

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física



Tese de Doutorado

# Potencial Efetivo em Modelos com Violação de Lorentz

Claudio Fernando Ferreira Farias

João Pessoa, Junho de 2013

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física



Tese de Doutorado

# Potencial Efetivo em Modelos com Violação de Lorentz

Claudio Fernando Ferreira Farias

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Albert Petrov, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, Junho de 2013

F224p Farias, Claudio Fernando Ferreira.  
Potencial efetivo em modelos com violação de Lorentz /  
Claudio Fernando Ferreira Farias.-- João Pessoa, 2013.  
68f. : il.  
Orientador: Albert Petrov  
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN  
1. Física. 2. Violação da invariância de Lorentz. 2.Potencial  
efetivo. 3. Formulação de Horava-Lifshitz. 4. Modelo de  
Kostelecký-Berger.



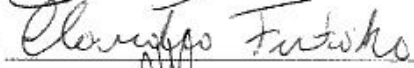


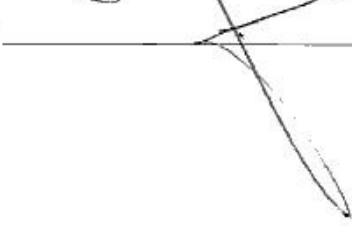
UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Cláudio Fernando Ferreira Farias**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos quatorze dias do mês de junho do ano de dois mil e treze, às 10h00, na sala de  
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da  
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora  
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de  
5 Gravitação e Cosmologia, o Sr. **Cláudio Fernando Ferreira Farias**. A comissão  
6 examinadora foi composta pelos professores doutores: *Albert Petrov* (UFPB),  
7 orientador e presidente da banca examinadora, *Laércio Losano* (UFPB), *Cláudio*  
8 *Furtado* (UFPB), *Victor Rivelles* (USP) e *Jorge Mario Malbouisson* (UFBA). Dando  
9 início aos trabalhos, o Prof. *Albert Petrov* comunicou aos presentes a finalidade da  
10 reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a  
11 exposição do trabalho de tese intitulado “*Potencial efetivo em modelos com violação de*  
12 *Lorentz*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que  
13 emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da  
14 Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para  
15 constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata  
16 que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João  
17 Pessoa, Paraíba, **14 de junho de 2013**.

18

Prof. Dr. Albert Petrov	
<i>Orientador - UFPB</i>	
Prof. Dr. Laércio Losano	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Cláudio Furtado	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Victor Rivelles	
<i>USP</i>	
Prof. Dr. Jorge Mario Malbouisson	
<i>UFBA</i>	
Danilo Wilson Lemos Menezes	
<i>Secretário</i>	

A meu pai.

*Quanto mais longe da terra,  
tanto mais longe de Deus.*

**Gilberto Gil**

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teorias na Formulação de Horava-Lifshitz</b>	<b>12</b>
2.1 A Gravitação de Horava . . . . .	14
2.2 Teorias não-gravitacionais . . . . .	18
<b>3 Potencial Efetivo na Formulação de Horava-Lifshitz</b>	<b>22</b>
3.1 Modelo escalar com $z$ genérico . . . . .	25
3.2 QED escalar com $z = 2$ . . . . .	26
3.3 Teoria de Yukawa com $z = 2$ . . . . .	35
3.4 QED escalar com $z$ genérico . . . . .	36
3.5 Teoria de Yukawa com $z$ genérico . . . . .	41
<b>4 Violação de Lorentz em Teoria de Supercampos</b>	<b>45</b>
4.1 Deformação do Superespaço Tridimensional . . . . .	47
4.2 Deformação do Superespaço Quadridimensional . . . . .	53
<b>5 Conclusão</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

3.1	Contribuições envolvendo apenas o propagador do campo de calibre. . . . .	29
3.2	Propagador "vestido" de um campo de calibre. . . . .	29
3.3	Contribuições envolvendo propagadores de calibre e de matéria. . . . .	30
3.4	Comportamento do potencial efetivo dado pela expressão (3.86) com relação aos campos para $n = 1, 2$ e $3$ . O gráfico exibe máximos e mínimos de acordo com a paridade de $n$ . . . . .	41
3.5	Comportamento do potencial efetivo dado pela expressão (3.86) com relação aos campos para $n = 1, 2$ e $3$ . A estabilidade da teoria dependa da paridade de $n$ . . . . .	41
4.1	Contribuição ao termo cinético no superespaço tridimensional . . . . .	52
4.2	Contribuição ao termo cinético no superespaço quadridimensional . . . . .	55

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a meus pais por criarem os caminhos que me levaram até aqui. Por me darem tudo e receberem tão pouco de mim.

Agradeço ao meu orientador Albert Petrov pela orientação, paciência e pela motivação ao estudo da Física como forma de encontrar a beleza guardada na natureza.

Aos professores José Roberto Nascimento, Marcelo Gomes, Adilson José e André Lehum pela colaboração neste trabalho.

Ao colega Fabrício da Gama pelos estudos em grupo e por me ajudar bastante na introdução à supersimetria.

Ao colega Thiago Nascimento por nossos estudos, discussões e pela revisão desta tese.

Ao colega Breno Ferraz pela amizade e por ser de grande ajuda no dia a dia da universidade. Agradeço também pelas dicas referentes à compilação deste texto.

Ao colega Farinaldo Queiroz pela amizade, companhia e pelas discussões úteis sobre a pesquisa científica e a vida acadêmica.

Ao professor Edilberto Silva pelos conselhos importantes ao longo do doutorado.

Ao professor Marcelo Leite pela formação básica do mestrado.

Aos colegas Dibartolomei, Paulo Dias, Italo, Maíra, Clarissa, Iarley, Gis-laine, Aliliane, Júlio César, Artur, Adriano, Silvina, Antônio de Pádua, Antonio Santos, Jilvan, Lázaro, Bertúlio, Luis e Eduardo pelo agradável convívio na universidade e pelo aprendizado constante.

Aos amigos Beto, Eusébio, Flávio e Ângela por todo apoio, paciência e companheirismo. Especialmente a Beto por toda base que me deu em João

Pessoa e pela paciência extra nesta fase de escrita da tese.

A todas as pessoas com quem convivi na cidade de João Pessoa pelas oportunidades de crescimento pessoal que me deram.

Aos amigos Marccone Sena e Fábio Novaes por todo trabalho em grupo ao longo dos anos e por me darem boa parte da força que tenho recebido.

Por fim, agradeço a Capes pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Nesta tese, revisamos alguns conceitos básicos relacionados à violação da simetria de Lorentz e a teorias do tipo Horava-Lifshitz. Apresentamos nossa contribuição ao cálculo do potencial efetivo em duas formulações que exibem violação da invariância de Lorentz. Primeiro, calculamos o potencial efetivo para algumas teorias do tipo HL. Obtivemos resultados para o modelo escalar puro, para a QED escalar com expoente crítico  $z = 2$  e  $z$  genérico, e para o modelo de Yukawa também com  $z = 2$  e com valores arbitrários de  $z$ . Para este último modelo, demonstramos que o potencial efetivo se anula para  $z$  par e possui valores não triviais para  $z$  ímpar. A segunda formulação é o modelo de Kostelecký-Berger que implementa a quebra da simetria de Lorentz em supersimetria. Desenvolvemos a teoria de supercampos para três e quatro dimensões do espaço-tempo com base neste modelo e mostramos como este desenvolvimento leva a uma teoria de supercampos com violação de Lorentz do tipo-éter. Obtemos também as contribuições de um loop para a ação efetiva e para potencial efetivo nesta teoria.

**Palavras-chave:** Violação da invariância de Lorentz; Potencial efetivo; Formulação de Horava-Lifshitz; Modelo de Kostelecký-Berger.

# Abstract

In this thesis, we review some basic concepts related to Lorentz symmetry violation and Horava-Lifshitz-like theories. We present our contribution to the calculation of the effective potential in two frameworks that exhibit Lorentz invariance violation. First, we calculate the effective potential for some HL-like theories. We obtained results for the pure scalar model, for the scalar QED with critical exponent  $z = 2$  and  $z$  generic, and for the Yukawa model also with  $z = 2$  and with arbitrary values of  $z$ . For the latter model, we show that the effective potential vanishes for even  $z$  and has nontrivial values for odd  $z$ . The second framework is the Kostelecký-Berger model that implements the Lorentz symmetry breaking in supersymmetry. We develop the theory of superfields for three and four-dimensional space-time based on this model and show how this development leads to a theory of superfields with ether-like Lorentz violation. We also obtained the one loop contributions to the effective action and effective potential in this theory.

**Keywords:** Lorentz invariance violation; Effective potential; Horava-Lifshitz formulation; Kostelecký-Berger model.

# Capítulo 1

## Introdução

No início do século XX, a Teoria da Relatividade, proposta por Albert Einstein, revolucionou as ciências naturais ao mostrar uma nova concepção da realidade onde o espaço e o tempo podem ser tratados de forma equivalente formando uma estrutura indissociável denominada espaço-tempo. O ponto de partida para o estudo desta teoria corresponde a imposição de dois postulados. O primeiro estabelece que a velocidade da luz é sempre a mesma independente do referencial inercial adotado, o que contraria as transformações de Galileu. O segundo diz que as leis físicas devem ser invariantes quando aplicadas a referenciais inerciais distintos. Assim, as equações que descrevem os sistemas físicos devem levar aos mesmos resultados quando transformadas de um sistema inercial para outro, ou seja, a Teoria da Relatividade deve ser uma teoria covariante. A correspondência entre referenciais inerciais descritos por estas equações é feita pelas transformações de Lorentz. Estas transformações são classificadas em dois tipos: as rotações em torno dos três eixos espaciais e os empurrões (boosts) que correspondem a uma mudança de velocidades ao longo dos eixos espaciais. Elas também podem ocorrer como uma forma combinada dos dois tipos. Assim, podemos dizer que um sistema é dotado de simetria de Lorentz quando a física descrita por suas equações é invariante pelas transformações de Lorentz.

A Teoria da Relatividade é um dos pilares de Física moderna. Sua união com um outro pilar, a Mecânica Quântica, resultou na construção da Teoria Quântica de Campos, que permite descrever a física das partículas elemen-

tares usando a linguagem matemática de campos estendidos no espaço. O desenvolvimento destas ideias permitiu o surgimento do Modelo Padrão de Partículas (MP) que descreve as partículas fundamentais e suas interações, a saber, a força eletromagnética, a força nuclear forte e a força nuclear fraca. Não estando incluída, portanto, a gravidade, que é descrita de maneira clássica pela Teoria da Relatividade Geral. Um resultado importante do Modelo Padrão é a simetria CPT. Um sistema é dito possuir simetria CPT se a física prevista para tal sistema não for alterada pelo conjunto de transformações C, P e T. A transformação C consiste na conjugação de carga (transformação da partícula na sua antipartícula). A transformação P consiste na transformação de paridade, ou seja, na inversão das coordenadas espaciais  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . A transformação T consiste na inversão da coordenada temporal  $t \rightarrow -t$ .

Caminhando ao lado do sucesso da Teoria Quântica de Campos e do Modelo Padrão, está o interesse dos físicos em expandir o alcance de tais teorias a setores ainda não compreendidos pela física. Um tema que tem recebido atenção especial ao longo das últimas décadas é o da possibilidade de incorporação da gravidade ao Modelo Padrão. Os físicos esperam que tal teoria unificada possa descrever a física em sistemas com energias muito mais altas que as alcançadas nos experimentos atuais. Assim, tem crescido o interesse na elaboração de teorias mais abrangentes descritas em escalas onde simetrias fundamentais às teorias em vigor hoje possam ser violadas. Entre elas estão a simetria CPT e a simetria de Lorentz.

A Teoria da Relatividade já foi bastante testada e mostrou-se ser um dos maiores sucessos da ciência em todos os tempos. Mesmo assim, a busca por novas descrições fundamentais da natureza tem motivado físicos teóricos e experimentais a investigar as possibilidades de violação da simetria de Lorentz. A busca por tal violação não é mesmo uma tarefa trivial. Teorias fundamentais que propõem tal quebra encontram pela frente a tarefa de ajustar suas características à física conhecida, já testada, e aos preceitos teóricos já estabelecidos. Assim, características como unitariedade, causalidade, estabilidade e renormalizabilidade precisam ser analisadas. O simples fato

de desrespeitar as transformações de Lorentz pode ser uma violação grave, e uma definição mais precisa destas transformações é necessária aqui como guia para seu estudo. Precisamos discernir as transformações de Lorentz de observador, que são transformações do sistema de coordenadas e as transformações de Lorentz de partícula, que são representadas por rotações ou boosts em um campo ou partícula individual, com o sistema de coordenadas fixo. O ponto fundamental é que, segundo a Relatividade, a física das partículas e dos campos na presença de campos de fundo é invariante pelas transformações de Lorentz de observador enquanto que para transformações de partícula, campos de fundo não são afetados, o que altera as medidas do sistema. Ao leitor, é recomendada a referência [1] com uma introdução pedagógica ao tema.

É possível estudar a violação da invariância de Lorentz em três níveis. O primeiro refere-se às teorias fundamentais, à maneira como o espaço, o tempo e as interações são descritas e por qual mecanismo a quebra de simetria de Lorentz é gerada. O segundo diz respeito a um nível de energia mais baixo, em que termos residuais da quebra de Lorentz do nível fundamental podem aparecer na lagrangiana que descreve uma teoria efetiva. Assim, espera-se que tais termos sejam muito pequenos, sendo suprimidos pela escala de energia da teoria fundamental. O terceiro consiste nos testes experimentais feitos na esperança de que, mesmo pequenos, os efeitos descritos pela teoria efetiva possam ser observados por meio de estratégias que tornam os experimentos sensíveis a tais efeitos.

O desenvolvimento dessas ideias, levou ao surgimento do Modelo Padrão Estendido (MPE). O MPE pode ser definido como uma extensão do Modelo Padrão que inclui todos os termos que exibem violação da simetria de Lorentz. Sua origem remonta ao final dos anos 80, quando Kostelecký e Samuel [2] analisaram a possibilidade de quebra de Lorentz no contexto de Teoria de Cordas. Este trabalho serviu de inspiração para que, no final dos anos 90, Kostelecký e Colladay [3] elaborassem o Modelo Padrão Estendido mínimo (MPEm). O MPE pode exibir uma infinidade de termos. Já o MPEm possui

um número finito, já que agora são impostas condições realistas ao modelo, a saber: renormalizabilidade por contagem de potências, invariância de calibre e invariância por transformações de observador. Os termos na lagrangiana do MPEm podem ser classificados de acordo com seu comportamento sob transformações CPT. O Teorema CPT estabelece que, assumindo localidade e invariância de Lorentz, a invariância CPT é inevitável. Recentemente, O.W. Greenberg [4] estabeleceu que qualquer quebra de invariância CPT, necessariamente implica na violação da invariância de Lorentz. Assim, é possível haver um sistema com quebra de Lorentz que preserve CPT, descrito pelos termos denominados CPT-par, ou que exiba ambas as violações de simetria, descrito pelos termos CPT-ímpar, mas não um sistema físico que exiba apenas violação de simetria CPT.

O MPEm completo pode ser escrito separando explicitamente os termos do Modelo Padrão usual e aqueles que levam a violação da invariância de Lorentz (VIL):

$$L_{MPEm} = L_{MP} + L_{VIL}, \quad (1.1)$$

onde  $L_{VIL}$  inclui os termos  $L_{CPT-PAR}$  e os termos  $L_{CPT-IMPAR}$ . Aqui, não precisamos escrever a lista de todos os termos do MPEm, eles podem ser encontrados nas referências [3] e [5]. Porém, para fins pedagógicos, analisaremos as propriedades do protótipo de alguns termos de violação da invariância de Lorentz nesta extensão. Considere a lagrangiana de um campo fermiônico:

$$L = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - g\bar{\psi}\phi\psi - ig'G_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi + \dots \quad (1.2)$$

Na expressão acima, o primeiro termo é o termo cinético livre, o segundo inclui o acoplamento de Yukawa com o campo de Higgs  $\phi$ . O Modelo Padrão assume que o campo  $\phi$  se submete a quebra espontânea de simetria de modo que uma de suas componentes assume o valor esperado de vácuo não nulo  $\langle\phi_0\rangle$ . Isto leva a massa do férmion  $m_f = g\langle\phi_0\rangle$ . O terceiro termo tem um papel análogo ao do segundo, no exemplo (1.2), ele representa um termo da extensão  $L_{VIL}$ . O símbolo  $G_{\mu\nu}$  é o análogo tensorial de  $\phi$  e exibe quebra

espontânea de simetria, que pode levar a:

$$\langle G_{00} \rangle \neq 0, \quad \langle G_{\mu\nu} \rangle = 0 \quad \text{nos outros casos} \quad (1.3)$$

Aqui podemos observar a essência do Modelo Padrão Estendido mínimo: os valores esperados de vácuo não nulos dos campos revelam (no contexto da hipótese da extensão) a existência de um campo de fundo interagente com os campos associados à partículas (no nosso exemplo, férmions) capaz de modificar as propriedades físicas do sistema em questão. A física do sistema descrito pela lagrangiana (1.2) é invariante por transformações de Lorentz de observador, mas é modificada pela transformação de partícula, já que o campo de fundo não é afetado por esta transformação. Ainda é necessário deixar explícito que constantes de acoplamento, como a constante  $g'$  no exemplo dado, medem a intensidade da contribuição dos termos à lagrangiana e, portanto, devem ser pequenos comparados àquelas do Modelo Padrão usual, sendo suprimidos pela escala de energia de teorias fundamentais.

Um tipo particularmente interessante de campos de fundo tensoriais constantes são aqueles representados por vetores  $v_\mu$  que determinam direção e sentido privilegiados no vácuo. Teorias baseadas na existência de tais campos constantes são denominadas teorias do tipo-éter em alusão à concepção pré-relativística da existência de um meio permeando o vácuo e que poderia ser detectado por meio de experimentos sensíveis a mudanças de orientação.

