



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GENERALIZAÇÃO DA TEORIA BINÁRIA PARA CADEIAS
GRANULARES DECORADAS POR MÚLTIPLOS GRÃOS

EDUARDO ANDRÉ DE FIGUEIREDO BRAGANÇA

João Pessoa - Paraíba

2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GENERALIZAÇÃO DA TEORIA BINÁRIA PARA CADEIAS
GRANULARES DECORADAS POR MÚLTIPLOS GRÃOS

Eduardo André de Figueiredo Bragança
Orientador: Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

João Pessoa - Paraíba

2013

B813g Bragança, Eduardo André de Figueiredo.
Generalização da Teoria Binária para cadeias granulares decoradas por múltiplos grãos /
Eduardo André de Figueiredo Bragança.- João Pessoa, 2013.
68f. : il.
Orientador: Alexandre da Silva Rosas
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Cadeias granulares. 3. Propagação do pulso. 4. Teoria binária. 5. Cadeia
efetiva.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 11 de março de 2013, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Eduardo André de Figueiredo Bragança** na defesa de sua dissertação intitulada “*Generalização da Teoria Binária para cadeias granulares decoradas por múltiplos grãos*”.

João Pessoa, 11 de março de 2013

Orientador:

Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas
(UFPB)

1º Examinador:

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
(UFPB)

2º Examinador:

Prof. Dr. Fabrício Queiroz Potiguar
(UFPA)

Resumo

Cadeias granulares decoradas podem ser usadas no desenvolvimento de aparelhos que visam absorver ondas de choque. Sendo assim, uma das características deste sistema é que eles podem ser usados como absorvedores de choque e na proteção contra impactos. Estudamos aqui a propagação de um pulso em uma cadeia granular decorada, composta de grãos esféricos, que inicialmente estão apenas se tocando, fazendo uso de uma descrição efetiva, onde a cadeia original decorada é substituída por uma cadeia não decorada com massas efetivas onde os grãos interagem através de um potencial efetivo. Nosso objetivo foi generalizar os resultados obtidos em um trabalho anterior, analisando uma cadeia decorada com um número qualquer de grãos pequenos entre os maiores, e assim, apresentando uma abordagem analítica que descreve a massa efetiva e a interação efetiva entre os grãos em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores. Neste sistema os grãos interagem através do potencial de Hertz. Apresentamos a comparação entre os resultados numéricos e analíticos, para os perfis de velocidade dos grãos grandes da cadeia original com os grãos da cadeia efetiva, além da comparação do tempo de propagação do pulso, e a frequência de oscilação dos grãos menores na cadeia original. Destacamos também o uso da Teoria Binária, que tem sido bastante aplicada para descrever analiticamente as propriedades da propagação de um pulso em cadeias granulares.

Abstract

Granular decorated chains can be used for the development of impact-absorbing devices. Thus, one of the features of those systems is that they can be used as shock absorbers and impact protectors. We study here the pulse propagation in a decorated granular chain, composed of spherical grains, which initially are just touching each other, making use of an effective description, where the original chain was replaced by a decorated chain with effective masses where the grains interact via an effective potential. Our goal was to generalize the results obtained in a previous work, by analyzing a decorated chain with an arbitrary number of small grains between the large ones, and thus, presenting an analytical approach that describes the effective masses and the effective interaction between the granules as a function of the quantity small grains between the large ones. In this system the grains interact with each other via the Hertz potential. We presented the comparison between of the numerical and analytical results for the profiles velocity of the large granules in the original chain with the grains of the effective chain, the pulse propagation time, and the frequency of oscillation of the smaller grains in the original chain. We also highlight the use of Binary Theory, which was been widely applied to describe analitically the properties of the propagating pulse in granular chains.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha mãe, Heloiza Cristina Castro de Figueiredo, e meu pai, Edilson Seabra Bragança, pela educação e por sempre me manter no caminho dos estudos. Agradeço a força e a compreensão por estar longe de casa em alguns momentos importantes.

Agradeço também a todo o restante da família (tios, primos, irmãos, avós) pelos conselhos, e inúmeras ajudas, até mesmo financeiras, durante toda esta caminhada, desde bem pequeno quando ia pedir dinheiro pra não faltar a escola. Obrigado pelo apoio e compreensão por estar longe de casa, isso me deu muita força para continuar esta caminhada.

Agradeço também a todos os meus amigos do Pará (da UFPA, de Icoaraci, de Salvaterra), por também sempre me apoiarem nesta caminhada. Prezo muito pela amizade de todos vocês.

Agradeço ao meu orientador Alexandre Rosas, por ter me aceitado para orientar nesta dissertação. Obrigado por sempre tirar minhas dúvidas, e me receber bem em sua sala sempre de maneira paciente.

Agradeço também ao meu orientador de iniciação científica, Fabrício Potiguar, pois foi um dos primeiros a me apresentar a pesquisa científica e acreditar no meu potencial.

Minha enorme gratidão ao meu amigo desde os tempos de UFPA, Luis Machado, pois foi ele quem me apresentou a meus orientadores de iniciação científica e mestrado, Fabrício Potiguar e Alexandre Rosas, respectivamente. Foi através de suas indicações a esses orientadores que ingressei na pesquisa científica. Obrigado também pelo apoio, conselhos e por suas incontáveis ajudas no desenvolvimento deste trabalho, juntamente com outros amigos, Italo e Lázaro.

Não posso deixar de agradecer aos amigos que fiz na UFPB. Aos mais próximos (Herondy Mota, Paulo Rogério, Felipe Freitas) por sempre me darem apoio e conselhos. Agradeço o companheirismo. Agradeço aos outros amigos pelo bom convívio: Jilvam, Lilica, Adriano, Gislaine, João Paulo, Artur, entre outros.

Meu profundo agradecimento ao Dr. Rubens Silva que juntamente com seus filhos, Erick e Larissa, me deram abrigo longe de casa.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 13
2	Fundamentação Teórica	p. 18
2.1	Modelo	p. 18
2.2	Cadeia decorada e dinâmica efetiva	p. 20
2.2.1	Cadeia com 3 grãos	p. 21
2.2.2	Cadeia decorada longa	p. 25
2.3	A Teoria Binária	p. 32
3	Resultados	p. 37
3.1	Cadeia com 4 grãos	p. 37
3.2	Cadeia decorada curta com N grãos entre os maiores	p. 46
3.3	Cadeia decorada longa com N grãos pequenos entre os grandes	p. 53
4	Conclusões e Perspectivas	p. 59
	Referências Bibliográficas	p. 62

Lista de Figuras

- 2.1 Perfil do deslocamento em uma cadeia com três grãos. Linhas sólidas: deslocamentos dos três grãos e função do tempo. Linha tracejada: deslocamento médio do grão pequeno com raio $r = 0.3$ p. 24
- 2.2 Perfil da velocidade dos três grãos (curvas contínuas) obtidas a partir da solução exata das equações de movimento. O menor grão possui $r = 0.3$. As linhas tracejadas representam os resultados da dinâmica efetiva p. 24
- 2.3 Soluções exatas (linhas sólidas) para o perfil de velocidades dos grãos maiores em uma cadeia decorada simples para $r = 0.3$. A linha tracejada mostra o resultado a partir das equações da dinâmica efetiva p. 31
- 2.4 Tempo t dado para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada simples para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultados teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), linhas tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), linhas pontilhadas ($r = 0.3$) e linhas contínuas ($r = 0.4$). p. 35
- 2.5 Os pontos representam os resultados numéricos da frequência angular média do grão pequeno. A linha sólida representa o resultado teórico obtido através da Teoria Binária. p. 36
- 3.1 Perfil do deslocamento dos 4 grãos (curvas contínuas) obtidas a partir da solução exata das equações de movimento. O menor grão possui $r = 0.3$. As linhas tracejadas representam o movimento médio do grão k e $k+1$, equações (3.16) e (3.17), respectivamente. p. 42
- 3.2 Perfil de velocidades de uma cadeia composta de quatro grãos com dois grãos pequenos entre os maiores. Linhas contínuas representam os resultados numéricos da dinâmica exata. Os dois grãos menores, com $r = 0.3$, oscilam entre os maiores. As linhas tracejadas representam resultados obtidos a partir da dinâmica efetiva p. 42

- 3.3 Perfil do deslocamento dos grãos maiores e do centro de massa da cadeia formada apenas pelos dois grãos pequenos (linhas contínuas). A linha tracejada representa o movimento médio do centro de massa eq. (3.45). p. 45
- 3.4 Frequência de oscilação do centro de massa da cadeia formada apenas pelos dois grãos pequenos. Os círculos cheios representam os resultados numéricos e a linha contínua representa o resultado teórico dado pela eq. (3.44). O raio dos grãos pequenos é $r = 0.3$ p. 45
- 3.5 Perfil do deslocamento para uma cadeia decorada curta, composta de 5 grãos, sendo 3 grãos pequenos entre maiores que estão na extremidade da cadeia. Os grãos menores possuem raio $r = 0.3$. As linhas tracejadas representam os movimentos médios dos menores grãos obtidas analiticamente. As linhas contínuas representam os dados numéricos. p. 53
- 3.6 Perfil das velocidades para uma cadeia composta de 5 grãos (linhas contínuas) obtidas a partir da solução numérica da cadeia original. Os grãos menores têm raio $r = 0.2$, e oscilam entre os maiores. As linhas pontilhadas representam os resultado da dinâmica efetiva. p. 53
- 3.7 Perfil de velocidades para os grãos grandes da cadeia longa com dois grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa o movimento dos grãos da cadeia efetiva. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$ p. 55
- 3.8 Perfil de velocidades para uma cadeia decorada longa com três grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa a velocidade dos grãos da cadeia efetiva não decorada. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$ p. 55
- 3.9 Perfil de velocidades para uma cadeia decorada longa com cinco grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa a velocidade dos grãos da cadeia efetiva. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$ p. 55
- 3.10 Perfil de velocidades para uma cadeia decorada longa com sete grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa a velocidade dos grãos da cadeia efetiva. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$ p. 56
- 3.11 Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com dois grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$). p. 57

- 3.12 Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com três grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$). p. 57
- 3.13 Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com cinco grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$). p. 57
- 3.14 Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com sete grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$). p. 57
- 3.15 Velocidade do pulso em função de N . As linhas representam os dados analíticos enquanto que os pontos os resultados numéricos. p. 58

1 Introdução

Materiais granulares estão presentes em grande parte das atividades humanas, tendo uma grande importância em vários setores industriais com aplicação em mineração, construções, produções de alimentos, medicamentos, agroindústrias entre outros [1]. Além de ter importância em muitos fenômenos ambientais como dunas, fluxos de avalanches, erosão, deslizamentos de terra e deslocamento de placas tectônicas [2, 3, 4]. Mesmo tendo grande importância industrial e tecnológica, o seu manuseio é pouco desenvolvido e há uma estimativa que aproximadamente 40% da capacidade de algumas fábricas é desperdiçada devido a problemas no transporte desses materiais [5, 6, 7].

Os materiais granulares se caracterizam por possuírem um grande número de partículas macroscópicas não coesivas que interagem repulsivamente, com fronteiras bem definidas, tendo a gravidade um papel importante em algumas situações [8], o que não é o caso do sistema que estamos estudando, devido às partículas estarem dispostas em um plano horizontal. Estes sistemas possuem duas características importantes: a não influência da temperatura e a interação entre os grãos é dissipativa, devido ao atrito estático e colisões inelásticas [7]. Exemplos de materiais granulares são grãos em geral, areia, adubos, pregos, vidros, farinha, sementes, vidros etc.

Outra característica dos sistemas granulares é que eles podem apresentar características de sólidos e fluidos. Por exemplo, uma pilha de areia com uma inclinação menor que o ângulo de repouso apresenta características de “sólido”, o material permanece em repouso mesmo sujeito a tensões em sua superfície. Caso a pilha de grãos esteja inclinada com um ângulo maior que o ângulo de repouso os grãos superficiais irão fluir, no entanto, o centro da pilha continuará imóvel [3]. E quando os meios granulares estão sujeitos a uma vibração ocorre a fluidização do meio. Os grãos começam a adquirir velocidade e o meio se comporta como um gás. Um dos efeitos dessa fluidização é o Efeito Castanha do Pará, no qual os grãos de tamanhos maiores sobem para a superfície do meio fluidizado devido à agitação [3].

As interações entre as partículas deste meio são altamente não-lineares e só ocorrem quando

os grãos estão em contato. Logo, um tratamento analítico dos problemas envolvendo meios granulares geralmente se dá através de aproximações que são comparadas a resultados numéricos e experimentais. Esses sistemas podem ser usados para a proteção contra impactos, que é observado através das barreiras de proteção compostas de areia em pistas de corrida, dispositivos contra colisões em postes de energia elétrica etc.

Aqui nós estamos interessados na propagação de pulsos em um tipo bem específico de sistema granular: cadeias granulares. Esses sistemas são alinhamentos unidimensionais de grãos. Recentemente esses sistemas têm sido objetos de inúmeros estudos, se tornando uma área muito ativa. Um dos pioneiros no estudo de cadeias granulares, tanto teórico quanto experimental, foi V. F. Nesterenko que mostrou que um pulso iniciado em uma extremidade de uma cadeia granular de grãos idênticos, sem pré-compressão e sob ação apenas de forças repulsivas, pode resultar em uma onda solitária se propagando através do meio [9, 10, 11]. Esses primeiros trabalhos também chegaram a ressaltar o caráter não-linear do meio. Desde então, este sistema tem sido objeto de estudo com inúmeras variações. Também vale ressaltar, que é inegável que o avanço computacional tenha contribuído significativamente para o avanço desta linha de pesquisa.

Como dito anteriormente, esta área se tornou muito ativa, então, a seguir iremos relatar alguns dos avanços realizados nesta linha de pesquisa.

Começaremos falando das cadeias que apresentam polidispersividade. Nestas cadeias os grãos possuem massa e/ou raio distintos, podendo ter a capacidade de atenuar ondas de choque. Diante disso, busca-se cada vez mais desenvolver materiais granulares que possam ser usados para absorver impactos. Com esse propósito, Hong [12] mostrou que a energia poderia ser temporariamente confinada em uma determinada região de um meio granular, a qual chamou de “recipiente granular”, desempenhando um papel de protetor granular. Ele mostrou experimentalmente que após a energia ser confinada, ela poderia ser liberada pouco a pouco na forma de ondas solitárias.

Em [13] os autores mostraram que uma cadeia granular onde os grãos vão diminuindo de tamanho ao longo da cadeia, pode absorver boa parte da energia e força de um pulso incidente. Em um outro estudo [14], usando o mesmo tipo de cadeia e cadeias decoradas os autores mostraram, fazendo uso de gráficos de energia cinética normalizada (razão entre a energia transmitida e a que entra no sistema), resultados semelhantes porém agora para cadeias mais curtas. Eles concluíram que a maior absorção de energia ocorre em cadeias afiladas.

Novamente, cadeias afiladas foram estudadas em [15]. Porém, desta vez foram apresentados estudos analíticos e numéricos do problema para cadeias colocadas entre duas paredes. Os resultados indicaram que as relações entre as energias cinéticas do menor para o maior grão

possuem uma dependência gaussiana no afilamento, enquanto apresentam um decaimento exponencial em relação ao número de grãos da cadeia. Um estudo experimental realizado em [16] mostrou resultados para a propagação do momento linear em cadeias granulares afiladas para frente. Foi visto que a amplitude do pulso de momento linear diminui e que ocorre uma aceleração da onda de choque durante a propagação. Em [17], os autores estudaram cadeias afiladas e decoradas, agora com a cadeia sendo composta por grãos de materiais diferentes e, novamente, os resultados mostraram a capacidade destas cadeias de serem absorvedoras de impactos.

Cadeias granulares com atrito também têm sido estudadas, onde foram apresentadas teorias analíticas para a propagação de pulsos em cadeias com grãos esféricos e cilíndricos [18]. O principal efeito do atrito em cadeias com grãos cilíndricos é um decaimento exponencial global da velocidade. Também notou-se que a velocidade dos grãos ricocheteados é maior no caso sem atrito. Para grãos esféricos, a velocidade do pulso é menor, em relação a cadeia com grãos cilíndricos, e os grãos não são recocheteados, a não ser os primeiros. A energia, para o caso de grãos esféricos, também mostrou decaimento exponencial.

A viscosidade também foi inserida nas cadeias em alguns estudos. Em [19, 20, 21, 22] um termo dissipativo dependente da velocidade relativa entre os grãos foi inserido para estudar sua influência no pulso. Em todos estes estudos foi observado a atenuação do pulso.

Outra pesquisa [23], mostrou que em uma colisão de duas ondas solitárias em uma cadeia granular, são formadas ondas secundárias que carregam cerca de 5% da energia do pulso inicial. Também foi observado que depois da colisão destas ondas, parte da energia permanece no local da colisão. Em seguida ela começa a se propagar em outras direções gerando ondas secundárias. Outros autores [24] estudaram a reflexão de uma onda solitária em uma parede, e mostraram que a principal característica de reflexão depende de propriedades da parede.

Em uma outra investigação [25], resultados da relação entre o comprimento da onda solitária e a lei de interação. Também foi estudado o cruzamento de dois sólitons iniciados nas extremidades opostas de uma cadeia granular. Os mesmo autores, em um outro trabalho [26], estudaram a interação de uma onda incidente com uma impureza. Eles observaram impurezas com massas menores e com massas maiores, em relação aos outros grãos da cadeia, postas bem no meio da cadeia. Os autores verificaram que a massa leve produz ondas secundárias, enquanto que a massa pesada gera pulsos de reflexão. Resultados semelhantes foram encontrados em [27]. Interações de ondas solitárias com impurezas menores também foram estudadas em [28] e [29]. Em ambos os trabalhos, foram observadas a localização da energia mecânica nas impurezas e as oscilações das mesmas, enquanto elas interagem com a onda solitária.

Em outros estudos, foi observada a propagação de pulsos em cadeias granulares com formatos até então pouco estudados. Em [30] foram estudadas cadeias com bifurcações em forma de Y . Observou-se a decomposição de ondas solitárias em um trem de aproximadamente 4 ou 5 pulsos separados. Os autores encontraram boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais, exceto para o caso em que a bifurcação não era simétrica, ou seja, a cadeia apresentava bifurcações com ângulos diferentes. Os mesmos autores, em um outro trabalho [31], estudaram cadeias com bifurcações assimétricas e que eram compostas de grãos de diferentes materiais. Eles observaram que cadeias com bifurcações assimétricas possuem a habilidade de redirecionar as ondas ao longo de diversas direções. Isso poderia ser usado em sistemas de proteção de impactos, além de sistemas para a colheita de energia. E, em [32] foi estudada a propagação de pulsos em cadeias granulares curvadas. Neste trabalho os autores observaram que a eficiência da transmissão do pulso poderia ser caracterizada pela curvatura do sistema.

Por fim, para encerrar a revisão sobre os avanços das pesquisas em sistemas granulares, iremos falar a respeito das teorias analíticas que são implementadas para estudar estes sistemas.

Em alguns estudos [13, 14, 15] foram introduzidas aproximações de esferas duras, usando a conservação do momento linear e da energia para estudar a dinâmica da cadeia. A principal característica dessa aproximação é que o potencial de interação é infinito, fazendo com que o momento e a energia sejam transferidos instantaneamente. Porém, devido a este potencial, as soluções quando comparadas com resultados numéricos não mostram bom acordo.

