

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Dissertação de Mestrado

Geometria de Weyl e a teoria gravitacional de Nordström

Tony Silva Almeida

João Pessoa, Agosto de 2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Dissertação de Mestrado

Geometria de Weyl e A teoria gravitacional de Nordström

Tony Silva Almeida

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Carlos Augusto Romero Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

João Pessoa, Agosto de 2010

A447g Almeida, Tony Silva.
Geometria de Weyl e a teoria gravitacional de Nordström /
Tony Silva Almeida.-- João Pessoa, 2010.
41f.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Relatividade especial. 3. Geometria de Weyl.
4. Gravitação escalar. 5. Teoria de Nordström.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 A busca por uma teoria da gravitação relativística	3
1.1 A Primeira teoria de Nordström	3
1.2 A segunda teoria de Nordström	6
1.2.1 Conservação de Momento-Energia	8
1.2.2 Aplicação para uma distribuição com simetria esférica de matéria .	9
1.2.3 Dependência das grandezas físicas com o potencial gravitacional . .	11
2 Formulação Geométrica da Teoria de Nordström	13
2.1 A teoria de Nordström como uma teoria métrica	14
2.2 Campo devido à fonte com simetria esférica	18
2.3 Testes gravitacionais	20
2.3.1 Avanço do Periélio	20
2.3.2 "Delay" Temporal	21
3 Geometria de Weyl	22
3.1 Geometria Diferencial	22
3.2 Geometria riemanianna	24
3.3 Geometria de Weyl	25
3.4 Gravitação de Nordström interpretada como o Campo de Gauge de Weyl .	28
3.4.1 Efeitos sobre a matéria, relógios e comprimentos	30
Conclusões	32
Referências Bibliográficas	33

Agradecimentos

Ao professor Carlos Romero pela estimulante orientação.

À Milena Pela adorável companhia.

Aos estudantes do PPGFísica, especialmente aos baianos da sala 15.

À capes pelo auxílio financeiro durante o Mestrado.

Resumo

Nessa dissertação descrevemos a teoria da gravitação escalar de Nordström em diferentes formalismos. Iniciamos tratando esta teoria em sua formulação original, que ficou conhecida por manter a estrutura geométrica da relatividade especial. A seguir revisamos a formulação métrica da teoria de Nordström, devido à Einstein e Fokker, que descreve a gravitação como manifestação da curvatura do espaço-tempo. Nessa formulação, descrevemos as predições da teoria de Nordström para alguns efeitos gravitacionais observados, tais como o movimento do periélio de Mercúrio e o atraso gravitacional da luz. Finalmente introduzimos a geometria de Weyl juntamente com o conceito das transformações de calibre para fazer a transição da formulação métrica em Einstein-Fokker (referencial de Riemann) para o espaço-tempo de Minkowski (referencial de Weyl), onde o campo gravitacional fica codificado pela conexão afim de Weyl. Mostramos também que a estrutura geodésica nessas três formulações é idêntica.

Keywords: Relatividade especial, geometria de Weyl, gravitação escalar, teoria de Nordström.

Abstract

In this dissertation we are concerned with Nordström's scalar gravity theory, one of the first attempts to formulate a relativistic theory of gravitation. We start by describing the theory in its original formulation given by Nordström. We then proceed to show how Nordström's approach is equivalent to a metric theory of gravity which regards gravity as a manifestation of spacetime curvature, a result first obtained by Einstein and Fokker in 1914. We explore this formal equivalence between the two approaches to derive Nordström's predictions of some observed phenomena, such as Mercury's perihelium and the time delay of the light. Finally we consider a third approach which makes use of Weyl geometry through its concept of gauge transformations. We then show that one can regard both Nordström's and Einstein-Fokker's framework as equivalent to a theory formulated in Minkowski spacetime in which the gravitational field is encoded in a non-trivial affine connection.

Keywords: Special relativity, Weyl geometry, scalar gravity Nordström theory.

Introdução

A teoria da relatividade Geral (TRG) é considerada a teoria padrão da gravitação, cuja característica mais marcante é descrever o campo gravitacional como um efeito da curvatura do espaço-tempo. Dito de outra forma, a TRG é uma *teoria métrica* da gravitação, cuja geometria se caracteriza pela adoção de uma métrica Lorentziana que determina o comportamento de réguas e relógios no espaço-tempo. Apesar do sucesso da TRG em todos os testes no âmbito do sistema solar (por exemplo, o avanço do periélio da órbita de Mercúrio, a deflexão da luz pelo Sol, e o desvio para o vermelho gravitacional), existem muitas teorias alternativas da gravitação [1] que procuram explicar a existência de novos fenômenos observados tais como a expansão acelerada do universo, a rotação anômala de galáxias, etc. A maioria dessas teorias alternativas são também teorias métricas, mas contêm alguns campos a mais que contribuem para o fenômeno da gravitação. Um exemplo é a teoria escalar-tensorial onde a matéria gera um campo gravitacional escalar e esse campo escalar atua junto à matéria, que por sua vez, e juntamente com esse campo, determina as propriedades métricas do espaço-tempo [2]. Outras teorias substituem a geometria riemanniana incluindo *torção* na conexão afim ou então generalizam a noção de compatibilidade entre a métrica e a conexão.

Nessa dissertação estudaremos o caso, em que a geometria riemanniana é substituída pela geometria de Weyl. Na geometria de Weyl além da métrica riemanniana existe um campo de 1-forma que quebra a metricidade da geometria de Riemann, ou seja, a compatibilidade da conexão com a métrica, assim a conexão passa a depender também desse novo campo e uma nova condição de compatibilidade da conexão com a métrica impõe um novo grupo de invariância. Esse grupo de invariância atua na variedade através das chamadas *transformações de calibre* que enriquecem muito a geometria do espaço-tempo no sentido de que temos certa liberdade na escolha da 1-forma e da métrica, mantendo, como veremos a seguir, a invariância da estrutura geodésica do espaço-tempo. Historicamente, o objetivo de Weyl era obter uma descrição unificada da gravitação e do eletromagnetismo, interpretando o campo σ como sendo o potencial eletromagnético e a grandeza $F_{\mu\nu} = \partial_\alpha \sigma_\beta - \partial_\beta \sigma_\alpha$, que é invariante de calibre, interpretada como o campo eletromagnético [3]. Entretanto uma objeção de Einstein à esse ponto tornou insustentável tal interpretação. Esse problema não existe se a 1-forma σ é uma diferencial exata; com isso temos a integrabilidade dos comprimentos e entramos numa classe denominada de espaços de Weyl integrável.

A classe de espaços de Weyl integrável tem sido amplamente considerada na física, principalmente na cosmologia [4], depois que Ehlers et al. [5] fizeram uma formulação axiomática para determinar a estrutura do espaço-tempo e concluíram que essa estrutura deveria ser a de uma geometria de Weyl integrável.

No presente trabalho descrevemos uma teoria da gravitação escalar com geometria de Weyl em que a métrica é minkowskiana, η , e a 1-forma é integrável, isto é, $\sigma = d\psi$, onde

ψ é um campo escalar. Nesse cenário é possível relacionar a geometria de Weyl com a geometria riemanianna, sendo esta um caso particular em que o campo de Weyl é nulo. Transformações de calibre entre o *referencial* de Weyl e o *referencial* de Riemann mantém a estrutura de geodésicas invariante [3].

A teoria gravitacional que obtemos é idêntica à teoria gravitacional escalar desenvolvida, antes da TRG, pelo finlandês Gunnar Nordström em 1913 [6], que mantém os postulados da teoria da relatividade especial (TRE) e introduz um potencial gravitacional, gerado pela matéria no espaço-tempo de Minkowski e é consistente com a igualdade entre massa inercial e gravitacional.

A interpretação da teoria de Nordström como uma teoria métrica deve-se a Einstein e Fokker [7], que, em 1914, reformularam a teoria de Nordström usando a geometria riemanniana. Nessa reformulação a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ que descreve o potencial gravitacional e a geometria do espaço-tempo é determinada por uma equação covariante sob transformações gerais de coordenadas e pela condição adicional de que seja conformalmente plana, isto é, $g_{\mu\nu} = \phi(x)\eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes constantes da métrica de Minkowski e $\phi(x)$ é uma função escalar conforme. Esta condição extra garante que a estrutura causal do espaço de Minkowski seja mantida, ou seja, a estrutura do cone de luz.

Usamos essa reformulação riemanianna da teoria escalar de Nordström para passar, através de uma transformação de calibre, do referencial de Riemann para o referencial de Weyl, pois é possível entender a geometria riemanniana como um referencial específico em que o campo de 1-formas é nulo. Mostramos em seguida que efeitos cinemáticos que ocorrem na teoria de Nordström são semelhantes aos que ocorrem no contexto da geometria de Weyl, numa interpretação simples em termos do campo de Weyl. Com isso mostraremos a equivalência entre os três formalismos: A teoria de Nordström com um campo físico, a teoria de Einstein-Fokker com métrica conformalmente plana e uma teoria gravitacional com o campo de Weyl.

Esta dissertação está organizada como segue: No capítulo 1 fazemos uma introdução à teoria de Nordström, descrevendo inicialmente a *primeira teoria de Nordström*, que tentava manter a estrutura da relatividade especial mas era falha; Em seguida descrevemos sua teoria correta, a qual é o objeto de análise nesse trabalho. No capítulo 2 descrevemos a formulação riemanniana da teoria de Nordström devio à Einstein-Fokker e usamos essa formulação para fazer as previsões da teoria de Nordström dos testes padrões da gravitação, também caracterizamos essa formulação como sendo um referencial riemanianno caracterizado por uma variedade M e uma métrica g , $(M, g, 0)$. No capítulo 3 descrevemos a geometria de Weyl e particularizando para o caso integrável e fazendo uma transformação de calibre até o referencial (M, η, ϕ) obtemos uma teoria da gravitação idêntica à teoria de Nordström. No capítulo 3 concluímos a dissertação com a discussão da equivalência dessas três teorias indicando as perspectivas e a gama de possibilidades que há para se investigar nesse cenário.

Capítulo 1

A busca por uma teoria da gravitação relativística

Em 1907 Albert Einstein foi convidado por Johannes Stark para escrever um artigo de revisão sobre a teoria da relatividade [8]. Nesse artigo, Einstein chama a atenção para a possibilidade de utilizar a gravitação para estender o princípio de relatividade à observadores acelerados e sugere que o princípio de equivalência¹ seja o primeiro passo nessa direção [9].

Contrariamente ao pensamento de Einstein, a maioria dos físicos teóricos da época acreditava que somente pequenas modificações na gravitação Newtoniana eram necessárias para torná-la compatível com a relatividade especial. Notadamente Henry Poincaré e Herman Minkowski [8] procuravam uma expressão para de força gravitacional de atração entre duas massas que fosse covariante sob transformações de Lorentz e produzisse o limite newtoniano. Presumidamente nenhum dos dois buscava uma teoria fundamental para a gravitação [8].

Nesse mesmo artigo, Einstein se mostra cético quanto à possibilidade de se formular uma teoria gravitacional que seja covariante frente às transformações de Lorentz. Os calculos detalhados que o levou a tirar essa conclusão não foram publicados, mas podemos chegar às mesmas conclusões sobre uma teoria gravitacional relativística acompanhando um trabalho que ficou conhecido como a *Primeira teoria de Nordström*, desenvolvida pelo finlandês Gunnar Nordström [10]. A seguir faremos uma breve revisão dessa teoria.

1.1 A Primeira teoria de Nordström

Logo depois do advento da teoria relatividade especial (TRE) havia a necessidade de uma descrição relativística dos fenômenos gravitacionais, principalmente pela existência de discrepâncias observacionais da previsão newtoniana para a rotação do periélio de Mercúrio. A gravitação Newtoniana se baseia no conceito de *ação-à-distância* da interação gravitacional entre uma fonte massiva, de densidade ρ , com um corpo distante, de massa m , através do potencial ϕ , gerado pela fonte. Sabemos também que na teoria newtoniana o potencial, a densidade de massa da fonte e a massa da partícula são invariantes sob

¹Especificamente, aqui a referência é feita em relação ao chamado *princípio de equivalência fraco*, sobre a equivalência entre referenciais inerciais e referenciais em queda-livre no campo gravitacional.

transformações de coordenadas de Galilei.²

A equação de campo da gravitação newtoniana é

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (1.1)$$

Por outro lado a equação do movimento é dada pela *segunda lei de Newton*

$$F_a = \frac{dp_a}{dt}, a=1,2,3 \quad (1.2)$$

onde os F_a são as componentes da força que atuam, independentemente, sobre a partícula e os p_a são as componentes do *momenta* da partícula.