A modificação do Modelo Padrão por meio da inclusão de campos tensoriais constantes pode ter como efeito a modificação de suas relações de dispersão. Assim, o estudo da cinemática das partículas é um meio comumente utilizado de sondar violações da simetria de Lorentz. Sabemos que esta simetria pode ser descrita pela invariância da norma ao quadrado de quadrivetores definidos no espaço de Minkovski, particularmente, a norma do quadrivetor de energia momento  $p^\mu$ , para o qual a relação de dispersão é dada por  $m^2 = p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$ . Em geral, a forma modificada desta relação padrão é dada por

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 + \Delta(E, \mathbf{p}). \quad (1.4)$$

A extensão da violação de Lorentz é quantificada por  $\Delta(E, \mathbf{p})$ , que depende dos parâmetros de violação de Lorentz. A relação (1.4) é chamada de relação de dispersão modificada (RDM). Tal modificação tem sérias consequências físicas, dentre elas podemos destacar modificações de valores do limiar de certas reações ou decaimentos que podem ser testados em experimentos. Como a violação de Lorentz se apresenta como uma correção muito pequena ao Modelo Padrão, experimentos feitos em cenários extremos são fortes candidatos a testes de modificações das relações de dispersão. Por esta razão, o estudo de raios cósmicos ultra energéticos tem atraído a atenção dos pesquisadores [6].

Em 1966, Greisen [7], Zatsepin e Kuzmin [8] introduziram a ideia de que partículas altamente energéticas podiam interagir com fótons da radiação de fundo cósmico (RFC), remanescente de estágios primitivos da expansão do universo e que permeia todo o espaço. Eles propuseram que prótons com energias próximas a  $10^{20}$  eV estariam submetidos a reações do tipo



onde a colisão de um próton com um fóton da radiação cósmica de fundo pode gerar um próton e um píon  $\pi^0$  ou um próton e um píon  $\pi^+$ . Dessa forma, o próton em questão perde energia até manter-se com um valor de energia abaixo de um certo limite, conhecido como *limite GZK*. Cálculos simples relacionados à cinemática da reação descrita acima mostram que

$$E_{GZK} = 6 \times 10^{19}. \quad (1.6)$$

Esta relação diz que nenhum próton com energia acima de  $E_{GZK}$  deve ser observado na terra. Pode-se perguntar então se um próton com energia muito mais alta que  $E_{GZK}$  poderia viajar pelo cosmos até ser detectado na Terra sem perder uma quantidade de energia suficiente para ficar abaixo do limiar.

A pergunta fundamental então passa a ser qual a distância percorrida pelo próton até que tenha atingido o limite GZK e não possa mais emitir píons. Para refinar esta análise, Stecker [9] considerou o fato de que prótons mais energéticos produzem píons interagindo com fótons menos energéticos. Assim, dada a curva do espectro da radiação de fundo cósmico, um número cada vez maior de fótons interage, fazendo com que a atenuação seja mais forte para prótons com maior energia. Considerando este e outros efeitos secundários, como perdas inelásticas, pode-se estimar que a distância máxima percorrida por um próton que atinge nossa atmosfera com  $E \gtrsim E_{GZK}$  é dada por  $l_{max} \simeq 100$  Mpc. Dessa forma, para um feixe de raios cósmicos ser chamado de "Super GZK", não basta que ele tenha energia superior a  $E_{GZK}$ , mas também que sua fonte deve estar a uma distância maior ou igual a 100 Mpc.

Raios super-GZK poderiam ser explicados por modificações nas relações de dispersão previstas pelo Modelo Padrão Estendido. Particularmente, uma modificação na velocidade da luz  $c \rightarrow c + \epsilon$  poderia elevar o limite GZK de modo a impedir a produção de píons. Tal resultado seria um importante indício de nova Física.

Experimentos de detecção de raios cósmicos super-GZK são promissores, porém ainda distantes de medidas satisfatórias de violações de Lorentz. Alguns anos atrás, dois grupos mostraram resultados discordantes a respeito de tais observações. A colaboração do Akeno Giant Air Shower Array (AGASA) afirmou ter detectado eventos bem acima do limite GZK [10]. Já a colaboração High Resolution Fly's Eye (HiRes) confirmou a existência do limite [11]. Os resultados desta colaboração estabelecem que, embora ocorram eventos com energia acima do limite GZK, a frequência destes ainda está de acordo com o esperado. Mais recente mete, a colaboração Pierre Auger, realizou medidas bem mais precisas que os experimentos anteriores e confirmou os dados obtidos pela colaboração HiRes. A frequência de raios super-GZK estavam de acordo com o previsto [12–14].

Experimentos em física de raios cósmicos não são a única forma de tes-

tar violações da simetria de Lorentz. Outros métodos incluem medidas envolvendo sistemas atômicos [15], modernos experimentos de Michelson-Morley [16, 17], oscilações de mésons neutros [18, 19], oscilações de neutrinos [20, 21], experimentos de birrefringência [22, 23], etc. Na verdade, a lista de experimentos possíveis é bastante grande e aqui destacamos alguns dos mais notáveis. Entretanto, nenhum deles apresentou medições convincentes de violações da simetria de Lorentz. Tudo o que os testes têm fornecido são restrições aos coeficientes que aparecem no Modelo Padrão Estendido. Na referência [24], Kostelecký e Russel têm compilado os valores limite de diversos coeficientes do MPEm obtidos a partir de experimentos.

Embora o estudo da violação da simetria de Lorentz no nível experimental ainda não tenha apresentado resultados satisfatórios, muitos avanços teóricos têm sido feitos. Modelos que preveem este tipo de violação continuam sendo propostos tanto no sentido de ampliar o alcance do Modelo Padrão Estendido quanto no estudo de teorias mais fundamentais que descrevem cenários onde a simetria de Lorentz é violada. Nesta tese, consideraremos recentes avanços nestes dois sentidos e trabalharemos um tópico relacionado a cada caso.

No primeiro tópico, estudaremos determinadas teorias em que a simetria de Lorentz é quebrada de maneira explícita. Estas exibem simetrias de Lifshitz, isto é, as equações de movimento são invariantes pelo reescalonamento

$$x^i \rightarrow bx^i, \quad t \rightarrow b^z t, \quad (1.7)$$

onde  $z$  é o expoente crítico dinâmico. O caso  $z = 1$  corresponde à equivalência entre espaço e tempo usual. Quando  $z \neq 1$ , a simetria de Lorentz é violada. Teorias descritas no contexto (1.7) são conhecidas de longa data da física da matéria condensada onde sistemas de coordenadas são divididos em subespaços tratados de maneira não equivalente [25, 26]. Elas serviram de inspiração para trabalhos recentes em gravitação quântica, onde a equivalência entre espaço tempo proposta pela Teoria da Relatividade é descartada. Dessa forma, a simetria de Lorentz é violada mesmo quando relacionada a transformações de observador e a teoria é dita não-relativística. Em 2009, Petr

Horava [27] apresentou sua candidata própria à teoria quântica da gravidade neste contexto. A teoria de Horava consiste numa teoria quântica de campos que descreve os fenômenos gravitacionais numa escala de energia muito superior a das medições atuais. Devido ao reescalonamento (1.7), esta teoria é ao mesmo tempo renormalizável e unitária, o que configura uma vantagem em relação as teorias usuais invariantes de Lorentz. Diversos assuntos relacionados à gravitação de Horava, incluindo seus aspectos cosmológicos [28–33], soluções exatas [34, 35] e buracos negros [36, 37], foram tratados em vários artigos.

Outra linha pesquisa tem sido dedicada ao estudo de teorias de campos não-gravitacionais no contexto anisotrópico proposto por Horava. Alguns trabalhos têm sido devotados à investigação de propriedades gerais de renormalização. Neste contexto, as versões do tipo Horava-Lifshitz para teorias de calibre [38–40], teorias de campos escalares [41–43], teoria de quatro férmions [44] e modelo  $CP^{N-1}$  [45] foram considerados. Outros resultados importantes são a generalização das identidades de Ward [46] e a modificação do efeito Casimir [47] para teorias do tipo HL. Alguns resultados interessantes foram obtidos em [48, 49], onde o potencial efetivo para as teorias  $\phi^4$  e Liouville-Lifshitz foram estudadas. Outros resultados para o potencial efetivo em teorias de campos escalares com certos valores do expoente crítico foram obtidas em [50–52].

Nesta tese, denominaremos as teorias descritas no cenário anisotrópico (1.7) de teorias na formulação de Horava-Lifshitz (HL) e apresentaremos nossa contribuição ao estudo do potencial efetivo em algumas teorias escritas nesta formulação.

Os resultados que obtivemos para formulação HL podem ser encontrados nas referências [53] e [54].

No segundo tópico, trabalharemos com um modelo que estende o MPEm à supersimetria. Modelos supersimétricos têm atraído a atenção de muitos físicos teóricos nas últimas décadas. Teorias deste tipo exibem muitas propriedades interessantes, por exemplo, o fato de unificarem simetrias de

espaço-tempo com simetrias internas além de tratarem bósons e férmions no mesmo pé de igualdade. Diversos modelos supersimétricos têm sido propostos e testados ao longo dos anos, porém mantendo a invariância de Lorentz intacta. Assim, com o intuito de estender o estudo da violação da simetria de Lorentz para a supersimetria, em 2001, Kostelecký e Berger [55], propuseram uma modificação do modelo de Wess-Zumino em que termos CPT-par são introduzidos na ação e têm como notável efeito modificar a forma dos geradores da álgebra de supersimetria de modo que os campos bosônicos e fermiônicos que aparecem na ação são exatamente os mesmos e nenhum campo extra cuja estrutura apresente parâmetros de violação da simetria de Lorentz precisa ser adicionado. Um modelo alternativo, em que tais campos estão presentes na ação pode ser encontrado em [56]. Nossa contribuição consiste no desenvolvimento do formalismo de supercampos no contexto da teoria de Kostelecký-Berger mostrando como esta descrição pode levar a um modelo com violação de Lorentz do tipo-éter.

Os resultados que obtivemos para o modelo de Kostelecký-Berger podem ser encontrados na referência [57].

Estudaremos os dois tópicos apresentados seguindo a seguinte estrutura: no capítulo 2, descrevemos brevemente a motivação para o estudo de teorias que apresentam simetria de Lifshitz. Comentaremos a proposta de Horava para um novo modelo de gravidade quântica renormalizável e unitário. Faremos também uma breve revisão dos conceitos fundamentais em teorias de campos descritas neste cenário onde espaço e tempo são tratados de maneira não equivalente.

No capítulo 3, apresentamos nossa primeira contribuição ao estudo de sistemas que exibem violação da simetria de Lorentz. Desenvolvemos o cálculo do potencial efetivo para os seguintes modelos: um modelo escalar simples com  $z$  genérico, um modelo de QED escalar com  $z = 2$ , um modelo de Yukawa com  $z = 2$ , um modelo de QED escalar com  $z$  genérico e um modelo de Yukawa com  $z$  genérico. Analisamos os resultados e discutimos os limites apropriados.

No capítulo 4, apresentamos nossa contribuição ao estudo de violação da simetria de Lorentz em supersimetria, em que desenvolvemos a teoria de supercampos supersimétrica do tipo-éter. Fazemos uma análise da consistência do modelo, e aplicamos esta metodologia no cálculo da ação efetiva e do potencial efetivo na ordem de um loop.

No capítulo 5, concluímos discutindo os resultados e abordamos perspectivas futuras.

## Capítulo 2

# Teorias na Formulação de Horava-Lifshitz

Dez anos após a publicação da Teoria da Relatividade Restrita, Einstein apresentou sua versão generalizada, a Teoria Geral da Relatividade (RG), incluindo a gravidade e os efeitos previstos pela teoria restrita, agora aplicados a referenciais acelerados. A equivalência entre espaço e tempo continua desempenhando um papel fundamental na descrição dos fenômenos, já que a gravidade agora é entendida como um efeito da deformação da geometria do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia.

A RG é uma teoria bem estabelecida e se tornou a referência básica para o estudo de fenômenos de larga escala, como astrofísica e cosmologia. Ainda assim é uma teoria que possui limitações. Uma delas é o fato de não se enquadrar entre as forças fundamentais descritas pelo Modelo Padrão, desafiando aqueles que esperam que a natureza seja descrita de maneira unificada e elegante. Outra é a sua incapacidade de descrever cenários extremos em que tanto a curvatura do espaço-tempo como as energias envolvidas são muito grandes (o que significa fenômenos ocorrendo em intervalos de espaço e tempo muito pequenos). Ambas as limitações são fruto da ausência de uma teoria quântica da gravitação.

Por muitas décadas os físicos têm investido muito esforço na elaboração de uma teoria que descreva a gravitação (essencialmente, que descreva o espaço e o tempo) com base na teoria quântica. Apesar disso, nenhuma teoria

completamente satisfatória foi estabelecida. Muito da dificuldade enfrentada vem da ausência de dados experimentais em tais cenários de extremas energia e curvatura. Entretanto, o principal problema é de natureza teórica: a não-renormalizabilidade. Para esclarecer melhor este ponto, considere que a descrição lagrangiana da relatividade geral se dá por meio da ação de Einstein-Hilbert

$$S = -\frac{c^4}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica e  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci. Uma forma comum de desenvolver a quantização da teoria descrita por (2.1) é escrever  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkovski, tratada aqui como um campo de fundo e  $h_{\mu\nu}$  é uma perturbação que representa um campo de calibre. A ação (2.1) prevê a existência do gráviton, partícula sem massa de spin 2, cujo propagador é dado por  $1/k^2$ , onde  $k^\mu$  é o quadrimomento associado.

A análise dimensional possui um papel importante em teoria quântica de campos. Para que uma teoria seja renormalizável é necessário que a dimensão canônica em unidades de massa das constantes de acoplamento envolvidas sejam não negativas, condição que não é atendida pela RG, já que  $[G_N] = -2$ . A teoria resultante é não-renormalizável, não sendo possível anular as divergências com um número finito de contratermos. Uma maneira de contornar este problema, é a adição de termos de derivada de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert [58] de modo que o propagador é modificado. Esquematicamente,

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{1}{k^2 - G_N k^4}. \quad (2.2)$$

Em altas energias, o propagador é dominado pelos termos  $k^4$ . Com dependência mais forte dos momentos no denominador, o comportamento UV é suavizado e a teoria se torna renormalizável. Entretanto, surge um indesejado efeito colateral, o propagador (2.2) exhibe dois polos:

$$\frac{1}{k^2 - G_N k^4} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - 1/G_N}. \quad (2.3)$$

O primeiro representa o gráviton, o segundo representa excitações fantasmas e implica em violações da unitariedade. Teorias com essas características não são consistentes com alguns dos princípios mais básicos da física. Assim, este caminho tem se mostrado infrutífero e a não-renormalizabilidade da gravitação quântica tem se mantido como um forte obstáculo. É nesse contexto que a teoria da gravitação quântica de Horava surge como alternativa.

## 2.1 A Gravitação de Horava

A teoria da gravitação quântica de Horava procura solucionar o problema da renormalizabilidade e da unitariedade ao sugerir que o espaço-tempo perca sua estrutura isotrópica de tal modo que as equações de movimentos sejam invariantes pelo reescalonamento (1.7). Neste cenário, a forma convencional de se determinar a dimensão em unidades de massa dos objetos agora é substituída pela contagem de potências "ponderada", em que as relações (1.7) têm como consequência:

$$[x^i] = -1, \quad [t] = -z, \quad (2.4)$$

o que modifica a dimensão canônica dos parâmetros da ação da nova teoria, entre eles a constante de acoplamento, que pode ser feita adimensional para um determinado valor de  $z$ . A teoria, portanto, se torna renormalizável para determinados valores do expoente crítico e do número de dimensões espaciais  $d$ . Propagadores exibem o termo de ordem superior nas componentes espaciais dos momentos, mas a componente temporal é mantida em segunda ordem, de modo que a separação (2.3) não é permitida e os fantasmas estão ausentes.

A ação (2.1) não pode ser adaptada diretamente ao espaço-tempo anisotrópico (2.4). Para isso precisamos escrever a RG de maneira a separar explicitamente o espaço do tempo. O formalismo natural para construção da teoria da gravitação de Horava-Lifshitz é a decomposição de Arnowitt, Deser

e Misner (ADM) [59]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i - N^i dt)(dx^j - N^j dt). \quad (2.5)$$

Nesta expressão, a métrica quadridimensional  $g_{\mu\nu}$  foi dividida em um escalar  $N$ , um vetor tridimensional  $N^i$  e um tensor  $g_{ij}$  que representa a parte espacial da métrica.

As equações de movimento não podem mais ser consideradas invariantes sob o grupo de difeomorfismos  $\delta x^\mu = \zeta^\mu(x)$ , onde o índice  $\mu$  representa as coordenadas de espaço e de tempo, já que tempo e espaço agora são considerados não equivalentes. Por isso, precisamos assumir que a variedade possui estrutura de foliação, de modo que o tempo é tratado de maneira privilegiada e o espaço é foliado, apresentando-se como hiper-superfícies de tempo constante. Postulamos que o grupo de simetria do espaço-tempo em gravidade anisotrópica se limita aos difeomorfismos que preservam a foliação. Este grupo consiste de transformações do tipo

$$\delta x^i = \zeta^i(t, x^j), \quad \delta t = f(t). \quad (2.6)$$

Os campos ADM se transformam sob (2.6) por

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \partial_i \zeta^k g_{jk} + \partial_j \zeta^k g_{ik} + \zeta^k \partial_k g_{ij} + f \dot{g}_{ij}, \\ \delta N_i &= \partial_i \zeta^j N_j + \zeta^j \partial_j N_i + \dot{\zeta}^j g_{ij} + \dot{f} N_i + f \dot{N}_i, \\ \delta N &= \zeta^i \partial_i N + \dot{f} N + f \dot{N}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vamos discutir brevemente a construção da ação  $S = S_C - S_V$ , onde  $S_C$  e  $S_V$  são os termos cinético e potencial respectivamente.