Outra aproximação que tem sido implementada em sistemas granulares é a aproximação contínua, que teve muito sucesso quando aplicadas a cadeias monodispersas [9, 11, 18, 33]. Mas quando se trata de cadeias com polidispersividade encontramos poucos resultados analíticos. Com o intuito de mudar tal situação, foram obtidas a velocidade e outras características do pulso através do uso da aproximação binária para cadeias afiladas [34]. A aproximação binária caracteriza-se pelo fato de o potencial ser macio (potencial de Hertz), fazendo com que o pulso leve um certo tempo para se propagar. O que a diferencia da aproximação de esferas duras, que como citado anteriormente, a transmissão do pulso se dá de maneira instântanea, devido ao potencial ser infinito. A Teoria Binária se baseia no fato de que o pulso é transmitido através de colisões de dois em dois grãos. Essa teoria utiliza-se da conservação do momento linear e da energia para estimar algumas características do pulso como: o tempo de residência do pulso em cada grão, o tempo total de propagação do pulso, além da amplitude de velocidade do pulso. As grandezas temporais são obtidas com bastante sucesso por essa teoria, enquanto que as grandezas cinéticas não. Isso se deve ao fato da presença de uma terceira partícula desempenhar um papel importante na propagação do pulso. Este fato não é levado em consideração, causando

o não ajuste da velocidade.

Em cadeias que apresentam polidispersividade, a Teoria Binária foi introduzida em cadeias decoradas. Em [35], principal referência desta dissertação, os autores estudaram a propagação do pulso em uma cadeia granular decorada, onde cada par de grão grande na cadeia era separado por um grão pequeno, cadeia decorada simples. Analiticamente, os autores capturaram o efeito dos menores grãos substituindo a cadeia decorada por uma cadeia não decorada efetiva, com massas efetivas e uma interação efetiva entre os grãos. Similarmente, no mesmo trabalho, os autores estudaram cadeias decoradas afiladas. E, em um trabalho posterior [36], os mesmos autores analisaram a propagação do pulso em uma cadeia decorada, na qual o tamanho dos grãos pequenos era determinado de maneira aleatória.

Neste trabalho, iremos prosseguir do mesmo modo que em [35], ou seja, substituir a cadeia original por uma cadeia efetiva com massas e interações efetivas entre os grãos, para determinar as propriedades da propagação de um pulso em uma cadeia decorada, agora com um número qualquer de grãos pequenos entre os grãos maiores, de maneira a generalizarmos os resultados obtidos na referência principal desta dissertação.

Desta maneira, esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, iremos apresentar o modelo de cadeias granulares, a Teoria Binária e o método analítico usado para a generalização de uma cadeia decorada com um número qualquer de grãos pequenos entre os maiores. No capítulo 3, iremos apresentar os resultados e suas interpretações obtidos com a análise proposta. E no capítulo final, 4, iremos apresentar nossas conclusões e perspectivas futuras.

2 *Fundamentação Teórica*

Neste capítulo serão discutidos o modelo e a Teoria Binária. Com isso, dividimos este capítulo em 3 seções. Na primeira seção será explicado o modelo de cadeias granulares e como elas se classificam, além das condições iniciais do sistema. Na referência principal desta dissertação [35], os autores estudaram a propagação do pulso em uma cadeia decorada simples (um grão pequeno entre os grandes) através de uma cadeia efetiva, o que será revisto na segunda seção. Na terceira seção, iremos apresentar a Teoria Binária para o estudo da propagação do pulso em uma cadeia granular e adequá-la a cadeia efetiva.

A teoria analítica, Teoria Binária, se baseia no fato de que o pulso de velocidade é frequentemente estreito e bem localizado. Diante disso, utilizamos uma aproximação via colisões de dois em dois grãos, através da qual encontramos expressões analíticas para as quantidades que caracterizam o pulso. Esta teoria já foi introduzida anteriormente em [33] e usada nas referências [34, 35, 36, 37].

2.1 Modelo

Consideramos cadeias de grãos, que colidem elasticamente, todos feitos do mesmo material, ou seja, as propriedades elásticas e a densidade (ρ) são constantes. Quando os grãos colidem, eles repelem um ao outro de acordo com o potencial

$$V = \frac{a}{n} r'_k |y_k - y_{k+1}|^n, \quad (2.1)$$

onde y_k é o deslocamento do grão k a partir da sua posição no início da colisão e a é uma constante determinada pelo módulo de Young e pela razão de Poisson [38, 39]. O expoente n é $\frac{5}{2}$ para grãos esféricos (que são considerados nesta dissertação), segundo o potencial de Hertz [39]. E

$$r'_k = \left(\frac{2R'_k R'_{k+1}}{R'_k + R'_{k+1}} \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

onde R'_k é o raio principal de curvatura do grão k no ponto de contato. Destacamos que o potencial de interação descrito acima, eq. (2.1), é para grãos secos. Pois, em materiais granulares molhados não existirá somente forças repulsivas. Existirão também forças de coesão para curtas distâncias, devido a uma fina camada de fluido que os envolve. Com isso, os grãos serão forçados a manterem o contato entre eles [40].

A equação de movimento do k -ésimo grão é

$$M_k \frac{d^2 y_k}{d\tau^2} = ar'_{k-1} (y_{k-1} - y_k)^{3/2} \theta(y_{k-1} - y_k) - ar'_k (y_k - y_{k+1})^{3/2} \theta(y_k - y_{k+1}), \quad (2.3)$$

onde $M_k = (4/3)\pi\rho(R'_k)^3$, desde que os grãos sejam esféricos. A função de Heaviside $\theta(y)$ garante que a interação elástica entre os grãos exista somente quando eles estão em contato. Inicialmente os grãos estão dispostos ao longo de uma linha, de modo que eles somente tocam seus vizinhos na sua posição de equilíbrio, não existindo portanto, pré-compressão, e todos os grãos exceto o mais a esquerda na cadeia estão em repouso.

Por conveniência, reescala-se a posição de equilíbrio (y_k), o tempo (τ), massa (M_k) e o raio de curvatura (R'_k) através da seguinte constante adimensional

$$\alpha \equiv \left[\frac{M_1 V_1^2}{a(R'_1)^3} \right], \quad (2.4)$$

e das relações que seguem

$$y_k = R'_1 \alpha^{2/5} x_k, \quad (2.5)$$

$$\tau = \frac{R'_1}{V_1} \alpha^{2/5} t, \quad (2.6)$$

$$R'_k = R'_1 R_k, \quad (2.7)$$

$$M_k = M_1 m_k. \quad (2.8)$$

Com isso, tornamos todas as grandezas adimensionais e a eq. (2.3) pode ser reescrita como

$$m_k \ddot{x}_k = r_{k-1} (x_{k-1} - x_k)^{3/2} \theta(x_{k-1} - x_k) - r_k (x_k - x_{k+1})^{3/2} \theta(x_k - x_{k+1}), \quad (2.9)$$

onde os pontos são derivadas com respeito ao tempo t e

$$r_k = \left(\frac{2R_k R_{k+1}}{R_k + R_{k+1}} \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

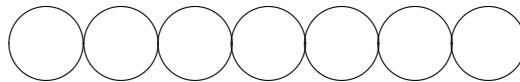
A reescala proposta também faz com que a velocidade inicial reescalada da partícula mais a esquerda da cadeia seja unitária. Desse modo, não particularizamos os resultados obtidos a

nenhum material específico. Assim, queremos salientar que a dinâmica da cadeia não depende das propriedades elásticas dos grãos. Estas propriedades tornam os pulso mais rápido ou mais lento, porém, seu comportamento qualitativo segue inalterado, desde que o modelo conservativo proposto seja uma boa aproximação.

2.2 Cadeia decorada e dinâmica efetiva

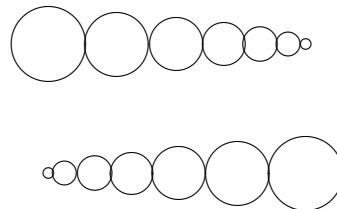
Aqui iremos caracterizar as cadeias granulares, com destaque para o tipo de cadeia estudado nesta dissertação (cadeia decorada). Em seguida, iremos reproduzir os cálculos da referência principal da dissertação, para depois implementar a nossa metodologia.

Como dito anteriormente, cadeias granulares são alinhamentos de grãos, e podem ser monodispersas ou polidispersas. Nas cadeias monodispersas todos os grãos possuem a mesma massa e raio;

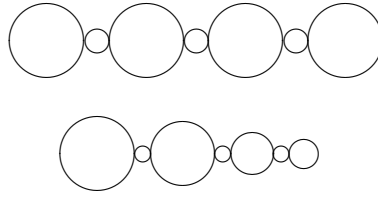


Já as cadeias que apresentam polidispersividade são caracterizadas pelo fato de que grãos que compõem a cadeia não possuem a mesma massa e/ou raio. Dentre as cadeias polidispersas, podemos destacar:

- Cadeias afiladas: as cadeias afiladas são caracterizadas pela diminuição do tamanho dos grãos ao longo da cadeia (afilada para frente) ou pelo aumento do tamanho dos grãos ao longo da cadeia (afilada para trás). Este afilamento pode ser linear, exponencial, obedecer uma outra regra de afilamento ou até nem possuir uma regra específica;



- Cadeias decoradas: estas cadeias se caracterizam pelo fato de “decorarmos” a cadeia com um ou mais grãos diferentes, ou seja, coloca-se um grão de tamanho diferente entre os outros grãos. Ainda podemos ter uma cadeia decorada afilada, onde os grãos maiores vão diminuindo ou aumentando de tamanho ao longo da cadeia, enquanto os grãos que decoram a cadeia continuam do mesmo tamanho.



Em [35] os autores estudaram a propagação do pulso através da substituição de uma cadeia decorada por uma cadeia efetiva. Isso foi motivado pelo fato de que um elemento essencial do sucesso da Teoria Binária (que seria utilizada por eles em seguida) é que um dado par de grãos colide apenas uma vez. Logo a Teoria Binária não poderia ser aplicada à cadeia decorada diretamente. Então através da cadeia efetiva eles determinaram uma interação efetiva entre os grãos e uma massa efetiva para os grãos que compõem a cadeia. Primeiramente, eles analisaram uma cadeia curta formada apenas por três grãos na seguinte sequência: grande-pequeno-grande. Eles notaram que no processo de transferência de energia entre os grãos, o menor grão executava oscilações de pequenas amplitudes entre os grãos maiores e encontraram uma expressão para determinar essas oscilações. Em seguida eles analisaram uma cadeia longa composta de cinco grãos na seguinte sequência: grande-pequeno-grande-pequeno-grande. A principal razão para analisar uma cadeia maior era que quando eles fossem analisar cadeias decoradas afiladas as massas renormalizadas poderiam ter valores diferentes dependendo da direção de afilamento. Os detalhes dessas análise serão mostrados a seguir.

2.2.1 Cadeia com 3 grãos

Em [35] os autores, primeiramente, consideraram uma cadeia composta por 3 grãos, denominados por $k-1$, k e $k+1$. Esta análise irá dizer algo sobre a frequência de oscilação do menor grão (grão k). Usando a eq. (2.9), a dinâmica da cadeia vai ser dada pelas equações

$$\ddot{x}_{k-1} = -\mathfrak{R}(x_{k-1} - x_k)^{3/2} \theta(x_{k-1} - x_k), \quad (2.11)$$

$$m\ddot{x}_k = \mathfrak{R}(x_{k-1} - x_k)^{3/2} \theta(x_{k-1} - x_k) - \mathfrak{R}(x_k - x_{k+1})^{3/2} \theta(x_k - x_{k+1}), \quad (2.12)$$

$$\ddot{x}_{k+1} = \mathfrak{R}(x_k - x_{k+1})^{3/2} \theta(x_k - x_{k+1}), \quad (2.13)$$

onde a massa dos grãos $k-1$ e $k+1$ é unitária e m é a massa do grão pequeno, nas variáveis adimensionais definidas nas equações (2.5)-(2.8). A constante \mathfrak{R} , dada pela eq. (2.10), é

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{2r}{1+r} \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

com r representado o raio do menor grão nas variáveis adimensionais definidas nas equações (2.5)-(2.8).

O processo de transferência de energia se dá quando o grão $k - 1$ colide com o grão k que por sua vez transfere energia para o grão $k + 1$. Como o grão k é pequeno, ele é comprimido entre os dois grãos maiores e oscila entre eles durante o processo de transferência de energia. A frequência dessas oscilações pode ser expressa em termos da força média que o grão k experimenta a partir do grão $k - 1$ e $k + 1$. Os autores seguiram Job *et al.* [28] e escreveram

$$x_k = \bar{x}_k(t) + A \sin(\omega t + \phi), \quad (2.15)$$

onde A , ω , e ϕ dependem da razão de tamanho entre os grãos grandes e pequeno, e também podem depender do tempo. Os autores assumiram que essa dependência do tempo é desprezível durante o processo de transferência de energia do grão $k - 1$ para o grão $k + 1$. O primeiro termo \bar{x}_k representa o movimento médio em torno do qual a partícula executa oscilações de pequena amplitude A com frequência ω . Substituindo a eq. (2.15) na eq. (2.12) e omitindo a função de Heaviside $\theta(y)$, encontraremos

$$m [\ddot{x}_k - A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)] = \Re [x_{k-1} - \bar{x}_k - A \sin(\omega t + \phi)]^{3/2} - \Re [\bar{x}_k + A \sin(\omega t + \phi) - x_{k+1}]^{3/2}.$$

$$m [\ddot{x}_k - A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)] = \Re (x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} \left[1 - \frac{A \sin(\omega t + \phi)}{x_{k-1} - \bar{x}_k} \right]^{3/2} - \Re (\bar{x}_k - x_{k+1})^{3/2} \left[1 + \frac{A \sin(\omega t + \phi)}{\bar{x}_k - x_{k+1}} \right]^{3/2}.$$

Assumindo que a amplitude A é muito menor que $\bar{x}_k - x_{k+1}$ e $x_{k-1} - \bar{x}_k$, obtêm-se

$$m\ddot{x}_k \approx \Re (x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} - \Re (\bar{x}_k - x_{k+1})^{3/2}, \quad (2.16)$$

e

$$m\omega^2 \approx \frac{3}{2} \Re \left[(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{1/2} + (\bar{x}_k - x_{k+1})^{1/2} \right]. \quad (2.17)$$

O grão pequeno oscila com máxima frequência em torno da posição de “equilíbrio”, definida como a posição na qual a força \bar{F} obtida usando o deslocamento médio do menor grão, anula-se mutuamente dos dois lados, ou seja, quando $\ddot{x}_k = 0$. Assim, conforme a eq. (2.16)

$$\bar{F} = \Re (x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} = \Re (\bar{x}_k - x_{k+1})^{3/2}. \quad (2.18)$$

A partir da eq. (2.17)

$$\omega \approx \sqrt{\frac{3\Re}{2m}} \left[(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{1/2} + (\bar{x}_k - x_{k+1})^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (2.19)$$

Mas, a partir da eq. (2.18), temos que

$$x_{k-1} - \bar{x}_k = \left(\frac{\bar{F}}{\mathfrak{R}} \right)^{2/3}, \quad (2.20)$$

e

$$\bar{x}_k - x_{k+1} = \left(\frac{\bar{F}}{\mathfrak{R}} \right)^{2/3}. \quad (2.21)$$

Usando (2.20) e (2.21) em (2.19), obtêm-se que

$$\omega \approx \sqrt{\frac{3}{m}} \mathfrak{R}^{1/3} \bar{F}^{1/6}. \quad (2.22)$$

Assim, para a máxima frequência $f = \omega/2\pi$,

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{m}} \mathfrak{R}^{1/3} \bar{F}^{1/6}. \quad (2.23)$$

No momento em que o grão pequeno executa oscilações com a máxima frequência, tem-se que $\ddot{\bar{x}}_k = 0$. A partir da eq. (2.18) isso implica que

$$\bar{x}_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k+1}). \quad (2.24)$$

Também, a partir das equações (2.11), (2.12) e (2.13)

$$m\ddot{x}_k + \ddot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k+1} = 0. \quad (2.25)$$

A eq. (2.25) mostra que a força resultante no sistema é zero. Substituindo a eq. (2.15) na eq. (2.25), usando (2.24) e ignorando a parte oscilatória, encontra-se

$$\left(\frac{m}{2} + 1 \right) (\ddot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k+1}) = 0. \quad (2.26)$$

Esta equação descreve um sistema de duas partículas, cada uma com massa efetiva

$$\mu = 1 + \frac{m}{2}. \quad (2.27)$$

Substituindo a eq. (2.15) nas equações (2.11) e (2.13), usando (2.24), e ignorando a parte oscilatória obtém-se

$$\mu \ddot{x}_{k-1} \approx -\frac{\mathfrak{R}}{2^{3/2}} (x_{k-1} - x_{k+1})^{3/2}, \quad (2.28)$$

e

$$\mu \ddot{x}_{k+1} \approx \frac{\mathfrak{R}}{2^{3/2}} (x_{k-1} - x_{k+1})^{3/2}. \quad (2.29)$$

As equações (2.28) e (2.29) são as equações de movimento de cada grão efetiva na cadeia efetiva e definem um potencial de interação efetivo V_{ef} entre os grãos $k-1$ e $k+1$. Assim pode-se tratar o sistema de dois grãos idênticos decorados com um menor entre eles, como um sistema efetivo de dois grãos (agora denominados k e $k+1$) cada um com massa efetiva μ e interagindo através de um potencial efetivo dado por

$$V_{ef} = \frac{\mathfrak{R}}{5 \times 2^{1/2}} (x_k - x_{k+1})^{5/2}. \quad (2.30)$$

Assim, o efeito global de um grão intermediário é reduzir a forte interação entre os grãos x_{k-1} e x_{k+1} (na cadeia original) e aumentar suas massas. Salientamos também que como os autores mostraram, o tamanho dos menores grãos não pode ser maior que 40% dos grãos maiores.

Na figura (2.1) mostramos o movimento dos três grãos da cadeia original. A linha tracejada na figura se refere a eq. (2.24). Desta figura também notamos que a amplitude do movimento do menor grão é pequena, o que leva a desprezar os termos oscilatórios nas equações anteriores.

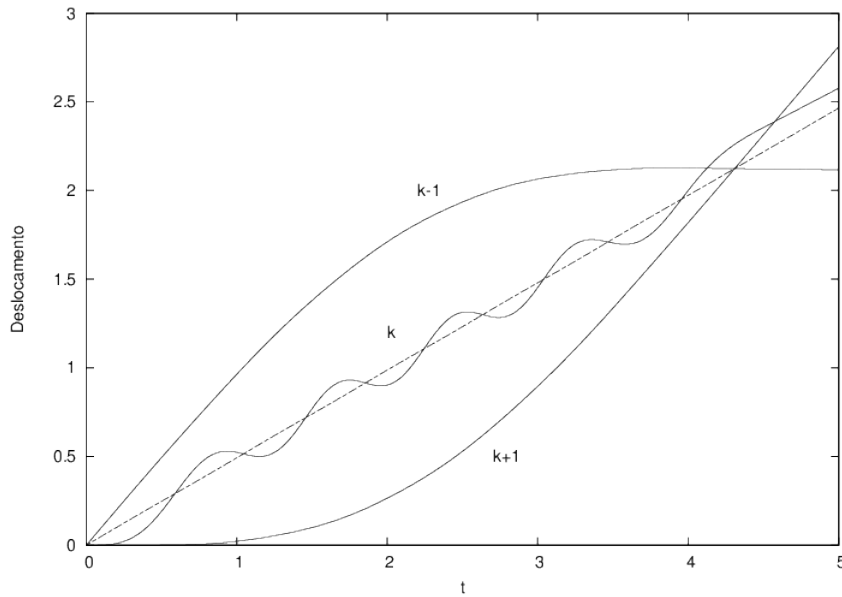


Figura 2.1: Perfil do deslocamento em uma cadeia com três grãos. Linhas sólidas: deslocamentos dos três grãos e função do tempo. Linha tracejada: deslocamento médio do grão pequeno com raio $r = 0.3$.

Na figura (2.2) mostramos o perfil de velocidades da cadeia composta por três grãos, onde um grão pequeno separa um par de grãos grandes. As linhas contínuas representam a solução numérica do problema. Note, como mencionado anteriormente, a oscilação do menor grão durante o processo de transferência de energia. As linhas tracejadas representam os resultados para a velocidade dos maiores grãos na cadeia efetiva. Percebemos que, a descrição efetiva captura bem as velocidades dos grãos maiores obtidas numericamente.