A Teoria da Relatividade Especial postula que a velocidade da luz é a velocidade limite para propagação de sinais, abandonando as noções de ação-à-distância e de simultaneidade absoluta. Assim o potencial gravitacional deveria depender do tempo e ser um invariante sob as transformações de Lorentz.³ Sendo assim as equações (1.1) e (1.2) deveriam ser substituídas por equações covariantes sob transformações de Lorentz.

Como sugerido por Einstein [8], o primeiro passo na tentativa de descrever a lei da gravidade na estrutura básica da TRE é modificar a equação do campo escalar da gravidade, completando a equação de Poisson (1.1) com a inclusão de um termo diferenciado com respeito ao tempo,

$$\square\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = -4\pi G\rho \quad (1.3)$$

onde é suposto que $\phi(x, y, z, t)$ é um escalar, invariante de Lorentz e ρ é a densidade de massa da fonte que gera o campo ϕ . A matéria, através da equação de onda (1.3), gera um campo escalar gravitacional e este atua como o potencial gravitacional de interação com os outros corpos no espaço-tempo de Minkowski. A partir daqui faremos uso da métrica de assinatura $(+, -, -, -)$.

O segundo passo é uma modificação na equação do movimento. Como vimos, nas tentativas de Poincaré e Minkowski [8], não havia muita restrição quanto à escolha da lei de força gravitacional relativística, tal escolha não era única. O *ansatz* de Nordström foi de que a 4-força atuando sobre um corpo de massa gravitacional m_g seria dada por

$$F_\mu = m_g \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad (1.4)$$

de modo que a equação relativística do movimento é

$$\frac{d(m_i u_\mu)}{d\tau} = m_g \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \quad (1.5)$$

Inicialmente notemos que a equação (1.5) implica em

$$m_i \frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu \frac{dm_i}{d\tau} = m_g \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \quad (1.6)$$

Projetando (1.6) na direção da velocidade u^μ , e mantendo a constância da velocidade da luz temos

²Transformações de Galilei: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ e $t' = t$, onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ e $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x', y', z')$ são vetores-posição relativos aos referenciais inerciais S e S' , caracterizados por uma velocidade relativa $\mathbf{V}$.

³Transformações de Lorentz: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\gamma - 1)\frac{(\mathbf{V}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{V^2} - \gamma\mathbf{V}t$ e $t' = \gamma(t + \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2})$ onde c é a velocidade da luz

$$u^\mu u_\mu \frac{dm_i}{d\tau} + m_i u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = m_g u^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

$$\frac{dm_i}{d\tau} = m_g \frac{d\phi}{d\tau} \quad (1.7)$$

onde usamos que $u^\mu u_\mu = 1 \implies u^\mu \dot{u}_\mu = 0$. Observemos que se $m_i = cte$, então (1.5) implica que $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ao longo da trajetória da partícula, e a lei (1.4) só seria válida no caso restrito em que o potencial é constante. A hipótese de Nordström é de que a massa inercial da partícula está sujeita às tensões na presença do campo gravitacional e portanto deve depender deste. Impondo a condição de igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, integrando (1.7) temos

$$m = m_0 \exp \phi \quad (1.8)$$

onde $m = m_0$ na ausência do campo. Tal expressão para a massa não causou estranheza na época e foi interpretado como um efeito relativístico da gravitação [8].

Agora, substituindo (1.7) em (1.6) temos

$$\dot{u}_\mu + u_\mu \dot{\phi} = \partial_\mu \phi \quad (1.9)$$

onde o ponto simboliza derivada com respeito ao tempo próprio. Esta é a *equação do movimento* de uma partícula, independente de sua massa m , e obtemos essa expressão somente mediante a condição de igualdade entre as massas *inercial e gravitacional*, conhecido também por *princípio de equivalência fraco*.

Um resultado controverso dessa teoria é o seguinte [14]: Considere um corpo caindo livremente num campo gravitacional estático, $\partial_t \phi = 0$. Vamos escrever a equação (1.9) em função de suas componentes espaciais. Sabemos que a quadri-velocidade pode ser expressa em função de suas componentes $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, -\vec{v})$, onde $\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ é o vetor velocidade de componentes espaciais v^i . Usando $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{v}$, onde $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ é o vetor aceleração espacial. Para a quadriaceleração temos

$$\dot{u}^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} \right)$$

$$\dot{u}^\mu = \gamma^4 (\vec{a} \cdot \vec{v}, -\vec{a}_\parallel - \gamma^{-2} \vec{a}), \quad (1.10)$$

onde $\vec{a}_\parallel = \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a})$ é a componente da aceleração paralela à velocidade. Para o segundo termo temos

$$u^\mu u^\nu \partial_\nu \phi = \gamma^2 (1, -\vec{v}) \vec{v} \cdot \nabla \phi, \quad (1.11)$$

onde $\nabla \phi$ é o gradiente em três dimensões. Para o termo do lado direito em (1.9) temos

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = (0, -\nabla \phi.) \quad (1.12)$$

Substituindo as equações (1.10), (1.11) e (1.12) em (1.9) temos as igualdades:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = -\gamma^{-2} \vec{v} \cdot \nabla \phi \quad (1.13)$$

$$\vec{a} = -\gamma^{-2} \nabla \phi. \quad (1.14)$$

Como (1.13) é implicada por (1.14), (1.14) é equivalente á (1.9) no limite de campo estático. Escrevendo (1.14) na forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -(1 - v^2) \nabla \phi \quad (1.15)$$

podemos observar que quanto maior for a velocidade horizontal do corpo, menor é a aceleração vertical. Por exemplo, um corpo rígido girante [11], cujo eixo de rotação esteja alinhado verticalmente com o campo estático. Se associarmos á cada elemento de volume do corpo uma velocidade horizontal, de acordo com (1.15) cada elemento cairá mais lentamente do que se não tivesse essa velocidade. Sendo isso verdade para todos os elementos, o corpo girante cai mais lentamente que o mesmo corpo sem rotação. Sobre esse ultimo resultado Einstein comenta no seu review de 1907 [9]:

"These investigations, however, led to a result which raised my strong suspicions. According to classical mechanics, the vertical acceleration of a body in the vertical gravitational field is independent of the horizontal component of its velocity. Hence in such a gravitational field the vertical acceleration of a mechanical system or of its center of gravity works out independently of its internal kinetic energy. But in the theory I advanced, the acceleration of a falling body was not independent of its horizontal velocity or the internal energy of the system."

Em resumo, apesar de verificar uma igualdade entre massa inercial e gravitacional e manter a constância da velocidade da luz⁴, Nordstrom ainda não tinha encontrado uma teoria gravitacional covariante sob transformação de Lorentz e apresentava os seguintes problemas:

- A teoria era imperfeita na sua definição de fonte gravitacional na equação (1.3), uma vez que a massa de repouso é invariante, mas sua densidade não o é.
- pela equação (1.15) a aceleração adquirida por um corpo num campo gravitacional vertical depende de seu movimento horizontal;
- É possível mostrar que não há conservação de energia na medida em que não é considerada a inércia da energia do campo gravitacional.

Veremos, na próxima seção, que Nordström tratou de entender qual era a densidade que deveria entrar na equação (1.3) de modo a satisfazer o princípio de covariância de Lorentz. Tratou ainda de descobrir a dependência das várias grandezas físicas, (p.e., massa inercial, comprimentos, tempos, etc.) com o campo gravitacional imposta pela conservação de energia, e como essa dependência revelaria uma estrutura dinâmica no próprio espaço-tempo [12].

1.2 A segunda teoria de Nordström

Na segunda versão de sua teoria gravitacional, Nordström se baseia nos comentários de Einstein sobre o fato do "único escalar possível para representar a densidade de fonte gravitacional ser o traço do tensor momento energia" [13], como haviam demonstrado os trabalhos de Max von Laue [8] sobre o movimento de corpos sob ação de tensões. Isso permite que a teoria seja covariante sob transformação de Lorentz.

⁴Einstein havia investigado teorias em que a velocidade da luz era *dependente* do potencial gravitacional, isso para contornar a condição de ortogonalidade, $u^\mu \dot{u}_\mu = 0$, derivada da velocidade da luz constante na teoria da relatividade especial (TRE); Nordström contornou esse problema transferindo para a massa de repouso essa dependência e obteve uma teoria que concordava com os postulados da TRE

A equação do campo escalar gravitacional proposta por Nordström é

$$\square\phi = -4\pi g(\phi)\nu \quad (1.16)$$

onde ν é a densidade da fonte gravitacional à ser identificada e $g(\phi)$ é uma função do campo que acomoda o fato da energia gravitacional do campo ϕ ter que ser contabilizada como sua própria fonte.

Como bem sabemos, o tensor que descreve a densidade de energia e as forças de tensão ao qual o corpo está submetido é o *tensor momento-energia* $T_{\mu\nu}$, cujo traço T é um invariante sob transformações de Lorentz. Nordström, diante desse fato tratou de substituir a densidade ν , que não é invariante, pelo traço, isto é,

$$\nu \rightarrow T = \eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Sendo $g(\phi)\nu$ a massa gravitacional do sistema, impondo a condição de igualdade entre massa inercial e gravitacional é possível encontrar uma expressão para $g(\phi)$. De fato tal exigência requer que a energia *total* deva incluir a energia do campo gravitacional como sua própria fonte, o que conduz à não-linearidade das equações de campo, introduzida via $g(\phi)$.

Nordström mostrou em seu trabalho [6] que para que haja da igualdade entre massa inercial e gravitacional é necessário que

$$g(\phi) = \frac{4\pi G}{\phi}. \quad (1.18)$$

Assim, a equação do campo gravitacional fica

$$\phi\square\phi = -4\pi GT. \quad (1.19)$$

Esta é a equação não-linear do campo gravitacional relativístico, covariante sob transformações de Lorentz e que satisfaz a igualdade entre massa inercial e gravitacional.

Pela equação (1.19), visto que o traço do tensor momento-energia eletromagnético é nulo, e sabendo que nessa teoria gravitacional a matéria se acopla à gravitação através do traço do tensor momento-energia, concluímos que campos eletromagnéticos livres não interagem gravitacionalmente nessa teoria escalar, pois eles não sentem nem contribuem com o campo, assim não há deflexão da luz [14].

Nordström agora está apto à derivar a equação de movimento a partir de um princípio variacional. A ação de uma partícula de massa m na presença do campo gravitacional é dada por [15]

$$S = m \int \phi ds \quad (1.20)$$

onde ds^2 é o elemento de linha de Minkowski, parametrizado por um parâmetro λ

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (1.21)$$

e $x^\nu(\lambda)$ é a equação paramétrica da linha-de-mundo da partícula teste. Variando essa linha-de-mundo com respeito à coordenada obtemos as equações que governam o movimento da partícula. Escrevemos tais equações usando o tempo próprio τ da partícula como parâmetro de sua trajetória de modo que $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ satisfaz $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$. A equação do movimento fica

$$\dot{\phi}u_\alpha + \phi\dot{u}_\alpha = \partial_\alpha\phi \quad (1.22)$$

que é independente da massa da partícula e consistente com o princípio de equivalência. No contexto dos próximos capítulos, a equação (2.25) será interpretada como o resultado da extremização de um elemento de linha $d\bar{s} = \phi ds$, ou seja, de uma métrica que é conformalmente plana. Nesse sentido interpretaremos (2.25) como uma *geodésica métrica*, pois partimos da extremização do elemento de linha $d\bar{s}$, que é definido em termos da métrica do espaço-tempo. Um outro tipo de geodésica é definido a partir da conexão e dita *geodésica afim*, construída a partir do transporte paralelo do vetor tangente à essa curva. O conceito de conexão, transporte paralelo e geodésica afim serão muito importantes para os próximos capítulos e trataremos de defini-los detalhadamente no momento oportuno.