**O Termo Cinético** O termo cinético precisa ser quadrático nas derivadas temporais da métrica espacial e invariante sob as transformações (2.7). O objeto que se transforma covariantemente sob estas transformações não é  $g_{ij}$ , mas sim

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i). \quad (2.8)$$

Na construção da expressão acima, postulamos

$$[N] = 0, \quad [N_i] = z - 1, \quad [g_{ij}] = 0. \quad (2.9)$$

O termo cinético mais geral que atende todos os requerimentos é dado por

$$S_C = \frac{2}{\Omega} \int dt d^d x N \sqrt{g} (K^{ij} K_{ij} + \lambda K^2), \quad (2.10)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica espacial  $g_{ij}$  e  $K = g^{ij} K_{ij}$ . Aqui, há duas constantes de acoplamento  $\Omega$  e  $\lambda$ . Esta última é adimensional (ou "sem peso", termo comumente usado na literatura), já  $\Omega$  possui dimensão ponderada

$$[\Omega] = \frac{z - d}{2}, \quad (2.11)$$

o que implica que  $z = 3$  anula a dimensão ponderada de  $\Omega$  em três dimensões espaciais, tornando a teoria renormalizável para este caso. Em Relatividade geral, a invariância da ação sob os difeomorfismos do espaço-tempo impõe  $\lambda = 1$ . Na teoria de Horava,  $\lambda$  representa uma constante de acoplamento dinâmica, suscetível a correções quânticas.

**O Termo Potencial.** Em adição a  $S_C$ , deve-se incluir os termos independentes das derivadas temporais e de ordem arbitrária em  $R^{ij}$ . Termos como  $\nabla_k R_{ij} \nabla^k R^{ij}$ ,  $R^3$ ,  $RR_{ij}R^{ij}$ , ... podem ser incluídos na ação. Restrições como estabilidade e unitariedade da teoria assim como simetrias do tensor de Riemann podem ser impostas, porém o número de termos ainda será muito grande, o que diminui o poder preditivo da teoria.

Com o intuito de limitar o número de constantes de acoplamento independentes, Horava impôs uma simetria extra. Ele impôs que o potencial tenha a forma

$$S_V = \frac{\Omega^2}{8} \int dt d^d x \sqrt{g} N E^{ij} \mathcal{G}_{ijkl} E^{kl}, \quad (2.12)$$

onde  $\mathcal{G}_{ijkl}$  é o inverso de  $G^{ijkl} = (1/2)(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}$ , que é uma generalização da métrica de DeWitt. A definição de  $E^{ij}$  segue do princípio

variacional

$$\sqrt{g}E^{ij} = \frac{\delta W(g_{kl})}{\delta g_{ij}}. \quad (2.13)$$

Dizemos que teorias descritas por (2.12) com (2.13) satisfazem a "condição de balanço detalhado". Horava concluiu que a função  $W$  mais geral para que a teoria seja renormalizável em três dimensões é dada por

$$W = \frac{1}{\Omega_W^2} \int d^d x \sqrt{g} \left( G - 2\Lambda_W + \frac{1}{w^2} \epsilon^{ijk} \Gamma_{il}^m \partial \Gamma_{km}^l + \frac{2}{3} \Gamma_{il}^n \Gamma_{jm}^l \Gamma_{kn}^m \right), \quad (2.14)$$

o que, por meio de (2.13), leva a ação

$$S_V = \frac{\Omega^2}{8\Omega_W^4} \int d^d x \sqrt{g} N \left( G^{ij} - 2\Lambda_W g^{ij} + \frac{1}{w^2} C^{ij} \right) \mathcal{G}_{ijkl} \left( G^{kl} - 2\Lambda_W g^{kl} + \frac{1}{w^2} C^{kl} \right). \quad (2.15)$$

onde

$$C^{ij} = \epsilon^{ikl} \nabla_k \left( R_l^j - \frac{1}{4} R \delta_l^j \right) \quad (2.16)$$

é o tensor de Cotton. Este objeto é simétrico, transverso, sem traço e invariante conforme. A introdução do  $C^{ij}$  é fundamental para que a constante de acoplamento seja adimensional em três dimensões. Quando o tensor de Cotton é ausente, a teoria é renormalizável em  $D = z = 2$ , sendo conveniente para o estudo de membranas [60].

Outras formas de tratar o termo potencial foram propostas após a publicação original de Horava. Uma delas é a hipótese da projetabilidade, que restringe a teoria aos casos em que  $N = N(t)$ . Isso reduz drasticamente o número de constantes de acoplamento a nove [61, 62].

O maior problema da gravitação de Horava, entretanto, qualquer que seja o tratamento dado ao potencial, é a presença do grau de liberdade extra representado pelo parâmetro independente  $\lambda$ . No limite de baixas energias,  $\lambda$  permanece livre. Recentemente, Horava e Melby-Thompson propuseram novas formas de simetrias que fixam  $\lambda = 1$  [63]. Ainda que este argumento possa justificar o valor unitário de  $\lambda$ , a teoria de HL não se reduz a RG, já que nesta última,  $N = N(t, x^i)$ , dependendo também das coordenadas espaciais. No caso da teoria não projetável, aparecerão termos do tipo  $\eta a_i a^i$ ,

onde  $a^i = N^{-1}\partial_i N$ , o que torna a teoria de HL em baixas energias uma versão equivalente a teoria Einstein-Eter.

## 2.2 Teorias não-gravitacionais

Apesar das limitações remanescentes da teoria de Horava, a possibilidade de que o espaço-tempo tenha uma estrutura anisotrópica não-relativística tem se mostrado bastante motivadora. Dessa forma, uma linha de pesquisa tem sido desenvolvida no sentido de descrever diversas teorias de campos já conhecidas agora no contexto da anisotropia de Horava-Lifshitz. O estudo de tais teorias pode mostrar-se bastante útil na análise da consistência física da teoria da gravitação de Horava. Nesta seção vamos descrever brevemente alguns conceitos básicos relacionados a teorias de campos na formulação de Horava-Lifshitz.

Teorias descritas nesta formulação exibem pelo menos dois regimes de energia qualitativamente diferentes. O regime ultravioleta (UV) é aquele válido em energias  $E \gg \Lambda$ , onde  $\Lambda$  é uma escala de referência, e cujas dimensões do espaço e do tempo são dadas pelos valores ponderados (2.4). Já o regime infravermelho (IR) é aquele válido em  $E \ll \Lambda$ . As dimensões do espaço e do tempo, neste caso, são dadas pelos valores padrão  $[x^i] = -1$  e  $[t] = -1$ .

O ponto de partida de nossa análise são as relações de reescalonamento (1.7) e a definição das dimensões ponderadas de espaço e tempo (2.4). Como no caso gravitacional, desejamos construir lagrangianas que mantenham a segunda ordem nas derivadas temporais:

$$S = \int dt d^d x \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dots \right). \quad (2.17)$$

A contagem de potências na expressão acima implica que a dimensão ponderada de  $\phi$  é dada por

$$[\phi] = \frac{d - z}{2}, \quad (2.18)$$

que se reduz ao caso usual para  $z = 1$ .

A diferença da dimensão ponderada dos parâmetros de uma teoria do tipo HL em relação à dimensão canônica das teorias usuais invariantes de Lorentz, implica em uma nova configuração dos termos na ação. A ação mais geral para o modelo escalar é dada por

$$S = \int dt d^d x \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^z \alpha_s (\partial^{i_1} \partial^{i_2} \dots \partial^{i_s} \phi) (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_s} \phi) + m^{2z} \phi^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.19)$$

A expressão a cima exhibe o termo de ordem quadrática nas derivadas espaciais bem como os termos de ordem superior. O termo  $V(\phi)$  representa um potencial de forma genérica. O termo de massa agora aparece com a constante de acoplamento  $m^{2z}$ , de modo que a contagem de potências mantém a relação trivial  $[m] = 1$  para dimensão da massa. A dimensão ponderada das constantes de acoplamento dos termos com derivada espacial é dada por  $[\alpha_s] = 2(z - s)$ . No regime infravermelho, apenas o termo  $s = z = 1$  está presente, de modo que  $[\alpha_1] = 0$  e, portanto, é denominado termo marginal. No regime ultravioleta, estão presentes os termos até a ordem  $s = z$ . Este último tem dimensão ponderada  $[\alpha_z] = 0$ , sendo agora denominado termo marginal. Para os termos de ordem inferior, a dimensão ponderada de  $\alpha_s$  é sempre positiva. Como a escala de energia é muito alta, o termo marginal (que contribui com  $k^{2z}$  no propagador) domina sobre os termos espaciais restantes, cuja contribuição tem potência mais baixa nos momentos. Assim, por simplicidade, podemos estudar propriedades essenciais de teorias de campos escalares no UV incluindo somente o termos de ordem  $2z$  nas derivadas espaciais:

$$S = \int dt d^d x \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (-1)^z \phi \Delta^z \phi + m^{2z} \phi^2 + V(\phi) \right], \quad (2.20)$$

onde transferimos derivadas espaciais de um campo  $\phi$  para o outro e a constante de acoplamento adimensional  $\alpha_z$  foi absorvida numa redefinição das derivadas. O símbolo  $\Delta$  representa o operador laplaciano e a forma geral da ação (2.20) com os devidos sinais implica que o propagador deve ter a forma

$$\langle \phi\phi \rangle = \frac{i}{k_0^2 - k^{2z} + m^{2z}}. \quad (2.21)$$

Vamos discutir brevemente o grau de divergência dos diagramas envolvidos na expansão perturbativa da teoria descrita por (2.20). Por simplicidade, ao longo deste capítulo, vamos nos restringir ao caso  $V(\phi) = \lambda\phi^n$ . A forma geral para a expressão da integral associada a um diagrama de Feynman é dada por

$$I_F = \left( \prod_{i=1}^L \int dk_{0i} dk_i \right) \prod_{j=1}^I P_j. \quad (2.22)$$

Esta expressão refere-se a um diagrama de  $L$  loops e  $I$  linhas internas, cada uma representando um propagador  $P_j$ . Neste modelo, cada propagador contribui com um fator de  $-2z$  ao grau de divergência e cada loop contribui com um fator  $z + d$ , logo o grau de divergência é dado por  $\omega = (z + d)L - 2zI$ . Substituímos nesta expressão as relações usuais  $nV = E + 2I$  e  $L = I - V + 1$ , onde  $V$  o número de vértices e  $E$ , o número de pernas externas. Obtemos, então

$$\omega = -V \left[ zn - (d + z) \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \right] + (d + z) \left( 1 - \frac{E}{2} \right) + zE. \quad (2.23)$$

A expressão que multiplica  $-V$  é a dimensão ponderada da constante de acoplamento  $\lambda$ . Note que crescentes valores de  $z$  aumentam o valor da dimensão ponderada de  $\lambda$  diminuindo o valor do grau de divergência dos diagramas a medida que a ordem  $V$  da expansão nos termos de interação cresce. Esta propriedade é válida para todas as teorias descritas na formulação HL, sejam gravitacionais ou não.

A teoria dos férmions também pode ser descrita na formulação HL. A ação deste modelo é dada por

$$S = \int dt d^d x \left[ \bar{\psi} i \partial_0 \gamma_0 \psi + \sum_{s=1}^z \beta_s \bar{\psi} (i \partial_i \gamma_i)^s \psi - M \bar{\psi} \psi + V(\psi, \chi) \right], \quad (2.24)$$

onde  $\chi$  denota outros possíveis campos que podem interagir com  $\psi$ . Como no caso escalar, para um espaço-tempo que exhibe estrutura anisotrópica (1.7),

o termo  $s = z$  na soma acima é marginal, outros são relevantes e, no regime infravermelho somente  $s = 1$  não é irrelevante. Nesta tese trabalharemos somente o termo  $s = z$ , que exhibe as propriedades essenciais da teoria. Neste modelo podemos incluir o termo de interação de Yukawa  $g\phi\bar{\psi}\psi$ , de modo que  $\chi = \phi$ . É interessante notar que a dimensão ponderada de  $\psi$  é  $d/2$ , independente de  $z$ .

Vamos agora descrever brevemente a ação do campo de calibre abeliano. O tensor de Maxwell contém derivadas de primeira ordem nos campos:  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Assim, podemos escrever o termo quadrático da ação por

$$S_{quad} = \int dt d^d x (F_{0i} F_{0i} + F_{ij} \Delta^{z-1} F_{ij}), \quad (2.25)$$

onde incluímos somente os termos marginais. Desta expressão, obtemos que as dimensões ponderadas de  $A_0$  e  $A_i$  são dadas por

$$A_0 = \frac{z+d}{2} - 1, \quad A_i = \frac{d-z}{2}. \quad (2.26)$$

O termo de potencial é descrito por meio do acoplamento mínimo  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  que atua nos campos aos quais  $A_\mu$  é acoplado. Note que a dimensão ponderada de  $e$  é  $(z-d)/2 + 1$ . Obtemos então que a QED escalar com  $z$  arbitrário é (super)renormalizável em um espaço com  $d$  dimensões se  $z \geq d - 2$ . A QED  $(3+1)$ -dimensional usual, com  $z = 1$  e  $d = 3$ , é um exemplo perfeito de um caso renormalizável. Se aumentarmos o valor de  $z$ , as propriedades de renormalização da teoria são melhoradas.

Outra diferença importante que precisa ser destacada é que na formulação HL não é possível aplicar o calibre de Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$ , porém o calibre de Coulomb  $\partial^i A_i = 0$  ainda é mantido. Uma maneira interessante de se tratar o calibre, e isso será fundamental mais a frente, é que o termo de fixação de calibre seja escolhido de tal forma que os campos  $A_0$  e  $A_i$  apareçam em termos diferentes na lagrangiana resultante, permitindo análises distintas de objetos relacionados ao tempo e ao espaço.

Essas ideias serão úteis no capítulo seguinte onde calcularemos o potencial efetivo para os modelos apresentados nesta seção.

## Capítulo 3

# Potencial Efetivo na Formulação de Horava-Lifshitz

Neste capítulo, descrevemos nossa contribuição ao estudo do potencial efetivo na formulação de Horava-Lifshitz.

O potencial efetivo é um objeto chave em teoria quântica de campos e está relacionado a assuntos como quebra espontânea de simetria, estabilidade do vácuo, anomalias e muitos outros. Como introdução, vamos discutir alguns procedimentos básicos no cálculo do potencial efetivo.

Sabemos que o funcional gerador das funções de Green  $Z[J]$  está relacionado ao funcional gerador das funções de Green conectadas da seguinte forma

$$Z[J(x)] = e^{iW[J(x)]}. \quad (3.1)$$

Introduzimos o campo clássico  $\Phi(x)$  e o definimos por:

$$\Phi(x) = \frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x)}. \quad (3.2)$$

A ação efetiva  $\Gamma[\Phi]$  é definida através da transformada de Legendre funcional

$$\Gamma[\Phi(x)] = W[J(x)] - \int dx J(x)\Phi(x). \quad (3.3)$$

Aqui, a variável  $x$  representa coordenadas em um espaço-tempo de  $d + 1$  dimensões. Quando tratarmos de modelos com a anisotropia de Lifshitz será útil deixar explícito a separação  $(x^i, t)$  e  $dt d^d x$ . Derivando a expressão acima

em relação a  $\Phi(x)$ , obtemos

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\Phi(x)]}{\delta\Phi(x)}. \quad (3.4)$$

Para incluir as correções quânticas, fazemos a seguinte expansão da ação efetiva

$$\Gamma[\Phi(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n), \quad (3.5)$$

onde

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i^n \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(x_1) \dots \delta\Phi(x_n)} \Big|_{\Phi(x)=0}, \quad (3.6)$$

são as funções de Green irreduzíveis a uma partícula (1PI), cujos diagramas possuem as linhas externas amputadas. Dessa forma  $\Gamma[\Phi(x)]$  é chamado de funcional gerador das funções de vértice 1PI. De maneira equivalente podemos fazer a expansão da ação efetiva no espaço dos momentos

$$\Gamma[\Phi(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dp_1 \dots dp_n \delta(p_1 + \dots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \Phi(p_1) \dots \Phi(p_n), \quad (3.7)$$

onde  $\Phi(p_i)$  e  $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  são as transformadas de Fourier de  $\Phi(x_i)$  e de  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  respectivamente. Vamos agora relacionar a ação efetiva  $\Gamma[\Phi(x)]$  à ação clássica  $S[\Phi(x)]$ . Para isso usamos as equações (3.1), (3.3) e (3.4) na definição

$$Z[J(x)] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( S[\phi] - \int dx J(x) \phi(x) \right) \right\}, \quad (3.8)$$

e obtemos

$$e^{(i/\hbar)\Gamma[\Phi]} = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( S[\phi] - \int dx \Gamma_1[\Phi(x)] (\phi(x) - \Phi(x)) \right) \right\}, \quad (3.9)$$

onde  $\Gamma_1 = \delta\Gamma[\phi]/\delta\phi(x)|_{\phi=\Phi}$ . Agora, fazemos a separação da parte clássica e da parte quântica do campo  $\phi$ :

$$\phi \rightarrow \Phi + \hbar^{1/2} \phi. \quad (3.10)$$

A expressão resultante será

$$\begin{aligned}
e^{(i/\hbar)\Gamma[\Phi]} &= e^{(i/\hbar)S[\Phi]} N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ \frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 \phi(x_1) S_2[\Phi] \phi(x_2) \right. \\
&+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2-1}}{n!} \int dx_1 \dots dx_n S_n[\Phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \\
&\left. + \hbar^{-1/2} \int dx \phi(\Gamma_1[\Phi] - S_1[\Phi]) \right], \tag{3.11}
\end{aligned}$$

onde

$$S_n = \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \dots \phi(x_n)} \Big|_{\phi=\Phi}. \tag{3.12}$$

O termo quadrático em  $\phi$  é o termo de ordem um loop. É a correção de ordem mais baixa à ação clássica. Vamos nos concentrar nele e ignorar os restantes. Usando as relações

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[ -\frac{i}{2} \int dx \int dx' \phi(x) A(x, x') \phi(x') \right] = \det(A)^{-1/2}, \tag{3.13}$$

e

$$\det(A) = \exp[\text{Tr}(\ln A)], \tag{3.14}$$

obtemos

$$\Gamma[\Phi] = S[\Phi] + \frac{i}{2} \hbar \text{Tr}(\ln S_2[\Phi]) + O(\hbar^2). \tag{3.15}$$

O potencial efetivo é definido como a lagrangiana efetiva calculada com valores constantes dos campos escalares e todos os outros tomados iguais zero. Assim, os termos com derivadas de  $\Phi$  se anulam e podemos escrever

$$\Gamma[\Phi] = - \int dx U(\Phi), \tag{3.16}$$

onde  $\Phi$  é constante. Note que nesse caso a integral de  $U$  resulta no produto  $\Omega U$ , onde  $\Omega$  é o volume total do espaço-tempo. Comparando as expressões (3.16) e (3.7), notamos que o potencial efetivo pode ser escrito como

$$U(\Phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) \Phi^n, \tag{3.17}$$

e é então calculado somando-se os diagramas com  $n = 1, \dots, \infty$  pernas externas (amputadas). Este método será bastante útil quando abordarmos modelos em QED.