Figura 2.2: Perfil da velocidade dos três grãos (curvas contínuas) obtidas a partir da solução exata das equações de movimento. O menor grão possui $r = 0.3$. As linhas tracejadas representam os resultados da dinâmica efetiva

Na próxima seção, iremos reproduzir a análise feita pelos autores em [35], porém, agora para uma cadeia decorada simples maior, composta por cinco grãos. Esta análise irá mostrar a diferença entre as massas renormalizadas entre os grãos da borda e do interior da cadeia efetiva não decorada.

2.2.2 Cadeia decorada longa

Nesta seção iremos reproduzir os cálculos feitos em [35] para uma cadeia longa composta de cinco grãos, sendo três grandes e dois pequenos.

A análise feita na seção anterior diz algo a respeito da frequência de oscilação do menor grão. No entanto, esta análise não é útil quando se trata de cadeias decoradas afiladas. Agora, o menor grão é cercado por dois grãos de massas diferentes e com isso a massa efetiva terá valores diferentes dependendo da direção de afilamento (para frente ou para trás). Pode-se eliminar esta ambiguidade se considerarmos uma cadeia de cinco grãos centrada no grão k . Os grãos $k - 1$ e $k + 1$ são os grãos pequenos cada uma com raio r . O raio dos grãos maiores ($k - 2$, k e $k + 2$) é $R_i > r$. Além disso, esta análise é útil até mesmo para cadeia monodispersas, pois ela mostra naturalmente a diferença das massas do interior da cadeia e das massas dos grãos da borda.

Para uma cadeia com cinco grãos onde os grãos maiores são separados por um grão pequeno

a dinâmica é governada pelo conjunto de equações

$$m_{k-2}\ddot{x}_{k-2} = -r_{k-2}(x_{k-2} - x_{k-1})^{3/2} \quad (2.31)$$

$$m_i\ddot{x}_i = r_{i-1}(x_{i-1} - x_i)^{3/2} - r_i(x_i - x_{i+1})^{3/2} \quad (2.32)$$

para $i = k, k \pm 1$

$$m_{k+2}\ddot{x}_{k+2} = r_{k+1}(x_{k+1} - x_{k+2})^{3/2} \quad (2.33)$$

Novamente o movimento dos grãos pequenos é dado por uma parte média e uma parte oscilatória, eq. (2.15). Então, usando esta equação na equação (2.32), para $i = k - 1$, encontramos

$$m \left[\ddot{x}_{k-1} - A_{k-1} \omega_{k-1}^2 \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}) \right] = r_{k-2}(x_{k-2} - \bar{x}_{k-1} - A_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}))^{3/2} - r_{k-1}(\bar{x}_{k-1} + A_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}) - x_k)^{3/2}.$$

$$m \left[\ddot{x}_{k-1} - A_{k-1} \omega_{k-1}^2 \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}) \right] = r_{k-2}(x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{3/2} \left[1 - \frac{A_{k-1} \omega_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1})}{x_{k-2} - \bar{x}_{k-1}} \right]^{3/2} - r_{k-1}(\bar{x}_{k-1} - x_k)^{3/2} \left[1 + \frac{A_{k-1} \omega_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1})}{\bar{x}_{k-1} - x_k} \right]^{3/2}.$$

Assim como feito para a cadeia com apenas três grãos, vamos considerar que a amplitude A_{k-1} é muito menor que $x_{k-2} - \bar{x}_{k-1}$ e $\bar{x}_{k-1} - x_k$, encontramos

$$m_{k-1}\ddot{x}_{k-1} \approx r_{k-2}(x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{3/2} - r_{k-1}(\bar{x}_{k-1} - x_k)^{3/2}, \quad (2.34)$$

e

$$m_{k-1} \omega_{k-1}^2 \approx \frac{3}{2} \left[r_{k-2}(x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{1/2} - r_{k-1}(\bar{x}_{k-1} - x_k)^{1/2} \right]. \quad (2.35)$$

Novamente, assumimos que o grão $k - 1$ oscila com frequência máxima quando $\ddot{x}_{k-1} = 0$. Assim, a partir da eq. (2.34)

$$r_{k-2}(x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{3/2} = r_{k-1}(\bar{x}_{k-1} - x_k)^{3/2} = \bar{F}_1, \quad (2.36)$$

onde \bar{F}_1 representa a força que o menor grão recebe dos dois grãos no qual ele está em contato. A partir da equação (2.36), podemos escrever

$$x_{k-2} - \bar{x}_{k-1} = \left(\frac{\bar{F}_1}{r_{k-2}} \right)^{2/3}, \quad (2.37)$$

e

$$\bar{x}_{k-1} - x_k = \left(\frac{\bar{F}_1}{r_{k-1}} \right)^{2/3}. \quad (2.38)$$

Usando as equações (2.37) e (2.38) na eq. (2.35) encontramos

$$\omega_{k-1} \approx \sqrt{\frac{3}{2m}} \left[r_{k-2} \left(\frac{\bar{F}_1}{r_{k-2}} \right)^{1/3} + r_{k-1} \left(\frac{\bar{F}_1}{r_{k-1}} \right)^{1/3} \right]^{1/2} \quad (2.39)$$

Usando a eq. (2.39) em $f = \omega/2\pi$, encontramos para a máxima frequência do grãos $k-1$

$$f_{k-1} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2m}} \bar{F}_1^{1/6} \left[r_{k-2}^{2/3} + r_{k-1}^{2/3} \right]^{1/2}. \quad (2.40)$$

Também a partir da eq. (2.36) temos que

$$r_{k-2} (x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{3/2} = r_{k-1} (\bar{x}_{k-1} - x_k)^{3/2}, \quad (2.41)$$

a partir daí chegamos a

$$\bar{x}_{k-1} = \frac{x_{k-2} + x_k \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}}. \quad (2.42)$$

Voltando agora para a eq. (2.32), usando (2.15) para $i = k+1$, encontramos

$$m \left[\ddot{x}_{k-1} - A_{k-1} \omega_{k-1}^2 \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}) \right] = r_{k-2} (x_{k-2} - \bar{x}_{k-1} - A_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}))^{3/2} - r_{k-1} (\bar{x}_{k-1} + A_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1}) - x_k)^{3/2}.$$

$$\begin{aligned} m_{k+1} \left[\ddot{x}_{k+1} - A_{k+1} \omega_{k+1}^2 \sin(\omega_{k+1}t + \phi_{k+1}) \right] = \\ r_k (x_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} \left[1 - \frac{A_{k+1} \omega_{k+1} \sin(\omega_{k+1}t + \phi_{k+1})}{x_{k+1} - \bar{x}_{k+2}} \right]^{3/2} - \\ r_{k+1} (\bar{x}_{k+1} - x_k)^{3/2} \left[1 + \frac{A_{k+1} \omega_{k+1} \sin(\omega_{k+1}t + \phi_{k+1})}{\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}} \right]^{3/2}. \end{aligned}$$

Assim como feito anteriormente, assumimos que a amplitude A_{k+1} é muito menor do que $x_k - \bar{x}_{k+1}$ e $\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}$, chegamos a

$$m_{k+1} \ddot{x}_{k+1} \approx r_k (x_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} - r_{k+1} (\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}, \quad (2.43)$$

e

$$m_{k+1} \omega_{k+1}^2 \approx \frac{3}{2} \left[r_k (x_k - \bar{x}_{k+1})^{1/2} - r_{k+1} (\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{1/2} \right]. \quad (2.44)$$

E, novamente como feito antes, o menor grão oscila com máxima frequência quando sua aceleração é nula, ou seja, $\ddot{x}_{k+1} = 0$. Logo, a partir da eq. (2.43)

$$r_k (x_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} = r_{k+1} (\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2} = \bar{F}_2, \quad (2.45)$$

onde \bar{F}_2 representa a força que o grão $k + 1$ recebe dos seus grãos vizinhos. A partir da eq. (2.45) podemos escrever

$$x_k - \bar{x}_{k+1} = \left(\frac{\bar{F}_2}{r_k} \right)^{2/3}, \quad (2.46)$$

e

$$\bar{x}_{k+1} - x_{k+2} = \left(\frac{\bar{F}_2}{r_{k+1}} \right)^{2/3}. \quad (2.47)$$

Usando as equações (2.46) e (2.47) na eq. (2.44) encontramos

$$\omega_{k+1} \approx \sqrt{\frac{3}{2m}} \left[r_k \left(\frac{\bar{F}_2}{r_k} \right)^{1/3} + r_{k+1} \left(\frac{\bar{F}_2}{r_{k+1}} \right)^{1/3} \right]^{1/2} \quad (2.48)$$

Usando a eq. (2.48) em $f = \omega/2\pi$, encontramos para a máxima frequência do grãos $k + 1$

$$f_{k+1} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2m}} \bar{F}_2^{1/6} \left[r_k^{2/3} + r_{k+1}^{2/3} \right]^{1/2}. \quad (2.49)$$

Notamos que as equações (2.40) e (2.49) se reduzem a eq. (2.23) se a cadeia é monodispersa. A partir da eq. (2.45), também podemos escrever

$$r_k (x_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} = r_{k+1} (\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}, \quad (2.50)$$

a partir dai chegamos a

$$\bar{x}_{k+1} = \frac{x_k + x_{k+2} \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}}. \quad (2.51)$$

Podemos escrever as equações (2.42) e (2.51) de uma maneira mais compacta através da equação

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + \alpha_i x_{i+1}}{1 + \alpha_i}, \quad (2.52)$$

onde $i = k - 1, k + 1$ e

$$\alpha_i = \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right)^{2/3}. \quad (2.53)$$

A partir, das equações (2.31)-(2.33) temos que

$$m_{k-2} \ddot{x}_{k-2} + m \ddot{x}_{k-1} + m_k \ddot{x}_k + m \ddot{x}_{k+1} + m_{k+2} \ddot{x}_{k+2} = 0. \quad (2.54)$$

Usando a eq. (2.15) para os grãos $k - 1$ e $k + 1$, e desprezando a parte oscilatória, encontra-

mos

$$m_{k-2}\ddot{x}_{k-2} + m\ddot{\bar{x}}_{k-1} + m_k\ddot{x}_k + m\ddot{\bar{x}}_{k+1} + m_{k+2}\ddot{x}_{k+2} = 0. \quad (2.55)$$

Agora, usando as equações (2.42) e (2.51), encontraremos

$$(2.56) \quad \left[m_{k-2} + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}} \right] \ddot{x}_{k-2} + \left[\frac{m}{1 + \left(\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \right)^{2/3}} + m_k + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}} \right] \ddot{x}_k + \left[m_{k+2} + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{2/3}} \right] \ddot{x}_{k+2} = 0.$$

A equação acima, descreve uma sistema de três partículas, denominadas como a da “esquerda” (e), do “meio” (m) e da “direita” (d), com massas efetivas

$$\mu_e = m_{k-2} + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}}, \quad (2.57)$$

$$\mu_m = m_k + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \right)^{2/3}} + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}}, \quad (2.58)$$

e

$$\mu_d = m_{k+2} + \frac{m}{1 + \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{2/3}}. \quad (2.59)$$

Voltando para a eq. (2.31), com massa efetiva dada pela eq. (2.57), usando a eq. (2.15) para o grãos $k - 1$, encontramos

$$\mu_e = -r_{k-2} [x_{k-2} - \bar{x}_{k-1} - A_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1})]^{3/2}.$$

$$\mu_e = -r_{k-2} (x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{3/2} \left[1 - \frac{A_{k-1} \sin(\omega_{k-1}t + \phi_{k-1})}{x_{k-2} - \bar{x}_{k-1}} \right]^{3/2}.$$

Considerando que a amplitude A_{k-1} é muito menor do que $x_{k-2} - \bar{x}_{k-1}$, e desprezando a

parte oscilatória chegamos a

$$\mu_e \approx -r_{k-2} (x_{k-2} - \bar{x}_{k-1})^{3/2}. \quad (2.60)$$

Agora, substituindo a eq. (2.42) na eq. acima, encontramos

$$\mu_e x_{k-2} \approx -r_{k-2} \left[x_{k-2} - \frac{x_{k-2} + x_k \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}} \right]^{3/2},$$

que após algumas manipulações chegamos a

$$\mu_e \ddot{x}_{k-2} \approx - \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r_{k-2}} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{r_{k-1}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}} (x_{k-2} - x_k)^{3/2} \quad (2.61)$$

Agora voltando para a eq. (2.32), para $i = k$, usando a eq. (2.15), para o grão $k - 1$ e $k + 1$, encontraremos

$$\mu_m x_k = r_{k-1} (\bar{x}_{k-1} + A_{k-1} \sin(\omega_{k-1} t + \phi_{k-1}) - x_k)^{3/2} - r_k (x_k - \bar{x}_{k+1} - A_{k+1} \sin(\omega_{k+1} t + \phi_{k+1}))^{3/2}.$$

$$\begin{aligned} \mu_m \ddot{x}_k = & r_{k-1} (\bar{x}_{k-1} - x_k)^{3/2} \left[1 + \frac{A_{k-1} \sin(\omega_{k-1} t + \phi_{k-1})}{\bar{x}_{k-1} - x_k} \right]^{3/2} - \\ & r_k (x_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} \left[1 - \frac{A_{k+1} \sin(\omega_{k+1} t + \phi_{k+1})}{x_k - \bar{x}_{k+1}} \right]^{3/2}. \end{aligned}$$

Considerando que as amplitudes A_{k-1} e A_{k+1} são muito menores do que $\bar{x}_{k-1} - x_k$ e $x_k - \bar{x}_{k+1}$, respectivamente, e desprezando os termos oscilatórios, obtemos

$$\mu_m \ddot{x}_{k+2} \approx r_{k-1} (\bar{x}_{k-1} - x_k)^{3/2} - r_k (\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}. \quad (2.62)$$

Usando as equações (2.42) e (2.51) na expressão acima, iremos encontrar

$$\mu_m \ddot{x}_k \approx r_{k-1} \left[\frac{x_{k-2} + x_k \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} \right)^{2/3}} - x_k \right]^{3/2} - r_k \left[x_k - \frac{x_k + x_{k+2} \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}} \right]^{3/2},$$

que após algumas manipulações iremos chegar a

$$\mu_m \ddot{x}_k \approx \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r_{k-2}} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{r_{k-1}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}} (x_{k-2} - x_k)^{3/2} - \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r_k} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{r_{k+1}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}} (x_k - x_{k+2})^{3/2}. \quad (2.63)$$

E por fim, usando a eq. (2.15) para o grãos $k + 1$ na eq. (2.33), chegamos a

$$\begin{aligned} \mu_d \ddot{x}_{k+1} &= (\bar{x}_{k+1} + A_{k+1} \sin(\omega_{k+1} t + \phi_{k+1}) - x_{k-2})^{3/2}. \\ \mu_d \ddot{x}_{k+1} &= (x_{k+1} - x_{k+2})^{3/2} \left[1 + \frac{A_{k+1} \sin(\omega_{k+1} t + \phi_{k+1})}{x_{k+1} - x_{k+2}} \right]^{3/2}. \end{aligned}$$

Assumindo que a amplitude A_{k+1} é muito menor do que $\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}$ e desprezando os termos oscilatórios, encontramos

$$\mu_d \ddot{x}_{k+2} \approx r_{k+1} (\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}. \quad (2.64)$$

E, usando agora a eq. (2.51) na eq. acima, temos

$$\mu_d \ddot{x}_{k+2} \approx r_{k+1} \left[\frac{x_k + x_{k+2} \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{2/3}} - x_{k+2} \right]^{3/2},$$

que após fazermos algumas manipulações chegaremos a

$$\mu_d \ddot{x}_{k-2} \approx \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r_k} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{r_{k+1}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}} (x_k - x_{k+2})^{3/2}. \quad (2.65)$$

A interação efetiva entre os grãos pode ser determinada através das equações (2.61), (2.63) e (2.65), agora denominados por k e $k + 1$. Assim

$$V_{ef} = \frac{2}{5} \zeta (x_k - x_{k+1})^{5/2}. \quad (2.66)$$

onde

$$\zeta = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r_k} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{r_{k+1}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}}. \quad (2.67)$$

e onde r_k é agora dado por

$$r_k = \sqrt{\frac{2R_k r}{R_k + r}}, \quad (2.68)$$

na qual r representa o raio dos menores grãos.

A longa cadeia decorada pode agora ser representada por uma cadeia efetiva de grãos grandes. Note que a massa efetiva μ_m é modificada por dois grãos menores, um de cada lado, enquanto que as massas efetivas da borda da cadeia somente por um grão pequeno.

Na figura (2.3) mostramos o perfil de velocidades de uma cadeia decorada simples, ou seja, com apenas um grão pequeno entre os grandes. Os grãos pequenos têm raio $r = 0.3$. Na figura as linhas sólidas representam as velocidades dos grãos maiores obtidas através da solução numérica da cadeia decorada original. As linhas pontilhadas representam as velocidades dos grãos da cadeia efetiva não decorada. Através da descrição efetiva consegue-se capturar, com uma boa concordância, a velocidade dos grãos grandes na cadeia original. Nesta figura mostramos o perfil de velocidade em apenas um trecho da cadeia, porém, a concordância é encontrada em toda a cadeia.

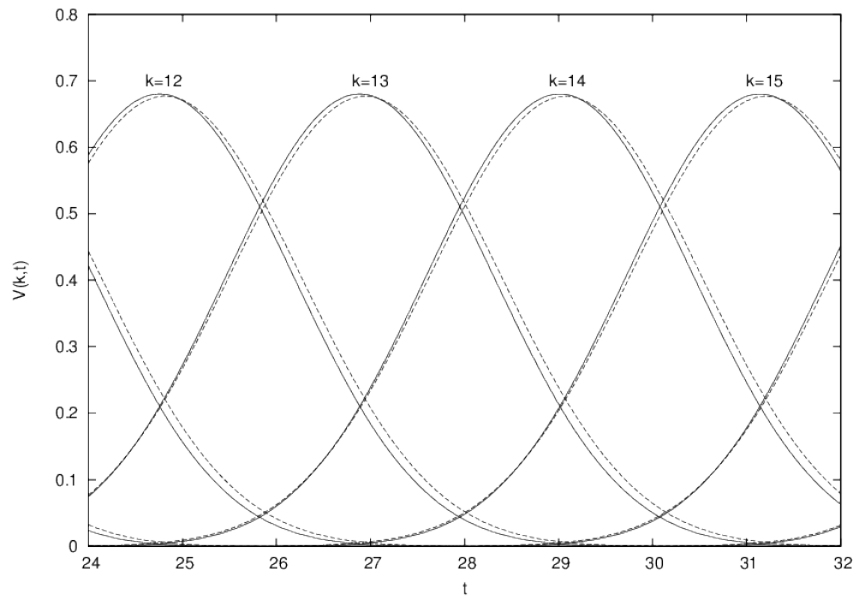


Figura 2.3: Soluções exatas (linhas sólidas) para o perfil de velocidades dos grãos maiores em uma cadeia decorada simples para $r = 0.3$. A linha tracejada mostra o resultado a partir das equações da dinâmica efetiva

Outro fato importante é que, como foi visto em [35], a descrição efetiva só dá bons resultados enquanto o raio dos menores grãos na cadeia decorada não for maior que aproximadamente 0.4. Eles chegaram a esta conclusão calculando a diferença percentual média na amplitude do pulso, em função do raio, a partir da dinâmica efetiva e da cadeia decorada original (que não foi

calculado nesta dissertação). A diferença percentual média foi calculada pegando a diferença percentual na amplitude do pulso para cada grão na cadeia, somando sobre todos os grãos e dividindo pelo número total de grãos na cadeia. Esta diferença permanecia abaixo de 1% enquanto o raio do menor grão em fosse $r = 0.4$, acima disso ela aumenta acentuadamente.

Queremos salientar que todos os gráficos até aqui mostrados foram retirados da referência principal desta dissertação, [35], aqui eles foram somente reproduzidos. A seguir iremos descrever a teoria analítica que iremos usar nesta dissertação.