1.2.1 Conservação de Momento-Energia

A conservação de energia é expressa pela divergência nula do tensor momento-energia total

$$\partial_\nu \bar{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.23)$$

onde $\bar{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$, com $T^{\mu\nu}$ sendo a contribuição da matéria e $t^{\mu\nu}$ a contribuição do campo gravitacional.

O tensor momento-energia da matéria tipo-poeira, (pressão nula) $p = 0$, é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho\phi u^\mu u^\nu \quad (1.24)$$

com traço

$$T = \rho\phi, \quad (1.25)$$

pois $u^\mu u_\mu = 1$.

A divergência desse tensor é

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \phi u^\mu \partial_\nu(\rho u^\nu) + \rho u^\nu \partial_\nu(\phi u^\mu) = \rho \frac{d}{d\tau}(\phi u^\mu) \quad (1.26)$$

onde usamos a equação de continuidade $\partial_\nu(\rho u^\nu) = 0$. Substituindo (1.25) e a equação do movimento (2.25) em (1.26) temos a expressão útil

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{T}{\phi} \partial^\mu \phi. \quad (1.27)$$

que assegura que a não-conservação isolada da matéria é devido ao traço do tensor momento-energia, que aparece como fonte em (1.19), indicando que é através do traço do tensor momento-energia que a matéria se acopla ao campo gravitacional.

Para que haja conservação de momento-energia, é necessário acrescentarmos a energia do campo gravitacional

O tensor momento-energia do campo é definido

$$t^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.28)$$

com $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ sendo a lagrangiana do campo livre e temos sua expressão

$$t^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \quad (1.29)$$

com divergência

$$\partial_\nu t^{\mu\nu} = \square \phi \partial^\mu \phi \quad (1.30)$$

Verificamos a validade de (1.23) somando (1.27) e (1.30) e relembrando da equação de campo (1.19) obtemos

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -\partial_\nu t^{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

a conservação de energia-momento total, explicitando a relação não-linear entre o campo gravitacional e a fonte de energia que gera o campo, com a inclusão da energia gravitacional entre sua própria fonte como requer o princípio de equivalência [12].

1.2.2 Aplicação para uma distribuição com simetria esférica de matéria

Aqui faremos uma breve aplicação da teoria de Nordström ao caso de uma partícula na presença de um campo gravitacional devido à uma fonte esfericamente simétrica na origem do sistema de coordenadas.

O tensor momento energy pode ser escrito na forma

$$T^{\mu\nu} = \phi \sum_i m_i \gamma_i v_i^\mu v_i^\nu \delta^{(3)}(x - z_i(t)) \quad (1.32)$$

e seu traço

$$T = -\phi \sum_i \frac{m_i}{\gamma_i} \delta^{(3)}(x - z_i(t)) \quad (1.33)$$

onde $v_i^\mu \equiv \frac{dz_i^\mu}{dt} = (1, \vec{v})$ é a velocidade da i -ésima partícula e $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$ então a equação (1.19) fica

$$\square \phi = -4\pi G \sum_i \frac{m_i}{\gamma_i} \delta^{(3)}(x - z_i(t)) \quad (1.34)$$

se parametrizamos as trajetórias das partículas com seus tempo-próprio $z_i^\nu = z_i^\nu(\tau_i)$ a equação acima fica

$$\square \phi = -4\pi G \sum_i m_i \int \delta^{(4)}(x - z_i(t)) ds \quad (1.35)$$

que é resolvida utilizando a função de Green retardada do operador d'alembretiano plano [6]. Como a equação acima é semelhante à do potencial retardado do eletromagnetismo temos uma solução análoga aos potenciais de Lienardt-Wiechert. A solução é

$$\phi = \phi_{hom} + \sum_i \frac{Gm_i}{\rho_{ret}^i(x)} \quad (1.36)$$

com

$$\rho_{ret}^i(x) = u_\nu^i(\tau_i)(x^\nu - z_i^\nu(\tau_i)) \quad (1.37)$$

sendo a distância escalar(retardada) entre x e $z_i(\tau_i)$ onde τ_i é o tempo próprio retardado dada pela intersecção da linha de mundo da i -ésima partícula e o passado do cone-de-luz

do ponto x . Longe da fonte a solução da equação homogênea se aproxima de um valor constante temos o espaço de minkowski no infinito. Após uma redefinição do campo tal constante pode ser escolhida como sendo 1 de modo que

$$\phi = 1 + \sum_i \frac{Gm_i}{\rho_{ret}^i(x)} \quad (1.38)$$

tendo a solução explicita podemos resolver o problema de uma distribuição contínua de matéria passando da soma para integral

$$\phi = 1 + G \int \frac{\rho(x, \tau)}{\rho_{ret}^i(x)} d^3x \quad (1.39)$$

No caso de uma distribuição com simetria esférica teremos

$$\phi = 1 + G \int \frac{\rho(x, \tau)}{\rho_{ret}^i(x)} d^3x \quad (1.40)$$

e a parte inhomogênea se escreve

$$\phi = G \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho(x, \tau)}{\rho_{ret}^i(x)} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi \quad (1.41)$$

a distância retardada é explicitamente dada por

$$\begin{aligned} \rho_{ret}(x) &= u_\nu(\tau)(x^\nu - z^\nu(\tau)) \\ &= u_0(\tau)(x^0 - z^0(\tau)) + u_i(\tau)(x^i - z^i(\tau)) \\ &= \gamma(t - (t - r) + v^i(r - r')) \\ &= \gamma(r + v^i(r - r')) \end{aligned} \quad (1.42)$$

e a expressão do potencial acima fica

$$\phi = G \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho(x, \tau)}{\gamma(r + v^i(r - r'))} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi \quad (1.43)$$

para o caso estático, em que a velocidade da fonte é nula temos

$$\phi = G \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho(x, \tau)}{r} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi \quad (1.44)$$

Podemos resolver o potencial para esse caso: dado uma distribuição de massa esférica homogênea, qual a expressão do potencial gravitacional devido à uma casca esférica de raio r' num ponto P que se encontra à uma distância R do centro da esfera, a distância entre o elemento infinitesimal na casca e o ponto P é $r = |\vec{R} - \vec{r}'|$, sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{R}$ e $\vec{r}'$, temos a relação

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2Rr' \cos \theta \quad (1.45)$$

para um dado r' , escolhendo a casca, fixamos com isso a distância R , daí derivando a expressão acima obtemos

$$r dr = r' R \sin \theta d\theta \quad (1.46)$$

substituindo no potencial estático temos

$$\phi = 2\pi G \frac{\rho}{R} \int_0^a r' dr' \int_{min}^{max} dr \quad (1.47)$$

os limites de integração em dr depende do ponto P está fora ou dentro da esfera. Para um ponto fora temos

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi G \frac{\rho}{R} \int_0^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr \\ &= \frac{4\pi \rho G a^3}{3R} \end{aligned} \quad (1.48)$$

que concorda com a teoria newtoniana. No caso de velocidade constante e não nula $v^i = \text{cte}$ temos um caso mais interessante e faremos em breve.

1.2.3 Dependência das grandezas físicas com o potencial gravitacional

Albert Einstein, conhecido por seus *gedankenexperiments*, imaginou uma situação em que a gravitação escalar relativística de Nordström parecia violar a conservação de energia. Suponha uma barra rígida de seção reta A e comprimento l tensionada entre dois trilhos, de modo que a barra possa se mover entre eles. Em cada extremo da barra há uma tensão F devido ao vínculo com os trilhos. Pela lei da inércia da energia, a presença dessa tensão no interior da barra gera um fluxo de momento nessa mesma direção. Considere que o sistema *barra-trilhos* está na presença de um campo gravitacional. A massa gravitacional na teoria de Nordström é definida na equação (1.19), ou seja,

$$M_g = \int_V \frac{T}{\phi} dV. \quad (1.49)$$

Se o sistema estiver em repouso, a única componente diferente de zero do traço T será a densidade de energia de repouso $T = T^{00}$. Quando a barra é tensionada, digamos na direção x , há a adição de fluxo de momento nessa direção, e teremos $T = T^{00} + T^{xx}$, portanto um acréscimo na massa gravitacional dado por

$$\Delta M_g = \int_V \frac{T^{xx}}{\phi} dV = \frac{Fl}{\phi}. \quad (1.50)$$

Abaixando a barra por uma distância infinitesimal em que o potencial tenha uma variação de $d\phi$, a massa gravitacional dispõe de uma quantidade de trabalho extra dada por

$$W = -\Delta M_g d\phi = -\frac{Fl}{\phi} d\phi. \quad (1.51)$$

Se a barra é parada e retirado o vínculo com os trilhos, tirando assim a tensão, e em seguida elevarmos a barra, então será necessário um trabalho menor do que se ela estivesse tensionada, com isso poderíamos extrair energia do campo gravitacional apenas abaixando e levantando uma simples barra, o que violaria a conservação de energia. A saída de Nordström foi supor que os trilhos, à medida que a barra é abaixada, divirjam, ou seja, a barra varia de tamanho. E o trabalho necessário para que seu comprimento varie por dl deve ser

$$W = Fdl, \quad (1.52)$$

onde F é o valor da tensão nas extremidades da barra. Igualar as equações (1.52) e (1.51) significa que a energia extra acrescida na barra é utilizada para variar seu tamanho, e resgatamos a conservação de energia no campo gravitacional; como consequência disso temos

$$\frac{1}{\phi}d\phi = -\frac{1}{l}dl \quad (1.53)$$

depois de integração direta temos

$$l\phi = Cte. \quad (1.54)$$

Assim, requerendo que o comprimento de um corpo varie com o potencial gravitacional é suficiente para preservar a conservação de energia, principal crítica de Einstein contra a teoria de Nordström. Pode-se mostrar [8] que várias outras grandezas dependem do potencial, como massa inercial, tempo, força,

$$\begin{aligned} \frac{m}{\phi} &= Cte \\ t\phi &= Cte \\ \frac{F}{\phi^3} &= Cte. \end{aligned}$$

Com a inclusão desses efeitos cinemáticos a teoria de Nordström passou a ser [Einstein, 1913] (i) conservativa, (ii) covariante sob transformações de Lorentz, (iii) satisfazia a igualdade entre massa inercial e gravitacional.

No entanto o que fica evidente é que réguas e relógios são alterados pelo potencial gravitacional e não servem mais para medir tempo e espaço no *espaço-tempo de Minkowski*. Gravitação e espaço-tempo estavam intimamente relacionados e revelavam um espaço-tempo não-Minkowskiano pois os tempo e comprimentos são alterados por um mesmo fator $(l\phi, t\phi)$, alterando assim o elemento de linha da métrica de fundo para

$$d\bar{s}^2 = \phi^2(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.55)$$

e ϕ^2 aparece como um fator conforme, e a teoria da gravitação escalar tem como plano de fundo não mais uma métrica plana, mas uma métrica *conformalmente* plana e dinâmica.

Com essa propriedade do espaço-tempo a teoria de Nordström se torna muito semelhante à teoria que Einstein estava desenvolvendo nessa época, na tentativa de encontrar as equações com covariância geral sob transformações de coordenadas [8]. Nesse contexto a teoria de Nordström pode ser reformulada como uma teoria em que a gravidade é incorporada na estrutura do espaço-tempo. E fica evidente [12] que a teoria de Nordström é covariante sob um grupo de transformações mais amplo que a classe de transformações de Lorentz. No próximo capítulo trataremos de descrever a formulação geométrica da teoria de Nordström, o que reforça o conceito de Einstein de estrita relação entre gravitação e espaço-tempo.

Capítulo 2

Formulação Geométrica da Teoria de Nordström

A teoria que tratamos no capítulo anterior descreve o fenômeno da gravitação através de um campo escalar físico, que representa o potencial gravitacional, responsável pela interação entre partículas. Desenvolvida com o intuito de satisfazer os postulados da teoria da relatividade restrita (TRE), temos uma teoria construída no espaço-tempo de Minkowski com efeitos que parecem distorcer essa estrutura plana devido à presença do campo gravitacional. Como vimos, esse campo altera grandezas físicas, tais como tempos e comprimentos, de tal modo que gera problemas para a definição de medida de espaço e tempo no espaço-tempo de Minkowski, que é o ambiente, *à priori*, desse campo.