Nas seções seguintes utilizaremos estes resultados para calcular o potencial efetivo para os modelos escalar com  $z$  genérico, a QED escalar com  $z = 2$  e  $z$  genérico, e de Yukawa com  $z = 2$  e  $z$  genérico.

### 3.1 Modelo escalar com $z$ genérico

Começamos com a generalização HL do modelo escalar usual dada pela expressão (2.20). Nosso objetivo aqui é o estudo do potencial efetivo deste modelo. Para isso precisamos da expressão de  $S_2$  na equação (3.15). Fazendo a substituição  $\phi \rightarrow \Phi + \phi$ , onde  $\Phi$  é um campo de fundo (clássico) e  $\phi$  é um campo quântico (agora omitimos  $\hbar$ ). A parte quadrática da ação em  $\phi$  é dada por

$$S_{quad} = -\frac{1}{2} \int dt d^d x \phi (\partial_0^2 + (-1)^z \Delta^z + V''(\Phi)) \phi. \quad (3.18)$$

Dessa forma, a ação efetiva pode ser escrita como

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(\partial_0^2 + (-1)^z \Delta^z + V''(\Phi)). \quad (3.19)$$

O potencial efetivo correspondente  $U(\Phi)$  é obtido da expressão

$$\Gamma^{(1)}|_{\Phi=const} = - \int dt d^d x U^{(1)}(\Phi). \quad (3.20)$$

Para calcular  $U(\Phi)$ , devemos desenvolver a transformada de Fourier de (3.19). Aplicando a rotação de Wick, chegamos a

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} \ln(k_0^2 + \vec{k}^{2z} + V''(\Phi)). \quad (3.21)$$

Primeiro, calculamos a integral em  $k_0$ . Para isso, usamos a relação

$$\frac{d}{d(A^2)} \int dk_0 \ln(k_0^2 + A^2) = \int \frac{dk_0}{k_0^2 + A^2} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2}}, \quad (3.22)$$

de modo que, desprezando uma constante irrelevante independente do campo, obtemos

$$U^{(1)} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sqrt{\vec{k}^{2z} + V''(\Phi)}. \quad (3.23)$$

Então, usamos a identidade

$$\sqrt{B} = \frac{1}{\Gamma(-1/2)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-3/2} e^{-\alpha B}. \quad (3.24)$$

Sabemos que  $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ . Portanto,

$$U^{(1)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int d\alpha \alpha^{-3/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-\alpha(\vec{k}^{2z} + V''(\Phi))}. \quad (3.25)$$

Em coordenadas esféricas e depois da mudança de variáveis  $k^z = u$ , temos,  $k^{2z} = u^2$ ,  $k = u^{1/z}$ , e  $dk = \frac{1}{z} du u^{1/z-1}$ , obtemos

$$U^{(1)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{z} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-3/2} \int_0^\infty du u^{\frac{d-z}{z}} e^{-\alpha(u^2 + V''(\Phi))}. \quad (3.26)$$

Integrando em  $u$  e depois em  $\alpha$ , chegamos a

$$U^{(1)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{z} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \Gamma\left(\frac{d}{2z}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - \frac{d}{2z}\right) (V''(\Phi))^{1/2+d/(2z)}. \quad (3.27)$$

Está claro que este potencial efetivo em um loop diverge se tivermos  $\frac{1}{2}(1 + \frac{d}{z}) = N$ , onde  $N$  é um inteiro não negativo. Em particular, para  $z = 2$ , ele diverge em  $d = 2, 6, 10, \dots$ . Por exemplo, para  $V(\Phi) \propto \Phi^{10}$ , com  $d = 3$  e  $z = 2$ , as funções de Green têm um grau superficial de divergência  $\omega = 5 - \frac{E}{2}$ , onde  $E$  é o número de pernas externas. Para  $d = 3$  a expressão é, como é bem conhecido, quadraticamente divergente para  $z = 1$  e linearmente divergente se  $z = 3$ ; em outros casos ela é finita.

## 3.2 QED escalar com $z = 2$

Agora, vamos introduzir os campos de calibre. Vamos nos restringir inicialmente ao caso mais simples  $z = 2$ . Neste caso, a lagrangiana da QED escalar

é

$$L = \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}\Delta F_{ij} - D_0\phi(D_0\phi)^* + D_iD_j\phi(D_iD_j\phi)^* - m^4\phi\phi^*, \quad (3.28)$$

onde  $D_0 = \partial_0 - ieA_0$  e  $D_i = \partial_i - ieA_i$  são as derivadas covariantes relacionadas ao campo de calibre, com as correspondentes transformações:  $\phi \rightarrow e^{ie\xi}\phi$ ,  $\phi^* \rightarrow e^{-ie\xi}\phi^*$ ,  $A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0\xi$ ,  $A_i \rightarrow A_i + \partial_i\xi$ . Consideramos aqui que não há termos de auto interação pura de matéria e mantemos apenas os termos que acoplam os campos de matéria e de calibre.

O propagador para o campo escalar tem a forma

$$\langle \phi\phi^* \rangle = \frac{i}{k_0^2 - \vec{k}^4 - m^4}. \quad (3.29)$$

Para o propagador do campo de calibre, a situação é mais complicada. Para encontrar este propagador, devemos adicionar à lagrangiana livre

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}\Delta F_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\partial_iA_0\partial_iA_0 - \partial_0A_0\partial_iA_i + \frac{1}{2}\partial_0A_i\partial_0A_i + \frac{1}{4}F_{ij}\Delta F_{ij}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

o termo de fixação de calibre. Entretanto, como  $L_2$  contém um termo misto envolvendo ambos  $A_0$  e  $A_i$ , que têm comportamentos distintos. É interessante se o termo de fixação de calibre permita a separação destes campos. Escolhemos então, um termo de fixação de calibre que é não-local:

$$\begin{aligned} L_{gf} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\partial_0A_0 + \sqrt{\Delta}\partial_iA_i\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_0A_0\frac{1}{\Delta}\partial_0A_0 + 2\partial_0A_0\partial_iA_i + \partial_jA_j\Delta\partial_iA_i\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

este termo de fixação de calibre pode ser tratado como o análogo do calibre de Feynman. Adicionando este termo a (3.30), chegamos à seguinte expressão para parte cinética da lagrangiana de calibre:

$$L_c = L_2 + L_{gf} = -\frac{1}{2}A_0\frac{\partial_0^2 + \Delta^2}{\Delta}A_0 - \frac{1}{2}A_i(\partial_0^2 + \Delta^2)A_i. \quad (3.32)$$

A não-localidade desta lagrangiana, entretanto, não representa nenhum problema para os cálculos. De fato, os propagadores têm a forma:

$$\begin{aligned} \langle A_0 A_0 \rangle &= \frac{i\vec{k}^2}{k_0^2 - \vec{k}^4}; \\ \langle A_i A_j \rangle &= -\frac{i\delta_{ij}}{k_0^2 - \vec{k}^4}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nas teorias envolvendo campos de diferentes naturezas, em particular, naquelas que consideramos neste trabalho, o potencial efetivo depende apenas dos campos de matéria, enquanto os campos de calibre (e, em outras teorias, campos de outras naturezas) são campos puramente quânticos, de modo que as derivadas dos campos de fundo são fixas em zero [64]. Também, devemos levar em consideração, na aproximação de um loop, que apenas os vértices associados a dois campos quânticos dão contribuições não triviais ao potencial efetivo. Vamos denotar os campos de fundo por  $\Phi$  e  $\Phi^*$ . Vemos que os únicos vértices relevantes são:

$$\begin{aligned} -e^2 A_0 A_0 \Phi \Phi^*; \quad ie A_0 (\Phi^* \partial_0 \phi - \Phi \partial_0 \phi^*), \\ -ie (\partial_i A_j) [\Phi \partial_i \partial_j \phi^* - \Phi^* \partial_i \partial_j \phi], \quad e^2 (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \Phi \Phi^*. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para simplificar os cálculos, é conveniente mover todas as derivadas para agirem somente nos campos de calibre. Então, estes vértices tomam a forma:

$$\begin{aligned} -e^2 A_0 A_0 \Phi \Phi^*; \quad -ie (\Phi^* \phi - \Phi \phi^*) \partial_0 A_0, \\ -ie [\Phi \phi^* - \Phi^* \phi] (\partial_j \Delta A_j), \quad -e^2 A_j \Delta A_j \Phi \Phi^*. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para determinar as correções quânticas na ordem de um loop, devemos considerar dois tipos de contribuições. Na primeira delas, todos os diagramas envolvem apenas os propagadores dos campos de calibre nas linhas internas:

O resultado total para este setor é a soma de duas contribuições ao potencial efetivo – a primeira,  $U_a$  é dada pela soma de loops do propagador

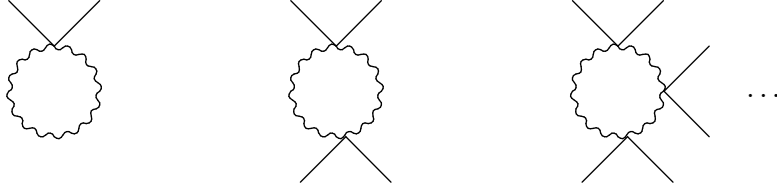


Figura 3.1: Contribuições envolvendo apenas o propagador do campo de calibre.

$\langle A_0 A_0 \rangle$  e a segunda,  $U_b$  – de propagadores  $\langle A_i A_j \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 U_a &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} (2e^2 \Phi \Phi^*)^n \left( \frac{\vec{k}^2}{k_0^2 - \vec{k}^4} \right)^n; \\
 U_b &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} (2e^2 \Phi \Phi^*)^n \left( \frac{\vec{k}^2}{k_0^2 - \vec{k}^4} \right)^n. \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

O segundo tipo de diagramas envolve tanto quárticos quanto os vértices triplos. Para tratá-los, devemos primeiro introduzir um propagador "vestido":

Figura 3.2: Propagador "vestido" de um campo de calibre.

O objetivo é absorver a dependência nos vértices quárticos, na definição do propagador vestido. Neste propagador, é feita a soma sobre todos os vértices deste tipo. Para os vértices  $-e^2 A_0 A_0 \Phi \Phi^*$ , obtemos a soma:

$$\begin{aligned}
 \langle A_0 A_0 \rangle_D &= \langle A_0 A_0 \rangle \sum_{n=0}^{\infty} [i2e^2 \Phi \Phi^* \langle A_0 A_0 \rangle]^n \\
 &= \frac{i\vec{k}^2}{k_0^2 - \vec{k}^4 - 2e^2 \vec{k}^2 \Phi \Phi^*}. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Enquanto para os vértices  $-e^2 A_j \Delta A_j \Phi \Phi^*$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle A_i A_j \rangle_D &= \langle A_i A_j \rangle \sum_{n=0}^{\infty} [i2e^2 \Phi \Phi^* \langle A_i A_j \rangle]^n \\
 &= \frac{i\delta_{ij}}{k_0^2 - \vec{k}^4 - 2e^2 \vec{k}^2 \Phi \Phi^*}. \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Agora somamos as contribuições de todos os diagramas de um loop cuja forma é apresentada na figura (3.2).

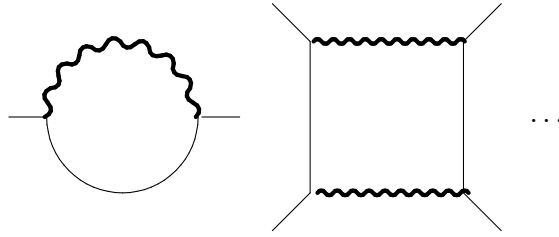


Figura 3.3: Contribuições envolvendo propagadores de calibre e de matéria.

Nestes diagramas, as linhas em negrito representam os propagadores vestidos e contêm a o vértices quárticos. Os vértices triplos dados em (3.35) envolvem derivadas espaciais e temporais. Estas derivadas devem ser incluídas nas contrações dos propagadores vestidos com os vértices triplos. Assim, definimos os propagadores vestidos modificados

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle \partial_0 A_0(t_1, \vec{x}_1) \partial_0 A_0(t_2, \vec{x}_2) \rangle_D; \\ G_2 &= \langle \partial_i \Delta A_i(t_1, \vec{x}_1) \partial_j \Delta A_j(t_2, \vec{x}_2) \rangle_D, \end{aligned} \quad (3.39)$$

cujas transformadas de Fourier são

$$\begin{aligned} G_1(k) &= \frac{ik_0^2 \vec{k}^2}{k_0^2 - \vec{k}^4 - 2e^2 \vec{k}^2 \Phi \Phi^*}; \\ G_2(k) &= -\frac{i\vec{k}^6}{k_0^2 - \vec{k}^4 - 2e^2 \vec{k}^2 \Phi \Phi^*}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Aqui, levamos em conta que as derivadas afetam diferentes argumentos do propagador que muda o sinal com respeito a (3.37). A contribuição total para este tipo de gráfico é dada por

$$U_c = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} (-2e^2 \Phi \Phi^*)^n \left( (G_1 + G_2) \langle \phi \phi^* \rangle \right)^n. \quad (3.41)$$

Note que o termo de ordem  $n = 1$  da soma a cima contém o produto  $(G_1 + G_2) \langle \phi \phi^* \rangle$ , que representa a soma de dois diagramas idênticos ao primeiro gráfico da figura (3.3), sendo que um deles possui o propagador

vestido modificado  $G_1$  e outro, o propagador vestido modificado  $G_2$ . o propagador do campo de matéria é o mesmo para ambos. O termo de ordem  $n = 2$  contém o produto  $(G_1^2 + 2G_1G_2 + G_2^2) \langle \phi\phi^* \rangle^2$ , que representa a soma de quatro diagramas idênticos ao segundo gráfico da figura (3.3), sendo que um deles possui dois propagadores  $G_1$ , outro possui dois propagadores  $G_2$  e outros dois possuem um propagador  $G_1$  e um propagador  $G_2$  relacionados às linhas que representam os propagadores vestidos modificados. Seu valor numérico é idêntico, isso explica o fator de dois no produto cruzado. Há dois propagadores de matéria em cada um dos quatro diagramas. A forma dos termos de ordem superior em  $n$  seguem o mesmo raciocínio, com as devidas potências em  $G_1$  e  $G_2$  e os coeficientes dos termos cruzados obedecendo à topologia dos diagramas. Alguns cálculos envolvendo esta metodologia podem ser encontrados [65–69].

Somado (3.41), obtemos:

$$U_c = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} (2e^2 \Phi \Phi^*)^n \times \\ \times \left( \frac{(k_0^2 - \vec{k}^4) \vec{k}^2}{k_0^2 - \vec{k}^4 - 2e^2 \vec{k}^2 \Phi \Phi^*} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^4 - m^4} \right)^n. \quad (3.42)$$

Resta ainda desenvolver todas as expressões  $U_a$ ,  $U_b$  and  $U_c$ . Para isso, usamos a identidade  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a)$  e fazemos a rotação de Wick. Assim

$$U_a = i \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^2}{k_0^2 + \vec{k}^4} \right], \\ U_b = id \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^2}{k_0^2 + \vec{k}^4} \right], \quad (3.43) \\ U_c = i \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 - \frac{2e^2 \Phi \Phi^* (k_0^2 + \vec{k}^4) \vec{k}^2}{k_0^2 + \vec{k}^4 + 2e^2 \vec{k}^2 \Phi \Phi^*} \frac{1}{k_0^2 + \vec{k}^4 + m^4} \right].$$

No caso  $m = 0$ ,  $U_c$  é bastante simplificado:

$$U_c = -i \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^2}{k_0^2 + \vec{k}^4} \right], \quad (3.44)$$

que cancela completamente  $U_a$ . Então, neste caso, ficamos apenas com a seguinte contribuição ao potencial efetivo:

$$U^{(1)} = id \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^2}{k_0^2 + \vec{k}^4} \right]. \quad (3.45)$$

Adicionando e subtraindo a constante  $id \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{\vec{k}^4}{k_0^2} \right]$ , encontramos que o potencial efetivo, a menos de uma constante aditiva, tem a forma

$$U^{(1)} = id \int \frac{d^d k dk_{0E}}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{\vec{k}^4 + 2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^2}{k_0^2} \right]. \quad (3.46)$$

Então, usamos a integral  $\int_0^\infty dk_0 \ln(k_0^2 + A^2) = \pi \sqrt{A^2}$  e obtemos

$$U^{(1)} = id \int \frac{d^d k}{2(2\pi)^d} \sqrt{\vec{k}^2 (\vec{k}^2 + 2e^2 \Phi \Phi^*)}. \quad (3.47)$$

Vamos resolver esta integral usando novamente (3.24). A expressão acima passa a ser escrita então como

$$U^{(1)} = \frac{id}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\Gamma(-1/2)]^2} \int d\alpha d\beta \alpha^{3/2} \beta^{3/2} e^{(\alpha-\beta)\vec{k}^2 - 2e^2 \Phi \Phi^* \beta}. \quad (3.48)$$

Resolvendo a integral gaussiana em  $\vec{k}^2$ , obtemos

$$U^{(1)} = \frac{id}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2} [\Gamma(-1/2)]^2} \int d\alpha d\beta \frac{1}{(\alpha + \beta)(\alpha\beta)^{3/2}} e^{-2e^2 \Phi \Phi^* \beta}. \quad (3.49)$$

Agora fazemos a substituição  $\alpha = t(1-x)$  e  $\beta = tx$ ,  $\alpha + \beta = t$ . A integral ganha a forma

$$U^{(1)} = \frac{id}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2} [\Gamma(-1/2)]^2} \times \\ \times \int_0^1 dx \int_0^\infty dt t^{-2-d/2} [x(1-x)]^{-3/2} e^{-2e^2 \Phi \Phi^* tx}. \quad (3.50)$$

A integral em  $t$  pode ser escrita na forma da função gama, de modo que

$$U^{(1)} = \frac{id}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2} [\Gamma(-1/2)]^2} \Gamma\left(-1 - \frac{d}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 x^{(d-1)/2} (1-x)^{-3/2} (2e^2 \Phi \Phi^*)^{1+d/2}. \quad (3.51)$$

A integral em  $x$  é a função beta

$$B\left(\frac{d+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)}. \quad (3.52)$$

De modo que finalmente obtemos

$$I = \frac{\pi^{d/2}}{2(2\pi)^d} (2e^2 \Phi \Phi^*)^{d/2+1} \frac{\Gamma(-1 - \frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2})}. \quad (3.53)$$

Vemos que, para dimensão espacial  $d$  ímpar, esta expressão é finita, enquanto para  $d$  par, ela diverge, sendo necessário adicionar os contratermos correspondentes.