2.3 A Teoria Binária

A Teoria Binária supõe que a propagação do pulso em uma cadeia granular ocorre através de colisões sucessivas de dois em dois grãos, e assim são transferidos o momento linear e a energia ao longo da cadeia. Ou seja, primeiro a partícula $k = 1$, que possui velocidade unitária, colide com a partícula $k = 2$, inicialmente em repouso, que adquire uma velocidade v_2 . Em seguida a partícula $k = 2$ colide com a partícula $k = 3$ e assim sucessivamente. Destacamos que após a partícula $k - 1$ colidir com a partícula k , a velocidade final do grão k será a velocidade inicial com que esta partícula irá colidir com $k + 1$. Também destacamos que, como mencionamos anteriormente, a Teoria Binária se caracteriza pelo fato de o potencial de interação ser macio (potencial de Hertz), fazendo com que o pulso leve um certo tempo para se propagar. Com isso uma grandeza de interesse é o tempo de residência do pulso em um grão, de onde podemos obter o tempo de propagação do pulso ao longo da cadeia.

Com essas velocidades em mãos, vários parâmetros da dinâmica da cadeia podem ser obtidos, por exemplo: tempo de propagação do pulso, a variação da amplitude do pulso de velocidade ao longo da cadeia etc. Destacamos também que conforme descrito anteriormente, os grãos inicialmente apenas se tocam. Se a cadeia estivesse disposta de modo que inicialmente houvesse espaços entre os grãos a propagação do pulso seria exatamente como na aproximação binária, assim, representando perfeitamente o modelo.

Usando as leis de conservação da energia e do momento linear, temos que após o grão k colidir com o grão $k + 1$ o último emergirá com velocidade

$$v_{k+1} = \frac{2v_k}{1 + \frac{m_{k+1}}{m_k}}. \quad (2.69)$$

Levando em conta as sucessivas colisões anteriores a equação (2.69) pode ser calculada

recursivamente para obtermos

$$v_k = \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{2}{1 + \frac{m_{k'+1}}{m_{k'}}}. \quad (2.70)$$

Conforme mencionado a pouco, um parâmetro de interesse é o tempo que o pulso leva para chegar ao grão k , ou simplesmente, o tempo de propagação do pulso. Para essa análise, introduzimos a variável

$$z_k = x_k - x_{k+1}, \quad (2.71)$$

que representa a compressão radial entre dois grãos consecutivos. Desta maneira, utilizamos a equação (2.9) para escrever a equação de movimento segundo esta nova variável e a teoria binária como

$$\ddot{x}_k = -\frac{r_{k-1}}{m_k} (x_k - x_{k+1})^{3/2}, \quad (2.72)$$

$$\ddot{x}_{k+1} = \frac{r_k}{m_{k+1}} (x_k - x_{k+1})^{3/2}, \quad (2.73)$$

e encontramos

$$\mu_k \ddot{z}_k = -r_k z_k^{3/2}. \quad (2.74)$$

Aqui, $\mu_k = \frac{m_k m_{k+1}}{m_k + m_{k+1}}$ é a massa reduzida. A equação (2.74) é a equação de movimento de uma partícula de massa μ_k sob a ação do potencial $\left(\frac{2r_k}{5}\right) z_k^{5/2}$, onde $z_k \geq 0$. Assim, a condição inicial $\dot{z}_k(0)$ é simplesmente v_k desde que o grão $k+1$ esteja em repouso antes da colisão. Logo, podemos reescrever a equação (2.70) como

$$\dot{z}_k(0) = \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{2}{1 + \frac{\mu_{k'+1}}{\mu_{k'}}}. \quad (2.75)$$

Esta expressão é a velocidade inicial da partícula com massa μ_k , ou seja, a velocidade final da partícula original $k+1$ após a partícula k colidir com ela. É importante frisar que calculamos intervalos de tempo, assim, o tempo é reiniciado a cada colisão. A conservação de energia nos dá, desde que a compressão inicial seja nula, que

$$\frac{1}{2} \dot{z}_k^2(t) + \left(\frac{2r_k}{5}\right) z_k^{5/2} = \frac{1}{2} \dot{z}_k^2(0), \quad (2.76)$$

da qual obtemos

$$\dot{z}_k(t) = \left[\dot{z}_k^2(0) - \left(\frac{4r_k}{5\mu_k} z_k^{5/2}\right) \right]^{1/2}. \quad (2.77)$$

Dizemos que o pulso chega no grão k quando sua velocidade ultrapassa a do grão $k-1$, e

chega no grão $k + 1$ quando sua velocidade ultrapassa a do grão k . Desta maneira, o tempo de residência do pulso em um determinado grão da cadeia, T_k , é o tempo que este grão leva para transferir o pulso para o grão seguinte, e é dado por

$$T_k = \int_0^{z_k^{max}} \frac{dz_k}{\dot{z}_k} = \int_0^{z_k^{max}} \frac{dz_k}{\left[\dot{z}_k^2(0) - \left(\frac{4r_k}{5\mu_k} \right) z_k^{5/2} \right]^{1/2}}. \quad (2.78)$$

onde z_k^{max} é a compressão quando as velocidades das partículas k e $k + 1$ são iguais, isto é, quando a velocidade relativa é nula. Desse modo, z_k^{max} também é a compressão máxima e da eq. (2.77) obtemos

$$z_k^{max} = \left(\frac{5\mu}{4r_k} \dot{z}_k^2(0) \right)^{2/5}. \quad (2.79)$$

A integral pode ser resolvida exatamente para se obter

$$T_k = \sqrt{\pi} \left(\frac{5\mu_k}{4r_k} \right)^{2/5} [\dot{z}_k(0)]^{-1/5} \frac{\Gamma(7/5)}{\Gamma(9/10)}. \quad (2.80)$$

Por fim, o tempo total para que o pulso chegue ao k -ésimo grão é

$$t = \sum_{k'=1}^k T_{k'}. \quad (2.81)$$

Para cadeias monodispersas, temos que $\mu = \frac{1}{2}$, $r_k = 1$ e $\dot{z}_k(0) = 1$, e a eq. (2.80) torna-se

$$T_k = \sqrt{\pi} \left(\frac{5}{8} \right)^{2/5} \frac{\Gamma(7/5)}{\Gamma(9/10)}. \quad (2.82)$$

Este resultado foi previamente obtido em [33].

Quando analisamos uma cadeia decorada longa e a substituímos por uma cadeia efetiva, notamos que há uma diferença nas massas renormalizadas entre os grãos do meio e os grãos da borda da cadeia efetiva. Também a constante r_k era modificada, e então passou a ser dada pela eq. (2.67). Isso levará a algumas mudanças nas equações onde apresentamos a Teoria Binária. E assim, iremos substituir r_k por ζ , e também a massa reduzida será entre as massas renormalizadas da cadeia efetiva, que chamaremos de η . Logo, a eq. (2.81) fica

$$T_k = \sqrt{\pi} \left(\frac{5\eta_k}{4\zeta_k} \right)^{2/5} [\dot{z}_k(0)]^{-1/5} \frac{\Gamma(7/5)}{\Gamma(9/10)}. \quad (2.83)$$

Para a cadeia efetiva T_k é independente de k , exceto para os grãos da borda da cadeia, que

possuem massas renormalizadas diferentes. Com a análise feita na seção (2.2.1) temos que $\mu_k = \mu_{k+1} = \mu$, logo $\eta = \mu/2$, $\zeta = \mathfrak{R}/2^{3/2}$, e $\dot{z}_k(0)^2 = 1$. E assim a eq. (2.83) torna-se

$$T_k = \sqrt{\pi} \left(\frac{5\mu}{2^{3/2}\mathfrak{R}} \right)^{2/5} \frac{\Gamma(7/5)}{\Gamma(9/10)}. \quad (2.84)$$

O tempo t definido na eq.(2.81) varia linearmente com k , exceto para os grãos da borda da cadeia que possuem massa renormalizada diferente em relação aos grãos do meio da cadeia. A inclinação da linha é determinada por T_k . Na figura, (2.4) mostramos a comparação teórica do tempo dado para o pulso chegar no k -ésimo grão.

Na figura (2.4), k diz respeito somente aos grãos grandes. Os diferentes símbolos representam diferentes valores do raio do menor grão. Na mesma figura mostramos os resultados analíticos, fazendo uso das equações (2.81) e (2.84). A concordância entre os dois resultados é muito boa, mostrando que a Teoria Binária efetiva pode nos dá resultados qualitativos confiáveis.

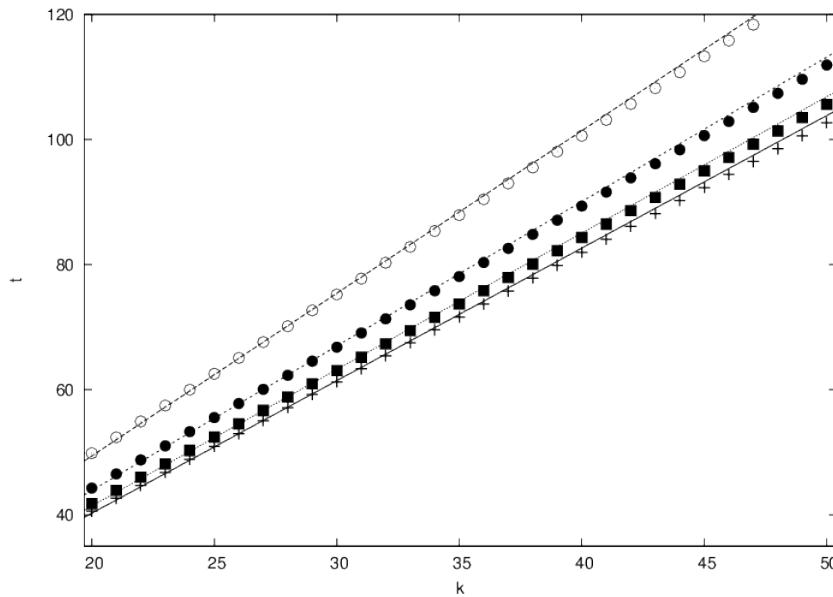


Figura 2.4: Tempo t dado para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada simples para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultados teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), linhas tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), linhas pontilhadas ($r = 0.3$) e linhas contínuas ($r = 0.4$).

Também fazendo uso da Teoria Binária os autores determinaram a força média que aparece na eq. (2.18). Quando os grão k e $k + 1$ colidem, a máxima força entre eles corresponde a

máxima compressão z_k^{max} . Assim, a máxima força é

$$\bar{F} = \zeta_k (z_k^{max})^{3/2} = [\zeta_k]^{2/5} \left(\frac{5\eta_k z_k^2(0)}{4} \right)^{3/5}, \quad (2.85)$$

com z_k^{max} dado agora por

$$z_k^{max} = \left(\frac{5\eta_k}{4\zeta_k} z_k^2(0) \right)^{2/5}. \quad (2.86)$$

E obtem-se

$$\bar{F} = \frac{5\mu}{8} \left(\frac{2^{3/2}\mathfrak{R}}{5\mu} \right)^{2/5}, \quad (2.87)$$

onde \mathfrak{R} e μ são dados pelas equações (2.14) e (2.27), respectivamente. Substituindo na eq. (2.23) obtem-se

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\mu}{m}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\mu} \right)^{2/5} \left(\frac{5}{16} \right)^{1/10}. \quad (2.88)$$

A figura (2.5) mostra a comparação entre as frequências numérica e teórica, eq. (2.88) obtidas em [35]. Na figura os pontos representam os resultados numéricos, enquanto que a linha continua representa o resultado teórico. Nesta figura percebemos a diminuição da frequência do menor grão com o aumento de seu raio, pois a medida que aumentamos o tamanho do grão pequeno a cadeia vai deixando de ser decorada e se tornando mais próxima do caso monodisperso, fazendo com que o grão do meio oscile cada vez menos.

Lembramos que novamente, as figuras (2.4) e (2.5) foram reproduzidas a partir de [35].

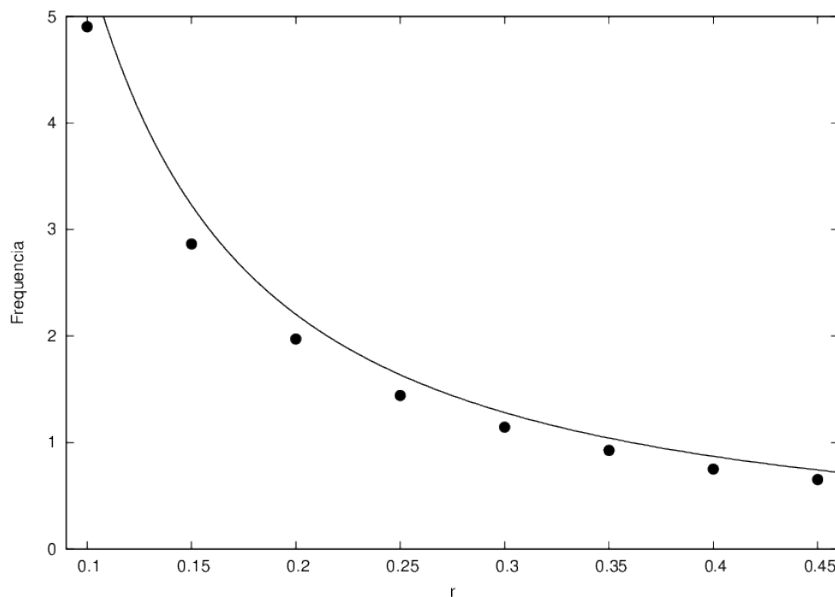


Figura 2.5: Os pontos representam os resultados numéricos da frequência angular média do grão pequeno. A linha sólida representa o resultado teórico obtido através da Teoria Binária.

3 *Resultados*

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos no intuito de generalizar a análise feita pela referência principal desta dissertação. O que queremos é descrever uma cadeia decorada com um número qualquer de grãos pequenos entre os maiores, com isso, encontrando equações para a massa efetiva e potencial efetivo em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores. Faremos isso da seguinte maneira: primeiramente analisaremos uma cadeia curta com quatro grãos, sendo dois pequenos entre os maiores. Em seguida, analisaremos uma cadeia curta com N grãos pequenos entre os maiores.

Posteriormente, iremos analisar uma cadeia decorada longa, também com N grãos menores entre os maiores. Vale salientar que para essas análises serão utilizados argumentos semelhantes aos que foram feitos na referência principal.

E por fim iremos utilizar a Teoria Binária, adequando-a a nossa análise.

3.1 Cadeia com 4 grãos

Aqui, seguiremos os passos da seção (2.2.1) do capítulo anterior, só que agora para uma cadeia com 4 grãos denominados por $k-1$, k , $k+1$ e $k+2$, onde os grãos pequenos são o k e $k+1$. As massas dos grãos maiores e os raios de curvaturas são unitários. Para as massas dos menores $m_k = m_{k+1} = m$, e para os raios $R_k = R_{k+1} = r$. Omitindo a função de Heaviside, a dinâmica da cadeia é governada pelas seguintes equações

$$\ddot{x}_{k-1} = -\mathfrak{R}(x_{k-1} - x_k)^{3/2}, \quad (3.1)$$

$$m\ddot{x}_k = \mathfrak{R}(x_{k-1} - x_k)^{3/2} - \xi(x_k - x_{k+1})^{3/2}, \quad (3.2)$$

$$m\ddot{x}_{k+1} = \xi(x_k - x_{k+1})^{3/2} - \mathfrak{R}(x_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}, \quad (3.3)$$

$$\ddot{x}_{k+2} = \mathfrak{R}(x_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}, \quad (3.4)$$

onde, de acordo com a eq. (2.10), temos

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{2r}{1+r} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \xi = r^{1/2}. \quad (3.5)$$

No caso de apenas um grão pequeno entre os maiores o movimento do menor grão era dado pela equação (2.15). No entanto, quando se aumenta a quantidade de grãos pequenos entre os maiores observamos que o movimento de cada grão pequeno não é dado exatamente pela equação (2.15). Cada grão pequeno continua a ter um movimento médio e uma parte oscilatória, porém, a sua parte oscilatória não é dada por uma função tipo seno [ver figura (3.1)]. Diante disso, escrevemos

$$x_i = \bar{x}_i(t) + A_i g_i(t), \quad (3.6)$$

onde \bar{x}_i representa o movimento médio que os grãos pequenos executam, em torno de suas posições de “equilíbrio”, oscilações de pequenas amplitudes A_i . No entanto, estas oscilações não são bem comportadas e escrevemos como uma função $g_i(t)$ desconhecida. Substituindo (3.6) em (3.2) para $i = k$ e $k + 1$

$$m(\ddot{\bar{x}}_k + A_k \ddot{g}_k) = \mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k - A_k g_k)^{3/2} - \xi(\bar{x}_k + A_k g_k - \bar{x}_{k+1} - A_{k+1} g_{k+1})^{3/2}.$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{\bar{x}}_k + A_k \ddot{g}_k) &= \mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} \left[1 - \frac{A_k g_k}{x_{k-1} - \bar{x}_k} \right]^{3/2} \\ &\quad - \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} \left[1 + \frac{A_k g_k - A_{k+1} g_{k+1}}{\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}} \right]^{3/2}. \end{aligned}$$

E assumindo que as amplitudes A_k e A_{k+1} são muito menores que $x_{k-1} - \bar{x}_k$ e $\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}$

$$\begin{aligned} m(\ddot{\bar{x}}_k + A_k \ddot{g}_k) &\approx \mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{A_k g_k}{x_{k-1} - \bar{x}_k} \right] \\ &\quad - \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{A_k g_k - A_{k+1} g_{k+1}}{\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}} \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$m\ddot{\bar{x}}_k \approx \mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} - \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2}, \quad (3.7)$$

e

$$mA_k \ddot{g}_k \approx \frac{3}{2} \left[-\mathfrak{R} A_k g_k (x_{k-1} - \bar{x}_k)^{1/2} - \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{1/2} (A_k g_k - A_{k+1} g_{k+1}) \right]. \quad (3.8)$$

Fazendo a mesma consideração feita para o caso de apenas um grão central, tem-se que quando $\ddot{\bar{x}}_k = 0$, ou seja, quando este grão oscila com máxima frequência

$$\mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} = \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2}. \quad (3.9)$$

conforme a eq. (3.7).

Pode-se determinar \bar{x}_k a partir de (3.9)

$$\left(\frac{\mathfrak{R}}{\xi}\right)^{2/3} x_{k-1} - \left(\frac{\mathfrak{R}}{\xi}\right)^{2/3} \bar{x}_k = \bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}.$$

Definindo

$$\gamma = \left(\frac{\mathfrak{R}}{\xi}\right)^{2/3}, \quad (3.10)$$

temos

$$\bar{x}_k = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) x_{k-1} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) \bar{x}_{k+1}. \quad (3.11)$$

Agora substituindo (3.6) em (3.3) para $i = k$ e $k+1$

$$m(\ddot{\bar{x}}_{k+1} + A_{k+1}\ddot{g}_{k+1}) = \xi(\bar{x}_k + A_k g_k - \bar{x}_{k+1} - A_{k+1}g_{k+1})^{3/2} - \mathfrak{R}(\bar{x}_{k+1} + A_{k+1}g_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}.$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{\bar{x}}_{k+1} + A_{k+1}\ddot{g}_{k+1}) &= \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} \left[1 + \frac{A_k g_k - A_{k+1}g_{k+1}}{\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}}\right]^{3/2} \\ &\quad - \mathfrak{R}(\bar{x}_k - x_{k+2})^{3/2} \left[1 + \frac{A_{k+1}g_{k+1}}{\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}}\right]^{3/2}. \end{aligned}$$

E considerando que as amplitudes A_k e A_{k+1} são muito menores que $\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}$ e $\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}$

$$\begin{aligned} m(\ddot{\bar{x}}_{k+1} + A_{k+1}\ddot{g}_{k+1}) &\approx \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} \left[1 + \frac{3(A_k g_k - A_{k+1}g_{k+1})}{2(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})}\right] \\ &\quad - \mathfrak{R}(\bar{x}_k - x_{k+2})^{3/2} \left[1 + \frac{3A_{k+1}g_{k+1}}{2(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})}\right]. \end{aligned}$$

Daí

$$m\ddot{\bar{x}}_{k+1} \approx \xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} - \mathfrak{R}(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}, \quad (3.12)$$

e

$$mA_{k+1}\ddot{g}_{k+1} \approx \frac{3}{2} \left[\xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{1/2} (A_k g_k - A_{k+1}g_{k+1}) - \mathfrak{R}A_{k+1}g_{k+1}(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{1/2} \right]. \quad (3.13)$$

E como antes quando $\ddot{\bar{x}}_{k+1} = 0$

$$\xi(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1})^{3/2} = \mathfrak{R}(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}. \quad (3.14)$$

conforme a eq. (3.12).