Neste capítulo veremos que uma peculiaridade que aparece na teoria de Nordström é o caráter conforme dessa teoria. A noção de transformações geométricas conformes foi introduzida por Hermann Weyl em 1918. Tal transformação leva uma métrica $g_{\mu\nu}$ numa outra $g'_{\mu\nu}$ de acordo com a regra

$$g'_{\mu\nu} = e^{-\psi} g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

onde $\psi(x)$ é uma função das coordenadas. Isso é equivalente a uma transformação no elemento de linha

$$ds'^2 = e^{-\psi} ds^2. \quad (2.2)$$

Lembramos que uma transformação conforme é diferente de uma transformação de coordenadas no sentido de que a primeira altera o elemento de linha, enquanto a segunda, não. Como o elemento de linha define distância num sentido intrínseco, ou seja, independente de coordenadas, a relação (2.2) implica que há mudança no padrão de comprimento numa taxa que varia de ponto a ponto no espaço-tempo, razão pela qual também é conhecida por *transformação de calibre* [19].

Em 1914, Albert Einstein e Adrian Fokker [7] mostraram que a teoria de Nordström poderia ser obtida num contexto inteiramente geométrico, onde a geometria é caracterizada por uma métrica do tipo

$$g_{\mu\nu} = e^{-\psi} \eta_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

ou seja, conforme ao espaço-tempo de Minkowski. E que (2.3) era solução de uma equação de campo dada em termos de quantidades geométricas:

$$R = \kappa T \quad (2.4)$$

onde R é o escalar de curvatura, e T , o traço do tensor momento-energia. Uma consequência disso é que a teoria da gravidade escalar é covariante sob uma classe de transformações mais amplas que as transformações de Lorentz, a saber, as transformações gerais de coordenadas. Neste capítulo vamos mostrar que com uma métrica desse tipo obtemos a teoria de Nordstrom evidenciando assim seu caráter geométrico.

2.1 A teoria de Nordström como uma teoria métrica

Num trabalho em conjunto com Marcel Grossman¹, Albert Einstein, que buscava na gravitação um meio de estender o princípio da relatividade para todos os referenciais, encontrou uma equação que era covariante sob transformações gerais de coordenadas:

$$R = \kappa T \quad (2.5)$$

construída através dos invariantes R e T . É importante salientar que é a primeira vez [20] que Einstein percebe o papel central que o tensor de Riemann tem na descrição do campo gravitacional. Segundo Abraham Pais [20], nesta época Einstein conhecia os efeitos de deslocamento para o vermelho gravitacional e a deflexão da luz, sabia da necessidade de um grupo de covariância mais geral que o de Lorentz e entendia que a fonte do campo gravitacional não era apenas matéria, mas também a energia do campo; portanto essa energia deveria ser incluída como fonte e as equações de campo deveriam ser não-lineares. Dois anos depois, em 1915, Einstein encontrou as equações de campo corretas.

A métrica (2.3) descreve o potencial gravitacional contendo uma única componente, ou seja, possui um grau de liberdade apenas. Notemos que na equação (2.5) a fonte do potencial gravitacional é um escalar, a saber, o traço do tensor momento-energia.

Como foi demonstrado por Einstein e Fokker [7], para obtermos a equação de Nordström a partir de (2.5) postulamos que

$$g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Vamos mostrar que a métrica (2.6) substituída em (2.5) gera a equação de campo da teoria de Nordström. Para isso calcularemos o tensor de Riemann e, depois, o escalar R .

O tensor de curvatura de Riemann, $R^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon}$, é definido por

$$(\nabla_\gamma \nabla_\epsilon - \nabla_\epsilon \nabla_\gamma) A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} A^\beta \quad (2.7)$$

onde $\nabla_\gamma A^\alpha$ é a derivada covariante de um vetor contravariante A^α arbitrário. Calculando os coeficientes da conexão $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ com a métrica (2.6) encontramos

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{\phi} (\delta^\alpha_\gamma \partial_\beta \phi + \delta^\alpha_\beta \partial_\gamma \phi - \eta_{\gamma\beta} \partial^\alpha \phi), \quad (2.8)$$

onde usaremos a notação $W_\gamma = \partial_\gamma \phi$ para simplificar a manipulação dos termos, e, quando necessário, usaremos $W_{\gamma\epsilon} = \partial_\gamma \partial_\epsilon \phi$ para indicar segunda derivada. O tensor de Riemann, que é dado explicitamente por

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\epsilon} - \partial_\epsilon \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\kappa_{\beta\epsilon} \Gamma^\alpha_{\kappa\gamma} - \Gamma^\kappa_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\kappa\epsilon}, \quad (2.9)$$

tem a seguinte expressão para a conexão dada por (2.8)

¹De acordo com A.Pais [20], foi Grossmann quem apresentou a geometria riemanianna a Einstein

$$\begin{aligned}
R_{\beta\gamma\epsilon}^{\alpha} &= \frac{1}{\phi}(W_{\gamma\beta}\delta_{\epsilon}^{\alpha} - W_{\epsilon\beta}\delta_{\gamma}^{\alpha} + W_{\epsilon}^{\alpha}\eta_{\beta\gamma} - W_{\gamma}^{\alpha}\eta_{\beta\epsilon}) \\
&+ \frac{1}{\phi^2}(\eta_{\beta\gamma}\delta_{\epsilon}^{\alpha} - \eta_{\beta\epsilon}\delta_{\gamma}^{\alpha})W_{\kappa}W^{\kappa} \\
&+ \frac{2}{\phi^2}(W_{\gamma}W^{\alpha}\eta_{\beta\epsilon} + W_{\epsilon}W_{\beta}\delta_{\gamma}^{\alpha} - W_{\epsilon}W^{\alpha}\eta_{\beta\gamma} - W_{\gamma}W_{\beta}\delta_{\epsilon}^{\alpha}). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Contraindo o primeiro e o terceiro índice do tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{\beta\alpha\epsilon}^{\alpha} = R_{\beta\epsilon} &= -\frac{1}{\phi}[(n-2)W_{\beta\epsilon} + \eta_{\beta\epsilon}W_{\alpha}^{\alpha}] - \\
&\frac{1}{\phi^2}[(n-3)\eta_{\beta\epsilon}W_{\alpha}W^{\alpha} - 2(n-2)W_{\beta}W_{\epsilon}], \tag{2.11}
\end{aligned}$$

onde n é o número de dimensões do espaço-tempo. Contraindo os índices β e ϵ na equação acima, obtemos o escalar de Ricci

$$R = g^{\beta\epsilon}R_{\beta\epsilon} = -\frac{2}{\phi^3}(n-1)W_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{\phi^4}(n-1)(n-4)W_{\alpha}W^{\alpha}. \tag{2.12}$$

Em termos das derivadas do campo ϕ , temos

$$R = -\frac{2}{\phi^3}(n-1)\square\phi - \frac{1}{\phi^4}(n-1)(n-4)\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi. \tag{2.13}$$

Para $n = 4$, temos

$$R = -\frac{6}{\phi^3}\square\phi, \tag{2.14}$$

isto é, obtemos o escalar R expresso em termos do d'Alembertiano em quatro dimensões. Aqui chamamos a atenção para o fato que o segundo termo em (2.13) só se anula, coincidentemente, para o caso $n = 4$.

Substituindo o resultado (2.14) em (2.5) ficamos com

$$-\frac{6}{\phi^3}\square\phi = \kappa T. \tag{2.15}$$

Lembrando que no espaço curvo o traço T é dado por $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \phi^{-2}\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \phi^{-2}T_{plano}$, a equação (2.15) fica

$$\frac{\square\phi}{\phi} = -\frac{\kappa}{6}T_{plano}. \tag{2.16}$$

onde T_{plano} é o traço de $T_{\mu\nu}$ na métrica de Minkowski. Aqui devemos chamar a atenção para o fato de que para chegar à equação de Nordström devemos ter a condição adicional de que o tensor momento-energia, quando passamos da métrica $g_{\mu\nu}$ para $\eta_{\mu\nu}$, deve se

transformar além da transformação que foi feita no seu traço. Com isso introduzimos a condição de que a ação da matéria

$$S'_m = \int d^4x \sqrt{-g'} L'_m = S_m \quad (2.17)$$

deva ser invariante sob transformações conformes. Sabendo que o determinante se transforma com

$$\sqrt{-g'} = \phi^4 \sqrt{-g} \quad (2.18)$$

devemos ter

$$L'_m = \phi^{-4} L_m. \quad (2.19)$$

Portanto, o tensor momento energia se transforma como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-g'}} \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\delta \sqrt{-g'} L'_m}{\delta g'^{\mu\nu}} = \frac{1}{\phi^2} T'_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Finalmente, usamos a métrica de Minkowski para obter o traço da expressão acima e ficamos com

$$T = \frac{1}{\phi^2} T'. \quad (2.21)$$

Substituindo a expressão acima em (2.16) obtemos enfim

$$\phi \square \phi = -4\pi G T_{plano} \quad (2.22)$$

e obtemos um valor para a constante $\kappa = 24\pi G$, imposta pela equação de Nordström.

A equação do movimento, ou geodésica métrica, pode ser obtida extremizando o elemento de linha associado à métrica $g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu}$,

$$S = \int d\bar{s} = \int \phi ds, \quad (2.23)$$

onde ds^2 é o elemento de linha de Minkowski. O problema é idêntico ao que tínhamos no capítulo 1, seção 1.2, em que extremizamos $S = m_o \int (1 + \phi) ds$ e mostramos que a equação do movimento era independente da massa da partícula. Aqui chamamos a atenção para o fato que quando parametrizamos a equação com o tempo próprio $d\bar{\tau} = d\bar{s}$ estamos no dito tempo conforme, e a equação de geodésica tem a forma

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\bar{\tau}} + \frac{2}{\phi} \frac{d\phi}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\alpha}{d\bar{\tau}} = \frac{1}{\phi^3} \partial^\alpha \phi. \quad (2.24)$$

Passando então para o tempo próprio de Minkowski $d\tau$ temos enfim a equação de movimento obtida no capítulo anterior

$$\dot{\phi} u_\alpha + \phi \dot{u}_\alpha = \partial_\alpha \phi, \quad (2.25)$$

como deveria ser, onde o ponto denota diferenciação com respeito ao tempo próprio $d\tau$ e $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$.

Agora estamos na posição de investigarmos uma outra classe de geodésicas, as *geodésicas afins* associadas à *conexão afim* (2.8). Para isso considere uma curva $\gamma(\lambda) : I \rightarrow M$ cujos vetores tangentes são dados por $V = \frac{d}{d\lambda}$, tendo sua expressão numa base coordenada $V = V^a \partial_a$, com componentes $V^a = \frac{dx^a(\lambda)}{d\lambda}$. Uma geodésica afim é definida como sendo

a curva privilegiada ao longo da qual o vetor tangente, $\frac{d}{d\lambda}$ é transportado paralelo à si mesmo, ou seja

$$\nabla_V V = 0. \quad (2.26)$$

Em termos das componentes da conexão temos

$$\begin{aligned} V^a \nabla_a V^b \partial_b &= 0 \\ V^a (\partial_a V^b + \Gamma_{ca}^b V^c) \partial_b &= 0 \end{aligned}$$

desde que a base escolhida ∂_β , é arbitrária temos

$$\frac{d^2 x^b}{d\lambda^2} + \Gamma_{ca}^b \frac{dx^c}{d\lambda} \frac{dx^a}{d\lambda} = 0, \quad (2.27)$$

esta é a equação de geodésica afim. A expressão para a equação de geodésica afim é dada utilizando explicitamente a conexão afim

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{\phi} (\delta_\gamma^\alpha \partial_\beta \phi + \delta_\beta^\alpha \partial_\gamma \phi - \eta_{\gamma\beta} \partial^\alpha \phi), \quad (2.28)$$

e tendo como parâmetro o tempo próprio temos

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\bar{\tau}^2} + \frac{2}{\phi} \frac{d\phi}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\alpha}{d\bar{\tau}} = \frac{\partial^\alpha \phi}{\phi^3}, \quad (2.29)$$

onde usamos $\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{\tau}} \frac{dx^\nu}{d\bar{\tau}} = \frac{1}{\phi^2}$. E como era de se esperar, as geodésicas métricas (2.24) e afins (2.30) são iguais, pois estamos usando a geometria riemanniana onde a conexão é compatível com a métrica, no próximo capítulo discutiremos esse ponto em detalhes. fazendo agora a substituição no tempo próprio $d\tau' = \phi d\tau$, temos (2.30) escrita na forma

$$\phi \dot{u}_\alpha + \dot{\phi} u_\alpha = \partial_\alpha \phi. \quad (2.30)$$

Assim temos a teoria de Nordström facilmente reformulada na geometria riemanniana, como uma teoria em que a gravidade é incorporada na estrutura do espaço-tempo e a métrica passa a desempenhar o papel de potencial gravitacional e determina a geometria do espaço-tempo. Enquanto que na sua formulação original tínhamos uma geometria dada *à priori*, Minkowski, e um campo físico, ϕ , responsável pela interação gravitacional. Na formulação riemanniana de Einstein-Fokker ϕ é interpretado simplesmente como um fator conforme.