Por completeza, notamos que algumas vezes o calibre de Coulomb pode ser conveniente. Vamos descrever brevemente o resultado obtido para este calibre. Depois de impor este calibre, o termo misto imediatamente se anula na ação (3.30) mas não há modificação no termo quadrático em  $A_0$ , assim, o propagador  $\langle A_0 A_0 \rangle$ , neste caso, difere do propagador em (3.33), sendo igual a

$$\langle A_0 A_0 \rangle = -\frac{i}{\vec{k}^2}, \quad (3.54)$$

enquanto o propagador  $\langle A_i A_j \rangle$  permanece o mesmo de (3.33). Como resultado, a contribuição  $U_b$  de (3.43) não é modificada, enquanto que para  $U_a$ , temos agora

$$U_a = i \int \frac{d^d k dk_{0E}}{(2\pi)^{d+1}} \ln\left[1 + \frac{2e^2 \Phi \Phi^*}{\vec{k}^2}\right]. \quad (3.55)$$

Entretanto, o resultado para  $U_c$  no calibre de Coulomb é muito mais compli-

cado. Vamos considerá-lo em detalhes. O propagador efetivo  $G_1$  introduzido em (3.40) no caso do calibre de Coulomb assume a forma

$$G_1 = -\frac{ik_0^2}{\vec{k}^4 + 2e^2\vec{k}^2\Phi\Phi^*}, \quad (3.56)$$

enquanto  $G_2$  não sofre nenhuma modificação. Fazendo a soma indicada em (3.41) e algumas transformações simples, temos

$$\begin{aligned} U_c = & i \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \left[ \ln \left[ \frac{[k_0^2\vec{k}^2 + (\vec{k}^2 + 2e^2\Phi\Phi^*)(\vec{k}^4 + m^4)]}{k_0^4\vec{k}^2} \times \right. \right. \\ & \times (k_0^2 + \vec{k}^4 + 2e^2\vec{k}^2\Phi\Phi^*) + \left. \frac{2e^2\Phi\Phi^*\vec{k}^6(\vec{k}^2 + 2e^2\Phi\Phi^*)}{k_0^4\vec{k}^2} \right] - \\ & \left. - \ln \frac{k_0^2 + \vec{k}^4 + 2e^2\vec{k}^2\Phi\Phi^*}{k_0^2} - \ln \frac{\vec{k}^2 + 2e^2\Phi\Phi^*}{\vec{k}^2} + \ln \frac{k_0^2}{\vec{k}^4} \right]. \quad (3.57) \end{aligned}$$

Vemos que o segundo termo no lado direito da expressão difere de (3.45) apenas por um fator constante,  $-d$ . O terceiro termo cancela  $U_a$  (3.55), e o último é uma constante irrelevante, pois não depende dos campos de fundo. Portanto o potencial efetivo completo é

$$\begin{aligned} U = & U_a + U_b + U_c \\ = & -i \frac{\pi^{d/2}}{2(2\pi)^d} (2e^2\Phi\Phi^*)^{d/2+1} \frac{(1-d)\Gamma(-1-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})} + \\ & + i \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ \frac{[k_0^2\vec{k}^2 + (\vec{k}^2 + 2e^2\Phi\Phi^*)(\vec{k}^4 + m^4)]}{k_0^4\vec{k}^2} \times \right. \\ & \left. \times (k_{0E}^2 + \vec{k}^4 + 2e^2\vec{k}^2\Phi\Phi^*) + \frac{2e^2\Phi\Phi^*\vec{k}^6(\vec{k}^2 + 2e^2\Phi\Phi^*)}{k_0^4\vec{k}^2} \right]. \quad (3.58) \end{aligned}$$

Note que o primeiro termo nesta expressão é muito similar ao resultado (3.53). A expressão acima é diferente daquela expressão por que a contribuição envolvendo propagadores  $\langle A_0 A_0 \rangle$  foi cancelada. Infelizmente, o ultimo termo é muito difícil de ser resolvido.

A discrepância entre os resultados para os calibres que consideramos é esperada já que o potencial efetivo é uma quantidade dependente do calibre.

### 3.3 Teoria de Yukawa com $z = 2$

Para teoria de Yukawa é natural considerar a versão  $z = 2$  da teoria de campo espinorial. A lagrangiana em  $(d + 1)$  dimensões é dada por

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^0\partial_0 + \Delta - m^2 - h\Phi)\psi. \quad (3.59)$$

Para mantermos o foco apenas no acoplamento de Yukawa, tratamos o campo escalar como um campo puramente externo. O potencial efetivo em um loop correspondendo a esta lagrangiana é dado por

$$\Gamma^{(1)} = i\text{Tr} \ln(i\gamma^0\partial_0 + \Delta - m^2 - h\Phi). \quad (3.60)$$

Podemos representar esta expressão como

$$\Gamma^{(1)} = i\text{Tr} \ln(i\gamma^0\partial_0) + i\text{Tr} \ln\left(1 - i\frac{(\Delta - m^2 - h\Phi)\gamma^0\partial_0}{\partial_0^2}\right). \quad (3.61)$$

Descartando uma constante aditiva irrelevante, expandindo o logaritmo em série, calculando o traço da matriz e fazendo a soma chegamos a

$$\Gamma^{(1)} = i\frac{\delta}{2}\text{Tr} \ln \left[1 - \frac{(\Delta - m^2 - h\Phi)^2}{\partial_0^2}\right]. \quad (3.62)$$

Aqui,  $\delta$  é a dimensão das matrizes de Dirac na representação correspondente. Depois de fazer a transformada de Fourier pela regra  $i\partial_{0,i} \rightarrow k_{0,i}$ , esta expressão leva ao seguinte potencial efetivo

$$U^{(1)} = -i\frac{\delta}{2} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ \frac{k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2 + h\Phi)^2}{k_0^2} \right]. \quad (3.63)$$

Fazendo a rotação de Wick e integrando sobre  $k_0$ , chegamos a

$$U^{(1)} = -\frac{\delta}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\vec{k}^2 + m^2 + h\Phi)^{1+\epsilon}. \quad (3.64)$$

Esta integral, para qualquer  $d$  positivo, se anula em regularização dimensional sendo proporcional a  $\frac{1}{\Gamma(-1-\epsilon)}$  que é zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Se considerarmos um modelo composto da lagrangiana (3.28) mais uma extensão de (3.59) no qual os férmions são também minimamente acoplados ao campo eletromagnético, até a ordem de um loop, não surge nenhuma contribuição ao potencial efetivo dada pelas expressões (3.47) e (3.53).

### 3.4 QED escalar com $z$ genérico

Considere a generalização do lagrangiana (3.28) com expoente crítico  $z$  arbitrário:

$$L = \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} + (-1)^z \frac{1}{4}F_{ij}\Delta^{z-1}F_{ij} - D_0\phi(D_0\phi)^* + D_{i_1}D_{i_2}\dots D_{i_z}\phi(D_{i_1}D_{i_2}\dots D_{i_z}\phi)^*. \quad (3.65)$$

Com  $D_0 = \partial_0 - ieA_0$  e  $D_i = \partial_i - ieA_i$  como definidos no caso  $z = 2$ . Por razões de simplicidade, trabalharemos com valor nulo da massa do campo escalar ( $m = 0$ ). O propagador para o campo escalar agora é dado por

$$\langle \phi\phi^* \rangle = \frac{i}{k_0^2 - \vec{k}^2z}. \quad (3.66)$$

Para determinar os propagadores do campo de calibre, devemos introduzir o termo de fixação de calibre. Em exata analogia com (3.28), o termo de fixação de calibre apropriado é não local:

$$L_{gf} = \frac{1}{2}(-1)^z \left[ (-1)^z \Delta^{-(z-1)/2} \partial_0 A_0 + \Delta^{(z-1)/2} \partial_i A_i \right]^2. \quad (3.67)$$

esta expressão se reduz ao calibre de Feynman quando  $z = 1$ . Adicionando o termo (3.67) à lagrangiana (3.28), obtemos:

$$L_c = -\frac{1}{2}A_0 \left[ \Delta - \frac{\partial_0^2}{(-\Delta)^{z-1}} \right] A_0 - \frac{1}{2}A_i \left[ \partial_0^2 + (-\Delta)^z \right] A_i. \quad (3.68)$$

Dessa forma, conseguimos separar os termos quadráticos da ação para os campos  $A_0$  e  $A_i$ . Os propagadores correspondentes são dados por:

$$\begin{aligned} \langle A_0 A_0 \rangle &= \frac{i \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}}; \\ \langle A_i A_j \rangle &= -\frac{i \delta_{ij}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Os vértices também podem ser obtidos por um procedimento análogo ao caso  $z = 2$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} &-e^2 A_0 A_0 \Phi \Phi^*; \quad -ie(\Phi^* \phi - \Phi \phi^*) \partial_0 A_0, \\ &-ie[\Phi \phi^* - \Phi^* \phi](\partial_j \Delta^{z-1} A_j), \quad -e^2 A_j \Delta^{z-1} A_j \Phi \Phi^*, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde  $\Phi$  and  $\Phi^*$  são os campos de fundo, e  $\phi$ ,  $\phi^*$  são os campos quânticos.

Ainda de maneira análoga ao caso desenvolvido para  $z = 2$ , consideramos os dois tipos de contribuições para o potencial efetivo. O primeiro deles é aquele descrito pela figura (3.2) onde são considerados apenas loops dos propagadores de calibre. Assim, separando as contribuições dos propagadores  $\langle A_0 A_0 \rangle$  e  $\langle A_i A_j \rangle$ , escrevemos:

$$\begin{aligned} U_a &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \left( \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}} \right)^n \\ &= \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 - \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}} \right], \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} U_b &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \left( \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}} \right)^n \\ &= d \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 - \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}} \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

No segundo tipo de diagramas, os vértices triplos estão presentes. Introduzimos mais uma vez os propagadores vestidos (fig. 3.2). Assim, o análogo

da expressão (3.37) é

$$\begin{aligned} \langle A_0 A_0 \rangle_D &= \frac{i \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z} - 2e^2 \vec{k}^{2z-2} \Phi \Phi^*}, \\ \langle A_i A_j \rangle_D &= - \frac{i \delta_{ij}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z} - 2e^2 \vec{k}^{2z-2} \Phi \Phi^*}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para calcular as expressões associadas aos diagramas (fig. 3.2) consideremos a versão genérica de (3.39)

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle \partial_0 A_0(t_1, \vec{x}_1) \partial_0 A_0(t_2, \vec{x}_2) \rangle_D; \\ G_2 &= \langle \partial_i \Delta^{z-1} A_i(t_1, \vec{x}_1) \partial_j \Delta^{z-1} A_j(t_2, \vec{x}_2) \rangle_D, \end{aligned} \quad (3.74)$$

cujas transformadas de Fourier são

$$\begin{aligned} G_1(k) &= \frac{i k_0^2 \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z} - 2e^2 \vec{k}^{2z-2} \Phi \Phi^*}; \\ G_2(k) &= - \frac{i \vec{k}^{4z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z} - 2e^2 \vec{k}^{2z-2} \Phi \Phi^*}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

E escrevendo os resultados análogos para  $U_c$  definido na expressão (3.41) obtemos

$$U_c = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \left( - \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z} - 2e^2 \vec{k}^{2z-2} \Phi \Phi^*} \right)^n. \quad (3.76)$$

Desenvolvendo a soma, chegamos a

$$U_c = - \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 - \frac{2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2 - \vec{k}^{2z}} \right]. \quad (3.77)$$

Assim,  $U_c$  cancela  $U_a$  (3.71). O potencial efetivo, então, é descrito por  $U_b$ . Fazendo uma rotação de Wick e adicionando o termo  $id \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{\vec{k}^4}{k_0^2} \right]$ , chegamos à expressão

$$U^{(1)} = id \int \frac{d^d k dk_0 E}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ 1 + \frac{\vec{k}^{2z} + 2e^2 \Phi \Phi^* \vec{k}^{2z-2}}{k_0^2} \right]. \quad (3.78)$$

A integral em  $k_0$  é feita de maneira idêntica ao caso  $z = 2$ . Chegamos então à forma

$$U^{(1)} = id \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \vec{k}^{z-1} \sqrt{(\vec{k}^2 + 2e^2 \Phi \Phi^*)}. \quad (3.79)$$

Esta integral é ligeiramente mais complicada que a do caso  $z = 2$ , mas é resolvida por um procedimento semelhante. Escrevemos a raiz quadrada na expressão acima de acordo com (3.24) e obtemos

$$U^{(1)} = \frac{id}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \vec{k}^{z-1} \frac{1}{\Gamma(-1/2)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-3/2} e^{-\alpha(\vec{k}^2 + 2e^2 \Phi \Phi^*)}. \quad (3.80)$$

Rearranjando os termos, escrevemos

$$U^{(1)} = \frac{id}{2(2\pi)^d \Gamma(-1/2)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-3/2} e^{-2e^2 \Phi \Phi^* \alpha} \int d^d k \vec{k}^{z-1} e^{\vec{k}^2}. \quad (3.81)$$

A integral em  $d^d k$  pode ser resolvida usando a relação  $d^d k = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\Gamma(d/2)} k^{d-1} dk$  e fazendo a substituição  $\vec{k}^2 = \alpha u$ . Depois de um pouco de álgebra, podemos escrever

$$U^{(1)} = \frac{id}{2(2\pi)^d \Gamma(-1/2)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-1-(d+z)/2} e^{-2e^2 \Phi \Phi^* \alpha} \times \\ \times \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty du u^{(d+z-3)/2} e^{-u}. \quad (3.82)$$

Adaptando a integral em  $u$  para o formato da função gama, chegamos a

$$U^{(1)} = \frac{id}{2(2\pi)^d \Gamma(-1/2)} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \Gamma\left(\frac{d+z-1}{2}\right) \times \\ \times \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-1-(d+z)/2} e^{-2e^2 \Phi \Phi^* \alpha}. \quad (3.83)$$

Resolvendo a integral em  $\alpha$ , obtemos

$$U^{(1)} = -\frac{d\pi^{\frac{d-1}{2}}}{4(2\pi)^d} (2e^2 \Phi \Phi^*)^{\frac{d+z}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{d+z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+z-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (3.84)$$

Esta expressão se reduz ao resultado (3.53) para  $z = 2$ .

Vamos discutir as consequências físicas deste potencial. Ele pode ser reescrito como

$$U^{(1)} = -c(2e^2\Phi\Phi^*)^{\frac{d+z}{2}}\Gamma\left(-\frac{d+z}{2}\right), \quad (3.85)$$

onde  $c = \frac{d\pi^{\frac{d-1}{2}}}{4(2\pi)^d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+z-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$  é uma constante positiva. Há dois casos característicos

(i)  $d+z = 2n$  (ou seja, ambos  $z$  e  $d$  são ímpares, como na QED usual em  $(3+1)$  dimensões, ou ambos  $z$  e  $d$  são pares). Neste caso, o potencial efetivo exhibe divergências: Se fizermos a regularização dimensional impondo  $d+z = 2n - \epsilon$  e levarmos em conta que  $\Gamma(-n + \frac{\epsilon}{2}) = \frac{(-1)^n}{n!}(\frac{2}{\epsilon} + \gamma + \lambda_n + O(\epsilon))$ , onde  $\lambda_n$  é uma constante positiva, obtemos

$$U^{(1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} c(2e^2\Phi\Phi^*)^n \left(\frac{2}{\epsilon} + \gamma + \lambda_n - \ln \frac{2e^2\Phi\Phi^*}{\mu^2}\right). \quad (3.86)$$

A divergência representada pelo polo em  $\epsilon$  pode ser eliminada pelo contra-termo correspondente. O sinal global da expressão, bem como a estabilidade da teoria, depende da paridade de  $n$ . Para  $n$  ímpar, o potencial efetivo exhibe um mínimo em  $\Phi = 0$  e, para  $n$  par, em algum  $\Phi$  não nulo (fig. 3.4). É fácil ver que no último caso, a simetria  $Z_2$  da substituição  $\Phi \rightarrow -\Phi$  é quebrada, portanto, a correção de um loop induz a quebra espontânea de simetria como em [70].

(ii)  $d+z = 2n+1$ . Neste caso, temos

$$U^{(1)} = -c(2e^2\Phi\Phi^*)^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{2n+1}{2}\right), \quad (3.87)$$

e, como  $\Gamma\left(-\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}2^{n+1}}{(2n+1)!!}$ , Notamos que para  $n$  par, o potencial efetivo tem um mínimo em  $\Phi = 0$  e não há quebra de simetria. Para  $n$  ímpar, o potencial efetivo é negativo e exhibe um máximo em  $\Phi = 0$ . A teoria é então, instável. Como mostra a figura 3.5)

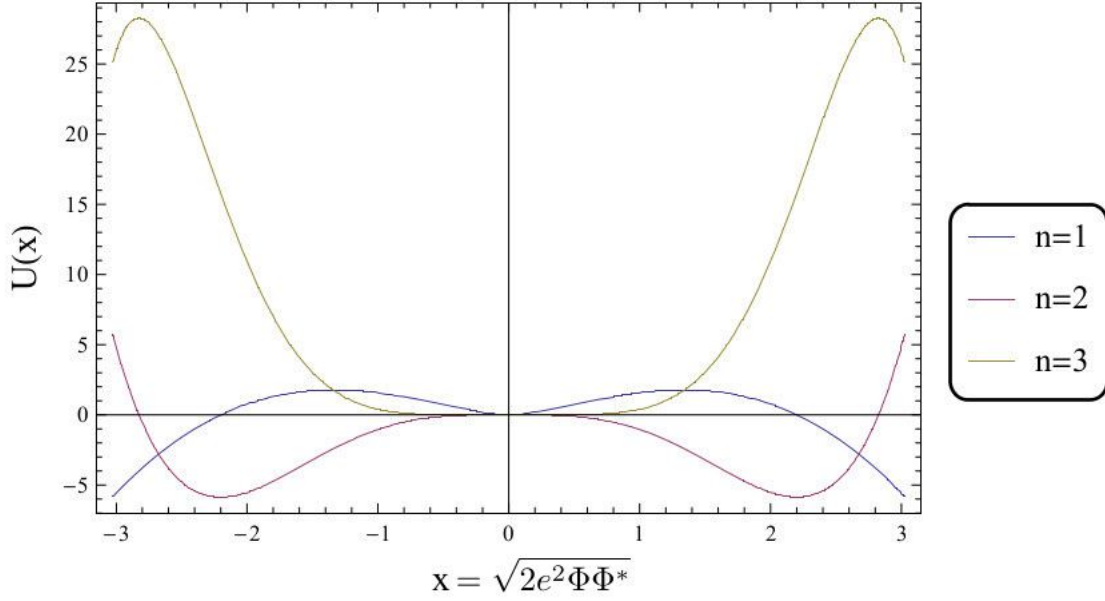


Figura 3.4: Comportamento do potencial efetivo dado pela expressão (3.86) com relação aos campos para  $n = 1, 2$  e  $3$ . O gráfico exibe máximos e mínimos de acordo com a paridade de  $n$ .