Determinamos \bar{x}_{k+1} a partir de (3.14)

$$\bar{x}_{k+1} = \left(\frac{1}{\gamma+1}\right) \bar{x}_k + \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right) x_{k+2}, \quad (3.15)$$

onde γ é dado pela eq. (3.10).

Agora podemos escrever \bar{x}_k e \bar{x}_{k+1} em termos dos grãos maiores x_{k-1} e x_{k+2} . Usando (3.15) em (3.11),

$$\bar{x}_k = \frac{\gamma x_{k-1}}{1+\gamma} + \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{\bar{x}_k}{\gamma+1} + \frac{\gamma x_{k+2}}{\gamma+1} \right).$$

$$\bar{x}_k \left(1 - \frac{1}{(1+\gamma)^2} \right) = \frac{\gamma x_{k-1}}{1+\gamma} + \frac{\gamma x_{k+2}}{(1+\gamma)^2}.$$

$$\bar{x}_k \left[\frac{\gamma(\gamma+2)}{(1+\gamma)^2} \right] = \frac{\gamma x_{k-1}}{1+\gamma} + \frac{\gamma x_{k+2}}{(1+\gamma)^2}.$$

Logo

$$\bar{x}_k = \left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma} \right) x_{k-1} + \left(\frac{1}{2+\gamma} \right) x_{k+2}. \quad (3.16)$$

E usando (3.16) em (3.15) encontraremos

$$\bar{x}_{k+1} = \left(\frac{1}{2+\gamma} \right) x_{k-1} + \left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma} \right) x_{k+2}. \quad (3.17)$$

Note que a partir das equações (3.1)-(3.4)

$$\ddot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k+2} + m(\ddot{x}_k + \ddot{x}_{k+1}) = 0. \quad (3.18)$$

Usando (3.6) para $i = k$ e $k+1$ e desprezando a parte oscilatória

$$\ddot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k+2} + m(\ddot{\bar{x}}_k + \ddot{\bar{x}}_{k+1}) = 0. \quad (3.19)$$

Agora somando (3.16) e (3.17) encontramos

$$\bar{x}_k + \bar{x}_{k+1} = x_{k-1} + x_{k+2}. \quad (3.20)$$

Usando (3.20) em (3.19) chega-se a

$$(m+1)(\ddot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k+2}) = 0. \quad (3.21)$$

que descreve um sistema de duas partículas cada uma com massa efetiva

$$\mu = m+1. \quad (3.22)$$

Agora, retornamos a equação (3.1) usando (3.6) e (3.22)

$$\mu\ddot{x}_{k-1} = -\mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k - A_k g_k)^{3/2}.$$

$$\mu\ddot{x}_{k-1} = -\mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} \left(1 - \frac{A_k g_k}{x_{k-1} - \bar{x}_k}\right)^{3/2}.$$

Considerando A_k muito menor que $x_{k-1} - \bar{x}_k$ encontramos

$$\mu\ddot{x}_{k-1} \approx -\mathfrak{R}(x_{k-1} - \bar{x}_k)^{3/2} + \frac{3}{2}\mathfrak{R}A_k g_k (x_{k-1} - \bar{x}_k)^{1/2}, \quad (3.23)$$

e usando (3.16)

$$\mu\ddot{x}_{k-1} \approx -\frac{\mathfrak{R}}{(2+\gamma)^{3/2}}(x_{k-1} - x_{k+2})^{3/2} + \frac{3}{2(2+\gamma)^{1/2}}\mathfrak{R}A_k g_k (x_{k-1} - x_{k+2})^{1/2}, \quad (3.24)$$

desprezando o termo oscilatório

$$\mu\ddot{x}_{k-1} \approx -\frac{\mathfrak{R}}{(2+\gamma)^{3/2}}(x_{k-1} - x_{k+2})^{3/2}. \quad (3.25)$$

Para x_{k+2} , voltamos para a equação (3.4) usando (3.22) e (3.6) para $i = k + 1$

$$\mu\ddot{x}_{k+2} = \mathfrak{R}(\bar{x}_{k+1} + A_{k+1}g_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}.$$

$$\mu\ddot{x}_{k+2} = \mathfrak{R}(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2} \left(1 - \frac{A_{k+1}g_{k+1}}{\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}}\right)^{3/2},$$

considerando A_{k+1} muito menor que $\bar{x}_{k+1} - x_{k+2}$

$$\mu\ddot{x}_{k+2} = \mathfrak{R}(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{3/2} - \frac{3}{2}\mathfrak{R}A_{k+1}g_{k+1}(\bar{x}_{k+1} - x_{k+2})^{1/2}.$$

Usando (3.17) e desprezando a parte oscilatória encontramos

$$\mu\ddot{x}_{k+2} \approx \frac{\mathfrak{R}}{(2+\gamma)^{3/2}}(x_{k-1} - x_{k+2})^{3/2}. \quad (3.26)$$

As equações (3.25) e (3.26) definem o potencial de interação na cadeia efetiva. Logo

$$V_{ef} = \frac{2\mathfrak{R}}{5(2+\gamma)^{3/2}}(x_{k-1} - x_{k+2})^{5/2}. \quad (3.27)$$

As equações (3.8) e (3.13) nos dizem algo a respeito da frequência de oscilação de cada grão pequeno, no entanto, como esta oscilação não é bem comportada não podemos determinar sua frequência.

A seguir, na figura (3.1), mostramos o perfil do deslocamento dos 4 grãos na cadeia. Plotamos também, o deslocamento dos médio dos grãos menores, equações (3.16) e (3.17), respectivamente. Essas equações capturam bem o deslocamento médio dos grãos pequenos durante a colisão. Desta figura, também destacamos o fato de que as amplitudes das oscilações dos grãos menores serem pequenas, o que nos leva a desprezar os termos oscilatórios nas equações de movimento.

Na figura (3.2), nós comparamos as velocidades dos grãos maiores obtidas através das soluções exatas da cadeia original com as velocidades dos grãos da cadeia efetiva não decorada. Nesta figura também mostramos o perfil de velocidades dos grãos pequenos, com $r = 0.3$, que ficam oscilando entre os grãos maiores. Novamente, notamos uma boa concordância entre as velocidades dos grãos maiores.

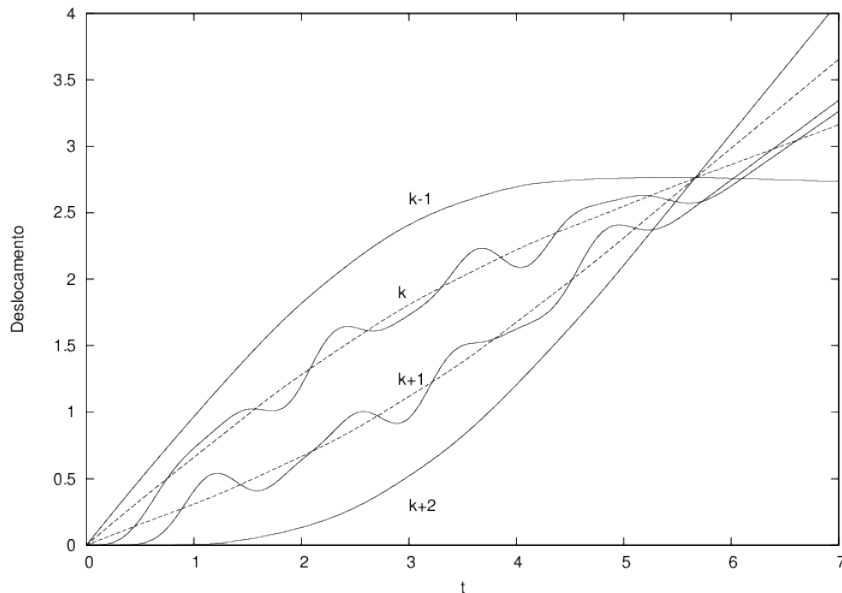


Figura 3.1: Perfil do deslocamento dos 4 grãos (curvas contínuas) obtidas a partir da solução exata das equações de movimento. O menor grão possui $r = 0.3$. As linhas tracejadas representam o movimento médio do grão k e $k+1$, equações (3.16) e (3.17), respectivamente.

Outro fato importante é que quando tínhamos uma cadeia com três grãos vimos que o grão menor oscilava em torno de sua “posição de equilíbrio”, e essa oscilação era dada por uma função tipo seno. No entanto, quando passamos para uma cadeia com quatro grãos, sendo dois pequenos entre os maiores, este tipo de oscilação não é encontrada no movimento de cada grão pequeno individualmente, e sim no movimento do centro de massa do sistema formado apenas pelos dois grãos pequenos. Com isso, escrevemos para o movimento do centro de massa

$$X_{CM} = \bar{X}_{CM} + A_{CM} \sin(\omega_{CM} t + \phi_{CM}), \quad (3.28)$$

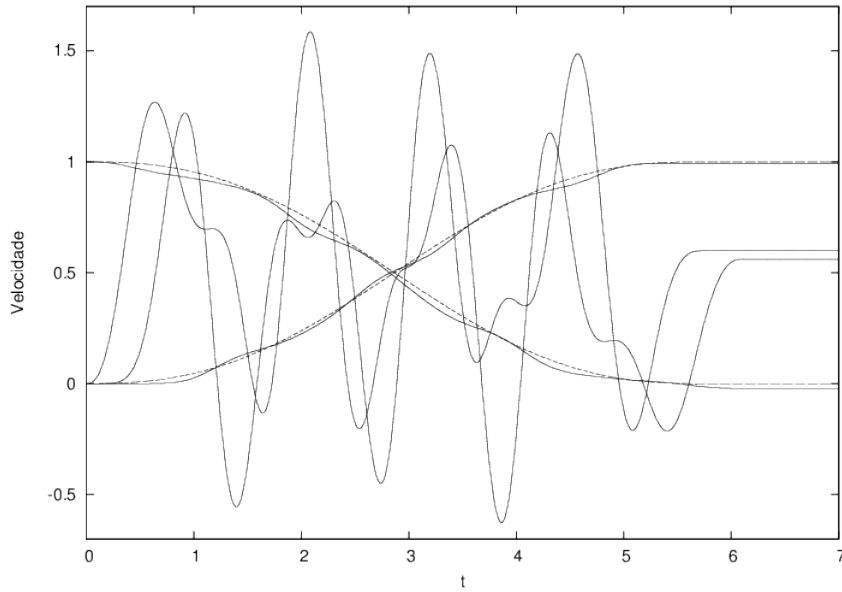


Figura 3.2: Perfil de velocidades de uma cadeia composta de quatro grãos com dois grãos pequenos entre os maiores. Linhas contínuas representam os resultados numéricos da dinâmica exata. Os dois grãos menores, com $r = 0.3$, oscilam entre os maiores. As linhas tracejadas representam resultados obtidos a partir da dinâmica efetiva

onde

$$X_{CM} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad (3.29)$$

que também pode ser escrita como

$$\bar{X}_{CM} = \frac{\bar{x}_k + \bar{x}_{k+1}}{2} \quad (3.30)$$

desprezando os termos oscilatórios de k e $k + 1$.

A partir de agora, iremos determinar a equação de movimento do centro de massa do sistema formado apenas pelos grãos menores. Somando as equações (3.2) e (3.3) e dividindo por dois encontramos

$$m \left(\frac{\ddot{x}_k + \ddot{x}_{k+1}}{2} \right) = \frac{\mathfrak{R}}{2} (x_{k-1} - x_k)^{3/2} - \frac{\mathfrak{R}}{2} (x_{k+1} - x_{k+2})^{3/2},$$

que é

$$m\ddot{X}_{CM} = \frac{\mathfrak{R}}{2} (x_{k-1} - x_k)^{3/2} - \frac{\mathfrak{R}}{2} (x_{k+1} - x_{k+2})^{3/2}. \quad (3.31)$$

Usando (3.29), a equação acima pode ser escrita como

$$m\ddot{X}_{CM} = \frac{\mathfrak{R}}{2} (x_{k-1} + x_{k+1} - 2X_{CM})^{3/2} - \frac{\mathfrak{R}}{2} (2X_{CM} - (x_k - x_{k+2}))^{3/2}. \quad (3.32)$$

Vamos escrever

$$\Psi = x_{k-1} + x_{k+1}, \quad (3.33)$$

e

$$\Phi = x_k + x_{k+2}, \quad (3.34)$$

com isso a equação (3.32) fica

$$m\ddot{X}_{CM} = \frac{\Re}{2} (\Psi - 2X_{CM})^{3/2} - \frac{\Re}{2} (2X_{CM} - \Phi)^{3/2}. \quad (3.35)$$

Usando a equação (3.28) em (3.35)

$$m \left[\ddot{X}_{CM} - 2A\omega_{CM}^2 \sin(\omega_{CM}t + \phi_{CM}) \right] = \frac{\Re}{2} [\Psi - 2\bar{X}_{CM} - 2A \sin(\omega_{CM}t + \phi_{CM})]^{3/2} - \frac{\Re}{2} [2\bar{X}_{CM} + 2A \sin(\omega_{CM}t + \phi_{CM}) - \Phi]^{3/2}.$$

De modo semelhante ao feito anteriormente, vamos admitir que a amplitude A_{CM} é muito menor que $\Psi - \bar{X}_{CM}$ e $\bar{X}_{CM} - \Phi$, e encontraremos

$$m\ddot{X}_{CM} \approx \frac{\Re}{2} (\Psi - 2\bar{X}_{CM})^{3/2} - \frac{\Re}{2} (2\bar{X}_{CM} - \Phi)^{3/2}, \quad (3.36)$$

e

$$m\omega_{CM}^2 \approx \frac{3}{2} \left[\frac{\Re}{2} (\Psi - 2\bar{X}_{CM})^{1/2} + \frac{\Re}{2} (2\bar{X}_{CM} - \Phi)^{1/2} \right]. \quad (3.37)$$

Quando $\ddot{X}_{CM} = 0$ na equação (3.36) temos que

$$\frac{\Re}{2} (\Psi - 2\bar{X}_{CM})^{3/2} = \frac{\Re}{2} (2\bar{X}_{CM} - \Phi)^{3/2} = \bar{F}. \quad (3.38)$$

Que nos dá

$$\Psi - 2\bar{X}_{CM} = \left(\frac{2\bar{F}}{\Re} \right)^{2/3}, \quad (3.39)$$

e

$$2\bar{X}_{CM} - \Phi = \left(\frac{2\bar{F}}{\Re} \right)^{2/3}. \quad (3.40)$$

Usando (3.39) e (3.40) em (3.37) podemos determinar a frequência de oscilação do centro de massa

$$m\omega^2 \approx \frac{3}{2} \left[\frac{\Re}{2} \left(\frac{2\bar{F}}{\Re} \right)^{1/3} + \frac{\Re}{2} \left(\frac{2\bar{F}}{\Re} \right)^{1/3} \right], \quad (3.41)$$

lembrando que $f = \omega/2\pi$ encontramos

$$f_{CM} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2m}} \Re^{1/3} (2\bar{F})^{1/6}. \quad (3.42)$$

A força média no centro de massa da cadeia formada apenas pelos grãos pequenos pode ser calculada usando a Teoria Binária. Ela será a máxima compressão sofrida pelo centro de massa $z_k^{máx}$. Logo, a máxima força será dada pela eq. (2.85), onde $\eta = \frac{\mu}{2}$, $\zeta = \frac{\mathfrak{R}}{(\gamma+2)^{3/2}}$, e $\dot{z}_k^2(0) = 1$. Usando isto na eq. (2.85) encontramos

$$\bar{F} = \frac{\mathfrak{R}^{2/5}}{(\gamma+2)^{3/5}} \left(\frac{5\mu}{8} \right)^{3/5}. \quad (3.43)$$

E usando a eq. (3.43) na eq. (3.42) encontramos

$$f_{CM} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2m}} \mathfrak{R}^{4/15} \left[\frac{2}{(\gamma+2)^{2/5}} \left(\frac{5\mu}{8} \right)^{2/5} \right]^{1/4}, \quad (3.44)$$

onde γ e μ são dados pela eq. (3.10) e (3.22), respectivamente.

E para determinar a parte média do centro de massa em termos dos grãos maiores usamos a equação (3.20) na (3.30), logo

$$\bar{X}_{CM} = \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_{k+2}). \quad (3.45)$$

Na figura (3.3) mostramos os deslocamentos dos grãos da cadeia, além do deslocamento do centro de massa da cadeia formada apenas pelos grãos pequenos. Nela notamos que este movimento é dado por uma parte média e por uma parte oscilatória. A linha tracejada representa o movimento da parte média do centro de massa, dado pela eq. (3.29).

E na figura (3.4) comparamos o resultado numérico da frequência de oscilação do centro de massa com o resultado teórico dado pela eq. (3.44). Os pontos representam os resultados da simulação, enquanto que a linha continua representa o resultado teórico, obtido a partir do uso da Teoria Binária.

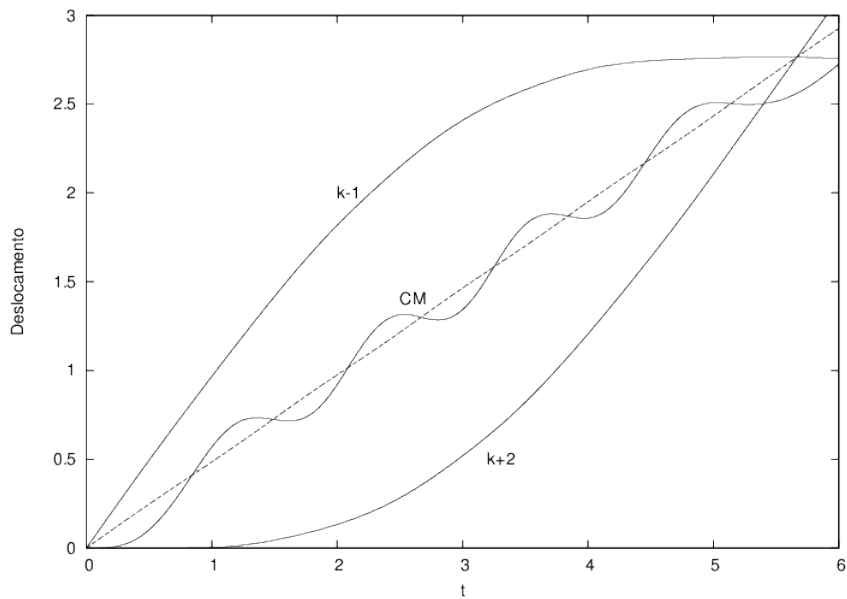


Figura 3.3: Perfil do deslocamento dos grãos maiores e do centro de massa da cadeia formada apenas pelos dois grãos pequenos (linhas contínuas). A linha tracejada representa o movimento médio do centro de massa eq. (3.45).