Como vimos, a teoria de Nordstrom, quando vista como uma *teoria métrica* é formulada numa classe de geometrias riemannianas com métricas conformalmente planas. A presença dessa estrutura conforme, quando analisada em seu aspecto geométrico, se conecta à trabalhos mais recentes ligados a Teoria de Gravitação Escalar-Tensorial [19], onde as transformações conformes têm um papel central. Assim como designamos uma transformação de coordenadas por uma *mudança de referencial*, também sob transformações conforme usamos os termos *referencial original* e *referencial conforme*. De uma forma geral, transformações conformes numa métrica de determinado espaço-tempo levam à descrições muito diferentes dos fenômenos físicos (eventos) entre as variedades conformalmente relacionadas; mais que isso, há o surgimento de fenômenos novos, por exemplo, a introdução da gravitação no espaço-tempo de Minkowski via transformação conforme (2.6), ou ainda a criação de matéria [21].

No próximo capítulo veremos que é possível entender esse campo ϕ na geometria de Weyl com uma terceira interpretação. No contexto da Geometria Riemanniana, que tem como caracterização a propriedade de metricidade:

$$\nabla_a g_{bc} = 0; \quad (2.31)$$

condição que implica na invariância do produto interno e leva às equações de compatibilidade da conexão com a métrica, e tem conexão afim dada pelos símbolos de Christoffel, $\{\begin{smallmatrix} d \\ bc \end{smallmatrix}\}$.

Por outro lado temos a geometria de Weyl, devido à Herman Weyl [27], que introduz em toda a variedade, além da métrica riemanniana, um campo de 1-forma *sigma*, que altera os comprimentos transportados pela nova conexão $\Gamma^a_{bc}(g, A)$. Nessa geometria a conexão não depende apenas da métrica mas também do campo vetorial introduzido, portanto perdemos a metricidade riemanniana (2.31) e temos

$$\nabla_a g_{bc} = A_a g_{bc}. \quad (2.32)$$

Sempre que realizarmos uma transformação conforme(2.3)

$$g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

num referencial de Weyl (M, g, A) para outro (M, g', A') , impondo que a condição (2.32) seja sempre válida, induzimos uma transformação no campo vetorial, fácil de verificar, do tipo

$$A'_a = A_a - \partial_a \psi. \quad (2.34)$$

Temos então o par de transformações geométricas, a saber:

$$\begin{aligned} A'_a &= A_a - \partial_a \psi \\ g'_{\mu\nu} &= e^{-\psi} g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.35)$$

que quando tomadas simultaneamente não modificam as propriedades geométricas intrínseca dos campos vetoriais [22]. Ou seja, na nova métrica, vetores têm a mesma lei de transporte paralelo(2.32) e o ângulo entre vetores diferentes no mesmo ponto da variedade são preservados sob tal transporte, essas são as *transformações de gauge* [22]. No próximo capítulo faremos uma revisão mais detalhada da geometria de Weyl e estudaremos a Teoria de Nordström nesse formalismo.

Por ora, exploraremos o caráter geométrico da teoria até aqui desenvolvida para efeitos de comparação com as teorias da gravitação de Newton e de Einstein. Para isso usaremos como solução uma distribuição de matéria esfericamente simétrica. Usaremos tal solução para os testes clássicos de gravitação: Periélio de mercúrio, atraso temporal, desvio para o vermelho gravitacional e deflexão da luz.

2.2 Campo devido à fonte com simetria esférica

Vamos encontrar agora as equações de movimento de partículas massivas e não massivas na presença do potencial gravitacional ϕ . Como estamos interessados em extrair previsões da teoria sobre os testes padrões da gravitação, faremos a suposição que o movimento ocorre no espaço vazio e na presença de um campo gravitacional que é quase estático e esfericamente simétrico. Sendo assim, por conveniência faremos $\phi^2 = \varphi$ e escrevemos

$$g_{\mu\nu} = (1 + \varphi)\eta_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

e acrescentamos o fator 1 para que obtenhamos o espaço-tempo de Minkowski no limite assintótico $\varphi \rightarrow 0$. Aqui lembramos que usamos a mesma condição de contorno usamos no capítulo 1 quando encontramos uma expressão para o potencial ϕ . No presente caso consideramos φ como sendo a perturbação conforme do espaço-tempo plano,

$$ds^2 = (1 + \varphi)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.37)$$

No limite de campo fraco devemos identificar φ com o potencial Newtoniano $\varphi = -\frac{m}{\rho}$. Escrevemos então

$$ds^2 = (1 - \frac{m}{\rho})(-dt^2 + d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (2.38)$$

usando coordenadas de Schwarzschild

$$r = \rho(1 - \frac{m}{\rho}) \quad (2.39)$$

temos

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dr^2}{(1 + \frac{m}{r})^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.40)$$

Fixando uma órbita equatorial em $\theta = \pi/2$, e usando o tempo próprio τ como parâmetro no elemento de linha (2.40) ficamos com

$$\epsilon = \frac{-\dot{t}^2 + \dot{r}^2}{(1 + \frac{m}{r})^2} + r^2\dot{\phi}^2 \quad (2.41)$$

onde $\epsilon = -1, 0, 1$ corresponde respectivamente a geodésicas tipo tempo, luz e espaço.

Utilizando as Equações de Euler-Lagrange obtemos para a coordenada t

$$\frac{\dot{t}}{(1 + m/r)^2} = E(\text{constante}) \quad (2.42)$$

ou

$$\dot{t} = E(1 + \frac{m}{r})^2 \quad (2.43)$$

e para a coordenada ϕ

$$r^2\dot{\phi} = L(\text{constante}) \quad (2.44)$$

ou

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}. \quad (2.45)$$

Substituindo esses resultados em (2.41) temos

$$\epsilon = \frac{-E^2(1 + \frac{m}{r})^2 + \dot{r}^2}{(1 + \frac{m}{r})^2} + r^2\frac{L^2}{r^4} \quad (2.46)$$

que fica

$$\dot{r}^2 = (E^2 - V)(1 + \frac{m}{r})^4 \quad (2.47)$$

com $V = \frac{L^2/r^2 - \epsilon}{(1 + m/r)^2}$ que faz as vezes de um potencial efetivo. Impondo as condições de movimento estável circular ($\frac{dV}{dr} = 0|_{r=r_c}$) encontramos o raio $r_c = L^2/m$ como no caso Newtoniano, com energia $E_c = \frac{L^2 - \epsilon}{L^2 + m^2}$

2.3 Testes gravitacionais

2.3.1 Avanço do Periélio

Para calcular a rotação do periélio derivamos (2.47) com respeito ao tempo para obtermos a equação diferencial da órbita

$$2\dot{r}\ddot{r} = \dot{r} \frac{d}{dr}((E^2 - V)(1 + \frac{m}{r})^4) \quad (2.48)$$

e ficamos com

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr}((E^2 - V)(1 + \frac{m}{r})^4). \quad (2.49)$$

Considerando uma partícula em uma órbita circular estável de raio $r_c = L^2/m$, aplicamos uma perturbação do tipo $r = x + r_c$, onde $x \ll r_c$. Sendo $r_c = cte$ temos $\ddot{r} = \ddot{x}$, e avaliando a derivada do lado direito de (2.50), lembrando que a energia da órbita circular é $E_c = \frac{L^2 - \epsilon}{L^2 + m^2}$ e desprezando termos de ordem ≥ 2 , temos

$$\ddot{x} + \frac{m^4}{L^8}(m^2 + L^2)x = 0 \quad (2.50)$$

e a partícula executa um movimento harmônico simples radial, em torno de r_c , com frequência

$$\omega_{rad} = \frac{m^2}{L^4} \sqrt{m^2 + L^2} = \frac{1}{r^2} \sqrt{m^2 + mr}. \quad (2.51)$$

Por outro lado, a partícula também executa um movimento orbital periódico, com frequência dada por (2.45)

$$\omega_{orb} = \frac{L}{r^2} = \sqrt{\frac{m}{r^3}}. \quad (2.52)$$

A discrepância entre esses dois movimentos é

$$\Delta\omega = \omega_{orb} - \omega_{rad} = \sqrt{\frac{m}{r^3}} - \sqrt{\frac{m^2}{r^4} + \frac{m}{r^3}} \approx -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^3}{r^5}}. \quad (2.53)$$

O atraso por órbita é

$$\Delta\phi = 2\pi\Delta\omega \approx -\pi \sqrt{\frac{m^3}{r^5}} \quad (2.54)$$

e considerando tal órbita como aproximadamente elíptica o eixo maior rotaciona à uma taxa de

$$\frac{\Delta\phi}{\omega_{orb}} \approx -\frac{\pi m}{r}. \quad (2.55)$$

Comparado com a expressão correspondente à solução de schwarzschild da relatividade geral que é

$$\frac{\Delta\phi}{\omega_{orb}} \approx \frac{6\pi m}{r}. \quad (2.56)$$

a teoria de Nordsström prevê, para uma órbita aproximadamente elíptica que é percorrida no sentido anti-horário, que o eixo maior rotaciona no sentido horário, enquanto na relatividade geral o eixo maior rotaciona no mesmo sentido e seis vezes mais rápido. Na primeira há um atraso, enquanto na segunda há um avanço.

2.3.2 "Delay" Temporal

A equação (2.41) para partículas sem massa no plano equatorial se escreve

$$0 = \frac{-\dot{t}^2 + \dot{r}^2}{(1 + \frac{m}{r})^2} + r^2 \dot{\phi}^2. \quad (2.57)$$

Considere dois eventos nessa geodésica nula, antes e depois do ponto mais próximo à origem. Essas distâncias são R_1, R e R_2 com $R_1, R_2 \gg R$. Eliminamos ϕ escrevendo $R = r \cos \phi$ e diferenciando para obter

$$0 = -r \sin \phi d\phi + \cos \phi dr. \quad (2.58)$$

Temos

$$r^2 d\phi^2 = \cot^2 \phi dr^2 = \frac{R^2}{r^2 - R^2}. \quad (2.59)$$

substituindo em (2.57) obtemos

$$dt \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 - R^2}} \cot^2 \phi dr^2 = \frac{R^2}{r^2 - R^2}. \quad (2.60)$$

assim o tempo do primeiro evento até o ponto mais próximo da origem é

$$\Delta t_1 = \int_R^{R_1} dt \approx \frac{m + R_1}{R_1} \sqrt{R_1^2 - R^2} = \sqrt{R_1^2 - R^2} + m \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_1}\right)^2} \quad (2.61)$$

e do segundo evento até o mesmo ponto é

$$\Delta t_2 \approx \sqrt{R_2^2 - R^2} + m \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_2}\right)^2}. \quad (2.62)$$

Comparando com o lapso de tempo newtoniano

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \sqrt{R_1^2 - R^2} + \sqrt{R_2^2 - R^2} \quad (2.63)$$

o atraso temporal relativístico de acordo com a teoria de Nordström é

$$\Delta t = m \left(\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_1}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_2}\right)^2} \right), \quad (2.64)$$

o que em primeira ordem em $\frac{R}{R_i}$ dá $\Delta t = 2m$. Comparando com a relatividade geral

$$\Delta t = 2m + 2m \ln \left(\frac{4R_1 R_2}{R^2} \right) \quad (2.65)$$

temos a adição das razões logarítmicas de $\frac{R}{R_i}$.

