quad (6.32e)$$

E assim encontramos que

$$R_{303}^0 = -a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (6.33)$$

Calculando agora $R_{313}^1 = \Gamma_{31,3}^1 - \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{31}^\eta \Gamma_{3\eta}^1 - \Gamma_{33}^\eta \Gamma_{1\eta}^1$ temos que

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{13,3} + g_{31,3} - g_{33,1}) = -r(1 - kr^2)\sin^2(\theta) \quad (6.34a)$$

$$\Gamma_{33,1}^1 = -(1 - 3kr^2)\sin^2(\theta) \quad (6.34b)$$

$$\Gamma_{31,3}^1 = -0 \quad (6.34c)$$

$$\Gamma_{31}^\eta \Gamma_{3\eta}^1 = -(1 - kr^2)\sin^2(\theta) \quad (6.34d)$$

$$\Gamma_{33}^\eta \Gamma_{1\eta}^1 = \dot{a}^2 r^2 \sin^2(\theta) - kr^2 \sin^2(\theta) \quad (6.34e)$$

E assim

$$R_{313}^1 = -(1 - 3kr^2)\sin^2(\theta) - (1 - kr^2)\sin^2(\theta) - \dot{a}^2 r^2 \sin^2(\theta) + kr^2 \sin^2(\theta) \quad (6.35)$$

E por fim, precisamos calcular $R_{323}^2 = \Gamma_{32,3}^2 - \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{32}^\eta \Gamma_{3\eta}^2 - \Gamma_{33}^\eta \Gamma_{2\eta}^2$, de forma análoga, escrevendo em termo dos símbolos de Christoffel temos:

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(g_{23,3} + g_{32,3} - g_{33,2}) = -\sin(\theta)\cos(\theta) \quad (6.36a)$$

$$\Gamma_{33,2}^2 = -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \quad (6.36b)$$

$$\Gamma_{32,3}^2 = 0 \quad (6.36c)$$

$$\Gamma_{33}^\eta \Gamma_{2\eta}^3 = \dot{a}^2 r^2 \sin^2(\theta) - (1 - kr^2)\sin^2(\theta) \quad (6.36d)$$

$$\Gamma_{32}^\eta \Gamma_{3\eta}^2 = -\cos^2(\theta) \quad (6.36e)$$

E assim, temos que $R_{323}^2 = -(\dot{a}^2 + k)r^2 \sin^2(\theta)$. E assim, temos que $R_{33} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2(\theta)$.

Para solucionar a equação de Einstein para a métrica de FRW, precisamos encontrar o escalar de Ricci que é dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}. \quad (6.37)$$

Substituindo os valores obtidos anteriormente, teremos

$$g^{00} R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a} \quad (6.38a)$$

$$g^{11} R_{11} = \left(\frac{1 - kr^2}{a^2} \right) \left(\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \right) \quad (6.38b)$$

$$g^{22} R_{22} = \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \quad (6.38c)$$

$$g^{33} R_{33} = \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2(\theta)} \right) (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2(\theta) \quad (6.38d)$$

$$R = \frac{6\ddot{a}}{a} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6k}{a^2} \quad (6.38e)$$

Usando agora a Eq (3.33) e fazendo $4\pi G \equiv 1$, podemos escrever que

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = -2T_0^0 \implies \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{2}{3}\rho, \quad (6.39)$$

que é a equação de Friedmann.

Outra solução para a equação de Einstein é para a pressão, esta pode ser encontrada quando utilizamos os índices diferentes de zero de sua equação. Vamos encontrar para o índice "1".

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = -2T_1^1 \implies -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 2P. \quad (6.40)$$

Substituindo (6.40) em (6.39) encontramos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3P), \quad (6.41)$$

que é a equação para a aceleração.

Se resolvermos os termos coníndices "2" e "3", encontraremos o mesmo resultado obtido em (6.40).

Assim, encontramos a solução explícita da equação de Einstein para a métrica de FRW.