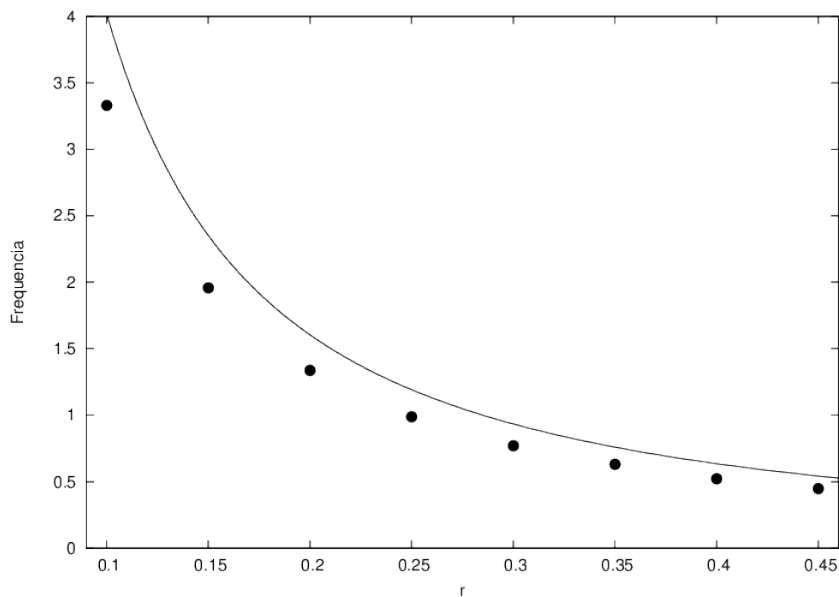


Figura 3.4: Frequência de oscilação do centro de massa da cadeia formada apenas pelos dois grãos pequenos. Os círculos cheios representam os resultados numéricos e a linha contínua representa o resultado teórico dado pela eq. (3.44). O raio dos grãos pequenos é $r = 0.3$.

3.2 Cadeia decorada curta com N grãos entre os maiores

Nesta seção, iremos analisar uma cadeia decorada curta, agora com um número qualquer de grãos pequenos entre os maiores. Ou seja, uma cadeia com N grãos pequenos entre dois grãos

grandes.

Anteriormente, vimos que quando tínhamos uma cadeia decorada simples, ou seja, com apenas um grão pequeno entre os maiores, à medida que o pulso se propagava os menores grãos executavam oscilações em torno de uma posição de “equilíbrio”, entre os maiores grãos. Logo, observamos que o movimento do menor grão poderia ser escrito como a soma de um termo médio e um termo oscilatório. Este termo oscilatório era dado por uma função tipo seno, conforme a eq. (2.15). Quando adicionávamos mais um grão pequeno entre os maiores, vimos que os grãos pequenos ainda ficavam oscilando entre os maiores quando o pulso passava por eles. Cada grão pequeno, individualmente, ainda tinha um movimento dado por uma parte média e por uma parte oscilatória com pequena amplitude. Porém, esta parte oscilatória não era mais dada por uma função tipo seno [ver figura (3.1)]. Um movimento similar ao do menor grão, no caso de uma cadeia decorada simples, só foi visto quando observamos o movimento do centro de massa do sistema formado apenas pelos dois grãos pequenos. Seguimos os passos feitos na referência principal desta dissertação, e encontramos o movimento médio dos menores grãos em função dos movimento dos maiores grãos, argumentando que cada grão pequeno oscila com máxima frequência quando o seu movimento médio possui aceleração nula. Também conseguimos determinar a frequência de oscilação do centro de massa do sistema formado pelos menores grãos.

Como nosso objetivo é encontrar expressões para o potencial efetivo e massa reduzida em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores, vamos deixar de lado o movimento oscilatório destes grãos e nos concentrar somente em seu movimento médio. As equações que regem a dinâmica de uma cadeia com N grãos pequenos entre dois grãos grandes, utilizando somente a parte média do movimento dos grãos menores, são dadas por

$$\ddot{x}_L = -\mathfrak{R}(x_L - \bar{x}_1)^{3/2}, \quad (3.46)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_1 = \mathfrak{R}(x_L - \bar{x}_1)^{3/2} - \xi(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^{3/2}, \quad (3.47)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_2 = \xi(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^{3/2} - \xi(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^{3/2}, \quad (3.48)$$

⋮

$$m\ddot{\bar{x}}_{N-1} = \xi(\bar{x}_{N-2} - \bar{x}_{N-1})^{3/2} - \xi(\bar{x}_{N-1} - \bar{x}_N)^{3/2}, \quad (3.49)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_N = \xi(\bar{x}_{N-1} - \bar{x}_N)^{3/2} - \mathfrak{R}(\bar{x}_N - x_R)^{3/2}, \quad (3.50)$$

$$\ddot{x}_R = \mathfrak{R}(\bar{x}_N - x_R)^{3/2}. \quad (3.51)$$

Nesta seção, mudamos a notação utilizada anteriormente. O movimento dos grãos grandes

nas extremidades da cadeia será descrito pelas coordenadas: x_L e x_R , representando o grãos das extremidades esquerda e direita, respectivamente.

No caso de uma cadeia decorada simples, vimos que o movimento médio do menor grão poderia ser escrito somente em função do movimento dos grãos maiores nas extremidades da cadeia curta, eq. (2.24), ou seja

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_L + x_R). \quad (3.52)$$

Logo, para escrever expressões para o potencial efetivo e massa renormalizada em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores iremos, primeiramente, escrever o movimento médio de cada grão pequeno em termos somente dos grãos maiores x_L e x_R .

Considerando novamente que quando os grãos pequenos oscilam com máxima frequência (e transmitem a maior parte da energia/momento) as suas acelerações são nulas, temos das equações (3.47)-(3.50) que

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right) x_L + \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) \bar{x}_2, \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_3), \\ \bar{x}_3 &= \frac{1}{2}(\bar{x}_2 + \bar{x}_4), \\ \bar{x}_4 &= \frac{1}{2}(\bar{x}_3 + \bar{x}_5), \\ &\vdots \\ \bar{x}_{N-1} &= \frac{1}{2}(\bar{x}_{N-2} + \bar{x}_N), \\ \bar{x}_N &= \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) \bar{x}_{N-1} + \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right) x_R, \end{aligned} \quad (3.53)$$

lembrando que γ é dado pela eq. (3.10).

Note que o movimento médio do grão 2 até o $N - 1$ é dado pela média do movimento médio dos grãos vizinhos a estes. Isso vem do fato de que, quando as acelerações destes grãos são nulas, a interação entre o grão anterior e o grão posterior são iguais, já que do segundo até o penúltimo grão pequeno, cada grão é cercado por grãos idênticos. Isso faz com que o movimento médio destes grãos seja a média do movimento de seus vizinhos (semelhante ao caso da cadeia composta por apenas três grãos, seção 2.2.1).

Já para o primeiro e último grãos pequenos isto é diferente, pois estes grãos não são cercados por grãos idênticos. O primeiro grão pequeno é cercado por um grão grande à esquerda e por um pequeno à direita. Para o último grão pequeno isto se inverte, um pequeno à sua esquerda e um grande à direita. As equações (3.53) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\bar{x}_1 - \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)\bar{x}_2 = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)x_L, \quad (3.54)$$

$$-\frac{1}{2}\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \frac{1}{2}\bar{x}_3 = 0, \quad (3.55)$$

⋮

$$-\frac{1}{2}\bar{x}_k + \bar{x}_{k+1} - \frac{1}{2}\bar{x}_{k+2} = 0, \quad (3.56)$$

⋮

$$-\frac{1}{2}\bar{x}_{N-2} + \bar{x}_{N-1} - \frac{1}{2}\bar{x}_N = 0, \quad (3.57)$$

$$-\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)x_{N-1} + \bar{x}_N = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)x_R, \quad (3.58)$$

para evidenciar que temos um sistema de N equações lineares para as variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$.

Logo, este sistema representa uma cadeia composta de $N + 2$ grãos, onde N representa o número de grãos pequenos entre os maiores na extremidade da cadeia. Resolvendo este sistema, podemos escrever o movimento médio de cada grão pequeno em termos do movimento dos grãos grandes. Variando N de 2 a 9, verificamos que o movimento dos menores grãos pode ser escrito como

$$\bar{x}_p = \frac{x_L + (N-p)\gamma x_L + (p-1)\gamma x_R + x_R}{2 + \gamma(N-1)} = X(N, p), \quad (3.59)$$

onde $p = 1, \dots, N$ e representa um determinado grão pequeno de uma cadeia com N grãos pequenos.

Para a eq. (3.59) ser solução do sistema, ela deve satisfazer as equações (3.54), (3.56) e (3.58), ou seja,

$$X(N, 1) - \frac{1}{1+\gamma}X(N, 2) = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)x_L, \quad (3.60)$$

$$-\frac{1}{2}X(N, k) + X(N, k+1) - \frac{1}{2}X(N, k+2) = 0, \quad (3.61)$$

e

$$-\frac{1}{1+\gamma}X(N, N-1) + X(N, N) = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)x_R. \quad (3.62)$$

Note que ao satisfazer a eq. (3.56) para um k qualquer, todas as equações de (3.55) a (3.57) são satisfeitas.

Usando a eq. (3.59) para $p = 1$ e 2 no lado esquerdo da eq. (3.60)

$$\begin{aligned} X(N,1) - \frac{1}{1+\gamma}X(N,2) &= \frac{1}{2+\gamma(N-1)} \left[x_L + (N-1)\gamma x_L + x_R - \frac{x_L + (N-2)\gamma x_L + \gamma x_R + x_R}{1+\gamma} \right] \\ &= \frac{x_L}{2+\gamma(N-1)} \left[\frac{(1+\gamma) + \gamma(N-1)(1+\gamma) - 1 - N\gamma + 2\gamma}{1+\gamma} \right] \\ &= \frac{\gamma x_L}{2+\gamma(N-1)} \left[\frac{\gamma(N-1) + 2}{1+\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$X(N,1) - \frac{1}{1+\gamma}X(N,2) = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right) x_L, \quad (3.63)$$

que é a equação (3.54).

Agora escrevendo a eq. (3.59) com $p = k, k+1$ e $k+2$, iremos encontrar

$$X(N,k) = \frac{x_L + (N-k)\gamma x_L + (k-1)\gamma x_R + x_R}{2+\gamma(N-1)}, \quad (3.64)$$

$$X(N,k+1) = \frac{x_L + (N-k-1)\gamma x_L + k\gamma x_R + x_R}{2+\gamma(N-1)}, \quad (3.65)$$

e

$$X(N,k+2) = \frac{x_L + (N-k-2)\gamma x_L + (k+1)\gamma x_R + x_R}{2+\gamma(N-1)}. \quad (3.66)$$

Substituindo as equações (3.64)-(3.66) no lado esquerdo da equação (3.61), temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}X(N,k) + X(N,k+1) - \frac{1}{2}X(N,k+2) &= \frac{1}{2+\gamma(N-1)} \\ &\left[x_L \left(-\frac{N\gamma}{2} + \frac{k\gamma}{2} + N\gamma - k\gamma - \gamma - \frac{N\gamma}{2} + \frac{k\gamma}{2} + \gamma \right) + x_R \left(-\frac{\gamma k}{2} + \frac{\gamma}{2} + k\gamma - \frac{k\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$-\frac{1}{2}X(N,k) + X(N,k+1) - \frac{1}{2}X(N,k+2) = 0, \quad (3.67)$$

que equivale a equação (3.56). E usando a eq. (3.59) com $p = N-1$ e N no lado esquerdo da eq. (3.62), temos

$$\begin{aligned} X(N,N) - \frac{1}{1+\gamma}X(N,N-1) &= \frac{1}{2+\gamma(N-1)} \left[x_L + (N-1)\gamma x_R + x_R - \frac{x_L + \gamma x_L + (N-2)\gamma x_R + x_R}{1+\gamma} \right] \\ &= \frac{x_R}{2+\gamma(N-1)} \left[\frac{\gamma(N-1)(1+\gamma) + 1 + \gamma - \gamma(N-2) - 1}{1+\gamma} \right] \\ &= \frac{\gamma x_L}{2+\gamma(N-1)} \left[\frac{\gamma(N-1) + 2}{1+\gamma} \right]. \end{aligned}$$

E chegamos

$$X(N, N) - \frac{1}{1 + \gamma} X(N, N - 1) = \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) x_R, \quad (3.68)$$

que equivale a eq. (3.58).

Com isso vemos que a eq. (3.59) é solução do sistema, sendo válida para um N qualquer.

Podemos também, encontrar a soma em p dos movimentos médios dos menores grãos, ou seja

$$S_N = \sum_{p=1}^N \bar{x}_p. \quad (3.69)$$

onde S_N representa a soma do movimento médio de todos os grãos pequenos.

Usando a eq. (3.59) na eq. (3.69) e aplicando o somatório termo a termo, temos que

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2 + \gamma(N - 1)} \left[Nx_L + N^2 \gamma x_L - \frac{N}{2} (N + 1) \gamma x_L + \frac{N}{2} (N + 1) \gamma x_R - N \gamma x_R + x_R \right] \\ &= \frac{1}{2 + \gamma(N - 1)} \left[Nx_L + \frac{N}{2} (N - 1) \gamma x_L + \frac{N}{2} (N - 1) \gamma x_R + Nx_R \right] \\ &= \frac{N(x_L + x_R) \left[1 + \frac{1}{2} (N - 1) \gamma \right]}{2 \left[1 + \frac{1}{2} (N - 1) \gamma \right]}, \end{aligned}$$

logo

$$S_N = \frac{N}{2} (x_L + x_R). \quad (3.70)$$

Por outro lado, somando todas as equações de movimento da cadeia, encontramos

$$\ddot{x}_L + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \dots + \ddot{x}_{N-1} + \ddot{x}_N) + \ddot{x}_R = 0, \quad (3.71)$$

de onde vemos que a força resultante no sistema é zero. O termo entre parênteses é a derivada temporal da equação (3.70), isto é, \ddot{S}_N . Portanto, temos

$$\ddot{x}_L + \frac{Nm}{2} (\ddot{x}_L + \ddot{x}_R) + \ddot{x}_R = 0.$$

Logo

$$\left(1 + \frac{Nm}{2} \right) (\ddot{x}_L + \ddot{x}_R) = 0. \quad (3.72)$$

A partir da eq. (3.72) vemos que um sistema formado por uma cadeia decorada curta com N grãos entre os maiores, pode ser tratado como um sistema de apenas duas partículas, cada uma com massa efetiva dada por

$$\mu = 1 + \frac{Nm}{2}. \quad (3.73)$$

Esta equação representa uma generalização para a massa efetiva para uma cadeia com um número qualquer de grãos pequenos entre os maiores, que na eq. (3.73) é dado por N .

Agora, voltamos para as equações de movimento dos grãos maiores na cadeia curta, afim de determinar uma expressão para o potencial efetivo. Para o primeiro grão grande tínhamos que

$$\mu\ddot{x}_L \approx -\mathfrak{R}(x_L - \bar{x}_1)^{3/2}. \quad (3.74)$$

Podemos escrever ainda o movimento médio do primeiro grão pequeno somente em termos dos grãos maiores usando a eq. (3.59), para $p = 1$, logo

$$\bar{x}_1 = \frac{x_L + (N-1)\gamma x_L + x_R}{2 + (N-1)\gamma}. \quad (3.75)$$

Usando a eq. (3.75) na eq. (3.74) encontramos

$$\mu\ddot{x}_L \approx -\mathfrak{R} \left[x_L - \frac{x_L + (N-1)\gamma x_L + x_R}{2 + (N-1)\gamma} \right]^{3/2},$$

que após algumas manipulações chegamos a

$$\mu\ddot{x}_L \approx -\frac{\mathfrak{R}}{[2 + (N-1)\gamma]^{3/2}} (x_L - x_R)^{3/2}. \quad (3.76)$$

E, voltando para a equação de movimento do grão grande da extremidade direita da cadeia, considerando somente a parte média do movimento do último grão pequeno e a eq. (3.73), temos

$$\mu\ddot{x}_R \approx \mathfrak{R} (\bar{x}_N - x_R)^{3/2}. \quad (3.77)$$

Usando a eq. (3.59), para $p = N$, temos

$$\bar{x}_N = \frac{x_L + (N-1)\gamma x_R + x_R}{2 + (N-1)\gamma}. \quad (3.78)$$

Agora, usando a eq. (3.78) na eq. (3.77) obtemos

$$\mu\ddot{x}_R \approx \mathfrak{R} \left[\frac{x_L + (N-1)\gamma x_R + x_R}{2 + (N-1)\gamma} - x_R \right]^{3/2},$$

que após fazermos algumas manipulações, encontramos

$$\mu\ddot{x}_R \approx \frac{\mathfrak{R}}{[2 + (N-1)\gamma]^{3/2}} (x_L - x_R)^{3/2}. \quad (3.79)$$

A partir das equações (3.76) e (3.79) podemos escrever um potencial efetivo para uma cadeia com N grãos pequenos entre os maiores nas extremidades, em função da quantidade de grãos pequenos entre os grãos extremos, dado por

$$V_{ef} = \frac{2\mathfrak{K}}{5[2 + (N-1)\gamma]^{3/2}} (x_L - x_R)^{5/2}. \quad (3.80)$$

Desta maneira, substituímos a cadeia decorada original por uma cadeia efetiva, composta de grãos efetivos com massas efetivas. Observando a equação do potencial, nota-se que a interação entre os grãos pequenos não existe mais na cadeia efetiva, na qual só há interação entre os grãos maiores. E que a interação entre os grãos na cadeia efetiva diminui na medida em que adicionamos grãos menores entre eles na cadeia original.

Com esta descrição efetiva, tentamos capturar a velocidade do pulso da cadeia original comparando com a velocidade do pulso na cadeia efetiva. Primeiramente iremos mostrar a comparação entre os deslocamentos dos maiores grãos em uma cadeia decorada com três grãos pequenos entre os maiores, figura (3.5). Nesta figura notamos as oscilações dos menores grãos entre os grãos maiores durante a passagem do pulso por eles. Usando a eq. (3.59), podemos determinar o deslocamento dos menores grãos em termos dos grãos maiores. A partir desta equação, temos que para $N = 3$ e para $p = 1, 2$ e 3

$$\bar{x}_1 = \frac{(1 + 2\gamma)x_L + x_R}{2 + 2\gamma}, \quad (3.81)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_L + x_R), \quad (3.82)$$

e

$$\bar{x}_3 = \frac{x_L + (1 + 2\gamma)x_R}{2 + 2\gamma}. \quad (3.83)$$

Na figura as equações (3.81), (3.82) e (3.83) são representadas pelas linhas pontilhadas. Com isso, percebemos que o movimento oscilatório dos menores grãos possui uma amplitude pequena, o que nos levou a desprezá-la e nos concentrarmos somente no movimento médio destes grãos.

Na figura (3.6) mostramos o perfil de velocidades para uma cadeia decorada curta com 5 grãos, sendo 3 pequenos entre os maiores da extremidade da cadeia. As linhas pontilhadas representam as velocidades dos grãos maiores na cadeia efetiva. Note que a descrição efetiva captura bem a velocidade dos grãos maiores.

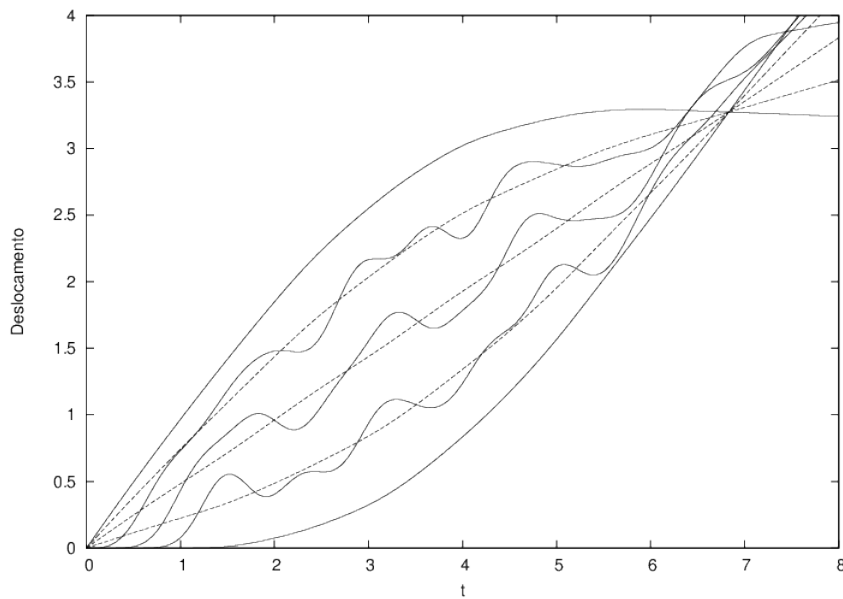


Figura 3.5: Perfil do deslocamento para uma cadeia decorada curta, composta de 5 grãos, sendo 3 grãos pequenos entre maiores que estão na extremidade da cadeia. Os grãos menores possuem raio $r = 0.3$. As linhas tracejadas representam os movimentos médios dos menores grãos obtidas analiticamente. As linhas contínuas representam os dados numéricos.