Portanto quando confrontada com os testes do sistema solar a teoria de Nordström não faz as previsões corretas para nenhum deles, além da ausência, já conhecida, de deflexão da luz pelo campo gravitacional.

No próximo capítulo voltaremos nossa atenção para as transformações de gauge a partir da teoria de Nordström, fazendo a passagem da geometria riemanianna para a geometria de Weyl, faremos uma revisão desta última e estudaremos particularmente a classe de métricas conformalmente planas.

Capítulo 3

Geometria de Weyl

Nesse capítulo faremos uma breve revisão da generalização da geometria riemanniana devido à Herman Weyl(1918)

3.1 Geometria Diferencial

Antes de tratar especificamente da geometria de Weyl faremos uma breve revisão de conceitos importantes da geometria diferencial. Seja $T(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ de uma variedade diferenciável M . Definimos uma *conexão afim* ∇ como sendo a aplicação linear

$$\nabla : T(M) \times T(M) \longrightarrow T(M) \quad (3.1)$$

denotada por $\nabla : (V, U) \longrightarrow \nabla_V U$, com as seguintes propriedades [24]

$$\nabla_{(\alpha X + \beta Y)} Z = \alpha \nabla_X Z + \beta \nabla_Y Z$$

$$\nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y$$

$$\nabla_X (\alpha Y) = X(\alpha)Y + \alpha \nabla_X Y$$

onde α, β são funções de classe C^∞ definidas na variedade. É possível mostrar que existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial X ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DX}{dt}$, dito *derivada covariante* de X ao longo de γ , tal que:

$$(i) \frac{D(X + Y)}{dt} = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$$

$$(ii) \frac{D(\alpha Y)}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} Y + \alpha \frac{DY}{dt}$$

(iii) se X é induzido por um campo vetorial Y , ou seja, $X(t) = Y(\gamma(t))$, então $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d}{dt}} Y$, com $\frac{d}{dt}$ sendo o vetor tangente à $\gamma(t)$.

A prova deste resultado pode ser encontrada em [24]. Por outro lado, denominamos $\nabla_X Y$ de derivada covariante de Y na direção de X . Para obtermos a expressão da derivada covariante $\nabla_X Y$ em coordenadas locais, escolhamos um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ e escrevamos $X = X^a \partial_a, Y = Y^b \partial_b$, onde X^a denota as componentes de X no

sistema escolhido e $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$ a base desse sistema. A expressão de $\nabla_X Y$ nessas coordenadas fica dada por

$$\nabla_X Y = X^a \nabla_a (Y^b \partial_b), \quad (3.2)$$

onde estamos usando a notação $\nabla_{\partial_a} = \nabla_a$. Os coeficientes da conexão são definidos como as componentes da derivada direcional dos vetores da base

$$\nabla_a \partial_b = \Gamma_{ab}^c \partial_c. \quad (3.3)$$

Assim os coeficientes da conexão Γ_{ab}^c representam a componente c da taxa de variação do vetor ∂_b por um deslocamento na direção de ∂_a , razão pela qual (3.3) é conhecida por derivada direcional da base. Utilizando os dois campos vetoriais introduzidos acima temos

$$\nabla_X Y = X^a (\partial_a Y^c + \Gamma_{ab}^c Y^b) \partial_c. \quad (3.4)$$

Portanto, a escolha de uma conexão afim em M nos permite definir a derivada de campos vetoriais ao longo de curvas. Temos agora todos ingredientes para definir transporte paralelo ao longo de uma curva. Com efeito, um vetor V ao longo de uma curva $\gamma(t)$ é dito *paralelo* quando

$$\frac{DV}{dt} = 0, \quad (3.5)$$

para todo t . Seja V_0 o vetor tangente a M em $\gamma(t_0)$, $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}(M)$. Então, é possível mostrar que existe um único campo vetorial paralelo V ao longo $\gamma(t)$, tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é dito *transporte paralelo* de $V(t_0)$ ao longo de γ . Ou ainda, usando a derivada covariante, X é transportado paralelamente na direção V se

$$\nabla_V X = 0, \quad (3.6)$$

e a curva γ é uma geodésica se seu vetor tangente V satisfaz a equação

$$\frac{D}{dt} V = 0. \quad (3.7)$$

Procuramos escrever todas equações dessa seção de uma forma independente de coordenadas, para explicitar o fato que a conexão não depende da escolha de coordenadas. Por outro lado os seus coeficientes Γ_{ab}^c assumem valores dependentes do sistemas de coordenadas escolhido. Uma propriedade importante associada com o tipo de base escolhida é de *torção*. A torção T é definida como sendo a aplicação

$$T(X, V) = \nabla_X V - \nabla_V X - [X, V] \quad (3.8)$$

com $X, V \in T(M)$. Uma conexão é dita *simétrica* se

$$\nabla_X V - \nabla_V X = [X, V], \quad (3.9)$$

ou conexão *sem torção*. Em coordenadas locais temos

$$T(\partial_a, \partial_b) = \nabla_a \partial_b - \nabla_b \partial_a - [\partial_a, \partial_b] = 0, \quad (3.10)$$

nesse caso, as componentes da conexão são simétricas em relação à permutação dos índices inferiores, isto é,

$$\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c. \quad (3.11)$$

Com a introdução do transporte paralelo temos um meio de comparar vetores em pontos distintos da variedade. Fazemos isso com o uso da conexão ∇ que é uma aplicação que "conecta" os espaços tangentes desses pontos distintos. Se a variedade for munida de um *produto interno*, então a conexão permite comparar comprimento de vetores em diferentes pontos.

3.2 Geometria riemanianna

Para munir a variedade com o produto interno mencionado anteriormente, introduzimos o conceito de *métrica riemanianna* que possibilita o produto interno nos espaços tangentes $T(M)$ da variedade.

Uma métrica riemanniana em um variedade M é uma correspondência que associa à cada ponto $P \in M$ um produto interno $g(\cdot, \cdot)$, ou seja uma forma bilinear positiva definida, no espaço tangente $T_P(M)$. g é diferenciável no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas na vizinhança de P com $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ então $g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ é uma função diferenciável em U [24].

É claro que essa definição não depende da escolha do sistema de coordenadas. Uma outra forma de expressar a diferenciabilidade da métrica é dizer que para qualquer par de campos vetoriais X, Y que são diferenciáveis na vizinhança V de M , a função $g(X, Y)$ é diferenciável em V [24].

Se g é uma métrica riemanniana, dizemos que o par M, g é uma *variedade riemanianna*. Numa variedade riemanniana temos o caso em que a conexão é compatível com a métrica $g(\cdot, \cdot)$, isto é fato matemático que é justificado pelo teorema de Levi-Civita que estabelece: uma conexão é compatível com a métrica, se e somente se, para quaisquer vetores V e W ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ tivermos

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right). \quad (3.12)$$

É instrutivo demonstrarmos esse teorema a partir do lado direito. Para tanto, escolhamos uma base ortonormal $\{\partial_1(t_0), \dots, \partial_n(t_0)\}$ de $T_{\gamma(t_0)}(M)$, $t_0 \in I$. Usando o resultado obtido em (3.5) podemos estender os vetores $\partial_a(t_0)$, $a = 1, \dots, n$, ao longo de γ por transporte paralelo. Temos com isso que $\partial_a(t)$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}(M)$ para todo $t \in I$. Escrevendo, então, $V = V^a \partial_a$ e $W = W^b \partial_b$, onde V^a, W^b são funções diferenciáveis em I , segue-se que

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dV^a}{dt} \partial_a, \quad \frac{DW}{dt} = \frac{dW^b}{dt} \partial_b.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) &= W^b \frac{dV^a}{dt} g(\partial_a, \partial_b) + V^a \frac{dW^b}{dt} g(\partial_a, \partial_b) \\ g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) &= g_{ab} \frac{d(W^b V^a)}{dt} \\ &= \frac{d(g_{ab} W^b V^a)}{dt} - W^b V^a \frac{dg_{ab}}{dt} \end{aligned} \quad (3.13)$$

e a compatibilidade da conexão com a métrica é satisfeita se e somente se o segundo termo de (3.13) for nulo de modo que para qualquer curva suave γ dados dois campos vetoriais, V e W , ao longo de γ

$$g(V, W) = \text{constante}, \quad (3.14)$$

ou seja, o tensor métrico é constante sob derivação covariante,

$$\nabla_c g_{ab} = 0. \quad (3.15)$$

Sendo uma relação independente do sistema de coordenadas, podemos escrevê-la como

$$\nabla g = 0. \quad (3.16)$$

Essa é a condição que caracteriza a geometria Riemanniana, uma conexão que é compatível com a métrica.

3.3 Geometria de Weyl

O que Hermann Weyl fez em 1918 [27] foi considerar o segundo termo de (3.13) como sendo diferente de zero. Com isso o produto interno de vetores não é mais um invariante por transporte paralelo e, assim como as *direções*, numa variedade riemanniana, os comprimentos *variam* com uma lei que é dada pela conexão .

Na geometria riemanianna a presença de uma métrica $g_{\mu\nu}$ dependente das coordenadas, determina a curvatura que modifica as direções de campos vetoriais transportados ao longo de uma curva. Na geometria de Weyl um novo objeto geométrico é introduzido para alterar os comprimentos quando transportados ao longo de uma curva. Esse objeto é um campo de 1-forma $\sigma \in T^*(M)$, onde os $T^*(M)$ são os conjuntos dos 1-formas, covetores, de classe C^∞ da variedade M . Devido à dependência com a conexão, esse c novo campo dá origem à uma curvatura weylana que é responsável por alterar os comprimentos.

Voltando à equação (3.13), a sugestão de Weyl no segundo termo é fazer

$$\frac{dg_{ab}}{dt} = \sigma_c \frac{dx^c}{dt} g_{ab}, \quad (3.17)$$

com isso temos a que derivada covariante da métrica fica

$$\nabla_c g_{ab} = g_{ab} \sigma_c. \quad (3.18)$$

A tríade (M, g, σ) que caracteriza uma variedade weylana, será designada por *referencial de Weyl*. Notemos que a condição (3.18) permanece inalterada quando vamos a outro referencial de Weyl $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$ realizando as seguintes transformações simultâneas em g e em σ :

$$g'_{\mu\nu} = e^{-\psi} g_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

$$\sigma'_c = \sigma_c + \partial_c \psi. \quad (3.20)$$

Juntas, (3.19) e (3.20) formam as *transformações de calibre* geométricas.