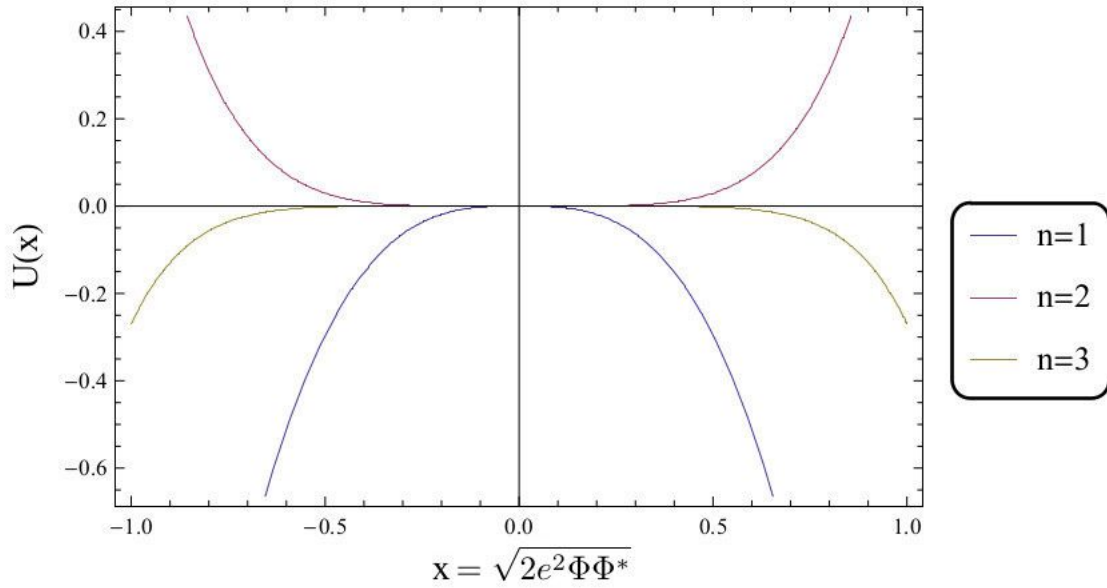


Figura 3.5: Comportamento do potencial efetivo dado pela expressão (3.86) com relação aos campos para  $n = 1, 2$  e  $3$ . A estabilidade da teoria depende da paridade de  $n$ .

### 3.5 Teoria de Yukawa com $z$ genérico

Vamos elaborar a teoria de Yukawa para  $z$  arbitrário. A lagrangiana da teoria em  $(d + 1)$  dimensões tem a forma

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^0\partial_0 + (i\gamma^i\partial_i)^z + h\Phi)\psi. \quad (3.88)$$

Para estudar o potencial efetivo na ordem de um loop, é suficiente tratar o campo escalar como um campo puramente externo e anular a massa do campo espinorial já que a presença da massa implica apenas na redefinição do campo  $\Phi$ . Neste caso, a expansão em loops é encerrada com a contribuição de ordem um e nenhuma restrição à renormalizabilidade relacionada à dimensão de  $h$  emerge. Entretanto, se sugerirmos que  $\Phi$  é também dinâmico, com o mesmo expoente crítico  $z$  de  $\psi$ , ou seja, sua lagrangiana livre é a mesma da teoria (3.65), a dimensão de massa de  $h$  se torna igual a  $\frac{3z-d}{2}$ . Portanto, se temos  $z \geq \frac{d}{3}$ , a teoria é renormalizável. Em particular, o caso usual ( $z = 1, d = 3$ ) se enquadra nesta condição.

O potencial efetivo de um loop correspondendo à lagrangiana (3.88) tem a forma

$$U^{(1)} = -i\text{Tr} \ln(i\gamma^0\partial_0 + (i\gamma^i\partial_i)^z + h\Phi). \quad (3.89)$$

Agora, temos duas possibilidades. Na primeira delas,  $z$  é par, então,  $(i\gamma^i\partial_i)^z = (-\Delta)^{z/2}$ , e, pelo mesmo procedimento do caso  $z = 2$ , chegamos ao seguinte potencial efetivo:

$$U^{(1)} = -i\frac{\delta}{2} \int \frac{d^d k dk_0}{(2\pi)^{d+1}} \ln \left[ \frac{k_0^2 - ((\vec{k}^2)^{z/2} + h\Phi)^2}{k_0^2} \right]. \quad (3.90)$$

Fazendo a rotação de Wick e a integração sobre  $k_0$ , chegamos a

$$U^{(1)} = -\frac{\delta}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} ((\vec{k}^2)^{z/2} + h\Phi). \quad (3.91)$$

Esta integral, para qualquer  $d = 3 - \epsilon$  positivo, se anula em regularização dimensional, sendo proporcional a  $\frac{1}{\Gamma(-1-\epsilon)}$ , que vai a zero para  $\epsilon \rightarrow 0$ . Logo, o potencial efetivo nesta teoria se anula para  $z$  par. Isso generaliza o resultado (3.64) para qualquer  $z$  par.

A segunda possibilidade é o caso de  $z$  ímpar,  $z = 2l + 1$  então,  $(i\gamma^i\partial_i)^z = (-\Delta)^l i\gamma^i\partial_i$ . Neste caso, temos

$$U^{(1)} = -i\text{Tr} \ln(i\gamma^0\partial_0 + i(-\Delta)^l i\gamma^i\partial_i + h\Phi). \quad (3.92)$$

Se  $h\Phi = M$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{dU^{(1)}}{dM} &= -i\text{Tr}\frac{1}{i\gamma^0\partial_0 + i(-\Delta)^l\gamma^i\partial_i + M} \\ &= -i\int\frac{dk_0d^dk}{(2\pi)^{d+1}}\frac{1}{\gamma^0k_0 + (k^2)^l\gamma^ik_i + M}\end{aligned}\quad (3.93)$$

Calculando o traço, depois da rotação de Wick, temos

$$\begin{aligned}\frac{dU^{(1)}}{dM} &= M\delta\int\frac{dk_0d^dk}{(2\pi)^{d+1}}\frac{1}{k_0^2 + (k^2)^{2l+1} + M^2} \\ &= \frac{1}{2}M\delta\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(k^2)^{2l+1} + M^2]^{1/2}}.\end{aligned}\quad (3.94)$$

Esta expressão pode ser desenvolvida pelo mesmo procedimento usado na teoria escalar. Primeiro, integramos sobre os momentos:

$$\frac{dU^{(1)}}{dM} = -\delta\frac{\pi^{d/2-1/2}}{(2\pi)^d(2l+1)\Gamma(d/2)}\frac{1}{\Gamma(d/2)}\Gamma\left(\frac{d}{4l+2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{4l+2} + \frac{1}{2}\right)M^{\frac{d}{2l+1}},\quad (3.95)$$

Finalmente integramos sobre  $M$  e, restaurando a expressão para o campo de fundo, chegamos a seguinte expressão para o potencial efetivo:

$$\begin{aligned}U^{(1)} &= -\delta\frac{\pi^{d/2-1/2}}{(2\pi)^d(d+2l+1)\Gamma(d/2)}\times \\ &\times\Gamma\left(\frac{d}{4l+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left[1 - \frac{d}{2l+1}\right]\right)(h\Phi)^{\frac{d}{2l+1}+1}.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Vemos que este potencial efetivo é finito quando  $\frac{d}{2l+1} \neq 2k+1$ , onde  $k$  é um número inteiro. Como no caso prévio, temos duas situações.

(i) Temos  $\frac{d}{2l+1} \neq 2k+1$ . Neste caso, o potencial efetivo é finito e seu sinal depende do sinal de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\left[1 - \frac{d}{2l+1}\right]\right)$ , que pode ser positivo ou negativo para diferentes valores de  $d$  and  $l$ . Se o potencial efetivo é positivo, não há quebra espontânea de simetria mesmo se introduzirmos o auto-acoplamento clássico do campo escalar da forma  $\lambda\Phi^{2n}$ , com  $\lambda > 0$ . Entretanto, se o potencial efetivo é negativo, a teoria é instável se não tivermos nenhum auto-acoplamento clássico do campo escalar e poderíamos ter quebra espontânea da simetria  $Z_2$  se tal auto-acoplamento estivesse presente, já que neste caso,

o potencial efetivo corrigido em um loop possui mínimo não trivial em  $\Phi \neq 0$ .

(ii) Temos  $\frac{d}{2l+1} = 2k + 1 + 2\epsilon$ , em  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . Neste caso, a função gama tem polos que mudam o sinal dependendo da paridade de  $k$ , isto é,  $\Gamma(-k + \epsilon)$ , em  $\epsilon > 0$ , é positivo para  $k$  par e negativo para  $k$  ímpar. O potencial efetivo é igual a  $-a\Gamma(-k - \epsilon)\Phi^{2k+2+2\epsilon}$ , onde  $a$  é um número positivo. Expandindo esta expressão em uma série de potências em torno de  $\epsilon = 0$ , obtemos que o potencial efetivo é proporcional a  $(-1)^k$ , logo possui um mínimo em  $\Phi = 0$  para  $k$  par. Em outras palavras, a situação é similar a da QED escalar levando em conta as diferentes estatísticas dos campos quânticos.

## Capítulo 4

# Violação de Lorentz em Teoria de Supercampos

Neste capítulo vamos estudar um modelo de quebra de Lorentz em supersimetria. Mais especificamente, vamos desenvolver o formalismo de supercampos na formulação de Kostelecký-Berger.

O formalismo de supercampos é particularmente útil e simplificador no estudo da supersimetria. A ideia básica é descrever a teoria supersimétrica por meio de supercampos  $\Phi$  definidos sobre o superespaço formado pelo espaço-tempo usual e pelo espaço das variáveis de Grassman  $\theta$  e suas hermitianas conjugadas. O supercampo  $\Phi$  é decomposto em campos componentes representando bósons (campos escalares  $\phi$ ), férmions (campos espinoriais  $\psi_\alpha$ ) e campos auxiliares (que no caso apresentado aqui serão representados pelo campo  $F$  e seu hermitiano conjugado).

Neste trabalho, nos concentraremos no modelo de Wess-Zumino, análogo supersimétrico dos modelos escalares usuais. Para este modelo, a ação em quatro dimensões de espaço-tempo é dada por

$$S = \int d^8z \Phi \bar{\Phi} + \left[ \int d^6z \left( \frac{m}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \Phi^3 \right) + h.c. \right], \quad (4.1)$$

onde  $d^8z = d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}$ . Aqui,  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$  são denominados supercampo quiral e antiquiral, respectivamente. Estes supercampos devem satisfazer as relações  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$  e  $D_\alpha\bar{\Phi} = 0$ , onde  $D_\alpha$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$  são a derivada supercovariante e sua hermitiana conjugada.

Quando escrita em termos das componentes de  $\Phi$  e esta ação é dada por

$$S = \int d^4x \left[ \phi \square \bar{\phi} + \psi^\alpha i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + F \bar{F} + m(\psi^\alpha \psi_\alpha + \phi F + h.c.) + \lambda(\phi \psi^\alpha \psi_\alpha + \frac{1}{2} \phi^2 F + h.c.) \right]. \quad (4.2)$$

A essência da supersimetria é a existência da transformação entre bósons e férmions. No modelo de Wess-Zumino, isso está representado no fato de que a ação acima é invariante pelas transformações

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \xi^\alpha \psi_\alpha, \\ \delta\psi_\alpha &= -i \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \phi + \xi_\alpha \bar{F}, \\ \delta F &= -\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \sigma^{m\alpha\dot{\alpha}} \partial_m \psi_\alpha, \end{aligned} \quad (4.3)$$

e as correspondentes hermitianas conjugadas. Em termos do supercampo  $\Phi$ , estas transformações são representadas na forma

$$\delta\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = (\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (4.4)$$

onde  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  são os geradores das transformações de supersimetria dados por

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \partial_\alpha - i \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^m \partial_m; \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \partial_{\dot{\alpha}} - i \theta^\beta \bar{\sigma}_{\beta\dot{\alpha}}^m \partial_m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aqui  $\partial_\alpha$ ,  $\partial_{\dot{\alpha}}$  são derivadas simples com respeito às coordenadas do superespaço grassmanianos  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ , isto é,  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ , e  $\partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}$ . Estes geradores são lineares nas derivadas, como deve ser para satisfazer a regra de Leibniz. A álgebra dos geradores é descrita por

$$[P_m, Q_\alpha] = 0, \quad [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \quad \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^m P_m \quad (4.6)$$

Onde  $P_m = i\partial_m$  são os geradores de translações no espaço-tempo convencional.

A proposta de Kostelecký e Berger consiste na adição de um setor violador

de Lorentz CPT-par na lagrangiana de Wess-Zumino:

$$L = L_{WZ} + L_{VIL}, \quad (4.7)$$

onde

$$L_{VIL} = k_{mn} \partial^m \phi \partial^n \bar{\phi} + k_{mn} k_l^m \partial^l \phi \partial^n \bar{\phi} + \frac{i}{2} k_{mn} \psi_\alpha \sigma^{m\alpha\dot{\alpha}} \partial^n \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}. \quad (4.8)$$

O símbolo  $k_{mn}$  representa um tensor constante que implementa a violação da simetria de Lorentz. A lagrangiana (4.7) é invariante sob as transformações

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \xi^\alpha \psi_\alpha, \\ \delta\psi_\alpha &= -i \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\partial_m + k_{mn} \partial^n) \phi + \xi_\alpha \bar{F}, \\ \delta F &= -\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \sigma^{m\alpha\dot{\alpha}} (\partial_m + k_{mn} \partial^n) \psi_\alpha, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e suas hermitianas conjugadas. Como consequência, a álgebra dos geradores agora é descrita por

$$[P_m, Q_\alpha] = 0, \quad [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \quad \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^m (\partial_m + k_{mn} \partial^n). \quad (4.10)$$

Assim,  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  agora têm a forma

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \partial_\alpha - i \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \sigma_{\dot{\beta}\alpha}^m (\partial_m + k_{mn} \partial^n); \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \partial_{\dot{\alpha}} - i \theta^\beta \bar{\sigma}_{\beta\dot{\alpha}}^m (\partial_m + k_{mn} \partial^n). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Vamos agora, no contexto do formalismo de Kostelecký-Berger, descrever a teoria de supercampos do tipo éter, primeiro para um espaço-tempo com três dimensões, depois para um espaço-tempo com quatro dimensões. As definições básicas da teoria de supercampos usual invariante de Lorentz usadas neste capítulo são encontradas na referência [71].

## 4.1 Deformação do Superespaço Tridimensional

No espaço-tempo tridimensional usual, a representação espinorial relaciona o grupo de Lorentz ao grupo  $SL(2, \mathfrak{R})$ , portanto as representações funda-

mentais agem em um espinor de Majorana de duas componentes, consequentemente os geradores de supersimetria  $Q_\alpha$  são hermitianos. Portanto, para estender o superespaço usual a um superespaço tridimensional deformado, vamos reescrever a primeira das definições (4.11) definido a notação

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= i[\partial_\alpha - i\theta^\beta \gamma_{\beta\alpha}^m (\partial_m + k_{mn} \partial^n)] \\ &= i[\partial_\alpha - i\theta^\beta \gamma_{\beta\alpha}^m \nabla_m], \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $\partial_\alpha$  é a derivada com respeito às coordenadas do superespaço grassimano  $\theta^\alpha$ , e  $\nabla_m = \partial_m + k_{mn} \partial^n$  é a derivada do espaço tempo "covariantizada". Sem perda de generalidade, podemos escrever  $k_{mn}$  na forma do tipo-éter  $k_{mn} = \alpha u_m u_n$  [72, 73], onde  $u^m$  é um vetor constante, e  $\alpha$  é um parâmetro multiplicativo, portanto podemos nos referir a esta álgebra como a generalização tipo-éter da álgebra de supersimetria, e denominar as teorias construídas nesta base como teorias de supercampos supersimétricas com violação de Lorentz do tipo éter. Entretanto, a metodologia denominada em [74] como "supersymmetric aether", onde o vetor constante  $u^m$  é usado, apresenta-se como uma extensão supersimétrica da teoria do éter de Einstein onde a álgebra de supersimetria não é deformada, mas  $u^m$  é uma componente do supercampo dinâmico extra e, portanto, não tem nada em comum com nosso modelo.

Denotamos a relação de anticomutação entre os geradores de supersimetria deformados por

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i\gamma_{\alpha\beta}^m \nabla_m, \quad (4.13)$$

que é um operador proporcional à simples derivada em relação às coordenadas de espaço-tempo e como tal deve satisfazer a regra de Leibnitz.

A nova derivada supercovariante é construída para anticomutar com  $Q_\alpha$ , e pode ser escrita como

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\theta^\beta \gamma_{\beta\alpha}^m \nabla_m, \quad (4.14)$$

onde o operador  $\nabla_m$  comuta com  $D_\alpha$  e com os geradores de supersimetria.