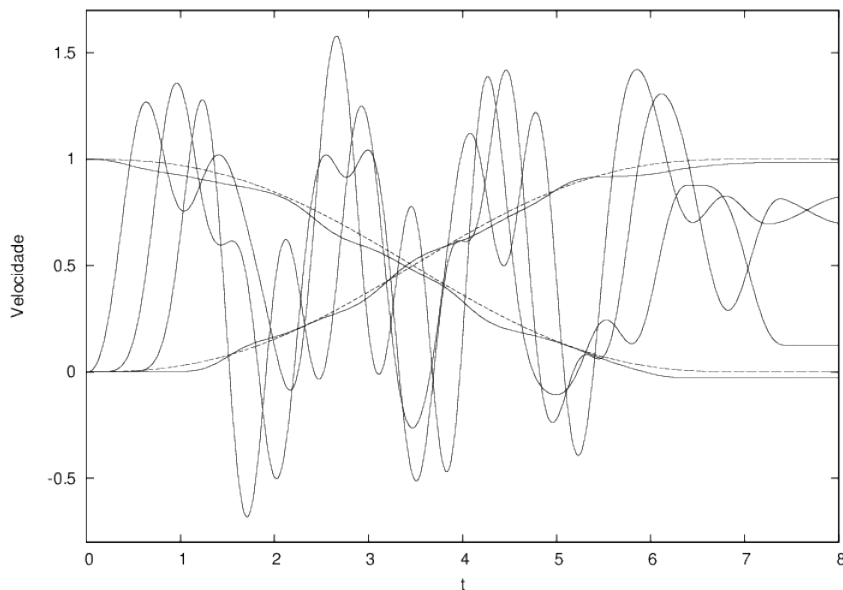


Figura 3.6: Perfil das velocidades para uma cadeia composta de 5 grãos (linhas contínuas) obtidas a partir da solução numérica da cadeia original. Os grãos menores têm raio $r = 0.2$, e oscilam entre os maiores. As linhas pontilhadas representam os resultado da dinâmica efetiva.

3.3 Cadeia decorada longa com N grãos pequenos entre os grandes

Nesta seção iremos analisar uma cadeia decorada longa, que irá nos mostrar a diferença entre as massas renormalizadas dos grãos da borda e do meio da cadeia efetiva. Os cálculos

serão semelhantes aos feitos anteriormente. Novamente vamos considerar uma cadeia com N grãos pequenos entre os maiores, no entanto, agora serão três grãos grandes, denominados por x_L (grão grande da esquerda), x_M (grão grande do meio) e x_R (grão grande da direita), com massa e raio unitários. Assim, a sequência de grãos será: grão grande da esquerda, N grãos pequenos, grão grande do meio, novamente N grãos pequenos e grão grande da direita. A dinâmica desta cadeia, novamente usando somente a parte média do movimento dos menores grãos, será governada pelas seguintes equações de movimento

$$\ddot{x}_L = -\mathfrak{R}(x_L - \bar{x}_1)^{3/2}, \quad (3.84)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_1 = \mathfrak{R}(x_L - \bar{x}_1)^{3/2} - \xi(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^{3/2}, \quad (3.85)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_2 = \xi(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^{3/2} - \xi(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)^{3/2}, \quad (3.86)$$

⋮

$$m\ddot{\bar{x}}_{N-1} = \xi(\bar{x}_{N-2} - \bar{x}_{N-1})^{3/2} - \xi(\bar{x}_{N-1} - \bar{x}_N)^{3/2}, \quad (3.87)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_N = \xi(\bar{x}_{N-1} - \bar{x}_N)^{3/2} - \mathfrak{R}(\bar{x}_N - x_M)^{3/2}, \quad (3.88)$$

$$\ddot{x}_M = \mathfrak{R}(\bar{x}_N - x_M)^{3/2} - \mathfrak{R}(x_M - \bar{x}_{N+1})^{3/2}, \quad (3.89)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_{N+1} = \mathfrak{R}(x_M - \bar{x}_{N+1})^{3/2} - \xi(\bar{x}_{N+1} - \bar{x}_{N+2})^{3/2}, \quad (3.90)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_{N+2} = \xi(\bar{x}_{N+1} - \bar{x}_{N+2})^{3/2} - \xi(\bar{x}_{N+2} - \bar{x}_{N+3})^{3/2}, \quad (3.91)$$

⋮

$$m\ddot{\bar{x}}_{2N-1} = \xi(\bar{x}_{2N-2} - \bar{x}_{2N-1})^{3/2} - \xi(\bar{x}_{2N-1} - \bar{x}_{2N})^{3/2}, \quad (3.92)$$

$$m\ddot{\bar{x}}_{2N} = \xi(\bar{x}_{2N-1} - \bar{x}_{2N})^{3/2} - \mathfrak{R}(\bar{x}_{2N} - x_R)^{3/2}, \quad (3.93)$$

$$\ddot{x}_R = \mathfrak{R}(\bar{x}_{2N} - x_R)^{3/2}. \quad (3.94)$$

Somando estas equações, iremos encontrar

$$\ddot{x}_L + m(\ddot{\bar{x}}_1 + \ddot{\bar{x}}_2 + \dots + \ddot{\bar{x}}_{N-1} + \ddot{\bar{x}}_N) + \ddot{x}_M + m(\ddot{\bar{x}}_{N+1} + \ddot{\bar{x}}_{N+2} + \dots + \ddot{\bar{x}}_{2N-1} + \ddot{\bar{x}}_{2N}) + \ddot{x}_R = 0. \quad (3.95)$$

Note que na equação anterior, os termos entre parênteses são derivadas temporais da equação (3.70). Esta soma é dada em termos dos grãos grandes, e para uma cadeia decorada longa no primeiro parêntese a soma será em termo dos grãos x_L e x_M , enquanto que no segundo parêntese será em termo dos grãos x_M e x_R . Desta maneira a expressão anterior fica

$$\ddot{x}_L + \frac{Nm}{2}(\ddot{x}_L + \ddot{x}_M) + \ddot{x}_M + \frac{Nm}{2}(\ddot{x}_M + \ddot{x}_R) + \ddot{x}_R = 0,$$

donde iremos encontrar que

$$\left(1 + \frac{Nm}{2}\right)\ddot{x}_L + (1 + Nm)\ddot{x}_M + \left(1 + \frac{Nm}{2}\right)\ddot{x}_R = 0. \quad (3.96)$$

Esta expressão descreve um sistema de três partículas grandes, com N grãos pequenos entre a primeira e a segunda, e outros N grãos pequenos entre a segunda e a terceira. Cada partícula tem massa renormalizada dada por

$$\mu_L = 1 + \frac{Nm}{2}, \quad (3.97)$$

$$\mu_M = 1 + Nm, \quad (3.98)$$

e

$$\mu_R = 1 + \frac{Nm}{2}. \quad (3.99)$$

Note que a massa efetiva do grão grande central é modificada por duas cadeias de grãos pequenos, uma de cada lado deste grão, fazendo com que sua massa renormalizada seja maior em relação aos grãos da borda da cadeia efetiva.

Com isso chegamos à generalização da descrição efetiva realizada na referência principal desta dissertação, através da análise de uma cadeia decorada com um número qualquer de grãos pequenos entre os maiores, escrevendo expressões para o potencial efetivo e para a massa reduzida em termos da quantidade de grãos pequenos que separam os maiores grãos.

As figuras (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) nos mostram os perfis de velocidade de uma cadeia decorada longa com dois, três, cinco e sete grãos pequenos entre os maiores, respectivamente. As linhas tracejadas representam a velocidade dos grãos maiores da cadeia efetiva não decorada. Enquanto que as linhas contínuas representam as velocidades dos grãos maiores na cadeia decorada original. Observe que a medida que adicionamos mais grãos pequenos entre os maiores, o pulso de velocidades se torna mais largo, se afastando cada vez mais dos resultados numéricos.

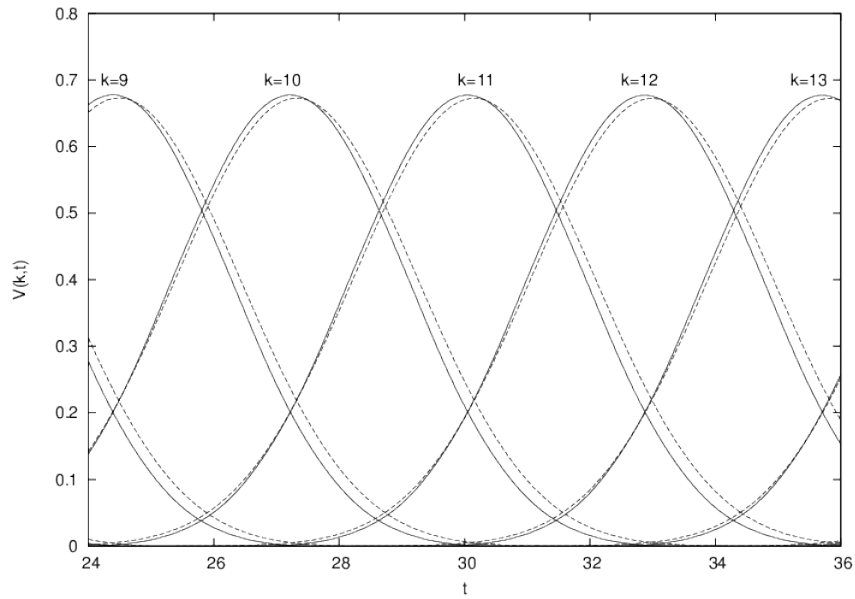


Figura 3.7: Perfil de velocidades para os grãos grandes da cadeia longa com dois grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa o movimento dos grãos da cadeia efetiva. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$.

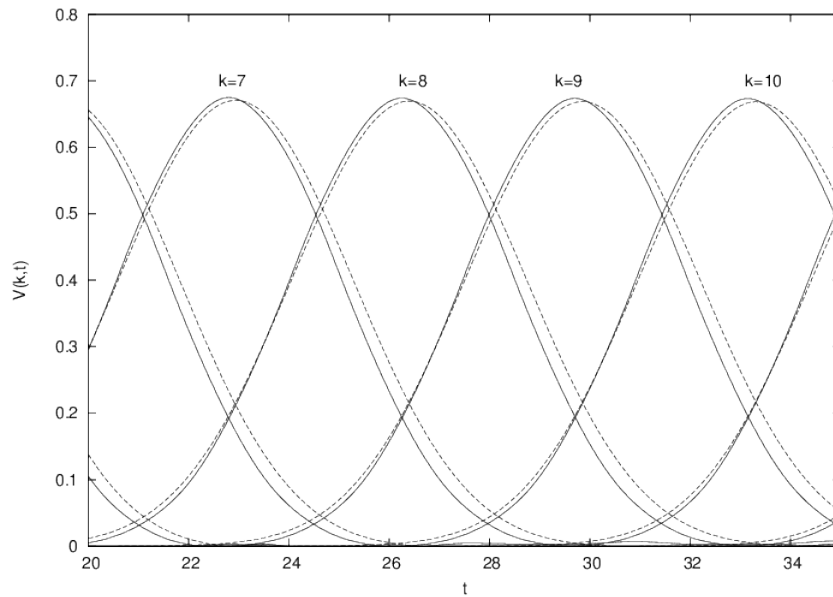


Figura 3.8: Perfil de velocidades para uma cadeia decorada longa com três grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa a velocidade dos grãos da cadeia efetiva não decorada. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$.

Em uma cadeia longa podemos também determinar o tempo de residência do pulso no grão k . Primeiramente, lembramos que na eq. (2.83) o tempo de residência foi escrito em termos de η e ζ . O primeiro representa a massa reduzida dos grãos efetivos, enquanto que o segundo aparece no potencial efetivo. Como conseguimos obter expressões para o potencial efetivo e a

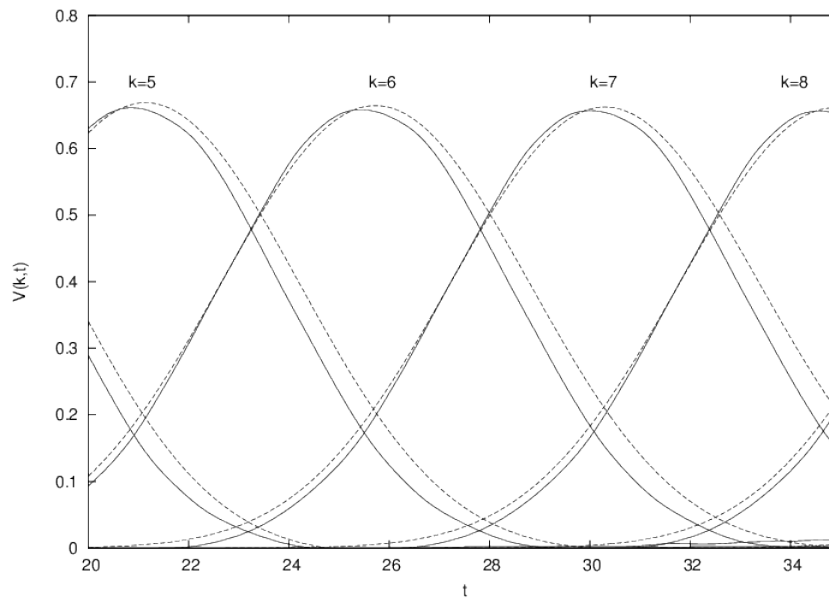


Figura 3.9: Perfil de velocidades para uma cadeia decorada longa com cinco grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa a velocidade dos grãos da cadeia efetiva. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$.

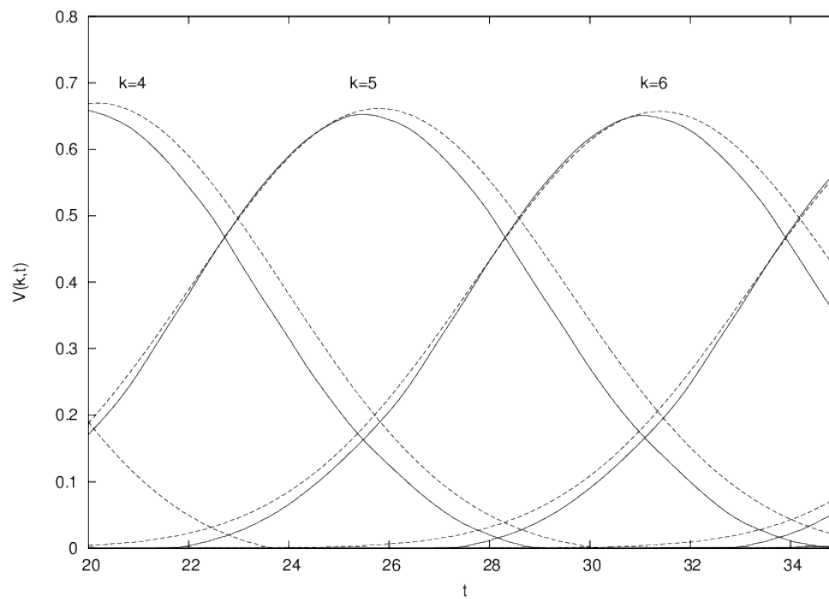


Figura 3.10: Perfil de velocidades para uma cadeia decorada longa com sete grãos pequenos entre os maiores. A linha tracejada representa a velocidade dos grãos da cadeia efetiva. O raio dos grãos pequenos é $r=0.3$.

massa efetiva em função da quantidade de grãos em uma cadeia com N grãos pequenos entre os maiores, o tempo de residência também pode ser escrito em função da quantidade de grãos pequenos da cadeia original.

Reconhecendo ζ no potencial efetivo generalizado, temos que

$$\zeta = \frac{\mathfrak{R}}{(2 + (N - 1)\gamma)^{3/2}}. \quad (3.100)$$

Na cadeia efetiva o tempo de residência será independente de k , exceto para os grãos da borda da cadeia, que têm massas efetivas diferentes. Desta maneira, substituindo a equação acima na equação (2.83) e lembrando que para os grãos do meio da cadeia efetiva a massa renormalizada é dada por $\mu = 1 + Nm$, encontramos

$$T_k = \sqrt{\pi} \left[\frac{5(1 + Nm)(2 + (N - 1)\gamma)^{3/2}}{4\mathfrak{R}} \right]^{2/5} \frac{\Gamma(7/5)}{\Gamma(9/10)}. \quad (3.101)$$

A equação acima é a expressão generalizada para o tempo de residência do pulso em um grão da cadeia efetiva. Usando esta equação na equação (2.81), encontramos o tempo de propagação do pulso ao longo da cadeia efetiva. Nas figuras (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) mostramos a comparação entre os resultados numéricos e teóricos do tempo necessário para o pulso chegar no k -ésimo grão, com $N = 2, 3, 5$ e 7 , respectivamente. O tempo t varia linearmente com k . Novamente k é referente somente aos grãos maiores da cadeia. Diferentes símbolos representam diferentes valores de raio dos menores grãos. Observamos que a medida que adicionamos grãos pequenos entre os maiores na cadeia original, a concordância entre os resultados numéricos e analíticos diminui.

Como t é a soma dos tempos de residência, T_k , e como este não depende de k , a velocidade do pulso, v_{pulso} , é dada por

$$v_{pulso} = \frac{dk}{dt} = \frac{1}{T_k}. \quad (3.102)$$

Desta maneira a velocidade pulso será o inverso do tempo de residência do pulso no grão.

Na figura (3.15) mostramos a comparação entre o resultado numérico e analítico para a velocidade do pulso em função de N . Notamos, que a medida que adicionamos mais grãos pequenos, a velocidade do pulso vai diminuindo, pois com o aumento da quantidade de grãos pequenos mais energia vai ficando nestes grãos. O erro entre as velocidades é da ordem de 25%.

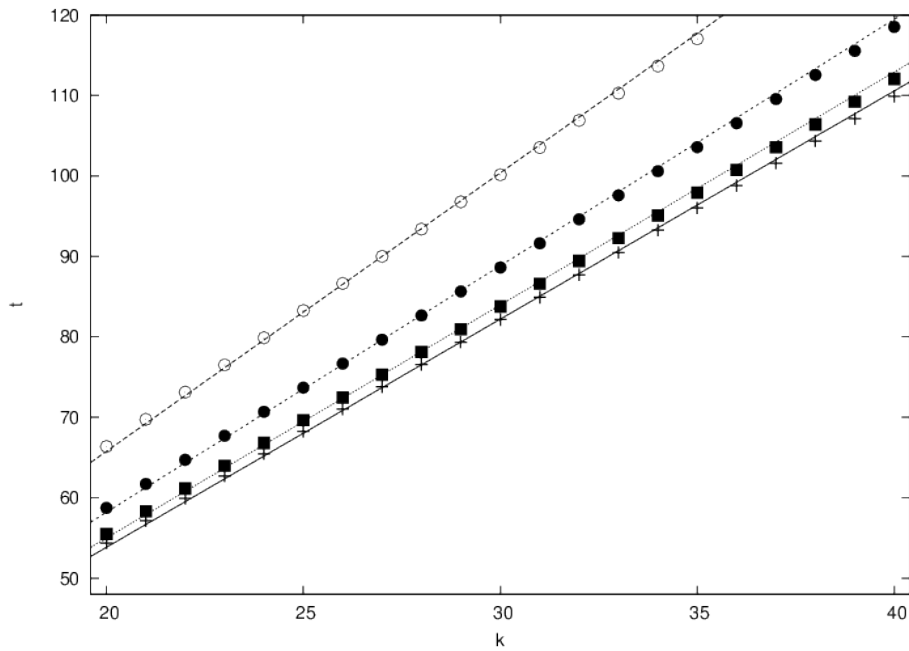


Figura 3.11: Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com dois grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$).