Os coeficientes da conexão não são mais expressos inteiramente em função dos símbolos de Christoffel e se alteram em consequência de (3.18). Usando a definição da derivada covariante de um tensor covariante de segunda ordem em (3.18) temos

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma_{ac}^e g_{eb} - \Gamma_{bc}^e g_{ae} = g_{ab} \sigma_c \quad (3.21)$$

Permutando os três índices a, b, c temos mais duas equações

$$\partial_a g_{cb} - \Gamma_{ac}^e g_{eb} - \Gamma_{ba}^e g_{ce} = g_{cb} \sigma_a \quad (3.22)$$

$$\partial_b g_{ac} - \Gamma_{ab}^e g_{ec} - \Gamma_{cb}^e g_{ae} = g_{ac} \sigma_b \quad (3.23)$$

somando (3.23) e (3.22) subtraindo (3.21) temos a expressão dos coeficientes da conexão dados por

$$\Gamma_{ab}^d = \{^d_{ab}\} - \frac{1}{2} g^{dc} (\sigma_b g_{ca} + \sigma_a g_{bc} - \sigma_c g_{ab}) \quad (3.24)$$

onde os $\{\bar{\Gamma}_{ab}^d\}$ são os símbolos de Christoffell. Note que usando as transformações de gauge inversas de (3.19) e (3.20) em (3.24) para outro referencial (M, g', σ') com coeficientes da conexão $\bar{\Gamma}_{ab}^d$ obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab}^d &= \frac{1}{2}(g'^{dc}e^f)\{\partial_b(g'_{ca}e^{-f}) + \partial_a(g'_{bc}e^{-f}) - \partial_c(g'_{ab}e^{-f})\} \\ &\quad - \frac{1}{2}(g'^{dc}e^f)\{(\sigma'_b - \partial_b f)(g'_{ca}e^{-f}) + (\sigma'_a - \partial_a f)(g'_{bc}e^{-f}) - (\sigma'_c - \partial_c f)(g'_{ab}e^{-f})\}, \\ &= \frac{1}{2}g'^{dc}\{\partial_b g'_{ca} + \partial_a g'_{bc} - \partial_c g'_{ab}\} - \frac{1}{2}g'^{dc}\{g'_{ca}\partial_b f + g'_{bc}\partial_a f - g'_{ab}\partial_c f\} \\ &\quad - \frac{1}{2}g'^{dc}\{\sigma'_b g'_{ca} + \sigma'_a g'_{bc} - \sigma'_c g'_{ab}\} + \frac{1}{2}g'^{dc}\{g'_{ca}\partial_b f + g'_{bc}\partial_a f - g'_{ab}\partial_c f\}.\end{aligned}$$

Como o segundo e quarto termos se cancelam, ficamos com a mesma expressão no outro referencial

$$\Gamma_{ab}^d = \bar{\Gamma}_{ab}^d. \quad (3.25)$$

De modo que a conexão é um invariante sob transformações de gauge simultâneas. Um resultado importante que segue disso é o seguinte. Consideremos a equação de geodésica afim

$$\frac{d^2 x^a}{d\xi^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\xi} \frac{dx^c}{d\xi} = 0 \quad (3.26)$$

onde ξ é um parâmetro afim e $x^a = x^a(\xi)$ representa as equações paramétricas local da geodésica. Como mostramos acima os coeficientes da conexão são invariantes de calibre, as componentes de deslocamento dx^a não mudam pois não estamos fazendo uma mudança de coordenadas, portanto sob as transformações de calibre (3.19) e (3.20), a *equação de geodésica* acima é também *um invariante de calibre*.

Vejamos uma importante propriedade do transporte paralelo na geometria de Weyl. Uma consequência direta de (3.18) é que, se esta equação é válida para qualquer curva diferenciável, $\gamma = \gamma(\xi)$, com tangente $\frac{d}{d\xi} = X$ e qualquer par de campos de vetores paralelos V e U ao longo de γ , temos

$$\nabla_X g(V, U) = \frac{d}{d\xi}(g_{bc}V^b U^c) = \frac{d}{d\xi}g(V, U). \quad (3.27)$$

Por outro lado

$$V^b U^c X^a \nabla_a g_{bc} = g_{bc} V^b U^c X^a \sigma_a = \sigma\left(\frac{d}{d\xi}\right)g(V, U) \quad (3.28)$$

onde em (3.28) usamos que $X = X^a \partial_a$, $\sigma = \sigma_a dx^a$, com os diferenciais dx^a sendo a base dos vetores covariantes e dual aos ∂_a de modo que $dx^a(\partial_b) = \delta_b^a$. Ficamos, portanto, com

$$\frac{d}{d\xi}g(V, U) = \sigma\left(\frac{d}{d\xi}\right)g(V, U). \quad (3.29)$$

Se integramos a equação acima ao longo da curva γ a partir de $P = \gamma(\xi_0)$ obtemos

$$g(V(\xi), U(\xi)) = g(V(\xi_0), U(\xi_0))e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \sigma\left(\frac{d}{d\xi}\right)d\xi}. \quad (3.30)$$

Fazendo $U = V$ e denotando por $l(\xi)$ o comprimento do vetor V em um ponto $P = \gamma(\xi_0)$ temos a seguinte relação entre o comprimento $l(\xi_0)$ no ponto P e $l(\xi)$ no ponto Q :

$$l^2(\xi) = l^2(\xi_0)e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \sigma\left(\frac{d}{d\xi}\right)d\xi}. \quad (3.31)$$

Em coordenadas locais temos

$$l(\xi) = l(\xi_0) e^{\frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} \sigma_a \frac{dx^a}{d\xi} d\xi}. \quad (3.32)$$

Vemos assim que a variação no comprimento de vetores é dada explicitamente pela quantidade σ e depende da curva que estamos usando. É exatamente nesse ponto que a crítica de Einstein sobre a teoria de Weyl toma lugar: Consideremos que dois relógios idênticos sejam sincronizados em um ponto P do espaço-tempo. De acordo com a relatividade geral se esses dois relógios viajam até um outro ponto Q por trajetórias distintas, efeitos gravitacionais pode causar a perda de sincronismo entre eles, esse é o chamado *primeiro efeito do relógio* [29]. Na teoria de Weyl, devido à diferentes variações das unidades de medidas ao longo dos dois diferentes caminhos, a discrepância entre medidas de tempo em Q se junta então à perda de sincronização, esse é o chamado *segundo efeito do relógio* [29].

Uma forma de escapar desse segundo efeito é impor que os relógios meçam os mesmos valores numa curva fechada. Com isso, ao invés de (3.31), temos a condição que

$$\oint \sigma \frac{d}{d\xi} d\xi = 0. \quad (3.33)$$

Para que esta equação seja satisfeita o vetor σ deve ser expresso como a diferencial de uma função escalar, $\sigma = d\psi$, de modo que temos $\sigma = \sigma_a dx^a = \partial_a \psi dx^a$, substituindo isto na equação (3.33) acima ficamos com

$$\begin{aligned} \oint \sigma_a dx^a \frac{dx^b}{d\xi} \partial_b d\xi &= 0 \\ \oint \frac{\partial \psi}{\partial x^b} \frac{dx^b}{d\xi} d\xi &= 0 \\ \oint \frac{d\psi}{d\xi} d\xi &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

e a última linha nos mostra uma identidade que é sempre verdade para uma curva fechada. Voltando agora para (3.32) temos a condição

$$l(\xi) = l(\xi_0) e^{\frac{1}{2}(\psi(\xi) - \psi(\xi_0))}, \quad (3.35)$$

ou seja, a variação dos comprimentos não é mais dependente da trajetória mas somente dos valores iniciais e finais do campo escalar ψ . Desde que somente diferenças no campo ψ implicam na variação de comprimento, a fixação do valor de $\psi(\xi_0)$ é arbitrária e podemos convenientemente escolher $\psi(\xi_0) = 0$.

No caso particular em que

$$\sigma' = 0 \quad (3.36)$$

recuperamos a geometria Riemanniana com $\nabla g' = 0$, portanto designaremos essa escolha específica para σ' , seguindo [3], de *calibre Riemanniano* e representamos por $(M, g', 0)$. Fazendo as transformações de gauge simultâneas (3.19) e (3.20) com a condição (3.36) temos

$$\begin{aligned} \nabla g' &= 0 \\ \nabla(g e^f) &= 0 \\ \nabla g &= -g df \end{aligned} \quad (3.37)$$

e chegamos à condição de compatibilidade da geometria de Weyl, ou $(M, g, -df)$.

Temos, então, um conjunto de transformações, com gauge específico, que relacionam as geometrias Riemanniana e de Weyl(integrável), e como vimos, essas duas diferentes geometrias compartilham a mesma estrutura geodésica, uma vez que a conexão afim é invariante sob transformações de gauge(propriedade Weyliana) e as geodésicas métrica e afim são iguais(propriedade Riemanniana).

Podemos discutir as teorias gravitacionais abordadas nos capítulos 1 e 2, que foram discutidas num contexto de geometria Riemanniana, agora no contexto da geometria de Weyl, e veremos que quando assumimos a configuração para o espaço-tempo de Weyl de métrica plano e campo vetorial definido pelo gradiente de um escalar obtemos uma teoria gravitacional idêntica à teoria de Nordström, faremos isso na próxima sessão, analisando os espaços conformalmente planos.

3.4 Gravitação de Nordström interpretada como o Campo de Gauge de Weyl

Lembramos que, no contexto da formulação geométrica da teoria de Nordström, temos uma variedade riemanniana M com métrica $g_{\mu\nu}$ que induz uma curvatura medida pelo tensor de curvatura riemanniana, definido no capítulo anterior. Com a equação escrita em termos das quantidades invariantes, $R = g^{bd}R^a_{bad}$ e $T = g^{ab}T_{ab}$, temos uma teoria que satisfaz a exigência de covariância sob transformações gerais de coordenadas e utiliza o Princípio de Equivalência para descrever o fenômeno da gravitação como pura e simples manifestação do *espaço curvo*. Vimos que quando a métrica adquire a forma especial de uma métrica conformalmente plana

$$g = \phi^2 \eta, \quad (3.38)$$

com um único grau de liberdade, ϕ , representando o potencial gravitacional, ou o que é equivalente, o elemento de linha

$$ds' = \phi ds, \quad (3.39)$$

reproduzimos a equação de campo da teoria escalar de Nordström. No contexto do que foi discutido no final da seção anterior, estamos no dito *referencial riemanniano* $(M, g, 0)$, onde o campo de Weyl é nulo,

$$\nabla g = 0, \quad (3.40)$$

e as componentes da conexão Γ^a_{bc} coincidem com os símbolos de Christoffel $\{\Gamma^a_{bc}\}$. Substituindo (3.38) em (3.40) chegamos no referencial de Weyl $(M, \eta, -d(2\ln\phi))$, com

$$\nabla \eta = -\eta d(2\ln\phi). \quad (3.41)$$

Do ponto de vista de curvatura riemanniana, no referencial de Riemann $(M, g, 0)$, a variedade é dotada de uma métrica que leva à curvatura que foi calculada no capítulo 2, enquanto que no frame de Weyl, $(M, \eta, -d(2\ln\phi))$, sendo a métrica plana, temos curvatura riemanniana nula [3]. No entanto, a presença do campo geométrico de Weyl ϕ gera um termo de curvatura devido à dependência que há entre a conexão e esse campo. Vejamos como a curvatura aparece no referencial de Weyl. De uma maneira geral podemos separar a conexão afim em duas partes

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\} - \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\gamma \sigma_\beta + \delta^\alpha_\beta \sigma_\gamma - \eta_{\gamma\beta} \sigma^\alpha). \quad (3.42)$$

Por outro lado o tensor de Riemann $\mathcal{R}$, é função da conexão afim e de suas derivadas e pode ser decomposto em duas partes, uma parte sendo a parte da curvatura riemanniana $\bar{\mathcal{R}}$ e outro termo que depende do campo de Weyl $\mathcal{R}_W$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} = \bar{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} + R_W^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon}. \quad (3.43)$$

Sendo a métrica plana, temos os símbolos de Christoffel nulos e portanto $\bar{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} = 0$, e usando a conexão (3.42) com a notação simplificada $-d(2\ln\phi) = d\psi$ e $\partial_\mu\psi = A_\mu$ e $\partial_\mu\partial_\nu\psi = A_{\mu\nu}$ temos

$$\begin{aligned} R_W^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} &= \frac{1}{2}(A_{\gamma\beta}\delta_\epsilon^\alpha - A_{\epsilon\beta}\delta_\gamma^\alpha + A_\epsilon^\alpha\eta_{\beta\gamma} - A_\gamma^\alpha\eta_{\beta\epsilon}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\eta_{\beta\gamma}\delta_\epsilon^\alpha - \eta_{\beta\epsilon}\delta_\gamma^\alpha)A_\kappa A^\kappa \\ &\quad + \frac{1}{4}(A_\gamma A^\alpha\eta_{\beta\epsilon} + A_\epsilon A_\beta\delta_\gamma^\alpha - A_\epsilon A^\alpha\eta_{\beta\gamma} - A_\gamma A_\beta\delta_\epsilon^\alpha). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Contraindo o primeiro e o terceiro índices do tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{\beta\epsilon} = R_{\beta\alpha\epsilon}^\alpha &= -\frac{1}{2}[(n-2)A_{\beta\epsilon} + \eta_{\beta\epsilon}A_\alpha A^\alpha] + \\ &\quad \frac{1}{4}[(n-2)\eta_{\beta\epsilon}A_\alpha A^\alpha - (n-2)A_\beta A_\epsilon], \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde n é o número de dimensões do espaço-tempo. Contraindo os índices β e ϵ na equação acima obtemos o escalar de curvatura

$$R = g^{\beta\epsilon}R_{\beta\epsilon} = -(n-1)A_\beta A^\beta + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)A_\alpha A^\alpha. \quad (3.46)$$

Em termos das derivadas do campo ψ , temos

$$R = -(n-1)\square\psi + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi. \quad (3.47)$$

Para $n = 4$, temos

$$R = 3\square\psi - \frac{3}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial^\alpha\psi\partial^\beta\psi. \quad (3.48)$$

Vamos agora mostrar que na geometria de Weyl integrável temos uma teoria de gravidade escalar equivalente à teoria de Nordström. Para isso, vamos usar novamente a equação escalar de Einstein-Grossman para o campo escalar ψ

$$R = 24\pi GT_E, \quad (3.49)$$

onde T_E indica que o traço é tomado com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$ da teoria de Einstein, como estamos usando o campo ψ deixaremos esse traço desta forma por enquanto. Mostraremos que dessa equação é possível derivarmos a equação de campo de Nordström quando fizermos a mudança para o referencial de Weyl $(M, \eta, d\psi)$, onde o campo gravitacional que surge não é devido à métrica, mas ao campo geométrico de Weyl.