A derivada supercovariante satisfaz as relações:

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, D_\beta\} &= 2i\gamma_{\alpha\beta}^m \nabla_m ; \\ (D^2)^2 &= \tilde{\square} ; \\ D^\alpha D_\beta D_\alpha &= 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde

$$\tilde{\square} = \nabla^m \nabla_m = \square + 2k_{mn} \partial^m \partial^n + k^{mn} k_{ml} \partial_n \partial^l \tag{4.16}$$

é o operador d'Alembertiano deformado.

Assim como no caso usual, podemos definir supercampos sobre este superespaço deformado e construir invariantes sobre ele. Podemos introduzir um modelo de Wess-Zumino cuja ação coincide formalmente com a ação usual.

$$S = \int d^5 z \left[ \frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + \frac{\lambda}{6} \Phi^3 \right], \tag{4.17}$$

enquanto a estrutura dos supercampos, entretanto, é deformada. Nesta expressão,  $\Phi$  um supercampo escalar real.

Em geral, supercampos podem ser estendidos em uma série de Taylor na variável de Grassman  $\theta$ :

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x) . \tag{4.18}$$

Mas para nosso superespaço deformado é mais conveniente definir as componentes do supercampo por projeção como

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} ; \\ \psi_\alpha(x) &= D_\alpha \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} ; \\ F(x) &= D^2 \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} , \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde as derivadas espinoriais supercovariantes são dadas pela equação (4.14). Já que as derivadas supercovariantes "deformadas" diferem das derivadas usu-

ais apenas no setor proporcional a  $\theta^\alpha$ , a estrutura de componentes dos supercampos nos casos "deformado" e usual vai ser exatamente a mesma. Portanto, a ação deformada em componentes tem a forma da soma da ação usual e aparecem alguns termos extras proporcionais a diferentes graus dos parâmetros de violação de Lorentz. Assim, podemos escrever a ação (4.17) em termos das componentes como

$$S = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} F^2 + \frac{1}{2} \psi^\alpha i(\gamma^m)_\alpha{}^\beta \nabla_m \psi_\beta + \frac{1}{2} \varphi \tilde{\square} \varphi + m(\psi^2 + \varphi F) + \lambda \left( \varphi \psi^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 F \right) \right]. \quad (4.20)$$

Encontramos que a ação livre para o férmion  $S_f = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\alpha [i(\gamma^m)_\alpha{}^\beta \nabla_m + m] \psi_\beta = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\alpha [i(\gamma^m)_\alpha{}^\beta (\partial_m + k_{mn} \partial^n) + m] \psi_\beta$  adquire o mesmo termo aditivo do tipo-éter que foi discutido em [72]. Notamos que o termo cinético para o supercampo escalar  $S_{esc,cin} = \frac{1}{2} \int d^3x \varphi \tilde{\square} \varphi = \frac{1}{2} \int d^3x \varphi (\partial_m + k_{mn} \partial^n) (\partial^m + k^{ml} \partial_l) \varphi$ , além do termo aditivo do tipo éter usual  $\varphi k^{mn} \partial_m \partial_n \varphi$  [72], envolve também o termo extra de ordem mais alta, que, para o caso  $k_{mn} = \alpha u_m u_n$ , corresponde ao quarto grau de  $u_m$ .

Somos agora capazes de obter as regras de Feynman para o superespaço tridimensional do tipo éter. Vamos começar generalizando o funcional para o modelo definido pela ação (4.17), o modelo de Wess-Zumino, com a adição de um termo de fonte. Seja

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ \int d^5z \left[ \frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + \frac{\lambda}{6} \Phi^3 + J \Phi \right] \right\} \\ &= \exp \left[ S_I \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \times \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ \int d^5z \left[ \frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + J \Phi \right] \right\}, \quad (4.21) \end{aligned}$$

onde  $S_I(\Phi) = \frac{\lambda}{6} \int d^5z \Phi^3$ . Completando o quadrado e desenvolvendo a inte-

gração gaussiana sobre  $\Phi$ , obtemos

$$Z(J) = \exp \left[ S_I \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^5 z J \frac{1}{D^2 + m} J \right\}. \quad (4.22)$$

Assim, podemos facilmente obter o propagador do supercampo no espaço dos momentos

$$\langle \Phi(p, \theta_1) \Phi(-p, \theta_2) \rangle = \frac{(D^2 - m)}{\tilde{p}^2 + m^2} \delta^2(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.23)$$

onde  $\tilde{p}^2 = p^2 + 2k_{mn}p^m p^n + k^{mn}k_{ml}p_n p^l$  e  $D^2 = \partial^2 - \theta^\beta \gamma_{\beta\alpha}^m \tilde{p}_m \partial^\alpha + \theta^2 \tilde{p}^2$ .

Notamos que pode-se calcular o grau superficial de divergência dos supergráficos de Feynman correspondentes da mesma forma que em teorias de campos usuais. Além do mais, o resultado disso coincide com os resultados obtidos em teoria de supercampos usual já que os propagadores nas teorias deformadas e não deformadas têm o mesmo comportamento assintótico, por exemplo, para teoria de campo escalar, os acoplamentos  $\Phi^3$  and  $\Phi^4$  vão novamente corresponder a teorias renormalizáveis, e todas teorias exceto aquelas com dinâmica efetiva exótica continuam a ser finitas em um loop.

Vamos discutir as relações de dispersão desta teoria. O denominador de (4.23) tem a forma  $\tilde{p}^2 + m^2 = p^2 + 2k_{mn}p^m p^n + k^{mn}k_{ml}p_n p^l + m^2$  (esta estrutura é comum em propagadores de teorias com violação de Lorentz CPT-par [75–77]). Vamos considerar este denominador para a signatura  $(-+++)$ , e  $k_{mn} = \alpha u_m u_n$ , com  $u_m = (u_0, \vec{u})$ , e  $u^m u_m \equiv \epsilon$  igual a 1, para  $u_m$  tipo espaço, ou a  $-1$ , para  $u_m$  tipo tempo, ou a 0, para  $u_m$  tipo luz.

- **Caso 1:**  $u_m$  **tipo espaço**,  $\epsilon = 1$ . Temos  $E^2 = p^2 + m^2 + (2\alpha + \alpha^2)(\vec{u} \cdot \vec{p})^2$ . Vemos que tanto para  $\alpha > 0$  quanto para  $\alpha < 0$ , desde que  $|\alpha| \ll 1$ , a dinâmica é consistente. Enquanto para  $\alpha$  negativo com valor absoluto grande, a teoria se torna degenerada ou instável. Em particular, se  $\alpha = -1$  e os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{p}$  são direcionados ao longo do eixo  $x$ , temos  $E^2 = m^2$ . Assim, a dinâmica é degenerada.
- **Caso 2:**  $u_m$  **tipo tempo**,  $\epsilon = -1$ . Temos  $E^2(1 - \alpha)^2 = \tilde{p}^2 + m^2$ . A dinâmica é consistente sempre, exceto no caso  $\alpha = 1$ .

- **Caso 3:**  $u_m$  tipo luz,  $\epsilon = 0$ , e  $u_m = (1, 1, 0, 0)$ . Neste caso, quando o vetor  $\vec{u}$  (parte espacial de  $u_m$ ) e o vetor  $\vec{p}$  são direcionados ao longo do eixo  $x$ , temos  $E = \frac{1}{1-2\alpha}[-2\alpha p \pm \sqrt{p^2(1+2\alpha+4\alpha^2)+m^2}]$ , então, se  $|\alpha| \ll 1$ , a dinâmica é consistente.

Em princípio, pode-se mostrar o caso quando as relações de dispersão não são modificadas mesmo para  $u_m$  não trivial, isto é, o caso  $\alpha u^m u_m + 2 = 0$ , que leva a  $\tilde{p}^2 = p^2$ , mas esta situação é impossível se nós temos  $|\alpha| \ll 1$ , enquanto  $u^m u_m$  é restrito aos valores  $-1, 0, 1$ .

Portanto, concluímos que se impusermos a condição  $|\alpha| \ll 1$ , junto com  $u^m u_m$  igual a  $\pm 1$  ou igual a  $0$ , para assegurar que os termos com violação de Lorentz podem ser tratados como pequenas correções, a forma quadrática correspondendo a  $\tilde{p}^2$  nunca é negativa.

A análise das teorias quadridimensionais que serão consideradas mais adiante é exatamente a mesma, por causa da estrutura do denominador do propagador. Em princípio, é natural esperar que uma situação similar ocorrerá em todas as teorias onde a violação da simetria de Lorentz é introduzida através da deformação da álgebra de supersimetria.

Agora, vamos calcular a parte quadrática da ação efetiva para o modelo de Wess-Zumino tridimensional na ordem de um loop. O diagrama de Feynman que contribui com o processo descrito na figura 4.1.

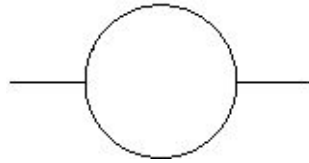


Figura 4.1: Contribuição ao termo cinético no superespaço tridimensional

A expressão correspondente pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} &= \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \Phi(-p, \theta) (D^2 - 2m) \Phi(p, \theta) \times \\ &\times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\tilde{q}^2 + m^2)[(\tilde{q} + \tilde{p})^2 + m^2]} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Esta expressão é finita e, se o momento externo se anula,  $p = 0$ , pode-se

mudar as variáveis e a medida de integração por  $\int d^3q = \Delta \int d^3\tilde{q}$ . Definimos  $\Delta = \det\left(\frac{\partial q^m}{\partial \tilde{q}^n}\right) = \det^{-1}(\delta_n^m + k_n^m)$  como o jacobiano da mudança de variáveis. Este jacobiano é constante (no caso de  $\alpha$  pequeno, temos  $\Delta = 1 - \alpha u^2$ ). Então, chegamos a

$$\Gamma^{(1)} = \Delta \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Phi(-p, \theta) (D^2 - 2m) \Phi(p, \theta) \frac{1}{8\pi|m|}. \quad (4.25)$$

Concluimos que esta metodologia não difere essencialmente da técnica de supergráficos usual. Ela pode ser generalizada a teorias mais sofisticadas, em particular, as teorias de calibre.

## 4.2 Deformação do Superespaço Quadridimensional

Começamos com os geradores deformados (4.11). Novamente, sem perda de generalidade, podemos fazer  $k_{mn} = \alpha u_m u_n$  simétrico, sendo  $u^m$ , e  $|\alpha| \ll 1$ , isto é na forma tipo-éter.

Efetivamente, estes geradores podem ser representados por

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \partial_\alpha - i\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \sigma_{\dot{\beta}\alpha}^m \nabla_m; \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \partial_{\dot{\alpha}} - i\theta^\beta \bar{\sigma}_{\beta\dot{\alpha}}^m \nabla_m, \end{aligned} \quad (4.26)$$

A relação de anticomutação dos geradores de supersimetria é

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^m \nabla_m, \quad (4.27)$$

então, isto dá um operador proporcional à translação como deve ser em teorias de campo supersimétricas [71, 78].

A derivada supercovariante correspondente deve anticomutar com estes geradores, sendo

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \sigma_{\dot{\beta}\alpha}^m \nabla_m; \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= \partial_{\dot{\alpha}} + i\theta^\beta \bar{\sigma}_{\beta\dot{\alpha}}^m \nabla_m. \end{aligned} \quad (4.28)$$

O operador  $\nabla_m$  comuta com  $D_\alpha$ ,  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ , e com os geradores de supersimetria.

Por analogia com a teoria de supercampos usual (Nesta seção, nós usamos as relações de normalização para geradores de supersimetria e derivadas supercovariantes que no caso invariante de Lorentz são reduzidos àqueles em [78]) pode-se mostrar que derivadas supercovariantes satisfazem as relações:

$$\begin{aligned}\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^m D_m; \\ D^2 \bar{D}^2 D^2 &= 16\tilde{\square} D^2; \\ D_\alpha D_\beta D_\gamma &= \bar{D}_\alpha \bar{D}_\beta \bar{D}_\gamma = 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

A definição dos supercampos quiral  $\Phi$  e antiquiral  $\bar{\Phi}$  agora estabelece que as relações  $\bar{D}_\alpha \Phi = 0$ , e  $D_\alpha \bar{\Phi} = 0$ , onde as derivadas supercovariantes são as novas derivadas satisfazendo as relações (4.28).

Vamos abordar o modelo de Wess-Zumino em quatro dimensões de espaço-tempo cuja ação foi apresentada em (4.1). Podemos obter a estrutura de componentes do supercampo quiral pelas projeções:

$$\begin{aligned}\phi &= \Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}; \\ \psi_\alpha &= \frac{1}{2}D_\alpha \Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}; \\ F &= \frac{D^2}{4}\Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0},\end{aligned}\tag{4.30}$$

com as definições análogas para as componentes do supercampo antiquiral. Portanto a expansão em componentes do modelo de Wess-Zumino deformado é dada por

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x \left[ \phi \tilde{\square} \bar{\phi} + \psi^\alpha i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \nabla_m \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + m(\psi^\alpha \psi_\alpha + \phi F + h.c.) + F \bar{F} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda(\phi \psi^\alpha \psi_\alpha + \frac{1}{2}\phi^2 F + h.c.) \right].\end{aligned}\tag{4.31}$$

Vemos que novamente os termos relacionados ao éter surgem para as componentes escalar e espinorial, e um termo de quarta ordem surge para o campo escalar.

Os propagadores dos supercampos tem a mesma forma que aqueles do mo-

delo de Wess-Zumino usual, mas com o operador d'Alembertiano modificado já que a estrutura das derivadas covariantes é modificada:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(z_1)\bar{\Phi}(z_2) \rangle &= \frac{1}{\tilde{\square} - m^2}\delta(z_1 - z_2), \\
\langle \Phi(z_1)\Phi(z_2) \rangle &= \frac{mD^2}{4\tilde{\square}(\tilde{\square} - m^2)}\delta(z_1 - z_2), \\
\langle \bar{\Phi}(z_1)\bar{\Phi}(z_2) \rangle &= \frac{m\bar{D}^2}{4\tilde{\square}(\tilde{\square} - m^2)}\delta(z_1 - z_2),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

com os fatores  $D$  associados aos vértices pela mesma regra de modelos supersimétricos usuais. Cada operador d'Alembertiano modificado é de segunda ordem nas derivadas de espaço-tempo, assim como no operador d'Alembertiano usual, portanto o cálculo do grau superficial de divergência  $\omega$  não difere do caso usual, de onde concluímos que

$$\omega = 2 - E - C, \tag{4.33}$$

onde  $E$  é o número de pernas externas, e  $C$  é o número de propagadores  $\langle \Phi\Phi \rangle$ ,  $\langle \bar{\Phi}\bar{\Phi} \rangle$ . Vemos que há apenas um tipo de divergência nesta teoria, isto é, a correção divergente ao termo cinético  $\Phi\bar{\Phi}$  descrito pelo gráfico na Fig. 2.

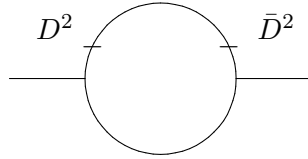


Figura 4.2: Contribuição ao termo cinético no superespaço quadridimensional

Depois de simples transformações de  $D$ -álgebra (notamos que o colapso de um loop em um ponto é baseado na mesma identidade  $\delta_{12}\bar{D}^2D^2\delta_{12} = 16\delta_{12}$  do caso usual), temos o termo cinético na forma

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= \frac{\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}(-p, \theta)\Phi(p, \theta) \times \\
&\times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{q}^2 - m^2)((\tilde{q} + \tilde{p})^2 - m^2)}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Esta contribuição é logaritmicamente divergente. Para avaliá-la, fazemos uma rotação de Wick e uma parametrização de Feynman que leva a

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= i\frac{\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}(-p, \theta) \Phi(p, \theta) \times \\ &\times \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{q}^2 + m^2 - \tilde{p}^2 x(1-x))^2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Então, mudamos as variáveis e a medida de integração da mesma maneira que no caso tridimensional, isto é  $\int d^4q = \Delta \int d^4\tilde{q}$ . Definimos  $\Delta = \det(\frac{\partial q^m}{\partial \tilde{q}^n}) = \det^{-1}(\delta_n^m + k_n^m)$  como o jacobiano da mudança de variáveis, seu valor é constante (no caso de  $u^a$ , temos  $\Delta = 1 - \alpha u^2$ ). Como resultado, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= i\Delta \frac{\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}(-p, \theta) \Phi(p, \theta) \times \\ &\times \int_0^1 dx \int \frac{d^4\tilde{q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{q}^2 + m^2 + \tilde{p}^2 x(1-x))^2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

A integral é a mesma do modelo de Wess-Zumino usual [71, 78], e temos

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= i\Delta \frac{\lambda^2}{2} \int d^4\theta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}(-p, \theta) \Phi(p, \theta) \times \\ &\times \left( \frac{1}{16\pi^2\epsilon} + \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 + \tilde{p}^2 x(1-x)}{\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

A parte finita não é invariante de Lorentz, sendo dependente do objeto não-invariante  $\tilde{p}^2$ .

Então, podemos calcular o potencial efetivo kähleriano [78], que, desenvolvendo os mesmos passos do caso usual (veja [65–67] para detalhes), chegamos a

$$K^{(1)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^8z \left[ \Psi \bar{\Psi} \frac{D^2 \bar{D}^2}{16\tilde{\square}^2} \right]^n \delta^8(z - z')|_{z=z'}, \quad (4.38)$$

onde  $\Psi = m + \lambda\Phi$ ,  $\bar{\Psi} = m + \lambda\bar{\Phi}$ . Esta expressão, depois de transformações

de  $D$ -álgebra, leva a

$$K^{(1)} = - \int d^4\theta \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q_m + k_{mn}q^n)^2} \ln\left(1 - \frac{\bar{\Psi}\Psi}{(q_m + k_{mn}q^n)^2}\right). \quad (4.39)$$

Esta expressão pode ser integrada. Para isso, fazemos novamente a mudança de variáveis  $q_m + k_{mn}q^n \rightarrow \tilde{q}_m$ , e chegamos a

$$K^{(1)} = -\Delta \int d^4\theta \int \frac{d^4\tilde{q}}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}\Psi \frac{1}{\tilde{q}^2} \ln\left(1 - \frac{\bar{\Psi}\Psi}{\tilde{q}^2}\right), \quad (4.40)$$

Depois de uma rotação de Wick e fazendo a integração, junto com a subtração do contratermo correspondente (que difere do contratermo usual usado no modelo de Wess-Zumino [78] apenas pelo fator constante  $\Delta$ ) chegamos a

$$K^{(1)} = -\frac{1}{32\pi^2} \Delta \bar{\Psi}\Psi \ln \frac{\Psi\bar{\Psi}}{\mu^2}. \quad (4.41)$$

portanto, vemos que a contribuição ao potencial efetivo Kähleriano não difere essencialmente daquele no modelo de Wess-Zumino.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, obtivemos resultados para alguns modelos de teoria quântica de campos que exibem violação da simetria de Lorentz.