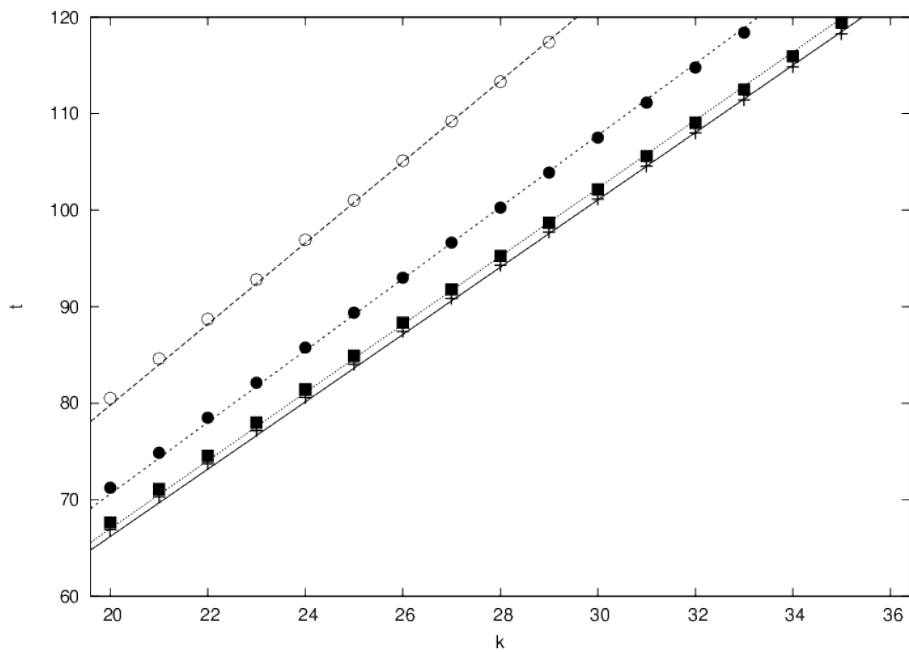


Figura 3.12: Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com três grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$).

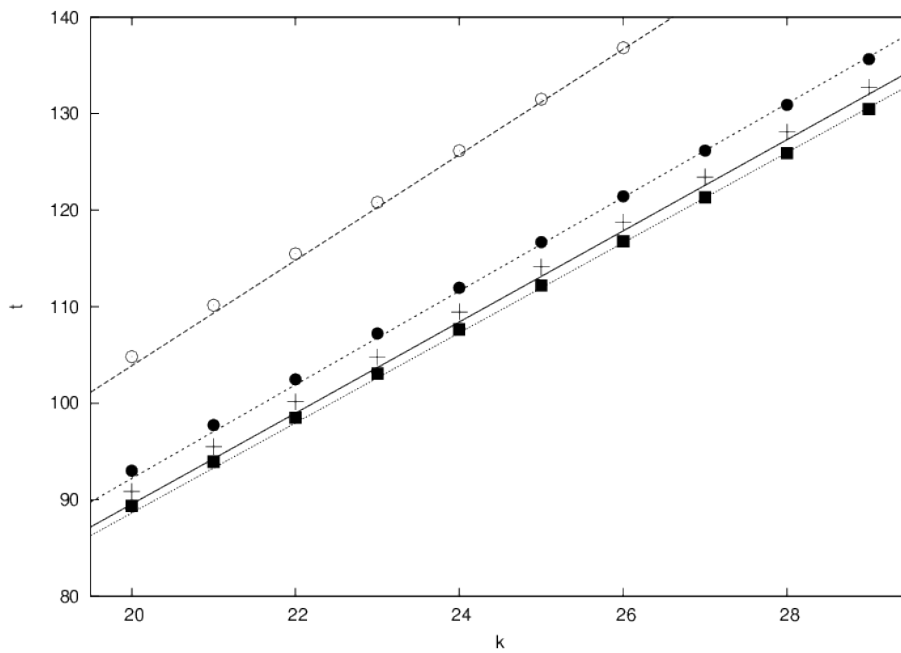


Figura 3.13: Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com cinco grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$).

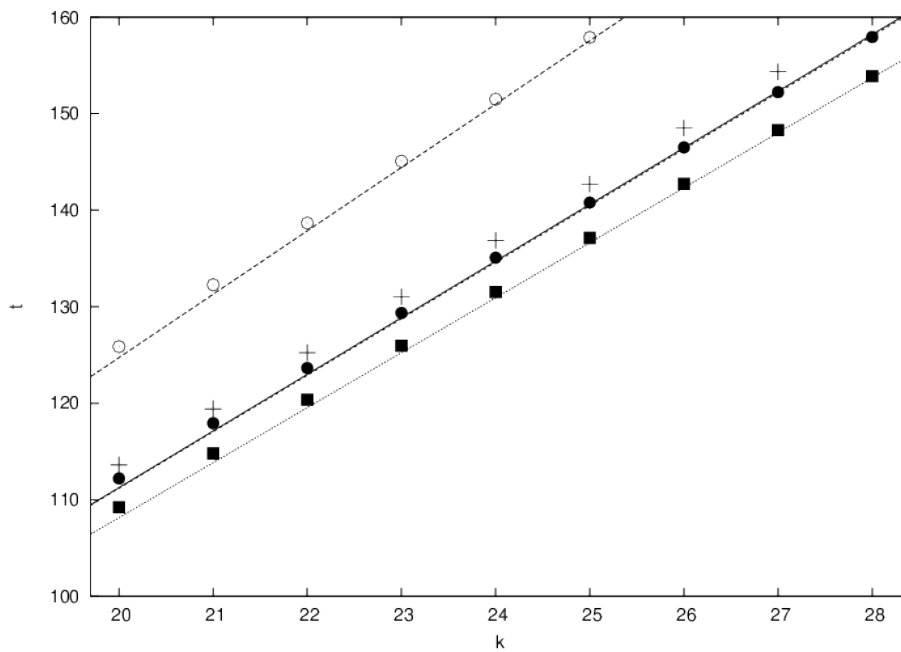


Figura 3.14: Tempo t para o pulso chegar no k -ésimo grão em uma cadeia decorada, agora com sete grãos pequenos entre os maiores, para $r = 0.1$ (círculos vazios), $r = 0.2$ (círculos cheios), $r = 0.3$ (quadrados cheios) e $r = 0.4$ (cruz). Os resultado teóricos são mostrados com linhas tracejadas ($r = 0.1$), tracejadas-pontilhadas ($r = 0.2$), pontilhadas ($r = 0.3$) e contínuas ($r = 0.4$).

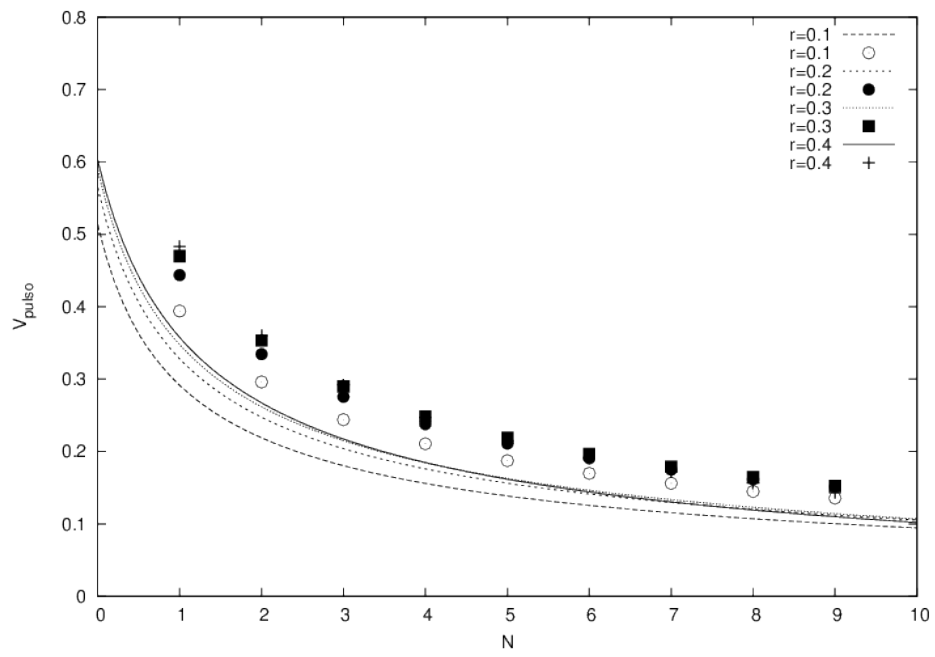


Figura 3.15: Velocidade do pulso em função de N . As linhas representam os dados analíticos enquanto que os pontos os resultados numéricos.

4 *Conclusões e Perspectivas*

Nesta dissertação, estudamos a propagação de um pulso em uma cadeia decorada, de grãos esféricos e que interagem através do potencial de Hertz. Nós nos baseamos no trabalho de Harbola et al. [35], onde os autores estudaram a propagação de um pulso em uma cadeia decorada simples e em uma cadeia decorada afilada, na qual cada par de grão grande era separado por um grão pequeno. Como foi determinado pelos autores, o raio dos grãos menores não poderia ser maior que $r = 0.4$, e o movimento dos grãos menores, individualmente, era dado por uma parte média e por uma parte oscilatória. Esta parte oscilatória, era bem comportada e descrita por uma função tipo seno. Os autores capturaram a influência dos grãos menores através da substituição da cadeia decorada por uma cadeia não decorada efetiva. Essa cadeia efetiva era composta por grãos com massas efetivas, que dependiam da massas dos grãos menores, e um potencial efetivo. Com isso, os autores determinaram uma interação efetiva entre os grãos da cadeia não decorada.

Os autores estavam interessados em obter o perfil de velocidades dos maiores grãos quando a cadeia decorada era substituída pela não decorada (cadeia efetiva). Assim, os autores mostraram resultados da comparação entre as velocidades dos grãos grandes da cadeia decorada, com as velocidades dos maiores grãos da cadeia efetiva, obtidos numericamente e analiticamente, respectivamente. A concordância entre os resultados das velocidades foi bastante satisfatória. Eles também apresentaram resultados para o tempo de propagação do pulso ao longo da cadeia para vários tamanhos dos menores grãos. Além do mais, eles obtiveram, mesmo não sendo determinante para a propagação do pulso, a frequência de oscilação dos menores grãos na cadeia original e compararam com a análise analítica para a mesma. Observou-se que a frequência de oscilação do menor grão diminuiu à medida que aumentava-se o seu raio. Também eles verificaram que a energia dos grãos menores na cadeia original era desprezível em comparação com a energia dos maiores grãos.

Os autores também fizeram uso de uma teoria analítica que vem se mostrando bastante eficaz para analisar a propagação do pulso em cadeias granulares, a Teoria Binária. Esta teoria supõe que a propagação do pulso ao longo de cadeias se dá através de sucessivas colisões de

dois em dois grãos. Por este motivo, os autores da referência principal desta dissertação não aplicaram a Teoria Binária diretamente na cadeia decorada. Pois, neste tipo de cadeia, o grão menor sempre colidia mais de uma vez com os grãos maiores, o que motivou o uso da descrição efetiva.

O principal objetivo desta dissertação, foi chegar analiticamente a expressões semelhantes a obtidas em [35], através de argumentos semelhantes, para a descrição efetiva, só que agora em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores grãos. Ou seja, queríamos estudar a propagação do pulso em cadeias decoradas com uma quantidade qualquer de grãos pequenos entre os maiores, generalizando assim os resultados obtidos na referência principal.

Com isso, nós conseguimos encontrar expressões para a massa efetiva e para o potencial efetivo, em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores na cadeia original. Percebemos que assim como em [35], a massa efetiva dos grãos do meio da cadeia efetiva são maiores que as da borda da cadeia, já que, na cadeia original, os grãos do meio da cadeia estão em contato com uma quantidade maior de grãos pequenos.

Um resultado interessante que obtivemos, é que quando aumentamos a quantidade de grãos pequenos entre os maiores, os grãos pequenos continuam a oscilar entre os maiores. O movimento dos menores grãos agora é determinado por uma parte média e uma parte oscilatória que não é mais uma função tipo seno. Uma função tipo seno só é encontrada quando analisamos o movimento do centro de massa do sistema formado apenas pelos pequenos grãos. Destacamos também que, a comparação entre a propagação da energia cinética e do momento ao longo da cadeia original e da cadeia efetiva, a medida que adicionarmos um grão pequeno na cadeia original, não nos dá boa concordância. Isso se deve ao fato de momento e energia cinética serem dependentes da massa dos grãos, e na cadeia efetiva as massas efetivas são maiores que a dos grãos grandes na cadeia original. Assim, os dados numéricos e analíticos não terão boa concordância, embora o comportamento qualitativo seja o mesmo.

Nós mostramos também, gráficos para a comparação das velocidades dos grãos maiores na cadeia decorada original e na cadeia efetiva. Os resultados são satisfatórios, mas destaca-se que a medida que aumentamos a quantidade de grãos pequenos entre os maiores a concordância diminui. Também conseguimos escrever uma expressão para o tempo de propagação do pulso em função na cadeia efetiva em função da quantidade de grãos pequenos entre os maiores na cadeia original. Como vimos, a concordância entre os resultados analíticos e numéricos vai diminuindo à medida que adicionamos grãos pequenos entre os maiores. Por último, comparamos os resultados numéricos e analíticos para a velocidade do pulso em função de quantidade de grãos pequenos entre os maiores na cadeia.

Por fim, uma perspectiva futura para este trabalho seria chegar a mesma descrição, no entanto, agora para cadeias decoradas afiladas, assim como foi feito na referência principal desta dissertação.

Referências Bibliográficas

- [1] A. S. Foust et al., *Princípios das Operações Unitárias*, 3ed, Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [2] P. B. Umbanhowar, *Shaken sand - a granular fluid?*, Nature **424**, p. 886-887 (2003).
- [3] H. M. Jaeger, S. R. Nagel and R. P. Behringer, *Granular solids, liquids and gases*, Reviews of Modern Physics **68**, p. 1259–1273, (1996).
- [4] J. Duran, *Sands, powders and grains: an introduction to the physics of granular materials*, 1ed. New York: Springer, 2000.
- [5] T. M. Knowlton, J. W. Carson, G. E. Klinsing and W. C. Yang, Particle Technology **90**, 44, (1994).
- [6] B. J. Ennis, J. Green and R. Davis, Particle Technology **90** 32, (1994).
- [7] J. P. Rino, *Materiais Granulares*, Física na Escola **2**, n. 1 (2001).
- [8] H. M. Jaeger, S. R. Nagel and R. P. Behringer, *The Physics of Granular Materials*, Physics Today **49**, 32 (1996).
- [9] V. F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **25**, 733 (1983).
- [10] V. F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **24**, 733 (1984).
- [11] A. N. Lazaridi and V. F. Nesterenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **26**, 405 (1985).
- [12] J. Hong, *Universal Power-Law of the Impulse Energy in Granulars Protectors*, Phys. Rev. Lett. **94**, 108001 (2005).
- [13] A. Sokolow, M. Nakagawa, J. H. Agui and S. Sen, *Absorption of short duration pulses by small, scalable, tapered granular chains*, Appl. Phys. Lett. **87**, 254104 (2005).
- [14] R. Doney and S. Sen, *Decorated, tapered and highly nonlinear granular chains*, Phys. Rev. Lett. **97**, 155502 (2006).
- [15] R. L. Doney and S. Sen, *Impulse absorption by tapered horizontal alignments of elastic spheres*, Phys. Rev. E **72**, 041304 (2005).
- [16] F. Melo, S. Job, F. Santibañez and F. Tapia, *Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain*, Phys. Rev. E **73**, 041305 (2006).
- [17] R. L. Doney, J. H. Agui and S. Sen, *Energy partitioning and impulse dispersion in the decorated, tapered, strongly nonlinear granular alignment: A system with many potential applications*, J. Appl. Phys. **106**, 064905 (2009).

- [18] A. Rosas and K. Lindenberg, *Pulse dynamics in a chain of granules with friction*, Phys. Rev. E **68**, 041304 (2003).
- [19] E. B. Herbold and V. F. Nesterenko, *Shock wave structure in a strongly nonlinear lattice with viscous dissipation*, Phys. Rev. E **75**, 021304 (2007).
- [20] A. Rosas, A. Romero, V. F. Nesterenko and K. Lindenberg, *Observation of Two-Wave Structure in Strongly Nonlinear Dissipative Granular Chains*, Phys. Rev. Lett. **98**, 164301 (2007).
- [21] A. Rosas, A. Romero, V. F. Nesterenko and K. Lindenberg, *Short-pulse dynamics in strongly nonlinear dissipative granular chains*, Phys. Rev. E **78**, 051303 (2008).
- [22] R. Carretero-González, D. Khatri, M. A. Porter, P. G. Kevrekidis and C. Daraio, *Dissipative Solitary Waves in Granular Crystals*, Phys. Rev. Lett. **102**, 024102 (2009).
- [23] F. S. Manciu and S. Sen, *Secondary solitary wave formation in systems with generalized Hertz interactions*, Phys. Rev. E **66**, 016616 (2002).
- [24] S. Job, F. Melo, A. Sokolow and S. Sen, *How Hertzian Solitary Waves Interact with Boundaries in 1D Granular Medium*, Phys. Re. Lett. **94**, 178002 (2005).
- [25] M. Manciu, S. Sen and J. Hurd, *The propagation and backscattering of soliton-like pulses in a chain of quartz beads and related problems. (I). Propagation*, Physica A **274**, 588 (1999).
- [26] M. Manciu, S. Sen and J. Hurd, *The propagation and backscattering of soliton-like pulses in a chain of quartz beads and related problems. (II). Backscattering*, Physica A **274**, 607 (1999).
- [27] J. Hong and A. Xu, *Nondestructive identification of impurities in granular medium*, Appl. Phys. Lett. **81**, 25 (2002).
- [28] S. Job, F. Santibanez, F. Tapia and F. Melo, *Wave localization in strongly nonlinear Hertzian chains with mass defect*, Phys. Rev. E **80**, 025602(R) (2009).
- [29] Q. Chen, X. Yang, Z. Wang and X. Zhao, *Two Kinds of localized oscillating modes in strongly nonlinear Hertzian chain with defects*, Chin. Phys. Lett. **29**, 014501 (2012).
- [30] C. Daraio, D. Ngo, V. F. Nesterenko and F. Fraternali, *Highly nonlinear pulse splitting and recombination in a two-dimensional granular network*, Phys. Rev. E **82**, 036603 (2010).
- [31] D. Ngo, F. Fraternali and C. Daraio, *Highly nonlinear solitary wave propagation in Y-shaped granular crystals with variable branch angles*, Phys. Rev. E **85**, 036602 (2012).
- [32] J. Yang, S. Dunatunga and C. Daraio, *Amplitude-dependent attenuation of compressive waves in curved granular crystals constrained by elastic guides*, Acta Mech. **223**, 549 (2012).
- [33] A. Rosas and K. Lindenberg, *Pulse velocity in a granular chain*, Phys. Rev. E **69**, 037601 (2004).
- [34] U. Harbola, A. Rosas, M. Esposito and K. Lindenberg, *Pulse propagation in tapered granular chains: An analytical study*, Phys. Rev. E **80**, 031303 (2009).

- [35] U. Harbola, A. Rosas, A. H. Romero, M. Esposito and K. Lindenberg, *Pulse propagation in decorated granular chains: An analytical approach*, Phys. Rev. E **80**, 051302 (2009).
- [36] U. Harbola, A. Rosas and K. Lindenberg, *Pulse propagation in a randomly decorated chains*, Phys. Rev. E **82**, 011306 (2010).
- [37] I. L. D. Pinto, A. Rosas, A. H. Romero and K. Lindenberg, *Pulse propagation in a chain of o-rings with and without precompression*, Phys. Rev. E **82**, 031308 (2010).
- [38] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Addison-Wesley, MA, (1959).
- [39] H. Hertz and J. Reine Angew. Math. **92**, 156 (1881).
- [40] C. M. Donahue, C. M. Hrenya and R. H. Davis, *Stoke's Cradle: Newton's Cradle with liquid coating*, Phys. Rev. Lett. **105**, 034501 (2010).