Substituindo a expressão do escalar de curvatura (3.48) na equação (3.49), ficamos com

$$\partial^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\partial^\mu\psi\partial_\mu\psi = 8\pi GT_E. \quad (3.50)$$

Multiplicando os dois lados por $\frac{e^{-\frac{\psi}{2}}}{2}$ podemos reescrever a equação acima na forma

$$e^{\frac{\psi}{2}} \partial^\mu \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{\psi}{2}} \partial_\mu \psi \right) = 4\pi G T_E. \quad (3.51)$$

Simplificando ainda mais uma vez a derivada e fazendo a substituição de ψ para o campo original $\phi = e^{\frac{\psi}{2}}$, que fizemos no início do capítulo, $\phi = e^{\frac{\psi}{2}}$, temos

$$-\frac{1}{\phi} \partial^\alpha \partial_\alpha \phi = 4\pi G T_E. \quad (3.52)$$

Notemos que o traço do tensor momento-energia do lado direito é definido com a métrica $g^{\mu\nu} = \phi^{-2} \eta^{\mu\nu}$. Passando então para o traço com a métrica de Minkowski, $T_E = \frac{T_M}{\phi^2}$ ficamos com

$$\phi \square \phi = -4\pi G T_M. \quad (3.53)$$

obtemos assim a equação de campo da teoria de Nordström. Portanto temos o campo de Weyl, uma grandeza geométrica, se comportando de modo semelhante, ou equivalente ao campo gravitacional da Teoria de Nordström, que surge como o fator conforme na teoria de Einstein-Grossman. Evidenciando assim a estreita relação que há entre espaços conformalmente planos, geometria de Weyl integrável no espaço-tempo de Minkowski, e o espaço de Minkowski permeado por um campo físico, devido à presença de matéria. No que se segue, continuaremos a evidenciar a inter-relação entre esses três formalismos fundamentalmente distintos.

No que diz respeito à geodésicas, como já foi mostrado anteriormente, a equação do movimento de partículas são idênticas no referencial de Weyl $(M, \eta, d\phi)$ e o referencial de Riemann $(M, g, 0)$. Como vimos no capítulo 2 estas equações de movimento são dadas por

$$\dot{u}^\mu + \frac{2}{\phi} u^\mu \dot{\phi} = \frac{1}{\phi^3} \partial^\mu \phi. \quad (3.54)$$

onde o ponto indica derivada com respeito ao tempo próprio. Notemos que a equação de geodésica é "observada" no espaço-tempo de Minkowski, e como sabemos essa estrutura é alterada pela presença do campo ϕ (efeito observado na teoria de Nordström e também na teoria conforme de Einstein-Fokker), fazendo então uma reparametrização no tempo próprio, $d\tau' = \phi d\tau$, "enxergamos" a geodésica da forma

$$\phi \ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu \dot{\phi} = \partial^\mu \phi. \quad (3.55)$$

que é idêntica à equação de movimento de Nordström, ou seja, á geodésica métrica.

3.4.1 Efeitos sobre a matéria, relógios e comprimentos

Assim com fizemos no capítulo 1, evidenciando os efeitos que o campo gravitacional escalar tinha sobre os corpos, através do stress relativístico (ou inércia da energia), faremos agora com o campo de Weyl pois, como já sabemos, esse campo foi introduzido originalmente para alterar os comprimentos quando deslocado através do espaço-tempo.

A relação exata de como ocorre essa variação já foi encontrada na seção 2, dada pela equação (3.31), que repetimos aqui

$$l(\lambda) = l(\lambda_0) e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma(\frac{d}{d\lambda}) d\lambda}. \quad (3.56)$$

No gauge de Riemann que estamos usando, o fator conforme é dado por $\sigma = d\psi = -d(2\ln\phi)$, portanto

$$l\phi = \text{constante}, \quad (3.57)$$

e o campo de Weyl integrável, ϕ , altera os comprimentos do mesmo modo que o campo gravitacional na teoria de Nordström (veja última seção do capítulo 1). Os relógios também são alterados independentemente do caminho percorrido pelo relógio, sendo o espaço tempo integrável, o que equivale dizer que o potencial $\phi(x)$ gera um campo conservativo, que quando retornamos ao ponto inicial temos o tamanho, ou padrão de distâncias inicial.

Conclusão

Nessa dissertação mostramos que a teoria escalar da gravitação de Nordström pode ser descrita no contexto da geometria de Weyl. Assim fica evidente a estreita relação entre o *campo físico* responsável pela interação gravitacional na teoria de Nordström e o *campo de Weyl*, que é introduzido para munir a variedade M com *transformações de calibre*. No que diz respeito à estrutura de geodésica, sendo invariante sob as transformações de calibre, essas teorias têm equações de movimento idênticas, desde que tenhamos o cuidado de descrevê-las com o mesmo parâmetro pois o tempo próprio não invariante sob as transformações de calibre.

Chamamos a atenção para o fato de que a descrição da teoria de Nordström como uma manifestação de transformações de calibre na geometria de Weyl foi possível graças à formulação riemanniana devido à Einstein e Fokker, pois assim é possível identificarmos o referencial de riemann como um caso particular da geometria de Weyl em que o campo de Weyl é nulo, e daí realizar a transformação de calibre em que passamos de um espaço com métrica conformalmente plana para o espaço plano, transferindo a informação de *curvatura* da métrica para o campo de Weyl.

Podemos então entender três objetos matemáticos como sendo equivalentes: o campo escalar físico (teoria de Nordström), a função conforme de uma métrica conformalmente plana (formulação de Einstein-Fokker), e o campo de weyl (presente nas transformações de calibre). Como esses três objetos provêm de formulações distintas, a utilidade dos resultados dessa dissertação é ampla, visto que podemos reformular qualquer aspecto de uma geometria na outra e escolher onde é mais simples tratar certos problemas.

No campo de teorias da gravitação podemos investigar detalhadamente os modelos introduzindo fontes de matéria mais ricas como fluidos viscosos e campo eletromagnético, ou ainda o estudo de possíveis singularidades. Podemos ainda ampliar o estudo para outras métricas conformalmente relacionadas, não necessariamente planas. A teoria de gravitação escalar tem sido largamente utilizada como *toy model* para simulação de fenômenos físicos que são de difícil tratamento na Relatividade Geral, como solução exatas de ondas gravitacionais [18]. A presença de transformações conformes nas teorias aqui abordadas se conectam à trabalhos mais recentes como a teoria escalar-tensorial da gravidade.

Atualmente, no Grupo de Gravitação da UFPB, tem sido discutido as implicações da quantização desse campo escalar, visto que uma descrição quântica da gravidade tem sido objeto de estudo de muitos grupos de pesquisa em todo o mundo. Das teorias mais populares destacamos a Teoria M, um híbrido das teorias de cordas, gravitação quântica em laços e supergravidade.

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

- [1] - Wei-Tou NI *Theoretical framework for testing relativistic gravity IV* The Astrophysical Journal, **176**, 769, (1972)
- [2] Valerio Faraoni, *Cosmology in scalar-tensor gravity*, Kluwer Academics Publishers, Holanda (2004)
- [3] C. Romero, J.B. Neto-Fonseca, M.L. Pucheu *Confformally flat spacetimes, Weyl frames and scalar gravity*, Foundations of Physics **42**, 224 (2012)
- [4] J.M. Salim L.S. Sautú, *Gravitational theory in Weyl integrable spacetimes*, Classical and Quantum Gravity,**13**, 353, (1996)
- [5] J.Ehlers, F.Pirani e A.Schild, General Relativity, Ed. L.O’Raifeartaigh, Oxford, Clarendon, (1982)
- [6] G. Nordström, Ann der Phys. **40**, 856 (1913); Ann der Phys. **42**, 533 (1913)
- [7] A.Einstein, A.Fokker, *Nordström’s theory of gravitation from the point of view of the absolute differential calculus*, Ann. der Phys. **44**, 321 (1914)
- [8] John Norton, *Einstein, Nordström and the early demise of scalar Lorentz-covariant theories of gravitation*, Archive for the History of Exact Sciences, 45 (1992)
- [9] A. Einstein, Jahbuch der Radioaktivi6at und Elektronik, **4**, 411 (1907)
- [10] G. Nordström, Relativitätsprinzip und Gravitation, Physikalische Zeitschrift, **13** 1126-29, (1912)
- [11] John Norton, *Einstein and Nordström: Some lesser known thought experiments in gravitation*. In 'The Attraction of Gravitation: New Studies in History of General Relativity' John Earman, Michel Janssen, and John Norton, editors, Boston, MA, (1993). Birkäuser Verlag
- [12] Michael Janssen, *No success like failure:Einstein’s quest for general relativity, 1907-1920* in 'Cambridge Companion to Einstein' Michael Janssen and Christoph Lehner (2008)
- [13] A.Einstein e Marcel Grossman, *Entwurf einer verallgemeinerten relativitatstheotie und einer theorie der gravitation*. Liepzig: B.G. teubner (1913)
- [14] Domenico Giulini, *What’s (not) wrong with scalar theories?*, Studies in Physlosofy and Modern physics **39**, 154, (2008)
- [15] Finn Ravndal,*Scalar Gravity and extras dimensions*, gr-qc/0405030

- [16] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* W.H. Freedman and Company, São Francisco (1973)
- [17] A.P. Lightmann, W.H. Press, R.H. Price, *Problem's book in relativity and gravitation*, Princeton University Press, Princeton (1975)
- [18] J-P. Bruneton, Tese de Doutorado Université Paris IV, tel-00315725(2007)
- [19] Y. Fugii, K. Maeda, *The Scalar-tensor Theory of Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2003)
- [20] A. Pais, *Subtle is the Lord...*, Oxford University Express, Oxford (1982)
- [21] M.P. Dabrowski, J. Garecki, D.B. Blaschke, *Conformal transformations and conformal invariance in gravitation*, Ann. of Phys. **18**,13 (2009)
- [22] R.Adler, M. Bazin, M Schiffer, *Introduction to general relativity*, McGraw-Hill (1975)
- [23] A. Einstein,F. Lorentz, H. Minkowski, H. Weyl,*Principle of relativity*,dover Publications, Inc. (1923)
- [24] Manfredo Perdigão do Carmo **Riemannian geometry**, Birkhauer Boston (1992)
- [25] H. Weyl,*Space, Time, Matter*, dover, Nova Iorque, (1952)
- [26] O. Grøn, S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity*, Springer (2007)
- [27] H.Weyl, Sitzung. Preuss. Akad. Wiss, **465**, (1918)
- [28] Roger Penrose, *The road of reality*, Jonathan cape, Londres, (2004)
- [29] Mario Novello, *Theoretical Cosmology* in Proceedings of VII Brazillian School of Cosmology and Gravitation, Mario Novello ed., Editions Frontieres, Rio de Janeiro (1994)