Referências Bibliográficas

- [1] S. E. Ronaldo, "Introdução à Cosmologia", EDUSP, São Paulo, 2004.
- [2] A. Riess et al. n. J. 116, 1009 (1998).
- [3] S.J. Perlmutter et al., *Astrophys*, 517, 565 (1999).
- [4] N.A. Bachall, J.P. Ostriker, S.J. Perlmutter, and P.J. Steinhardt, *Science*, 284, 1481 (1999).
- [5] M. Trodden and S.M. Carroll, *TASI lectures: introduction to cosmology*, astro-ph/0401547.
- [6] *Scientific América*, Edição Especial N°1, "O Passado e o Presente do Cosmos", Setembro de 2003.
- [7] J. Foster, J. D. Nightingale, "A Short Course in General Relativity", Springer-Verlag, New York, 1994.
- [8] Steven Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Wiley, 1972.
- [9] Sean M. Carroll, "Lecture Notes on General Relativity", gr-qc/9712019, 33, dec 1997.
- [10] Hans C. Ohanian, "Gravitation and Spacetime", Norton, New York, 1976.
- [11] <http://pt.wikipedia.org/wiki/>
- [12] <http://www.mundodosfilosofos.com.br/>
- [13] <http://astro.if.ufrgs.br/>
- [14] <http://www.cea.inpe.br/cosmo/intro-cosmo/node7.html>
- [15] <http://portaldoastronomo.org/>

- [16] <http://www.guia.heu.nom.br/>
- [17] <http://www.on.br/>
- [18] P. Coles, F. Lucchin, "Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure", Wiley, 2002.
- [19] Andrew Liddle, "An Introduction to Modern Cosmology", Wiley, Hoboken, 2004.
- [20] J. Narlikar, "Introduction to Cosmology", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [21] <http://www.comciencia.br/>
- [22] V. Sahni, *The Cosmological Constant Problem and Quintessence* astro-ph/0202076
- [23] <http://www.tachyon-energy.com/>
- [24] S. R. Murray e J. Liu, "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", Bookman, Porto Alegre, 2004.
- [25] P. Ramond, "Field Theory: A Modern Primer", Addison-Wesley, New York, 1990.
- [26] K. de Oliveira, M. F. Saraiva, "Astronomia e Astrofísica", EDUSP, São Paulo, 2004.
- [27] L. Landau e E. Lifshitz, "Teoria do Campo", Ed. MIR, Moscou 1980.
- [28] D. Bazeia, C. B. Gomes, L. Losano, R. Menezes. Phys. Lett. B, Aceito.
- [29] J. Frieman, C. Hill, A. Stebbins, and Waga, Phys. Rev. Lett. 75, 2077 (1995).
- [30] R.R. Caldwell, R. Dave, and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 80, 1582 (1998).
- [31] S.M. Carrol, Phys. Rev. Lett. 81, 3067 (1998).
- [32] I. Zlatev, L. Wang, and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 82, 896 (1999).
- [33] P.J.E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. 75, 559 (2003).
- [34] T. Padmanabham, Phys. Rep. 380, 235 (2003).
- [35] A. Linde, *inflation and string cosmology*, hep-th/0503195.

- [36] K. Skenderis and P.K. Townsend, *Phys. Lett. B* 468, 46 (1999).
- [37] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, and A. Karch, *Phys. Rev. D* 62, 046008 (2000).
- [38] F.A. Brito, M. Cvetič, and S.C. Yoon, *Phys. Rev. D* 64, 064021 (2001).
- [39] D. Bazeia, F.A. Brito and J.R. Nascimento, *Phys. Rev. D* 68, 085007 (2003).
- [40] R. Kallosh and A. Linde, *JHEP* 02, 005 (2000).
- [41] D. Bazeia, M.J. dos Santos, and R.F. Ribeiro, *Phys. Lett A* 208, 84 (1995).
- [42] D. Bazeia, J. Menezes, and R. Menezes, *Phys. Rev. Lett* 91, 241601 (2003).
- [43] G. Felder, A. Frolov, L. Kofman, and A. Linde, *Phys. Rev. D* 66, 023507 (2002).
- [44] P. J. Steinhardt and N. Turok, *Science* 296, 1436 (2002).
- [45] J. Khoury, P.J. Steinhardt, and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* 92, 031302 (2004).
- [46] L. Kofman, and A. Linde, *JHEP* 07, 004 (2002).
- [47] G.W. Gibbons, *Class. Quant. Grav.* 20, S321 (2003).
- [48] V. Gorini, A. Yu Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, *Phys. Rev. D* 69, 123512 (2004).
- [49] E. J. Copeland, M.R. Garousi, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* 71, 043003 (2005).
- [50] R. Rosenfeld and J.A. Frieman, *JCAP* 09, 003 (2005)
- [51] T. Padmanabham, *Phys. Rev. D* 66, 021301(R) (2002).
- [52] V. Cárdenas and S. del Campo, *Phys. Rev. D* 69, 083508 (2004).