Estudamos o potencial efetivo na formulação de Horava-Lifshitz e obtivemos resultados para os seguintes casos: um modelo escalar auto acoplado cujo potencial efetivo foi encontrado para valores arbitrários da dimensão espacial, expoente crítico e acoplamento. A QED escalar, cujo potencial efetivo foi obtido para o caso  $z = 2$  e para  $z$  genérico. A teoria de Yukawa para  $z = 2$  onde mostramos que o potencial efetivo em um loop se anula, sendo assim necessárias correções em ordem dois loops. A teoria de Yukawa para  $z$  genérico, onde o foi mostrado que o potencial efetivo é nulo para  $z$  par e não nulo para  $z$  ímpar. Em certos casos, o potencial efetivo é finito na ordem de um loop em ambos os casos. Em princípio, podemos também introduzir o acoplamento entre os campos espinoriais e de calibre. Entretanto, estas interações adicionais vão começar a contribuir ao potencial efetivo apenas na ordem de dois loops.

Concluimos então que a metodologia para calcular o potencial efetivo não difere essencialmente daquela usada em teorias de campos usuais, invariantes de Lorentz.

Enfatizamos que conseguimos encontrar o potencial efetivo para teorias com um expoente crítico arbitrário, embora a ação clássica da QED do tipo HL com um expoente crítico arbitrário é em geral extemamente complicada e envolve um número ilimitado de termos. Mostramos também que, em certos

casos (modelos com um auto acoplamento não trivial do campo escalar, ou as situações em que o potencial efetivo requer renormalização) o potencial efetivo pode gerar uma quebra espontânea da simetria  $Z_2$ . Notamos que, para o caso da QED, estes resultados podem ser diretamente generalizados para os multipletos  $U(N)$  do número arbitrário de campos escalares, então, podemos observar uma quebra de simetria dinâmica em teorias do tipo Horava-Lifshitz.

Estes métodos e resultados serão bastante úteis em trabalhos futuros que estamos desenvolvendo considerando modelos com temperatura finita.

Com base na construção de Berger-Kosteletsky [55], desenvolvemos a abordagem de supercampos para teorias de campos supersimétricas com violação de Lorentz do tipo éter.

Descrevemos a expansão em componentes e as modificações nos propagadores da teoria em um espaço-tempo de três dimensões. Calculamos a contribuição em um loop para ação efetiva. Obtivemos também resultados correspondentes em quatro dimensões de espaço-tempo e a contribuição em um loop para o potencial efetivo. Mostramos que nenhuma inconsistência física deve surgir se o tensor  $k_{mn}$  for suficientemente pequeno.

Esta abordagem apresenta-se não mais complicada que a técnica de supergráficos padrão cujos exemplos de aplicação estão presentes nos artigos [68, 79–82], e os resultados não diferem crucialmente do caso usual. Notamos que, se a deformação da álgebra da supersimetria é pequena, a dinâmica continua a ser consistente. É interessante notar que, primeiro, este esquema é essencialmente CPT-par, segundo, em princípio, pode-se fazer com que a matriz  $k_{mn}$  seja antissimétrica e, neste caso, a medida da integral não é corrigida para  $k_{mn}$ ,  $\Delta = 1$ .

Em suma, fomos bem sucedidos em conciliar a violação da invariância de Lorentz e a supersimetria de forma bastante simples.

Em princípio, os cálculos para as teorias de supercalibre podem ser desenvolvidos da mesma forma e está em nossos projetos futuros. Outra perspectiva interessante é o desenvolvimento de teorias supersimétricas na formula-

ção de Horava-Lifshitz.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos e M.T.D. Orlando, *Violação da Simetria de Lorentz*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **29**, n. 1, 57-64, (2007).
- [2] V.A. Kostelecký and S. Samuel, *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*, Phys. Rev. **D39** (1989) 683.
- [3] D. Colladay and V.A. Kostelecký, *CPT Violation and the Standard Model*, Phys. Rev. **D55** (1997) 6760. arXiv:hep-ph/9703464.
- [4] O.W. Greenberg, *CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 231602. arXiv:hep-ph/0201258.
- [5] D. Colladay and V.A. Kostelecký. *Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*, Phys. Rev. **D58**(1998) 116002. arXiv:hep-ph/9809521
- [6] W. Bietenholz, *Cosmic Rays and the Search for a Lorentz Invariance Violation*, arXiv:0806.3713 [hep-ph].
- [7] K. Greisen, *End to the Cosmic-Ray Spectrum?* Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 748.
- [8] G.T. Zatsepin and V.A. Kuz'min, *Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays*, Sov. Phys. JETP Lett. **4** (1966) 78.
- [9] F.W. Stecker, *Effect of Photomeson Production by the Universal Radiation Field on High-Energy Cosmic Rays*, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 1016.

- [10] M. Takeda *et al.*, *Energy determination in the Akeno Giant Air Shower Array experiment*, *Astropart. Phys.* **19**, 447 (2003). arXiv:astro-ph/0209422.
- [11] R. Abbasi *et al.* (HiRes Collaboration), *First Observation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin Suppression*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 101101 (2008). arXiv:astro-ph/0703099.
- [12] Pierre Auger Collaboration (J. Abraham *et al.*), *Observation of the Suppression of the Flux of Cosmic Rays above  $4 \times 10^{19} eV$* , *Phys. Rev. Lett.* **101**, 061101 (2008). arXiv: 0806.4302 [astro-ph]
- [13] M. Roth (for the Pierre Auger Collaboration), *Measurement of the UHECR energy spectrum using data from the Surface Detector of the Pierre Auger Observatory*, arXiv:0706.2096 [astro-ph].
- [14] T. Yamamoto (for the Pierre Auger Collaboration), *The UHECR spectrum measured at the Pierre Auger Observatory and its astrophysical implications*, arXiv:0707.2638 [astro-ph].
- [15] R. S. van Dyck, P. B. Schwinberg e H. G. Dehmelt, *New high-precision comparison of electron and positron  $g$  factors*, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26 (1987)
- [16] P. L. Stanwix *et al.*, *Test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire microwave oscillators*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 040404 (2005), arXiv:hep-ph/0506074
- [17] S. Herrmann *et al.*, *Test of the isotropy of the speed of light using a continuously rotating optical resonator*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 150401 (2005), arXiv:physics/0508097.
- [18] B. Schwingerheuer *et al.*, *CPT tests in the neutral kaon system*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4376 (1995)

- [19] L. K. Gibbons et al., *CP and CPT symmetry test from the two pion decays of the neutral kaon with the Fermilab E731 detector*, Phys. Rev. **D55**, 6625 (1997).
- [20] J. S. Días, V. A. Kostelecký e M. Mewes, *Perturbative Lorentz and CPT violation for neutrino and antineutrino oscillations*, Phys. Rev. **D80**, 076007 (2009), arXiv:0908.1401 [hep-ph].
- [21] J. S. Días, *Long-baseline neutrino experiments as tests for Lorentz violation*, arXiv:0909.5360 [hep-ph].
- [22] B. Nodland and J. P. Ralston, *Indication of Anisotropy in Electromagnetic Propagation over Cosmological Distances*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3043 arXiv:astro-ph/9704196.
- [23] B. Feng, M. Li, J. Q. Xia, X. Chen and X. Zhang, *Searching for CPT Violation with Cosmic Microwave Background Data from WMAP and BOOMERANG* Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 221302 arXiv:astro-ph/0601095.
- [24] V. A. Kostelecký and N. Russell *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*, arXiv:0801.0287 [hep-ph]
- [25] R. M. Hornreich, M. Luban and S. Shtrikman, *Critical Behavior at the Onset of  $\vec{k}$ -Space Instability on the  $\lambda$  Line* Phys. Rev. Lett. **35**, 1678 (1975).
- [26] Marcelo M. Leite, *Renormalization-group picture of the Lifshitz critical behavior*, Phys. Rev. **B67**, 104415 (2003).
- [27] P. Horava, *Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, Phys. Rev. **D79**, 084008 (2009), arXiv:0901.3775 [hep-th].
- [28] G. Calcagni, *Cosmology of the Lifshitz universe*, JHEP 0909, 112 (2009), arXiv: 0904.0829 [hep-th].
- [29] R. Brandenberger, *Matter Bounce in Horava-Lifshitz Cosmology*, Phys. Rev. **D80**, 043516 (2009), arXiv:0904.2835 [hep-th].

- [30] Y.-S. Piao, *Primordial Perturbation in Horava-Lifshitz Cosmology*, Phys. Lett. **B681**, 1 (2009), arXiv:0904.4117 [hep-th].
- [31] E. Kiritsis, G. Kofinas, *Horava-Lifshitz Cosmology*, Nucl. Phys. **B821**, 467 (2009), arXiv: 0904.1334 [hep-th].
- [32] B. Chen, Q.-H. Huang, *Field Theory at a Lifshitz Point*, Phys. Lett. **B683**, 108 (2010), arXiv:0904.4565 [hep-th]
- [33] E. Saridakis, *Horava-Lifshitz Dark Energy*, Eur. Phys. J. **C67**, 229 (2010), arXiv: 0905.3532 [hep-th].
- [34] H. Lu, C. Mei, C. N. Pope, *Solutions to Horava Gravity*, Phys. Rev. Lett. **103**, 091301 (2009), arXiv:0904.1595 [hep-th].
- [35] H. Nastase, *On IR solutions in Horava gravity theories*, arXiv: 0904.3604 [hep-th].
- [36] R.-G. Cai, L.-M. Cao, N. Ohta, *Topological Black Holes in Horava-Lifshitz Gravity* Phys. Rev. **D80**, 024003 (2009), arXiv:0904.3670 [hep-th],
- [37] R. A. Konoplya, *Towards constraining of the Horava-Lifshitz gravities* Phys. Lett. **B679**, 499 (2009), arXiv:0905.1523 [hep-th].
- [38] R. Iengo, J. Russo, M. Serone, *Renormalization group in Lifshitz-type theories* JHEP 0911, 020 (2009), arXiv:0906.3477 [hep-th].
- [39] R. Iengo, M. Serone, *A Simple UV-Completion of QED in 5D*, Phys. Rev. **D81**, 125005 (2010), arXiv: 1003.4430 [hep-th].
- [40] J. M. Romero, J. A. Santiago, O. Gonzalez-Gaxiola, A. Zamora, *Electrodynamics a la Horava*, Mod. Phys. Lett. **A25**, 3381 (2010), arXiv:1006.0956 [hep-th].
- [41] D. Anselmi, *Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. I: General properties*, Ann. Phys. **324**, 874 (2009), arXiv:0808.3470 [hep-th].

- [42] D. Anselmi, *Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. II: Classification*, Ann. Phys. **324**, 1058 (2009), arXiv:0808.3474 [hep-th].
- [43] P. Gomes, M. Gomes, *On Higher Spatial Derivative Field Theories*, Phys. Rev. **D85**, 085018 (2012), arXiv:1107.6040 [hep-th].
- [44] A. Dhar, G. Mandal, S. Wadia, *Asymptotically free four-fermi theory in 4 dimensions at the  $z=3$  Lifshitz-like fixed point*, Phys. Rev. **D80**, 105018 (2009), arXiv:0905.2928 [hep-th].
- [45] S. Das, K. Murthy,  *$CP^{N-1}$  Models at a Lifshitz Point*, Phys. Rev. **D80**, 065006 (2009), arXiv:0906.3261 [hep-th].
- [46] P. Gomes, M. Gomes, *On Ward Identities in Lifshitz-like Field Theories*, Phys. Rev. **D85**, 065010 (2012), arXiv:1112.3887 [hep-th].
- [47] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Horava-Lifshitz modifications of the Casimir effect*, Mod. Phys. Lett. **A28**, 1350052 (2013) , arXiv: 1006.1635 [hep-th].
- [48] M. Eune, W. Kim, *Effective potentials in the Lifshitz scalar field theory*, Phys. Lett. **B703**, 100 (2011), arXiv:1105.5194 [hep-th].
- [49] J. Alexandre, K. Farakos, A. Tsapalis, *Liouville-Lifshitz theory in 3+1 dimensions*, Phys. Rev. **D81**, 105029 (2010), arXiv:1004.4201 [hep-th].
- [50] K. Farakos, *Symmetry breaking and restoration in Lifshitz type theories* D. Metaxas, Phys. Lett. **B707**, 562 (2012), arXiv:1109.0421 [hep-th].
- [51] K. Farakos, D. Metaxas, *Symmetry breaking and restoration for interacting scalar and gauge fields in Lifshitz type theories*, Phys. Lett. **B711**, 76 (2012), arXiv:1112.6080 [hep-th].
- [52] K. Farakos, *Effective potential for Lifshitz type  $z = 3$  gauge theories*, arXiv: 1204.5622 [hep-th].

- [53] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories*, Phys. Rev. **D85**, 127001 (2012), arXiv:1112.2081 [hep-th].
- [54] C. F. Farias, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, *On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories with the arbitrary critical exponent*, Phys. Lett. **B719**, 196 (2013), arXiv:1208.3427 [hep-th].
- [55] M. S. Berger, V. A. Kostelecký, *Supersymmetry and Lorentz Violation*, Phys. Rev **D65**, 091701 (2001), arXiv:hep-th/0112243.
- [56] H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto, A. L. M. A. Nogueira, *Supersymmetric Extension of the Lorentz and CPT-Violating Maxwell-Chern-Simons Model*, Phys.Rev. **D68**, 065030 (2003), hep-th/0304166.
- [57] C. F. Farias, A. C. Lehum, J. R. Nascimento and A. Yu. Petrov, *On the superfield supersymmetric aether-like Lorentz-breaking models*, Phys. Rev. **D86**, 065035 (2012) arXiv: 1206.4508 [hep-th].
- [58] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Conformal Supergravity*, Phys. Rept. **119** (1985) 233.
- [59] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*, Phys. Rev. **116**, 1322–1330 (1959).
- [60] P. Horava, *Membranes at quantum criticality*, JHEP **03**:020 (2009), arXiv:0812.4287 [hep-th].
- [61] T. P. Sotiriou, *Horava-Lifshitz gravity: a status report* J. Phys.: Conf. Ser. **283** 012034 (2011), arXiv:1010.3218 [hep-th].
- [62] S. Weinfurtner, T. P. Sotiriou and M. Visser, *Projectable Horava–Lifshitz gravity in a nutshell* J. Phys.: Conf. Ser. **222** 012054 (2010), arXiv:1002.0308 [gr-qc].

- [63] P. Horava and C. M. Melby-Thompson, *General Covariance in Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, Phys. Rev. D **82**, 064027 (2010), arXiv:1007.2410 [hep-th].
- [64] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro. *Effective action in quantum gravity*. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1992.
- [65] B. de Wit, M. Grisaru, M. Rocek, *Nonholomorphic Corrections to the One-Loop  $N=2$  Super Yang-Mills Action* Phys. Lett. **B374**, 297 (1996), hep-th/9601115;
- [66] A. Pickering, P. West, *The One Loop Effective Super-Potential and Non-Holomorphicity*, Phys. Lett. **B383**, 64 (1996), hep-th/9604147.
- [67] M. Grisaru, M. Rocek, R. von Unge, *Effective Kähler Potentials*, Phys. Lett. **B383**, 415 (1996), hep-th/9605149.
- [68] I. L. Buchbinder, M. Cvetič, A. Yu. Petrov, *One-loop effective potential of  $N=1$  supersymmetric theory and decoupling effects*, Nucl. Phys. **B571**, 358 (2000), hep-th/9906141.
- [69] F. S. Gama, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *On the higher-derivative supersymmetric gauge theory* Phys. Rev. **D84**, 045001 (2011), arXiv: 1101.0724 [hep-th].
- [70] S. Coleman, S. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking* Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
- [71] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Benjamin/Cummings, 1983.
- [72] S. Carroll, H. Tam, *Aether Compactification*, Phys. Rev. **D78**, 044047 (2008), arXiv: 0802.0521 [hep-ph].
- [73] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *On the aether-like Lorentz-breaking actions* Phys. Rev. **D81**, 045018 (2010), arXiv:0911.3548 [hep-th].

- [74] O. Pujolas, S. Sibiryakov, *Supersymmetric Aether*, JHEP **1201**, 062 (2012), arXiv: 1109.4495 [hep-th].
- [75] R. Casana, M. M. Ferreira, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, Phys. Rev. **D80**, 125040 (2009), arXiv: 0905.0544 [hep-th],
- [76] R. Casana, M. M. Ferreira, A. R. Gomes, F. dos Santos, *Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the Standard Model Extension*, Phys. Rev. **D82**, 125006 (2010), arXiv: 1010.2776 [hep-th];
- [77] R. Casana, M. M. Ferreira, R. M. M. Moreira, *Aspects of a planar nonbirefringent and CPT-even electrodynamics stemming from the Standard Model Extension*, Phys. Rev. **D84**, 125014 (2011), arXiv: 1108.6193 [hep-th].
- [78] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or a Walk Through Superspace*, IOP Publishing, 1995.
- [79] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, J. V. Yarevskaya, *Supersymmetric effective potential: superfield approach* Nucl. Phys. **B411**, 665 (1994).
- [80] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. Yu. Petrov, *Superfield Chiral Effective Potential*, Phys. Lett. **B321**, 372 (1994).
- [81] I. L. Buchbinder, M. Cvetič, A. Yu. Petrov, *Implications of decoupling effects for one-loop corrected effective actions from superstring theory* Mod. Phys. Lett. A **15**, 783 (2000), hep-th/9903243.
- [82] I. L. Buchbinder, A. Yu. Petrov, *Holomorphic effective potential in general chiral superfield model* Phys. Lett. **B461**, 209 (1999), hep-th/9905062.